Г.А.СИПАЙЛОВ, Е.В.КОНОНЕНКО, К.А.ХОРЬКОВ

Электрические машины

(специальный курс)

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для
студентов вузов, обучающихся по
специальности «Электрические машины»

Москва
„Высшая школа"
1987

ББК 31.261
С64
УДК 621.313

Рецензенты:

кафедра «Электрические машины» Уральского политехнического института им. С. М. Кирова (зав. кафедрой проф. Н. С. Сиунов);

проф. В. А. Лифанов (Челябинский политехнический институт им. Ленинского комсомола)

Сипайлов Г. А. и др.

С64 Электрические машины (специальный курс): Учеб. для вузов по спец. «Электрические машины»/ Г. А. Сипайлов, Е. В. Кононенко, К. А. Хорьков — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1987.— 287 с.: ил.

В книге рассмотрены методы описания и математического исследования электрических машин. Приведены дифференциальные уравнения и методы их решения для машин постоянного тока, трансформаторов, синхронных и асинхронных машин при различных режимах работы. 2-е издание (1-е — 1975 г.) переработано и дополнено численными методами решения дифференциальных уравнений электрических машин с применением ЭВМ.

С $\frac{2302030000-175}{001(01)-87}$ 176—87

ББК.31.261
6П2.1.081

ПРЕДИСЛОВИЕ

Владение математической теорией электрических машин, методами аналитического и числового решения дифференциальных уравнений, моделирование переходных процессов на АВМ и ЦВМ, решение уравнений электромагнитного поля необходимы современному инженеру.

В основу книги положен курс лекций по электрическим машинам и математическим методам исследования электрических машин, читаемый авторами на протяжении многих лет в Томском политехническом институте, а также научно-исследовательские работы авторов в области расчета параметров и переходных процессов электрических машин.

Книга предназначена для студентов, изучающих электрические машины и знакомых с их теорией в объеме общего курса. В связи с этим в ней отсутствует описание конструкций электрических машин и принципа их действия.

Второе издание книги дополнено материалом, описывающим схемы и уравнения обобщенной электрической машины, численные методы решения систем дифференциальных уравнений на ЦВМ, несимметричные внезапные короткие замыкания синхронной машины, уравнения синхронной машины при работе от источника с переменным напряжением и частотой, исследование пуска асинхронного электродвигателя на ЦВМ, численные методы расчета электромагнитных полей.

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам кафедры электрических машин Уральского политехнического института им. С. М. Кирова (зав. кафедрой — проф Н. С. Сиунов) и проф. В. А. Лифанову (зав. кафедрой Челябинского политехнического института им. Ленинского комсомола), а также сотрудникам кафедры электрических машин Московского энергетического института, рецензировавшим первое издание (зав. кафедрой — проф. И. П. Копылов), за внимательный просмотр рукописи и ценные советы и замечания, способствовавшие улучшению книги. Все замечания и пожелания по книге просим направлять в адрес издательства: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Основные направления экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года предусматривают всемерное ускорение научно-технического прогресса. При этом планируется поднять машиностроение, важной частью которого является электромашиностроение, на качественно более высокий уровень. В двенадцатой пятилетке предполагается увеличить выпуск продукции электромашиностроения с темпом прироста в 1,3—1,6 раза выше, чем по машиностроению в целом.

Постоянно увеличивается мощность электроэнергетических установок и усложняются системы электроснабжения. Мощность современных тепловых электростанций достигает 4 млн. кВт, гидроэлектростанций — 6 млн. кВт. Непрерывно повышается удельное использование материалов мощных синхронных машин. Мощность единичных агрегатов достигает 640 МВт в гидрогенераторостроении и 1200 МВт в турбогенераторостроении. Проектируются гидрогенераторы мощностью 800—1000 МВт и турбогенераторы мощностью 2000 МВт.

При всяком изменении напряжений, приложенных к обмоткам электрических машин, параметров контуров обмоток или при изменении моментов на валу ротора возникают быстропротекающие переходные процессы, неизбежно сопутствующие эксплуатации электрических машин. Несмотря на ограниченность во времени, переходные процессы оказывают значительное влияние на состояние и работу электрических машин.

Переходные процессы, связанные с изменением токов в обмотках электрической машины при постоянной частоте вращения ротора, а также при взаимно неподвижных обмотках, например в трансформаторах, называют *электромагнитными переходными процессами*. Электромагнитные переходные процессы имеют место, например, при включении трансформатора в сеть, самовозбуждении генераторов постоянного или переменного тока.

Если переходные процессы в цепях обмоток электрической машины сопровождаются изменениями частоты вращения ротора, то такие переходные процессы называют *электромеханическими*. Электромеханические переходные процессы имеют место при пуске электрических двигателей, их реверсе или торможении и при различного вида регулировании рабочего процесса: изменении частоты вращения, сбросе или увеличении нагрузки. Электромеханическим переходным процессам стали уделять особое внимание в связи с развитием автоматизированного электропривода.

Ясное понимание физических явлений, имеющих место при переходных процессах электрических машин, умение давать количественную оценку изменениям значений токов, напряжений, моментов, прогноз поведения машины в таких режимах, как пуск, наброс и сброс нагрузки, работа при выпадении из синхронизма, необходимы современным инженерам для осуществления рационального проектирования электрических машин, надежных в любом режиме работы и выдерживающих аварийные ситуации.

Электрические машины и трансформаторы имеют много общего. Общность заключается в том, что все они основаны на использовании закона электромагнитной индукции. Любая электрическая машина и трансформатор могут быть представлены в виде совокупности магнитосвязанных электрических контуров. Это позволяет проводить математический анализ процессов в машине на базе теории обобщенной электрической машины. В развитие этой теории большой вклад внесли советские ученые М. И. Алябьев, А. А. Горев, Л. Н. Грузов, Е. Я. Казовский, И. П. Копылов.

В большинстве задач анализа машин переменного тока уравнения имеют периодические коэффициенты. При аналитических исследованиях переходных процессов в машинах переменного тока широко применяют методы замены переменных или методы преобразования координат. В результате преобразования из уравнений исключаются периодические коэффициенты, что существенно упрощает систему уравнений и ее решение. Заслуги советского ученого А. А. Горева в разработке теории преобразования уравнений машин переменного тока отмечены тем, что преобразованные уравнения синхронных машин называют уравнениями Парка — Горева.

Дифференциальные уравнения, описывающие электромеханические переходные процессы, как правило, нелинейны, что сопряжено с определенными трудностями при их решении. Применение вычислительных машин дает возможность без существенных упрощений и допущений интегрировать нелинейные дифференциальные уравнения.

Авторы не ставили себе целью осветить все возможные переходные процессы каждого типа электрических машин. Наибольшее внимание уделено принципам составления систем дифференциальных или операторных уравнений, описывающих переходные процессы; методам упрощения исходных уравнений, выделению главных явлений, определяющих поведение электрической машины в рассматриваемом режиме; преобразованию полученных уравнений к виду, удобному для решения; установлению начальных условий и, наконец, решению систем уравнений.

Теория переходных процессов электрических машин в настоящее время разработана достаточно глубоко в трудах советских ученых. Кроме отмеченных выше ученых большой вклад в развитие теории внесли А. И. Важнов, И. А. Глебов, Д. А. Городский, А. Г. Иосифьян, М. П. Костенко, Р. А. Лютер, Г. Н. Петров, И. М. Постников, И. И. Трещев и др. Исследованию переходных процессов посвящено большое количество работ зарубежных авторов, из которых отметим работы Б. Адкинса, Ч. Конкордиа, Г Крона, Т. Лайбля, Р. Парка, Р. Рихтера и Р. Рюденберга. В книге использованы не только труды названных авторов, но и многие другие, приведенные в списке литературы.

Работоспособность машин постоянного тока, в большинстве случаев работающих в переходных режимах (частых пусков, реверсов, торможения, широкого регулирования частоты вращения), во многом определяется состоянием их коллекторно-щеточного узла. Поэтому при проектировании машин постоянного тока, особенно машин больших мощностей, расчет процесса коммутации обязателен. В книге приведены нашедшие наибольшее признание аналитические методы исследования коммутации, разработанные в трудах советских ученых О. Г. Вегнера, М. Ф. Карасева и др.

Развитию методов расчета электромагнитных полей и параметров электрических машин большое внимание уделили в своих трудах Г. А. Гринберг, Я. Б. Данилевич, В. В. Домбровский, К. С. Демирчян, А. В. Иванов-Смоленский, О. В. Тозони, а также зарубежные ученые К. Бинс, Г. Бухгольц, П. Лауренсон, Д. Тегопулюс, М. Штрафль.

Магнитное поле электрической машины трехмерное, переменное во времени. Для аналитического решения общая система уравнений магнитного поля слишком сложна. Поэтому при исследовании электрических машин, как правило, единое магнитное поле машины разбивается условными границами на ряд локальных областей (воздушного зазора, паза с обмоткой, торца статора или лобовых частей обмотки). Магнитное поле в каждой из областей рассматривается независимо. Если нельзя пренебречь нелинейностью сред, применяются численные методы решения уравнений магнитного поля, которые могут эффективно использоваться и для решения линейных задач в случаях, когда аналитические методы оказываются слишком сложными. На расчете магнитных полей базируется определение параметров электромагнитных сил и потерь в электрических машинах.

Раздел первый

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1.1. Основные допущения, принимаемые при математическом исследовании электрических машин

Явления, происходящие в электрических машинах при переходных процессах, настолько сложны, что их математическое описание и исследование без ряда упрощений практически невозможно. Сложность исследования обусловлена тем, что кривая намагничивания нелинейна, параметры машины зависят от значения токов в обмотках, магнитодвижущие силы (МДС) обмоток распределены в пространстве несинусоидально и изменяются в зависимости от режима работы машины. Учет этих сложных взаимодействий приводит к громоздким системам нелинейных уравнений и делает задачу аналитического исследования процессов в электрической машине практически неразрешимой. Поэтому при исследованиях задачи решаются с некоторыми приближениями путем выявления главных факторов и пренебрежения второстепенными. В настоящее время при исследовании переходных процессов делается ряд общепринятых допущений, которые позволяют вместо реальной электрической машины рассматривать некоторую идеализированную.

Идеализированная электрическая машина характеризуется: 1) отсутствием насыщения магнитной цепи, гистерезиса, потерь в стали; 2) отсутствием вытеснения тока в меди обмоток; 3) синусоидальным распределением в пространстве кривых МДС и магнитных индукций; 4) независимостью индуктивных сопротивлений рассеяния обмоток электрических машин от положения ротора; 5) полной симметрией обмоток статоров машин переменного тока и якорей машин постоянного тока.

Пренебрежение насыщением магнитной цепи и потерями в стали позволяет пользоваться линейной зависимостью между потоками и МДС. Результирующий поток нескольких контуров в этом случае можно определить как сложением МДС контуров и нахождением его по результирующей МДС, так и сложением потоков, созданных каждой МДС в отдельности. При отсутствии потерь в стали потоки совпадают по фазе с создающими их МДС и токами. Пренебрежение высшими гармоническими составляющими потока облегчает математическое исследование электрических машин.

Если необходимо учесть влияние одного из перечисленных факторов, то аналитическое исследование проводят с учетом этого фактора. Например, влияние насыщения в ряде случаев учитывается выбором параметров машины, соответствующих насыщенному состоянию ее магнитной цепи. В пределах рассматриваемого режима работы машины ее параметры считаются неизменными, что позволяет использовать принцип наложения. Влияние высших гармонических потоков, индуцирующих в обмотках ЭДС основной частоты, учитывается в расчетах изменением значения индуктивного сопротивления рассеяния обмоток.

Однако указанные допущения не всегда могут быть приняты. Например, насыщение должно учитываться при исследовании явления самовозбуждения и форсированного возбуждения электрических машин, рассмотрении влияния реакции якоря машины постоянного тока, определении тока включения трансформатора в сеть и т. д., так как в ином случае погрешности расчетов принимают недопустимые значения.

Идеализированная машина отличается от реальной тем, что каждая обмотка реальной машины или ее часть, образующая отдельную самостоятельную цепь, представлена в идеализированной машине одной катушкой. Этим катушкам в действительной машине может соответствовать большое число витков, распределенных под многими полюсами. Например, трехфазная обмотка статора машин переменного тока заменяется тремя катушками, расположенными относительно друг друга под углом $2\pi/3$. Демпферная обмотка синхронных машин (СМ), состоящая из большого числа стержней, в которых протекают различные по значению токи, заменяется двумя катушками, сдвинутыми относительно друг друга на угол $\pi/2$.

Указанные замены и допущения, идеализируя машину, позволяют, однако, сохранить в пределах допустимых отклонений действительную картину процессов, протекающих в реальной машине. Аналитические исследования можно упростить за счет следующих дополнительных допущений: 1) основная сеть постоянного или переменного тока, связанная с машиной, является сетью бесконечной мощности; 2) переменные напряжения, приложенные к зажимам обмоток, синусоидальны, а постоянные — неизменны. В тех случаях, когда это допущение неприемлемо, приложенные напряжения представляются в виде ряда составляющих и исследования производятся для каждой составляющей напряжения в отдельности с последующим применением принципа наложения; 3) при наличии в цепи токов нулевой последовательности их действие исследуют с помощью самостоятельной системы уравнений. При принятых ранее допущениях токи нулевой последовательности не влияют на результирующие потокосцепления и на момент вращения машины.

Опыт показывает, что аналитические исследования переходных процессов, выполненные на основе идеализированной машины, дают результаты, достаточно хорошо совпадающие с результатами экспериментов, а это позволяет использовать их для практических целей.

§ 1.2. Системы координатных осей

При математическом описании процессов, происходящих в электрических машинах, составляются уравнения равновесия напряжений обмоток и уравнения равновесия моментов на валу машины. Форма записи этих уравнений должна обеспечить наибольшую простоту и точность исследования различных режимов работы электрической машины. Во многом это определяется выбором системы координатных осей. За положительное направление тока в обмотках идеализированной машины принимается направление от конца катушки к ее началу; за положительное направление оси обмотки или отдельных ее частей, образующих самостоятельные цепи, — направления векторов МДС катушек при протекании токов в положительном направлении (рис. 1.1, *а*).

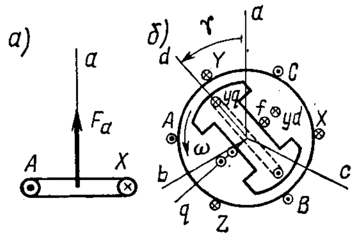

Рис. 1.1. Координатные оси отдельной катушки (*а*) и электрической машины (*б*)

При питании симметричной трехфазной обмотки симметричным трехфазным напряжением векторы МДС фаз образуют трехлучевую звезду. При направлении вращения результирующей МДС обмотки против часовой стрелки, которое принимается за положительное, чередование векторов МДС фаз будет следующее: *a*, *b*, *c*. За положительное направление осей фаз трехфазной обмотки принимаются положительные направления МДС соответствующих катушек идеализированной машины, как это показано на рис. 1.1, *б*.

Положительные направления фазных осей многофазных роторов электрических машин определяются так же, как и в многофазном статоре. В случае явнополюсного ротора применяется ортогональная система осей. При этом различают продольную ось d ротора, совпадающую с положительным направлением вектора МДС обмотки возбуждения, и поперечную ось q. Положительное направление оси q принимается опережающим продольную ось ротора на угол $\pi/2$.

Если на роторе имеется демпферная обмотка, то она представляется двумя контурами. При положительном направлении тока в контурах демпферной (успокоительной) обмотки вектор МДС и ось контура yd совпадают с осью d ротора, а вектор МДС и ось контура yq — с осью q ротора.

Проекции векторов всех величин, совпадающие с положительными направлениями координатных осей, считаются положительными. За положительное направление вращения ротора машины принимают его вращение против часовой стрелки, а за положительное направление отсчета углов — направление, совпадающее с положительным направлением вращения ротора. Текущий угол γ поворота ротора отсчитывается от оси фазы a до продольной оси d ротора.

Выбор координатных осей a, b, c для обмотки статора машины переменного тока не является единственно возможным. Чтобы получить дифференциальные уравнения равновесия напряжений с постоянными коэффициентами при неизвестных, рекомендуется применять такую ортогональную систему координатных осей, в которой преобразованные контуры обмоток статора и ротора взаимно неподвижны. Например, для СМ используется преобразованная система координат, неподвижная относительно осей d и q, жестко связанных с ротором. Для электрических машин с постоянным воздушным зазором, например асинхронного электродвигателя (АД), в зависимости от частоты вращения координатных осей кроме осей d, q, жестко связанных с ротором, возможны следующие системы ортогональных осей:

1) оси α, β, неподвижные в пространстве, при этом ось α совпадает с осью фазы a статора;

2) оси u, v, вращающиеся синхронно.

В машинах постоянного тока принимают ось d направленной по оси основных полюсов машины, а ось q — по линии щеток, стоящих на геометрической нейтрали.

Подробная классификация координатных осей и анализ их применения при исследовании переходных процессов электрических машин выполнены М. И. Алябьевым [2].

§ 1.3. Изображающие векторы

При питании трех фаз, сдвинутых в пространстве относительно друг друга на $2\pi/3$ эл. рад, симметричным напряжением в фазах возникают токи, сдвинутые относительно друг друга на $2\pi/3$ эл. рад во времени и создающие в воздушном зазоре машины круговое вращающееся магнитное поле. Частота вращения магнитного поля и распределение поля в пространстве строго соответствуют закону изменения токов в фазах.

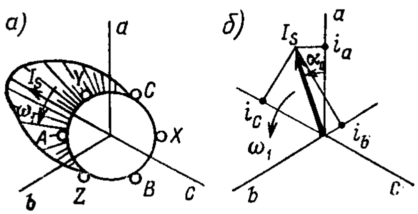

Рис. 1.2. Пространственные диаграммы распределения магнитного поля (*а*) и определение токов фаз с помощью изображающего вектора (*б*)

Из центра трехфазной системы координат проведем вектор, направленный в сторону положительного максимума кривой распределения магнитного поля, причем длину вектора примем пропорциональной амплитуде фазного тока (рис. 1.2, *а*). При синхронном вращении этого вектора с вращающимся магнитным полем в положительном направлении проекции вектора на координатные оси (рис. 1.2, *б*) будут соответствовать закону изменения фазных токов:

$$\left.\begin{aligned} i_a &= I_{1m}\cos(\omega_1 t + \alpha_0); \\ i_b &= I_{1m}\cos(\omega_1 t + \alpha_0 - 2\pi/3); \\ i_c &= I_{1m}\cos(\omega_1 t + \alpha_0 + 2\pi/3), \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где I_{1m} — амплитуда фазного тока; ω_1 — частота изменения тока, равная угловой частоте вращения вектора $\mathbf{I}_s$; α_0 — фазный угол тока i_a в момент времени $t = 0$, одновременно это угол смещения вектора $\mathbf{I}_s$ относительно оси фазы a.

Таким образом, с помощью вектора $\mathbf{I}_s$ можно получать (изображать) симметричные синусоидальные токи фаз. Этот вектор называется вектором пространственной волны тока или просто *изображающим вектором тока* и его можно записать в виде

$$\mathbf{I}_s = I_{1m} \exp [j (\omega_1 t + \alpha_0)]. \tag{1.2}$$

В то же время

$$\mathbf{I}_s = (2/3) (i_a + a i_b + a^2 i_c), \tag{1.3}$$

где $a = \exp[j2\pi/3]$; $a^2 = \exp[j4\pi/3]$.

Если обмотка имеет нулевой провод и по нему протекают токи нулевой последовательности, то мгновенные значения токов фаз можно представить в виде сумм $i_a + i_0$, $i_b + i_0$, $i_c + i_0$, подставляя которые в (1.3) получим, что вектор $\mathbf{I}_s$ не зависит от тока в нейтрали, так как $i_0 = (1 + a + a^2) = 0$. Следовательно, ток нулевой последовательности необходимо учитывать особо.

Результирующий вектор МДС трехфазной обмотки в $^3/_2$ раза больше МДС отдельной фазы и по направлению совпадает с изображающим вектором тока. Аналогично, результирующее потокосцепление трехфазной обмотки в $^3/_2$ раза больше потокосцепления фазы. Поэтому изображающий вектор потокосцепления

$$\mathbf{\Psi}_s = (2/3) (\Psi_a + a\Psi_b + a^2\Psi_c), \tag{1.4}$$

где Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c — потокосцепление фаз.

В идеализированной машине векторы $\mathbf{I}_s$ и $\mathbf{\Psi}_s$ совпадают по фазе, поэтому

$$\mathbf{\Psi}_s = \Psi_{1m} \exp [j (\omega_1 t + \alpha_0)]. \tag{1.5}$$

Зная величину изображающего вектора потокосцепления, по формулам, аналогичным (1.1), можно определить потокосцепления фаз в любой момент времени. Аналогичным образом можно ввести понятия изображающих векторов напряжения и ЭДС. Принятая система векторного изображения токов, потокосцеплений, напряжений позволяет производить сложение или разложение соответствующих величин по правилам действий с векторами. В двухфазной системе координат изображающие векторы сохраняют свой смысл.

§ 1.4. Системы относительных единиц

При анализе различных режимов работы электрических машин, особенно при теоретических исследованиях переходных процессов, пользуются относительными единицами (о. е.). Если в системе физических единиц (в настоящее время обязательной является Международная система единиц — СИ) величины выражаются в именованных единицах (ампер, вольт, ом, ватт, вебер и т. д.), облегчающих раскрытие физического смысла полученных при расчете результатов, то в системе о. е. величины безразмерны и выражаются в долях базисных единиц.

Применение о. е. дает ряд преимуществ: 1) система уравнений электрической машины более проста по виду; 2) расчеты ведутся с числами, близкими к единице, что особенно важно при использовании ЦВМ; 3) облегчается контроль за правильностью расчета; 4) упрощаются сравнение поведения электрических машин в различных режимах работы, сравнение машин различных мощностей и типов. Появляется возможность установить общие закономерности поведения электрических машин в переходных режимах; 5) многие различные по своей сути физические величины выражаются одним и тем же числом. Например, зависимости напряжения, потокосцепления, потока, индукции в воздушном зазоре машины от МДС или тока возбуждения выражаются одной и той же кривой. В системе о. е. производная по времени одновременно является производной по текущему углу вращения ротора. Индуктивные сопротивления, коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции выражаются одними и теми же числами.

В качестве базисных величин для первичной обмотки трансформатора и обмотки статора электрической машины в системе о. е. выбираются номинальные значения фазных величин. Наиболее распространена следующая система базисных величин:

1. За базисные единицы напряжения и тока принимаются амплитуды фазных номинальных величин соответственно в вольтах и амперах:

$$U_б = E_б = U_{m\,ном}, \quad I_б = I_{m\,ном}.$$

2. За базисную единицу мощности принимается номинальная полная мощность всех фаз статора в ваттах:

$$P_б = mU_{ном}I_{ном} = (m/2)\,U_{m\,ном}I_{m\,ном} = (m/2)\,U_б I_б.$$

3. За базисную единицу частоты принимается номинальная частота сети в герцах:

$$f_б = f_{ном}.$$

4. За базисную единицу угловой частоты принимается

$$\omega_б = 2\pi f_б = \omega_1,$$

где ω_1 — синхронная угловая частота, выражаемая в эл. рад. При этом базисная частота вращения ротора (рад/с)

$$\Omega_б = \omega_б/p,$$

где p — число пар полюсов.

5. За базисную единицу времени принимается время, в течение которого синхронно вращающийся ротор повернется на 1 эл. рад:

$$t_б = 1/\omega_б.$$

Единицу базисного времени выражают в электрических радианах, называемых часто электрическими секундами, при этом 1 с = $= 2\pi f_б$ эл. с. Удобство выбора этой единицы времени заключается в том, что время и углы поворота ротора двухполюсной машины или результирующих векторов ЭДС, потокосцеплений и т. п. совпадают, а это придает анализу переходных процессов большую наглядность.

6. За базисную единицу момента принимают момент, создающий базисную мощность при базисной частоте вращения. Базисный момент выражается в ватт-секундах или в ватт-радианах:

$$M_б = P_б/\Omega_б = (P_б/\omega_б)\,p.$$

В этих же единицах выражается энергия, за единицу которой принимается энергия, вырабатываемая при базисной мощности и базисной угловой частоте в течение времени, равного времени поворота ротора на 1 рад. Это время для многополюсной машины равно $pt_б$, тогда

$$W_б = P_б p t_б = (P_б/\omega_б)\,p.$$

7. За базисную единицу сопротивления принимается ом:

$$z_б = U_б/I_б = U_{ном}/I_{ном}.$$

Базисное сопротивление используется при определении относительных величин как активных, так и индуктивных сопротивлений.

8. За базисную единицу индуктивности принимается генри:

$$L_б = z_б/\omega_б.$$

9. За базисную единицу потокосцепления принимается потокосцепление, индуцирующее в обмотке статора базисное напряжение при базисной угловой частоте,

$$\Psi_б = U_б/\omega_б = L_б I_б.$$

Базисное потокосцепление выражается в вольт-секундах или веберах.

Изложенная система относительных единиц предназначена для операций с параметрами обмотки статора электрической машины или первичной обмотки трансформатора. При выборе базисных величин для обмотки ротора (или вторичной обмотки трансформатора) следует стремиться, чтобы математические преобразования были простыми и не терялся физический смысл уравнений машины.

Наиболее полно этим требованиям удовлетворяет применение для обмоток ротора (вторичной обмотки трансформатора) той же системы о. е., что и для статора (первичной обмотки трансформатора). Для этого роторные обмотки должны быть приведены к обмоткам статора, а вторичная обмотка трансформатора—к первичной. В тех случаях, когда коэффициенты приведения обмотки ротора по какой-либо причине найти не удается, наиболее часто применяют систему с равными взаимными индуктивностями. В такой системе индуктивные сопротивления взаимоиндукции между статорными и роторными обмотками, а также между обмоткой возбуждения и демпферной обмоткой принимаются равными индуктивному сопротивлению реакции якоря x_{ad}. Из этого условия получают выражения для базисных единиц. Существуют и другие системы о. е., изложенные подробно в [2]. В дальнейшем, чтобы не вводить дополнительных индексов для обозначения величин и параметров в о. е., применение индексов будет оговариваться.

ГЛАВА 2. ПРИВЕДЕНИЕ ОБМОТОК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

§ 2.1. Коэффициенты приведения

Целесообразность приведения обмоток электрических машин и трансформаторов определяется: а) удобством расчета (для обмоток статора и ротора применяется одна система о. е.); б) возможностью составления эквивалентных электрических схем замещения электрических машин и трансформаторов; в) возможностью построения круговых диаграмм и т. д.

Обмотки статора и ротора электрических машин имеют в общем случае разные число фаз, число витков в фазе, распределение обмотки в пространстве. Для практических расчетов более удобно приводить обмотки ротора к статорной. Приведение обмоток заключается в том, что роторные обмотки пересчитывают на число фаз и число витков статорной обмотки. При этом энергетические соотношения в машине остаются без изменения. Чтобы обмотку ротора привести к обмотке статора, необходимо определить коэффициенты приведения токов m_i, напряжений m_u и сопротивлений m_z.

Коэффициенты приведения определяем из условия, что $I_2' = m_i I_2$; $U_2' = m_u U_2$; $z_2' = m_z z_2$. Тогда $m_i = I_2'/I_2$; $m_u = U_2'/U_2$; $m_z = m_u/m_i$.

В настоящее время используют два способа определения коэффициента m_i приведения токов [18], исходя из равенства основных гармонических: 1) МДС приведенной и реальной обмоток; 2) индукций в воздушном зазоре, созданных приведенной и реальной обмотками.

Наибольшее распространение получил первый способ, так как нет необходимости в расчете магнитных полей, созданных роторными обмотками. Этот способ используется при приведении роторных обмоток асинхронных машин (АМ), демпферных обмоток СМ, обмоток преобразователей частоты. Вторым способом пользуются при приведении обмоток возбуждения СМ.

Определение коэффициента m_i приведения тока из равенства основных гармонических МДС. Пусть обмотка статора многофазная ($m_1 \gg 3$) и равномерно распределена по окружности расточки статора. Амплитуда основной гармонической МДС этой обмотки

$$F_{1m} = (m_1/2)(4/\pi)[w_1/(2p)]k_{об1}I_{1m}, \tag{2.1}$$

где w_1 — число последовательно соединенных витков обмотки фазы статора; $k_{об1}$ — обмоточный коэффициент обмотки статора; p — число пар полюсов машины.

В случае многофазной обмотки ($m_2 \geqslant 3$), например фазного или короткозамкнутого ротора трехфазного АД, амплитуда основной гармонической МДС его обмотки

$$F_{2m} = (m_2/2)\,(4/\pi)\,[w_2/(2p)]\,k_{об2} I_{2m}, \qquad (2.2)$$

где w_2 — число последовательно соединенных витков обмотки фазы ротора; $k_{об2}$ — обмоточный коэффициент обмотки ротора; I_{2m} — амплитуда тока, протекающего по обмотке фазы ротора.

В связи с тем что процесс приведения обмоток состоит в замене реальной обмотки некоторой эквивалентной, в которой число фаз, число витков и обмоточный коэффициент соответствуют той обмотке, к которой производится приведение, основная гармоническая МДС приведенной обмотки ротора

$$F_{2m} = (m_1/2)\,(4/\pi)\,[w_1/(2p)]\,k_{об1} I'_{2m}, \qquad (2.3)$$

где I'_{2m} — амплитуда приведенного тока ротора.

Приведенный ток ротора I'_2, протекая по приведенной роторной обмотке, должен создать такую же МДС, как и МДС реальной обмотки ротора. Поэтому коэффициент приведения m_i определяется из равенства выражений (2.2) и (2.3):

$$m_i = \frac{I'_2}{I_2} = \frac{(m_2/2)\,(4/\pi)\,[w_2/(2p)]\,k_{об2}}{(m_1/2)\,(4/\pi)\,[w_1/(2p)]\,k_{об1}} = \frac{m_2 w_2 k_{об2}}{m_1 w_1 k_{об1}}. \qquad (2.4)$$

В случае однофазной обмотки ротора амплитуда основной гармонической МДС

$$F_{2m} = (4/\pi)[w_2/(2p)]\,k_{об2} I_{2m}. \qquad (2.5)$$

Коэффициент приведения тока такой обмотки

$$m_i = (2/m_1)\,w_2 k_{об2}/w_1 k_{об1}. \qquad (2.6)$$

Определение коэффициента m_i приведения тока из равенства основных гармонических индукций. Пусть обмотка статора многофазная ($m_1 \geqslant 3$) и равномерно распределена по окружности расточки статора. Основная гармоническая МДС этой обмотки распределяется вдоль полюсного деления по синусоидальному закону, ее амплитуда определяется по (2.1). Ротор машины явнополюсный, воздушный зазор под полюсным наконечником b_p постоянен, обмотка ротора сосредоточенная, однофазная, ее МДС распределена на протяжении полюсного наконечника в воздушном зазоре машины по закону прямоугольника. Распределение индукции магнитного поля в воздушном зазоре на полюсном делении τ_1, создаваемой МДС обмоток статора (рис. 2.1, *а*) и ротора (рис. 2.1, *б*), определяется проводимостью воздушного зазора. Амплитуда основной гармонической индукции в воздушном зазоре, созданная обмоткой статора,

$$B_{1m1} = \lambda_\delta k_d F_{1m}, \qquad (2.7)$$

где λ_δ — магнитная проводимость воздушного зазора машины; $k_d = B_{1m1}/B_{ad}$ — коэффициент формы поля статора по продольной оси, равный отношению амплитуды основной гармонической

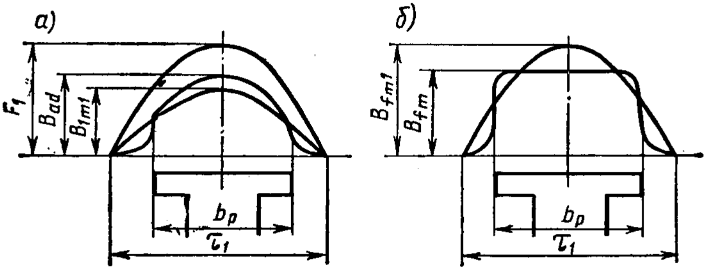

Рис. 2.1. Распределение индукции в воздушном зазоре машины

индукции к максимуму индукции поля обмотки статора при условии, что воздушный зазор постоянен.

Подставляя в (2.7) значение амплитуды основной гармонической МДС (2.1), получим

$$B_{1m1} = \lambda_\delta k_d (m_1/2)(4/\pi)[w_1/(2p)] k_{об1} I_{1m}. \qquad (2.8)$$

Основная гармоническая индукции магнитного поля в воздушном зазоре явнополюсной СМ, созданная сосредоточенной обмоткой возбуждения,

$$B_{fm1} = \lambda_\delta k_f w_f I_f, \qquad (2.9)$$

где $k_f = B_{fm1}/B_{fm}$ — коэффициент формы поля ротора по продольной оси, равный отношению амплитуды основной гармонической индукции к значению максимальной индукции поля обмотки ротора; w_f — число витков обмотки возбуждения на полюс; I_f — ток возбуждения.

Основная гармоническая индукции в воздушном зазоре машины, созданная приведенной обмоткой ротора,

$$B_{fm1} = \lambda_\delta k_d (m_1/2)(4/\pi)[w_1/(2p)] k_{об1} I'_f. \qquad (2.10)$$

Приведенный ток ротора I'_f, протекая по приведенной роторной обмотке, должен создать такую же амплитуду основной гармонической индукции, какую создает реальный ток ротора, протекающий в реальной обмотке возбуждения. Исходя из этого условия, приравниваем выражения (2.10) и (2.9) и определяем коэффициент приведения тока возбуждения:

$$m_i = I_f'/I_f = \lambda_\delta k_f w_f / \{\lambda_\delta k_d (m_1/2)\ (4/\pi)\ [w_1/(2p)]\ k_{об1}\} =$$
$$= \pi p k_f w_f / (m_1 w_1 k_{об1} k_d). \qquad (2.11)$$

Определение коэффициента приведения напряжений. Коэффициент приведения напряжений находим из условия, что полная мощность приведенной обмотки остается без изменения, т. е.

$$m_2 U_2 I_2 = m_1 U_2' I_2. \qquad (2.12)$$

Отсюда

$$m_u = U_2'/U_2 = m_2 I_2/(m_1 I_2') = (m_2/m_1)\,(1/m_i). \qquad (2.13)$$

В том случае, когда $m_2 \leqslant 2$, коэффициент приведения напряжений

$$m_u = (2/m_1)\,(1/m_i). \qquad (2.14)$$

Определение коэффициента приведения сопротивлений. Рассмотрим систему уравнений равновесия напряжений двух магнитосвязанных контуров, замкнутых на периодически изменяющиеся напряжения:

$$\dot U_1 = (r_1 + j\omega L_{11})\,\dot I_1 + j\omega L_{12}\,\dot I_2; \quad \dot U_2 = j\omega L_{21}\dot I_1 + (r_2 + j\omega L_{22})\,\dot I_2. \qquad (2.15)$$

Умножая правую и левую части второго равенства на коэффициент приведения напряжений m_u и в обоих уравнениях заменяя ток $\dot I_2$ на $\dot I_2'/m_i$, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot U_1 &= (r_1 + j\omega L_{11})\,\dot I_1 + j\omega L_{12}\,(\dot I_2'/m_i); \\ m_u \dot U_2 &= j\omega L_{21} m_u \dot I_1 + (r_2 + j\omega L_{22})\,m_u\,(\dot I_2'/m_i). \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= \omega L_{11}; \quad x_{22}' = \omega L_{22}\,(m_u/m_i); \\ r_2' &= r_2\,(m_u/m_i); \quad x_{12}' = \omega L_{12}/m_i = \omega L_{21} m_u, \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

где r_2' и x_{22}' — приведенные активное и индуктивное сопротивления вторичного контура; x_{12}' — приведенное сопротивление взаимной индукции контуров.

Тогда уравнения (2.16) примут вид

$$\dot U_1 = (r_1 + jx_{11})\,\dot I_1 + jx_{12}'\,\dot I_2'; \quad \dot U_2' = jx_{12}'\,\dot I_1 + (r_2' + jx_{22}')\,\dot I_2'. \qquad (2.18)$$

По изложенной методике можно определить коэффициенты приведения токов, напряжений и сопротивлений обмоток любой электрической машины.

§ 2.2. Замена короткозамкнутых обмоток ротора эквивалентными контурами

Если не ставится задача определения токов в стержнях ротора, то короткозамкнутые обмотки роторов машин переменного тока при составлении уравнений обычно заменяются двумя эквивалентными короткозамкнутыми контурами, расположенными по продольной и поперечной осям.

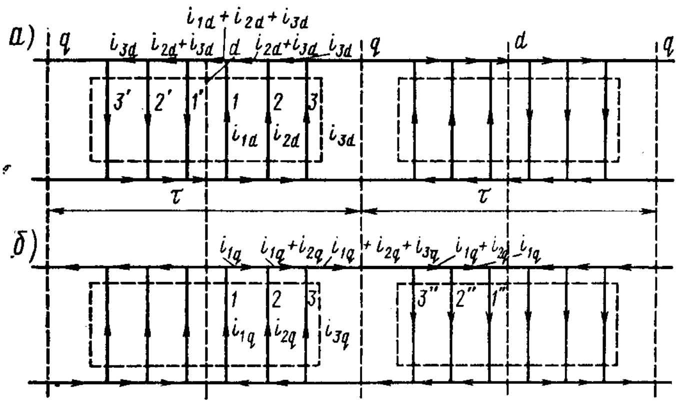

Рис. 2.2. Схема демпферной обмотки

Синхронные явнополюсные машины. Рассмотрим схему распределения токов в демпферной (успокоительной) обмотке по продольной (рис. 2.2, *а*) и поперечной (рис. 2.2, *б*) осям на двойном полюсном делении. На рисунке обозначено: i_{kd}, i_{kq} — продольная и поперечная составляющие токов в k-м стержне, протекающие по стержням, образующим пары *1—1'*, *2—2'*, *3—3'* (по продольной оси) и *1—1''*, *2—2''*, *3—3''* (по поперечной оси). При замене реальных демпферных обмоток эквивалентными исходят из равенства основных гармонических МДС. Для определения МДС, создаваемых реальными демпферными обмотками, необходимо знать пространственное распределение токов в стержнях обмотки. Создаваемые демпферными обмотками идеализированной машины МДС можно определить на основании схемы, представленной на рис. 2.3.

Если применить теорию двух реакций, то основную гармоническую МДС, созданную обмоткой статора, можно разложить на две составляющие: продольную F_d и поперечную F_q.

Составляющие токов в стержнях демпферной обмотки по продольной оси возникают под влиянием пульсирующего магнитного поля, созданного МДС F_d. При синусоидальном распределении МДС вдоль поверхности ротора максимальное значение тока будет в стержнях, смещенных от оси поля на расстояние половины полюсного деления $\tau_1/2$. В первом приближении можно принять распределение составляющих токов по оси d в стержнях демпферной обмотки синусоидальным. Тогда ток в любой паре стержней, смещенных от оси полюса на расстояние $\tau_k/2$ и образующих короткозамкнутый контур, равен максимальному току, умноженному на $\sin[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]$:

$$I_{kdm} = I_{ydm} \sin[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.19)$$

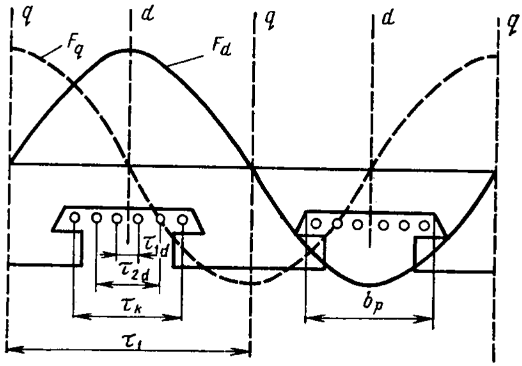

Рис. 2.3. Составляющие МДС обмотки статора

Ток I_{kdm}, протекая в k-й паре стержней, создает МДС, которая изменяется в пространстве по закону прямоугольника. Амплитуда основной гармонической этой МДС

$$F_{kdm} = \frac{4}{\pi} I_{kdm} \sin[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)] = \frac{4}{\pi} I_{ydm} \sin^2[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.20)$$

Амплитуда основной гармонической МДС на один полюс, созданная продольными составляющими токов в стержнях, определяется как сумма МДС всех короткозамкнутых контуров демпферной обмотки по продольной оси:

$$F_{ydm} = \sum_{k=1}^{n_c/2} F_{kdm} = \frac{4}{\pi} I_{ydm} \sum_{k=1}^{n_c/2} \sin^2[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.21)$$

Стержни на полюсах ротора, как правило, распределяются равномерно. Угол между двумя соседними стержнями обозначим через α_c. В этом случае независимо от числа стержней на полюсе (четном или нечетном)

$$\sum_{k=1}^{n_c/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau_1}\frac{\tau_k}{2}\right) = \frac{n_c}{4} - \frac{\sin(n_c\alpha_c)}{4\sin\alpha_c}. \qquad (2.22)$$

Тогда уравнение (2.21) представим в виде

$$F_{ydm} = (4/\pi)\, I_{ydm}\, [n_c/4 - \sin(n_c\alpha_c)/(4\sin\alpha_c)]\,. \tag{2.23}$$

Если принять, что по эквивалентной демпферной обмотке ротора по оси d протекает ток, максимальное значение которого I_{ydm}, то амплитуда первой гармонической МДС, создаваемая этой обмоткой,

$$F_{эdm} = (4/\pi)\, I_{ydm} w_{эd}\,, \tag{2.24}$$

где $w_{эd}$ — число витков эквивалентной демпферной обмотки по продольной оси на один полюс.

Приравнивая, согласно принятым условиям приведения, уравнения (2.23) и (2.24), найдем

$$w_{эd} = (n_c/4)\,[1 - \sin(n_c\alpha_c)/(n_c \sin\alpha_c)]\,. \tag{2.25}$$

Аналогично, составляющие токов в стержнях обмотки ротора по поперечной оси возникают под влиянием пульсирующего магнитного поля, созданного МДС F_q (рис. 2.3). При косинусоидальном распределении токов в стержнях обмотки ток в любой паре стержней, образующих короткозамкнутый контур по оси q,

$$I_{kqm} = I_{yqm} \cos[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]\,. \tag{2.26}$$

Амплитуда основной гармонической МДС, созданная токами, протекающими в k-й паре стержней,

$$F_{kqm} = (4/\pi)\, I_{yqm} \cos^2[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]\,. \tag{2.27}$$

При четном числе стержней на полюсном наконечнике амплитуда основной гармонической МДС на один полюс, созданная поперечными составляющими токов, определяется как сумма основных гармонических МДС короткозамкнутых контуров по оси q:

$$F_{yqm} = \sum_{k=1}^{n_c/2} F_{kqm} = \frac{4}{\pi} I_{yqm} \sum_{k=1}^{n_c/2} \cos^2[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]\,, \tag{2.28}$$

или после соответствующих преобразований

$$F_{yqm} = (4/\pi)\, I_{yqm}\, [n_c/4 + \sin(n_c\alpha_c)/(4\sin\alpha_c)]. \tag{2.29}$$

Можно доказать, что при нечетном числе стержней на полюс уравнение (2.29) остается без изменений. Амплитуда основной гармонической МДС, созданная эквивалентной обмоткой ротора по оси q при протекании по ней тока, максимальное значение которого равно I_{yqm}, определяется уравнением

$$F_{эqm} = (4/\pi)\, I_{yqm} w_{эq}\,, \tag{2.30}$$

где $w_{эq}$ — число витков эквивалентной обмотки ротора по поперечной оси на один полюс.

Приравнивая уравнения (2.29) и (2.30), найдем

$$w_{эq} = (n_c/4)\,[1 + \sin(n_c\alpha_c)/(n_c \sin\alpha_c)]\,. \tag{2.31}$$

Полученные формулы для определения числа витков эквивалентных обмоток позволяют заменить реальную распределенную по полюсному делению демпферную обмотку ротора СМ двумя эквивалентными катушками с шириной, равной полюсному делению, и расположенными по продольной и поперечной осям ротора.

Асинхронные машины с короткозамкнутым ротором. В асинхронных машинах (АМ) с короткозамкнутым ротором приведение реальных роторных обмоток к эквивалентным производится так же, как и в СМ. При этом необходимо иметь в виду, что пазы короткозамкнутой обмотки расположены равномерно по окружности ротора. Тогда число стержней, приходящихся на одно полюсное деление,

$$n_c = Z_2/(2p), \tag{2.32}$$

где Z_2 — число пазов ротора.

Подставляя (2.32) в (2.25) и (2.31), а также учитывая, что в АМ $\alpha_c = \pi/n_c$, находим число витков эквивалентных обмоток по осям d и q:

$$w_{эd} = w_{эq} = n_c/4 = Z_2/(8p), \tag{2.33}$$

т. е. число витков эквивалентных обмоток по обеим осям одинаково.

§ 2.3. Параметры эквивалентных роторных обмоток

Чтобы при аналитических исследованиях можно было воспользоваться уравнениями эквивалентных роторных обмоток, необходимо найти параметры этих обмоток. При определении параметров эквивалентных обмоток достаточно найти их активные сопротивления и индуктивные сопротивления рассеяния, так как сопротивления взаимоиндукции между эквивалентными обмотками ротора и обмотками статора равны сопротивлениям взаимоиндукции между реальными обмотками ротора и статора.

Синхронные явнополюсные машины. Активные сопротивления. При определении активного сопротивления исходят из равенства потерь в эквивалентной и реальной обмотках ротора. Если обозначить активные сопротивления эквивалентных демпферных обмоток по продольной и поперечной осям соответственно через R_{yd} и R_{yq}, то потери в этих обмотках

$$P_{эd} = 0{,}5 I_{ydm}^2 R_{yd}; \tag{2.34}$$

$$P_{эq} = 0{,}5 I_{yqm}^2 R_{yq}, \tag{2.35}$$

где I_{ydm}, I_{yqm} — амплитудные значения токов в эквивалентных обмотках.

Потери в реальной демпферной обмотке ротора от составляющих токов по продольной оси определяются как сумма потерь в отдельных элементах обмотки. При синусоидальном распределении токов вдоль поверхности ротора потери в элементе обмотки от продольной составляющей тока

$$P_{kd} = 0{,}5 I_{kdm}^2 r_{kd}, \qquad (2.36)$$

где I_{kdm} — максимальное значение продольной составляющей тока (2.19) в k-м стержне; r_{kd} — активное сопротивление k-го стержня и приведенного сопротивления прилегающих элементов короткозамыкающих колец.

Полные потери в демпферной обмотке ротора по продольной оси

$$P_{yd} = 2pI_{ydm}^2 \sum_{k=1}^{n_c/2} r_{kd} \sin^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.37)$$

Приравнивая правые части (2.34) и (2.37), найдем выражение для активного сопротивления эквивалентной обмотки по продольной оси:

$$R_{yd} = 4p \sum_{k=1}^{n_c/2} r_{kd} \sin^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.38)$$

Аналогично определим активное сопротивление эквивалентной обмотки по поперечной оси. Потери в элементе обмотки от поперечной составляющей тока

$$P_{kq} = 0{,}5 I_{kqm}^2 r_{kq}, \qquad (2.39)$$

где I_{kqm} — максимальное значение поперечной составляющей тока (2.26) в k-м стержне; r_{kq} — активное сопротивление k-го стержня и приведенного сопротивления прилегающих элементов короткозамыкающих колец.

Полные потери в демпферной обмотке ротора от поперечных составляющих токов

$$P_{yq} = 2pI_{yqm}^2 \sum_{k=1}^{n_c/2} r_{kq} \cos^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.40)$$

Приравнивая правые части (2.35) и (2.40), найдем активное сопротивление эквивалентной обмотки по поперечной оси:

$$R_{yq} = 4p \sum_{k=1}^{n_c/2} r_{kq} \cos^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \qquad (2.41)$$

Формулы (2.38) и (2.41) позволяют вычислить активные сопротивления эквивалентных обмоток ротора, когда на полюсных наконечниках одинаковые стержни, а также когда стержни имеют различную конфигурацию или выполнены из разного материала.

Чтобы найти значения активных сопротивлений эквивалентных обмоток ротора, приведенных к обмотке статора, необходимо R_{yd} и R_{yq} умножить на коэффициенты приведения сопротивлений m_z. Коэффициенты приведения контуров эквивалентной демпферной обмотки к статорной определяются исходя из равенства основных гармонических МДС приведенной и эквивалентной обмоток. Выбор этого способа приведения значительно упрощает расчет m_i, так как отпадает необходимость в исследовании магнитных полей, создаваемых обмотками ротора. В этом случае коэффициенты приведения токов эквивалентных демпферных обмоток определяются по (2.6) с учетом, что $w_2 = 2pw_{эd}$ или $w_2 = 2pw_{эq}$:

$$m_{id\,(q)} = I'_{yd\,(q)} \big/ I_{yd\,(q)} = (2/m_1)\, 2pw_{эd\,(q)}/(w_1 k_{об1}). \qquad \textbf{(2.42)}$$

Коэффициенты приведения напряжений определяются по (2.14). Таким образом, приведенные значения сопротивлений

$$r_{yd\,(q)} = R_{yd\,(q)}\, m_{ud\,(q)}/m_{id\,(q)}\,. \qquad \textbf{(2.43)}$$

Индуктивные сопротивления рассеяния. При определении индуктивных сопротивлений рассеяния необходимо исходить из условия равенства энергий магнитных полей рассеяния в эквивалентной и реальной обмотках ротора. Если обозначить индуктивность рассеяния эквивалентных обмоток ротора по осям d и q соответственно через $L_{\sigma yd}$ и $L_{\sigma yq}$, то энергии магнитных полей рассеяния

$$W_{эd} = 0{,}5 L_{эyd} I^2_{ydm}\,; \qquad \textbf{(2.44)}$$

$$W_{эq} = 0{,}5 L_{эyq} I^2_{yqm}\,. \qquad \textbf{(2.45)}$$

Для реальной демпферной обмотки ротора по аналогии с уравнениями (2.37) и (2.40) запишем

$$W_{yd} = 2pI^2_{ydm} \sum_{k=1}^{n_c/2} L_{эkd} \sin^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]\,; \qquad \textbf{(2.46)}$$

$$W_{yq} = 2pI^2_{yqm} \sum_{k=1}^{n_c/2} L_{эkq} \cos^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)], \qquad \textbf{(2.47)}$$

где $L_{\sigma kd}$, $L_{\sigma kq}$ — индуктивности рассеяния k-го стержня и приведенной индуктивности рассеяния прилегающих элементов короткозамыкающих колец.

Приравнивая правые части формул (2.44) и (2.46), (2.45) и (2.47), найдем выражения для индуктивностей рассеяния эквивалентных обмоток ротора:

$$\left.\begin{aligned} L_{эyd} &= 4p \sum_{k=1}^{n_c/2} L_{эkd} \sin^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]; \\ L_{эyq} &= 4p \sum_{k=1}^{n_c/2} L_{\sigma kq} \cos^2 [(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)]. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.48)}$$

Чтобы найти значения индуктивных сопротивлений рассеяния эквивалентных обмоток ротора, приведенных к обмотке статора, необходимо $L_{\sigma yd}$ и $L_{\sigma yq}$ умножить на угловую частоту тока статора и коэффициенты приведения сопротивлений:

$$x_{\sigma yd\,(q)} = 2\pi f_1 L_{\sigma yd\,(q)}\, m_{ud\,(q)}/m_{id\,(q)}\,. \tag{2.49}$$

Асинхронные машины с короткозамкнутым ротором. В АМ активное сопротивление и индуктивное сопротивление рассеяния эквивалентных обмоток можно рассчитать по тем же формулам, что и в СМ. Но так как в АМ эквивалентные обмотки по продольной и поперечной осям одинаковы, то можно рассчитать лишь параметры для обмотки по продольной оси.

Если учесть, что сопротивление r_{kd} для всех стержней одинаково и равно r_2, то уравнение (2.38) для АМ примет вид

$$R_2 = 4pr_2 \sum_{k=1}^{n_c/2} \sin^2[(\pi/\tau_1)(\tau_k/2)] = 4pw_{эd}r_2. \tag{2.50}$$

Учитывая (2.33), получим

$$R_2 = (Z_2/2)\, r_2. \tag{2.51}$$

Коэффициенты приведения токов, напряжений и сопротивлений АМ в соответствии с (2.42) и (2.14) и с учетом (2.33) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} m_i = Z_2/(2m_1 w_1 k_{об1}); \qquad m_u = 4w_1 k_{об1}/Z_2;\\ m_z = 8m_1(w_1 k_{об1})^2/Z_2^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

Приведенное активное сопротивление

$$r_2' = m_z R_2 = [4m_1(w_1 k_{об1})^2/Z_2]\, r_2. \tag{2.53}$$

Аналогично, принимая равными индуктивности $L_{\sigma c}$ всех стержней, из (2.48) получим

$$L_{\sigma 2} = 4pw_{эd}L_{\sigma c} = (Z_2/2)\, L_{\sigma c}\,. \tag{2.54}$$

Индуктивное сопротивление рассеяния, приведенное к обмотке статора [17, 56],

$$x_{\sigma 2}' = m_z 2\pi f_1 L_{\sigma 2} = [2\pi f_1 4m_1(w_1 k_{об1})^2/Z_2]\, L_{\sigma c}\,. \tag{2.55}$$

Коэффициенты приведения сопротивлений m_z двухфазных эквивалентных обмоток отличаются от рассматриваемых в общем курсе тогда, когда в АД с короткозамкнутым ротором число фаз обмотки принимается равным Z_2, а число витков фазы — 1/2 [30].

ГЛАВА 3. ОБОБЩЕННАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МАШИНА

§ 3.1. Схемы обобщенной электрической машины

Электрические машины принято подразделять на пять типов: машины постоянного тока, трансформаторы, асинхронные, синхронные и коллекторные машины переменного тока. Во всех типах электрических машин, кроме трансформаторов, осуществляется преобразование энергии из электрической в механическую или наоборот. Деление электрических машин по роду питающего напряжения и по относительной частоте вращения ротора и поля условно. При определенных условиях, например, СМ может работать как асинхронная, коллекторная машина переменного тока может подключаться к источнику постоянного тока, заторможенная асинхронная машина с фазным ротором может работать как трансформатор. Одноякорный преобразователь частоты переменное напряжение преобразует в постоянное или, наоборот, постоянное в переменное.

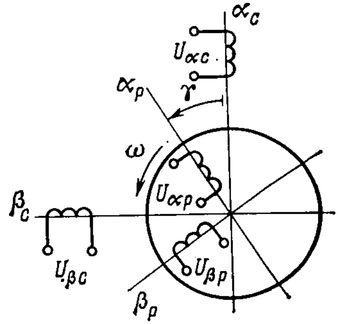

Рис. 3.1 Схема обобщенной электрической машины

В качестве модели обобщенной электрической машины используют различные физические объекты: машину постоянного тока с двумя взаимно перпендикулярными щеточными системами, расположенными по осям d и q, и соответственно двумя парами обмоток на станине [15]; многообмоточный трансформатор, у которого в эквивалентных схемах первичная обмотка представляет собой обмотку статора, а вторичные обмотки — обмотку ротора [21]; двухфазную двухполюсную машину, имеющую по паре обмоток на роторе и статоре [27, 28].

Принимаем в качестве обобщенной электрической машины двухполюсную двухфазную симметричную идеализированную электрическую машину, имеющую по две взаимно перпендикулярные обмотки на роторе и статоре (рис. 3.1). Двухполюсная машина выбрана потому, что все процессы в многополюсной и двухполюсной машинах аналогичны, однако в двухполюсной машине электрические радианы совпадают с геометрическими. Это упрощает сопоставление положения ротора относительно фаз статора для различных моментов времени от начала переходного процесса. В двухфазной машине круговое поле создается, когда обмотки сдвинуты в пространстве на $\pi/2$ и токи в этих обмотках сдвинуты во времени на $\pi/2$. Сдвиг обмоток в пространстве на угол $\pi/2$ позволяет при равномерном воздушном зазоре машины считать, что эти обмотки лишены взаимно индуктивной связи друг с другом, что упрощает уравнения машины. Трехфазные машины принято преобразовывать к двухфазным.

Обобщенная электрическая машина имеет гладкий воздушный зазор, пазы на статоре и роторе отсутствуют. Обмотки в обобщенной машине представляют в виде токовых слоев, имеющих синусоидальное распределение МДС. Так как зазор в машине равномерный и магнитная цепь машины не насыщена, то при питании обмоток синусоидальным напряжением распределение поля в воздушном зазоре будет синусоидальным. Обобщенная машина — это математическая модель, позволяющая перейти к анализу процессов, протекающих в реальной машине. К обобщенной машине, представляющей собой комбинацию взаимно перемещающихся пар обмоток, можно свести большинство электрических машин, а затем при наличии математического описания обобщенной машины анализировать рабочие и переходные процессы в этих машинах.

Рассмотрим, как из схемы обобщенной машины получают расчетные схемы основных типов электрических машин.

1. Расчетная схема синхронной машины. Схему СМ можно получить из модели обобщенной электрической машины при питании обмоток статора напряжением $U_{\alpha c}$, $U_{\beta c}$ с частотой f_1, а обмоток ротора — напряжением $U_{\alpha p}$, $U_{\beta p}$ с частотой $f_2 = 0$ (постоянным напряжением). Результирующая МДС обмоток ротора будет равна геометрической сумме МДС каждой обмотки. Большинство серийных СМ имеют на роторе только одну обмотку возбуждения. Тогда вторую роторную обмотку обобщенной машины можно оставить разомкнутой и в расчетах не учитывать. При наличии на роторе полной демпферной обмотки по осям α_p, β_p добавляют по короткозамкнутому контуру. На статоре и роторе по осям α и β можно добавлять любое число обмоток. В синхронных машинах частоты вращения ротора и поля статора равны, поля статора и ротора взаимно неподвижны.

2. Расчетная схема асинхронной машины. Если к обмоткам статора обобщенной машины подвести переменное напряжение, как в первом случае, а обмотки ротора замкнуть накоротко, то получим расчетную схему АМ с короткозамкнутым ротором. В АМ в роторе частота токов $f_2 = f_1 s$, где s — скольжение ротора. Частота вращения ротора $\Omega \neq \omega_1/p$. Если обмотки ротора не замыкать накоротко, а подвести к ним напряжения $U_{\alpha p}$ и $U_{\beta p}$ частотой f_2, то получим схему АМ двойного питания. Везде угловые частоты вращения полей статора и ротора АМ в пространстве равны друг другу, поля статора и ротора взаимно неподвижны.

3. Расчетная схема трансформатора. Схему трансформатора можно получить, если затормозить ротор обобщенной машины при совпадении осей α_c и α_p. При этом достаточно рассмотреть пару обмоток по оси α или β.

4. Расчетная схема машины постоянного тока. В режиме работы двигателя постоянное напряжение, подаваемое на щетки машины коллектором, являющимся механическим преобразователем частоты, преобразуется в переменное напряжение секций якоря, и, наоборот, в режиме работы генератора переменное напряжение обмотки якоря преобразуется в постоянное, снимаемое со щеток.

В соответствии с этим в схеме машины постоянного тока обмотки ротора включены на преобразователь частоты. На обмотку статора по оси α, представляющую собой обмотку возбуждения машины постоянного тока, подается постоянное напряжение $U_{\alpha c}$. Обмотка статора по оси β представляет собой обмотки дополнительных полюсов. Магнитное поле якоря машины постоянного тока вращается против направления его вращения и остается неподвижным относительно поля статора.

Таким образом, во всех электрических машинах поля статора и ротора взаимно неподвижны. Это основное условие, без которого не может осуществляться электромеханическое преобразование энергии. Если поля ротора и статора взаимно перемещаются, то средний электромагнитный момент равен нулю.

§ 3.2. Переход от трехфазной системы координат к двухфазной

Предположим, что в момент времени $t = 0$ изображающий вектор тока $\mathbf{I}_s$ совпадает с осью фазы a, причем с этой же осью совпадает ось α_c ортогональной системы координат (рис. 3.2). Значения фазных токов определяем по (1.1) или проецируя $\mathbf{I}_s$ на координатные оси:

$$i_a = I_{1m}; \quad i_b = I_{1m} \cos(-2\pi/3);$$

$$i_c = I_{1m} \cos(2\pi/3). \qquad (3.1)$$

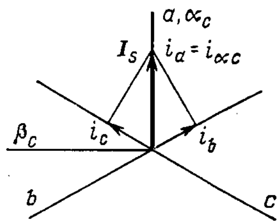

Рис. 3.2. Координатные оси a, b, c и α_c, β_c

С учетом (1.3)

$$I_{1m} = (2/3)\,[i_a + i_b \cos(-2\pi/3) + i_c \cos(2\pi/3)]. \qquad (3.2)$$

С помощью этого же изображающего вектора тока находим значения токов в ортогональной системе координат:

$$i_{\alpha c} = I_{1m}; \quad i_{\beta c} = 0. \qquad (3.3)$$

Сопоставляя (3.3) и (3.2), установим связь между током $i_{\alpha c}$ и фазными токами i_a, i_b, i_c:

$$i_{\alpha c} = (2/3)\,[i_a - 0{,}5\,(i_b + i_c)]. \qquad (3.4)$$

Совмещая изображающий вектор тока с осью β_c, получим

$$i_a = 0; \quad i_b = I_{1m} \cos(\pi/6); \quad i_c = I_{1m} \cos(5\pi/6).$$

В случае определения модуля изображающего вектора тока

$$I_{1m} = (2/3)\,[i_b \cos(\pi/6) + i_c \cos(5\pi/6)]. \qquad (3.5)$$

В ортогональной координатной системе

$$i_{\alpha c} = 0; \quad i_{\beta c} = I_{1m}. \qquad (3.6)$$

Сопоставляя (3.6) и (3.5), установим связь между током $i_{\beta c}$ и фазными токами i_a, i_b, i_c:

$$i_{\beta c} = (2/3)\left[(\sqrt{3}/2)(i_b - i_c)\right] = (i_b - i_c)/\sqrt{3}. \qquad (3.7)$$

В общем случае, когда не выполняется равенство $i_a + i_b + i_c = 0$, к токам $i_{\alpha c}$, $i_{\beta c}$ добавляют ток нулевой составляющей

$$i_0 = (1/3)(i_a + i_b + i_c). \qquad (3.8)$$

С помощью выражений, аналогичных (3.4), (3.7) и (3.8), осуществляется переход от значений напряжений и потокосцеплений в осях a, b, c к их значениям в осях α_c, β_c.

При переходе от токов $i_{\alpha c}$, $i_{\beta c}$, i_0 к токам в трехфазной системе координат имеем

$$i_a = i_{\alpha c} + i_0; \quad i_b = -0{,}5 i_{\alpha c} + (\sqrt{3}/2)\, i_{\beta c} + i_0;$$
$$i_c = -0{,}5 i_{\alpha c} - (\sqrt{3}/2)\, i_{\beta c} + i_0. \qquad (3.9)$$

Таким образом, полученные зависимости позволяют провести замену трехфазной машины эквивалентной двухфазной.

§ 3.3. Уравнения обобщенной электрической машины

Независимые координатные оси. Уравнения обобщенной электрической машины представляют собой систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений равновесия напряжений обмоток машины и уравнения движения (уравнения равновесия моментов на валу машины). Считаем, что обмотки ротора приведены к обмоткам статора (знаки приведения опускаем). Тогда в осях α_c, β_c и α_p, β_p уравнения обобщенной машины (см. рис. 3.1) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} U_{\alpha c} &= r_1 i_{\alpha c} + d\Psi_{\alpha c}/dt; \quad U_{\beta c} = r_1 i_{\beta c} + d\Psi_{\beta c}/dt; \\ U_{\alpha p} &= r_2 i_{\alpha p} + d\Psi_{\alpha p}/dt; \quad U_{\beta p} = r_2 i_{\beta p} + d\Psi_{\beta p}/dt. \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

В этих уравнениях потокосцепления обмоток

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{\alpha c} &= L_{\alpha c} i_{\alpha c} + l_{\alpha c \alpha p} i_{\alpha p} + l_{\alpha c \beta p} i_{\beta p}; \\ \Psi_{\beta c} &= L_{\beta c} i_{\beta c} + l_{\beta c \alpha p} i_{\alpha p} + l_{\beta c \beta p} i_{\beta p}; \\ \Psi_{\alpha p} &= L_{\alpha p} i_{\alpha p} + l_{\alpha p \alpha c} i_{\alpha c} + l_{\alpha p \beta c} i_{\beta c}; \\ \Psi_{\beta p} &= L_{\beta p} i_{\beta p} + l_{\beta p \alpha c} i_{\alpha c} + l_{\beta p \beta c} i_{\beta c}; \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

$U_{\alpha c}$, $U_{\beta c}$, $U_{\alpha p}$, $U_{\beta p}$ — напряжения, подаваемые на обмотки машины; $i_{\alpha c}$, $i_{\beta c}$, $i_{\alpha p}$, $i_{\beta p}$ — токи, протекающие по обмоткам; r_1, r_2, $L_{\alpha c}$, $L_{\beta c}$, $L_{\alpha p}$, $L_{\beta p}$ — активные сопротивления и индуктивности самоиндукции обмоток статора и ротора; $l_{\alpha c \alpha p}$, $l_{\alpha c \beta p}$, $l_{\beta c \alpha p}$, $l_{\beta c \beta p}$ — взаимные индуктивности обмоток статора и ротора.

Так как воздушный зазор машины постоянен по всей окружности статора и магнитная цепь машины не насыщена, то коэффициенты самоиндукции обмоток машины — величины постоянные. Симметрия машины по осям α, β и синусоидальное распределение МДС обмоток позволяют записать равенства

$$\left.\begin{aligned} l_{\alpha c \alpha p} &= l_{\alpha p \alpha c} = l_{\beta c \beta p} = l_{\beta p \beta c} = L_m \cos\gamma; \\ l_{\alpha c \beta p} &= l_{\beta p \alpha c} = -L_m \sin\gamma; \quad l_{\beta c \alpha p} = l_{\alpha p \beta c} = L_m \sin\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

где L_m — коэффициент взаимной индукции при совпадении осей обмоток.

Уравнение движения ротора

$$M = M_c + J\,(d\Omega/dt), \tag{3.13}$$

где M — электромагнитный момент, развиваемый машиной; M_c — момент сопротивления; J — момент инерции ротора и момент инерции привода, приведенный к валу ротора; Ω — частота вращения, $\Omega = \omega$ при $2p = 2$.

Электромагнитный момент вращения, выраженный через потокосцепления и токи,

$$M = \Psi_{\alpha c}\, i_{\beta c} - \Psi_{\beta c}\, i_{\alpha c}. \tag{3.14}$$

Уравнения (3.10) — (3.14) полностью определяют динамические и статические процессы в обобщенной электрической машине, и их решение сводится к нахождению токов в обмотках и частоты вращения ротора при заданных напряжениях. Проецируя вектор напряжения

$$\mathbf{U}_s = U_{1m} \exp\,[j\,(\omega_1 t + \alpha_0)] = U_{1m}\,[\cos\,(\omega_1 t + \alpha_0) + j \sin\,(\omega_1 t + \alpha_0)] \tag{3.15}$$

на соответствующие оси, где α_0 — фазный угол вектора напряжения относительно оси α_c в момент $t = 0$, получим

$$U_{\alpha c} = \operatorname{Re}\mathbf{U}_s = U_{1m} \cos\,(\omega_1 t + \alpha_0); \quad U_{\beta c} = \operatorname{Im}\mathbf{U}_s = U_{1m} \sin\,(\omega_1 t + \alpha_0). \tag{3.16}$$

Аналогично, для обмоток ротора

$$U_{\alpha p} = \operatorname{Re}\mathbf{U}_p = U_{2m} \cos\,(\omega_2 t + \alpha_2); \quad U_{\beta p} = \operatorname{Im}\mathbf{U}_p = U_{2m} \sin\,(\omega_2 t + \alpha_2). \tag{3.17}$$

В этих выражениях: ω_1 — угловая частота напряжения сети, ω_2 — угловая частота вращения вектора $\mathbf{U}_p$ относительно осей ротора; α_2 — фазный угол вектора напряжения $\mathbf{U}_p$ относительно оси α_p в момент $t = 0$.

При питании обмоток ротора постоянным напряжением $\omega_2 = 0$.

Однако система дифференциальных уравнений (3.10) решения в общем виде не имеет, так как коэффициенты при токах в выражениях потокосцеплений являются периодическими функциями (3.12).

Единые координатные оси, вращающиеся с произвольной частотой. Взаимная неподвижность полей статора и ротора сохранится, если вращающиеся обмотки ротора условно затормозить или неподвижные обмотки статора вращать с частотой вращения ротора (с соответствующим изменением частот токов). При этом, чтобы сохранить инвариантной мощность и иметь дело с реальными амплитудами напряжений и токов, применяют два метода:

1. Изменяют сопротивление псевдонеподвижных или псевдовращающихся обмоток. Например, в схеме замещения АД индуктивное сопротивление роторных обмоток рассчитывают для основной частоты, а их активное сопротивление делят на скольжение. Этот способ используется при расчетах и построении круговых диаграмм АД.

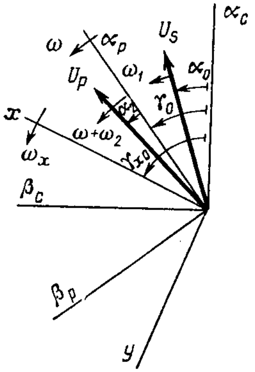

Рис. 3.3. Системы координат и изображающие векторы напряжений

2. Вводят в уравнения равновесия напряжений обмоток ЭДС вращения. Этот способ широко используется при рассмотрении переходных процессов электрических машин [2, 14, 15, 27, 29, 38, 50, 52].

Рассмотрим уравнения обобщенной электрической машины в системе координат x, y, вращающихся с произвольной частотой ω_x (рис. 3.3). Все члены уравнения равновесия напряжений обмоток статора, записанного через полные (изображающие) векторы

$$\mathbf{U}_s = d\Psi_s/dt + r_1\mathbf{I}_s, \tag{3.18}$$

умножим на множитель $\exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})]$, учитывающий относительную разность частот вращения координатных систем, и получим

$$\mathbf{U}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] = (d\Psi_s/dt)\exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] + \\ + r_1\mathbf{I}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})]. \tag{3.19}$$

Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{U}_s(x, y) = \mathbf{U}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] = U_{1m}\exp[j((\omega_1 - \omega_x)t + \\ &\qquad + \alpha_0 - \gamma_{x0})]; \\ &\mathbf{\Psi}_s(x, y) = \mathbf{\Psi}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] = \mathbf{\Psi}_{1m}\exp[j((\omega_1 - \\ &\qquad - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi)]; \\ &\mathbf{I}_s(x, y) = \mathbf{I}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] = I_{1m}\exp[j(\omega_1 - \omega_x)t + \\ &\qquad + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi)], \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

где φ — угол смещения векторов $\mathbf{\Psi}_s$, $\mathbf{I}_s$ относительно вектора $\mathbf{U}_s$ в момент времени $t = 0$.

Производная

$$d\mathbf{\Psi}_s(x, y)/dt = \frac{d}{dt}\left\{\mathbf{\Psi}_s \exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})]\right\} =$$

$$= (d\mathbf{\Psi}_s/dt)\exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] - j\omega_x\mathbf{\Psi}_s\exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})]. \tag{3.21}$$

Отсюда

$$(d\Psi_s/dt)\exp[-j(\omega_x t + \gamma_{x0})] = d\Psi_s(x, y)/dt + j\omega_x \Psi_s(x, y). \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.19) и учитывая (3.20), получим

$$\mathbf{U}_s(x, y) = d\boldsymbol{\Psi}_s(x, y)/dt + j\omega_x \boldsymbol{\Psi}_s(x, y) + r_1 \mathbf{I}_s(x, y). \quad (3.23)$$

Действительная и мнимая части этого уравнения дают уравнения равновесия напряжений в осях x, y:

$$U_{xc} = d\Psi_{xc}/dt - \omega_x \Psi_{yc} + r_1 i_{xc};$$
$$U_{yc} = d\Psi_{yc}/dt + \omega_x \Psi_{xc} + r_1 i_{yc}. \quad (3.24)$$

Напряжения, потокосцепления и токи находим из (3.20)

$$\left.\begin{aligned} U_{xc} &= \mathrm{Re}\,\mathbf{U}_s(x, y) = U_{1m}\cos[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0}], \\ U_{yc} &= \mathrm{Im}\,\mathbf{U}_s(x, y) = U_{1m}\sin[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0}]; \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{xc} &= \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Psi}_s(x, y) = \Psi_{1m}\cos[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi], \\ \Psi_{yc} &= \mathrm{Im}\,\boldsymbol{\Psi}_s(x, y) = \Psi_{1m}\sin[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi]; \end{aligned}\right\} \quad (3.26)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xc} &= \mathrm{Re}\,\mathbf{I}_s(x, y) = I_{1m}\cos[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi], \\ I_{yc} &= \mathrm{Im}\,\mathbf{I}_s(x, y) = I_{1m}\sin[(\omega_1 - \omega_x)t + \alpha_0 - \gamma_{x0} - \varphi]. \end{aligned}\right\} \quad (3.27)$$

Аналогично, все члены уравнения равновесия напряжения обмоток ротора

$$\mathbf{U}_\mathrm{p} = d\Psi_\mathrm{p}/dt + r_2\mathbf{I}_\mathrm{p} \quad (3.28)$$

умножим на множитель $\exp[j((\omega - \omega_x)t + \gamma_0 - \gamma_{x0})]$, учитывающий относительную разность частот вращения координатных систем, и после преобразований получим

$$\mathbf{U}_\mathrm{p}(x, y) = d\boldsymbol{\Psi}_\mathrm{p}(x, y)/dt + j(\omega - \omega_x)\boldsymbol{\Psi}_\mathrm{p}(x, y) + r_2\mathbf{I}_\mathrm{p}(x, y). \quad (3.29)$$

Действительная и мнимая части этого выражения дают уравнения равновесия напряжений контуров ротора в осях x, y:

$$U_{x\mathrm{p}} = d\Psi_{x\mathrm{p}}/dt - (\omega - \omega_x)\Psi_{y\mathrm{p}} + r_2 i_{x\mathrm{p}}; \ \mathbf{U}_{y\mathrm{p}} = d\Psi_{y\mathrm{p}}/dt +$$
$$+ (\omega - \omega_x)\Psi_{x\mathrm{p}} + r_2 i_{y\mathrm{p}}. \quad (3.30)$$

Напряжения обмоток ротора

$$U_{x\mathrm{p}} = \mathrm{Re}\,\mathbf{U}_\mathrm{p}(x, y) = U_{2m}\cos[(\omega_2 + \omega - \omega_x)t + \gamma_0 + \alpha_2 - \gamma_{x0}];$$

$$U_{y\mathrm{p}} = \mathrm{Im}\,\mathbf{U}_\mathrm{p}(x, y) = U_{2m}\sin[(\omega_2 + \omega - \omega_x)t + \gamma_0 + \alpha_2 - \gamma_{x0}]. \quad (3.31)$$

Принимая значения частот ω_1, ω_2, ω, ω_x, можно рассмотреть любую электрическую машину в любой системе координат.

Обращаясь к уравнениям (3.10), видим, что они являются частным случаем уравнений (3.24) и (3.30), когда частоты вращения координатных осей совпадают с частотами вращения обмоток машины. Отличительная черта уравнений (3.24) и (3.30) — наличие в них ЭДС вращения $\omega_x\Psi_{yc}$, $\omega_x\Psi_{xc}$, $(\omega - \omega_x)\Psi_{y\mathrm{p}}$, $(\omega - \omega_x)\Psi_{x\mathrm{p}}$.

Так как в системе координат x, y (единой для обмоток статора и ротора) обмотки машины являются псевдонеподвижными, то потокосцепления обмоток оказываются без периодических составляющих:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{xc} &= L_{xc} i_{xc} + L_m i_{xp}; \quad \Psi_{xp} = L_{xp} i_{xp} + L_m i_{xc}; \\ \Psi_{yc} &= L_{yc} i_{yc} + L_m i_{yp}; \quad \Psi_{yp} = L_{yp} i_{yp} + L_m i_{yc}. \end{aligned}\right\} \quad (3.32)$$

Последнее позволяет получать решение уравнений идеализированной машины в общем виде.

§ 3.4. Методы анализа переходных процессов в электрических машинах

Электромагнитные переходные процессы при постоянном насыщении или при ненасыщенной магнитной цепи машины описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решение которых не встречает затруднений. При изменяющемся насыщении магнитной цепи дифференциальные уравнения электрических машин становятся нелинейными и решаются численными методами.

Уравнения, описывающие переходные процессы, могут быть записаны в дифференциальной или операторной форме. Совпадая по существу, они имеют различные способы решения. Линейные дифференциальные уравнения при малом числе уравнений в системе решаются методом редукции системы с помощью дифференцирования и исключения. Системы сводятся к одному уравнению более высокого порядка, решение которого, как правило, не представляет трудности. При большом числе дифференциальных уравнений в системе используется метод сведения неоднородной системы уравнений к однородной. Решение уравнений в дифференциальной форме записи называется *классическим методом*.

Операционное исчисление базируется на специальном интегральном преобразовании функций вещественной переменной, позволяющем заменить интегральные операции над этими функциями алгебраическими операциями над их интегральными преобразованиями.

В результате удается значительно упростить решение линейных дифференциальных уравнений. В операционном исчислении обычно применяют преобразование

$$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \quad (3.33)$$

называемое *преобразованием Карсона — Хевисайда*. Величина $F(p)$ — изображение функции $f(t)$, называемой *оригиналом*. Изображения некоторых функций, наиболее часто встречающихся в теории электрических машин, представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$e^{-\alpha t}$	$p/(p+\alpha)$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$p^2/(p+\alpha)^2$
$(1/\alpha)(1-e^{-\alpha t})$	$1/(p+\alpha)$	$(1/n!)\,t^n$	$1/p^n$
$\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t})$	$\frac{p^2}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$(1-e^{\alpha t})/t$	$p\ln\frac{p-\alpha}{p}$
$\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$(e^{\alpha t}-e^{\beta t})/t$	$p\ln\frac{p-\beta}{p-\alpha}$
$\sin\alpha t$	$\alpha p/(p^2+\alpha^2)$	$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\alpha p/(p^2-\alpha^2)$
$\cos\alpha t$	$p^2/(p^2+\alpha^2)$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$p^2/(p^2-\alpha^2)$
$1-\cos\alpha t$	$\alpha^2/(p^2+\alpha^2)$	$(2/t)\,\mathrm{sh}\,\alpha t$	$p\ln\frac{p+\alpha}{p-\alpha}$
$\sin(\beta t\pm\alpha)$	$\frac{\beta p\cos\alpha\pm p^2\sin\alpha}{p^2+\beta^2}$	$(2/t)(1-\mathrm{ch}\,\alpha t)$	$p\ln\frac{p^2-\alpha^2}{p^2}$
$\cos(\beta t\pm\alpha)$	$\frac{p^2\cos\alpha\mp\beta p\sin\alpha}{p^2+\beta^2}$	$J_0(\alpha t)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода	$\frac{p}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$
$te^{-\alpha t}$	$p/(p+\alpha)^2$	$\sigma_0(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t>0\\0 \text{ при } t<0\end{cases}$	1

Достоинством преобразования Карсона — Хевисайда является то, что изображение рассматриваемой физической величины имеет размерность оригинала.

Решение обратной задачи — определение оригинала функции по ее изображению — можно получить с помощью теорем разложения. Если изображение задано в виде степенной функции, то оригинал ищется в виде степенного ряда, расположенного по степеням t:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k/p^k) \doteqdot \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k t^k/k!). \tag{3.34}$$

Это первая теорема разложения.

Если изображение представляет собой отношение двух полиномов

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}, \tag{3.35}$$

то оригинал функции

$$f(t)=\frac{F_1(0)}{F_2(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)\exp(p_k t)}{p_k F_2'(p_k)}, \tag{3.36}$$

где $F_1(0)$, $F_2(0)$ — значения полиномов выражения (3.35) при подстановке в них значения $p = 0$; $F_2'(p)$ — производная полинома знаменателя; p_k — k-й корень уравнения $F_2(p) = 0$.

Вторая теорема разложения в форме (3.36) справедлива лишь в том случае, когда уравнение $F_2(p) = 0$ не имеет нулевого корня. Степень полинома $F_1(p)$ не должна превышать степени полинома $F_2(p)$. При наличии нулевого корня оригинал функции ищется методом вычетов.

Указанные методы решения применимы для любой электрической машины, однако машины и соответственно их дифференциальные уравнения несколько отличаются друг от друга по сложности. В связи с этим электрические машины могут быть разделены на две основные группы [15]:

1) электрические машины с взаимно неподвижными осями обмоток. К этой группе относятся машины постоянного тока, некоторые коллекторные машины переменного тока и трансформаторы;

2) электрические машины с взаимно перемещающимися осями обмоток и явно выраженными полюсами. К этой группе принадлежат синхронные и асинхронные машины, одноякорные преобразователи и т. д.

С точки зрения математического исследования электрических машин эти группы отличаются коэффициентами при неизвестных. В машинах с взаимно неподвижными осями обмоток при неизменном насыщении магнитной цепи коэффициенты само- и взаимоиндукции обмоток могут считаться постоянными, а следовательно, уравнения машины являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. В машинах с взаимно перемещающимися осями обмоток коэффициенты взаимоиндукции, а при наличии явно выраженных полюсов — и коэффициенты самоиндукции, являются тригонометрическими функциями угла поворота ротора. При отсутствии нелинейностей решение уравнений выполняется изложенными ранее методами после преобразования координатных осей, в результате которого осуществляется переход от уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами при неизвестных.

Раздел второй

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ С ВЗАИМНО НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ ОБМОТОК И ПОЛЮСОВ

ГЛАВА 4. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 4.1. Дифференциальные уравнения электрических машин

К группе электрических машин с взаимно неподвижными осями обмоток относятся машины постоянного тока, трансформаторы, ряд коллекторных машин переменного тока.

Дифференциальные уравнения двухобмоточного трансформатора. Однофазный двухобмоточный трансформатор — это простейший случай электрической машины, имеющей всего два индуктивно связанных контура. Дифференциальные уравнения равновесия напряжения обмоток трансформатора имеют вид

$$U_1 = r_1 i_1 + d\Psi_{11}/dt; \quad -U_2 = r_2 i_2 + d\Psi_{22}/dt, \tag{4.1}$$

где U_1, U_2 — напряжения на зажимах первичной и вторичной обмоток; i_1, i_2 — токи, протекающие по обмоткам; r_1, r_2 — активные сопротивления обмоток.

Потокосцепления обмоток равны сумме собственных потокосцеплений, создаваемых токами, протекающими по рассматриваемой обмотке, и потокосцеплений взаимоиндукции:

$$\Psi_{11} = L_{11} i_1 + L_{12} i_2; \quad \Psi_{22} = L_{21} i_1 + L_{22} i_2, \tag{4.2}$$

где L_{11}, L_{22} — полные индуктивности первичных и вторичных обмоток; $L_{12} = L_{21}$ — взаимные индуктивности обмоток.

Полные индуктивности обмоток представим в виде суммы индуктивностей рассеяния и взаимных индуктивностей:

$$L_{11} = L_{1\sigma} + L_{12}; \quad L_{22} = L_{2\sigma} + L_{21}. \tag{4.3}$$

Уравнения равновесия напряжений (4.1) с учетом выражений (4.2) запишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= r_1 i_1 + L_{11}(di_1/dt) + L_{12}(di_2/dt); \\ -U_2 &= r_2 i_2 + L_{22}(di_2/dt) + L_{21}(di_1/dt). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Принимаем, что насыщение магнитной цепи в идеализированном трансформаторе отсутствует, поэтому коэффициенты L_{11}, L_{22}, $L_{12(21)}$ — постоянные величины. При таком допущении решение системы уравнений (4.4) не представляет затруднений.

Дифференциальные уравнения машины постоянного тока. Методику составления системы дифференциальных уравнений машин постоянного тока рассмотрим на примере двигателя параллельного возбуждения (рис. 4.1, *а*). В этой машине имеется два контура: контур обмотки возбуждения и контур якоря, состоящий из последовательно соединенных обмоток — компенсационной, добавочных полюсов и якоря. Щетки установлены строго на геометрической нейтрали. Уравнения равновесия напряжений контуров машины принято записывать в системе неподвижных координатных осей α, β (рис. 4.1, *б*). Обмотка вращающегося якоря идеализированной машины постоянного тока заменяется псевдонеподвижной катушкой *Я*, ось которой направлена по линии щеток (по оси β). Поэтому при записи уравнения равновесия напряжений для контура якоря следует помнить, что в катушке якоря кроме ЭДС само- и взаимоиндукции наводится при вращении якоря в поле главных полюсов ЭДС вращения (см. § 3.3)

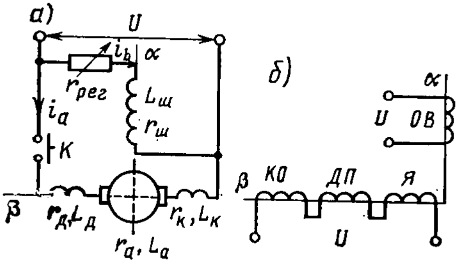

Рис. 4.1. Схема машины постоянного тока (*а*) и ее условное изображение (*б*) в осях α, β

$$e = -\omega\Psi_{ad}, \tag{4.5}$$

где Ψ_{ad} — потокосцепление обмотки возбуждения с обмоткой якоря.

Таким образом, уравнения равновесия напряжений контуров машины постоянного тока имеют вид

$$U = r_b i_b + d\Psi_{bш}/dt; \quad U = ri_a + d\Psi/dt + \omega\Psi_{ad} \tag{4.6}$$

где U — напряжение, приложенное к зажимам машины; i_b, i_a — токи, протекающие по обмоткам; r_b, r — активные сопротивления контуров обмоток возбуждения и якоря, причем $r_b = r_ш + r_{рег}$, $r = r_к + r_д + r_a$ ($r_ш$, $r_к$, $r_д$, r_a — активные сопротивления шунтовой, компенсационной обмоток и обмоток добавочных полюсов и якоря; $r_{рег}$ — регулировочное сопротивление); $\Psi_{bш}$ — потокосцепление обмотки параллельного возбуждения; Ψ — полное потокосцепление обмоток контура якоря идеализированной машины.

Потокосцепления обмоток машины постоянного тока параллельного возбуждения

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{bш} = L_ш i_b; \quad \Psi_{ad} = L_{ad} i_b; \\ &\Psi = (L_к + L_д + L_a)\, i_a + 2\,(L_{кд} - L_{ка} - L_{дa})\, i_a, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

где $L_ш$ — полная индуктивность обмотки параллельного возбуждения; $L_к$, $L_д$, L_a — полные индуктивности обмоток: компенсационной, добавочных полюсов и якоря; $L_{кд}$, $L_{кa}$, $L_{дa}$ — взаимные индуктивности обмоток: компенсационной и добавочных полюсов, компенсационной и якоря, добавочных полюсов и якоря (знак минус перед коэффициентами $L_{\text{ка}}$, $L_{\text{да}}$ обусловлен тем, что обмотки добавочных полюсов и компенсационная включены встречно по отношению к обмотке якоря); L_{ad} — взаимная индуктивность обмотки якоря по продольной оси и обмотки возбуждения.

При этом имеется в виду действительная обмотка якоря, а не псевдонеподвижная катушка якоря идеализированной машины. Последняя не имеет взаимоиндуктивной связи с обмоткой возбуждения, так как их оси сдвинуты на угол $\pi/2$.

При исследовании электромеханических переходных процессов частота вращения якоря не постоянная и систему уравнений (4.6) следует дополнить уравнением (3.13) равновесия моментов (или уравнением движения якоря):

$$M = M_{\text{с}} + J\,(d\Omega/dt) = M_{\text{с}} + J_1\,(d\omega/dt), \tag{4.8}$$

где J_1 — момент инерции на пару полюсов.

Электромагнитный момент вращения (3.14)

$$M = \Psi_{ad}\, i_a. \tag{4.9}$$

В общем случае система уравнений (4.6), (4.8) машины постоянного тока нелинейна, так как содержит следующие нелинейные величины:

а) взаимные и полные индуктивности обмоток машины, являющиеся нелинейными функциями токов обмотки возбуждения и якоря и изменяющиеся в зависимости от насыщения магнитной цепи машины;

б) ЭДС вращения, являющуюся нелинейной функцией тока возбуждения и угловой частоты;

в) электромагнитный момент вращения, являющийся нелинейной функцией тока возбуждения и тока якоря;

г) момент сопротивления, являющийся, как правило, нелинейной функцией частоты вращения якоря.

Даже в том случае, когда изменением насыщения магнитной цепи пренебрегают и считают параметры обмоток постоянными величинами, при исследовании режимов работы, характеризующихся переменной неизвестной частотой вращения, рассматриваемые уравнения будут нелинейны, так как в уравнения (4.6) равновесия напряжений входят произведения переменных. Указанные нелинейности делают решение системы уравнений (4.6), (4.8) в общем виде невозможным. Однако в некоторых частных случаях эту систему можно свести к линейной рядом допущений.

§ 4.2. Безреостатный пуск двигателя параллельного возбуждения

В качестве примера решения задач классическим методом рассмотрим безреостатный пуск двигателя постоянного тока параллельного возбуждения (рис. 4.1). В настоящее время можно осуществлять в отдельных случаях безреостатный пуск двигателей мощностью до 30 кВт. Пуск происходит в такой последовательности:

вначале в сеть включают обмотку возбуждения, а затем замыкают цепь обмотки якоря. Анализ переходных процессов может быть значительно проще, если пренебречь взаимными индуктивностями обмоток добавочных полюсов и компенсационной. Пренебрежение влиянием обмотки добавочных полюсов не вносит каких-либо погрешностей при рассмотрении электромеханического переходного процесса, так как добавочные полюсы влияют только на процессы в короткозамкнутых коммутирующих секциях обмотки якоря. Пренебрегая влиянием компенсационной обмотки, одновременно не учитываем и размагничивающее действие реакции якоря, полагая, что их влияние на переходный процесс взаимно уравновешено. Активные сопротивления и собственные индуктивности обмоток добавочных полюсов и компенсационной складываем с соответствующими параметрами обмотки якоря: $r = r_к + r_д + r_a$, $L = L_к + L_д + L_a$.

Рассмотрим наиболее простой случай безреостатного пуска двигателя, включаемого в сеть без нагрузки. Моментом холостого хода пренебрегаем. Полагаем, что включение цепи якоря в сеть контактором K (рис. 4.1) осуществляется по окончании переходного процесса в цепи обмотки возбуждения. Учитывая, что реакция якоря не влияет на основной поток машины, можно считать магнитный поток при пуске двигателя постоянным. Следовательно, постоянным будет и потокосцепление по продольной оси обмотки якоря и основных полюсов: $\Psi_{ad} = \mathrm{const}$. Постоянство потокосцепления делает линейными ЭДС вращения (4.5), которая становится линейной функцией частоты, и момент вращения (4.9), который становится линейной функцией тока якоря. Неизменное насыщение магнитной цепи позволяет считать индуктивность постоянной. Таким образом, система уравнений (4.6), (4.8) становится линейной. Сделанные допущения обеспечивают достаточную точность решения.

Система уравнений, описывающая поведение двигателя при безреостатном пуске, примет вид

$$U = ri_a + L\,(di_a/dt) + \omega\Psi_{ad}; \quad \Psi_{ad}\,i_a = J_1\,(d\omega/dt). \qquad \textbf{(4.10)}$$

Наиболее просто эта система дифференциальных уравнений решается *методом редукции*. Дифференцируем уравнение равновесия напряжений цепи якоря:

$$L\,(d^2 i_a/dt^2) + r\,(di_a/dt) + \Psi_{ad}\,(d\omega/dt) = 0. \qquad \textbf{(4.11)}$$

Исключаем из полученного уравнения производную $d\omega/dt$, определив ее значение из второго уравнения системы (4.10). Нормализуем уравнение, разделив все его члены на L, и получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^2 i_a/dt^2 + (r/L)\,di_a/dt + [\Psi_{ad}^2/(J_1 L)]i_a = 0. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Отношение J_1/Ψ_{ad}^2 обозначают через $C_э$ и называют *эквивалентной динамической емкостью якоря*. Решение дифференциального уравнения (4.12) зависит от вида корней его характеристического уравнения:

$$p^2 + (r/L)\,p + 1/(C_э L) = 0. \tag{4.13}$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -r/(2L) \pm \sqrt{[r/(2L)]^2 - 1/(C_э L)}. \tag{4.14}$$

Введем следующие обозначения:

$$\delta = r/(2L) \text{ и } \omega_0 = \sqrt{1/(C_э L)}, \tag{4.15}$$

тогда

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{4.16}$$

Если корни характеристического уравнения действительные и разные ($\delta > \omega_0$), то решение уравнения (4.12) запишем в общем виде:

$$i_a = A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t). \tag{4.17}$$

При действительных равных корнях ($\delta = \omega_0$)

$$i_a = (A_1 + A_2 t)\exp(-\delta t). \tag{4.18}$$

В случае комплексно-сопряженных корней ($\delta < \omega_0$)

$$i_a = (A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)\exp(-\delta t), \tag{4.19}$$

где $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Определяем постоянные интегрирования, исходя из начальных условий: 1) $i_a = 0$ при $t = 0$; 2) $i_a = 0$ и $\omega = 0$ при $t = 0$.

Рассмотрим определение постоянных интегрирования для первого случая (4.17). Подставим значения $i_a = 0$ и $t = 0$ в выражение (4.17), тогда $0 = A_1 + A_2$, откуда $A_2 = -A_1$ и

$$i_a = A_1[\exp(p_1 t) - \exp(p_2 t)]. \tag{4.20}$$

Постоянную интегрирования A_1 определим, подставляя в уравнение (4.10) (при начальных условиях $t = 0$, $i_a = 0$ и $\omega = 0$) значение производной тока от выражения (4.20): $di_a/dt = A_1(p_1 - p_2)$; $U = L(di_a/dt)$, откуда $A_1 = (U/L)/(p_1 - p_2)$. Таким образом, ток якоря

$$i_a = [(U/L)/(p_1 - p_2)][\exp(p_1 t) - \exp(p_2 t)]. \tag{4.21}$$

Изменение частоты вращения якоря определим из уравнений (4.10):

$$\omega = (\Psi_{ad}/J_1)\int_0^t i_a\,dt. \tag{4.22}$$

Подставив под знак интеграла выражение (4.21) тока якоря и проинтегрировав его, получим

$$\omega = \frac{\Psi_{ad}U}{J_1 L} \cdot \frac{p_1 [1 - \exp(p_2 t)] - p_2 [1 - \exp(p_1 t)]}{p_1 p_2 (p_1 - p_2)}. \qquad (4.23)$$

Учитывая, что $p_1 p_2 = \omega_0^2 = 1/(C_э L) = \Psi_{ad}^2/(J_1 L)$, получим

$$\omega = (U/\Psi_{ad}) [p_1 (1 - \exp(p_2 t)) - p_2 (1 - \exp(p_1 t))]/(p_1 - p_2).$$

При $t = 0$ имеем $\omega = 0$, а в установившемся режиме при $t = \infty$ $\omega = U/\Psi_{ad}$, т. е. частоту вращения идеального холостого хода.

Кривые изменения тока якоря и частоты вращения представлены на рис. 4.2,*а*. Процесс пуска двигателя в этом случае характе-

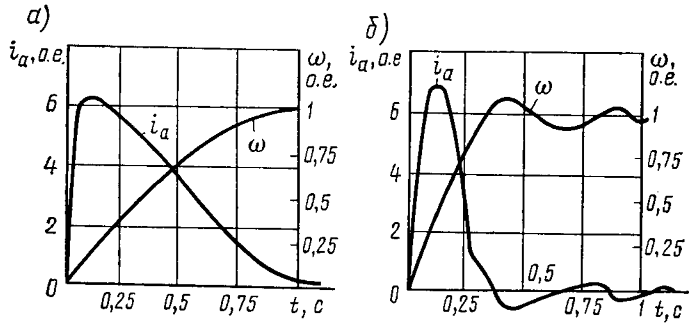

Рис. 4.2. Кривые изменения тока и частоты вращения якоря при безреостатном пуске двигателя постоянного тока в случае апериодического (*а*) и колебательного (*б*) режимов

ризуется резким нарастанием тока якоря до своего максимального значения и медленным спаданием тока благодаря затуханию свободных составляющих тока якоря и уменьшению его под действием ЭДС. Частота вращения якоря плавно приближается к своему установившемуся значению. Аналогично решаем задачу в случае равных вещественных и комплексных корней соответственно:

$$i_a = (U/L)\, t \exp(-\delta t), \qquad (4.24)$$

$$i_a = [U/(\beta L)] \sin \beta t \cdot \exp(-\delta t). \qquad (4.25)$$

Частоту вращения определяем по (4.22). В случае равных вещественных корней получаем предельный случай апериодического процесса. Кривые изменения тока якоря и частоты вращения аналогичны кривым, показанным на рис. 4.2,*а*. При комплексных корнях характеристического уравнения переходный процесс носит колебательный характер, отличающийся колебаниями частоты вращения и тока относительно их установившихся значений (рис. 4.2,*б*). Колебательный характер изменения частоты вращения при пуске двигателя является нежелательным. Во избежание колебательного характера изменения частоты вращения следует повысить динамическую емкость якоря за счет увеличения момента инерции якоря или снижения потока основных полюсов.

Рассмотренный способ решения системы дифференциальных уравнений типичен для исследований переходных процессов классическим методом. Аналогично можно решать задачи при внезапном увеличении и сбросе нагрузки, коротком замыкании генератора, а также при исследовании переходных процессов в трансформаторах.

ГЛАВА 5. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 5.1. Операторные уравнения

Операторные уравнения двухобмоточного трансформатора. Уравнения равновесия напряжения первичной и вторичной обмоток трансформатора при нулевых начальных условиях

$$U_1(p) = r_1 i_1(p) + p\Psi_{11}(p); \quad -U_2(p) = r_2 i_2(p) + p\Psi_{22}(p), \qquad (5.1)$$

где изображения потокосцеплений обмоток

$$\Psi_{11}(p) = L_{11} i_1(p) + L_{12} i_2(p); \quad \Psi_{22}(p) = L_{21} i_1(p) + L_{22} i_2(p); \qquad (5.2)$$

$U_1(p)$, $U_2(p)$ — изображения напряжений, приложенных к обмоткам; $i_1(p)$, $i_2(p)$ — изображения токов первичной и вторичной обмоток.

На практике расчеты ведут, как правило, в системе о.е., заменяя идентификаторы само- и взаимноиндуктивностей равными им в системе о.е. при базисной частоте индуктивными сопротивлениями. Для обмоток трансформатора (штрихи у приведенных параметров опущены) $L_{11} = x_{11}$; $L_{22} = x_{22}$; $L_{12} = L_{21} = x_{12}$, где x_{11}, x_{22} — полные индуктивные сопротивления обмоток трансформатора, равные сумме индуктивных сопротивлений рассеяния и взаимной индукции; x_{12} — сопротивление взаимной индукции обмоток.

Тогда систему уравнений (5.1) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} U_1(p) &= (r_1 + px_{11})\, i_1(p) + px_{12} i_2(p); \\ -U_2(p) &= px_{12}' i_1(p) + (r_2 + px_{22})\, i_2(p). \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

Система операторных уравнений решается как система обычных алгебраических уравнений, поэтому систему операторных уравнений более удобно записывать в матричной форме и решать по правилам матричной алгебры [54]. Уравнения равновесия напряжений обмоток трансформатора в матричной форме при использовании параметров, записанных в о. е., имеют вид

$$\begin{bmatrix} U_1(p) \\ -U_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + px_{11} & px_{12} \\ px_{12} & r_2 + px_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{bmatrix}. \qquad (5.4)$$

В рассматриваемом случае система операторных уравнений представлена в виде трех матриц: матрицы напряжений $[U(p)]$, матрицы сопротивлений $[z(p)]$ и матрицы токов $[i(p)]$. Матрицы напряжений и токов являются матрицами первого ранга, а матрица сопротивлений — второго ранга.

От матричной формы записи легко перейти к обычной форме в виде системы уравнений (5.3). Уравнение для $U_1(p)$ получается в виде суммы произведений элементов первой строки матрицы сопротивлений на соответствующие элементы матрицы токов. Аналогично, $U_2(p)$ равно сумме произведений элементов второй строки матрицы сопротивлений на соответствующие элементы матрицы токов.

Определение операторных изображений целесообразно находить, используя теорию определителей. По правилам матричной алгебры решение системы (5.4) запишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} i_1(p) &= [U_1(p)A_{11}(p) - U_2(p)A_{12}(p)]/D(p); \\ i_2(p) &= [U_1(p)A_{21}(p) - U_2(p)A_{22}(p)]/D(p), \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где определитель матрицы сопротивлений

$$D(p) = \begin{bmatrix} r_1 + px_{11} & px_{12} \\ px_{12} & r_2 + px_{22} \end{bmatrix} = (r_1 + px_{11})(r_2 + px_{22}) - p^2 x_{12}^2 \; ; \tag{5.6}$$

алгебраические дополнения

$$A_{kj}(p) = (-1)^{k+j} D_{kj}(p). \tag{5.7}$$

Миноры матрицы сопротивлений $D_{kj}(p)$ определяются путем вычеркивания k-х столбцов и j-х строк определителя матрицы, тогда

$$\begin{gathered} A_{11}(p) = r_2 + px_{22}; \quad A_{21}(p) = -px_{12}; \\ A_{12}(p) = -px_{12}; \quad A_{22}(p) = r_1 + px_{11}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

В результате подстановки в (5.5) значений $D(p)$ и $A_{kj}(p)$ получим операторные изображения токов:

$$\left.\begin{aligned} i_1(p) &= \frac{U_1(p)(r_2 + px_{22}) + U_2(p)px_{12}}{(r_1 + px_{11})(r_2 + px_{22}) - p^2 x_{12}^2}; \\ i_2(p) &= \frac{-U_1(p)px_{12} - U_2(p)(r_1 + px_{11})}{(r_1 + px_{11})(r_2 + px_{22}) - p^2 x_{12}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

При изменяющихся значениях x_{11}, x_{22} и x_{12} система операторных уравнений, так же как и система дифференциальных уравнений трансформатора, не имеет решения в общем виде.

Переход от операторных уравнений к уравнениям установившегося режима. Часто приходится осуществлять переход от операторных уравнений электрических машин к уравнениям установившегося режима работы. Уравнения установившегося режима дают частное решение системы дифференциальных уравнений — выражения для установившихся составляющих токов. Комплексные уравнения установившегося режима работы трансформатора имеют вид

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_{11})\dot{I}_1 + j_1x_{12}\dot{I}_2; \quad -\dot{U}_2 = jx_{12}\dot{I}_1 + (r_2 + jx_{22})\dot{I}_2. \quad \textbf{(5.10)}$$

Сравнивая комплексные уравнения (5.10) с операторными уравнениями (5.3), приходим к выводу, что уравнения установившегося режима при синусоидальных приложенных напряжениях и постоянных параметрах обмоток могут быть получены из операторных уравнений заменой p на j и изображений функций их комплексными значениями. Если частота приложенного напряжения отлична от частоты, принятой за базисную, то в системе о.е. $f/f_б = s$.

Для этого общего случая при переходе от операторных уравнений к комплексным уравнениям установившегося режима необходимо подставить $p = js$. Эта подстановка используется при получении уравнений установившегося режима машин переменного тока, например АД.

При переходе от операторных уравнений машин постоянного тока к уравнениям установившегося режима следует иметь в виду, что частота тока сети равна нулю; следовательно, $s = f/f_б = 0$ и уравнения установившегося режима могут быть получены подстановкой $p = 0$.

§ 5.2. Внезапное короткое замыкание двухобмоточного трансформатора

На примере определения тока внезапного короткого замыкания (ВКЗ) двухобмоточного трансформатора рассмотрим особенности операторного метода решения задач. При рассмотрении короткого замыкания (КЗ) трансформатора его магнитная цепь может считаться ненасыщенной; следовательно, индуктивные сопротивления обмоток будут постоянными величинами. Предположим, что ВКЗ вторичной обмотки трансформатора произошло при работе трансформатора в режиме холостого хода (ХХ). Учитывая, что ток ХХ трансформатора на два порядка ниже тока КЗ, можно пренебречь его значением и рассмотреть задачу при нулевых начальных условиях. Считая напряжение $U_2(p) = 0$ из (5.4), получим следующую систему операторных уравнений, описывающую процесс ВКЗ:

$$\begin{bmatrix} U_1(p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + px_{11} & px_{12} \\ px_{12} & r_2 + px_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{bmatrix}. \quad \textbf{(5.11)}$$

Решая систему уравнений относительно $i_1(p)$ и $i_2(p)$, получим следующие операторные выражения токов ВКЗ:

$$\left.\begin{aligned} i_1(p) &= \frac{U_1(p)(r_2 + px_{22})}{(r_1 + px_{11})(r_2 + px_{22}) - p^2x_{12}^2} = \frac{U_1(p)}{z_1(p)}; \\ i_2(p) &= \frac{-U_1(p)\,px_{12}}{(r_1 + px_{11})(r_2 + px_{22}) - p^2x_{12}^2} = -G_2(p)\,U_1(p), \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(5.12)}$$

где полное операторное сопротивление первичной обмотки

$$z_1(p) = r_1 + px_{11} - p^2x_{12}^2/(r_2 + px_{22}) = r_1 + px_{11}(p); \qquad (5.13)$$

операторная проводимость вторичной обмотки

$$G_2(p) = \frac{px_{12}/(r_2 + px_{22})}{r_1 + px_{11} - p^2 x_{12}^2/(r_2 + px_{22})} = \frac{px_{12}}{(r_1 + px_{11}(p))(r_2 + px_{22})}; \qquad (5.14)$$

операторное индуктивное сопротивление первичной обмотки

$$x_{11}(p) = x_{11} - px_{12}^2/(r_2 + px_{22}). \qquad (5.15)$$

При $p \to \infty$, т. е. в первый момент времени после начала переходного процесса, а также при $r_2 = 0$, операторное индуктивное сопротивление

$$x_{11}(p) = x_{11} - x_{12}^2/x_{22} = x'_{11}, \qquad (5.16)$$

где x'_{11} — переходное сопротивление трансформатора.

На основании (5.16) $x_{11}(p)$ называют *операторным переходным сопротивлением трансформатора.*

Если напряжение, приложенное к зажимам первичной обмотки трансформатора, изменяется по синусоидальному закону

$$U_1(\tau) = U_{1m}\sin(\omega_1 t + \alpha_0) = U_1\sin(\tau + \alpha_0), \qquad (5.17)$$

где τ — относительное значение времени; α_0 — фазный угол напряжения в момент ВКЗ; U_1 — амплитуда напряжения, выраженная в системе о.е., то изображение напряжения (см. табл. 3.1) будет иметь вид

$$U_1(p) = U_1(p\cos\alpha_0 + p^2\sin\alpha_0)/(p^2 + 1). \qquad (5.18)$$

С учетом зависимостей (5.13), (5.14) и (5.18) изображения токов ВКЗ трансформатора запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} i_1(p) &= U_1\frac{p\cos\alpha_0 + p^2\sin\alpha_0}{(p^2+1)(r_1 + px_{11}(p))}; \\ i_2(p) &= -U_1\frac{(p\cos\alpha_0 + p^2\sin\alpha_0)\,px_{12}}{(p^2+1)(r_1 + px_{11}(p))(r_2 + px_{22})}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

Для окончательного решения задачи необходимо перейти от изображений токов к их оригиналам. Учитывая идентичность решения, этот переход выполним только для тока $i_1(p)$. В первом приближении пренебрегаем активными сопротивлениями обмоток трансформатора, так как они значительно меньше индуктивных сопротивлений. Пренебрегая сопротивлениями, по сути дела, не учитываем затухания переходного процесса, поэтому полученное решение справедливо только для первых периодов переходного процесса с момента ВКЗ. Для большинства задач, когда необходимо оценить амплитуду тока ВКЗ, этого решения вполне достаточно.

С учетом допущений $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ выражение для тока упрощается:

$$i_1(p) = U_1(\cos\alpha_0 + p\sin\alpha_0)/[x'_{11}(p^2+1)]. \qquad (5.20)$$

Оригинал функции находим по таблицам формул операционного исчисления (см. табл. 3.1) или с помощью второй теоремы Хевисайда (3.36).

Для характеристического уравнения

$$F_2(p) = p^2 + 1 = 0 \qquad (5.21)$$

корни

$$p_{1.2} = \pm j, \qquad (5.22)$$

производная

$$F'_2(p) = 2p. \qquad (5.23)$$

Оригинал функции (5.20)

$$i_1(\tau) = \frac{U_1}{x'_{11}}\left[\cos\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\alpha_0 + p_k\sin\alpha_0}{p_k\,2p_k}\exp(p_k\tau)\right] =$$

$$= \frac{U_1}{x'_{11}}\left[\cos\alpha_0 + \frac{\cos\alpha_0 + j\sin\alpha_0}{2j^2}\exp(j\tau) + \frac{\cos\alpha_0 - j\sin\alpha_0}{2(-j)^2}\exp(-j\tau)\right].$$

После ряда тригонометрических преобразований, в которых произведены замены:

$$[\exp(j\tau) + \exp(-j\tau)]/2 = \cos\tau; \quad [\exp(j\tau) - \exp(-j\tau)]/(2j) = \sin\tau;$$

$$\sin\tau\cdot\sin\alpha_0 - \cos\tau\cdot\cos\alpha_0 = -\cos(\tau+\alpha_0),$$

получим

$$i_1(\tau) = (U_1/x'_{11})[\cos\alpha_0 - \cos(\tau+\alpha_0)]. \qquad (5.24)$$

В соответствии с (5.24) кривую тока ВКЗ можно представить в виде двух составляющих: апериодической (постоянной) i_a и периодической $i_п$, изменяющейся с частотой напряжения сети. Из (5.24) видно, что значение апериодической составляющей тока ВКЗ зависит от значения фазного угла α_0 напряжения, т. е. от момента ВКЗ трансформатора. Возникновение апериодической составляющей тока ВКЗ отвечает закону электромагнитной индукции, согласно которому всякий короткозамкнутый контур стремится сохранить свое потокосцепление постоянным. Если ВКЗ произошло при $\alpha_0 = 0$ (напряжение на зажимах первичной обмотки трансформатора проходит через нуль; поток, пронизывающий обмотки трансформатора, максимален), то апериодическая составляющая максимально возможная и равна амплитуде периодической составляющей тока ВКЗ. Если же ВКЗ произошло при $\alpha_0 = \pi/2$ (напряжение U_1 максимально; поток в сердечнике трансформатора равен нулю), то апериодическая составляющая тока ВКЗ отсутствует. Очевидно, что в самом неблагоприятном случае (ВКЗ при $\alpha_0 = 0$) наибольшее значение тока, называемое *ударным током*, достигает удвоенной амплитуды периодической составляющей тока ВКЗ:

$$i_{1\max} = 2U_{1m}/x'_{11}\,. \qquad (5.25)$$

При ВКЗ реального трансформатора, имеющего активные сопротивления обмоток, отличные от нуля, переходный процесс затухает во времени. Определение оригинала тока ВКЗ с учетом активных сопротивлений обмоток трансформатора производится по изложенной выше методике, однако выражения токов получаются громоздкими. Решение можно упростить, если принять $i_1(p) = -i'_2(p)$ (так как ток намагничивания в сотни раз меньше тока ВКЗ трансформатора). При расчетах пользуются приведенными параметрами и токами вторичной обмотки. В этом случае уравнения (5.3) примут вид (штрихи у приведенных параметров опущены)

$$\left.\begin{aligned} U_1(p) &= (r_1 + px_{11})\, i_1(p) - px_{12}\, i_1(p); \\ 0 &= px_{12}\, i_1(p) - (r_2 + px_{22})\, i_1(p). \end{aligned}\right\} \qquad (5.26)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $U_1(p) = (r_1 + px_{11} + r_2 + px_{22} - 2px_{12})i_1(p)$, откуда

$$i_1(p) = \frac{U_1(p)}{r_1 + r_2 + p\,(x_{11} - x_{12}) + p\,(x_{22} - x_{12})} = \frac{U_1(p)}{(r_1 + r_2) + p\,(x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2})}\,, \qquad (5.27)$$

где $x_{\sigma_1} = x_{11} - x_{12}$; $x_{\sigma_2} = x_{22} - x_{12}$ — индуктивные сопротивления рассеяния обмоток трансформатора.

Обозначим $r_1 + r_2 = r_к$; $x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2} = x_к$. Сопротивления $r_к$ и $x_к$ называют *активным* и *индуктивным сопротивлениями короткого замыкания трансформатора*.

С учетом напряжения (5.18) формула (5.27) примет вид

$$i_1(p) = U_1\,(p\cos\alpha_0 + p^2 \sin\alpha_0)/[(p^2 + 1)\,(r_к + px_к)]. \qquad (5.28)$$

Переход от изображения тока к оригиналу производим по изложенной ранее методике. Из характеристического уравнения

$$F_2(p) = (p^2 + 1)\,(r_к + px_к) = 0 \qquad (5.29)$$

определим корни:

$$p_{1,2} = \pm j; \quad p_3 = -r_к/x_к = -1/T_к, \qquad (5.30)$$

где $T_к$ — постоянная времени короткозамкнутого трансформатора.

Производная знаменателя (5.28)

$$F'_2(p) = (3p^2 + 1)\, x_к + 2pr_к. \qquad (5.31)$$

Оригинал функции

$$i_1(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_1\left(p_k \cos\alpha_0 + p_k^2 \sin\alpha_0\right)\exp(p_k\tau)}{\left[p_k\left(3p_k^2+1\right)x_к + 2p_k r_к\right]} =$$

$$= U_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{(\cos\alpha_0 + p_k \sin\alpha_0)\exp(p_k\tau)}{\left(3p_k^2+1\right)x_к + 2p_k r_к}. \qquad (5.32)$$

После подстановки корней характеристического уравнения и ряда преобразований получим

$$i_1(\tau) = U_1\left[r_к/\left(r_к^2 + x_k^2\right)\right]\left[\sin(\tau+\alpha_0) - (x_к/r_к)\cos(\tau+\alpha_0) - \right.$$
$$\left. - (\sin\alpha_0 - (x_к/r_k)\cos\alpha_0)\cdot\exp(-\tau/T_к)\right]. \qquad (5.33)$$

Учитывая, что

$$x_к/r_к = \operatorname{tg}\varphi_к = \sin\varphi_к/\cos\varphi_к; \quad r_к\Big/\sqrt{r_к^2 + x_к^2} = \cos\varphi_к, \qquad (5.34)$$

где $\varphi_к$ — фазный угол тока установившегося КЗ, в окончательном виде получим

$$i_1(\tau) = \left(U_1\Big/\sqrt{r_к^2+x_к^2}\right)\left[\sin(\tau+\alpha_0-\varphi_к) - \right.$$
$$\left. -\sin(\alpha_0-\varphi_к)\exp(-\tau/T_к)\right]. \qquad (5.35)$$

Так как индуктивное сопротивление КЗ трансформатора значительно больше активного, то фазный угол $\varphi_к \approx \pi/2$ и ток ВКЗ

$$i_1(\tau) = \left(U_1\Big/\sqrt{r_к^2+x_к^2}\right)\left[-\cos(\tau+\alpha_0) + \cos\alpha_0\cdot\exp(-\tau/T_к)\right].$$

Это выражение для тока ВКЗ трансформатора отличается от (5.24) затуханием апериодической i_a составляющей тока и уменьшением амплитуд апериодической и периодической $i_п$ составляющих тока за счет активных сопротивлений (рис. 5.1).

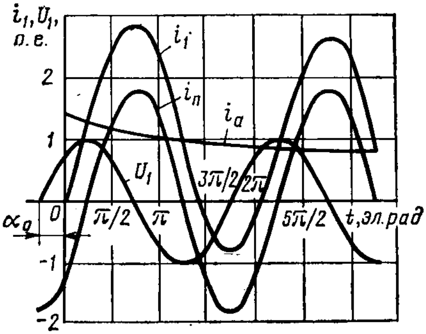

Рис. 5.1. Кривая изменения тока ВКЗ трансформатора

Переходное сопротивление x'_{11} трансформатора и индуктивное сопротивление КЗ равны при условии $x_{12} \to \infty$, что соответствует допущению равенства тока ХХ нулю: $x'_{11} = x_{11} - x_{12}^2/x_{22} = x_{э1} + (1/x_{12} + 1/x_{э2})^{-1} = x_{э1} + x_{э2} = x_к$.

В трансформаторах малых мощностей переходный процесс затухает за один-два периода напряжения сети, в трансформаторах большой мощности — за пять-шесть периодов, после чего по обмоткам трансформатора протекает ток установившегося КЗ, достигающий $(10 \div 15)\, I_{\text{ном}}$.

ГЛАВА 6. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 6.1. Самовозбуждение генератора постоянного тока

Операторный и классический методы решения задач широко применяются в тех случаях, когда системы дифференциальных уравнений равновесия напряжений контуров и уравнения моментов — линейные. Если хотя бы одно уравнение нелинейно, то такая система уравнений решения в общем виде не имеет. Нелинейные системы дифференциальных уравнений решаются численными методами. В ряде случаев решение нелинейных дифференциальных уравнений можно упростить, применяя графоаналитические методы решения, например при исследовании самовозбуждения генератора постоянного тока.

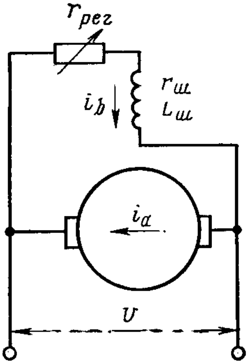

Рис. 6.1. Схема генератора параллельного возбуждения

Первое необходимое условие самовозбуждения машины постоянного тока — наличие поля остаточного намагничивания. Второе условие — такое соединение обмоток возбуждения и якоря, при котором ЭДС обмотки якоря вызывает в обмотке возбуждения ток, усиливающий поле остаточного намагничивания. И третье — требование, чтобы сопротивление цепи обмотки возбуждения было меньше некоторого критического значения, при котором вольт-амперная характеристика этой цепи касательна к характеристике XX машины.

Рассмотрим самовозбуждение генератора постоянного тока параллельного возбуждения при XX машины (рис. 6.1). Уравнения равновесия ЭДС для цепей обмотки якоря и возбуждения:

$$U_b = r_b i_b + d\Psi_{bш}/dt; \quad E - U = r_a i_a + d\Psi_a/dt. \tag{6.1}$$

Так как цепь обмотки якоря замкнута только на обмотку возбуждения и, следовательно, $U_b = U$, $i_b = i_a$, то систему уравнений (6.1) можно преобразовать к одному уравнению:

$$E = (r_a + r_b)\, i_b + d\Psi_a/dt + d\Psi_{bш}/dt. \tag{6.2}$$

Учитывая, что $\Psi_{bш} = L_ш i_b$, $r_b = r_ш + r_{рег}$; $\Psi_a = L_a i_a = L_a i_b$, получим

$$E = \frac{d}{dt}\left[(L_ш + L_a)\, i_b\right] + (r_a + r_b)\, i_b. \tag{6.3}$$

Электродвижущая сила, наводимая в обмотке якоря, может быть представлена в виде суммы ЭДС e_h якоря от потока остаточного намагничивания и ЭДС e_i от потока, созданного обмоткой возбуждения в процессе самовозбуждения, т. е. $E = e_h + e_i$.

При ненасыщенной магнитной цепи и постоянной частоте вращения якоря ЭДС самовозбуждения прямо пропорциональна току возбуждения: $e_i = Ki_b$.

Коэффициенты L_a и $L_ш$ при ненасыщенной магнитной цепи постоянные. Следовательно, уравнение (6.3) линейное и имеет решение в общем виде относительно тока. Если выполняются условия самовозбуждения, то генератор самовозбуждается и при ненасыщенной магнитной цепи процесс самовозбуждения имеет незатухающий характер, т. е. ЭДС якоря бесконечно возрастает. Однако в реальных машинах этого не происходит. При увеличении тока в обмотке возбуждения и, следовательно, потока магнитная цепь машины насыщается. При насыщении магнитной цепи ЭДС якоря становится нелинейной функцией тока возбуждения и индуктивности L_a и $L_ш$ не будут постоянными величинами. Следовательно, уравнение (6.3) становится нелинейным и решения относительно тока в общем виде не имеет.

Рассмотрим графоаналитический метод решения этой задачи. Так как $r_a \ll r_b$ и $L_a \ll L_ш$, то в уравнении (6.3) этими величинами пренебрегают. Пренебрегают также размагничивающим влиянием поперечной реакции якоря, тогда

$$E = d(L_ш i_b)/dt + r_b i_b = w_ш (d\Phi_ш/dt) + r_b i_b$$

или

$$E - r_b i_b = w_ш (d\Phi_ш/dt) = \Delta e. \qquad \textbf{(6.4)}$$

Зная кривую XX и вольт-амперную характеристику цепи возбуждения, можно определить графически разностную ЭДС Δe и рассматривать ее как известную функцию ЭДС E якоря. Учитывая линейную зависимость $d\Phi_ш/dt$ от Δe, можно косвенным путем определить время самовозбуждения и построить зависимость $E = f(t)$. Известно, что ЭДС обмотки якоря всегда пропорциональна потоку; следовательно,

$$E/E_0 = \Phi_ш/\Phi_{ш0}, \qquad \textbf{(6.5)}$$

где $\Phi_{ш0}$, E_0 — установившиеся значения потока возбуждения и ЭДС якоря по окончании процесса самовозбуждения при $r_{рег} = 0$.

Определяем скорость изменения потока

$$d\Phi_ш/dt = (\Phi_{ш0}/E_0)(dE/dt) \qquad \textbf{(6.6)}$$

и, подставляя полученное выражение в (6.4), имеем

$$\Delta e = w_ш (d\Phi_ш/dt) = (w_ш \Phi_{ш0}/E_0)(dE/dt) = T_ш (dE/dt), \qquad \textbf{(6.7)}$$

где постоянная времени обмотки возбуждения

$$T_ш = w_ш \Phi_{ш0}/E_0 = \Psi_{bш0}/E_0 = L_ш i_{b0}/(r_ш i_{b0}) = L_ш/r_ш$$

Поскольку Δe зависит только от ЭДС якоря, уравнение (6.7) можно проинтегрировать, разделив предварительно переменные:

$$dt/T_ш = dE/\Delta e. \qquad (6.8)$$

Решая уравнение относительно времени, прошедшего с момента подключения обмотки якоря к обмотке возбуждения, получим

$$t/T_ш = \int_{e_h}^{E} dE/\Delta e. \qquad (6.9)$$

Входящий в это выражение интеграл называют *относительным временем возбуждения*. По кривым, изображенным на рис. 6.2, *а*,

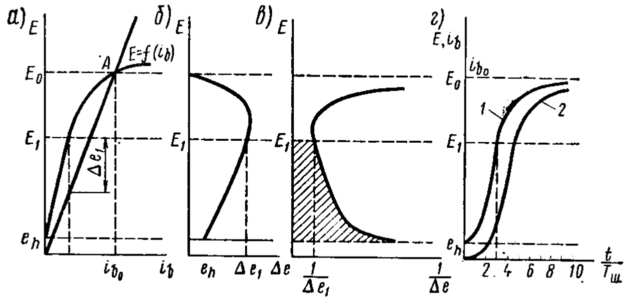

Рис. 6.2. Графическое определение функций $E = f(t/T_ш)$ и $i_b = f(t/T_ш)$

построим зависимость $E = f(\Delta e)$ (рис. 6.2, *б*) и характеристику $E = f(1/\Delta e)$ (рис. 6.2, *в*). Относительное время находится путем графического интегрирования функции $1/\Delta e$, т. е. определения для заданных значений ЭДС, например E_1, площади, ограниченной ординатами кривой $1/\Delta e$, e_h и заданной E_1; площадь S заштрихована (рис. 6.2, *в*).

Относительное время

$$t/T_ш = m_E m_{1/\Delta e} S, \qquad (6.10)$$

где $m_E m_{1/\Delta e}$ — масштаб относительного времени.

Полученные значения E и $t/T_ш$ представим в виде зависимости $E = f(t/T_ш)$, характеризующей нарастание ЭДС якоря во времени в процессе самовозбуждения генератора (рис. 6.2, *г*).

Построив кривую нарастания ЭДС во времени, можно получить кривую нарастания тока возбуждения. Для каждого значения

ЭДС якоря определяем по характеристике ХХ $E = f(i_b)$ соответствующие значения тока возбуждения (кривая 2). Зависимость $i_b = f(t/T_ш)$ (кривая 2) представлена на рис. 6.2, г. Построенные кривые нарастания ЭДС якоря и тока возбуждения показывают, что начальная стадия процесса самовозбуждения характеризуется резким возрастанием ЭДС и тока возбуждения. Окончание процесса самовозбуждения замедлено, кривые E и i_b медленно асимптотически приближаются к своим установившимся значениям.

§ 6.2. Пуск двигателя постоянного тока параллельного возбуждения под нагрузкой

При рассмотрении безреостатного пуска двигателя постоянного тока в уравнении равновесия моментов (4.8) момент сопротивления

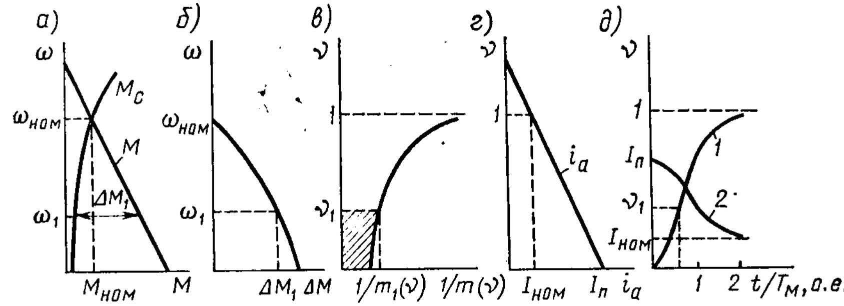

Рис. 6.3. Графическое определение функций $\nu = f(t/T_м)$ и $i_a = f(t/T_м)$

был принят равным нулю. Однако в практике электропривода часто требуется осуществлять пуск двигателей под нагрузкой. Момент сопротивления на валу двигателя, как правило, нелинейная функция частоты вращения. В этом случае уравнение равновесия моментов и система уравнений (4.6), (4.8), описывающая переходный процесс, становятся нелинейными и решение системы уравнений в общем виде невозможно.

Пуск двигателя в ход относится к классу электромеханических переходных процессов. Длительность электромагнитного переходного процесса при включении обмотки якоря в сеть определяется электромагнитной постоянной времени, зависящей от индуктивности и активного сопротивления цепи якоря. Длительность механического переходного процесса определяется моментом инерции вращающихся масс, моментом сопротивления и вращающим электромагнитным моментом. Так как время электромагнитного переходного процесса в обмотке якоря значительно меньше времени разгона двигателя под нагрузкой, то можно считать, что механический переходный процесс протекает при установившихся значениях параметров и электрических величин, т. е. можно пренебречь влиянием электромагнитных переходных процессов в обмотке якоря на пуск двигателя.

Предположим, что электромагнитный момент и момент сопротивления — функции только частоты вращения двигателя — и что эти зависимости известны и имеют, например, вид, представленный на рис. 6.3, *а*, т. е. будем пользоваться статической механической характеристикой двигателя. Рассматривая только механический переходный процесс, по известным характеристикам $M = f(\omega)$, $M_c = f(\omega)$ можно графически определить момент $\Delta M = M - M_c$, являющийся причиной ускорения вращения якоря, и построить зависимость $\omega = f(\Delta M)$. Учитывая линейную связь между ΔM и угловой скоростью изменения ω, следующую из равенства

$$\Delta M = M - M_c = J_1 (d\omega/dt), \tag{6.11}$$

можно определить время разгона двигателя и построить зависимость $\omega = f(t)$. Очевидно, что выражение (6.11) можно проинтегрировать, разделив переменные:

$$t = \int_0^\omega (J_1/\Delta M(\omega))\, d\omega. \tag{6.12}$$

Для графического интегрирования удобно преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы его числитель и знаменатель были отвлеченными числами. С этой целью угловую частоту выражаем в долях номинальной: $\nu = \omega/\omega_{ном}$, а разность моментов — в долях номинального момента: $m = \Delta M/M_{ном}$. Учитывая, что $\omega = f(\Delta M/M_{ном})$, а следовательно, $\nu = f(m)$, получим

$$t = J_1 \frac{\omega_{ном}}{M_{ном}} \int_0^\omega \frac{d(\omega/\omega_{ном})}{\Delta M(\omega)/M_{ном}} = J_1 \frac{\omega_{ном}}{M_{ном}} \int_0^\nu \frac{d\nu}{m(\nu)}. \tag{6.13}$$

Величина $J_1\omega_{ном}/M_{ном} = T_м$ — *постоянная времени разгона двигателя.* Тогда *относительное время разгона двигателя*

$$t/T_м = \int_0^\nu (1/m(\nu))\, d\nu. \tag{6.14}$$

По известным механическим характеристикам двигателя и нагрузки строим зависимости $\omega = f(\Delta M)$ и $\nu = f(1/m(\nu))$ (рис. 6.3, *б*, *в*). Для заданных значений относительной частоты вращения путем графического интегрирования функции $\nu = f(1/m(\nu))$, т. е. определяя площадь, заключенную между осями координат, функцией $1/m(\nu)$ и заданной частотой ν, определяем относительное время, за которое двигатель наберет эту частоту вращения. На рис. 6.3, *в* в качестве примера заштрихована площадь, дающая относительное время разгона двигателя до ν_1. Полученные значения частот вращения и относительного времени можно представить в виде кривой $\nu = f(t/T_м)$ (рис. 6.3, *д*, кривая *1*).

Кроме зависимости частоты вращения двигателя от времени при пуске двигателя часто бывает необходимо знать значение пускового тока и изменение тока во времени, например для оценки нагрева электрической машины за время пуска. Для построения зависимости $i_a = f(t/T_м)$ требуется знать скоростную характеристику двигателя, т. е. зависимость $\nu = f(i_a)$ (рис. 6.3, *г*). Используя полученную ранее зависимость $\nu = f(t/T_м)$, для каждого значения частоты вращения по скоростной характеристике определяем соответствующее значение тока якоря и откладываем в функции относительного времени (рис. 6.3, *д*, кривая *2*). Полученная зависимость $i_a = f(t/T_м)$ характеризует изменение тока якоря двигателя в процессе пуска.

Раздел третий

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ С ВЗАИМНО ПЕРЕМЕЩАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ ОБМОТОК

ГЛАВА 7. УРАВНЕНИЯ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ *a, b, c* СТАТОРА И *d, q* РОТОРА

§ 7.1. Уравнения реальных обмоток

В общем случае будем рассматривать трехфазную СМ с явнополюсным ротором (см. рис. 1.1). Такая машина имеет симметричную трехфазную обмотку на статоре. На роторе имеются обмотки возбуждения и демпферная. В синхронных двигателях (СД) демпферная обмотка является пусковой обмоткой, обеспечивающей асинхронный пуск двигателей. В синхронных генераторах (СГ) демпферная обмотка служит в основном для успокоения колебаний ротора, облегчения условий втягивания в синхронизм и устранения перенапряжений в обмотках статора при несимметричных нагрузках.

Система дифференциальных уравнений, описывающих переходные электромеханические процессы в СМ, состоит из уравнений равновесия напряжений всех электрических контуров на статоре и роторе и уравнения моментов (уравнения движения ротора).

В соответствии с принятой в § 1.2 системой координатных осей и положительных направлений фазных токов оси фаз для симметричной трехфазной обмотки статора представляют собой трехлучевую звезду (см. рис. 1.1). Положительное направление продольной оси d ротора совпадает с осью обмотки возбуждения. Направление поперечной оси q ротора опережает ось d на $\pi/2$ эл. рад.

За основной режим работы СМ можно принять работу в режиме двигателя или генератора. В первом случае электромагнитный момент вращения, угол нагрузки и скольжение принимаются положительными в режиме работы двигателя. Во втором случае эти величины принимаются положительными в режиме работы генератора.

Для обмотки статора трехфазной СМ дифференциальные уравнения равновесия напряжений имеют вид

$$U_a = d\Psi_a/dt + r_1 i_a; \quad U_b = d\Psi_b/dt + r_1 i_b;$$
$$U_c = d\Psi_c/dt + r_1 i_c, \tag{7.1}$$

где U_a, U_b, U_c — напряжения на зажимах обмоток статора; Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c, i_a, i_b, i_c — соответственно полные потокосцепления и токи обмоток фаз статора; r_1 — активное сопротивление обмотки фазы.

Уравнение равновесия напряжений для цепи обмотки возбуждения

$$U_f = d\Psi_f/dt + r_f i_f, \tag{7.2}$$

где U_f — напряжение на зажимах обмотки возбуждения; Ψ_f, i_f — потокосцепление и ток обмотки возбуждения; r_f — активное сопротивление обмотки.

Ротор явнополюсной СМ имеет магнитную и электрическую несимметрию. Магнитная несимметрия обусловлена различной магнитной проводимостью воздушного зазора по продольной и поперечной осям ротора. Электрическая несимметрия имеет место в том случае, когда ротор имеет только обмотку возбуждения или когда стержни демпферной обмотки расположены только в полюсных наконечниках и объединены по каждому полюсу отдельно. Демпферная обмотка выполняется, как правило, полной и симметричной относительно осей ротора d, q. В соответствии с этим она представляется двумя системами короткозамкнутых контуров. Контуры одной системы имеют магнитную ось, совпадающую с осью d, второй системы — с осью q.

На рис. 2.2, *а* показаны пути продольных составляющих токов (т. е. токов, протекающих по контурам продольной оси), а на рис. 2.2, *б* — пути поперечных составляющих токов. Действительное распределение токов в стержнях и кольцах демпферной обмотки определяется наложением продольных и поперечных составляющих токов. Так как оси d и q перпендикулярны, взаимная индукция между системами контуров демпферной обмотки по осям d и q отсутствует.

Пусть на полюсном наконечнике находится n_c стержней. Тогда при четном n_c демпферная обмотка будет иметь по осям d и q равное число короткозамкнутых контуров, т. е. $n = n_c/2$. Для каждого контура демпферной обмотки составляются уравнения равновесия напряжений по продольной и поперечной осям соответственно:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= d\Psi_{1d}/dt + r_{11d}i_{1d} + r_{12d}i_{2d} + \cdots + r_{1nd}i_{nd};\\ 0 &= d\Psi_{2d}/dt + r_{21d}i_{1d} + r_{22d}i_{2d} + \cdots + r_{2nd}i_{nd};\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 &= d\Psi_{nd}/dt + r_{n1d}i_{1d} + r_{n2d}i_{2d} + \cdots + r_{nnd}i_{nd}; \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= d\Psi_{1q}/dt + r_{11q}i_{1q} + r_{12q}i_{2q} + \cdots + r_{1nq}i_{nq};\\ 0 &= d\Psi_{2q}/dt + r_{21q}i_{1q} + r_{22q}i_{2q} + \cdots + r_{2nq}i_{nq};\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 &= d\Psi_{nq}/dt + r_{n1q}i_{1q} + r_{n2q}i_{2q} + \cdots + r_{nnq}i_{nq}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

где Ψ_{nd}, i_{nd}, Ψ_{nq}, i_{nq} — потокосцепление и ток n-го контура демпферной обмотки по продольной и поперечной осям; r_{nnd}, r_{nnq} — активное сопротивление n-го контура току n-го контура; $r_{(n\pm k)nd}$, $r_{(n\pm k)nq}$ — активное сопротивление $(n \pm k)$-го контура току n-го контура, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Общее число уравнений равновесия напряжений СМ будет $m_1 + 1 + 2n$, где m_1 — число фаз обмотки статора, $2n$ — суммарное число контуров демпферной обмотки по продольной и поперечной осям. Использование такой системы уравнений встречает известные трудности.

Если не ставится задача расчета токов в стержнях демпферной обмотки, то последняя с достаточной точностью учитывается двумя эквивалентными контурами: по продольной и поперечной осям (см. § 2.2). Поэтому при исследовании пусковых и нестационарных переходных процессов СМ многоконтурные демпферные обмотки заменяются двумя эквивалентными обмотками по осям d и q. Тогда уравнения равновесия напряжений для эквивалентных демпферных обмоток записывают в виде

$$0 = d\Psi_{yd}/dt + r_{yd}i_{yd}; \quad 0 = d\Psi_{yq}/dt + r_{yq}i_{yq}, \tag{7.5}$$

где Ψ_{yd}, i_{yd}, Ψ_{yq}, i_{yq} — потокосцепления и токи эквивалентных демпферных обмоток по продольной и поперечной осям соответственно; r_{yd}, r_{yq} — активные сопротивления эквивалентных обмоток.

При необходимости исследования переходного процесса с учетом изменения частоты вращения ротора к уравнениям равновесия напряжений необходимо добавить уравнение электромагнитного момента (Н·м)

$$M = M_c + J\,(d\Omega/dt), \tag{7.6}$$

где M_c — момент сопротивления на валу, Н·м; J — момент инерции вращающихся масс, кг·м².

При работе в генераторном режиме знаки моментов M и M_c изменяются на противоположные. Чтобы уравнение (7.6) записать в о.е., необходимо обе его части разделить на базисный момент $M_б = (P_б/\omega_б)p$.

Примем прежние обозначения

$$M = M_c + M_д, \tag{7.7}$$

где динамический момент

$$M_д = [J/(pM_б)]\,(d\omega/dt) = [J\omega_б/(p^2P_б)]\,(d\omega/dt).$$

Умножим числитель и знаменатель этого выражения на $\omega_б^2$, тогда

$$M_д = \frac{J\omega_б^3}{p^2P_б}\,\frac{d\,(\omega/\omega_б)}{d\,(\omega_б t)} = T_J\,\frac{d\nu}{d\tau}, \tag{7.8}$$

где $T_J = J\omega_б^3/(p^2P_б)$ — инерционная постоянная вращающихся масс, эл. с; $\nu = \omega/\omega_б$ — угловая частота вращения, о.е.; $\tau = \omega_б^2 t$ — время, эл. с.

§ 7.2. Потокосцепления и индуктивности обмоток синхронной машины

Потокосцепления, входящие в уравнения равновесия напряжений, выразим через токи и параметры обмоток. Если насыщение магнитопровода машины постоянно, то потокосцепления обмоток —

линейные функции токов. Поэтому потокосцепления обмоток СМ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_a &= l_a i_a + l_{ab} i_b + l_{ac} i_c + l_{af} i_f + l_{ayd} i_{yd} + l_{ayq} i_{yq};\\
\Psi_b &= l_{ba} i_a + l_b i_b + l_{bc} i_c + l_{bf} i_f + l_{byd} i_{yd} + l_{byq} i_{yq};\\
\Psi_c &= l_{ca} i_a + l_{cb} i_b + l_c i_c + l_{cf} i_f + l_{cyd} i_{yd} + l_{cyq} i_{yq};\\
\Psi_f &= l_{fa} i_a + l_{fb} i_b + l_{fc} i_c + L_f i_f + L_{fyd} i_{yd};\\
\Psi_{yd} &= l_{yda} i_a + l_{ydb} i_b + l_{ydc} i_c + L_{ydf} i_f + L_{yd} i_{yd};\\
\Psi_{yq} &= l_{yqa} i_a + l_{yqb} i_b + l_{yqc} i_c + L_{yq} i_{yq}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Так как при выводе уравнений магнитная проницаемость стали принимается бесконечно большой по сравнению с магнитной проницаемостью воздуха, то взаимные индуктивности с переставленными подстрочными индексами равны $l_{ab} = l_{ba}$; $l_{af} = l_{fa}$; $l_{ayd} = l_{yda}$ и т. д. Кроме того, все индуктивности в уравнениях (7.9) —функции геометрических координат. При этом одни из индуктивностей зависят от положения ротора в пространстве, другие — не зависят и поэтому имеют постоянное значение. Постоянными будут индуктивности и взаимные индуктивности тех контуров, относительно которых конфигурация магнитной системы остается неизменной при любом положении ротора.

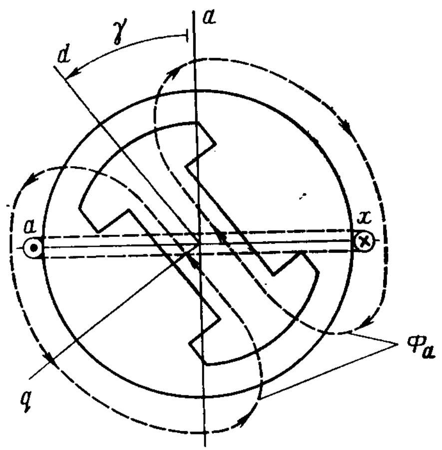

Рис. 7.1. Картина изменения индуктивности обмотки фазы a статора

Индуктивности обмоток фаз статора. Индуктивности обмоток фаз статора — периодические функции угла γ между осью фазы и продольной осью ротора. Рассмотрим, как изменяется индуктивность фазы a. При $\gamma = 0$ (рис. 7.1) проводимость магнитного пути потоку Φ_a фазы a максимальна. При повороте ротора магнитная проводимость уменьшается и при $\gamma = \pi/2$ достигает своего наименьшего значения, так как по оси фазы a будет расположен участок межполюсного пространства с большой величиной воздушного зазора. Поэтому при одном и том же значении тока, протекающего по обмотке фазы a статора, магнитный поток, создаваемый фазой, в первом случае ($\gamma = 0$) будет больше, чем во втором ($\gamma = \pi/2$). При дальнейшем вращении ротора, т. е. при $\gamma > \pi/2$, проводимость магнитного потока возрастает и при $\gamma = \pi$ вновь достигает максимума. Таким образом, потокосцепление фазы, а следовательно, и ее индуктивность будут максимальны, если ось фазы совпадает с продольной осью d ротора, и минимальны, если ось фазы совпадает с поперечной осью q ротора (рис. 7.2).

Зависимость l_a от положения ротора в пространстве — периодическая функция, период изменения равен π. Это объясняется тем, что при повороте ротора на π радиан воздушный зазор в любой точке расточки статора становится равным первоначальному, т. е. $l_a = f(2\gamma)$.

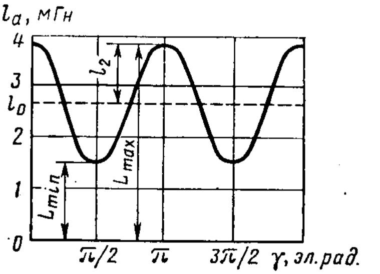

Рис. 7.2. Зависимость индуктивности обмотки фазы статора от положения ротора в пространстве

Учитывая, что обмотка статора симметрична и оси обмоток фаз смещены относительно друг друга на $2\pi/3$, индуктивности обмоток фаз b и c статора представим периодическими функциями $l_b = f[2(\gamma - 2\pi/3)]$, $l_c = f[2(\gamma + 2\pi/3)]$. Рассматриваемые индуктивности — четные функции угла γ, поэтому имеют одинаковое значение как для положительного, так и для отрицательного угла. Это объясняется тем, что магнитная проводимость для потока обмотки фазы постоянна независимо от того, в какую сторону от оси фазы поворачивается ротор на угол γ.

Всякую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Четные периодические функции содержат при разложении в ряд Фурье только косинусные члены. Поэтому индуктивности обмоток фаз представим в виде

$$l_a = l_0 + l_2 \cos 2\gamma + l_4 \cos 4\gamma + \cdots ;$$

$$l_b = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma - 2\pi/3) + l_4 \cos 4(\gamma - 2\pi/3) + \cdots ;$$

$$l_c = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma + 2\pi/3) + l_4 \cos 4(\gamma + 2\pi/3) + \cdots .$$

Обычно ограничиваются рассмотрением только двух первых членов разложения в ряд, тогда

$$\left.\begin{aligned} &l_a = l_0 + l_2 \cos 2\gamma ; \quad l_b = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma - 2\pi/3); \\ &l_c = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma + 2\pi/3). \end{aligned}\right\} \quad (7.10)$$

Эти выражения можно преобразовать, вводя обозначения $L_d = L_{max}$, $L_q = L_{min}$. В соответствии с рис. 7.2 среднее значение индуктивности фазы

$$l_0 = (L_{max} + L_{min})/2 = (L_d + L_q)/2, \quad (7.11)$$

а амплитуда изменения l_a по отношению к среднему значению

$$l_2 = (L_{max} - L_{min})/2 = (L_d - L_q)/2. \quad (7.12)$$

В отличие от обмоток фаз статора для обмотки возбуждения и демпферной при вращении явнополюсного ротора магнитная проводимость потока этих обмоток не изменяется. Следовательно, индуктивности роторных обмоток возбуждения и демпферной не зависят от положения ротора относительно статора и являются постоянными (если не учитывать изменение насыщения магнитной цепи) величинами:

$$L_f = \text{const}; \quad L_{yd} = \text{const}; \quad L_{yq} = \text{const}. \tag{7.13}$$

Взаимные индуктивности обмоток фаз статора. Магнитные потоки взаимной индукции между обмотками фаз статора, так же как

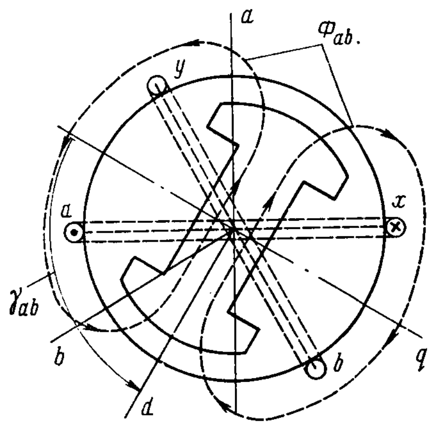

Рис. 7.3. Картина изменения взаимной индуктивности обмотки фаз a и b статора

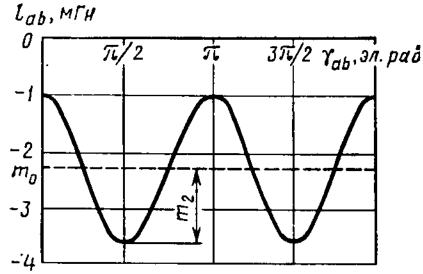

Рис. 7.4. Зависимость взаимной индуктивности обмотки фаз a и b статора от положения ротора в пространстве

и потоки самоиндукции, зависят от положения ротора в пространстве. Взаимная индуктивность фаз максимальна тогда, когда поток, созданный током одной из фаз и связанный с обеими фазами, будет максимальным, т. е. когда магнитная проводимость потока взаимной индукции этих фаз наибольшая. Это имеет место при таком положении ротора в пространстве, когда продольная ось ротора перпендикулярна линии, проведенной между магнитными осями рассматриваемых фаз (рис.7.3). При повороте ротора на $\pi/2$ эл. рад на пути потока Φ_{ab} взаимной индукции фаз лежит большой воздушный зазор межполюсного пространства, поэтому проводимость магнитного потока, а следовательно, и взаимная индуктивность фаз будут минимальны. Взаимная индуктивность между обмотками фаз статора отрицательна, так как угол сдвига фаз больше $\pi/2$, и является четной функцией угла между осью d и линией, проведенной между магнитными осями рассматриваемых фаз. Например, взаимная индуктивность фаз a и b — четная функция угла γ_{ab}. Очевидно, что при повороте ротора на угол π взаимная индуктивность l_{ab} (рис. 7.4) имеет такое же значение, как и в исходном положении ротора. Наибольшая величина l_{ab} имеет место при $\gamma_{ab} = \pi/2$, что соответствует положению ротора на рис. 7.3. При $\gamma_{ab} = 0$ взаимная индуктивность между фазами a и b минимальна. Ограничиваясь двумя первыми членами разложения в ряд Фурье, запишем

$$l_{ab} = -m_0 + m_2 \cos 2\gamma_{ab}, \tag{7.14}$$

где m_0 — постоянная составляющая взаимной индуктивности обмоток статора; m_2 — амплитуда периодической составляющей взаимной индуктивности.

Рассматривая индуктивности (7.10) и взаимные индуктивности (7.14), приходим к выводу, что глубина изменения этих величин, т. е. разность между наибольшими и наименьшими значениями, в обоих случаях одинакова [26], так как причина изменения l_a и l_{ab} одна и та же. Из этого следует, что $m_2 = l_2$.

Знак минус при m_0 в выражении (7.14) обусловлен тем, что оси обмоток фаз сдвинуты относительно друг друга на угол $2\pi/3$ рад, а следовательно, поток взаимной индукции ориентирован против положительного направления оси контура.

Чтобы найти выражения для взаимных индуктивностей l_{ac} и l_{bc}, необходимо в (7.14) вместо угла γ_{ab} подставить соответственно $\gamma_{ab} + 2\pi/3$ и $\gamma_{ab} - 2\pi/3$. Так как $\gamma_{ab} = \gamma - \pi/3$, то выражения для взаимных индуктивностей обмоток фаз статора представим в виде

$$\left.\begin{aligned} l_{ab} = -m_0 + l_2 \cos(2\gamma - 2\pi/3); \quad l_{bc} = -m_0 + l_2 \cos 2\gamma; \\ l_{ca} = -m_0 + l_2 \cos(2\gamma + 2\pi/3). \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Взаимные индуктивности обмоток фаз статора с обмотками ротора. Так как обмотки ротора СМ перемещаются относительно обмоток статора, то взаимные индуктивности любой обмотки ротора с обмоткой статора изменяются при вращении ротора периодически, достигая наибольшего значения при совпадении магнитных осей обмоток. Учитывая лишь основные гармонические пространственного распределения магнитного потока, взаимные индуктивности между обмоткой возбуждения и обмотками фаз статора запишем в виде

$$l_{af} = L_{afd} \cos\gamma; \quad l_{bf} = L_{afd} \cos(\gamma - 2\pi/3); \quad l_{cf} = L_{afd} \cos(\gamma + 2\pi/3), \tag{7.16}$$

где L_{afd} — взаимная индуктивность фазы a обмотки статора и обмотки возбуждения при совпадении их магнитных осей.

Взаимная индуктивность демпферной обмотки по продольной оси с обмотками фаз статора

$$\begin{aligned} l_{ayd} = L_{ayd} \cos\gamma; \quad l_{byd} = L_{ayd} \cos(\gamma - 2\pi/3); \\ l_{cyd} = L_{ayd} \cos(\gamma + 2\pi/3), \end{aligned} \tag{7.17}$$

где L_{ayd} — взаимная индуктивность демпферной обмотки по продольной оси с обмоткой фазы a статора при совпадении их магнитных осей.

Взаимные индуктивности демпферной обмотки ротора по поперечной оси с обмотками статора (учитывая, что ось q опережает ось d на угол $\pi/2$)

$$\left.\begin{array}{c} l_{ayq} = L_{ayq}\cos(\gamma + \pi/2) = -L_{ayq}\sin\gamma; \\ l_{byq} = -L_{ayq}\sin(\gamma - 2\pi/3); \quad l_{cyq} = -L_{ayq}\sin(\gamma + 2\pi/3) \end{array}\right\} \quad (7.18)$$

Взаимная индуктивность между обмотками возбуждения и демпферной по продольной оси постоянна: $L_{fyd} = \mathrm{const}$. Взаимные индуктивности демпферной обмотки по поперечной оси с обмоткой возбуждения, а также с демпферной обмоткой по продольной оси отсутствуют, так как магнитные оси обмоток сдвинуты на угол $\pi/2$, а магнитная проводимость воздушного зазора обмоток постоянна.

Таким образом, в явнополюсной СМ индуктивности обмоток фаз статора и взаимные индуктивности между обмотками — периодические функции угла γ. При постоянной частоте вращения ротора эти величины — гармонические функции времени, что затрудняет анализ переходных процессов. Подставив выражения для индуктивностей и взаимных индуктивностей в уравнении (7.9), получим, например, для потокосцеплений статора

$$\left.\begin{array}{c} \Psi_a = (l_0 + l_2\cos 2\gamma)\, i_a + [-m_0 + l_2\cos(2\gamma - 2\pi/3)]\, i_b + \\ + [-m_0 + l_2\cos(2\gamma + 2\pi/3)]\, i_c + L_{afd}\cos\gamma \cdot i_f + \\ + L_{ayd}\cos\gamma \cdot i_{yd} - L_{ayq}\sin\gamma \cdot i_{yq}; \\ \Psi_b = [-m_0 + l_2\cos(2\gamma - 2\pi/3)]\, i_a + [l_0 + \\ + l_2\cos 2(\gamma - 2\pi/3)]\, i_b + [-m_0 + l_2\cos 2\gamma]\, i_c + \\ + L_{afd}\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_f + L_{ayd}\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_{yd} - \\ - L_{ayq}\sin(\gamma - 2\pi/3)\, i_{yq}; \\ \Psi_c = [-m_0 + l_2\cos(2\gamma + 2\pi/3)]\, i_a + [-m_0 + \\ + l_2\cos 2\gamma]\, i_b + [l_0 + l_2\cos 2(\gamma + 2\pi/3)]\, i_c + \\ + L_{afd}\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_f + L_{ayd}\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_{yd} - \\ - L_{ayq}\sin(\gamma + 2\pi/3)\, i_{yq}. \end{array}\right\} \quad (7.19)$$

Из (7.19) следует, что потокосцепления — это сложные функции угла γ. Если подставить потокосцепления в уравнения равновесия напряжений, то получим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Решение таких уравнений возможно лишь численными методами и связано с большой вычислительной работой.

§ 7.3. Численные методы решения системы дифференциальных уравнений синхронной машины

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений основаны на разложении в ряд Тейлора искомой функции в окрестностях каждой точки, образованной последовательностью шагов решения. Если ограничиться двумя членами ряда Тейлора, то получим формулу Эйлера. Усовершенствованный метод Эйлера—Коши использует значения трех первых членов ряда. Наиболее точным является метод Рунге — Кутта, позволяющий получать значения первых пяти членов ряда Тейлора. Среди других методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений следует отметить экстраполяционный метод Адамса и метод последовательных интервалов. Метод Адамса требует меньше вычислений на один шаг, чем метод Рунге — Кутта, однако для запоминания значений необходимых разностей для всех переменных он требует большого числа ячеек памяти ЦВМ [25].

На примере расчета тока ВКЗ однофазного неявнополюсного СГ, имеющего на роторе только обмотку возбуждения, рассмотрим применение численных методов. Ротор генератора полагаем шихтованным. Дифференциальные уравнения напряжений обмоток статора и ротора (7.1) — (7.2) для рассматриваемого генератора (при $U_a = 0$) следующие:

$$0 = d\Psi_a/dt + r_1 i_a; \quad U_f = d\Psi_f/dt + r_f i_f. \tag{7.20}$$

Потокосцепления обмоток (7.9) с учетом (7.16) принимают вид

$$\Psi_a = L_a i_a + L_{afd}\cos\gamma \cdot i_f; \quad \Psi_f = L_{afd}\cos\gamma \cdot i_a + L_f i_f. \tag{7.21}$$

Решая (7.21), найдем значения токов:

$$i_a = \frac{\Psi_a L_f - \Psi_f L_{afd}\cos\gamma}{L_a L_f - (L_{afd}\cos\gamma)^2}; \quad i_f = \frac{\Psi_f L_a - \Psi_a L_{afd}\cos\gamma}{L_a L_f - (L_{afd}\cos\gamma)^2}. \tag{7.22}$$

Рассчитываем в о.е., при этом $\gamma = \tau$. Частота вращения ротора постоянна и равна синхронной.

Метод Эйлера. Записываем систему уравнений (7.20) в форме Коши:

$$d\Psi_a/d\tau = -r_1 i_a; \quad d\Psi_f/d\tau = U_f - r_f i_f. \tag{7.23}$$

Численное интегрирование выражений (7.23) выполним по формулам [25]:

$$\Psi_a^n = \Psi_a^{n-1} - \Delta\tau r_1 I_a^{n-1}; \quad \Psi_f^n = \Psi_f^{n-1} + \Delta\tau\,(U_f - r_f I_f^{n-1}), \tag{7.24}$$

где Ψ_a^n, Ψ_f^n —потокосцепления на n-м шаге решения; Ψ_a^{n-1}, Ψ_f^{n-1}, I_a^{n-1}, I_f^{n-1} —потокосцепления и токи на предшествующем (n— 1)-м шаге решения; $\Delta\tau$ — величина шага.

Определив потокосцепления Ψ_a^n, Ψ_f^n, находим по (7.22) токи на n-м шаге решения, причем

$$\gamma = \gamma^n = \gamma^{n-1} + \Delta\gamma. \tag{7.25}$$

При измерении текущего угла поворота ротора $\Delta\gamma = \Delta\tau$ (эл. рад). Значения токов и потокосцеплений на первом шаге решения определяются начальными (граничными) условиями задачи. Например, при ВКЗ при $\tau = 0$ имеем

$$I_a = 0; \quad I_f = I_{f0}; \quad \Psi_a = L_{afd} I_{f0}; \quad \Psi_f = L_f I_{f0},$$

где I_{f0} — ток возбуждения в момент КЗ.

Структурная схема алгоритма решения задачи на ЦВМ показана на рис. 7.5. Величина шага решения определяется желаемой

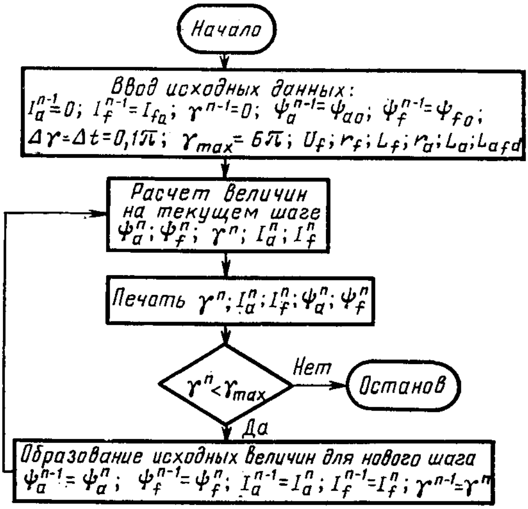

Рис. 7.5. Структурная схема программы расчета методом Эйлера

точностью решения и соображениями минимума расхода машинного времени на ЦВМ. Для учебных задач достаточно принять $\Delta\gamma = \Delta\tau = 0{,}1\pi$. Окончание решения задачи контролируется заданным значением γ_{max}. После каждого шага расчета на печать выдаются текущие значения времени (угла γ), токов и потокосцеплений.

Метод последовательных интервалов. Метод позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям относительно малых приращений переменных. Применительно к электрическим машинам такой метод разработал В. Т. Касьянов. По сравнению с другими численными методами он при одинаковой точности получаемых результатов требует значительно меньшего количества вычислительных операций. Подставляя производные потокосцеплений (7.21) в уравнения (7.20), получим

$$\left.\begin{aligned} 0 &= L_a (di_a/d\tau) + L_{afd}\cos\tau (di_f/d\tau) - L_{afd}\sin\tau \cdot i_f + r_1 i_a; \\ U_f &= L_f (di_f/d\tau) + L_{afd}\cos\tau (di_a/d\tau) - L_{afd}\sin\tau \cdot i_a + r_f i_f. \end{aligned}\right\} \quad (7.26)$$

В зависимости от требуемой точности задаемся интервалом времени $\Delta\tau$. Обозначим значения токов статора и ротора в начале любого рассматриваемого интервала времени через i'_a и i'_f, а средние значения токов на интервале — через

$$i_{a\,\text{ср}} = i'_a + \Delta i_a/2; \quad i_{f\,\text{ср}} = i'_f + \Delta i_f/2, \tag{7.27}$$

где Δi_a и Δi_f — приращения токов на интервале.

Заменим в системе уравнений (7.26) значения производных на отношения $di_a/d\tau = \Delta i_a/\Delta\tau$, $di_f/d\tau = \Delta i_f/\Delta\tau$, а мгновенные значения токов — на их средние значения на интервале. После группирования членов с одинаковыми неизвестными получим

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{L_a}{\Delta\tau} + \frac{r_1}{2}\right)\Delta i_a + \left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)L_{afd}\Delta i_f = \\
&\qquad = -r_1 i'_a + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_f; \\
&\left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)L_{afd}\Delta i_a + \left(\frac{L_f}{\Delta\tau} + \frac{r_f}{2}\right)\Delta i_f = \\
&\qquad = U_f - r_f i'_f + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_a.
\end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Решим систему (7.28) относительно приращений токов:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta i_a = {} & \left[\left(\frac{L_f}{\Delta\tau} + \frac{r_f}{2}\right)\left(-r_1 i'_a + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_f\right) - \right. \\
& \left. -\left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)L_{afd}\left(U_f - r_f i'_f + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_a\right)\right] / \\
& /\left[\left(\frac{L_f}{\Delta\tau} + \frac{r_f}{2}\right)\left(\frac{L_a}{\Delta\tau} + \frac{r_1}{2}\right) - \left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)^2 L^2_{afd}\right]; \\
\Delta i_f = {} & \left[\left(\frac{L_a}{\Delta\tau} + \frac{r_1}{2}\right)\left(U_f - r_f i'_f + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_a\right) - \right. \\
& \left. -\left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)L_{afd}\left(-r_1 i'_a + L_{afd}\sin\tau\cdot i'_f\right)\right] / \\
& /\left[\left(\frac{L_f}{\Delta\tau} + \frac{r_f}{2}\right)\left(\frac{L_a}{\Delta\tau} + \frac{r_1}{2}\right) - \left(\frac{\cos\tau}{\Delta\tau} - \frac{\sin\tau}{2}\right)^2 L^2_{afd}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

Периодические функции на рассматриваемом интервале рассчитывают как

$$\sin\tau = \sin(\tau' + \Delta\tau/2); \quad \cos\tau = \cos(\tau' + \Delta\tau/2), \tag{7.30}$$

где τ' — момент времени, соответствующий началу рассматриваемого интервала.

Начальные значения токов обмоток статора и ротора для момента замыкания ($\tau = 0$) известны: $i' = 0$; $i'_f = i_{f0}$. Это позволяет однозначно определить приращение токов на первом интервале. Значения токов в конце первого интервала

$$i''_{a1} = i'_a + \Delta i_a; \quad i''_{f1} = i'_f + \Delta i_f \tag{7.31}$$

являются одновременно начальными значениями токов для второго интервала. Это позволяет найти приращение токов на втором интервале, затем определить конечные значения токов в конце второго интервала и т. д.

Расчет методом последовательных интервалов выполняется на ЦВМ. Структурная схема программы решения задачи представлена на рис. 7.6. Построение кривых токов статора и ротора показано на рис. 7.7.

Метод последовательных интервалов позволяет рассчитывать токи с учетом нелинейности коэффициентов, например с учетом влияния насыщения магнитной цепи на параметры машины. При

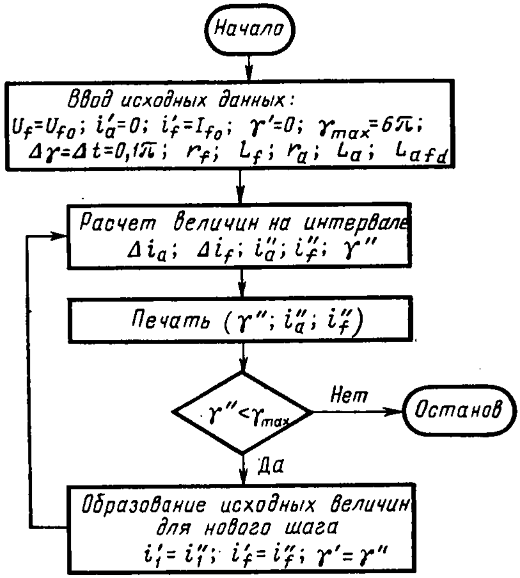

Рис. 7.6. Структурная схема программы расчета методом последовательных интервалов

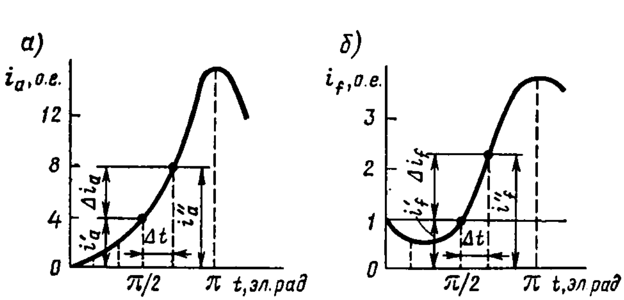

Рис. 7.7. Приращения токов статора (*а*) и ротора (*б*) на интервале $\Delta\tau$

этом вид уравнений остается неизменным, однако для каждого интервала в (7.29) подставляют свои значения коэффициентов L_a, L_f, L_{afd}, т. е. при расчете необходимо знать зависимости $L_a = f(i_a)$, $L_f = f(i_f)$ и $L_{afd} = f(i_f)$, полученные заранее опытным или расчетным путем.

При расчете приращений токов вместо постоянных индуктивностей необходимо подставлять их средние значения, например $L_{a\text{ср}} = (L_a^{\prime\prime} + L_a^{\prime})/2$ (рис. 7.8). Но так как значения индуктивностей в конце интервала неизвестны, делаем два приближения. В первом приближении принимают $L_{a\text{ср}} = L_a^{\prime}$, $L_{f\text{ср}} = L_f^{\prime}$, $L_{afd\text{ср}} = L_{afd}^{\prime}$ и рассчитывают приращения токов. Затем находят значения индуктивностей $L_a^{\prime\prime}$, $L_f^{\prime\prime}$, $L_{afd}^{\prime\prime}$ и, определив средние значения этих коэффициентов на интервале, пересчитывают значения токов во втором приближении.

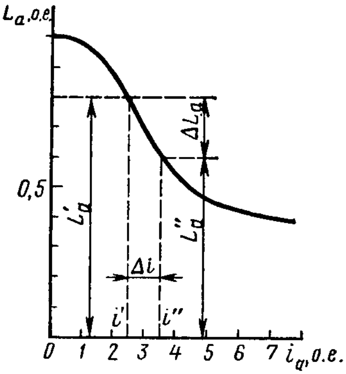

Рис. 7.8. Определение индуктивности обмотки статора

Для второго и последующих интервалов вместо двух приближений используют экстраполяцию коэффициентов индуктивности. По известному значению тока в начале интервала принимают приращение тока на интервале равным предыдущему приращению и определяют по кривой некоторое приближенное значение средней индуктивности на интервале. Если коэффициенты после уточнения отличаются от принятых незначительно, то второго приближения не требуется.

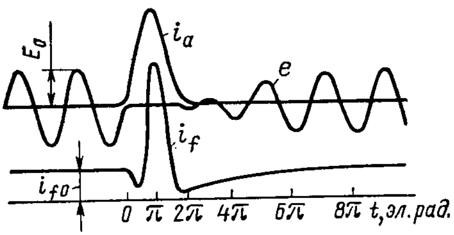

Рис. 7.9. Кривые ЭДС и токов i_a, i_f

Типичные кривые изменения токов обмоток однофазного СГ при ВКЗ представлены на рис. 7.9.

Для расчета ограничимся одним положительным всплеском тока. При повороте ротора в пределах от $\gamma = 0$ до $\gamma = \pi/2$ проекции векторов потока возбуждения на ось обмотки фазы статора и, наоборот, потока статора на ось обмотки возбуждения положительны. Поток реакции якоря стремится проникнуть в тело ротора в направлении, совпадающем с направлением потока возбуждения. Аналогичное явление наблюдается и в последней четверти периода $\gamma > (3/2)\pi$ при положительном значении тока якоря. В эти периоды времени в кривой тока возбуждения отчетливо видны провалы по сравнению с начальным значением тока i_{f0} (рис. 7.9). В зависимости от параметров обмоток генератора в эти периоды ток возбуждения может снижаться почти до нуля. Объясняется это тем, что проникновение потока реакции якоря в контур обмотки возбуждения в положительном направлении оси ротора вызывает ЭДС реакции якоря, снижающую ток возбуждения. Генератор развозбуждается. Это видно из сравнения значений ЭДС обмотки статора e и тока i_f (после отключения тока статора в момент его перехода через нуль) соответственно с E_0 и i_{f0} до короткого замыкания. Ток возбуждения и ЭДС якоря нарастают с постоянной времени цепи возбуждения. Таким образом, развозбуждение генератора под действием потока реакции якоря происходит в первой и особенно в последней четвертях периода вращения при положительном значении тока якоря.

В табл. 7.1 приведены амплитуды первых всплесков тока обмоток статора и возбуждения при ВКЗ (в момент $\gamma = 0$) однофазного СГ, имеющего следующие параметры (о.е.): $L_a = 1{,}32$; $L_{afd} = 0{,}85$; $L_f = 1{,}24$; $r_1 = 0{,}057$; $r_f = 0{,}094$.

Таблица 7.1

Шаг решения, рад	Максимальные токи, о. е., при использовании метода					
	Эйлера		последовательных интервалов		Рунге—Кутта	
	I_a	I_f	I_a	I_f	I_a	I_f
$\pi/12$	17,7	19,0	19,7	21,1	19,6	21,0
$\pi/24$	18,6	19,9	19,5	21,0	19,5	21,0
$\pi/36$	18,9	20,3	19,5	20,9	19,5	21,0
$\pi/60$	19,1	20,5	19,5	20,9	19,5	20,9

Метод последовательных интервалов менее критичен к выбору шага решения, чем метод Эйлера.

Расчет токов в обмотках однофазного синхронного генератора по полной системе дифференциальных уравнений. Современные ЦВМ позволяют выполнять исследования переходных процессов с учетом реального числа и параметров демпферных контуров. Используя метод смежных контуров, запишем

$$\left.\begin{array}{c} d\Psi_a/d\tau = -r_1 i_a; \\ d\Psi_f/d\tau = U_f - r_f i_f; \\ d\Psi_{D1}/d\tau = -r_{D1} i_{D1} + r_{c2} i_{D2} - r_{cN} i_{DN}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\Psi_{Di}/d\tau = -r_{Di} i_{Di} + r_{c(i+1)} i_{D(i+1)} + r_{c(i-1)} i_{D(i-1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\Psi_{DN}/d\tau = -r_{DN} i_{DN} - r_{c1} i_{D1} + r_{c(N-1)} i_{D(N-1)}, \end{array}\right\} \quad (7.32)$$

где Ψ_{Di} — потокосцепления демпферных контуров; i_{Di} — токи демпферных контуров (рис. 7.10); r_{Di} — активные сопротивления демпферных контуров; r_{ci} — активные сопротивления стержней демпферной обмотки; N — номер последнего контура демпферной обмотки на полюсном делении.

Потокосцепления обмоток

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_a &= L_a i_a + L_{afd}\cos\gamma\cdot i_f + \sum_{i=1}^{N} L_{aD}\cos(\gamma+\alpha_i)\cdot i_{Di};\\
\Psi_f &= L_f i_f + L_{afd}\cos\gamma\cdot i_a + \sum_{i=1}^{N} L_{aD}\cos\alpha_i\cdot i_{Di};\\
\Psi_{D1} &= L_{D1} i_{D1} + L_{aD}\cos(\gamma+\alpha_1)\, i_a + L_{aD}\cos\alpha_1\cdot i_f -\\
&\quad - L_{c2} i_{D2} + L_{cN}\, i_{DN};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Psi_{Di} &= L_{Di}\, i_{Di} + L_{aD}\cos(\gamma+\alpha_i)\, i_a + L_{aD}\cos\alpha_i\cdot i_f -\\
&\quad - L_{c\,(i-1)}\, i_{D\,(i-1)} - L_{c\,(i+1)}\, i_{D\,(i+1)};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Psi_{DN} &= L_{DN}\, i_{DN} + L_{aD}\cos(\gamma+\alpha_N)\cdot i_a + L_{aD}\cos\alpha_N\cdot i_f -\\
&\quad - L_{c\,(N-1)}\, i_{D\,(N-1)} + L_{c1}\, i_{D1},
\end{aligned}\right\} \qquad (7.33)$$

где L_{aD} — взаимная индуктивность демпферного контура с обмоткой статора или возбуждения при совпадении осей; α_i — угол смещения i-го контура демпферной обмотки относительно оси d ротора; L_{ci} — индуктивности стержней демпферной обмотки; L_{Di} — полные индуктивности демпферных контуров.

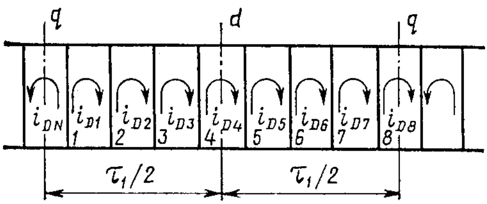

Рис. 7.10. Схема демпферной обмотки

Рассмотрим влияние пространственного распределения стержней демпферной обмотки на токи в стержнях и на ток обмотки статора при ВКЗ. Схема *полной демпферной* обмотки приведена на рис. 7.10. На полюсном делении стержни распределены равномерно. Полагаем, что ВКЗ произошло при $\gamma = 0$. Кривая *1* тока статора первого периода показана на рис. 7.11. Кривые изменения токов в стержнях демпферной обмотки приведены на рис. 7.12. Нумерация кривых соответствует нумерации стержней на рис. 7.10. Расчеты показывают, что амплитуды токов в отдельных стержнях демпферной обмотки примерно равны.

Другая картина наблюдается при неравномерной полной (рис. 7.13,*а*) или неполной продольной (рис. 7.13,*б*) демпферной обмотке, когда в пазах с обмоткой возбуждения, прилегающих к оси q, стержни отсутствуют (стержни *1*, *2* и *7*, *8* на рис. 7.10) или имеется разрыв короткозамыкающих колец по линии оси q. Неравномерность распределения стержней полной демпферной обмотки ведет к возрастанию в 1,5—2 раза тока в стержнях, лежащих на

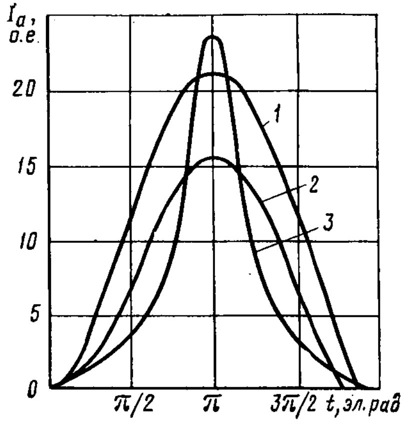

Рис. 7.11. Ток статора при различных демпферных обмотках

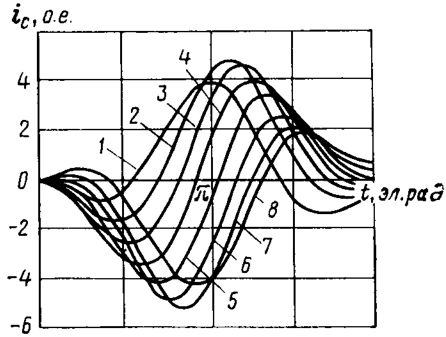

Рис. 7.12. Токи в стержнях равномерной демпферной обмотки

границе зоны с удаленными стержнями, и к существенному снижению амплитуды ударного тока (кривая *2* на рис. 7.11). При неполной продольной демпферной обмотке с разрывом короткозамыкающих колец по линии оси q степень неравномерности распределения токов в стержнях значительно возрастает — до 5—8 раз, а кривая тока статора становится пикообразной (кривая *3* на рис. 7.11).

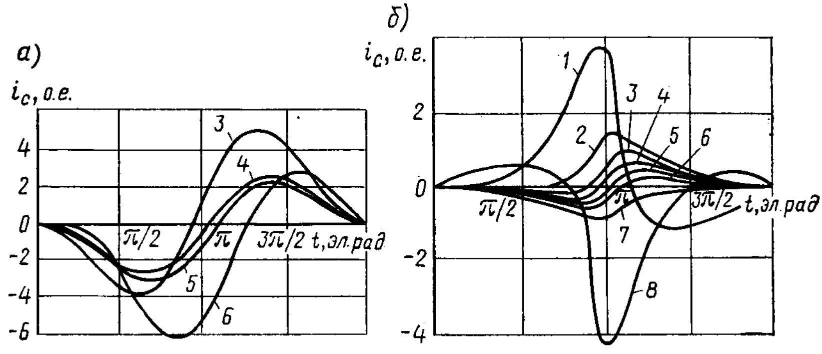

Рис. 7.13. Токи в стержнях неравномерной демпферной обмотки: полной при отсутствии стержней *1*, *2*, *7* и *8* (*а*); неполной продольной (*б*)

Таким образом, наилучшим исполнением демпферной обмотки является конструкция полной обмотки с равномерным распределением стержней по полюсному делению.

§ 7.4. Преобразование системы дифференциальных уравнений синхронной машины к виду, удобному для моделирования на АВМ

Подготовка задачи к решению на АВМ включает следующие этапы: 1) преобразование исходных уравнений к виду, удобному для моделирования; 2) составление структурной схемы модели; 3) выбор масштабов независимых переменных и времени; 4) расчет коэффициентов передачи нелинейных решающих элементов и таблиц настройки функциональных преобразователей.

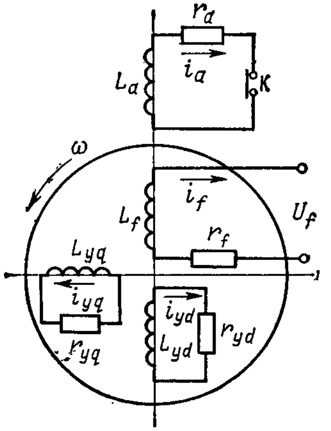

Рис. 7.14. Расчетная схема однофазного синхронного генератора

На примере однофазного неявнополюсного СГ с тремя контурами на роторе (рис. 7.14) рассмотрим составление математической модели. Система дифференциальных уравнений (7.1), (7.2) и (7.5), описывающая режим ВКЗ однофазного генератора (при $U_a = 0$) в форме Коши, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_a/d\tau &= -r_1 i_a; \quad d\Psi_{yd}/d\tau = -r_{yd} i_{yd}; \\ d\Psi_f/d\tau &= U_f - r_f i_f; \quad d\Psi_{yq}/d\tau = -r_{yq} i_{yq}. \end{aligned}\right\} \quad (7.34)$$

Потокосцепления обмоток (7.9) для генератора с равномерным воздушным зазором при использовании о.е. и с учетом того, что параметры контуров ротора приведены к обмотке статора

$$l_{af} = l_{ayd} = L_{ad}\cos\gamma; \quad l_{aq} = -L_{yq}\sin\gamma; \quad L_{fyd} = L_{ad} = L_{aq},$$

равны:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= L_a i_a + L_{ad}\cos\gamma\cdot(i_f + i_{yd}) - L_{ad}\sin\gamma\cdot i_{yq}; \\ \Psi_f &= L_f i_f + L_{ad}\cos\gamma\cdot i_a + L_{ad} i_{yd}; \\ \Psi_{yd} &= L_{yd} i_{yd} + L_{ad}\cos\gamma\cdot i_a + L_{ad} i_f; \\ \Psi_{yq} &= L_{yq} i_{yq} - L_{ad}\sin\gamma\cdot i_a. \end{aligned}\right\} \quad (7.35)$$

Учитывая, что $L_a = L_{a\sigma} + L_{ad}$, $L_f = L_{f\sigma} + L_{ad}$, $L_{yd} = L_{yd\sigma} + L_{ad}$, $L_{yq} = L_{yq\sigma} + L_{ad}$, где L_σ — индуктивности рассеяния соответствующих обмоток, а также что $L_{ad} i_a = L_{ad}(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) i_a$, выражение (7.35) преобразуем путем выделения потокосцеплений взаимоиндукции [42,52]:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{\delta d} &= L_{ad}(i_f + i_{yd} + i_a\cos\gamma); \\ \Psi_{\delta q} &= L_{ad}(i_{yq} - i_a\sin\gamma). \end{aligned}\right\} \quad (7.36)$$

Получим

$$\left.\begin{aligned}\Psi_a = L_{a\sigma} i_a + L_{ad}(i_f + i_{yd} + i_a\cos\gamma)\cos\gamma -\\ - L_{ad}(i_{yq} - i_a\sin\gamma)\sin\gamma = L_{a\sigma} i_a + \Psi_{\delta d}\cos\gamma - \Psi_{\delta q}\sin\gamma;\\ \Psi_f = L_{f\sigma} i_f + L_{ad}(i_f + i_{yd} + i_a\cos\gamma) = L_{f\sigma} i_f + \Psi_{\delta d};\\ \Psi_{yd} = L_{yd\sigma} i_{yd} + L_{ad}(i_f + i_{yd} + i_a\cos\gamma) = L_{yd\sigma} i_{yd} + \Psi_{\delta d};\\ \Psi_{yq} = L_{yq\sigma} i_{yq} + L_{ad}(i_{yq} - i_a\sin\gamma) = L_{yq\sigma} i_{yq} + \Psi_{\delta q}.\end{aligned}\right\} \quad (7.37)$$

Эти уравнения позволяют получить устойчивую математическую модель СГ с простой структурной схемой (рис. 7.15). Из

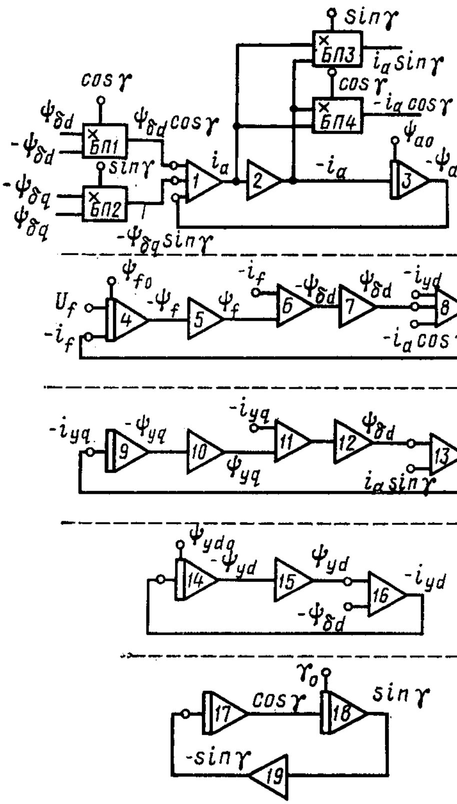

Рис. 7.15. Структурная схема математической модели для решения на АВМ

выражений (7.37) определим токи i_a и i_{yd}, а из (7.36) — токи i_f и i_{yq}:

$$\left.\begin{aligned}i_a = (1/L_{a\sigma})(\Psi_a - \Psi_{\delta d}\cos\gamma + \Psi_{\delta q}\sin\gamma);\\ i_{yd} = (1/L_{yd\sigma})(\Psi_{yd} - \Psi_{\delta d});\\ i_f = \Psi_{\delta d}/L_{ad} - i_{yd} - i_a\cos\gamma; \quad i_{yq} = \Psi_{\delta q}/L_{ad} + i_a\sin\gamma.\end{aligned}\right\} \quad (7.38)$$

Рассматриваемые системы уравнений (7.34) и (7.38) состоят из восьми уравнений и при заданных значениях параметров обмоток и напряжения возбуждения U_f содержат девять переменных, причем время τ (угол γ) является независимой переменной. Реализация математической модели осуществлена с помощью четырех блоков умножения (БП1—БП4), шести интеграторов (*3*, *4*, *9*, *14*, *17* и *18*), шести сумматоров (*1*, *6*, *8*, *11*, *13* и *16*) и семи инверторов (*2*, *5*, *7*, *10*, *12*, *15*, *19*). Составление структурной схемы модели, выбор масштабов независимых переменных и расчет коэффициентов передачи изложены в [42].

ГЛАВА 8. УРАВНЕНИЯ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ α, β СТАТОРА И d, q РОТОРА

§ 8.1. Преобразование переменных

Для уменьшения числа дифференциальных уравнений и количества составляющих в выражениях потокосцеплений трехфазную обмотку статора заменяют двухфазной, оси α, β которой образуют ортогональную систему (см. § 3.1—3.2). Такие обмотки при ненасыщенной магнитной цепи не имеют взаимоиндуктивной связи друг с другом. Обмотки ротора остаются непреобразованными. Оси обмоток ротора совпадают с осями ротора d, q.

Система координат α, β для обмоток статора в сочетании с системой координат d, q для обмоток ротора наиболее часто используется при исследовании несимметричных режимов СМ, таких, например, как однофазные и двухфазные ВКЗ.

Переход от трехфазной системы координат к ортогональной α, β рассмотрен в § 3.2, и для токов получены уравнения

$$\left.\begin{aligned} i_{\alpha c} &= (2/3)\, i_a - (1/3)\,(i_b + i_c);\\ i_{\beta c} &= \left(1/\sqrt{3}\right)(i_b - i_c); \quad i_0 = (1/3)\,(i_a + i_b + i_c)\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Аналогично, для напряжений и потокосцеплений

$$\left.\begin{aligned} U_{\alpha c} &= (2/3)\, U_a - (1/3)\,(U_b + U_c);\\ U_{\beta c} &= \left(1/\sqrt{3}\right)(U_b - U_c)\,;\\ U_0 &= (1/3)\,(U_a + U_b + U_c); \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_\alpha &= (2/3)\,\Psi_a - (1/3)\,(\Psi_b + \Psi_c); \quad \Psi_\beta = \left(1/\sqrt{3}\right)(\Psi_b - \Psi_c);\\ \Psi_0 &= (1/3)\,(\Psi_a + \Psi_b + \Psi_c)\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Подставим в (8.3) значения Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c потокосцеплений (7.19), после преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} \Psi_\alpha &= [l_0 + m_0 + (3/2)\, l_2 \cos 2\gamma]\, i_\alpha + (3/2)\, l_2 \sin 2\gamma \cdot i_\beta +\\ &+ L_{afd} \cos\gamma \cdot i_f + L_{ayd} \cos\gamma \cdot i_{yd} - L_{ayq} \sin\gamma \cdot i_{yq}\,;\\ \Psi_\beta &= (3/2)\, l_2 \sin 2\gamma \cdot i_\alpha + [l_0 + m_0 - (3/2)\, l_2 \cos 2\gamma]\, i_\beta +\\ &+ L_{afd} \sin\gamma \cdot i_f + L_{ayd} \sin\gamma \cdot i_{yd} + L_{ayq} \cos\gamma \cdot i_{yq};\\ \Psi_0 &= (l_0 - 2m_0)\, i_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Обозначим

$$L_d = l_0 + m_0 + (3/2)\,l_2; \quad L_q = l_0 + m_0 - (3/2)\,l_2;$$
$$L_0 = l_0 - 2m_0. \tag{8.5}$$

Индуктивности L_d, L_q, L_0 обмоток статора имеют простой физический смысл. Индуктивность L_d представляет собой индуктивность обмотки фазы статора при протекании по этой обмотке симметричных синусоидальных токов прямой последовательности, во время вращения ротора с синхронной частотой, при совпадении оси симметрии поля статора с продольной осью ротора. Соответствующее индуктивное сопротивление x_d называют *синхронным индуктивным сопротивлением по продольной оси*. Индуктивность L_q — это индуктивность обмотки фазы статора в случае совпадения оси симметрии поля статора с поперечной осью ротора при указанных выше условиях. Соответствующее индуктивное сопротивление x_q называют *синхронным индуктивным сопротивлением по поперечной оси*. Индуктивность L_0 — это индуктивность обмотки фазы статора при протекании по обмотке токов нулевой последовательности, а x_0 — индуктивное сопротивление нулевой последовательности.

Из выражения (8.5) получим

$$l_0 + m_0 = (L_d + L_q)/2; \quad (3/2)\,l_2 = (L_d - L_q)/2. \tag{8.6}$$

Тогда потокосцепления статорных контуров

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_\alpha &= [(L_d + L_q)/2 + \cos 2\gamma \cdot (L_d - L_q)/2]\, i_\alpha + \\
&+ [(L_d - L_q)/2] \sin 2\gamma \cdot i_\beta + L_{afd} \cos\gamma \cdot i_f + L_{ayd} \cos\gamma \cdot i_{yd} - \\
&- L_{ayq} \sin\gamma \cdot i_{yq}; \\
\Psi_\beta &= [(L_d - L_q)/2] \sin 2\gamma \cdot i_\alpha + [(L_d + L_q)/2 - \\
&- \cos 2\gamma \cdot (L_d - L_q)/2]\, i_\beta + L_{afd} \sin\gamma \cdot i_f + \\
&+ L_{ayd} \sin\gamma \cdot i_{yd} + L_{ayq} \cos\gamma \cdot i_{yq}; \\
\Psi_0 &= L_0 i_0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Потокосцепления роторных обмоток получим, преобразовав токи статора i_a, i_b, i_c (7.9) к токам i_α, i_β. Например, для обмотки возбуждения

$$\Psi_f = L_{fad} \left[i_a \cos\gamma + i_b \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right] +$$
$$+ L_f i_f + L_{fyd} i_{yd} = L_{fad} \Big| i_a \cos\gamma + i_b \cos \frac{2\pi}{3} \cos\gamma +$$
$$+ i_b \sin \frac{2\pi}{3} \sin\gamma + i_c \cos \frac{2\pi}{3} \cos\gamma - i_c \sin \frac{2\pi}{3} \sin\gamma \Big| +$$
$$+ L_f i_f + L_{fyd} i_{yd} = (3/2)\, L_{fad} \left\{ \frac{2}{3} \left[i_a + i_b \cos \frac{2\pi}{3} + \right.\right.$$

$$+ i_c\cos\frac{2\pi}{3}\Big]\cos\gamma + \frac{2}{3}\Big[i_b\sin\frac{2\pi}{3} - i_c\sin\frac{2\pi}{3}\Big]\sin\gamma\Big\} +$$

$$+ L_f i_f + L_{fyd} i_{yd} = (3/2)L_{fad}(i_\alpha\cos\gamma + i_\beta\sin\gamma) +$$

$$+ L_f i_f + L_{fyd} i_{yd}. \qquad (8.8)$$

Аналогично, для демпферной обмотки

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{yd} &= (3/2)\,L_{yda}\,(i_\alpha\cos\gamma + i_\beta\sin\gamma) + L_{fyd}i_f + L_{yd}i_{yd};\\ \Psi_{yq} &= (3/2)\,L_{yqa}\,(-\,i_\alpha\sin\gamma + i_\beta\cos\gamma) + L_{yq}i_{yq}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

Уравнения равновесия напряжений СМ в осях α, β статора и d, q ротора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} U_\alpha &= d\Psi_\alpha/dt + r_1 i_\alpha; & U_\beta &= d\Psi_\beta/dt + r_1 i_\beta;\\ U_0 &= d\Psi_0/dt + r_1 i_0; & U_f &= d\Psi_f/dt + r_f i_f;\\ 0 &= d\Psi_{yd}/dt + r_{yd} i_{yd}; & 0 &= d\Psi_{yq}/dt + r_{yq} i_{yq}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

Представленная система уравнений содержит периодические коэффициенты и не имеет решения в общем виде. Решение можно найти численными методами с помощью ЦВМ или моделированием на АВМ. Возможно также упрощенное определение токов в обмотках.

§ 8.2. Двухфазное внезапное короткое замыкание синхронного генератора

Рассмотрим метод упрощенного нахождения тока при ВКЗ двух фаз (например, b и c) обмотки статора трехфазного СГ с одним контуром на роторе (обмоткой возбуждения). До ВКЗ возбуждений генератор работает в режиме ХХ, т. е. при начальных условиях $i_a = 0$; $i_b = 0$; $i_c = 0$; $\Psi_{f0} = L_f i_{f0}$.

В координатах α, β из (8.1) и (8.7) получим

$$\left.\begin{aligned} &i_\alpha = 0; \quad i_0 = 0; \quad i_\beta = (2/\sqrt{3})\,i_b;\\ &\Psi_{\beta 0} = L_{afd}\sin\gamma_0\cdot i_{f0}; \quad \Psi_{\alpha 0} = L_{afd}\cos\gamma_0\, i_{f0}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

Сущность метода заключается в том, что неизвестные токи находят не из системы дифференциальных уравнений (8.10), а из системы уравнений потокосцеплений (8.7) — (8.9), используя принцип постоянства потокосцеплений короткозамкнутых контуров с последующей корректировкой токов с помощью коэффициентов затухания. Приравнивая Ψ_β из (8.7) и Ψ_f из (8.8) соответственно значениям $\Psi_{\beta 0}$ и Ψ_{f0} и учитывая, что $i_\alpha = 0$, а i_{yd} и i_{yq} отсутствуют, получим

$$\left.\begin{aligned} &[(L_d + L_q)/2 - \cos 2\gamma\,(L_d - L_q)/2]\,i_\beta + L_{afd}\sin\gamma\cdot i_f =\\ &\qquad = L_{afd}\sin\gamma_0\cdot i_{f0};\\ &(3/2)\,L_{fad}\sin\gamma\cdot i_\beta + L_f i_f = L_f i_{f0}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$

Для приведенной обмотки ротора в системе о.е. введем обозначения $L_d = x_d$, $L_q = x_q$, $L_f = x_f$, $L_{afd}/m_i = (3/2)L_{fad}m_u = x_{ad}$. Электродвижущая сила обмотки фазы статора $E_0 = x_{ad}i_{f0}$.

Умножая второе уравнение системы (8.12) на x_{ad}/x_f, получим

$$\left.\begin{aligned} &[(x_d + x_q)/2 - \cos 2\gamma\,(x_d - x_q)/2]\, i_\beta + x_{ad} \sin\gamma \cdot i_f = \\ &\qquad = E_0 \sin\gamma_0; \\ &\left(x_{ad}^2/x_f\right) \sin\gamma \cdot i_\beta + x_{ad} i_f = E_0, \end{aligned}\right\} \quad (8.13)$$

откуда

$$i_\beta = \frac{E_0 (\sin\gamma_0 - \sin\gamma)}{(x_d + x_q)/2 - [(x_d - x_q)/2] \cos 2\gamma - \left(x_{ad}^2/x_f\right) \sin^2\gamma}, \quad (8.14)$$

или, учитывая, что $x_d - x_{ad}^2/x_f = x_d'$,

$$i_\beta = 2E_0 (\sin\gamma_0 - \sin\gamma)/\{x_d' + x_q - (x_d' - x_q) \cos 2\gamma\}. \quad (8.15)$$

Ток обмотки возбуждения

$$i_f = \frac{E_0 \left\{(x_d + x_q)/2 - [(x_d - x_q)/2] \cos 2\gamma - \left(x_{ad}^2/x_f\right) \sin\gamma \cdot \sin\gamma_0\right\}}{(x_d + x_q)/2 - [(x_d - x_q)/2] \cos 2\gamma - \left(x_{ad}^2/x_f\right) \sin^2\gamma} =$$

$$= E_0 \left\{1 + \frac{\left(x_{ad}^2/x_f\right)(\sin^2\gamma - \sin\gamma \cdot \sin\gamma_0)}{(x_d + x_q)/2 - [(x_d - x_q)/2] \cos 2\gamma - \left(x_{ad}^2/x_f\right) \sin^2\gamma}\right\}. \quad (8.16)$$

Учитывая, что

$$x_{ad}^2/x_f = x_d - \left(x_d - x_{ad}^2/x_f\right) = x_d - x_d', \quad (8.17)$$

получим

$$i_f = E_0 \left[1 + \frac{2\left(x_d - x_d'\right)(\sin^2\gamma - \sin\gamma \cdot \sin\gamma_0)}{x_d' + x_q - \left(x_d' - x_q\right) \cos 2\gamma}\right]. \quad (8.18)$$

Если i_β и i_f из (8.15) и (8.18) разложить в ряд Фурье,то получим токи обмоток без учета затухания [5, 26]. Например,

$$i_\beta = -\frac{2E_0}{x_d' + x_2} [\cos(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + b \cos 3(\tau + \gamma_0 - \pi/2) +$$

$$+ b^2 \cos 5(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + \cdots] + \frac{E_0 \cos(\gamma_0 - \pi/2)}{x_2} [1 + 2b \cos 2(\tau + \gamma_0 -$$

$$- \pi/2) + 2b^2 \cos 4(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + 2b^3 \cos 6(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + \cdots], \quad (8.19)$$

где $x_2 = \sqrt{x_d x_q}$ — индуктивное сопротивление обратного следования фаз;

$$b = \left(\sqrt{x_q} - \sqrt{x_d'}\right) \Big/ \left(\sqrt{x_q} + \sqrt{x_d'}\right). \quad (8.20)$$

Ток ВКЗ фаз b и c

$$i_{bc} = i_b = -i_c = (\sqrt{3}/2)\, i_3 \,. \qquad (8.21)$$

Учитывая амплитудное значение тока установившегося двухфазного короткого замыкания $I_m = \sqrt{3}\, E_0/(x_d + x_2)$, а также затухание переходного процесса, с помощью коэффициентов $\exp(-\tau/T'_{d2})$ и $\exp(-\tau/T_{a2})$ уравнение (8.19) преобразуем к виду

$$i_{bc} = -\sqrt{3}\, E_0 \left[\left(\frac{1}{x'_d + x_2} - \frac{1}{x_d + x_2} \right) \exp\,(-\tau/T'_{d2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_d + x_2} \right] [\cos(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + b \cos 3\,(\tau + \gamma_0 - \pi/2) +$$

$$+ b^2 \cos 5\,(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + \cdots] + [\sqrt{3}\; E_0 \cos(\gamma_0 -$$

$$- \pi/2)/(2x_2)] \exp\,(-\tau/T_{a2})\, [1 + 2b \cos 2(\tau + \gamma_0 - \pi/2) +$$

$$+ 2b^2 \cos 4\,(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + 2b^3 \cos 6\,(\tau + \gamma_0 - \pi/2) + \cdots], \qquad (8.22)$$

где постоянные времени затухания переходной периодической и апериодической составляющих тока ВКЗ

$$T'_{d2} = T_{d0}\,(x'_d + x_2)/(x_d + x_2); \quad T_{d0} = x_f/r_f; \quad T_{a2} = x_2/r_1. \qquad (8.23)$$

Результаты расчета тока ВКЗ генератора СГ-12-46-6А при $\gamma_0 = \pi/2$ и $I_б = 1000$ А представлены на рис. 8.1. Нечетные гармонические в периодических составляющих и четные гармонические в апериодической составляющей исказили форму кривой тока. Наличие высших гармонических в кривой тока и соответственно магнитного поля в воздушном зазоре машины, возникающих при несимметрии ротора ($x'_d \neq x_q$), обусловливает появление перенапряжений на обмотке свободной фазы статора:

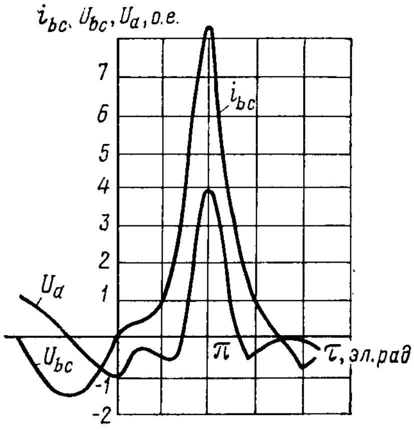

Рис. 8.1. Кривые тока и ЭДС при двухфазном коротком замыкании

$$-U_a = d\Psi_a/d\tau = d\Psi_\alpha\,/\,d\tau. \qquad (8.24)$$

Перенапряжения связаны со сжатием и неравномерностью частоты вращения магнитного потока в воздушном зазоре машины. После возникновения ВКЗ (при $\gamma_{bc} = 0$, $U_{bc} = 0$) частота вращения потока, а следовательно, и ЭДС на свободной фазе вначале снизились примерно в два раза (рис. 8.1). Это происходит при повороте ротора на угол до $\gamma_{bc} = \pi - \Delta\gamma \approx 0{,}9\ \pi$, аналогично при $\gamma_{bc} \geqslant \pi + \Delta\gamma$. В промежуток $2\Delta\gamma$, когда ротор проходит точку $\gamma_{bc} = \pi$, наблюдается пик перенапряжения, связанный с ускоренным вращением потока в воздушном зазоре машины. Амплитуда импульса перенапряжения в четыре раза больше амплитуды фазной ЭДС в режиме XX.

Амплитуда перенапряжений примерно равна

$$U_{a\,\max} \approx E_0 (2x_q / x_d' - 1)\,. \qquad \textbf{(8.25)}$$

Максимум перенапряжений возникает при $\gamma_0 = \pi/2$, т. е. когда потокосцепление замыкающихся обмоток в момент короткого замыкания максимально.

ГЛАВА 9. УРАВНЕНИЯ СИНХРОННОЙ ЯВНОПОЛЮСНОЙ МАШИНЫ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ d И q, ЖЕСТКО СВЯЗАННОЙ С РОТОРОМ

§ 9.1. Преобразование переменных и уравнений

Чтобы убрать периодические коэффициенты в уравнениях явнополюсной СМ, записанных в системе координат a, b, c, необходимо произвести линейные преобразования уравнений. Дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты тогда, когда магнитные оси обмоток статора и ротора, а также магнитные оси обмоток и явно выраженные полюсы неподвижны относительно друг друга. Для этого неподвижная система координат, связанная со статором, заменяется ортогональной координатной системой, вращающейся вместе с ротором (оси d и q). Переменные в системе координат (a, b, c), например токи i_a, i_b, i_c, преобразуются в новые переменные, связанные с системой координат d, q (токи i_d, i_q, i_0).

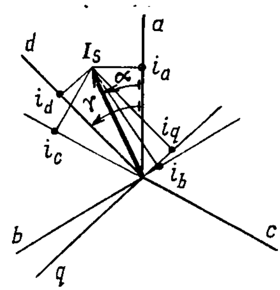

Рис. 9.1. Определение токов с помощью изображающего вектора

На примере преобразования токов рассмотрим связь между переменными в системе координат a, b, c и преобразованной системе. Пусть выполняется условие $i_a + i_b + i_c = 0$. Тогда токи фаз найдем как проекции изображающего вектора тока (см. § 1.3) на оси фаз (рис. 9.1):

$$i_a = I_{1m} \cos\alpha; \quad i_b = I_{1m} \cos(\alpha - 2\pi/3);$$
$$i_c = I_{1m} \cos(\alpha + 2\pi/3). \qquad \textbf{(9.1)}$$

В то же время

$$i_d = I_{1m} \cos(\gamma - \alpha); \quad i_q = -I_{1m} \sin(\gamma - \alpha). \qquad \textbf{(9.2)}$$

Чтобы выразить токи i_d, i_q через токи фаз (9.1), воспользуемся равенствами

$$\left.\begin{aligned}\cos(\gamma-\alpha) &= \frac{2}{3}[\cos\gamma\cos\alpha+\cos(\gamma-2\pi/3)\times\\ &\times\cos(\alpha-2\pi/3)+\cos(\gamma+2\pi/3)\cos(\alpha+2\pi/3)];\\ \sin(\gamma-\alpha) &= \frac{2}{3}[\sin\gamma\cos\alpha+\sin(\gamma-2\pi/3)\times\\ &\times\cos(\alpha-2\pi/3)+\sin(\gamma+2\pi/3)\cos(\alpha+2\pi/3)].\end{aligned}\right\} \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.2) и учитывая (9.1), получим

$$i_d = \frac{2}{3}[i_a\cos\gamma + i_b\cos(\gamma-2\pi/3) + i_c\cos(\gamma+2\pi/3)];$$

$$i_q = -\frac{2}{3}[i_a\sin\gamma + i_b\sin(\gamma-2\pi/3) + i_c\sin(\gamma+2\pi/3)]. \quad (9.4)$$

Чтобы осуществить обратный переход, т. е. по известным значениям токов i_d, i_q определить токи в фазах, необходимо спроецировать токи i_d, i_q на оси фаз. На основании рис. 9.1 запишем:

$$i_a = i_d\cos\gamma - i_q\sin\gamma; \quad i_b = i_d\cos(\gamma-2\pi/3) - i_q\sin(\gamma-2\pi/3);$$

$$i_c = i_d\cos(\gamma+2\pi/3) - i_q\sin(\gamma+2\pi/3). \quad (9.5)$$

Если обмотка статора СМ соединена в звезду с нулевым проводом или треугольником, то может оказаться, что $i_a + i_b + i_c \neq 0$. Тогда необходимо в (9.5) ввести переменную i_0 (см. § 3.2).

Равенства (9.4) и (9.5) устанавливают прямую и обратную связь между действительными токами в обмотках фаз статора и новыми переменными в осях d, q. Аналогично записываются выражения для напряжений и потокосцеплений статорной обмотки.

Потокосцепления обмотки статора

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d &= (2/3)[\Psi_a\cos\gamma + \Psi_b\cos(\gamma-2\pi/3) + \Psi_c\cos(\gamma+2\pi/3)];\\ \Psi_q &= -(2/3)[\Psi_a\sin\gamma + \Psi_b\sin(\gamma-2\pi/3) +\\ &+ \Psi_c\sin(\gamma+2\pi/3)];\\ \Psi_0 &= (1/3)(\Psi_a+\Psi_b+\Psi_c).\end{aligned}\right\} \quad (9.6)$$

Подставляя потокосцепления фаз (7.19) в уравнения (9.6) и учитывая (9.4), получим

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d &= [l_0 + m_0 + (3/2)\,l_2]\,i_d + L_{afd}i_f + L_{ayd}i_{yd};\\ \Psi_q &= [l_0 + m_0 - (3/2)\,l_2]\,i_q + L_{ayq}i_{yq};\\ \Psi_0 &= (l_0 - 2m_0)\,i_0.\end{aligned}\right\} \quad (9.7)$$

С учетом обозначений (8.5) потокосцепления обмотки статора

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d &= L_d i_d + L_{afd}i_f + L_{ayd}i_{yd};\\ \Psi_q &= L_q i_q + L_{ayq}i_{yq};\\ \Psi_0 &= L_0 i_0.\end{aligned}\right\} \quad (9.8)$$

Потокосцепления роторных обмоток получим, преобразовав в уравнениях (7.9) токи статора i_a, i_b, i_c к токам i_d, i_q. Например, для обмотки возбуждения

$$\Psi_f = (3/2)\,L_{fad} i_d + L_f i_f + L_{fyd} i_{yd}. \tag{9.9}$$

Аналогично, для демпферных обмоток

$$\Psi_{yd} = (3/2)\,L_{yda} i_a + L_{ydf} i_f + L_{yd} i_{yd};$$

$$\Psi_{yq} = (3/2)\,L_{yqa} i_a + L_{yq} i_{yq}. \tag{9.10}$$

Преобразование переменных позволяет избавиться от периодических коэффициентов в дифференциальных уравнениях СМ. Являясь формально математическим приемом, преобразование переменных, однако, имеет простое физическое объяснение. При преобразовании переменных трехфазная обмотка статора заменяется эквивалентной двухфазной, жестко связанной с осями d и q ротора. Так как преобразованные обмотки статора неподвижны относительно ротора, то индуктивности и взаимные индуктивности этих обмоток постоянны, если не учитывать изменения насыщения магнитной цепи. При этом в двухфазной обмотке сохраняются значения амплитуды тока и число витков обмотки фазы трехфазной машины, так как изображающие векторы тока, потокосцеплений и напряжений одни и те же для осей a, b, c и d, q.

Уравнения равновесия напряжений СМ в осях d, q получим из уравнений (3.24) обобщенной электрической машины в осях x, y, принимая $\omega_x = \omega$, ось d вместо x и q вместо y:

$$U_d = d\Psi_d/dt - \omega\Psi_q + r_1 i_d; \quad U_q = d\Psi_q/dt + \omega\Psi_d + r_1 i_q. \tag{9.11}$$

Уравнение нулевой составляющей напряжения

$$U_0 = d\Psi_0/dt + r_1 i_0. \tag{9.12}$$

В (9.11) в отличие от (7.1) появились дополнительные члены, пропорциональные произведению потокосцеплений на угловую частоту вращения ротора, которые представляют собой ЭДС вращения (см. § 3.3). Уравнения равновесия напряжений роторных контуров сохраняют свой вид (7.2) и (7.5) при потокосцеплениях, определяемых выражениями (9.9) и (9.10).

Таким образом, переход от системы координат a, b, c к осям d, q позволил исключить периодические коэффициенты. При постоянном насыщении магнитной цепи дифференциальные уравнения равновесия напряжений СМ являются уравнениями с постоянными коэффициентами, а при постоянной частоте вращения ротора — линейными дифференциальными уравнениями. Аналитические исследования уравнений СМ упрощаются, если использовать систему о.е.

§ 9.2. Уравнения равновесия напряжений синхронной машины с параметрами в относительных единицах

Чтобы записать уравнения СМ в относительных единицах, необходимо все составляющие уравнений разделить на базисные величины. Базисные величины будут одинаковыми для обмоток статора и ротора, если рассматривать приведенную СМ. Для приведения обмоток ротора к статорным необходимо определить коэффициенты приведения токов m_i, напряжений m_u и сопротивлений m_z (см. § 2.1). В уравнениях равновесия напряжений СМ заменяют токи роторных обмоток их приведенными значениями, а сами уравнения дополнительно умножают на m_u. Тогда уравнения (7.2) и (7.5) равновесия напряжений обмоток ротора с учетом (9.9) и (9.10) представим в виде

$$\left.\begin{aligned} U_f m_{uf} &= m_{uf}(3/2)L_{fad}(di_d/dt) + (m_{uf}/m_{if})L_f(di_f'/dt) + \\ &+ (m_{uf}/m_{id})L_{fyd}(di_{yd}'/dt) + (m_{uf}/m_{if})r_f i_f'; \\ 0 &= m_{ud}(3/2)L_{yda}(di_d/dt) + (m_{ud}/m_{if})L_{ydf}(di_f'/dt) + \\ &+ (m_{ud}/m_{id})L_{yd}(di_{yd}'/dt) + (m_{ud}/m_{id})r_{yd}i_{yd}'; \\ 0 &= m_{uq}(3/2)L_{yqa}(di_q/dt) + (m_{uq}/m_{iq})L_{yq}(di_{yq}'/dt) + \\ &+ (m_{uq}/m_{iq})r_{yq}i_{yq}', \end{aligned}\right\} \quad (9.13)$$

или

$$\left.\begin{aligned} U_f' &= d\Psi_f'/dt + r_f' i_f'; \\ 0 = d\Psi_{yd}'/dt + r_{yd}' i_{yd}'; &\quad 0 = d\Psi_{yq}'/dt + r_{yq}' i_{yq}', \end{aligned}\right\} \quad (9.14)$$

где приведенные значения потокосцеплений роторных обмоток

$$\left.\begin{aligned} \Psi_f' &= L_{afd}' i_d + L_f' i_f' + L_{fyd}' i_{yd}'; \\ \Psi_{yd}' &= L_{ayd}' i_d + L_{fyd}' i_f' + L_{yd}' i_{yd}'; \\ \Psi_{yq}' &= L_{ayq}' i_q + L_{yq}' i_{yq}'. \end{aligned}\right\} \quad (9.15)$$

При этом введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} L_{afd}' &= m_{uf}(3/2)L_{fad} = L_{afd}/m_{if}; \quad L_f' = L_f m_{uf}/m_{if}; \\ L_{ayd}' &= m_{ud}(3/2)L_{yda} = L_{ayd}/m_{id}; \quad r_f' = r_f m_{uf}/m_{if}; \\ L_{ayq}' &= m_{uq}(3/2)L_{yqa} = L_{ayq}/m_{iq}; \quad L_{yd}' = L_{yd}m_{ud}/m_{id}; \\ L_{fyd}' &= (m_{ud}/m_{if})L_{ydf} = (m_{uf}/m_{id})L_{fyd}; \quad r_{yd}' = r_{yd}m_{ud}/m_{id}; \\ L_{yq}' &= L_{yq}m_{uq}/m_{iq}; \quad r_{yq}' = r_{yq}m_{uq}/m_{iq}. \end{aligned}\right\} \quad (9.16)$$

Уравнения (9.8) потокосцеплений обмоток статора в приведенной СМ примут вид

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d &= L_d i_d + L'_{afd} i'_f + L'_{ayd} i'_{yd};\\ \Psi_q &= L_q i_q + L'_{ayq} i'_{yq};\quad \Psi_0 = L_0 i_0.\end{aligned}\right\}\qquad (9.17)$$

Чтобы записать уравнения СМ в относительных единицах, необходимо потокосцепления разделить на $\Psi_б = U_б/\omega_б$, а напряжения — на $U_б$. В дальнейшем рассматриваются только приведенные СМ, поэтому штрихи в обозначении величин опускаются. После соответствующих преобразований уравнения равновесия напряжений примут вид

$$\left.\begin{aligned}U_d &= d\Psi_d/d\tau - \Psi_q\omega + r_1 i_d;\quad U_q = d\Psi_q/d\tau + \Psi_d\omega + r_1 i_q;\\ U_0 &= d\Psi_0/d\tau + r_1 i_0;\quad U_f = d\Psi_f/d\tau + r_f i_f;\\ 0 &= d\Psi_{yd}/d\tau + r_{yd} i_{yd};\quad 0 = d\Psi_{yq}/d\tau + r_{yq} i_{yq},\end{aligned}\right\}\qquad (9.18)$$

где $r_{yd} = r'_{yd}/Z_б$, $r_{yq} = r'_{yq}/Z_б$, $r_f = r'_f/Z_б$ — активные сопротивления обмоток ротора, о.е.

Уравнения равновесия напряжений СМ в относительных единицах записываются так же, как и в системе физических единиц. Однако дифференцирование производится по времени, выраженному в электрических радианах. Потокосцепления обмоток в относительных единицах определяются выражениями

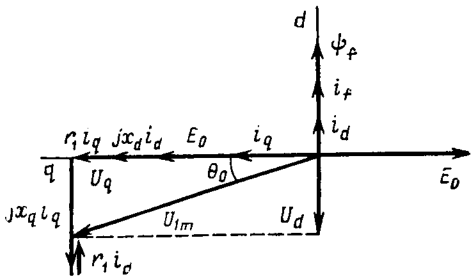

Рис. 9.2. Векторная диаграмма установившегося режима недовозбужденного СД

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d &= x_d i_d + x_{afd} i_f + x_{ayd} i_{yd};\\ \Psi_q &= x_q i_q + x_{ayq} i_{yq};\\ \Psi_0 &= x_0 i_0;\\ \Psi_f &= x_{afd} i_d + x_f i_f + x_{fyd} i_{yd};\\ \Psi_{yd} &= x_{ayd} i_d + x_{fyd} i_f + x_{yd} i_{yd};\\ \Psi_{yq} &= x_{ayq} i_q + x_{yq} i_{yq},\end{aligned}\right\}\qquad (9.19)$$

где $x_d = L_d/L_б = L_d\omega_б/(L_б\omega_б)$; $x_q = L_q/L_б = L_q\omega_б/(L_б\omega_б)$ — синхронные индуктивные сопротивления по осям d и q; $x_{ayd} = L_{ayd}/L_б$, $x_{ayq} = L'_{ayq}/L_б$, $x_{afd} = L_{afd}/L_б$ — сопротивления взаимоиндукции между обмотками статора и ротора; $x_{fyd} = L'_{fyd}/L_б$ — сопротивление взаимоиндукции между обмотками ротора по продольной оси; $x_{yd} = L'_{yd}/L_б$, $x_{yq} = L'_{yq}/L_б$, $x_f = L'_f/L_б$ — полные индуктивные сопротивления обмоток ротора.

Уравнения (9.18) равновесия напряжений называют *уравнениями Парка — Горева*. Они основные при исследовании различных режимов работы электрических машин переменного тока. Уравнения

(9.18) и (9.19) составлены для СМ, работающей в исходном установившемся режиме как двигатель. На зажимы СМ подается напряжение сети U_d и U_q; по обмотке статора протекают токи i_d и i_q в положительном направлении координатных осей (рис. 9.2).

Уравнения для СГ многие авторы записывают по-разному [2, 15]. Запись уравнений СГ наиболее целесообразно оставить в том же

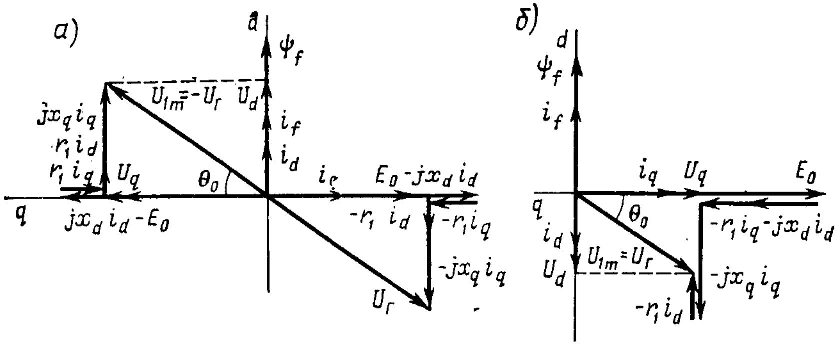

Рис. 9.3. Векторная диаграмма установившегося режима СГ, работающего при недовозбуждении на сеть (*а*) и на активно-индуктивную нагрузку (*б*)

виде, что и СД, заменяя в левой части проекции напряжения сети U_d, U_q на проекции напряжения $-U_d$, $-U_q$ генератора и учитывая режим работы машины при подстановке начальных условий. В генераторном режиме работы СМ в выбранной системе координат ток i_q всегда отрицательный, а в двигательном режиме — всегда положительный. Направление тока i_d зависит от того, перевозбуждена иди недовозбуждена СМ, работающая параллельно с сетью. При автономной работе СГ знак тока i_d зависит от характера нагрузки — емкостной или индуктивной. Векторные диаграммы СГ, работающего с недовозбуждением параллельно мощной сети и на индивидуальную активно-индуктивную нагрузку, представлены на рис. 9.3, *а*, *б*.

§ 9.3. Параметры синхронных машин

В СМ синхронные индуктивные сопротивления

$$x_d = x_{\sigma 1} + x_{ad}; \quad x_q = x_{\sigma 1} + x_{aq}, \tag{9.20}$$

где x_{ad}, x_{aq} — индуктивные сопротивления обмотки статора, соответствующие полям продольной и поперечной реакции якоря при симметричной нагрузке и называемые соответственно индуктивными сопротивлениями продольной и поперечной реакции якоря; $x_{\sigma 1}$ — индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора.

Индуктивное сопротивление продольной реакции якоря (Ом)

$$X_{ad} = 2\pi f\,(\Psi_{ad1}/i_d), \tag{9.21}$$

где потокосцепление, создаваемое основной гармонической индукции в воздушном зазоре при протекании по обмотке статора тока i_d,

$$\Psi_{ad1} = w_1 k_{об1} \Phi_{ad1} = (2m_1/\pi^2)[(w_1 k_{об1})^2/p]\, \tau_1 l\, [\mu_0 k_d/(k_\delta k_{\mu d}\delta)]\, i_d. \quad (9.22)$$

После подстановки (9.22) в (9.21) получим

$$X_{ad} = (4/\pi)\, f m_1 [(w_1 k_{об1})^2/p]\, \tau_1 l\, [\mu_0 k_d/(k_\delta k_{\mu d}\delta)]. \quad (9.23)$$

Индуктивное сопротивление поперечной реакции якоря (Ом)

$$X_{aq} = (4/\pi)\, f m_1 [(w_1 k_{об1})^2/p]\, \tau_1 l\, [\mu_0 k_q/(k_\delta k_{\mu q}\delta)]. \quad (9.24)$$

Здесь k_d, k_q — коэффициенты формы поля якоря по продольной и поперечной осям; $k_{\mu d}$, $k_{\mu q}$ — коэффициенты насыщения магнитной цепи по продольной и поперечной осям.

Нетрудно доказать, что принятые коэффициенты приведения позволяют рассчитывать сопротивления взаимной индукции между обмотками статора и обмотками ротора по осям d, q по формулам (9.23) и (9.24). Индуктивное сопротивление (Ом) взаимной индукции обмотки статора и обмотки возбуждения, приведенной к обмотке статора,

$$X'_{afd} = 2\pi f\, [\Psi_{afd1}/(i_f m_{if})], \quad (9.25)$$

где потокосцепление обмотки статора, созданное основной гармонической индукции в воздушном зазоре и возникающее при протекании по обмотке возбуждения тока i_f,

$$\Psi_{afd1} = w_1 k_{об1} \Phi_{afd1} = (2/\pi)\, w_1 k_{об1} w_f \times$$
$$\times \tau_1 l\, [\mu_0 k_f/(k_\delta k_{\mu d}\delta)]\, i_f. \quad (9.26)$$

После подстановки (9.26) в (9.25) получим

$$X'_{afd} = 2\pi f\, (2/\pi)\, w_1 k_{об1} w_f \tau_1 l\, [\mu_0 k_f/(k_\delta k_{\mu d}\delta)]\, (4/\pi)\, (m_1/2) \times$$
$$\times w_1 k_{об1} k_d/(2p w_f k_f) = (4/\pi)\, f m_1 [(w_1 k_{об1})^2/p]\, \tau_1 l \times$$
$$\times [\mu_0 k_d/(k_\delta k_{\mu d}\delta)]. \quad (9.27)$$

Индуктивное сопротивление (Ом) взаимной индукции обмотки статора и демпферной обмотки по продольной оси, приведенной к обмотке статора,

$$X'_{ayd} = 2\pi f\, [\Psi_{ayd1}/(i_{yd} m_{id})], \quad (9.28)$$

где потокосцепление обмотки статора, созданное основной гармонической индукции в воздушном зазоре и возникающее при протекании по продольной демпферной обмотке тока i_{yd},

$$\Psi_{ayd1} = w_1 k_{об1} \Phi_{ayd1} = (8/\pi^2)\, w_1 k_{об1} \times$$
$$\times w_{эd}\, \tau_1 l\, [\mu_0 k_d/(k_\delta k_{\mu a}\delta)]\, i_{yd}. \quad (9.29)$$

После подстановки (9.29) в (9.28) запишем

$$X'_{ayd} = (4/\pi)/fm_1 \left[(w_1 k_{\text{об}1})^2/p\right] \tau_1 l \left[\mu_0 k_d/(k_\delta\, k_{\mu d}\, \delta)\right]. \tag{9.30}$$

Индуктивное сопротивление (Ом) взаимной индукции обмотки статора и демпферной обмотки по поперечной оси, приведенной к обмотке статора,

$$X'_{ayq} = (4/\pi)\, fm_1 \left[(w_1 k_{\text{об}1})^2/p\right] \tau_1 l \left[\mu_0 k_q/(k_\delta\, k_{\mu q}\, \delta)\right]. \tag{9.31}$$

Сравнивая уравнения (9.23), (9.27), (9.30), а также (9.24) и (9.31), видим, что при принятых коэффициентах приведения индуктивные сопротивления взаимной индукции между обмотками статора и ротора по осям d и q рассчитываются по тем же формулам, что и индуктивные сопротивления продольной и поперечной реакции якоря, т. е.

$$X'_{afd} = X'_{ayd} = X'_{fyd} = X_{ad};\ X'_{ayq} = X_{aq}. \tag{9.32}$$

Таблица 9.1

Параметры	Значения параметров				
	Турбогенераторы		Синхронные явнополюсные машины		Синхронные компенсаторы
	двухполюсные	четырехполюсные	с демпферными обмотками	без демпферных обмоток	
x_d, о.е.	$\dfrac{1,6}{0,9—2,0}$	$\dfrac{1,2}{0,9—1,5}$	$\dfrac{1,2}{0,7—1,6}$	$\dfrac{1,2}{0,9—1,6}$	$\dfrac{1,8}{1,5—2,2}$
x_q, о.е.	$\dfrac{1,35}{0,85—1,90}$	$\dfrac{1,5}{0,85—1,45}$	$\dfrac{0,75}{0,45—1,0}$	$\dfrac{0,75}{0,45—1,0}$	$\dfrac{1,1}{0,9—1,4}$
x'_d, о.е.	$\dfrac{0,24}{0,14—0,34}$	$\dfrac{0,24}{0,20—0,28}$	$\dfrac{0,37}{0,20—0,50}$	$\dfrac{0,35}{0,20—0,45}$	$\dfrac{0,40}{0,30—0,60}$
x''_d, о.е.	$\dfrac{0,15}{0,10—0,24}$	$\dfrac{0,15}{0,12—0,17}$	$\dfrac{0,22}{0,13—0,30}$	$\dfrac{0,30}{0,18—0,40}$	$\dfrac{0,25}{0,18—0,38}$
x_0, о.е.	0,01—0,08	0,015—0,14	0,02—0,20	0,04—0,25	0,02—0,25
x''_q, о.е.	$(1,0—1,3)x''_d$	—	$(1,0—1,1)x''_d$	$2,3\ x''_d$	x''_d
x_2, о.е.	$1,22\ x''_d$	$1,22\ x''_d$	$1,05x''_d$	$(1,4—1,6)x''_d$	x''_d
T_{d0}, с	$\dfrac{5,5}{3—12}$	$\dfrac{6,2}{4,0—9,2}$	$\dfrac{5,6}{2,0—9,0}$	$\dfrac{5,6}{2,0—9,0}$	$\dfrac{8,0}{5,0—14,0}$
T'_d, с	$\dfrac{0,7}{0,4—1,6}$	$\dfrac{1,1}{0,9—1,6}$	$\dfrac{1,3}{0,8—2,5}$	$\dfrac{1,3}{0,8—2,5}$	$\dfrac{1,5}{1,0—2,8}$
T''_d, с	$\dfrac{0,06}{0,03—0,18}$	$\dfrac{0,04}{0,02—0,08}$	$\dfrac{0,03}{0,01—0,08}$	—	$\dfrac{0,03}{0,02—0,08}$
T_a, с	$\dfrac{0,32}{0,04—0,50}$	$\dfrac{0,20}{0,15—0,35}$	$\dfrac{0,15}{0,03—0,35}$	$\dfrac{0,30}{0,10—0,50}$	$\dfrac{0,17}{0,10—0,30}$

Аналогично, в системе относительных единиц

$$x_{afd} = x_{ayd} = x_{fyd} = x_{ad}; \; x_{ayq} = x_{aq}. \qquad (9.33)$$

Тогда полные индуктивные сопротивления эквивалентных демпферных обмоток ротора представим в виде

$$x_{yd} = x_{эyd} + x_{ad}; \quad x_{yq} = x_{эyq} + x_{aq}, \qquad (9.34)$$

где $x_{эy\,d}$, $x_{эyq}$ — сопротивления рассеяния эквивалентных демпферных обмоток по осям d и q.

Полное индуктивное сопротивление обмотки возбуждения

$$x_f = x_{\sigma f} + x_{ad}, \qquad (9.35)$$

где $x_{\sigma f}$ — сопротивление рассеяния обмотки возбуждения.

В табл. 9.1 приведены значения индуктивных сопротивлений и электромагнитных постоянных времени обмоток различных типов СМ, причем в числителе даны средние значения параметров, а в знаменателе — пределы их изменения [18, 21].

§ 9.4. Электромагнитный момент вращения синхронной машины в осях d, q

Переходные процессы в СМ сопровождаются изменением частоты вращения ротора. Если изменение частоты вращения ротора оказывает заметное влияние на протекание переходного процесса, то необходимо совместное исследование процессов в электрических цепях и механическом движении ротора. Тогда к уравнениям равновесия напряжений добавляется дифференциальное уравнение движения ротора (уравнение моментов), которое для работы в режиме двигателя (о.е.) будет иметь вид (7.6). Мгновенное значение мощности (о.е.), потребляемой СМ от сети, при условии, что ток нулевой последовательности равен нулю,

$$P_1 = U_d\, i_d + U_q\, i_q, \qquad (9.36)$$

или, подставляя значения напряжений,

$$P_1 = (d\Psi_d/d\tau - \omega\Psi_q + r_1 i_d)\, i_d + (d\Psi_q/d\tau + \omega\Psi_d + r_1 i_q)\, i_q =$$

$$= (d\Psi_d/d\tau)\, i_d + (d\Psi_q/d\tau)\, i_q + (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)\, \omega + (i_d^2 + i_q^2)\, r_1. \qquad (9.37)$$

Следовательно, мощность, потребляемая двигателем из сети, равна мощности, идущей на изменение запаса электромагнитной энергии в машине, плюс мощность, передаваемая через воздушный зазор (электромагнитная мощность), плюс потери в активном сопротивлении обмоток статора. Если электромагнитную мощность разделить на угловую частоту вращения ротора, то электромагнитный момент вращения СД

$$M = \Psi_d\, i_q - \Psi_q\, i_d. \qquad (9.38)$$

Это выражение получено для ненасыщенной СМ с постоянными параметрами.

§ 9.5. Комплексные дифференциальные уравнения синхронных машин

При исследовании переходных режимов СМ иногда встречается комплексная форма записи дифференциальных уравнений. Переход к комплексной форме записи уравнений равноценен переходу от двух составляющих потокосцеплений, направленных по координатным осям, к вращающимся потокосцеплениям. При этом вводятся комплексные значения напряжения, тока и потокосцепления статорной обмотки:

$$\dot{U}_s = U_d + jU_q ; \quad \dot{I}_s = i_d + ji_q; \quad \dot{\Psi}_s = \Psi_d + j\Psi_q. \qquad \mathbf{(9.39)}$$

Переход от уравнений машин переменного тока, записанных в осях d и q (9.18), к комплексным уравнениям производится следующим образом. Все величины (токи, потокосцепления, напряжения), относящиеся к продольной оси, рассматриваются как реальные части некоторых комплексов, а величины, относящиеся к поперечной оси, — как мнимые части этих комплексов. Умножая второе уравнение (9.18) на j и складывая с первым уравнением, получим

$$U_d + jU_q = d\Psi_d/d\tau - \omega\Psi_q + r_1 i_d + j\,(d\Psi_q/d\tau) + j\omega\Psi_d +$$

$$+ jr_1 i_q = d\,(\Psi_d + j\Psi_q)/d\tau + j\omega\,(\Psi_d - \Psi_q/j) + r_1\,(i_d + ji_q) =$$

$$= d\dot{\Psi}_s/d\tau + j\omega\dot{\Psi}_s + r_1\dot{I}_s,$$

или

$$\dot{U}_s = (D + j\omega)\dot{\Psi}_s + r_1\dot{I}_s, \qquad \mathbf{(9.40)}$$

где $D = d/d\tau$ — оператор дифференцирования.

Из (9.40) следует, что форма записи уравнений упростилась, так как число уравнений сократилось вдвое. Однако это преимущество ощутимо лишь для машин, имеющих симметричные обмотки и равномерный воздушный зазор. Для машин с несимметричным ротором, например явнополюсных СМ, в выражения для потокосцеплений $\dot{\Psi}_s$ входят не только векторы токов $\dot{I}_s$, но и сопряженные им векторы. Поэтому число переменных и уравнений при решении не уменьшается.

§ 9.6. Уравнения синхронных машин при работе от источника с переменными напряжением и частотой

Составим уравнения, описывающие работу машин переменного тока при работе от источника с изменяющимися напряжением и частотой. Для этого в уравнения (9.18), (7.6) введем относительные значения напряжения α и частоты ν:

$$\alpha = U_m/U_б; \quad \nu = f_1/f_б. \qquad \mathbf{(9.41)}$$

При условии, что к обмотке статора подводится симметричная система напряжений, из векторной диаграммы СД (см. рис. 9.2,*а*) найдем напряжения $U_d = -U_{1m}\sin\Theta$ и $U_q = U_{1m}\cos\Theta$ или в относительных единицах:

$$U_d = -(U_{1m}/U_б)\sin\Theta = -\alpha\sin\Theta;\ U_q = (U_{1m}/U_б)\cos\Theta = \alpha\cos\Theta. \tag{9.42}$$

Для любого момента времени угол нагрузки $\Theta = \int_0^t(\omega_1-\omega)dt + \Theta_0$. Отсюда следует, что $d\Theta/dt = \omega_1 - \omega$.

Угловая частота вращения ротора

$$\omega = \omega_1 - d\Theta/dt. \tag{9.43}$$

Разделив (9.43) на базисную угловую частоту, получим

$$\omega/\omega_б = \omega_1/\omega_б - d\Theta/d(\omega_б t) = \nu - d\Theta/d\tau.$$

Следовательно, в относительных единицах

$$\omega = \nu - d\Theta/d\tau \text{ или } d\Theta/d\tau = \nu - \omega. \tag{9.44}$$

С учетом вышеизложенного систему уравнений (9.18) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}
&d\Psi_d/d\tau = \omega\Psi_q - r_1 i_d - \alpha\sin\Theta;\ d\Psi_q/d\tau = -\omega\Psi_d - \\
&\qquad - r_1 i_q + \alpha\cos\Theta;\\
&d\Psi_f/d\tau = U_f - r_f i_f;\ d\Psi_{yd}/d\tau = -r_{yd} i_{yd};\\
&d\Psi_{yq}/d\tau = -r_{yq} i_{yq};\\
&d\omega/d\tau = (1/T_J)(M - M_c);\ d\Theta/d\tau = \nu - \omega.
\end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

Здесь потокосцепления Ψ_d, Ψ_q, Ψ_f, Ψ_{yd}, Ψ_{yq} определяются выражениями (9.19), причем индуктивные сопротивления, входящие в (9.19), рассчитаны для базисной частоты. Система уравнений (9.45) нелинейна, так как в ней имеются произведения переменных и нелинейные зависимости $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$

При исследовании работы СМ предполагаем, что α и ν известны для любого момента времени. Наиболее простым при частотном управлении является *закон пропорционального регулирования*, который характеризуется равенством $\alpha = \nu$.

Уравнения (9.45) справедливы для всех режимов работы. В случае установившегося режима работы СМ все величины в осях *d*, *q* постоянны, поэтому уравнения (9.45) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}
&-\alpha_0\sin\Theta_0 = -\omega_0\Psi_{q0} + r_1 i_{d0};\quad \alpha_0\cos\Theta_0 = \omega_0\Psi_{d0} + r_1 i_{q0};\\
&U_{f0} = r_f i_{f0};\ M_0 = M_{c0};\ \omega_0 = \nu_0,
\end{aligned}\right\} \tag{9.46}$$

где $M_0 = \Psi_{d0} i_{q0} - \Psi_{q0} i_{d0}$ (величины с индексом 0 характеризуют заданный установившийся режим работы).

Так как $i_{yd0} = 0$ и $i_{yq0} = 0$, то формулы потокосцеплений примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{d0} = x_d i_{d0} + x_{afd}\, i_{f0};\ \Psi_{q0} = x_q\, i_{q0};\\ &\Psi_{f0} = x_{afd}\, i_{d0} + x_f\, i_{f0};\ \Psi_{yd0} = x_{ayd}\, i_{d0} + x_{fyd}\, i_{f0};\\ &\Psi_{yq0} = x_{ayq}\, i_{q0}. \end{aligned}\right\} \quad (9.47)$$

Решая уравнения (9.46) и (9.47) относительно токов в обмотке статора, получим

$$\left.\begin{aligned} i_{d0} &= \frac{(\alpha_0 \cos\Theta_0 - \nu_0\, x_{afd}\, i_{f0})\ \nu_0 x_q - \alpha_0 \sin\Theta_0 \cdot r_1}{r_1^2 + \nu_0^2 x_d\, x_q};\\ i_{q0} &= \frac{(\alpha_0 \cos\Theta_0 - \nu_0\, x_{afd}\, i_{f0})\ r_1 + \alpha_0 \sin\Theta_0 \cdot \nu_0\, x_d}{r_1^2 + \nu_0^2 x_d\, x_q}. \end{aligned}\right\} \quad (9.48)$$

Из (9.48) видно, что при определении токов установившегося режима работы индуктивные сопротивления x_d, x_q, x_{afd}, рассчитанные для базисной частоты, умножаются на относительное значение частоты ν. В выражениях для потокосцеплений этот множитель отсутствует. Это говорит о том, что при переходе к уравнениям СМ, работающей от сети с переменным напряжением и частотой, нельзя все индуктивные сопротивления автоматически изменять прямо пропорционально частоте.

§ 9.7. Операторные уравнения и параметры синхронной машины

При исследовании режимов работы СМ часто требуется определять только токи в обмотке статора. Поэтому целесообразно оперировать лишь уравнениями равновесия напряжений статорных обмоток. Токи роторных контуров, содержащиеся в потокосцеплениях Ψ_d и Ψ_q, можно исключить. Эти преобразования выполним, переходя к операторным уравнениям СМ, которые, согласно (9.18), представим в виде

$$\left.\begin{aligned} &U_d(p) = p\Psi_d(p) - \omega\Psi_q(p) + r_1 i_d(p);\ U_q(p) = p\Psi_q(p) +\\ &\qquad + \omega\Psi_d(p) + r_1 i_q(p);\\ &U_0(p) = p\Psi_0(p) + r_1 i_0(p);\ U_f(p) = p\Psi_f(p) + r_f\, i_f(p);\\ &0 = p\Psi_{yd}(p) + r_{yd}\, i_{yd}(p);\ 0 = p\Psi_{yq}(p) + r_{yq}\, i_{yq}(p), \end{aligned}\right\} \quad (9.49)$$

где $U_d(p)$, $U_q(p)$, $U_0(p)$, $U_f(p)$ — изображения напряжений, приложенных к обмоткам машины; $\Psi(p)$— изображения потокосцеплений обмоток машины; $i(p)$ — изображения токов.

Потокосцепления обмоток:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_d(p) &= x_d i_d(p) + x_{ad} i_f(p) + x_{ad} i_{yd}(p);\\
\Psi_q(p) &= x_q i_q(p) + x_{aq} i_{yq}(p);\quad \Psi_0(p) = x_0 i_0(p);\\
\Psi_f(p) &= x_{ad} i_d(p) + x_f i_f(p) + x_{ad} i_{yd}(p);\\
\Psi_{yd}(p) &= x_{ad} i_d(p) + x_{ad} i_f(p) + x_{yd} i_{yd}(p);\\
\Psi_{yq}(p) &= x_{aq} i_q(p) + x_{yq} i_{yq}(p).
\end{aligned}\right\} \qquad (9.50)$$

Чтобы из (9.49) исключить токи $i_f(p)$ и $i_{yd}(p)$, необходимо решить систему из трех уравнений: равновесия напряжений обмотки возбуждения, равновесия напряжений демпферной обмотки по продольной оси и уравнения, связывающего потокосцепление обмотки статора по оси d с параметрами и токами обмоток. Представим эту систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Psi_d(p) \\ U_f(p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d & x_{ad} & x_{ad} \\ px_{ad} & r_f + px_f & px_{ad} \\ px_{ad} & px_{ad} & r_{yd} + px_{yd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(p) \\ i_f(p) \\ i_{yd}(p) \end{bmatrix}. \qquad (9.51)$$

Определим из этой системы уравнений ток:

$$i_d(p) = [\Psi_d(p) A_{11}(p) + U_f(p) A_{12}(p)]/D(p), \qquad (9.52)$$

где определитель матрицы сопротивлений

$$D(p) = x_d [(r_f + px_f)(r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2] - px_{ad}[(r_{yd} + px_{yd}) x_{ad} - px_{ad}^2] - px_{ad}[(r_f + px_f) x_{ad} - px_{ad}^2]; \qquad (9.53)$$

алгебраические дополнения (см. § 5.1)

$$A_{11}(p) = (r_f + px_f)(r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2;$$

$$A_{12}(p) = -[(r_{yd} + px_{yd}) x_{ad} - px_{ad}^2].$$

Из уравнения (9.52) находим потокосцепление:

$$\Psi_d(p) = x_d(p) i_d(p) + G(p) U_f(p), \qquad (9.54)$$

где

$$x_d(p) = D(p)/A_{11}(p) = x_d - \frac{px_{ad}[(r_{yd} + px_{yd}) x_{ad} - px_{ad}^2] + px_{ad}[(r_f + px_f) x_{ad} - px_{ad}^2]}{(r_f + px_f)(r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2}; \qquad (9.55)$$

$$G(p) = -\frac{A_{12}(p)}{A_{11}(p)} = \frac{(r_{yd} + px_{yd}) x_{ad} - px_{ad}^2}{(r_f + px_f)(r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2}. \qquad (9.56)$$

Чтобы из (9.49) исключить ток $i_{yq}(p)$, необходимо решить систему из двух уравнений: уравнения равновесия напряжений демпферной обмотки по поперечной оси и уравнения, связывающего потокосцепления обмотки статора по оси q с параметрами и токами обмоток:

$$\begin{bmatrix} \Psi_q(p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_q & x_{aq} \\ px_{aq} & r_{yq} + px_{yq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_q(p) \\ i_{yq}(p) \end{bmatrix}. \qquad (9.57)$$

Определим из этой системы уравнений ток:

$$i_q(p) = \Psi_q(p) A_{11}(p)/D(p) = \Psi_q(p)(r_{yq} + \\ + p x_{yq})/[(r_{yq} + px_{yq}) x_q - px^2_{aq}]. \qquad (9.58)$$

После преобразований получим

$$\Psi_q(p) = x_q(p) i_q(p), \qquad (9.59)$$

где

$$x_q(p) = \frac{(r_{yq} + px_{yq}) x_q - px^2_{aq}}{r_{yq} + px_{yq}} = x_q - \frac{px^2_{aq}}{r_{yq} + px_{yq}}. \qquad (9.60)$$

Функции $x_d(p)$, $x_q(p)$, $G(p)$ — соответственно операторные индуктивные сопротивления по продольной и поперечной осям и операторная проводимость. Если демпферная обмотка на роторе отсутствует, то операторные индуктивные сопротивления и операторная проводимость примут вид

$$\left. \begin{aligned} x_d(p) &= x_d - px^2_{ad}/(r_f + px_f); \\ x_q(p) &= x_q; \; G(p) = x_{ad}/(r_f + px_f). \end{aligned} \right\} \qquad (9.61)$$

Часто операторные индуктивные сопротивления и операторную проводимость представляют в другой форме записи, заменяя полные индуктивные сопротивления обмоток их значениями через соответствующие индуктивные сопротивления рассеяния и индуктивные сопротивления реакции якоря (9.20), (9.34) и (9.35). Например, в случае СМ без демпферной обмотки на роторе операторное индуктивное сопротивление $x_d(p)$ (9.61) преобразуется к виду

$$x_d(p) = x_{\sigma 1} + [x_{ad} - px^2_{ad}/(p(x_{\sigma f} + x_{ad}) + r_f)] = \\ = x_{\sigma 1} + [x_{ad}(r_f + px_{\sigma f}) + px^2_{ad} - px^2_{ad}]/[(r_f + px_{\sigma f}) + px_{ad})] = \\ = x_{\sigma 1} + [1/x_{ad} + 1/(r_f/p + x_{\sigma f})]^{-1}. \qquad (9.62)$$

Аналогично преобразуются операторные индуктивные сопротивления (9.55) и (9.60) для СМ с полным числом обмоток на роторе:

$$x_d(p) = x_{\sigma 1} + [1/x_{ad} + 1/(r_f/p + x_{\sigma f}) + 1/(r_{yd}/p + x_{\sigma yd})]^{-1}; \qquad (9.63)$$

$$x_q(p) = x_{\sigma 1} + [1/x_{aq} + 1/(r_{yq}/p + x_{\sigma yq})]^{-1}. \qquad (9.64)$$

Если принять, что обмотки СМ — идеальные проводники ($r_{yd} = r_{yq} = r_f = 0$), то выражения (9.63) и (9.64) упрощаются:

$$x_d(p) = x_{\sigma 1} + (1/x_{ad} + 1/x_{\sigma f} + 1/x_{\sigma yd})^{-1} = x''_d;$$
$$x_q(p) = x_{\sigma 1} + (1/x_{aq} + 1/x_{\sigma yd})^{-1} = x''_q, \qquad (9.65)$$

где x''_d, x''_q — сверхпереходные индуктивные сопротивления по продольной и поперечной осям.

Указанные допущения применяются в том случае, когда при исследовании переходных процессов используется теорема о постоянстве потокосцеплений обмоток. Если на роторе имеется одна обмотка возбуждения и $r_f = 0$, то (9.62) преобразуется к виду

$$x_d(p) = x_{\sigma 1} + (1/x_{ad} + 1/x_{\sigma f})^{-1} = x'_d, \qquad (9.66)$$

где x'_d— переходное индуктивное сопротивление по продольной оси.

Иногда операторные индуктивные сопротивления записывают через постоянные времени обмоток машины. Переход к такой форме записи рассмотрим на примере $x_d(p)$ (9.61) для СМ с одним контуром на роторе:

$$x_d(p) = x_d - px^2_{ad}/(r_f + px_f) = [x_d r_f + px_f(x_d - x^2_{ad}/x_f)]/(r_f +$$
$$+ px_f) = [x_d + p(x_f/r_f)x'_d]/[1 + p x_f/r_f)] = x_d[1 +$$
$$+ pT_{d0}(x'_d/x_d)]/(1 + pT_{d0}) = x_d(1 + pT'_d)/(1 + pT_{d0}), \qquad (9.67)$$

где $T_{d0} = x_f/r_f$ — постоянная времени обмотки возбуждения при разомкнутой обмотке статора; T'_d — постоянная времени обмотки возбуждения при замкнутой обмотке статора и разомкнутой демпферной обмотке или постоянная времени затухания переходной составляющей тока статора по продольной оси:

$$T'_d = T'_f = T_{d0}\,x'_d/x_d = x'_f/r_f; \qquad (9.68)$$

x'_f — переходное сопротивление обмотки возбуждения.

Действительно, $x_f x'_d/x_d = x_f(x_d - x^2_{ad}/x_f)/x_d = x_f - x^2_{ad}/x_d = x'_f$. Аналогично, для СМ с полным числом обмоток на роторе уравнения (9.55) и (9.60) примут вид

$$x_d(p) = x_d[(1 + pT'_d)(1 + pT''_d)]/[(1 + pT_{d0})(1 + pT'_{d0})]; \qquad (9.69)$$
$$x_q(p) = x_q(1 + pT''_q)/(1 + pT_{q0}). \qquad (9.70)$$

где T''_d — постоянная времени демпферной обмотки по продольной оси при замкнутых обмотках статора и возбуждения, или постоянная времени затухания сверхпереходной составляющей тока статора по продольной оси:

$$T''_d = T'_{d0}\,x''_d/x'_d \approx x''_{yd}/r_{yd}; \qquad (9.71)$$

x''_{yd} — сверхпереходное индуктивное сопротивление демпферной обмотки по продольной оси:

$$x''_{yd} = x_{\sigma yd} + (1/x_{ad} + 1/x_{\sigma f} + 1/x_{\sigma 1})^{-1}; \qquad (9.72)$$

r_{yd} — активное сопротивление демпферной обмотки по продольной оси; T'_{d0} — постоянная времени демпферной обмотки по продольной оси при замкнутой обмотке возбуждения и разомкнутой обмотке статора:

$$T'_{d0} = x'_{yd}/r_{yd}; \qquad (9.73)$$

x'_{yd} — переходное индуктивное сопротивление демпферной обмотки по продольной оси:

$$x'_{yd} = x_{yd} - x^2_{ad}/x_f; \qquad (9.74)$$

T'_q — постоянная времени демпферной обмотки по поперечной оси при замкнутой обмотке статора, или постоянная времени затухания сверхпереходной составляющей тока статора по поперечной оси:

$$T'_q = T_{q0}\, x''_q/x_q = x''_{yq}/r_{yq}; \qquad (9.75)$$

$T_{q0} = x_{yq}/r_{yq}$ — постоянная времени демпферной обмотки по поперечной оси при разомкнутой обмотке статора; x''_{yq} — сверхпереходное индуктивное сопротивление демпферной обмотки по поперечной оси:

$$x''_{yq} = x_{yq} - x^2_{aq}/x_q = x_{\sigma yq} + (1/x_{aq} + 1/x_{\sigma 1})^{-1}; \qquad (9.76)$$

r_{yq} — активное сопротивление демпферной обмотки по поперечной оси.

При наличии демпферной обмотки на роторе ее параметры влияют на значение T'_d [5, 12, 43]:

$$T'_d = T'_f + T'_{yd} - T''_d, \qquad (9.77)$$

где $T'_{yd} = x'_{yd}/r_{yd}$ — постоянная времени демпферной обмотки при короткозамкнутой обмотке статора и разомкнутой обмотке возбуждения:

$$x'_{yd} = x_{yd} - x^2_{ad}/x_d. \qquad (9.78)$$

Используя выражения для определения индуктивных сопротивлений и операторных проводимостей, запишем уравнения Парка — Горева в виде

$$\left.\begin{aligned} U_d(p) &= p\Psi_d(p) - \omega\Psi_q(p) + r_1 i_d(p);\\ U_q(p) &= p\Psi_q(p) + \omega\Psi_d(p) + r_1 i_q(p);\\ \Psi_d(p) &= x_d(p)\, i_d(p) + G(p)\, U_f(p);\\ \Psi_q(p) &= xq(p)\, i_q(p). \end{aligned}\right\} \qquad (9.79)$$

Уравнение равновесия напряжений для нулевой составляющей рассматривается независимо от уравнений (9.79). Это объясняется тем, что напряжение и потокосцепление нулевой составляющей зависят только от значения нулевой составляющей тока $i_0(p)$ и не зависят от других токов.

ГЛАВА 10. ВНЕЗАПНОЕ ТРЕХФАЗНОЕ КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

§ 10.1. Физическая картина процесса при внезапном коротком замыкании

От момента возникновения ВКЗ до момента перехода к установившемуся КЗ генератор работает в переходном режиме. Характерной особенностью этого режима является то, что амплитуда тока обмотки статора изменяется во времени, вследствие чего изменяющийся во времени поток реакции индуцирует ЭДС и соответственно токи в обмотках ротора. В свою очередь, токи в обмотках ротора влияют на токи статора.

Ввиду сложности явлений, сопровождающих ВКЗ, рассмотрим физическую картину процесса при некоторых допущениях. Считаем, что симметричное ВКЗ, т. е. замыкание всех фаз обмотки статора, произошло непосредственно на зажимах генератора, работающего автономно, причем до ВКЗ генератор работал в режиме XX. При симметричном ВКЗ картина протекания переходного процесса во всех фазах в принципе одинакова, поэтому достаточно провести анализ для одной фазы.

В ходе исследования ВКЗ необходимо решить две основные задачи: 1) определить максимальный всплеск тока и 2) найти закономерность его изменения во времени. Для решения первой задачи пренебрегаем активным сопротивлением обмоток СГ, т. е. полагаем обмотки статора и ротора сверхпроводящими. Это допущение не вносит существенной погрешности в результаты расчета, так как активное сопротивление обмоток СГ обычно очень мало по сравнению с индуктивным. При решении второй задачи учитываем активные сопротивления обмоток, так как они определяют постоянные времени затухания токов.

В основу анализа ВКЗ положена **теорема** *о постоянстве потокосцепления: полный поток сверхпроводящего контура остается постоянным в любых условиях и в любом режиме.* Действительно, для любой электрической цепи, в которой нет посторонних источников ЭДС, справедливо дифференциальное уравнение $d\Psi/dt = -ri$.

Для сверхпроводящего контура $r = 0$, тогда $d\Psi/dt = 0$, откуда $\Psi = \text{const}$.

Внезапное трехфазное короткое замыкание при $\Psi_{a0} = 0$. Рассмотрим физическую картину процесса ВКЗ, возникшего в момент, когда основной поток не пронизывает катушку $A - X$ (потокосцепление обмотки возбуждения с рассматриваемой фазой статора равно нулю), а ЭДС в катушке $A - X$ равна максимальному значению, т. е. $\Psi_{a0} = 0$, $e = E_m$, $i_a = 0$ при $t = 0$. Положение полюсов относительно катушки AX, соответствующее этому условию (рис. 10.1, *а*), принимается за исходное, и от него отсчитываются углы поворота ротора.

Через четверть периода после начала ВКЗ ротор повернется от исходного положения на $\pi/2$ эл. рад, при этом по мере измене-

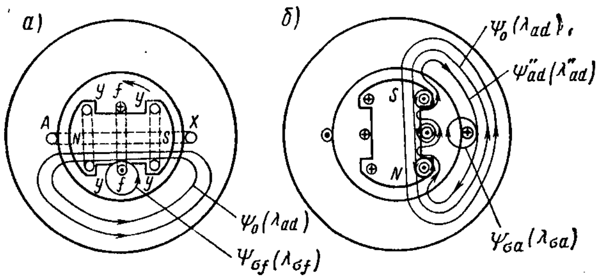

Рис. 10.1. Потокосцепления ВКЗ при $\Psi_{a0} = 0$

ния положения ротора относительно фазы *а* его поток стремится войти в контур обмотки статора. Если считать обмотку статора сверхпроводящим контуром, то в ней в силу закона о постоянстве потокосцепления будет наводиться ЭДС и потечет по величине и направлению такой ток, при котором собственное потокосцепление фазы $\Psi_a = \Psi_{\sigma a} + \Psi''_{ad}$ (кривая 1, рис. 10.2, *а*) в любой момент времени равно по величине потокосцеплению с обмоткой возбуждения Ψ_{fa} (кривая 3, рис. 10.2, *а*), но противоположно направлено, т. е. для любого момента времени $\Psi_a + \Psi_{fa} = 0$.

Картина распределения силовых линий потоков для момента времени $\omega t = \pi/2$ показана на рис. 10.1, *б*, где $\Psi_0 = \Psi_{fa}$ — основной поток, создаваемый обмоткой возбуждения и являющейся потоком взаимной индукции для обмотки статора; λ_{ad} — магнитная проводимость пути основного потока; Ψ''_{ad} — поток реакции якоря в сверхпереходном режиме; λ''_{ad} — магнитная проводимость пути потока Ψ''_{ad}; $\Psi_{\sigma a}$ — поток рассеяния обмотки статора; $\lambda_{\sigma a}$ — магнитная проводимость пути потока рассеяния обмотки статора.

Так как магнитное сопротивление пути потока Ψ''_{ad} значительно больше магнитного сопротивления потоку Ψ_{ad} по сердечнику ротора, то для создания потока Ψ''_{ad} требуется значительно больший ток $i_к$, чем ток установившегося КЗ. Ток $i_к$ совпадает по фазе с потоком Ψ''_{ad} и в данном случае достигает своего максимума через четверть периода после ВКЗ (кривая 2, рис. 10.2,*а*). Всплеск тока в обмотке статора увеличивает ток в обмотке возбуждения и вызывает ток в демпферной обмотке (рис. 10.2,*б*, *в*).

В случае сверхпроводящих обмоток процесс, изображенный на рис. 10.2,*а*, при синхронном вращении ротора повторялся бы периодически и амплитуда суммарного тока фаз статора и токи в обмотках ротора оставались бы неизменными (рис. 10.2,*б*, *в*), т. е. процесс ВКЗ носил бы незатухающий характер. Но так как реальные обмотки современных машин обладают активными сопротивлениями, то наведенные в них токи затухают. Сверхпереходная постоянная времени демпферной обмотки невелика, поэтому ток в этой обмотке резко снижается (кривая *3*, рис. 10.3). Это вызывает соответствующее увеличение апериодической составляющей тока возбуждения (кривая *2*, рис. 10.3) (начальные значения токов соответственно i_{yd0} и i''_{f0} [43]). Для сравнения показан ток возбуждения (кривая *1*, рис. 10.3) при отсутствии демпферной обмотки при условии, что ток статора тот же (начальное значение тока i'_{f0}).

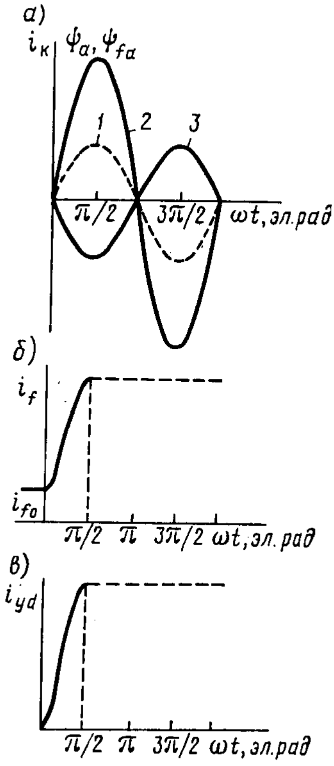

Рис. 10.2. Токи ВКЗ при $\Psi_{a0} = 0$, $r_1 = 0$

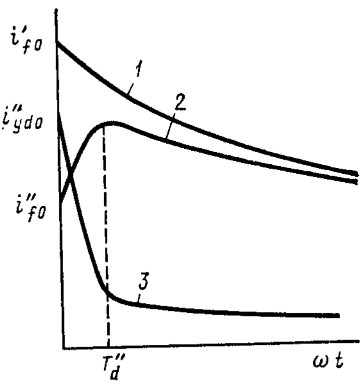

Рис. 10.3. Апериодические токи в обмотках ротора

После затухания сверхпереходного процесса токи в обмотках ротора затухают с постоянной времени T'_d (9.77), определяющей протекание переходного процесса. Таким образом, как в сверхпереходном, так и в переходном режимах участвуют обе обмотки ротора.

По мере затухания переходного процесса поток статора входит в «тело» ротора. При этом магнитная проводимость пути потока Ψ'_{ad} статора, который можно рассматривать как поток реакции якоря в переходном режиме, определяется величиной λ'_{ad}. Когда переходные составляющие тока в обмотках ротора затухнут, поток статора полностью войдет в «гело» ротора, после чего наступит режим установившегося КЗ, при котором ток, не затухая, протекает по обмотке статора до момента устранения КЗ.

При синхронной частоте вращения ротора МДС, создаваемые токами обмоток статора и ротора, вращаясь в пространстве с одинаковой частотой, остаются неподвижными относительно друг

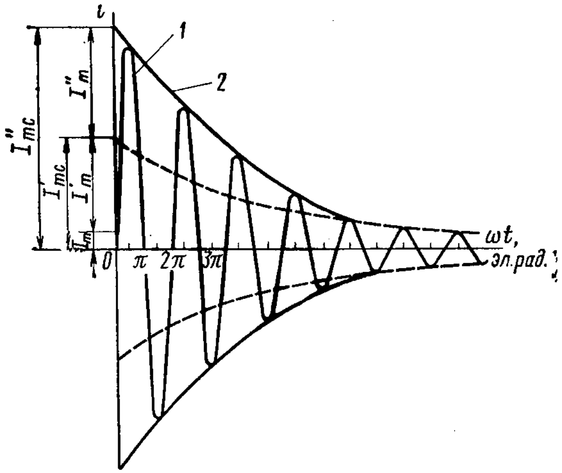

Рис. 10.4. Ток ВКЗ при $\Psi_{a0} = 0$

друга. Это означает, что при симметричном ВКЗ, когда $\Psi_{a0} = 0$, МДС, создаваемые токами в обмотках ротора, неподвижны относительно ротора, т. е. токи обмоток возбуждения и демпферной имеют нулевую частоту. Таким образом, ток ВКЗ при $\Psi_{a0} = 0$ представим в виде суммы трех периодических составляющих:

$$i_к = i_{кп} = i''_п + i'_п + i_п. \tag{10.1}$$

Сверхпереходная составляющая тока

$$i''_п = I''_m \exp(-t/T''_d) \cdot \sin \omega t \tag{10.2}$$

затухает с постоянной времени T''_d, определяемой в основном сверхпереходными параметрами демпферной обмотки.

Переходная составляющая тока

$$i'_п = I'_m \exp(-t/T'_d) \cdot \sin \omega t \tag{10.3}$$

затухает с постоянной времени T'_d, определяемой переходными параметрами обмоток ротора.

Установившийся ток КЗ

$$i_п = I_m \sin \omega t. \tag{10.4}$$

Построив кривые отдельных составляющих и сложив их ординаты, получим результирующую кривую тока ВКЗ, симметрично расположенную относительно оси абсцисс (рис. 10.4). Своего наибольшего значения ток ВКЗ (кривая *1*) достигает при $\omega t = \pi/2$. Продолжив огибающую (кривая *2*) до пересечения с осью ординат, получим начальную амплитуду симметричного тока ВКЗ:

$$I''_{mc} = I''_m + I'_m + I_m. \tag{10.5}$$

Подставив в (10.1) значения токов (10.2) — (10.4) с учетом (10.5), получим

$$i_к = i_{кп} = [\,I''_m \exp(-t/T''_d) + I'_m \exp(-t/T'_d) + I_m] \sin \omega t. \tag{10.6}$$

Внезапное трехфазное короткое замыкание при $\Psi_{a0} = \Psi_{max}$. Всплеск тока в обмотке фазы статора достигает наибольшего зна-

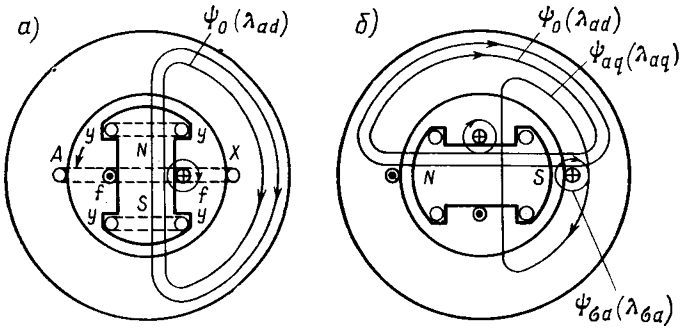

Рис. 10.5. Потокосцепления ВКЗ при $\Psi_{a0} = \Psi_{max}$

чения, если ВКЗ происходит в момент, когда магнитный поток, сцепленный с рассматриваемой фазой, максимален, т. е. $\Psi_{a0} = \Psi_{max}$, $e = 0$, $i_a = 0$ при $t = 0$. Положение полюсов относительно катушки $A - X$, соответствующее этому условию (рис. 10.5,*а*), принимается за исходное и от него ведется отсчет углов поворота ротора.

Рассмотрим качественную картину процессов, происходящих в СГ в течение времени $\omega t = 0 - \pi/2$, после замыкания обмотки накоротко. При вращении ротора основной поток Ψ_0 выходит из сцепления с фазой *а*, вследствие чего в ней наводится ЭДС, появляется ток и соответственно поток Ψ_a, который возрастает по мере уменьшения потокосцепления фазы с основным потоком таким образом, что суммарное потокосцепление контура $A - X$ остается постоянным. К моменту времени $\omega t = \pi/2$ ротор повернется на $\pi/2$ эл. рад и потокосцепление фазы *а* с основным потоком равно 0.

В этот момент весь поток, сцепленный с фазой a, будет потоком самоиндукции, равным по величине начальному значению основного потока (рис. 10.5,*б*) при отсутствии затухания:

$$\Psi_a = \Psi_{\sigma a} + \Psi_{aq} = \Psi_{a0}.$$

Потокосцепление Ψ_a имеет постоянное направление и поэтому может быть создано только постоянным током $i_{\text{к}a}$, нарастающим от 0 при $t = 0$ до I_{ma} при $\omega t = \pi/2$. Начиная с момента времени

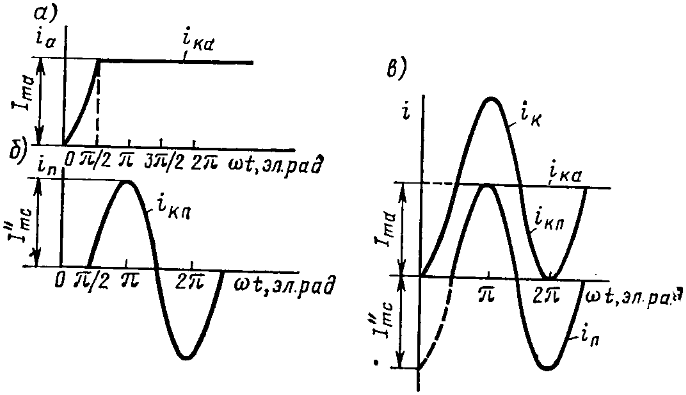

Рис. 10.6. Составляющие тока ВКЗ при $\Psi_{a0} = \Psi_{\max}$ и $r_1 = 0$

$\omega t = \pi/2$ апериодический ток оставался бы неизменным по значению, если бы активное сопротивление обмотки статора было равно нулю (рис. 10.6, *а*).

При $\omega t = \pi/2$ положение ротора относительно фазы a (см. рис. 10.5,*б*) соответствует исходному положению ротора в рассмотренном ранее случае, когда ВКЗ начиналось в момент нулевого потокосцепления (см. рис. 10.1, *а*). Поэтому при дальнейшем вращении ротора физическая картина подобна рассмотренной выше. Через каждые полпериода основной поток, пронизывающий фазу a, изменяется по знаку, в фазе a наводится переменная ЭДС, появляется периодическая составляющая $i_{\text{кп}}$ тока ВКЗ. В отличие от периодического тока, представленного на рис. 10.2, *а*, в данном случае периодический ток появляется спустя четверть периода после начала ВКЗ (рис. 10.6, *б*).

Сложение составляющих $i_{\text{к}a}$ и $i_{\text{кп}}$ дает результирующий ток $i_{\text{к}}$ ВКЗ (рис. 10.6,*в*). Хотя в действительности в течение первой четверти периода по обмотке статора протекает только ток $i_{\text{к}a}$, нарастающий от нуля при $t = 0$ до I_{ma} при $\omega t = \pi/2$, удобно математически описывать изменение тока ВКЗ, предполагая, что обе составляющие $i_{\text{к}a}$ и $i_{\text{кп}}$ имеют место с момента ВКЗ. При этом считают, что при $t = 0$ апериодическая составляющая сразу имеет наибольшее значение I_{ma}, а периодическая — изменяется по косинусоидальному закону с амплитудой $I''_{mc} = -I_{ma}$. Принятое условное изменение составляющих тока ВКЗ в течение первой четверти периода представлено на рис. 10.6, *в* штриховыми линиями. Очевидно, что картина результирующего тока от принятого допущения не изменяется. В то же время математическое описание кривой тока

$$i_к = I_{ma} - I''_{mc} \cos \omega t \qquad (10.7)$$

становится очень простым. Таким образом, принимаем, что при $t = 0$ мгновенно возникают равные друг другу максимальные значения апериодической I_{ma} и периодической I''_{mc} составляющих тока (10.5).

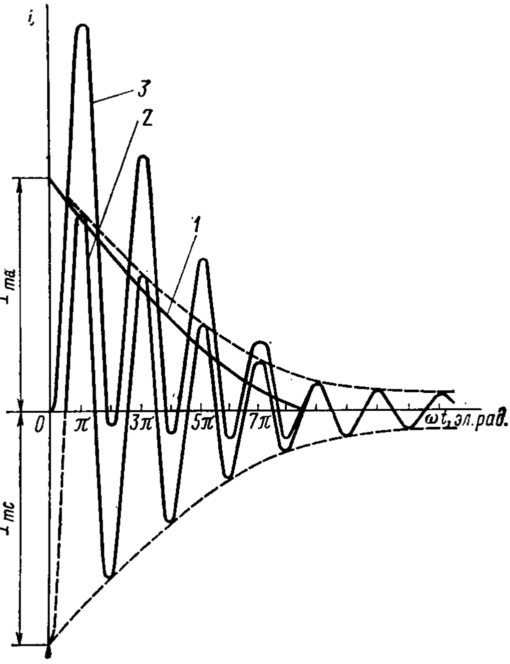

Рис. 10.7. Ток ВКЗ при $\Psi_{a0} = \Psi_{max}$

Так как реальные обмотки обладают определенным активным сопротивлением, то составляющие тока ВКЗ будут затухать. Апериодическая составляющая тока

$$i_{кa} = I_{ma} \exp(-t/T_a) \qquad (10.8)$$

затухает по экспоненте с постоянной времени T_a (кривая *1*, рис. 10.7).

Периодическая составляющая тока (кривая *2*, рис. 10.7) содержит незатухающую (установившийся ток КЗ) и две затухающие составляющие соответственно с постоянными времени T''_d и T'_d:

$$i_{кп} = [I''_m \exp(-t/T''_d) + I'_m \exp(-t/T'_d) + I_m] \sin(\omega t - \pi/2). \qquad (10.9)$$

Результирующий ток ВКЗ (кривая *3*, рис. 10.7)

$$i_к = I_{ma} \exp(-t/T_a) - [I''_m \exp(-t/T''_d) + I'_m \times$$
$$\times \exp(-t/T'_d) + I_m] \cos \omega t. \qquad (10.10)$$

Результирующий ток расположен несимметрично относительно оси времени и достигает максимального значения при $\omega t = \pi$.

Если не учитывать затухания, то максимальное значение результирующего тока равно двойной амплитуде периодической составляющей тока. Под влиянием активных сопротивлений апериодическая и периодическая составляющие токов затухают с соответствующими постоянными времени до установившегося значения тока КЗ.

Следовательно, при ВКЗ, когда $\Psi_{a0} = \Psi_{max}$, результирующий магнитный поток, сцепленный с фазой *a*, можно рассматривать как сумму основного потока и потока самоиндукции, созданного апериодической и периодической составляющими тока ВКЗ. Поток самоиндукции, создаваемый периодической составляющей тока симметричного КЗ, вращается синхронно с ротором и вызывает появление апериодических токов в обмотках ротора (см. рис. 10.2, *б*, *в*). Поток самоиндукции, создаваемый апериодической составляющей тока ВКЗ, будучи неподвижным в пространстве, индуцирует ЭДС основной частоты в обмотках вращающегося ротора, в результате чего на апериодические всплески токов в обмотке возбуждения i_{fa} и демпферной i_{ya} налагаются периодические токи основной частоты, соответственно $i_{fп}$ и $i_{yп}$ (рис. 10.8, *а*, *б*). Эти токи создают магнитные потоки, вращающиеся с синхронной частотой относительно ротора в сторону, противоположную вращению ротора. Поэтому потоки периодических токов ротора неподвижны относительно статора и направлены навстречу потоку статора. В результате сложного процесса взаимодействия апериодических токов статора и периодических токов ротора кратность токов в обмотках дополнительно возрастает. При этом если апериодические составляющие токов в обмотках ротора затухают с постоянными времени соответствующих обмоток: в демпферной обмотке — с постоянной времени T''_d, в обмотке возбуждения — с постоянной времени T'_d, — то периодические составляющие токов в обмотке возбуждения и в демпферной затухают с постоянной времени T_a обмотки статора.

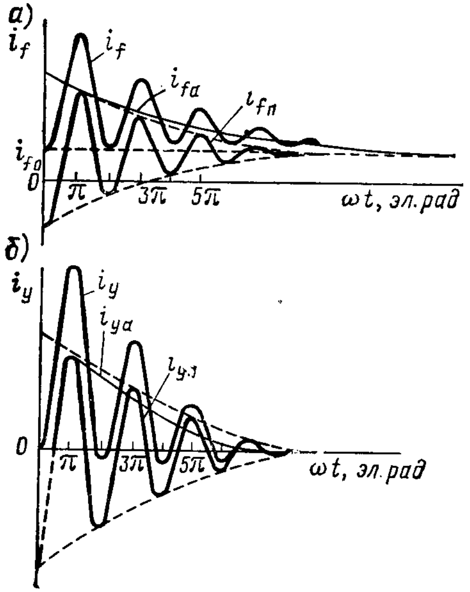

Рис. 10.8. Переходные токи в обмотках ротора при $\Psi_c = \Psi_{max}$

§ 10.2. Трехфазное короткое замыкание синхронного генератора

Полученные в предыдущих главах уравнения, описывающие работу СМ, можно использовать для исследования различных режимов работы. В качестве примера использования уравнений Парка — Горева рассмотрим расчет тока ВКЗ СГ. Чтобы избежать нелинейных зависимостей в системе уравнений, частоту вращения ротора в течение всего периода ВКЗ принимаем постоянной и равной синхронной частоте. Насыщение магнитной цепи машины также принимается постоянным.

Операторные уравнения Парка — Горева для СГ, работающего на активно-индуктивную нагрузку, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} -U_d(p) &= p\Psi_d(p) - \omega_1\Psi_q(p) + r_1 i_d(p); \\ -U_q(p) &= p\Psi_q(p) + \omega_1\Psi_d(p) + r_1 i_q(p), \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

где

$$\Psi_d(p) = x_d(p)\, i_d(p) + G(p)\, U_f(p); \quad \Psi_q(p) = x_q(p)\, i_q(p). \qquad (10.12)$$

Для СМ с одним контуром на роторе операторные параметры определяют по (9.61), а в случае трех контуров на роторе — по (9.55), (9.56) и (9.60).

Подставив (10.12) в уравнения равновесия напряжений и учитывая, что в системе относительных единиц $\omega_1 = 1$, получим

$$\left.\begin{aligned} -U_d(p) &= (r_1 + px_d(p))\, i_d(p) + pG(p)U_f(p) - x_q(p)\, i_q(p); \\ -U_q(p) &= x_d(p)\, i_d(p) + G(p)\, U_f(p) + (r_1 + px_q(p))\, i_q(p). \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Обозначим через $Z_d(p) = r_1 + px_d(p)$, $Z_q(p) = r_1 + px_q(p)$ соответственно полные операторные сопротивления СМ по продольной и поперечной осям. Решим (10.13) относительно токов:

$$i_d(p) = -\frac{U_d(p)Z_q(p) + U_q(p)\, x_q(p) + U_f(p)\,[pG(p)\, Z_q(p) + G(p)\, x_q(p)]}{Z_d(p)\, Z_q(p) + x_d(p)\, x_q(p)};$$

$$i_q(p) = \frac{U_d(p)\, x_d(p) - U_q(p)\, Z_d(p) - U_f(p)\,[G(p)\, Z_d(p) - pG(p)\, x_d(p)]}{Z_d(p)\, Z_q(p) + x_d(p)\, x_q(p)}. \qquad (10.14)$$

В цепях с постоянными параметрами, к которым прикладывается постоянное напряжение, ток обычно представляют в виде суммы двух составляющих:

$$i = i_0 + i', \qquad (10.15)$$

где i_0 — вынужденный ток, характеризующий начальный установившийся режим до какого-либо изменения в схеме; i' — переходный ток.

Используя этот принцип наложения, рассмотрим токи в обмотках СГ $i_d(p)$ и $i_q(p)$ как сумму токов, протекающих до ВКЗ, и переходных токов, появляющихся в результате изменения напряжения на зажимах обмоток:

$$i_d(p) = i_{d0} + i'_d(p); \quad i_q(p) = i_{q0} + i'_q(p). \tag{10.16}$$

Начальные значения токов i_{d0}, i_{q0} определим из уравнений установившегося режима, полагая в (10.14) $\overline{U}_d(p) = \overline{U}_{d0}$; $U_q(p) = U_{q0}$; $U_f(p) = U_{f0}$; $p = 0$. Например, для СГ с одним контуром на роторе

$$\left.\begin{aligned} i_{d0} &= -[U_{d0}r_1 + U_{q0}x_q + U_{f0}(x_{ad}/r_f)\,x_q]/(r_1^2 + x_d x_q); \\ i_{q0} &= [U_{d0}x_d - U_{q0}r_1 - U_{f0}(x_{ad}/r_f)\,r_1]/(r_1^2 + x_d x_q). \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

Напряжения U_{d0}, U_{q0} зависят от режима работы СГ до ВКЗ. В соответствии с векторной диаграммой СГ (см. рис. 9.3,*б*)

$$-U_{d0} = U_{1m}\sin\Theta_0; \quad -U_{q0} = U_{1m}\cos\Theta_0, \tag{10.18}$$

где Θ_0 — угол нагрузки синхронного генератора.

Обычно при исследовании ВКЗ предполагают, что оно произошло при работе СГ в режиме ХХ, т. е. при $\Theta_0 = 0$ и $i = 0$. В этом случае

$$i_{d0} = 0, \quad i_{q0} = 0, \quad -U_{d0} = 0, \quad -U_{q0} = U_{1m} = E_0. \tag{10.19}$$

При симметричном КЗ — $U_d = 0$ и $-U_q = 0$. Следовательно, можно рассматривать процесс ВКЗ как внезапное приложение к обмоткам статора СМ напряжений, равных по значению первоначальным, но противоположно направленных: $-\Delta U_d = U_{d0} = 0$; $-\Delta U_q = U_{q0} = -E_0$. Полагая, что процесс ВКЗ происходит при постоянном напряжении возбуждения (без форсировки возбуждения), имеем $U_f = U_{f0} = \text{const}$ и $\Delta U_f = 0$. Подставляя в (10.14) значения изменений напряжения контуров СМ, получим приращения токов:

$$\left.\begin{aligned} i'_d(p) &= -\frac{\Delta U_d Z_q(p) + \Delta U_q x_q(p) + \Delta U_f[pG(p)Z_q(p) + G(p)x_q(p)]}{Z_d(p)Z_q(p) + x_d(p)x_q(p)}; \\ i'_q(p) &= \frac{\Delta U_d x_d(p) - \Delta U_q Z_d(p) - \Delta U_f[G(p)Z_d(p) - pG(p)x_d(p)]}{Z_d(p)Z_q(p) + x_d(p)x_q(p)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

Учитывая нулевые начальные условия (10.19), запишем токи (10.16) в окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned} i_d(p) &= -E_0 x_q(p)/[Z_d(p)Z_q(p) + x_d(p)x_q(p)]; \\ i_q(p) &= -E_0 Z_d(p)/[Z_d(p)Z_q(p) + x_d(p)x_q(p)]. \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

С помощью теоремы разложения (см. § 3.4) осуществим переход от операторных выражений токов к временным. Определим корни уравнения:

$$F_2(p) = Z_d(p)Z_q(p) + x_d(p)x_q(p) = 0. \tag{10.22}$$

Так как $x_d(p)$, $x_q(p)$ — сложные операторные функции, преобразуем (10.22) следующим образом:

$$F_2(p) = x_d(p)\, x_q(p)\, [p^2 + pr_1(x_d(p) + x_q(p))/(x_d(p) \times \times x_q(p)) + r_1^2/(x_d(p)\cdot x_q(p)) + 1] = 0. \qquad \textbf{(10.23)}$$

Отношение

$$2x_d(p)\ x_q(p)/[x_d(p) + x_q(p)] = x_2(p) \qquad \textbf{(10.24)}$$

представляет собой операторное индуктивное сопротивление обратной последовательности. Зависимость $x_2(p)$ от индуктивных операторных сопротивлений по продольной и поперечной осям обусловлена тем, что магнитное поле обратной последовательности движется относительно ротора с двойной синхронной частотой и его амплитуда поочередно совпадает с осями d и q ротора, т. е. $x_2(p)$ поочередно равно $x_d(p)$ или $x_q(p)$. Корни характеристического уравнения (10.23) находятся приравниванием нулю индуктивных операторных сопротивлений $x_d(p)$, $x_q(p)$ и выражения в квадратных скобках.

Короткое замыкание синхронного генератора с одним контуром на роторе. Корни выражения (10.23) в квадратных скобках найдем при условии, что переходный процесс не затухает, т. е. $p = \infty$ или $r_f = 0$. Операторные сопротивления $x_d(p) = x'_d$, $x_q(p) = x_q$ и

$$x_2(p) = 2x'_d\, x_q/(x'_d + x_q) = x_2. \qquad \textbf{(10.25)}$$

В этом случае (10.23) принимает вид

$$F_2(p) = x_d(p)\, x_q\, [p^2 + p\,(2r_1/x_2) + r_1^2/(x'_d x_q) + 1] = 0. \qquad \textbf{(10.26)}$$

Воспользуемся выражением операторного индуктивного сопротивления $x_d(p)$ через постоянные времени T'_d и T_{d0} (9.67):

$$x_d(p) = x_d\,(1 + pT'_d)/(1 + pT_{d0}). \qquad \textbf{(10.27)}$$

Приравнивая $x_d(p)$ и выражение в квадратных скобках (10.26) нулю, соответственно получим

$$p_1 = -\,1/T'_d, \qquad \textbf{(10.28)}$$

$$p_{2,3} = -\,r_1/x_2 \pm \sqrt{(r_1/x_2)^2 - 1 - r_1^2/(x'_d x_q)}\,. \qquad \textbf{(10.29)}$$

Так как $x_2/r_1 = T_a$ и $(r_1/x_2)^2 - r_1^2/(x'_d x_q) \approx 0$, получим

$$p_{2,3} = -\,1/T_a \pm j. \qquad \textbf{(10.30)}$$

Зная корни характеристического уравнения, по теореме разложения определим оригиналы токов $i_d(\tau)$, $i_q(\tau)$. После ряда преобразований, пренебрегая влиянием активного сопротивления обмотки статора на амплитуды и фазы токов i_d, i_q, получим

$$\left.\begin{aligned} i_d(\tau) = &-E_0[1/x_d + (1/x_d' - 1/x_d)\exp(-\tau/T_d') - \\ &-(1/x_d')\exp(-\tau/T_d)\cos\tau]; \\ i_q(\tau) = &-E_0(1/x_q)\exp(-\tau/T_d)\sin\tau. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(10.31)}$$

Переход к токам фаз осуществим по (9.5). Например,

$$i_a = i_d(\tau)\cos\gamma - i_q(\tau)\sin\gamma. \quad \textbf{(10.32)}$$

Для нахождения токов фаз b и c заменим угол γ соответственно на $(\gamma - 2\pi/3)$ и на $(\gamma + 2\pi/3)$. Подставляя (10.31) в (10.32) и учитывая, что $\gamma = \tau + \gamma_0$ и

$$\left.\begin{aligned} \cos\tau \cdot \cos(\tau + \gamma_0) = 0{,}5\,[\cos\gamma_0 + \cos(2\tau + \gamma_0)]; \\ \sin\tau \cdot \sin(\tau + \gamma_0) = 0{,}5\,[\cos\gamma_0 - \cos(2\tau + \gamma_0)], \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(10.33)}$$

получим

$$\begin{aligned} i_a = &-E_0\,[1/x_d + (1/x_d' - 1/x_d)\exp(-\tau/T_d')]\cos(\tau + \gamma_0) + \\ &+ 0{,}5E_0(1/x_d' + 1/x_q)\exp(-\tau/T_d)\cos\gamma_0 + \\ &+ 0{,}5E_0(1/x_d' - 1/x_q)\exp(-\tau/T_d)\cos(2\tau + \gamma_0), \end{aligned} \quad \textbf{(10.34)}$$

где $E_0/x_d = I_m$ — амплитуда установившегося тока КЗ; $E_0(1/x_d' - 1/x_d)$ — амплитуда переходной составляющей тока КЗ; $0{,}5 \times E_0(1/x_d' + 1/x_q') = I_{ma}$ — максимальное значение апериодической составляющей тока КЗ; $0{,}5E_0(1/x_q' - 1/x_d') = I_{2п}$ — амплитуда составляющей двойной частоты тока КЗ.

С учетом этих обозначений

$$\begin{aligned} i_a = &-(I_m + I_m'\exp(-\tau/T_d'))\cos(\tau + \gamma_0) + \\ &+ I_{ma}\exp(-\tau/T_a)\cos\gamma_0 + I_{2п}\exp(-\tau/T_a)\cos(2\tau + \gamma_0). \end{aligned} \quad \textbf{(10.35)}$$

Кривые изменения составляющих тока фазы при ВКЗ в осях d, q и a, b, c представлены на рис. 10.9. На рис. 10.9, *а* кривые *1*, *2*, *3* — это составляющие тока i_d соответственно: затухающая с постоянной времени T_d', незатухающая и затухающая с постоянной времени T_a. На рис. 10.9,*б* кривые *1* — *4* — составляющие тока i_a соответственно: периодические (переходная и установившаяся) и апериодические (постоянная и изменяющаяся с двойной частотой).

Короткое замыкание синхронного генератора с тремя контурами на роторе. Для трехфазного СГ, имеющего на роторе обмотки возбуждения и демпферную, выражения для токов $i_d(p)$ и $i_q(p)$ имеют тот же вид (10.21), что и для СГ без демпферной обмотки. Однако параметры $x_d(p)$, $x_q(p)$ рассчитывают по (9.69) и (9.70). Выражение в квадратных скобках (10.23) преобразуем при условии равенства нулю активных сопротивлений контуров машины, т. е. согласно (9.65) и (10.24):

$$x_d(p) = x_d''; \quad x_q(p) = x_q''; \quad x_2(p) = 2x_d''x_q''/(x_d'' + x_q'') = x_2. \quad \textbf{(10.36)}$$

Характеристическое уравнение (10.26) принимает вид

$$F_2(p) = x_d(p)\,x_q(p)\,[p^2 + p\,(2r_1/x_2) + r_1^2/(x''_d\,x''_q) + 1] = 0. \qquad (10.37)$$

Приравниваем операторные индуктивные сопротивления (9.69) и (9.70) нулю:

$$x_d(p) = x_d\,[(1 + pT'_d)(1 + pT''_d)]/[(1 + pT_{d0})(1 + pT'_{d0})] = 0;$$

$$x_q(p) = x_q\,(1 + pT'_q)/(1 + pT_{q0}) = 0. \qquad (10.38)$$

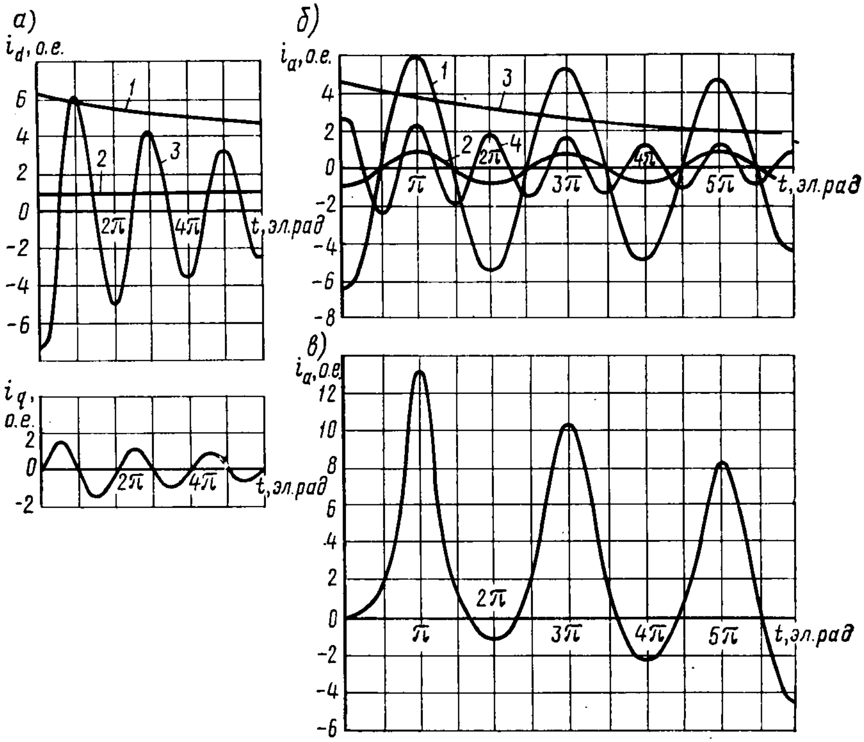

Рис. 10.9. Кривые составляющих тока фазы при ВКЗ: *а*) в осях *d*, *q*; *б*) в осях *a*, *b*, *c*; *в*) полный ток

Тогда получим

$$p_1 = -1/T'_d; \quad p_2 = -1/T''_d; \quad p_3 = -1/T'_q. \qquad (10.39)$$

Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках (10.37), получим

$$p_{4,5} = -r_1/x_2 \pm \sqrt{(r_1/x_2)^2 - 1 - r_1^2/(x''_d x''_q)}. \qquad (10.40)$$

Так как

$$\frac{r_1^2}{x_2^2} - \frac{r_1^2}{x_d'' x_q''} = \frac{r_1^2 (x_d'' + x_q'')^2}{(2x_d'' x_q'')^2} - \frac{r_1^2}{x_d'' x_q''} = \frac{r_1^2 (x_d'' - x_q'')^2}{4 (x_d'' x_q'')^2} \ll 1, \qquad (10.41)$$

а $x_2/r_1 = T_a$, получим

$$p_{4,5} = -1/T_a \pm j. \qquad (10.42)$$

Зная корни характеристического уравнения, по теореме разложения определим оригиналы токов $i_d(\tau)$, $i_q(\tau)$. После преобразований, пренебрегая влиянием активного сопротивления обмотки статора на амплитуды и фазы токов i_d, i_q, получим

$$i_d(\tau) = -E_0 [1/x_d + (1/x_d' - 1/x_d) \exp(-\tau/T_d') +$$
$$+ (1/x_d'' - 1/x_d') \exp(-\tau/T_d'') - (1/x_d'') \exp(-\tau/T_a) \cos\tau];$$
$$i_q(\tau) = (-E_0/x_q'') \exp(-\tau/T_a) \sin\tau. \qquad (10.43)$$

По (10.32) определим ток фазы a:

$$i_a = -[I_m + I_m' \exp(-\tau/T_d') + I_m'' \exp(-\tau/T_d'')] \cos(\tau + \gamma_0) +$$
$$+ I_{ma} \exp(-\tau/T_a) \cdot \cos\gamma_0 + I_{2\text{п}} \exp(-\tau/T_a) \cdot \cos(2\tau + \gamma_0), \qquad (10.44)$$

где $I_m'' = E_0(1/x_d'' - 1/x_d')$ — амплитуда сверхпереходной составляющей тока; $I_{ma} = (E_0/2)(1/x_d'' + 1/x_q'')$ — максимальное значение апериодической составляющей тока; $I_{2\text{п}} = (E_0/2)(1/x_d'' - 1/x_q'')$ — амплитуда составляющей тока двойной частоты.

В СМ с демпферной обмоткой на роторе (см. § 9.7) ее параметры влияют на переходный режим и величины x_d' и T_d' отличаются от аналогичных величин генератора с одной обмоткой возбуждения на роторе. Обмотка возбуждения также влияет на сверхпереходный режим:

$$T_d' = T_f' + T_{yd}' - T_d''; \quad T_d'' = T_{yd}''/(1 + T_{yd}/T_f'), \qquad (10.45)$$

где T_{yd}'' — постоянная времени демпферной обмотки при замкнутых обмотках статора и возбуждения.

Кривая тока фазы a с учетом затухания переходного процесса при $\gamma_0 = 0$ имеет вид, аналогичный представленному на рис. 10.7. Амплитуду первого наибольшего всплеска тока ВКЗ с учетом апериодической составляющей называют *ударным током*. При трехфазном ВКЗ в нуль ЭДС ($\gamma_0 = 0$) ударный ток

$$I_{y\text{д}} = 2E_0 k_з / x_d'', \qquad (10.46)$$

где $k_з$ — коэффициент затухания тока.

§ 10.3. Ударные генераторы

Ударные генераторы — это специальные СГ, у которых режим ВКЗ является не аварийным, а рабочим. От турбогенераторов ударные генераторы отличаются тем, что имеют минимальную величину индуктивного сопротивления рассеяния обмоток, а также усиленное механическое крепление обмоток статора.

Импульсная электроэнергетика характеризуется прерывистой посылкой отдельных порций энергии к потребителю. Необходимость в импульсном питании потребителей объясняется либо невозможностью обеспечения непрерывного питания из-за ограниченной мощности источника энергии, либо невозможностью работы потребителя в непрерывном режиме [13, 43].

Наряду с такими установками для научных исследований, как устройства для получения сверхсильных магнитных полей, плазматроны, лазеры и т. д., импульсная электроэнергетика успешно используется в технологии промышленного производства, например, при испытаниях высоковольтной коммутирующей аппаратуры, в устройствах для магнитоимпульсной и электрогидравлической обработки металлов и изделий, при импульсно-дуговой сварке, при электрогидравлической сейсмической разведке и др. [43].

Область потребления импульсной мощности непрерывно расширяется. Диапазон используемой при этом энергии колеблется от десятков джоулей до сотен мегаджоулей при длительности импульсов от долей миллисекунд до сотен миллисекунд. Для многих потребителей ударные генераторы оказываются самыми необходимыми источниками энергии, поскольку накопление энергии во вращающихся маховых массах наиболее эффективно и экономично. Роторы современных крупных турбогенераторов при частоте вращения 50 об/с способны запасать в единице объема кинетическую энергию порядка 10^8 Дж/м^3.

С физической стороны работу электромашинного источника импульсной мощности можно представить как процесс упругого сжатия магнитного потока, захваченного обмоткой якоря в узком пространстве между поверхностями статора и ротора, что вызывает увеличение магнитной энергии поля якоря. При этом ротор генератора, теряя кинетическую энергию, тормозится. В зависимости от соотношения параметров генератора и нагрузки, начального запаса электромагнитной энергии поля возбуждения и кинетической энергии маховых масс возможны следующие режимы преобразования энергии:

1) апериодический, при котором частота вращения ротора уменьшается, достигая минимума, не равного нулю в момент наибольшего всплеска тока, и затем, по мере уменьшения тока, вновь возрастает;

2) критический, когда вся первоначально запасенная кинетическая энергия маховых масс расходуется на создание электромагнитных полей;

3) колебательный, при котором частота вращения ротора уменьшается до нуля и затем ротор реверсируется, совершая вращательные колебания подобно маятнику.

Таким образом, при критическом режиме от ударного генератора можно передать в нагрузку за время одного импульса порядка 50% запасенной кинетической энергии ротора. Однако практически удается преобразовать лишь значительно меньшую часть кинетической энергии ротора.

В настоящее время уже имеется опыт отбора энергии до 8 МДж от ударного генератора ТИ-75-2 при работе на дуговую нагрузку. Удельная реализуемая энергия при этом составляет 30 Дж/кг [13]. В работе, выполненной фирмой «CEM» (Франция), излагаются сведения об испытании синхронного импульсного генератора на энергию 500 кДж, при создании которого ставилось условие получения высокого коэффициента преобразования энергии. За счет эффективной форсировки, доводящей магнитную индукцию в зазоре генератора до 2,4 Тл, и низкого значения сверхпереходного индуктивного сопротивления удельная реализуемая энергия достигает 84 Дж/кг за время импульса 0,01 с.

Форсировка магнитного потока перед началом каждого импульса хотя и приводит к существенному повышению эффективности преобразования энергии, однако требует больших затрат энергии на возбуждение. Сам процесс форсировки при этом получается весьма длительным, что по условиям нагрева генератора приводит к уменьшению частоты следования импульсов.

Эффективность преобразования кинетической энергии в электромагнитную можно повысить, применяя продольно-поперечное возбуждение с емкостным подмагничиванием. При этом в зависимости от принятой схемы и параметров генератора и нагрузки можно программировать форму импульса тока.

ГЛАВА 11. ИССЛЕДОВАНИЕ АСИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПО СТАТИЧЕСКИМ ПУСКОВЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

§ 11.1. Метод исследования и основные уравнения

Асинхронные режимы СМ имеют место при включении машины в сеть по методу самосинхронизации, а также при выпадении из синхронизма, перегрузках или при потере возбуждения и т. п.; СД и компенсаторы обычно запускаются как асинхронные, причем обмотка возбуждения замыкается на добавочное активное сопротивление. Работая как асинхронный, СД достигает частоты, близкой к синхронной, и после подачи напряжения на обмотку возбуждения втягивается в синхронизм. Таким образом, пуск СД можно разбить на два этапа: асинхронный режим и синхронизацию.

Пуск машин переменного тока представляет собой переходный электромеханический процесс и полностью описывается системой уравнений Парка — Горева. Так как частота вращения ротора

СД при пуске переменная и неизвестна, то эти уравнения нелинейны и решаются только численными методами или на АВМ (см. гл. 13). Наиболее распространенным методом приближенного расчета пусковых процессов СД и АД является метод, основанный на рассмотрении статических пусковых характеристик. Применение его позволяет все исследования и расчеты выполнять в предположении, что в любой момент времени частота вращения ротора постоянна.

Токи и потокосцепления СД в асинхронном режиме можно определить, преобразуя (9.79) к системе комплексных уравнений установившегося режима заменой оператора p на js и учитывая, что $U_f = 0$, а $\omega = 1 - s$, где s — скольжение ротора относительно поля статора:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_d &= js\dot{\Psi}_d - (1-s)\dot{\Psi}_q + r_1\dot{I}_d; \quad \dot{U}_q = js\dot{\Psi}_q + \\ &+ (1-s)\dot{\Psi}_d + r_1\dot{I}_q; \\ \dot{\Psi}_d &= x_d(js)\,\dot{I}_d; \quad \dot{\Psi}_q = x_q(js)\,\dot{I}_q. \end{aligned}\right\} \quad (11.1)$$

В уравнениях (11.1) токи, потокосцепления, напряжения и индуктивные сопротивления — комплексные величины. После подстановки потокосцеплений получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_d &= (jsx_d(js) + r_1)\,\dot{I}_d - (1-s)\,x_q(js)\,\dot{I}_q; \\ \dot{U}_q &= (1-s)\,x_d(js)\,\dot{I}_d + (jsx_q(js) + r_1)\,\dot{I}_q. \end{aligned}\right\} \quad (11.2)$$

Комплексные индуктивные сопротивления $x_d(js)$, $x_q(js)$ получим заменой в выражениях (9.69) и (9.70) оператора p на js:

$$\left.\begin{aligned} x_d(js) &= x_d(1 + jsT_d')(1 + jsT_d'')/[(1 + jsT_{d0})(1 + jsT_{d0}')]; \\ x_q(js) &= x_q(1 + jsT_q')/(1 + jsT_{q0}). \end{aligned}\right\} \quad (11.3)$$

Комплексные полные сопротивления имеют вид

$$z_d(js) = r_1 + jsx_d(js); \quad z_q(js) = r_1 + jsx_q(js).$$

Решая систему уравнений (11.2), найдем комплексные значения токов в осях d и q:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_d &= \frac{\dot{U}_d z_q(js) + \dot{U}_q x_q(js)(1-s)}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)(1-s)^2}; \\ \dot{I}_q &= \frac{\dot{U}_q z_d(js) - \dot{U}_d x_d(js)(1-s)}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)(1-s)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (11.4)$$

Вещественные части выражений равны мгновенным значениям токов i_d и i_q в обмотках, причем $i_d = (\dot{I}_d + \dot{I}_d^*)/2$; $i_q = (\dot{I}_q + \dot{I}_q^*)/2$.

При исследовании установившегося асинхронного режима удобно оперировать векторами пространственных волн (см. § 1.3) напряжения, тока, потокосцепления. Принимая мгновенные значения величин, относящихся к оси d, как вещественные, а относящиеся к оси q — как мнимые, изображающие векторы, запишем в виде результирующих комплексных функций:

$$\mathrm{U}_s = \mathrm{U}_d + j\mathrm{U}_q\,; \quad \mathrm{I}_s = \mathrm{i}_d + j\mathrm{i}_q\,; \quad \Psi_s = \Psi_d + j\Psi_q. \qquad (11.5)$$

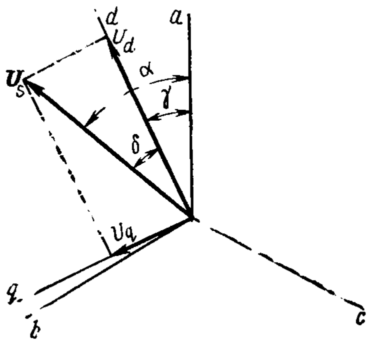

Рис. 11.1. Картина определения угла между вектором напряжения и осью d ротора

Определим напряжения U_d, U_q. Пусть к трехфазной обмотке статора приложены симметричные напряжения. Угол, образованный изображающим вектором напряжения U_s относительно оси фазы a (рис. 11.1), $\alpha = \tau + \alpha_0$, где α_0 — начальный фазный угол напряжения.

Положение оси d ротора относительно оси фазы a определяется углом $\gamma = (1 - s)\tau + \gamma_0$, где γ_0 — начальный угол между осями a и d. Тогда угол между изображающим вектором напряжения и осью ротора d будет $\delta = \alpha - \gamma = s\tau + \alpha_0 - \gamma_0 = s\tau + \delta_0$, где $\delta_0 = \alpha_0 - \gamma_0$ — значение угла в начальный момент времени.

Проекции вектора напряжения U_s на оси d и q ротора запишем так:

$$\mathrm{U}_d = U_{1m}\cos(s\tau + \delta_0); \quad \mathrm{U}_q = U_{1m}\sin(s\tau + \delta_0). \qquad (11.6)$$

В показательной форме записи (11.6) принимает вид

$$\mathrm{U}_d = 0{,}5U_{1m}\,[\exp(j(s\tau + \delta_0)) + \exp(-j(s\tau + \delta_0))];$$
$$\mathrm{U}_q = (U_{1m}/(2j))\,[\exp(j(s\tau + \delta_0)) - \exp(-j(s\tau + \delta_0))]. \qquad (11.7)$$

Учитывая (11.7), изображающий вектор напряжения имеет вид

$$\mathrm{U}_s = U_{1m}\exp[j(s\tau + \delta_0)] = \mathrm{U}_{s1}, \qquad (11.8)$$

где U_{s1} — вектор напряжения прямой последовательности.

Подставляя (11.7) в (11.4), после преобразований получим

$$\mathrm{I}_s = \frac{\{r_1 - j(1 - 2s)\,[x_d(js) + x_q(js)]/2\}\,U_{1m}\exp[j(s\tau + \delta_0)]}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)\,(1 - s)^2} +$$
$$+ \frac{\{-j(1 - 2s)\,[x_d(js) - x_q(js)]/2\}\,U_{1m}\exp[-j(s\tau + \delta_0)]}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)\,(1 - s)^2} = \mathrm{i}_{s1} + \mathrm{i}_{s2}. \qquad (11.9)$$

Из (11.9) следует, что составляющие изображающего вектора тока статора при постоянной частоте вращения ротора имеют неизменные модули и вращаются относительно ротора в противоположные стороны с угловой частотой s. При этом вектор тока $\mathbf{i}_{s1}$ прямой последовательности вращается в положительном направлении, а вектор тока $\mathbf{i}_{s2}$ обратной последовательности — в отрицательном.

Подставляя сопротивления $x_d(js)$ и $x_q(js)$ в (11.9), получим

$$\mathbf{I}_s = I_{m1} \exp[j(s\tau + \delta_0 - \varphi_1)] + I_{m2} \exp[-j(s\tau + \delta_0 - \varphi_2)], \quad (11.10)$$

где I_{m1}, I_{m2} — амплитуды векторов токов $\mathbf{i}_{s1}$ и $\mathbf{i}_{s2}$; φ_1, φ_2 — фазные углы между векторами напряжения и тока прямой и обратной последовательности.

Изображающий вектор потокосцепления обмотки статора, по аналогии с (11.9), запишем в виде

$$\mathbf{\Psi}_s = \mathbf{\Psi}_{s1} + \mathbf{\Psi}_{s2}, \quad (11.11)$$

где $\mathbf{\Psi}_{s1}$, $\mathbf{\Psi}_{s2}$ — вектор потокосцепления соответственно прямой и обратной последовательности.

После соответствующих преобразований векторы потокосцеплений

$$\mathbf{\Psi}_{s1} = \frac{\{r_1[x_d(js) + x_q(js)]/2 - j(1-2s)x_d(js)\,x_q(js)\}\,U_{1m}\exp[j(s\tau + \delta_0)]}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)\,(1-s)^2}; \quad (11.12)$$

$$\mathbf{\Psi}_{s2} = \frac{\{r_1[x_d(js) - x_q(js)]/2\}\,U_{1m}\exp[-j(s\tau + \delta_0)]}{z_d(js)\,z_q(js) + x_d(js)\,x_q(js)\,(1-s)^2}. \quad (11.13)$$

Изображающий вектор потокосцепления обмотки статора

$$\mathbf{\Psi}_s = \Psi_{m1}\exp[j(s\tau + \delta_0 - \psi_1)] + \Psi_{m2}\exp[-j(s\tau + \delta_0 - \psi_2)], \quad (11.14)$$

где Ψ_{m1}, Ψ_{m2} — модуль вектора потокосцепления соответственно прямой и обратной последовательности; ψ_1, ψ_2 — фазные углы потокосцеплений $\mathbf{\Psi}_{s1}$ и $\mathbf{\Psi}_{s2}$.

Как следует из (11.14), составляющие изображающего вектора потокосцепления обмотки статора при постоянной частоте вращения ротора имеют неизменные модули и вращаются относительно ротора в противоположные стороны с угловой частотой s.

При рассмотрении асинхронного режима работы СМ целесообразно исследовать законы изменения токов, МДС и магнитных полей. Изображающий вектор тока статора (11.10) после несложных преобразований приведем к виду

$$\mathbf{I}_s = I_s(\tau)\exp(j\beta), \quad (11.15)$$

где временна́я амплитуда вектора тока

$$I_s(\tau) = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}\cos(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_1 - \varphi_2)};$$

β — угол, образованный вектором $\mathbf{I}_s$ с осью d ротора:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left[\frac{I_{m1} - I_{m2}}{I_{m1} + I_{m2}}\operatorname{tg}\left(s\tau + \delta_0 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right] - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Из (11.15) следует, что амплитуда вектора тока не остается постоянной во времени, а пульсирует с частотой удвоенного скольжения s. Угловую частоту вращения вектора $\mathbf{I}_s$ относительно ротора определим как производную:

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{\left(I_{m1}^2-I_{m2}^2\right)s}{I_{m1}^2+I_{m2}^2+2I_{m1}I_{m2}\cos\left(2s\tau+2\delta_0-\varphi_1-\varphi_2\right)}. \qquad (11.16)$$

Исследование этого уравнения показывает, что изображающий вектор тока статора вращается относительно ротора с переменной угловой частотой. Так как токи и МДС (о.е.) выражаются одними и теми же векторами, то уравнения (11.10) и (11.15) представляют собой также закон изменения МДС, созданной обмоткой статора. Следовательно, МДС статора при несимметричном роторе в асинхронном режиме вращается относительно ротора с переменной угловой частотой, одновременно изменяясь по значению.

Изображающий вектор потокосцепления (11.14) представим в виде

$$\mathbf{\Psi}_s=\Psi_s(\tau)\exp(j\psi), \qquad (11.17)$$

где временна́я амплитуда вектора потокосцепления

$$\Psi_s(\tau)=\sqrt{\Psi_{m1}^2+\Psi_{m2}^2+2\Psi_{m1}\Psi_{m2}\cos\left(2s\tau+2\delta_0-\psi_1-\psi_2\right)};$$

ψ — угол, образованный вектором Ψ_s с осью d ротора:

$$\psi=\operatorname{arctg}\left[\frac{\Psi_{m1}-\Psi_{m2}}{\Psi_{m1}+\Psi_{m2}}\operatorname{tg}\left(s\tau+\delta_0-\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\right]-\frac{\psi_1-\psi_2}{2}.$$

Потокосцепления и магнитные потоки (о.е.) определяются одними и теми же величинами, поэтому уравнение (11.17) представляет собой также закон изменения магнитного поля статора.

Угловая частота вращения вектора $\mathbf{\Psi}_s$ относительно ротора

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\left(\Psi_{m1}^2-\Psi_{m2}^2\right)s}{\Psi_{m1}^2+\Psi_{m2}^2+2\Psi_{m1}\Psi_{m2}\cos\left(2s\tau+2\delta_0-\psi_1-\psi_2\right)}. \qquad (11.18)$$

Из уравнений (11.17) и (11.18) следует, что магнитное поле статора в асинхронном режиме вращается относительно ротора с переменной частотой, одновременно изменяясь по величине. На рис. 11.2 приведены кривые изменения амплитуды магнитного поля и его частоты вращения в зависимости от времени. Амплитуда магнитного поля изменяется от максимального значения $\Psi_{s\max}=\Psi_{m1}+\Psi_{m2}$ до минимального $\Psi_{s\min}=\Psi_{m1}-\Psi_{m2}$ с частотой удвоенного скольжения. Частота вращения магнитного поля относительно ротора в это же время изменяется от минимума $(\Psi_{m1}-\Psi_{m2})s/(\Psi_{m1}+\Psi_{m2})$ до максимума $(\Psi_{m1}+\Psi_{m2})s/(\Psi_{m1}-\Psi_{m2})$. При этом максимум магнитного поля совпадает во времени с минимумом частоты вращения, и наоборот. Частота (11.18) вращения магнитного поля — функция периодическая. Нетрудно доказать, что ее среднее значение равно скольжению, причем скольжение определяет частоту вращения ротора относительно синхронной частоты вращения магнитного поля статора. Исследование уравнений (11.17) и (11.18) показывает, что пределы изменения амплитуды и частоты вращения магнитного поля зависят от степени и вида несимметрии ротора, а также от значения активного сопротивления

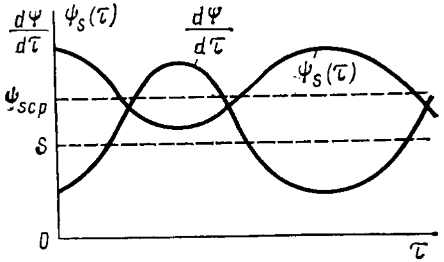

Рис. 11.2. Изменение амплитуды потокосцепления статора $\Psi_s(t)$ и частоты его вращения $d\psi/dt$ в зависимости от времени

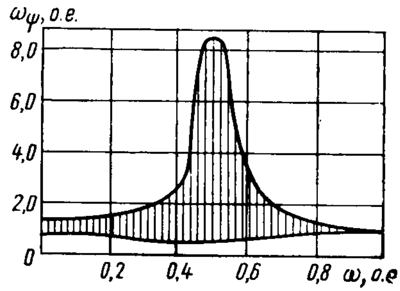

Рис. 11.3. Пределы изменения частоты вращения магнитного поля в зависимости от частоты вращения ротора

обмотки статора. Наибольшие пределы изменения этих величин имеют место в случае электрической несимметрии ротора, например когда на роторе СМ имеется только обмотка возбуждения. Характер изменения угловой частоты вращения магнитного поля статора в пространстве определяется уравнением

$$\omega_\psi = \omega + d\psi/d\tau. \qquad (11.19)$$

Следовательно, частота вращения магнитного поля в пространстве изменяется во времени с частотой удвоенного скольжения в пределах от $\omega + (\Psi_{m1} + \Psi_{m2})s/(\Psi_{m1} - \Psi_{m2})$ до $\omega + (\Psi_{m1} - \Psi_{m2})s/(\Psi_{m1} + \Psi_{m2})$. Чтобы показать, насколько значительны изменения частоты вращения магнитного поля, на рис. 11.3 представлены пределы изменения частоты, рассчитанные для АД с однофазным ротором, имеющего следующие параметры: $r_1 = 0{,}042$; $x_{11} = x_d = x_q = 2{,}6$; $T_2 = x_{22}/r_2 = 82$ эл. с; $x_{22} = x_{yd} = x_{yd}$; $x'_{11} = x_{11} - x_m^2/x_{22} = 0{,}14$; $x_m = x_{ad} = x_{aq}$. Как видно из графика, пределы изменения частоты вращения магнитного поля увеличиваются при $\omega \to 0{,}5$ и уменьшаются при $\omega > 0{,}5$. При $\omega = 0{,}5$ имеют место наибольшие пределы изменения частоты вращения. Объясняется это зависимостью пределов изменения частоты от амплитуд магнитных полей прямой и обратной последовательностей. При $\omega = 0{,}5$ поле обратной последовательности неподвижно относительно статора, поэтому статорная обмотка не оказывает демпфирующего влияния на Ψ_{s2}, которое в этом случае достигает наибольшего значения.

Зная выражения для токов и потокосцеплений, можно определить все интересующие нас характеристики машины, работающей в асинхронном режиме: потребляемую мощность, потери в обмотке статора, электромагнитный момент вращения. Мгновенное значение мощности, потребляемой машиной переменного тока при работе в установившемся асинхронном режиме,

$$P_1 = \mathrm{Re}\,[\mathbf{U}_s \mathbf{I}_s^*\,]. \tag{11.20}$$

Подставляя в это уравнение сопряженный вектор тока (11.10) и вектор напряжения (11.8) и используя действующие значения величин, получим $P_1 = \mathrm{Re}\{U_1 I_1 \exp\,(j\varphi_1) + U_1 I_2 \exp[j(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_2)]\}$. Или, учитывая, что $\exp(j\varphi) = \cos\varphi + j\sin\varphi$, запишем

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_1 I_2 \cos(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_2). \tag{11.21}$$

Из уравнения (11.21) видно, что мгновенную мощность, потребляемую СМ от сети, можно представить в виде суммы двух составляющих: постоянной, пропорциональной активной составляющей тока прямой последовательности, и переменной, пульсирующей во времени с удвоенной частотой скольжения.

Электромагнитный момент вращения СМ при работе в установившемся асинхронном режиме из-за несимметрии ротора также изменяется во времени. Его можно представить как сумму двух составляющих:

$$M = \mathrm{Re}\,[j\mathbf{\Psi}_s \mathbf{I}_s^*] = \mathrm{Re}\,[j(\mathbf{\Psi}_{s1} + \mathbf{\Psi}_{s2})(\,\mathbf{i}_{s1}^* + \mathbf{i}_{s2}^*)] =$$

$$= \mathrm{Re}\,[j\,(\mathbf{\Psi}_{s1}\mathbf{i}_{s1}^* + \mathbf{\Psi}_{s2}\mathbf{i}_{s2}^*) + j\,(\mathbf{\Psi}_{s1}\mathbf{i}_{s2}^* + \mathbf{\Psi}_{s2}\mathbf{i}_{s1}^*)] = M_{\text{ср}} + M_{\text{пул}}, \tag{11.22}$$

где $M_{\text{ср}}$ — средний (постоянный во времени) момент, равный сумме моментов прямой $M_1 = \Psi_1 I_1 \sin(\psi_1 - \varphi_1)$ и обратной $M_2 = \Psi_2 I_2 \sin(\varphi_2 - \psi_2)$ последовательностей:

$$M_{\text{ср}} = \mathrm{Re}\,[j\mathbf{\Psi}_{s1}\mathbf{i}_{s1}^* + j\mathbf{\Psi}_{s2}\mathbf{i}_{s2}^*] = \mathrm{Re}\,[j\Psi_1 I_1 \exp\,(j\,(\varphi_1 - \psi_1)) +$$

$$+ j\Psi_2 I_2 \exp\,(j\,(\psi_2 - \varphi_2))] = M_1 + M_2; \tag{11.23}$$

$M_{\text{пул}}$ — переменный момент, пульсирующий во времени с частотой удвоенного скольжения:

$$M_{\text{пул}} = \mathrm{Re}\,[j\mathbf{\Psi}_{s1}\mathbf{i}_{s2}^* + j\mathbf{\Psi}_{s2}\mathbf{i}_{s1}^*] = \mathrm{Re}\,[j\Psi_1 I_2 \exp\,[j\,(2s\tau + 2\delta_0 -$$

$$- \varphi_2 - \psi_1)) + j\Psi_2 I_1 \exp\,(-\,j\,(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_1 - \psi_2))] =$$

$$= -\,\Psi_1 I_2 \sin\,(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_2 - \psi_1) + \Psi_2 I_1 \sin\,(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_1 - \psi_2). \tag{11.24}$$

Полученные уравнения токов, потокосцеплений и электромагнитного момента позволяют исследовать асинхронный режим работы машины переменного тока и рассчитывать статические пусковые характеристики.

§ 11.2. Токи в обмотках фаз статора

Если известен изображающий вектор тока $\mathbf{I}_s$, то токи в обмотках фаз статора определим как проекции вектора $\mathbf{I}_s$ на оси фаз. Так как вектор тока $\mathbf{I}_s$ найден во вращающейся системе осей d, q (11.10), то математически определение проекций сводится к умножению вектора $\mathbf{I}_s$ на множитель $\exp(j\gamma)$, учитывающий вращение осей координат d, q относительно неподвижной системы фазных осей, при этом от полученной величины берется вещественная часть. Следовательно, мгновенные значения тока в фазах статора

$$\left.\begin{aligned} i_a &= \mathrm{Re}\,[\mathbf{I}_s \exp[j((1-s)\tau+\gamma_0)]]; \\ i_b &= \mathrm{Re}[\mathbf{I}_s \exp[j((1-s)\tau+\gamma_0-2\pi/3)]]; \\ i_c &= \mathrm{Re}\,[\mathbf{I}_s \exp[j((1-s)\tau+\gamma_0+2\pi/3)]]. \end{aligned}\right\} \quad (11.25)$$

Учитывая (11.10), ток i_a представим в виде суммы двух синусоидальных составляющих с различными частотами:

$$i_a = \mathrm{Re}\,[I_{m1}\exp[j(s\tau+\delta_0-\varphi_1)] + I_{m2}\exp[-j\times$$
$$\times(s\tau+\delta_0-\varphi_2)]]\exp[j((1-s)\tau+\gamma_0)] = I_{m1}\times$$
$$\times\cos(\tau+\alpha_0-\varphi_1) + I_{m2}\cos[(2s-1)\tau+\alpha_0-2\gamma_0-\varphi_2]. \quad (11.26)$$

При частоте вращения ротора, близкой к синхронной, осциллограмма тока в фазе статора приведена на рис. 11.4,*а*. Огибающая тока представляет собой изменение амплитуды $I_s(\tau)$, которая пульсирует с частотой удвоенного скольжения от своего максимального значения $I_{a\max} = I_{m1} + I_{m2}$ до минимального $I_{a\min} = I_{m1} - I_{m2}$. Учитывая это, из осциллограммы определим амплитуды токов прямой и обратной последовательностей:

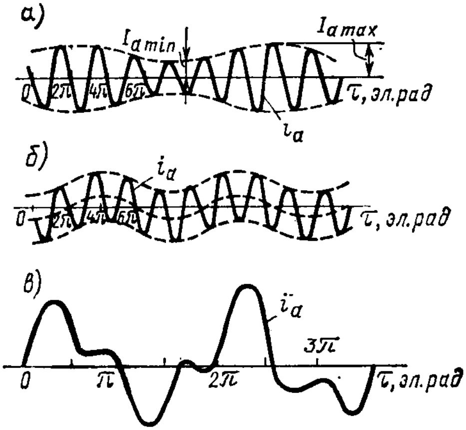

Рис. 11.4. Осциллограммы тока статора

$$I_{m1} = (I_{a\max} + I_{a\min})/2; \quad I_{m2} = (I_{a\max} - I_{a\min})/2. \quad (11.27)$$

При уменьшении частоты вращения ротора получим другую характерную форму кривой тока (рис. 11.4,*б*). Огибающая тока i_a является током обратной последовательности. Вписанная между огибающими кривая представляет собой ток прямой последовательности. При изменении частоты вращения ротора форма кривой тока изменяется и при определенной частоте вращения появляется более сложная кривая тока (рис. 11.4, *в*), из которой нельзя определить составляющие I_{m1} и I_{m2}. При скольжениях 1,0; 0,5; 0 токи в обмотках статора будут синусоидальными.

Действующее значение тока в фазе статора (о.е.) при любых значениях скольжения, кроме $s = 0$ и $s = 1{,}0$, определяется по формуле

$$I_a = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}\,. \qquad (11.28)$$

При $s = 1{,}0$ фазный ток зависит от положения ротора в пространстве.

§ 11.3. Расчет пусковых характеристик

Под пусковыми характеристиками понимают зависимости среднего момента и тока статора от скольжения.

Точный метод. Уравнения для потребляемой мощности (11.21), электромагнитного момента вращения (11.22) и тока (11.26) в обмотке статора получены точным методом решения системы уравнений равновесия напряжений и могут быть использованы для расчета пусковых характеристик двигателей с несимметричным ротором. Так как электромагнитный момент вращения двигателей с несимметричным ротором изменяется во времени, то при исследовании пуска необходимо знать амплитуду пульсирующей составляющей момента в зависимости от скольжения.

Для уменьшения объема вычислительной работы целесообразно (11.23) и (11.24) выразить через токи и параметры двигателя. Для этого из уравнений моментов необходимо исключить потокосцепления. Решая уравнения (11.1) относительно потокосцеплений $\dot{\Psi}_d$, $\dot{\Psi}_q$, после соответствующих преобразований запишем

$$\dot{\Psi}_d = -j\dot{U}_d - [r_1/(1-2s)]\,[js\dot{I}_d + (1-s)\,\dot{I}_q]\,;$$

$$\dot{\Psi}_q = -\dot{U}_d + [r_1/(1-2s)]\,[(1-s)\,\dot{I}_d - js\,\dot{I}_q]. \qquad (11.29)$$

Тогда из уравнения моментов прямой и обратной последовательностей

$$M_1 = \mathrm{Re}\,[j\mathbf{\Psi}_{s1}\overset{*}{\mathbf{i}}_{s1}] = 0{,}5\mathrm{Re}\,[(j\,\dot{\Psi}_d - \dot{\Psi}_q)\,\overset{*}{\mathbf{i}}_{s1}] = U_1 I_1 \cos\varphi_1 - r_1 I_1^2\,; \qquad (11.30)$$

$$M_2 = \mathrm{Re}\left[j\mathbf{\Psi}_{s2}\mathbf{i}^*_{s2}\right] = 0{,}5\mathrm{Re}\left[\left(j\,\dot{\Psi}^*_d - \dot{\Psi}^*_q\right)\mathbf{i}^*_{s2}\right] = -[r_1/(1-2s)]\,I_2^2\,, \qquad (11.31)$$

получим уравнение среднего момента вращения:

$$M_{\text{ср}} = M_1 + M_2 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 - r_1 I_1^2 - [r_1/(1-2s)]\,I_2^2. \qquad (11.32)$$

Пульсирующий момент, учитывая $\dot{I}_d = \mathbf{i}_{s1} + \mathbf{i}^*_{s2}$; $\dot{I}_q = -j(\mathbf{i}_{s1} - \mathbf{i}^*_{s2})$, запишем в виде

$$M_{\text{пул}} = 0{,}5\mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}_d\ \dot{I}_q - \dot{\Psi}_q\ \dot{I}_d\right] = U_1 I_2 \cos(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_2) -$$

$$- [2r_1(1-s)/(1-2s)]\, I_1 I_2 \cos(2s\tau + 2\delta_0 - \varphi_1 - \varphi_2). \quad (11.33)$$

Из (11.33) определим амплитуду пульсирующего момента:

$$M_{m\,\text{пул}} = I_2 \sqrt{U_1^2 + 4R^2 I_1^2 - 4U_1 R I_1 \cos\varphi_1}\,, \quad (11.34)$$

где $R = r_1(1-s)/(1-2s)$.

Амплитуду пульсирующего момента можно рассчитать из (11.34) при любых значениях скольжения, кроме $s = 0{,}5$. При $s = 0{,}5$ ток обратной последовательности в обмотке статора отсутствует ($I_2 = 0$), так как магнитное поле обратной последовательности неподвижно относительно обмотки статора и не индуцирует в ней ЭДС. Правая часть (11.33) превращается в неопределенность, однако амплитуда пульсирующего момента $M_{m\text{пул}} \neq 0$. Из совместного анализа выражений (11.9) и (11.33) следует, что при $s = 0{,}5$ пульсирующий момент

$$M_{\text{пул}} = \frac{0{,}5 r_1^2 U_{1m}^2 (x_d(js) - x_q(js)) \cos(\tau + 2\delta_0 - \varphi_1 - \varphi_2)}{[z_d(js)\, z_q(js) + (1/4)\, x_d(js)\, x_q(js)]^2}. \quad (11.35)$$

Полученные формулы для составляющих электромагнитного момента вращения достаточно просты. Для расчета по известным параметрам необходимо определить лишь токи (11.9) прямой и обратной последовательностей.

Приближенный метод. При расчете пусковых характеристик СД приближенным методом допускается раздельное рассмотрение явлений по продольной и поперечной осям ротора. Комплексные токи и индуктивные сопротивления по осям d и q соответственно запишем так:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_d &= [1/(jx_d(js) + r_1)]\, U_1 \exp[j(s\tau + \delta_0)]; \\ \dot{I}_q &= [1/(jx_q(js) + r_1)]\, U_1 \exp[j(s\tau + \delta_0)]; \end{aligned}\right\} \quad (11.36)$$

$$jx_d(js) = R_{ds} + jX_{ds}; \quad jx_q(js) = R_{qs} + jX_{qs}, \quad (11.37)$$

тогда (11.36) представим в виде

$$\dot{I}_d = I_d \exp[j(s\tau + \delta_0) - \varphi_d)]; \quad \dot{I}_q = I_q \exp[j(s\tau + \delta_0 - \varphi_q)], \quad (11.38)$$

где

$$I_d = U_{1m} \Big/ \sqrt{(r_1 + R_{ds})^2 + X_{ds}^2}; \quad I_q = U_{1m} \Big/ \sqrt{(r_1 + R_{qs})^2 + X_{qs}^2}. \quad (11.39)$$

Средний момент вращения при принятых допущениях

$$M_{\text{ср}} = 0{,}5(M_d + M_q) = 0{,}5\left(R_{ds} I_d^2 + R_{qs} I_q^2\right), \quad (11.40)$$

где

$$M_d = \mathrm{Re}\left[j\dot{\Psi}_d \; \dot{I}_d^* \right] = \mathrm{Re}\left[jx_d(js)\, \dot{I}_d \dot{I}_d^* \right] = R_{ds}\, I_d^2; \qquad (11.41)$$

$$M_q = \mathrm{Re}\left[j\dot{\Psi}_q \; \dot{I}_q^* \right] = \mathrm{Re}\left[jx_q(js)\; \dot{I}_q \dot{I}_q^* \right] = R_{qs} I_q^2. \qquad (11.42)$$

Из приведенных уравнений следует, что зависимости $M_d = f(s)$ и $M_q = f(s)$ ничем не отличаются от механической характеристики АД с симметричным ротором. Следовательно, применяя эти уравнения при расчете, нельзя проанализировать влияние несимметрии ротора на пусковые характеристики. Даже в предельном случае электрической несимметрии, когда на роторе двигателя имеется обмотка только по одной оси, провала в кривой среднего момента не обнаруживается. Точность приближенного метода возрастает с уменьшением активного сопротивления обмотки статора и несимметрии ротора.

§ 11.4. Влияние несимметрии ротора на пусковые характеристики

При проектировании СД, удовлетворяющих заданным условиям пуска, необходимо знать влияние различных параметров и несимметрии ротора на пусковые характеристики. Синхронные явнополюсные двигатели имеют магнитную и электрическую несимметрию ротора. Поэтому целесообразно рассмотреть влияние магнитной и электрической несимметрии отдельно.

Магнитная несимметрия ротора. Примером наличия в машине только магнитной несимметрии ротора служит синхронный реактивный двигатель без пусковой обмотки и с шихтованным сердечником ротора. При исследовании асинхронного режима синхронных реактивных двигателей без пусковой обмотки могут быть использованы формулы из предыдущих параграфов с учетом того, что комплексные индуктивные сопротивления

$$x_d(js) = x_d; \quad x_q(js) = x_q. \qquad (11.43)$$

Исследования токов, МДС и магнитных полей показывают, что при работе машин, имеющих только магнитную несимметрию ротора, в асинхронном режиме: 1) МДС и магнитное поле статора вращаются с неравномерной частотой, одновременно изменяясь по величине; 2) ток в обмотке статора несинусоидальный; 3) электромагнитный момент вращения изменяется во времени, и его можно представить как сумму среднего момента и переменного, пульсирующего во времени с частотой удвоенного скольжения.

Момент прямой последовательности (11.30) с учетом (11.43)

$$M_1 = -\frac{(1/4)\, r_1\,(1-2s)\,(x_d - x_q)^2\, U_1^2}{\left[r_1^2 + (1-2s)\; x_d x_q \right]^2 + \left[r_1 s\,(x_d + x_q) \right]^2}. \qquad (11.44)$$

Преобразование уравнения (11.31) позволяет установить, что $M_2 = M_1$. Следовательно, средний момент синхронного реактивного двигателя без пусковой обмотки на роторе

$$M_{ср} = M_1 + M_2 = -\frac{0{,}5 r_1 (1-2s)(x_d - x_q)^2 U_1^2}{[\,r_1^2 + (1-2s)\,x_d x_q\,]^2 + r_1^2 s^2\ (x_d + x_q)^2}. \qquad (11.45)$$

Из анализа этого уравнения следует, что в синхронном реактивном двигателе без пусковой обмотки на роторе при работе в асинхронном режиме (s = const) возникает постоянный во времени момент вращения. Речь идет о среднем значении асинхронного момента, значение которого не зависит от положения ротора в пространстве. Так как при принятых допущениях ток в сердечнике ротора отсутствует (сердечник ротора выполнен шихтованным), то возникновение момента $M_{ср}$ объясняется лишь деформацией магнитного потока из-за явнополюсности ротора и наличием активного сопротивления обмотки статора.

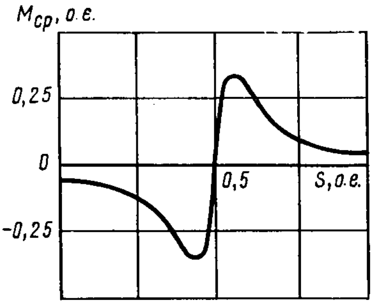

Рис. 11.5. Механическая характеристика синхронного реактивного двигателя без пусковой обмотки на роторе

Из (11.45) следует, что при скольжении $s = 1{,}0 \div 0{,}5$ момент $M_{ср}$ положительный, а при $s < 0{,}5$ момент отрицательный. Зависимость момента $M_{ср}$ от скольжения для рассматриваемого случая представлена на рис. 11.5. Следовательно, синхронная реактивная машина без пусковой обмотки на роторе при изменении частоты вращения от нуля до полусинхронной работает в режиме двигателя и при дальнейшем увеличении частоты вращения — в режиме генератора. Независимый пуск синхронных реактивных двигателей с достижением синхронной частоты вращения возможен только при наличии на роторе пусковой обмотки.

При синхронной частоте вращения ($s = 0$) средний момент вращения синхронного реактивного двигателя без пусковой обмотки

$$M_{ср} = -0{,}5\, U_1^2 r_1 (x_d - x_q)^2 / (r_1^2 + x_d x_q)^2. \qquad (11.46)$$

Электрическая несимметрия ротора. Примером наличия в машине только электрической несимметрии служит АД с несимметрией роторной обмотки. В двигателях с короткозамкнутым ротором электрическая несимметрия может возникнуть в результате обрыва стержней роторной обмотки, а в АД с фазным ротором — при включении в цепь ротора несимметричного сопротивления. Предельным случаем электрической несимметрии является АД с однофазным ротором.

При расчете пусковых характеристик АД с несимметричной обмоткой на роторе могут быть использованы формулы из предыдущих параграфов при условии, что комплексные индуктивные сопротивления

$$
\left.\begin{aligned}
x_d(js) &= x_d - jsx_{ad}^2/(r_{yd} + jsx_{yd});\\
x_q(js) &= x_d - jsx_{ad}^2/(r_{yq} + jsx_{yq}).
\end{aligned}\right\} \tag{11.47}
$$

Если на роторе имеется обмотка только по продольной оси, то

$$
x_q(js) = x_d. \tag{11.48}
$$

Электрическая несимметрия приводит к тому, что электромагнитный момент вращения при работе в установившемся асинхронном режиме изменяется во времени. Его можно представить в виде суммы среднего момента $M_{ср}$ и переменного, пульсирующего во времени с частотой удвоенного скольжения. Из пусковых характеристик АД с однофазным ротором (рис. 11.6) видно, что при наличии только электрической несимметрии момент обратной последовательности при скольжении $s = 1{,}0 \div 0{,}5$ положителен, а при $s < 0{,}5$ — отрицателен. В кривой момента M_1 прямой последовательности при частоте вращения около полусинхронной наблюдается провал. Поэтому в кривой среднего момента имеет место провал и при $s = 0{,}5 \div 0{,}35$ момент $M_{ср}$ отрицателен. При наличии такой зависимости между моментом и скольжением двигатель с однофазным ротором при разбеге не может достигнуть частоты вращения более полусинхронной. Это явление называется *явлением одноосного включения или явлением Гергеса.* Провал в кривой среднего момента можно уменьшить за счет увеличения активного сопротивления в цепи обмотки ротора. При достаточно большом активном сопротивлении и небольшом моменте сопротивления на валу АД с однофазным ротором во время пуска может достигнуть частоты вращения, близкой к номинальной.

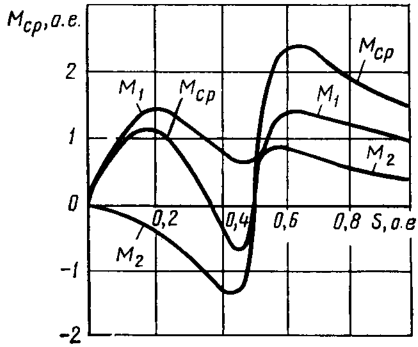

Рис. 11.6. Механическая характеристика асинхронного двигателя с однофазным ротором

Магнитная и электрическая несимметрия ротора. Синхронные двигатели в общем случае имеют магнитную и электрическую несимметрию ротора. Исследование пусковых характеристик двигателей с несимметричным ротором показало, что вид пусковых характеристик в основном определяется отношением значений комплексных индуктивных сопротивлений $x_d(js)$ и $x_q(js)$ по продольной и поперечной осям. Если разница в значениях комплексных индуктивных сопротивлений велика, то при частоте вращения несколько более полусинхронной в кривой среднего момента имеет место провал. В результате этого возникает опасность «застревания» ротора.

На примере синхронного явнополюсного двигателя, у которого по продольной и поперечной осям имеется по одной обмотке, рассмотрим зависимость пусковых характеристик от параметров. Для синхронных реактивных двигателей значения комплексных сопротивлений (11.3) представим в виде

$$x_d(js) = (x_d + jsx_d'' T_d)/(1 + jsT_d); \; x_q(js) = (x_q + + jsx_q'' T_q)/(1 + jsT_q), \tag{11.49}$$

где $T_d = x_{yd}/r_{yd}$, $T_q = x_{yq}/r_{yq}$ — постоянные времени пусковых (демпферных) обмоток по осям d и q при разомкнутых обмотках статора; $x_d'' = x_d - x_{ad}^2/x_{yd}$; $x_q'' = x_q - x_{aq}^2/x_{yq}$ — переходные индуктивные сопротивления по осям d и q при отсутствии обмотки возбуждения.

На рис. 11.7 представлены пусковые характеристики синхронного реактивного двигателя, имеющего $x_d = 2{,}3$ о.е.; $x_q = 0{,}45$ о.е.; $x_d'' = x_q'' = 0{,}2$ о.е.; $T_d = 40$ эл. с.; $T_q = 10$ эл. с. Анализируя вид пусковых характеристик, отметим следующее. Магнитная несимметрия ротора приводит к тому, что кривая момента $M_{ср}$ в отличие от момента АД с симметричным ротором проходит нулевое значение при $s > 0$, а когда частота вращения равна синхронной, то $M_{ср} < 0$. Средний момент при синхронной частоте вращения определяется уравнением (11.46), из которого следует, что значение $M_{ср}$ отрицательно и зависит от степени магнитной несимметрии ротора, определяемой разностью синхронных индуктивных сопротивлений по осям d и q, и от активного сопротивления r_1 обмотки статора. В машинах с неявнополюсным ротором $x_q = x_d$ и $M_{ср} = 0$ независимо от значения r_1.

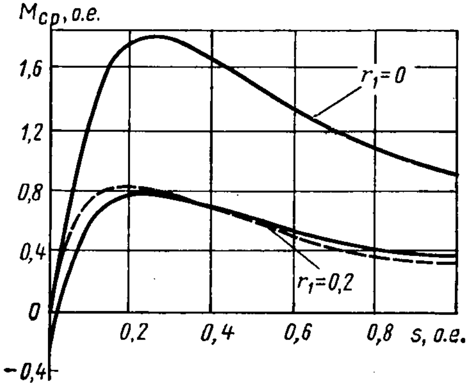

Рис. 11.7. Пусковые характеристики синхронного реактивного двигателя

Рассмотренные свойства пусковых характеристик существенно влияют на пуск СД, особенно при втягивании в синхронизм. Приближенные методы расчета пусковых характеристик, основанные на раздельном рассмотрении процессов по осям d и q, не позволяют выявить эти особенности.

На рис. 11.7 приведены для сравнения пусковые характеристики синхронного реактивного двигателя, рассчитанные точным и приближенным методами. Сравнивая кривые момента $M_{ср}$, видим, что пренебрежение активным сопротивлением обмотки статора в рассматриваемом примере (кривая при $r_1 = 0{,}2$) приводит к недопустимо большим погрешностям при малых значениях скольжения. Приближенный метод (штриховая кривая) при скольжениях $s = 0{,}2 \div 1{,}0$ дает результаты, удовлетворительно совпадающие с точным методом, несмотря на то что значение r_1 сравнительно ве-

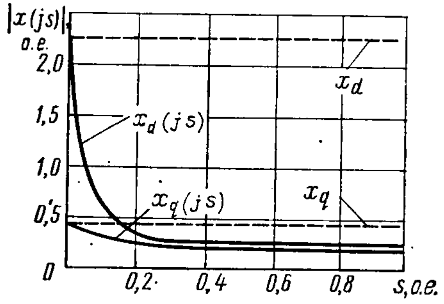

Рис. 11.8. Зависимости модулей комплексных индуктивных сопротивлений от скольжения

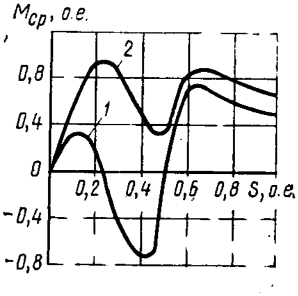

Рис. 11.9. Механические характеристики синхронных двигателей

лико. Объясняется это тем, что при принятых значениях параметров комплексные индуктивные сопротивления двигателя по осям d и q при $s \geqslant 0{,}2$ практически равны между собой (рис. 11.8), а при $x_d(js) = x_q(js)$, как было показано ранее, приближенный метод становится точным. При $s < 0{,}2$ различие в комплексных индуктивных сопротивлениях по осям d и q увеличивается, что приводит к расхождению результатов расчета момента $M_{ср}$ точным и приближенным методами.

Исследования показали, что обмотки по продольной и поперечной осям ротора по-разному влияют на пусковые характеристики. На рис. 11.9 приведены пусковые характеристики явнополюсных СД, имеющих на роторе обмотки только по продольной или поперечной осям (общие параметры: $x_d = 2{,}3$ о.е.; $x_q = 0{,}45$ о.е.; $r_1 = 0{,}06$ о.е). При наличии на роторе обмотки только по поперечной оси ($x''_q = 0{,}2$ о.е.; $T_d = 0$; $T_q = 10$ эл.с.) момент $M_{ср}$ (кривая *1*) при скольжениях $s = 0{,}23 \div 0{,}5$ отрицателен. Если же на роторе имеется обмотка только по продольной оси ($x''_d = 0{,}2$ о.е.; $T_d = 40$ эл. с; $T_q = 0$), то в зоне полусинхронной частоты вращения механическая характеристика (кривая *2*) имеет провал, однако при этом момент $M_{ср}$ положителен. Объясняется это тем, что в первом случае (кривая 1) разность комплексных индуктивных сопротивлений по осям d и q велика при любых значениях скольжения, в то время как для второго случая (кривая *2*) эта разность при $s \geqslant 0{,}1$ значительно меньше.

Провал в кривой среднего момента вращения при частоте вращения, близкой к полусинхронной, объясняется следующим. Момент обратной последовательности M_2, как это видно из уравнения (11.31), при скольжении $s = 1{,}0 \div 0{,}5$ положителен, а при $s<0{,}5$ — отрицателен. При несимметричном роторе в кривой момента M_1 прямой последовательности имеет место провал. Провал при полусинхронной частоте вращения зависит от степени несимметрии ротора и значения активного сопротивления обмотки статора. При определенных соотношениях параметров момент M_1 при $s < 0{,}5$ может даже изменить знак на противоположный.

Обычно явнополюсные СД выполняются с полной демпферной обмоткой на роторе. При пуске обмотка возбуждения замыкается на разрядное сопротивление. Как показала практика эксплуатации СД, провал в кривой среднего момента практически не наблюдается.

§ 11.5. Влияние возбуждения на пусковые характеристики синхронных двигателей

До сих пор рассматривался момент, развиваемый невозбужденной СМ, вращающейся с постоянной частотой в асинхронном режиме. Когда в процессе пуска частота вращения ротора приближается к синхронной, на обмотку возбуждения подается напряжение, следовательно, до втягивания в синхронизм СМ работает при наличии возбуждения. Такой же режим имеет место и при выпадении СМ из синхронизма.

Выражения токов, потокосцеплений и момента вращения при наличии возбуждения можно получить тем же методом, что и при отсутствии возбуждения. Поскольку частота вращения ротора в установившемся асинхронном режиме принимается постоянной, уравнения (9.79) линейные. Пусковые характеристики СД с постоянно включенным возбуждением получим путем суммирования характеристик двух режимов: асинхронного невозбужденной машины, питающейся от сети с постоянным по амплитуде напряжением; генераторного возбужденной машины, работающей в режиме установившегося КЗ. В этом случае средний момент вращения

$$M_{\text{ср}f} = M_{\text{ср}} + M_f, \tag{11.50}$$

где $M_{\text{ср}}$ — средний момент вращения невозбужденной машины (11.32); M_f — тормозной момент генераторного режима:

$$M_f = -I_3^2 r_1/(1-s). \tag{11.51}$$

Ток генераторного режима при установившемся КЗ определяется из (9.79) при условии, что $U_d = 0$; $U_q = 0$ и $p = 0$. Полный ток в обмотке статора складывается из суммы трех токов: I_1 — основной частоты; I_2 — изменяющегося с частотой $(1-2s)$ и обусловленного несимметрией ротора; I_3 — изменяющегося с частотой $(1-s)$ и обусловленного возбуждением со стороны ротора. Действующее значение тока в обмотке фазы статора при любой частоте вращения ротора (кроме частот, соответствующих скольжениям

$s = 0$; 2/3 и 1,0, когда частоты отдельных токов совпадают) определим по формуле

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}\,. \qquad (11.52)$$

Наличие возбуждения со стороны ротора приводит к тому, что дополнительно к составляющей переменного момента, пульсирующего с частотой удвоенного скольжения, возникает переменная составляющая момента, пульсирующая с частотой скольжения s.

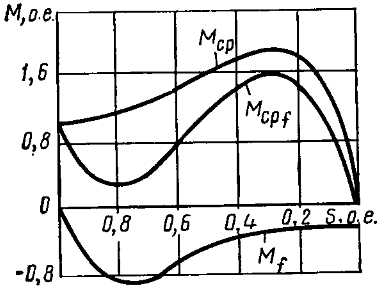

Рис. 11.10. Кривые составляющих момента и результирующая кривая момента возбужденного синхронного двигателя

Кривые момента СД при постоянном возбуждении со стороны ротора показаны на рис. 11.10. В кривой результирующего момента имеется провал, обусловленный наличием возбуждения со стороны ротора, так как составляющая момента M_f при $s = 0 \div 1$ отрицательна. Это может сделать невозможным пуск СД при нагрузке. Поэтому СД пускают в ход без возбуждения, а обмотка возбуждения замыкается на дополнительное сопротивление для уменьшения провала в кривой момента, обусловленного электрической несимметрией ротора.

§ 11.6. Расчет пуска асинхронного электродвигателя по статической пусковой характеристике

При симметричном роторе нет необходимости рассматривать токи и потокосцепления по продольной и поперечной осям. Однако уравнения (11.9) — (11.13) справедливы и для АД с симметричным ротором, когда $x_d(js) = x_q(js)$. Из этих уравнений следует, что в АД с симметричным ротором ток $\mathbf{i}_{s2}$ и потокосцепление $\mathbf{\Psi}_{s2}$ обратной последовательности равны нулю, а ток и потокосцепление прямой последовательности

$$\mathbf{i}_{s1} = [1/(jx_d(js) + r_1)]\, U_{1m} \exp[j(s\tau + \delta_0)]; \qquad (11.53)$$

$$\mathbf{\Psi}_{s1} = [x_d(js)/(jx_d(js) + r_1)]\, U_{1m} \exp[j(s\tau + \delta_0)]. \qquad (11.54)$$

В этом случае электромагнитный момент вращения

$$M = \mathrm{Re}\,[j\mathbf{\Psi}_{s1}\,\mathbf{i}^*_{s1}]. \qquad (11.55)$$

В асинхронном двигателе

$$x_d(js) = x_{\sigma 1} + [1/x_m + 1/(r_2/js + x_{\sigma 2})]^{-1}. \qquad (11.56)$$

Так как $x_m \gg x_{\sigma 2} + r_2/(js)$ при $s \neq 0$, то комплексное сопротивление

$$x_d(js) = r_2/(js) + (x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2}). \qquad (11.57)$$

С учетом принятых допущений электромагнитный момент вращения

$$M = U_{1m}^2 (r_2/s)/[(r_1 + r_2/s)^2 + (x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2})^2]. \qquad (11.58)$$

Это выражение полностью совпадает с известной зависимостью электромагнитного момента АД от скольжения [12].

Если известны зависимости момента вращения и момента сопротивления на валу от частоты вращения (рис. 11.11), то можно определить время пуска и зависимость частоты вращения АД от времени. Для этого уравнение (7.8) движения ротора запишем в виде

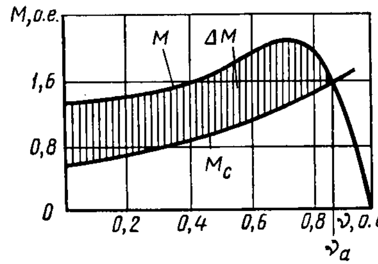

Рис. 11.11. График ускоряющего момента при пуске АД (заштриховано)

$$T_J\,(d\nu/d\tau) = \Delta M, \qquad (11.59)$$

где $\Delta M = M - M_c$ — ускоряющий момент, равный разности электромагнитного момента и момента сопротивления на валу.

Время пуска получим интегрированием (11.59)

$$\tau_{пус} = T_J \int_0^{\nu_a} (1/\Delta M)\, d\nu. \qquad (11.60)$$

Уравнение (11.60) может быть решено графоаналитическим методом (см. § 6.2). Если необходимо определить лишь длительность пуска, то, вводя среднее значение

$$\left(\frac{1}{\Delta M}\right)_{ср} = \frac{1}{\nu_a} \int_0^{\nu_a} \frac{1}{\Delta M}\, d\nu,$$

уравнение (11.60) представим в виде

$$\tau_{пус} = T_J\, \nu_a\, (1/\Delta M)_{ср}. \qquad (11.61)$$

Если принять, что $(1/\Delta M)_{ср} \approx 1/\Delta M_{ср}$, тогда

$$\tau_{пус} = T_J\, \nu_a/\Delta M_{ср}, \qquad (11.62)$$

где $\nu_a = 1 - s_a$ — установившееся значение угловой частоты вращения; $\Delta M_{ср}$ — среднее значение ускоряющего момента за период пуска.

В (11.62) инерционная постоянная выражена в электрических секундах. Чтобы перевести время в секунды, необходимо постоянную T_J умножить на $t_б = 1/2\pi f_б$. Из формулы (11.62) следует, что длительность пуска $\tau_{пус}$ будет тем больше, чем меньше $\Delta M_{ср}$. Аналогично можно рассчитать реверс двигателя и торможение.

ГЛАВА 12. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 12.1. Общие положения

При исследовании ВКЗ трехфазного СГ методом преобразования координат было получено выражение для расчета тока статора (10.44). В общем случае ток ВКЗ представлен в виде апериодической и периодической составляющих. В свою очередь, периодическая составляющая тока рассматривается как сумма затухающих свободных составляющих и установившейся составляющей. При наличии на роторе демпферной обмотки выделяются сверхпереходная и переходная свободные составляющие тока, затухающие во времени, и установившаяся составляющая. Таким образом, периодическая составляющая тока ВКЗ рассматривается как совокупность трех или двух (при отсутствии демпферной обмотки) составляющих. В действительности кривые периодического тока ВКЗ имеют большее число затухающих составляющих, что наглядно видно при изображении огибающей кривой периодической составляющей тока ВКЗ в полулогарифмической сетке координат (рис. 12.1). Кривая затухающей апериодической составляющей тока ВКЗ, построенная в полулогарифмической сетке координат, также с большими допущениями аппроксимируется одной прямой. Практика требует все большего повышения точности расчетов переходных процессов электрических машин, в частности уточненного расчета тока ВКЗ, потерь и усилий, действующих на обмотки машины. Все это требует уточнения широко распространенных методов исследования машин переменного тока на базе уравнений Парка — Горева. Математика позволяет произвести такие уточнения с помощью *частотного метода*, основанного на свойствах интеграла Фурье и преобразований Карсона — Хевисайда. Если

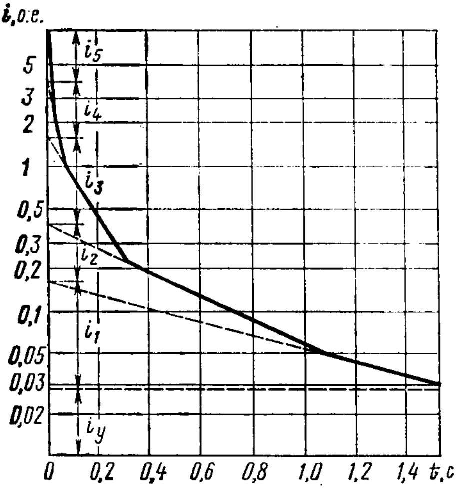

Рис. 12.1. Огибающая периодической составляющей тока статора при ВКЗ синхронной машины

в (3.33) $f(t)$ — некоторая функция, характеризующая переходный процесс, например функция тока $i(t)$, то для единичного постоянного напряжения будет справедливо выражение

$$1/x(p) = p \int_0^\infty \exp(-pt)\, i(t)\, dt, \tag{12.1}$$

где $x(p)$ — операторное индуктивное сопротивление.

Обратная зависимость имеет вид

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} [1/(px(p))] \exp(pt) dp. \tag{12.2}$$

Аналогичную связь между током в цепи при включении ее на единичное напряжение и ее индуктивным сопротивлением установим с помощью интеграла Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [1/(jsx(js))] \exp(jst) ds, \tag{12.3}$$

где $x(js)$ — комплексное индуктивное сопротивление; s — относительная частота питающего напряжения постоянной единичной амплитуды.

Обратная зависимость называется частотной характеристикой цепи:

$$1/x(js) = js \int_0^\infty i(t) \exp(-jst) dt. \tag{12.4}$$

Сравнивая между собой (12.2), (12.3) и (12.1), (12.4), приходим к выводу, что переход от операторных функций и параметров к частотным характеристикам и параметрам можно осуществить заменой оператора p на js.

§ 12.2. Частотные характеристики машин переменного тока

При исследовании частотных характеристик машин переменного тока используют комплексные индуктивные сопротивления, отличающиеся от операторных индуктивных сопротивлений подстановкой $p = js$.

Из (9.63) и (9.64) получим выражения

$$x_d(js) = x_{\sigma 1} + [1/x_{ad} + 1/(r_f/js + x_{\sigma f}) + 1/(r_{yd}/js + x_{\sigma yd})]^{-1}; \tag{12.5}$$

$$x_q(js) = x_{\sigma 1} + [1/x_{aq} + 1/(r_{yq}/js + x_{\sigma yq})]^{-1}. \tag{12.6}$$

Очевидно, что при $s = 0$ комплексные индуктивные сопротивления становятся равными синхронным индуктивным сопротивлениям:

$$x_d(js) = x_{\sigma 1} + x_{ad} = x_d; \; x_q(js) = x_{\sigma 1} + x_{aq} = x_q, \qquad (12.7)$$

а при $s = \infty$ — сверхпереходным индуктивным сопротивлениям:

$$x_d(js) = x''_d; \; x_q(js) = x''_q. \qquad (12.8)$$

При промежуточных значениях скольжений параметры принимают текущие значения между сверхпереходными и синхронными индуктивными сопротивлениями машины. Для расчета частотных параметров удобно записывать комплексные индуктивные сопротивления, полученные из (9.69), (9.70), в виде

$$x_d(js) = x''_d (js + \alpha'_{d1})(js + \alpha'_{d2})/[(js + \alpha_{d1})(js + \alpha_{d2})]; \qquad (12.9)$$

$$x_q(js) = x''_q (js + \alpha'_{q1})/(js + \alpha_{q1}), \qquad (12.10)$$

где $\alpha'_{d1} = 1/T'_d$; $\alpha'_{d2} = 1/T''_d$; $\alpha_{d1} = 1/T_{d0}$; $\alpha_{d2} = 1/T'_{d0}$; $\alpha'_{q1} = 1/T'_q$; $\alpha_{q1} = 1/T_{q0}$ — коэффициенты затухания;

$$x''_d = x_d T'_d T''_d/(T_d T_{d0}); \; x''_q = x_q T'_q/T_{q0}.$$

Расшифровка приведенных обозначений постоянных времени дана в § 9.7. При наличии на роторе большего числа контуров комплексные индуктивные сопротивления машины имеют вид

$$x_{d(q)}(js) = x''_{d(q)} \frac{(js + \alpha'_1)(js + \alpha'_2)\ldots(js + \alpha'_n)}{(js + \alpha_1)(js + \alpha_2)\ldots(js + \alpha_n)}, \qquad (12.11)$$

где $x''_{d(q)}$ — сверхпереходное индуктивное сопротивление машины по оси d или q при наличии в машине короткозамкнутых контуров; α'_n, α_n — коэффициенты затухания соответственно для контуров по осям d и q.

Для явнополюсных машин переменного тока частотные характеристики строятся раздельно для осей d или q и имеют вид

$$\frac{1}{x_{d(q)}(js)} = \frac{1}{x''_{d(q)}} \cdot \frac{(js + \alpha_1)(js + \alpha_2)\ldots(js + \alpha_n)}{(js + \alpha'_1)(js + \alpha'_2)\ldots(js + \alpha'_n)}. \qquad (12.12)$$

Для АД с короткозамкнутым ротором, имеющего магнитную и электрическую симметрию, параметры по осям d и q не делят, поэтому для них частотная характеристика (при одном короткозамкнутом контуре на роторе) имеет вид

$$1/x_{11}(js) = (1/x'_{11})(js + \alpha)/(js + \alpha'), \qquad (12.13)$$

где x'_{11} — переходное индуктивное сопротивление обмотки статора:

$$x'_{11} = x_{\sigma 1} + (1/x_m + 1/x_{\sigma 2})^{-1}, \qquad (12.14)$$

α, α' — коэффициенты затухания переходных процессов в обмотке ротора при разомкнутой и короткозамкнутой обмотке статора:

$$\alpha = 1/T_2 = r_2/x_{22};\ \alpha' = 1/T_2' = r_2/(\sigma x_{22}) = r_2/x_{22}'\,; \qquad (12.15)$$

$x_{\sigma 1}$, $x_{\sigma 2}$ — индуктивные сопротивления рассеяния обмоток статора и ротора; x_m — индуктивное сопротивление взаимоиндукции обмоток; $\sigma = 1 - x_m^2/(x_{11}x_{22})$ — коэффициент рассеяния.

Все параметры обмотки ротора приведены к обмотке статора.

Частотной характеристике (12.13) соответствует токовая диаграмма (рис. 12.2), представляющая собой окружность, построенную на диаметре, равном

$$1/x_{11}(js = j\infty) - 1/x_{11}(js = 0) = 1/x_{11}' - 1/x_{11}. \qquad (12.16)$$

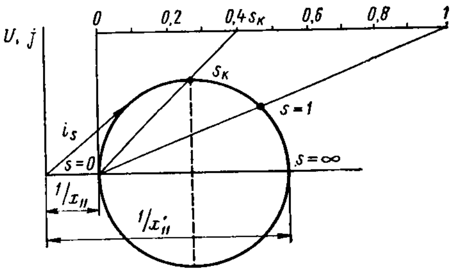

Рис. 12.2. Токовая диаграмма (частотная характеристика) асинхронного двигателя

На рис. 12.2 активная составляющая тока i_s — проекция вектора тока на напряжение. Если постоянная времени T_2' (12.15) выражена в электрических радианах, то α' равна критическому скольжению, при котором i_s максимально:

$$\alpha' = r_2/x_{22}' \approx r_2/(x_{\sigma 1} + x_{\sigma 2}) = s_к. \qquad (12.17)$$

Зная значение $s_к$, нетрудно проградуировать шкалу скольжения, построенную над окружностью токов (рис. 12.2). Для рассмотрения пускового режима АД достаточно шкалу проградуировать в пределах от 0 до 1.

Построение частотной характеристики машины переменного тока по осциллограмме затухания постоянного тока в обмотке статора. Непосредственное снятие частотных характеристик асинхронной или синхронной машины при разных скольжениях ротора, вращаемого посторонним двигателем, и питании обмотки статора напряжением номинальной частоты имеет следующие основные недостатки: 1) искажены результаты измерений за счет напряжения, имеющего частоту $(1-s)$, так как испытательное напряжение, подаваемое на обмотку статора, значительно понижено; 2) затруднено разделение параметров по осям d и q в явнополюсной машине; 3) затруднено поддержание постоянства скольжения при малых его значениях из-за имеющих место качаний ротора первичного двигателя, и т. д.

Частотные характеристики рекомендуется определять при питании обмоток статора неподвижной машины синусоидальным напряжением разной частоты [57]. Схемы питания фаз обмотки статора синусоидальным напряжением разных частот (от значения, близкого к 0, до $f = f_{\text{ном}}$) при двух положениях ротора относительно потока якоря $\Phi_я$ представлены на рис. 12.3. Источник питания $U(js)$ переменной частоты должен обеспечивать практически синусоидальное напряжение и заданное значение тока. Обмотка возбуждения (ОВ) замкнута накоротко.

Распространен метод построения частотных характеристик машин переменного тока по осциллограммам затухания постоянного

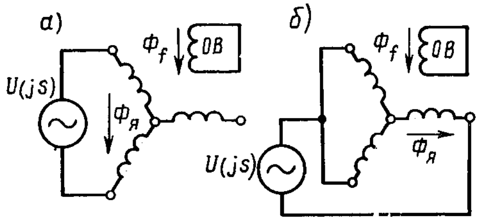

Рис. 12.3. Питание фаз обмотки статора по продольной (*а*) и поперечной (*б*) осям

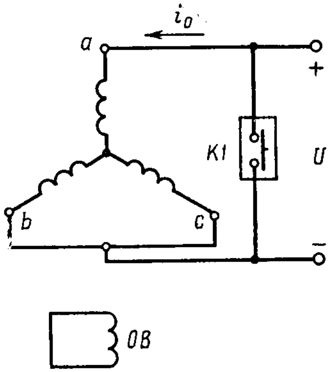

Рис. 12.4. Схема питания фаз статора постоянным током

тока в обмотке статора при неподвижном роторе и закороченной обмотке возбуждения ОВ [18, 21]. Схема питания фаз обмотки статора постоянным током представлена на рис. 12.4. Замыкание контактов *K1* закорачивает обмотку статора. Так как сопротивление цепи закоротки имеет конечное значение, ток в обмотке статора не затухает до нуля. Установившуюся составляющую тока статора следует вычесть из ординат кривой затухания постоянного тока. При питании обмотки статора единичным напряжением начальное значение тока

$$i_0 = 1/r, \tag{12.18}$$

где r — омическое сопротивление (о.е.) короткозамкнутого контура обмотки статора

Момент замыкания контактов *K1* ($t = 0$) в математической записи отвечает подаче на статор единичного напряжения —1 противоположного знака, вызывающего добавочный ток, операторное изображение которого таково: $-1/(r + px(p))$.

Используя метод наложения, получим операторное изображение затухающего переходного тока:

$$i(p) = 1/r - 1/(r + px(p)). \tag{12.19}$$

Известно, что затухающий ток аппроксимируется суммой экспонент $i(\tau) = i_1 \exp(-\alpha_1' \tau) + i_2 \exp(-\alpha_2' \tau) + \ldots + i_n \exp(-\alpha_n' \tau)$, или в операторной форме записи (см. табл. 3.1)

$$i(p) = i_1 p/(p+\alpha_1') + i_2 p/(p+\alpha_2') + \ldots + i_n p/(p+\alpha_n'), \qquad (12.20)$$

где $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i_0$.

Первая производная во времени от переходного тока

$$di(\tau)/d\tau = -i_1\alpha_1' \exp(-\alpha_1'\tau) - i_2\alpha_2' \exp(-\alpha_2'\tau) - \ldots$$

$$\ldots - i_n\alpha_n' \exp(-\alpha_n'\tau), \qquad (12.21)$$

или в операторной форме

$$pi(p) = -p/[r + px(p)] = -i_1\alpha_1' \cdot p/(p+\alpha_1') -$$

$$- i_2\alpha_2' \cdot p/(p+\alpha_2') - \ldots . \qquad (12.22)$$

Отбрасывая знак минус в обеих частях уравнения, получим

$$p/[r + px(p)] = i_1\alpha_1' \cdot p/(p+\alpha_1') + i_2\alpha_2' \cdot p/(p+\alpha_2') + \ldots . \qquad (12.23)$$

Делая замену $p = js$, переходим к комплексной форме записи:

$$js/[r + jsx(js)] = i_1\alpha_1' \cdot js/(js+\alpha_1') + i_2\alpha_2' \cdot js/(js+\alpha_2') + \ldots . \qquad (12.24)$$

Выражение (12.24), являющееся по форме законом Ома, представим как некоторый ток i_{ss}, зависящий от скольжения s ротора:

$$i_{ss} = j/[r/s + jx(js)] = i_1\alpha_1' \cdot js/(js+\alpha_1') +$$

$$+ i_2\alpha_2' \cdot js/(js+\alpha_2') + \ldots = a + jb, \qquad (12.25)$$

где

$$a = s^2\left[\frac{i_1\alpha_1'}{s^2+(\alpha_1')^2} + \frac{i_2\alpha_2'}{s^2+(\alpha_2')^2} + \ldots\right];$$

$$b = s\left[\frac{i_1(\alpha_1')^2}{s^2+(\alpha_1')^2} + \frac{i_2(\alpha_2')^2}{s^2+(\alpha_2')^2} + \ldots\right].$$

Находим из (12.25) комплексное индуктивное сопротивление: $x(js) = [j - (r/s)(a+jb)]/[j(a+jb)] = [j - (r/s)i_{ss}]/(ji_{ss})$, откуда уравнение частотной характеристики

$$i_{s0} = \frac{1}{x(js)} = \frac{j(a+jb)}{j-(r/s)(a+jb)} = \frac{i_{ss}}{1 - i_{ss}r/(js)}. \qquad (12.26)$$

Значения составляющих токов и коэффициентов затухания определим с помощью кривой затухания постоянного тока (рис. 12.5), перестроенной в полулогарифмическом масштабе координат (рис. 12.6). Для нахождения составляющей тока i_1 проводим касательную от конца кривой *1* до пересечения с осью ординат. Из ординаты, соответствующей e = 2,71, проводим линию *a*, параллельную касательной к кривой *1*, до пересечения с осью абсцисс в точке A. Отрезок AO, деленный на $t_б$, определяет постоянную времени затухания T'_1 (эл. с) составляющей тока i_1 и соответственно коэффициент затухания $\alpha'_1 = 1/T'_1$. Далее в полулогарифмическом масштабе строим разность токов $i(\tau) - i_1\exp(-\alpha'_1\tau)$ (кривая 2) и аналогично определим следующую составляющую тока i_2 и ее коэффициент затухания α'_2 и т. д. Зная составляющие токов $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i'_n$ и коэффициенты затухания $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, определим ток i_{ss} (12.25) и частотную характеристику машины (12.26).

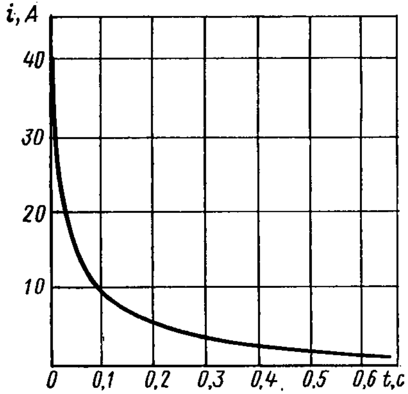

Рис. 12.5. Кривая затухания постоянного тока в обмотке статора

Графический метод построения частотной характеристики. На примере построения частотной характеристики синхронной явнополюсной машины по оси d рассмотрим графический метод построения частотной характеристики. Пусть из разложения кривой затухания постоянного тока в обмотке статора по оси d известны составляющие тока i_1, i_2 и i_3 (о. е.) и соответствующие коэффициенты затухания α'_1, α'_2 и α'_3. Например, $i_1 = 3{,}5$; $i_2 = 5{,}1$; $i_3 = 10$; $\alpha'_1 = s_{к1} = 0{,}25$; $\alpha'_2 = s_{к2} = 0{,}11$; $\alpha'_3 = s_{к3} = 0{,}036$.

На отрезках, пропорциональных $i_1\alpha'_1$, $i_2\alpha'_2$ и $i_3\alpha'_3$ и исходящих из одной точки (предварительного начала координат O'), строим

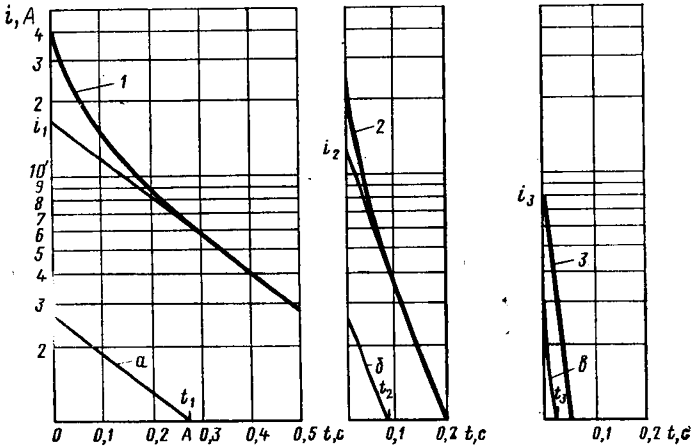

Рис. 12.6. Картина изменения составляющих тока и коэффициентов затухания

окружности (рис. 12.7). Для каждой окружности по соответствующему значению $s_к$ определим масштабы скольжения по известной методике. Задаваясь значениями скольжений, для каждого из них строим векторы токов по всем окружностям и определяем их геометрическую сумму. На рис. 12.7 построены составляющие O'_a, O'_b, O'_c вектора тока для скольжения $s = 0,125$. Геометрическая

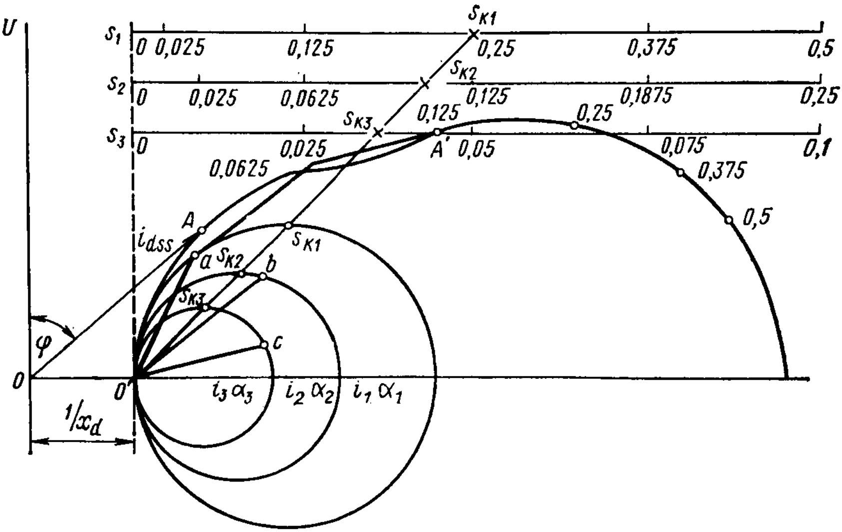

Рис. 12.7. Построение частотной характеристики

сумма этих векторов дает точку A'. Совокупность точек, полученных изложенным методом, дает геометрическое место конца вектора тока. Перенесем начало координат влево на значение установившегося тока КЗ

$$i_d = 1/x_d. \tag{12.27}$$

Вектор $0Ai_{dss} = 1/[x_d(js) + r/(js)]$ характеризует значение и фазу установившегося тока при заданном скольжении ротора и питании обмотки статора номинальным напряжением номинальной частоты. Геометрическое место концов векторов тока i_{dss} дает графическое изображение действительной частотной характеристики машины по оси d [18, 21].

§ 12.3. Определение параметров переходных токов и электромагнитных моментов

Частотная характеристика электрической машины позволяет определить важнейшие параметры и электромагнитные величины машины в переходных режимах.

Определение сверхпереходных и синхронных индуктивных сопротивлений. Для явнополюсных СМ кривую затухания тока снимают при совпадении оси обмотки статора с осями d и q ротора и получают две совокупности составляющих токов i_{ds} и i_{qs} и коэффициентов затухания:

$$i_{d1};\ i_{d2};\ \ldots;\ i_{dn} \text{ и } \alpha'_{d1};\ \alpha'_{d2};\ \ldots;\ \alpha'_{dn};$$

$$i_{q1};\ i_{q2};\ \ldots;\ i_{qn} \text{ и } \alpha'_{q1};\ \alpha'_{q2};\ldots;\ \alpha'_{qn}. \qquad (12.28)$$

Формулу сверхпереходного индуктивного сопротивления по оси d получаем из действительной частотной характеристики машины по оси d, выражение для которой запишем с учетом (12.24) и (12.25) следующим образом:

$$\mathbf{i}_{dss} = \frac{j}{r/s + jx_d(js)} = i_{d1}\,\alpha'_{d1}\,\frac{js}{js + \alpha'_{d1}} + i_{d2}\,\alpha'_{d2}\frac{js}{js + \alpha'_{d2}} + \ldots \qquad (12.29)$$

При подстановке в (12.29) $s \to \infty$ получим неопределенность типа ∞/∞. Поэтому определяем предел i_{dss} при $s \to \infty$:

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{i}_{dss} = \lim\,[j/(jx_d(js) + r/s)] = 1/x''_d. \qquad (12.30)$$

В то же время

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{i}_{dss} = \lim_{s\to\infty} \left| i_{d1}\alpha'_{d1}\frac{js}{js + \alpha'_{d1}} + i_{d2} \times \right.$$

$$\left. \times\,\alpha'_{d2}\frac{js}{js + \alpha'_{d2}} + \ldots \right| = i_{d1}\alpha'_{d1} + i_{d2}\alpha'_{d2} + \ldots + i_{dn}\alpha'_{dn}, \qquad (12.31)$$

откуда

$$1/(i_{d1}\alpha'_{d1} + i_{d2}\alpha'_{d2} + \ldots + i_{dn}\alpha'_{dn}) = x''_d. \qquad (12.32)$$

Аналогично,

$$1/(i_{q1}\alpha'_{q1} + i_{q2}\alpha'_{q2} + \ldots + i_{qn}\alpha'_{qn}) = x''_q. \qquad (12.33)$$

Синхронные индуктивные сопротивления по продольной и поперечной осям определим следующим образом. При протекании по обмотке статора постоянного тока i_0, согласно схеме на рис. 12.4, при разомкнутой обмотке возбуждения потокосцепление обмотки статора

$$\Psi_{s0} = (3/2)\,x_d\,i_0. \qquad (12.34)$$

Относительное значение постоянного тока $i_0 = 1/r$, где $r = (3/2)r_1$ — относительное сопротивление обмотки статора, тогда

$$\Psi_{s0} = (3/2)\,x_d\,[2/(3r_1)] = x_d/r_1. \qquad (12.35)$$

Из уравнения равновесия напряжения короткозамкнутого контура обмотки статора

$$-d\Psi_s/d\tau = ri = (3/2)\, r_1 i \qquad (12.36)$$

получим

$$-\int_0^\infty d\Psi_s = \Psi_{s0} = (3/2)\, r_1 \int_0^\infty i d\tau, \qquad (12.37)$$

откуда

$$(3/2)\, r_1^2 \int_0^\infty i d\tau = x_d. \qquad (12.38)$$

Затухающий ток обмотки статора представим в виде суммы составляющих

$$i'_{d(q)} = i_1 \exp(-\alpha'_1 \tau) + i_2 \exp(-\alpha'_2 \tau) + \ldots$$
$$\ldots + i_n \exp(-\alpha'_n \tau), \qquad (12.39)$$

амплитудные значения которых и коэффициенты затухания определены в § 12.2.

Интегрируя (12.38), запишем

$$x_d = (3/2)\, r_1^2 [i_{d1}/\alpha'_{d1} + i_{d2}/\alpha'_{d2} + \ldots + i_{dn}/\alpha'_{dn}]. \qquad (12.40)$$

Аналогично получим синхронное индуктивное сопротивление по поперечной оси:

$$x_q = (3/2)\, r_1^2 [i_{q1}/\alpha'_{q1} + i_{q2}/\alpha'_{q2} + \ldots + i_{qn}/\alpha'_{qn}]. \qquad (12.41)$$

Определение токов обмотки статора при переходных процессах. Переходные токи при включении электрической машины в сеть или при ВКЗ связаны с частотной характеристикой машины. При $s = \infty$ определим сверхпереходные токи $i''_d = 1/x''_d$; $i''_q = 1/x''_q$, а при $s = 0$ — установившиеся токи КЗ $i_d = 1/x_d$; $i_q = 1/x_q$.

Используя эквивалентность частотной характеристики

$$i_{s0} = 1/x(js) \qquad (12.42)$$

и переходной операторной функции

$$i(p) = 1/x(p), \qquad (12.43)$$

можно определить экспоненциальные составляющие тока статора при переходных процессах и построить огибающую периодической составляющей тока статора.

Определение пускового тока и статический механической (пусковой) характеристики синхронного двигателя. Частотный метод удобен для расчета токов и моментов СМ, работающих в асинхронном режиме, например при асинхронном пуске СД. Определим зависимость тока статора и электромагнитного вращающего момента трехфазного СД от скольжения ротора. Обмотка статора двигателя питается номинальным трехфазным напряжением, обмотка возбуждения замкнута накоротко. На роторе двигателя имеется демпферная обмотка. Частотные характеристики двигателя по осям d и q известны и представлены в виде графиков (рис. 12.8).

Вектор тока статора [21] запишем в виде

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y^* \exp(-j2s\tau) = \mathrm{A}_x + j\mathrm{B}_x + (\mathrm{A}_y - j\mathrm{B}_y) \exp(-j2s\tau), \tag{12.44}$$

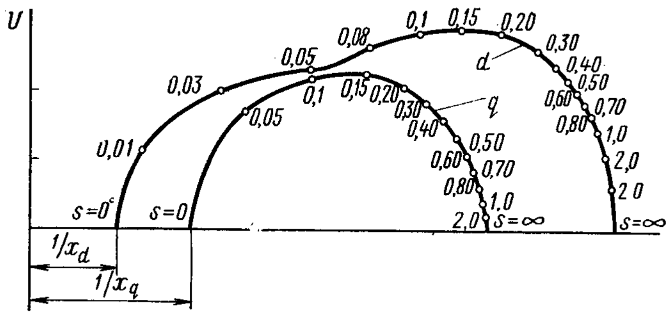

Рис. 12.8. Частотные характеристики синхронного двигателя

где средний ток статора и составляющая тока статора двойной частоты соответственно

$$\mathbf{I}_x = \mathrm{A}_x + j\mathrm{B}_x = \{\mathrm{i}_{sx0} + [jr_1/(1-2s)]\, \mathrm{i}_{sd0}\, \mathrm{i}_{sq0}\}/D(js); \tag{12.45}$$

$$\mathbf{I}_y^* = \mathrm{A}_y - j\mathrm{B}_y = \mathrm{i}_{sy0}^* \;/\, D(js); \tag{12.46}$$

$$D(js) = 1 + [j2sr_1/(1-2s)]\, \mathrm{i}_{sx0} + [r_1^2/(1-2s)]\, \mathrm{i}_{sd0}\, \mathrm{i}_{sq0}; \tag{12.47}$$

$$\mathrm{i}_{sx0} = 0{,}5\,(\mathrm{i}_{sd0} + \mathrm{i}_{sq0}); \quad \mathrm{i}_{sy0}^* = 0{,}5\,(\mathrm{i}_{sd0} - \mathrm{i}_{sq0}). \tag{12.48}$$

По частотным характеристикам машины для заданных значений скольжения определим токи:

$$\mathrm{i}_{sd0} = 1/x_d\,(js); \quad \mathrm{i}_{sq0} = 1/x_q\,(js). \tag{12.49}$$

По (12.45) построим частотную характеристику среднего тока $\mathbf{I}_x$ статора, имеющего номинальную частоту (рис. 12.9). Кривая среднего тока статора при скольжении в пределах $s = 0{,}4 \div 0{,}5$ имеет петлю, вызванную наличием магнитной и электрической несимметрии ротора и влиянием активного сопротивления цепи статора. Эта петля характеризует известный одноосный эффект в машинах с несимметричным ротором. Эффективное значение среднего тока статора в зависимости от скольжения представлено на рис. 12.10 (кривая *1*). При скольжении ротора $s = 0{,}5$ ток статора имеет провал, значение которого определяется степенью несимметрии ротора.

Амплитуда тока I_y^*, изменяющегося во времени с двойной частотой, для каждого скольжения s определяется по (12.46). Значение I_y^* зависит от составляющих i_{sd0}, i_{sq0} и скольжения. При скольжении $s = 0{,}5$ амплитуда тока $I_y^* = 0$. Так как I_y^* накладывается на средний тока статора I_x, то на частотной характеристике

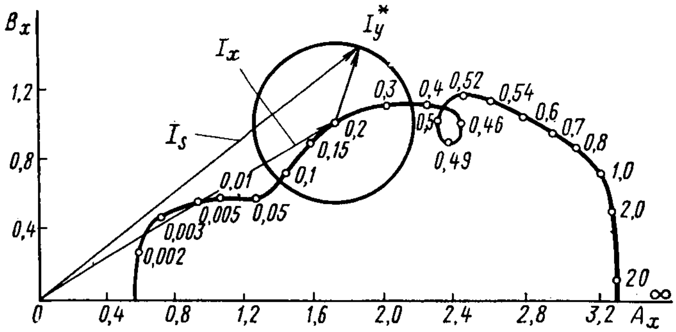

Рис. 12.9. Частотная характеристика среднего тока статора явнополюсного синхронного двигателя

тока можно показать для каждого скольжения окружность тока I_y^* с центром в конце вектора тока I_x. По отношению к неподвижному вектору тока I_x ток I_y имеет частоту (1—2s). На рис. 12.9 эти векторы показаны для скольжения $s = 0{,}2$. Конец полного вектора тока I_s обегает во времени окружность тока I_y^*.

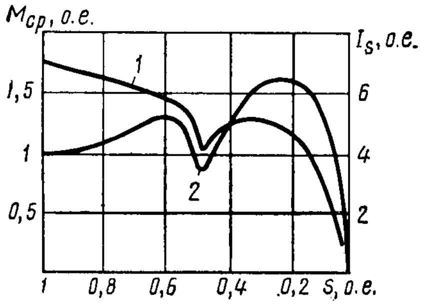

Рис. 12.10. Эффективное значение среднего тока статора и среднего электромагнитного момента при пуске синхронного двигателя

Электромагнитный вращающий момент машины (о.е.) в установившемся режиме при данном скольжении ротора

$$M_s = (I_s - I_s^*) / (2j) - r_1 I_s I_s^* . \tag{12.50}$$

При несимметрии ротора электромагнитный вращающий момент состоит из двух составляющих: среднего электромагнитного момента и пульсирующего момента, имеющего частоту пульсации $2s$. Средний электромагнитный момент

$$M_{\text{ср}} = B_x - r_1 (A_x^2 + A_y^2 + B_x^2 + B_y^2), \tag{12.51}$$

где A_x, A_y, B_x, B_y — коэффициенты, определяемые по (12.45) и (12.46).

Зависимость среднего электромагнитного момента от скольжения представлена на рис. 12.10 (кривая 2). Пульсирующий электромагнитный момент

$$M_{\text{пул}} = \sqrt{[B_y + r_1(A_x A_y - B_x B_y)]^2 + [A_y - r_1(A_x B_y + A_y B_x)]^2}. \quad (12.52)$$

Если пренебречь влиянием потерь в активном сопротивлении обмотки статора, то выражение для момента упрощается:

$$M_s = B_x + \sqrt{A_y^2 + B_y^2}\cos 2s\tau; \quad (12.53)$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_x &= (\mathrm{i}_{sd0} + \mathrm{i}_{sq0} - \mathrm{i}^*_{sd0} - \mathrm{i}^*_{sq0})/(4j); \\ A_y &= (\mathrm{i}_{sd0} - \mathrm{i}_{sq0} + \mathrm{i}^*_{sd0} - \mathrm{i}^*_{sq0})/4; \\ B_y &= (\mathrm{i}_{sd0} - \mathrm{i}_{sq0} - \mathrm{i}^*_{sd0} + \mathrm{i}^*_{sq0})/4. \end{aligned}\right\} \quad (12.54)$$

Средний электромагнитный момент

$$M_{\text{ср}} = \mathrm{Im}\,[(1/x_d(js) + 1/x_q(js))/(2j)]. \quad (12.55)$$

По частотным характеристикам можно определить $M_{\text{ср}}$ (о.е.) как полусумму проекций комплексов тока i_{sd} и i_{sq} на ось j.

ГЛАВА 13. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯХ

§ 13.1. Исследование процессов пуска асинхронного электродвигателя на ЦВМ

Переходные процессы в АД представляют собой сочетание электромагнитных переходных процессов, вызванных коммутационными операциями, и механических переходных процессов, обусловленных быстрыми изменениями частоты вращения ротора. Скорость затухания электромагнитных переходных процессов зависит от параметров обмоток, а механических — от моментов инерции вращающихся масс и величины нагрузки. Можно выделить два случая, когда: 1) постоянные времени затухания электромагнитных и механических переходных процессов примерно одинаковы; 2) электромагнитные переходные процессы затухают значительно быстрее по сравнению с изменением частоты вращения ротора. При исследовании и расчете пусковых характеристик АД в первом случае рассматриваются электромеханические, а во втором — механические переходные процессы.

Учитывая разнообразие используемых на практике координатных осей, из-за возможности перехода к любой из рассмотренных систем уравнения, описывающие электромеханические переходные процессы в АД, рассмотрим в системе координат x и y, вращающихся с произвольной угловой частотой ω_x. Токи статора в системе координат x, y определим по формулам, аналогичным (9.4), принимая, что при $t = 0$ ось x совпадает с осью фазы a статора:

$$\left.\begin{aligned} i_{x1} &= (2/3)\,[i_{a1}\cos\omega_x t + i_{b1}\cos(\omega_x t - 2\pi/3) + \\ &\quad + i_{c1}\cos(\omega_x t + 2\pi/3)]; \\ i_{y1} &= -(2/3)\,[i_{a1}\sin\omega_x t + i_{b1}\sin(\omega_x t - 2\pi/3) + \\ &\quad + i_{c1}\sin(\omega_x t + 2\pi/3)]; \\ i_{01} &= (1/3)\,(i_{a1} + i_{b1} + i_{c1}). \end{aligned}\right\} \quad (13.1)$$

Чтобы перейти от переменных в осях x , y к действительным значениям токов в обмотках фаз статора, воспользуемся выражением

$$\left.\begin{aligned} i_{a1} &= i_{x1}\cos\omega_x t - i_{y1}\sin\omega_x t + i_{01}; \\ i_{b1} &= i_{x1}\cos(\omega_x t - 2\pi/3) - i_{y1}\sin(\omega_x t + 2\pi/3) + i_{01}; \\ i_{c1} &= i_{x1}\cos(\omega_x t + 2\pi/3) - i_{y1}\sin(\omega_x t + 2\pi/3) + i_{01}. \end{aligned}\right\} \quad (13.2)$$

Уравнения (13.1) и (13.2) устанавливают прямую и обратную связь между действительными токами в обмотках фаз статора и новыми переменными в осях x, y. Аналогично можно записать уравнения для напряжений, потокосцеплений и ЭДС статорной обмотки. При преобразовании трехфазной обмотки статора к новой системе координат (x, y) необходимо учитывать, что в любой момент времени угол, образованный осью фазы a ротора с осью x,

$$\beta_a = \omega_x t - \gamma. \quad (13.3)$$

Тогда формулы преобразования для роторных токов

$$\left.\begin{aligned} i_{x2} &= (2/3)\,[i_{a2}\cos(\omega_x t - \gamma) + i_{b2}\cos(\omega_x t - \gamma - 2\pi/3) + \\ &\quad + i_{c2}\cos(\omega_x t - \gamma + 2\pi/3)]; \\ i_{y2} &= -(2/3)\,[i_{a2}\sin(\omega_x t - \gamma) + i_{b2}\sin(\omega_x t - \gamma - 2\pi/3) + \\ &\quad + i_{c2}\sin(\omega_x t - \gamma + 2\pi/3)]; \\ i_{02} &= (1/3)\,(i_{a2} + i_{b2} + i_{c2}). \end{aligned}\right\} \quad (13.4)$$

Таким же образом преобразуются напряжения и потокосцепления обмоток ротора. Уравнения равновесия напряжений (о.е.) обмотки статора, если выполнить преобразования, аналогичные приведенным в гл. 3, запишем в виде

$$U_{x1} = d\Psi_{x1}/d\tau - \omega_x\Psi_{y1} + r_1 i_{x1};\quad U_{y1} = d\Psi_{y1}/d\tau + \omega_x\Psi_{x1} + r_1 i_{y1}, \quad (13.5)$$

где

$$\Psi_{x1} = x_{11} i_{x1} + x_m i_{x2};\quad \Psi_{y1} = x_{11} i_{y1} + x_m i_{y2}. \quad (13.6)$$

Пусть обмотка ротора замкнута накоротко. Так как она вращается относительно выбранной системы координат с частотой, равной производной от (13.3), то преобразованные уравнения равновесия напряжений для обмотки ротора, по аналогии с (3.30), имеют вид

$$0 = d\Psi_{x2}/d\tau - (\omega - \omega_x)\Psi_{y2} + r_2 i_{x2};\ 0 = d\Psi_{y2}/d\tau + + (\omega - \omega_x)\Psi_{x2} + r_2 i_{y2}, \tag{13.7}$$

где

$$\Psi_{x2} = x_{22} i_{x2} + x_m i_{x1};\ \Psi_{y2} = x_{22} i_{y2} + x_m i_{y1}. \tag{13.8}$$

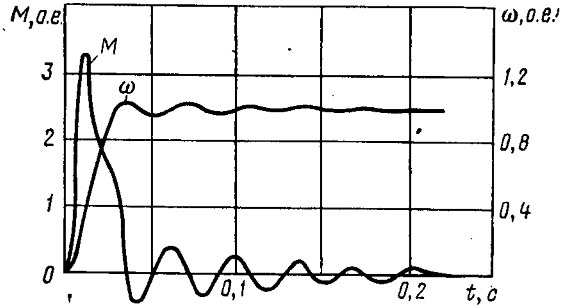

Рис. 13.1. Кривые M и ω при пуске АД при $M_c = 0$

Напряжения, подводимые к обмотке статора, определяются в преобразованной системе координат соотношениями

$$U_{x1} = U_{1m}\cos[(\omega_1 - \omega_x)\tau + \alpha_0];\ U_{y1} = U_{1m}\times \times\sin[(\omega_1 - \omega_x)\tau + \alpha_0], \tag{13.9}$$

где α_0 — угол, образованный вектором напряжения с фазой в начальный момент времени.

Анализируя (13.5), (13.7) и (13.9), видим, что при $\omega_x = \omega$ эти уравнения ничем не отличаются от уравнений СМ в осях d, q. При $\omega_x = \omega_1$, т. е. в случае, когда преобразованная система координат вращается с синхронной частотой, приложенные к обмотке статора напряжения (13.9) — постоянные величины, что облегчает решение уравнений.

Электромагнитный момент вращения АД определим из (9.38), учитывая, что $\Psi_{x1} = \Psi_d$; $\Psi_{y1} = \Psi_q$; $i_{x1} = i_d$; $i_{y1} = i_q$. Тогда

$$M = \Psi_{x1} i_{y1} - \Psi_{y1} i_{x1}. \tag{13.10}$$

При исследовании электромеханических переходных процессов АД совместно с уравнениями равновесия напряжений необходимо рассматривать уравнение (7.7) движения ротора. Если частота вращения переменная, то такая система дифференциальных уравнений нелинейная. Поэтому общим методом анализа электромеханических переходных процессов АД являются численные решения дифференциальных уравнений с использованием ЭВМ [28].

Типичные кривые $M = f(t)$ и $\omega = f(t)$ при пуске АД без нагрузки ($M_с = 0$) приведены на рис. 13.1. На рис. 13.2 приведены динамическая (кривая *1*) и статическая (кривая *2*) механические характеристики исследуемого АД. *Динамическая механическая характеристика* — это механическая характеристика двигателя, определенная с учетом электромеханических переходных процессов. *Статическая механическая характеристика* — характеристика, построенная без учета электромагнитных переходных процессов. В результате влияния свободных токов, а также изменения частоты вращения ротора электромагнитный момент периодически в течение переходного процесса становится как больше, так и меньше момента, определяемого по статической механической характеристике. Это обусловливает колебательный характер изменения электромагнитного момента АД во времени со значительными амплитудами на начальном участке переходного процесса. Из рис. 13.2 видно, что динамическая механическая характеристика АД значительно отличается от статической. Максимальное значение пускового момента более чем в три раза превышает его значение, найденное по статической характеристике. Эта разница моментов объясняется тем, что значения токов в переходном процессе существенно больше токов в установившемся режиме.

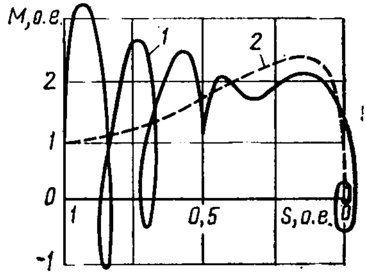

Рис. 13.2. Динамическая и статическая механические характеристики АД

Для многих электроприводов большой интерес представляет анализ результатов решения системы дифференциальных уравнений АД в общем виде. Аналитическое решение дифференциальных уравнений АД возможно при условии их линеаризации, т. е. при исследовании только электромагнитных переходных процессов, когда частота вращения может быть принята постоянной. Допущение постоянства частоты вращения ротора вполне приемлемо, например, при определении максимальных (ударных) значений переходных токов и моментов, особенно в электроприводах с большим моментом инерции вращающихся масс, когда за отрезок времени до установления максимальных значений тока и момента частота вращения ротора изменяется незначительно. В этом случае линейные дифференциальные уравнения решаются операторным или классическим методом.

Как показали многочисленные эксперименты и расчеты на ЭВМ, на начальном участке переходного процесса реальные зависимости

$M(t)$ весьма близки к полученным при условии постоянства частоты вращения.

Электромагнитные переходные процессы, возникающие при пуске АД без нагрузки, практически затухают по мере разгона двигателя до частоты вращения, соответствующей критическому скольжению на статической механической характеристике [46]. При дальнейшем увеличении частоты вращения отличие динамической механической характеристики от статической объясняется следующим образом. Если увеличение частоты вращения велико, то из-за влияния индуктивностей обмоток машины изменение токов отстает от изменения частоты вращения. Чем больше постоянные времени обмоток и чем меньше момент инерции вращающихся масс, тем в большей степени это проявляется. Поэтому при достижении синхронной частоты вращения токи в обмотке ротора еще не будут равны нулю. Следовательно, не равен нулю и электромагнитный момент вращения и АД разгоняется до частоты, превышающей синхронную. При увеличении частоты вращения выше синхронной момент становится отрицательным (рис. 13.2), частота вращения уменьшается. Таким образом, в конце переходного процесса частота и момент вращения двигателя совершают затухающие колебания.

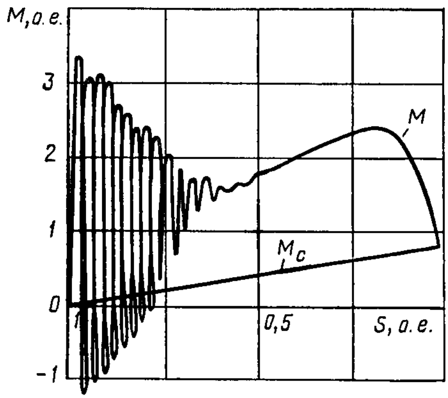

Рис. 13.3. Динамическая механическая характеристика АД при $M_c = M_н$ и $J_1 = 5J_{рот}$

Динамическая механическая характеристика зависит от параметров обмоток АД и нагрузки (момент инерции вращающихся масс, значение нагрузки), а также от характера переходного процесса. Изменение момента инерции или момента сопротивления влечет за собой изменение динамической характеристики (рис. 13.3).

Аналитическое решение дифференциальных уравнений АД может быть приближенно получено и при переменной частоте вращения ротора. В этом случае закон изменения скольжения во времени принимается известным (линейным, экспоненциальным, синусоидальным или любым другим), а активным сопротивлением обмотки статора пренебрегают. Тогда дифференциальные уравнения равновесия напряжений — линейные с переменными коэффициентами. Сложность решения зависит от принятого характера изменения частоты вращения. Если решение не выражается через известные функции, то оно может быть получено с использованием быстросходящихся рядов [21].

§ 13.2. Исследование переходных процессов асинхронных электродвигателей с помощью АВМ

Прежде чем составить структурную схему математической модели переходных процессов АД, необходимо привести дифференциальные уравнения равновесия напряжения контуров статора и ротора и уравнение движения ротора к виду, удобному для моделирования. Используют различные формы записи дифференциальных уравнений, которые можно получить из уравнений равновесия напряжений обмоток статора и ротора, движения ротора, формул для составляющих потокосцеплений статора и ротора, электромагнитного момента.

Рассмотрим переход от исходных уравнений (13.5) — (13.8) к одной из наиболее рациональных для математического моделирования систем уравнений, где переменными являются потокосцепления статора и ротора. Составляющие токов статора и ротора запишем в виде

$$\begin{aligned}
i_{x1} &= [x_{22}/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{x1} - [x_m/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{x2};\\
i_{y1} &= [x_{22}/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{y1} - [x_m/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{y2};\\
i_{x2} &= [x_{11}/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{x2} - [x_m/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{x1};\\
i_{y2} &= [x_{11}/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{y2} - [x_m/(x_{11}x_{22} - x_m^2)]\,\Psi_{y1}.
\end{aligned} \qquad (13.11)$$

Подставив составляющие токов в (13.5) и (13.7), получим

$$\left.\begin{aligned}
d\Psi_{x1}/d\tau &= U_{x1} - \alpha_1'\Psi_{x1} + \omega_x\Psi_{y1} + k_2\alpha_1'\Psi_{x2};\\
d\Psi_{y1}/d\tau &= U_{y1} - \alpha_1'\Psi_{y1} - \omega_x\Psi_{x1} + k_2\alpha_1'\Psi_{y2};\\
d\Psi_{x2}/d\tau &= -\alpha_2'\Psi_{x2} + (\omega_x - \omega)\Psi_{y2} + k_1\alpha_2'\Psi_{x1};\\
d\Psi_{y2}/d\tau &= -\alpha_2'\Psi_{y2} - (\omega_x - \omega)\Psi_{x2} + k_1\alpha_2'\Psi_{y1};\\
d\omega/d\tau &= (M - M_c)/T_J;\; M = k_2(\Psi_{y1}\Psi_{x2} - \Psi_{x1}\times\\
&\qquad\times\Psi_{y2})/(\sigma x_{11}),
\end{aligned}\right\} \qquad (13.12)$$

где $\alpha_1' = \alpha_1/\sigma$, $\alpha_2' = \alpha_2/\sigma$ — коэффициенты затухания токов в обмотках статора (ротора) при замкнутой роторной (статорной) обмотке; $k_1 = x_m/x_{11}$, $k_2 = x_m/x_{22}$ — коэффициенты связи обмоток статора и ротора; $\alpha_1 = r_1/x_{11}$, $\alpha_2 = r_2/x_{22}$ — коэффициенты затухания токов в обмотках статора (ротора) при разомкнутой роторной (статорной) обмотке; $\sigma = 1 - x_m^2/(x_{11}x_{22})$— коэффициент рассеяния.

Возможны другие формы записи систем уравнений для математического моделирования переходных процессов в АД, которые можно получить путем линейных преобразований исходных уравнений (13.5) — (13.8). Например, применяют следующую систему уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
d\Psi_{x2}/d\tau &= -r_2 i_{x2} + (\omega_x - \omega)\,\Psi_{y2};\\
d\Psi_{y2}/d\tau &= -r_2 i_{y2} - (\omega_x - \omega)\,\Psi_{x2};\\
di_{x2}/d\tau &= -(\alpha_1' + \alpha_2')\, i_{x2} + (\alpha_1'/x_{22})\,\Psi_{x2} - \omega\Psi_{y2}/(\sigma x_{22}) +\\
&\quad + \omega_x i_{y2} - [x_m/(x_{11}x_{22}\sigma)]\, U_{x1};\\
di_{y2}/d\tau &= -(\alpha_1' + \alpha_2')\, i_{y2} + (\alpha_1'/x_{22})\,\Psi_{y2} + \omega\Psi_{x2}/(\sigma x_{22}) -\\
&\quad - \omega_x i_{x2} - [x_m/(x_{11}x_{22}\sigma)]\, U_{y1};\\
d\omega/d\tau &= (M - M_c)/T_J\,;\quad M = \Psi_{y2}\, i_{x2} - \Psi_{x2}\, i_{y2}.
\end{aligned}\right\}\qquad (13.13)
$$

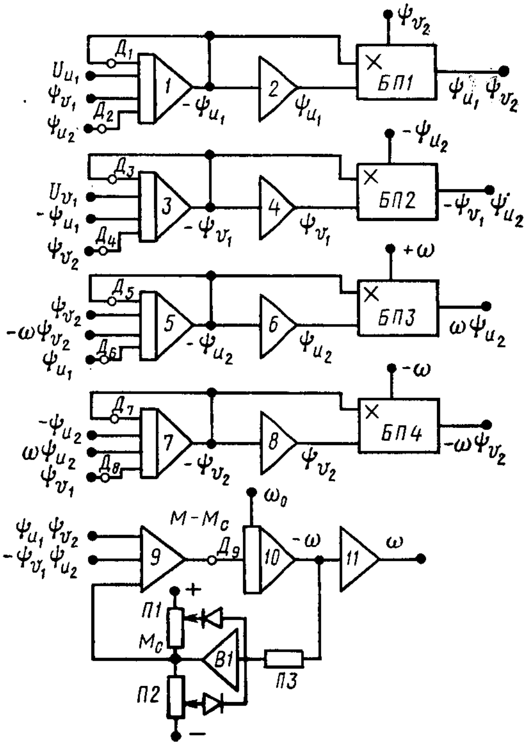

Рис. 13.4. Структурная схема математической модели системы уравнений (13.12)

Математические модели, полученные на основании указанных систем уравнений, в той или иной мере соответствуют критериям рациональности, которые приняты в виде следующих условий: устойчивость работы АВМ, минимальное количество операционных усилителей и нелинейных блоков, удобство ввода внешних возмущений.

Задание внешнего возмущения в математическую модель не зависит от формы системы уравнений и связано только с выбором частоты вращения системы координатных осей. Чтобы исследовать режимы симметричного повторного включения, пуска, реверсов и торможения коротким замыканием обмотки статора, желательно использовать синхронно вращающуюся систему координат

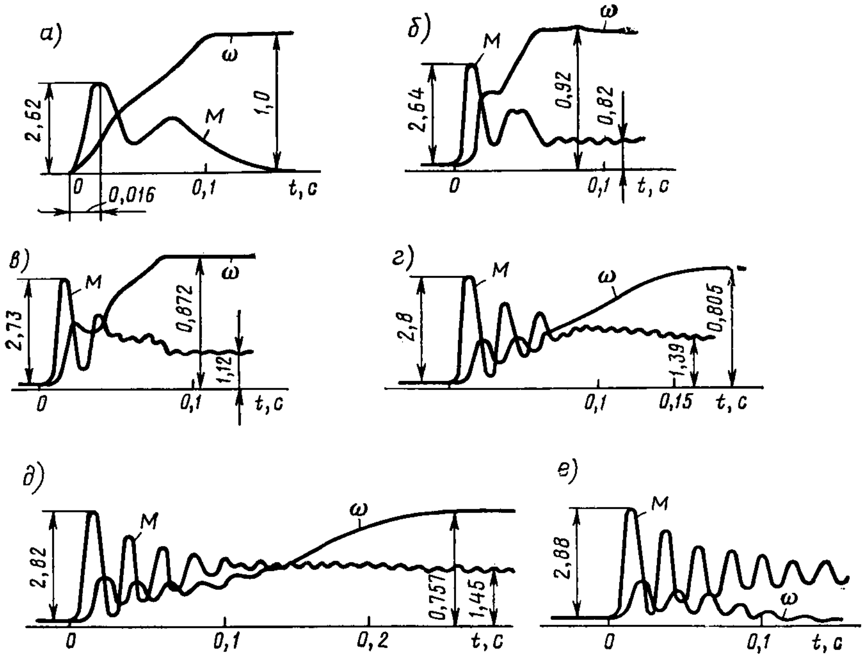

Рис. 13.5. Зависимости момента M и частоты вращения от времени при $M_c = 0$ (*а*); $M_c = 1$ (*б*); $M_c = 1{,}12$ (*в*); $M_c = 1{,}39$ (*г*); $M_c = 1{,}45$ (*д*); $M_c = 1{,}455$ (*е*)

($\omega_x = \omega_1 = 1{,}0$). В этом случае $U_{x1} = U_{u1} = U_{1m}\cos\alpha_0 = \text{const}$; $U_{y1} = U_{v1} = U_{1m}\sin\alpha_0 = \text{const}$. Рассмотрим, например, математическую модель, составленную для системы уравнений (13.12) в синхронно вращающейся системе координат. Для этого в (13.12) подставим $\omega_x = 1{,}0$. Структурная схема модели показана на рис. 13.4. Усилитель В1, три потенциометра П1—П3 и диоды позволяют моделировать знакопеременный статический момент нагрузки на валу двигателя. С помощью делителей $Д_1$—$Д_9$ набирают соответствующие коэффициенты перед переменными: $Д_1 = \alpha_1'$; $Д_2 = k_2\alpha_1'$; $Д_3 = \alpha_1'$; $Д_4 = k_2\alpha_1'$, $Д_5 = \alpha_2'$, $Д_6 = k_1\alpha_2'$, $Д_7 = \alpha_2'$, $Д_8 = k_1\alpha_2'$, $Д_9 = 1/T_j$. Операционные усилители *1*, *3*, *5*, *7*, *10* являются интеграторами, и с их помощью решаются уравнения, записанные относительно первых производных для потокосцеплений

Ψ_{u1}, Ψ_{v1}, Ψ_{u2}, Ψ_{v2} и частоты вращения ω. Выходной сигнал с этих усилителей позволяет установить значение и характер изменения потокосцеплений и частоты вращения. Операционный усилитель *9* является сумматором. Он позволяет вычислить разность между электромагнитным и статическим моментами. Посредством блоков перемножения *Н1 — Н4* получают произведения частоты вращения и потокосцеплений. Блоки *2, 4, 6, 8, 11* выполняют функции инверторов. С помощью этой модели (рис. 13.4) можно решить ряд задач, например определить влияние статического момента нагрузки, момента инерции, параметров электродвигателя и т. д. на электромеханические переходные процессы.

На рис. 13.5 показаны зависимости частоты вращения и электромагнитного момента во времени при различных значениях $M_с$ для двигателя МАПI-21,5. Анализ осциллограмм пуска от пуска АД без нагрузки (рис. 13.5, *а*) и до пуска под нагрузкой, превышающей значение пускового момента (рис. 13.5, *е*), показывает следующее:

1. Время пуска увеличивается от 0,086 с при $M_с = 0$ до 0,30 с при $M_с = 1{,}40$.

2. Ударный электромагнитный момент во время пуска достигает своего максимума при всех нагрузках на валу примерно в одно и то же время $t = 0{,}016$ с. Максимальное значение ударного электромагнитного момента изменяется в зависимости от нагрузки незначительно от 2,62 при $M_с = 0$ до 2,88 при $M_с = 1{,}455$. Так как максимум ударного электромагнитного момента при пуске достигается за очень малый промежуток времени (в течение одного-двух периодов), то частоту вращения ротора в этом интервале можно считать постоянной. Тогда появление подобных пиков в моменте объясняется условиями взаимодействия токов коммутации при включении двигателя в сеть. Это подтверждается тем, что при всех нагрузках электромагнитный момент достигает своего ударного значения за один и тот же промежуток времени, несмотря на то что характер изменения частоты вращения при различных нагрузках неодинаков. Таким образом, ударные моменты АД с достаточным приближением можно определять при условии постоянства частоты вращения ротора аналитическими способами.

3. Установившиеся значения частоты вращения изменяются относительно синхронной от 1,0 ($M_с = 0$) до 0,757 ($M_с = 1{,}45$). При $M_с = 1{,}455$ пуск АД невозможен. При подаче напряжения частота вращения ротора начинает колебаться с затуханием и становится равной нулю.

4. Увеличение нагрузки на валу двигателя приводит к увеличению пульсаций момента, которые имеются в течение времени достижения ротором частоты вращения 0,4—0,5 синхронной. В конце переходного процесса наблюдаются незначительные колебания момента, которые с увеличением нагрузки уменьшаются, а затем исчезают.

На рис. 13.6 приведены зависимости электромагнитного момента и частоты вращения от времени при различных значениях момента инерции для электродвигателя АР-53-6. Анализируя эти зависимости, отметим, что с увеличением момента инерции привода количество значительных по амплитуде бросков электромагнитного момента в начале переходного процесса увеличивается, колебания частоты вращения и электромагнитного момента вблизи синхронной частоты уменьшаются. Это объясняется тем, что ко-

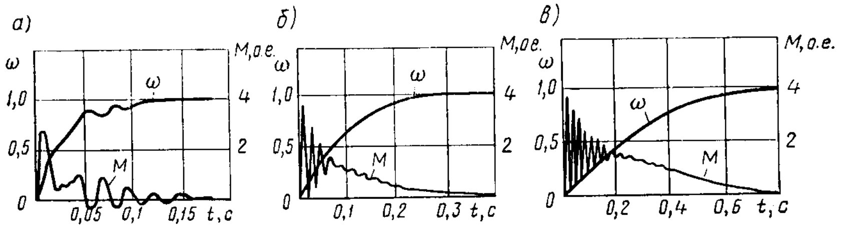

Рис. 13.6. Зависимости электромагнитного момента и частоты вращения от времени при моментах инерции: $T_J = 0{,}5$ (*а*); $T_J = 2$ (*б*); $T_J = 5$ (*в*)

эффициенты затухания свободных составляющих электромагнитного момента при малой частоте вращения малы.

Таким образом, пуск АД при наличии на его валу значительных дополнительных маховых масс протекает неблагоприятно, так как изменение электромагнитного момента носит колебательный характер со значительными амплитудами и медленным затуханием.

При уменьшении суммарного момента инерции количество пиков электромагнитного момента в начале переходного процесса уменьшается, но резко увеличиваются колебания момента и частоты вращения вблизи синхронной частоты. Из зависимостей (рис. 13.6) видно, что длительность переходного режима (времени пуска) возрастает почти пропорционально увеличению суммарного момента инерции. Ударные значения переходного момента в пусковом режиме при суммарных моментах инерции, превышающих в 2—5 раз момент инерции ротора, можно практически считать постоянными.

При малых маховых массах (меньших $2J$ ротора) уменьшение момента инерции приводит к уменьшению ударного момента, так как при малых маховых массах ротор получает большое ускорение и за время, когда момент достигает своего максимума, частота вращения успевает измениться весьма существенно. При этом возрастают коэффициенты затухания медленнозатухающих свободных составляющих переходного момента, что приводит к более быстрому затуханию электромагнитного переходного процесса и к уменьшению ударных моментов.

Исследование влияния параметров АД на протекание переходных процессов легко провести на модели (см. рис. 13.4), варьируя значениями коэффициентов, набранных на делителях $Д_1$ — $Д_9$.

Изменить эти коэффициенты следует согласно тому, какое предполагается изменение активных сопротивлений обмоток статора и ротора в отдельности или вместе. Расчеты показали, что при увеличении активного сопротивления обмотки статора затухание электромагнитных процессов происходит быстрее, влияние их на электромеханические переходные процессы уменьшается. Это приводит к уменьшению пульсаций в кривой момента и более плавному нарастанию частоты вращения. При малых значениях активного сопротивления обмотки ротора и пуске АД без нагрузки наблюдается разгон двигателя до сверхсинхронной частоты вращения. Ударные значения моментов уменьшаются при увеличении активных сопротивлений как статорных, так и роторных обмоток.

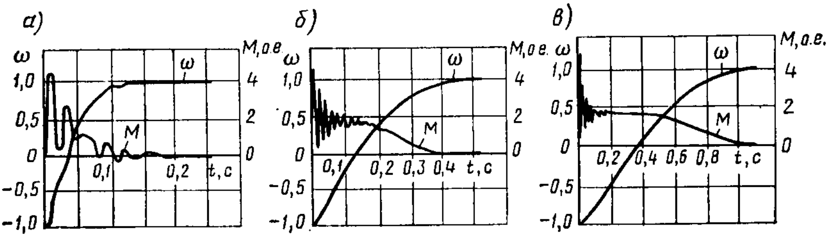

Рис. 13.7. Зависимость момента и частоты вращения от времени при реверсе двигателя: $T_J = 0{,}5$ (*а*); $T_J = 2$ (*б*); $T_J = 5$ (*в*)

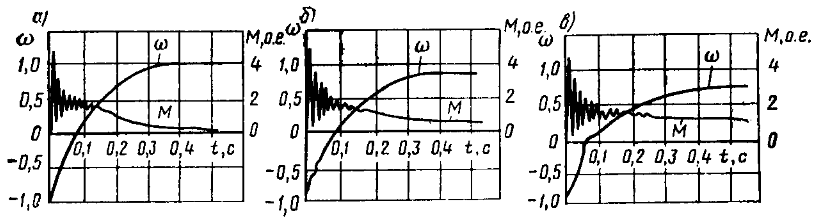

Рис. 13.8. Зависимость момента и частоты вращения от времени при $M_c = 0{,}5$ (*а*); $M_c = 1$ (*б*); $M_c = 1{,}45$ (*в*)

С помощью АВМ можно исследовать не только влияние параметров привода и двигателя на электромеханические переходные процессы АД при пуске, но также влияние этих параметров на переходные процессы при реверсе электродвигателя и его торможении. Чтобы осуществить с помощью математической модели реверс двигателя, достаточно задать значение частоты ω_0 вращения ротора на операционном усилителе 10 (рис. 13.4).

Зависимости электромагнитного момента и частоты вращения ротора от времени при различных значениях моментов инерции и нагрузки на валу при реверсе двигателя АР-53-6 приведены на рис. 13.7, 13.8. Анализ зависимостей показывает, что при увеличении момента инерции (рис. 13.7) количество пульсаций электромагнитного момента возрастает. Максимальные броски моментов при реверсе АД достигают особенно больших значений. Как и при пуске, в конце переходного процесса при малых моментах инерции наблюдаются колебания электромагнитного момента и частоты вращения около установившихся значений, сглаживающиеся по мере увеличения момента инерции. В режиме реверса АД даже при малых моментах инерции наблюдается постоянство ударного момента. Объясняется это тем, что в начальный момент переходного режима ротор сохраняет постоянство частоты вращения дольше из-за приобретенной приводом кинетической энергии.

При реверсе (рис. 13.8) увеличение момента нагрузки приводит к более медленным затуханиям пульсаций электромагнитного момента, чем при пуске (см. рис. 13.5). Это объясняется тем, что ротор двигателя под действием его тормозного электромагнитного момента и момента сопротивления резко замедляется, а вращение ротора в обратную сторону происходит с небольшим (в зависимости от $M_с$) ускорением и колебаниями. Нагрузка на валу АД в этом случае не влияет на значение ударного момента. Амплитуда пульсаций момента при реверсе значительно больше, чем при пуске АД.

Влияние параметров на переходные процессы, возникающие при реверсе АД, характеризуется тем, что увеличение активных сопротивлений обмотки фазы статора ведет к резкому уменьшению ударных значений момента и к увеличению времени реверса двигателя. Изменение же активных сопротивлений обмотки ротора действует наоборот — при увеличении сопротивления увеличиваются пульсации момента и уменьшается время реверса.

ГЛАВА 14. МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННЫХ МАШИН

§ 14.1. Общая характеристика устойчивости синхронных машин

Одно из основных свойств, отличающих СМ от других электрических машин, — строгое соответствие частоты вращения ротора частоте напряжения сети, к которой она подключена. Однако при работе СМ от сети с заданным напряжением и частотой может возникнуть возмущение нормального режима вследствие изменения параметров самой машины и напряжения на зажимах обмоток, а также моментов на валу. Переходный процесс, сопровождающий возмущение, может либо заканчиваться установлением нового нормального режима, либо нормальный режим оказывается невозможным. В соответствии с этим все нормальные режимы синхронной работы разделим на две категории. Если в результате возникшего возмущения исходного режима устанавливается новый нормальный режим, то исходный режим называется *устойчивым*; если же после возмущения нормальный режим невозможен, то — *неустойчивым*.

Возможны два вида возмущений: 1) величина сколь угодно мала; 2) величина конечна. Устойчивость при малых возмущениях называется *устойчивостью в малом* или *статической устойчивостью*; устойчивость при конечных возмущениях — *устойчивостью в большом* или *динамической устойчивостью*.

Так как статическая устойчивость СМ связана с достаточно малыми возмущениями, то она однозначно определяется параметрами исходного режима. Рассмотрение статической устойчивости позволяет определить, осуществим заданный режим работы машины или нет. Аналитические исследования статической устойчивости основаны на анализе линеаризованных уравнений машины. Нарушение статической устойчивости СМ, работающих в сети с постоянными частотой и амплитудой напряжения, может быть трех видов:

1) сползание — апериодическое нарушение устойчивости, характеризующее собой предел статической перегружаемости при определенных соотношениях параметров СМ и нагрузки;

2) самораскачивание — самовозбуждающиеся периодические колебания частоты вращения ротора СМ. Суть этого явления заключается в том, что ротор, получив случайное бесконечно малое возмущение извне, в дальнейшем вращается с колеблющейся частотой;

3) самовозбуждение — электромагнитная неустойчивость, возникающая при работе СМ с емкостным сопротивлением, включенным на ее зажимы; характеризуется самопроизвольным ростом токов и напряжений, что приводит к недопустимому возрастанию тока статора.

При исследовании статической устойчивости определяют параметры машин, исключающие возникновение самораскачивания и самовозбуждения, а также максимальную нагрузку, исключающую сползание. Это позволяет правильно проектировать СМ, работающие устойчиво в заданном режиме работы, или разрабатывать меры по устранению самораскачивания и самовозбуждения.

Нарушение статической устойчивости СМ при сползании или самораскачивании связано с изменением частоты вращения ротора и представляет собой электромеханический переходный процесс. Поэтому поведение СМ в этом случае описывается полной системой уравнения Парка — Горева. Для переменной частоты вращения эта система уравнений нелинейная. При исследовании статической устойчивости СМ достаточно разбить пространство их параметров на области, соответствующие устойчивой и неустойчивой работе. Теоремами Ляпунова строго обосновано, что решить такую задачу можно с помощью линеаризованных уравнений [6, 8].

Динамическая устойчивость зависит не только от условий исходного режима, но и от значения и характера возмущения. В общем случае при исследовании динамической устойчивости частота вращения ротора — переменная величина. Поэтому строгое рассмотрение динамической устойчивости связано с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений [21, 26].

§ 14.2. Линеаризация основных уравнений при исследовании статической устойчивости

Пусть СМ включена в сеть бесконечно большой мощности. Активные и индуктивные сопротивления соединительных проводов при необходимости учитываются соответствующим увеличением r_1 и x_{s1}. За основной режим принимаем работу СМ в режиме двигателя. Принимая возмущения бесконечно малыми и гармоническими, положение ротора в любой момент времени определим углом

$$\Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta, \tag{14.1}$$

где Θ_0 — угол, характеризующий исходный установившийся режим; $\Delta\Theta = \Delta\Theta_m \cos \omega_v \tau$ — малые изменения угла; ω_v — угловая частота колебаний ротора.

Когда угол Θ_0 принимается положительным в режиме двигателя, частота вращения ротора

$$\omega = \omega_1 - d\Delta\Theta/d\tau = \omega_1 + \omega_v \Delta\Theta_m \sin \omega_v \tau, \tag{14.2}$$

где ω_1 — синхронная частота вращения ($\omega_1 = 1{,}0$ о.е.); $d\Delta\Theta/d\tau$ — отклонение частоты вращения ротора от синхронной.

Частоту вращения ротора выразим через скольжение. Принимая скольжение положительным в режиме двигателя, определим в относительных единицах

$$s = (1/\omega_1)(d\Delta\Theta/d\tau) = -\omega_v \Delta\Theta_m \sin \omega_v \tau; \ \omega = 1 - s. \tag{14.3}$$

Отклонение ротора на угол $\Delta\Theta$ от своего исходного положения приведет к соответствующему изменению всех электрических величин, напряжений и потокосцеплений, которые входят в уравнения Парка — Горева. Все величины, входящие в эти уравнения, удобно записать в виде суммы двух составляющих, соответствующих значению угла Θ_0 и изменению угла на $\Delta\Theta$. Поэтому при исследовании режима малых колебаний в исходные уравнения необходимо подставить

$$\begin{gathered}\Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta;\ U_d = U_{d0} + \Delta U_d;\ i_d = i_{d0} + \Delta i_d;\\ \Psi_d = \Psi_{d0} + \Delta\Psi_d;\ U_f = U_{f0} + \Delta U_f;\ \ldots,\end{gathered} \tag{14.4}$$

где величины с индексом 0 характеризуют исходный установившийся режим, величины со знаком Δ обусловлены малыми колебаниями ротора. При этом необходимо иметь в виду, что $M_c = \text{const}$. Подставляя потокосцепления, токи и напряжения из (14.4) в (9.18), получим

$$\left.\begin{aligned}
U_{d0}+\Delta U_d &= d(\Psi_{d0}+\Delta\Psi_d)/d\tau-(1-s)(\Psi_{q0}+\Delta\Psi_q)+\\
&\quad + r_1(i_{d0}+\Delta i_d);\\
U_{q0}+\Delta U_q &= d(\Psi_{q0}+\Delta\Psi_q)/d\tau+(1-s)(\Psi_{d0}+\Delta\Psi_d)+\\
&\quad + r_1(i_{q0}+\Delta i_q);\\
U_{f0}+\Delta U_f &= d(\Psi_{f0}+\Delta\Psi_f)/d\tau+r_f(i_{f0}+\Delta i_f);\\
0 &= d(\Psi_{yd0}+\Delta\Psi_{yd})/d\tau+r_{yd}(i_{yd0}+\Delta i_{yd});\\
0 &= d(\Psi_{yq0}+\Delta\Psi_{yq})/d\tau+r_{yq}(i_{yq0}+\Delta i_{yq}).
\end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

Исключая в (14.5) члены, соответствующие установившемуся режиму, и пренебрегая произведениями приращений величин, имеющих второй порядок малости, получим

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_d &= d\Delta\Psi_d/d\tau-\Delta\Psi_q+s\Psi_{q0}+r_1\Delta i_d;\\
\Delta U_q &= d\Delta\Psi_q/d\tau+\Delta\Psi_d-s\Psi_{d0}+r_1\Delta i_q;\\
\Delta U_f &= d\Delta\Psi_f/d\tau+r_f\Delta i_f;\\
0 &= d\Delta\Psi_{yd}/d\tau+r_{yd}\Delta i_{yd};\quad 0=d\Delta\Psi_{yq}/d\tau+r_{yq}\Delta i_{yq}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Составляющие напряжений ΔU_d и ΔU_q определим следующим образом. При условии, что к обмотке статора подводится симметричная система напряжений, по векторной диаграмме СД (см. рис. 9.2) находим

$$U_d=-U_{1m}\sin\Theta;\quad U_q=U_{1m}\cos\Theta. \tag{14.7}$$

Учитывая (14.4), преобразуем эти равенства:

$$U_{d0}+\Delta U_d=-U_{1m}\sin(\Theta_0+\Delta\Theta)=-U_{1m}\sin\Theta_0\cdot\cos\Delta\Theta-$$
$$-U_{1m}\cos\Theta_0\sin\Delta\Theta=-U_{1m}\sin\Theta_0-U_{1m}\cos\Theta_0\cdot\Delta\Theta;$$
$$U_{q0}+\Delta U_q=U_{1m}\cos(\Theta_0+\Delta\Theta)=U_{1m}\cos\Theta_0\cdot\cos\Delta\Theta-$$
$$-U_{1m}\sin\Theta_0\sin\Delta\Theta=U_{1m}\cos\Theta_0-U_{1m}\sin\Theta_0\cdot\Delta\Theta.$$

Здесь ввиду малого значения $\Delta\Theta$ принято $\cos\Delta\Theta\approx 1$; $\sin\Delta\Theta\approx\approx\Delta\Theta$. Следовательно, составляющие напряжений U_d и U_q, вызванные отклонениями угла на $\Delta\Theta$, будут

$$\Delta U_d=-U_{1m}\cos\Theta_0\cdot\Delta\Theta=-U_{q0}\Delta\Theta;$$
$$\Delta U_q=-U_{1m}\sin\Theta_0\cdot\Delta\Theta=U_{d0}\Delta\Theta. \tag{14.8}$$

Аналогично, подставляя в (7.7) выражения (14.4) и учитывая, что электромагнитный момент определяется (9.38), получим

$$(\Psi_{d0}+\Delta\Psi_d)(i_{q0}+\Delta i_q)-(\Psi_{q0}+\Delta\Psi_q)(i_{d0}+\Delta i_d)=$$
$$=M_c+T_J\cdot d(1-s)/d\tau.$$

Отбрасывая члены, соответствующие установившемуся режиму, пренебрегая произведениями приращений и учитывая, что $ds/d\tau = d^2\Delta\Theta/d\tau^2$, для режима малых колебаний уравнение движения ротора запишем в виде

$$T_J\,(d^2\Delta\Theta/d\tau^2) + \Delta\Psi_d i_{q0} + \Psi_{d0}\Delta i_q - \Delta\Psi_q i_{d0} - \Psi_{q0}\,\Delta i_d = 0. \quad \textbf{(14.9)}$$

Уравнения (14.6) и (14.9) — линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, поэтому они называются линеаризованными. Установившиеся значения величин, входящих в эти уравнения, определяются из решения уравнений установившегося режима.

§ 14.3. Методы исследования статической устойчивости на основе малых гармонических возмущений

Известно несколько методов исследования статической устойчивости СМ.

Точный метод. Наиболее полный и глубокий анализ статической устойчивости можно получить путем исследования уравнений (14.6) и (14.9). Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно какой-либо переменной (например, $\Delta\Theta$) в конечном выражении имеет вид $\Delta\Theta = A_1\exp(p_1\tau) + A_2\exp(p_2\tau) + \ldots + A_n\exp(p_n\tau)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — корни характеристического уравнения, составленного из определителя системы уравнений.

Движение устойчиво, если приращения $\Delta\Theta$ и других переменных остаются во времени сколь угодно малыми величинами. Это выполняется, если все вещественные корни и вещественные части комплексных корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ отрицательны, тогда при $\tau \to \infty$ все приращения переменных стремятся к нулю.

Если хотя бы один вещественный корень или вещественная часть комплексного корня положительны, то при $\tau \to \infty$ приращение $\Delta\Theta \to \infty$ и движение неустойчивое. Таким образом, области устойчивой и неустойчивой работы могут быть определены путем анализа корней характеристического уравнения исходной системы уравнений.

Допустим, что возбуждение не регулируется ($\Delta U_f = 0$). Характеристическое уравнение системы уравнений (14.6) и (14.9) получим, подставляя значения приращений потокосцеплений, выраженные через параметры обмоток и составляющие напряжений (14.8). Раскрывая определитель этой системы уравнений, получим характеристическое уравнение седьмого порядка:

$$a_0p^7 + a_1p^6 + a_2p^5 + a_3p^4 + a_4p^3 + a_5p^2 + a_6p + a_7 = 0. \quad \textbf{(14.10)}$$

Если на роторе располагается только обмотка возбуждения, то порядок характеристического уравнения снижается на две единицы.

Анализируя корни характеристического уравнения, можно определить, что при переходе через границу области устойчивости возможны два случая:

а) один корень характеристического уравнения равен нулю. Это возможно, если в (14.10) свободный член $a_7 = 0$. В этом случае при выходе СМ из области устойчивости наступает апериодическая неустойчивость (сползание);

б) два корня чисто мнимые. В этом случае при переходе СМ через границу устойчивости возникает колебательная неустойчивость.

Таким образом, границу сползания СМ определим из условия

$$a_7 = 0. \qquad (14.11)$$

Установлено, что свободный член a_7 пропорционален синхронизирующему моменту M_{s0} установившегося режима работы СМ. Следовательно, условие (14.11) выполняется, если $M_{s0} = 0$, т. е. граница сползания соответствует пределу статической перегружаемости СМ [5].

В идеализированной машине (при $r_1 = 0$) характеристическое уравнение (14.10) путем несложных преобразований приведем к виду

$$(p^2 + 1)(a_0' p^5 + a_1' p^4 + a_2' p^3 + a_3' p^2 + a_4' p + a_5') = 0. \qquad (14.12)$$

Из анализа уравнения (14.12) следует, что характеристическое уравнение имеет два сопряженных мнимых корня ($p_{1,2} = \pm j$). Таким образом, в СМ при $r_1 = 0$ обнаруживаются незатухающие колебания с синхронной частотой. Как показали исследования А. А. Горева, эти колебания не имеют практического значения из-за малой величины их амплитуды и быстрого затухания в реальной машине, когда $r \neq 0$. Однако наличие такого явления вызывает необходимость рассчитывать статическую устойчивость с учетом реальных значений активных сопротивлений цепи обмотки статора. В то же время, как показали исследования, наличие активного сопротивления может привести к самораскачиванию СМ [6, 14, 21, 30].

Учитывая порядок характеристического уравнения (14.10), при нахождении границ области статической устойчивости удобно пользоваться специальными критериями, дающими возможность определить устойчивость синхронной машины, не вычисляя корни характеристического уравнения. Наиболее распространены критерии Гурвица и Рауса [6, 8]. Они основаны на том, что при определенных соотношениях между коэффициентами характеристического уравнения все его вещественные корни отрицательны, а комплексные корни имеют отрицательную вещественную часть.

В соответствии *с критерием Гурвица для этого необходимо и достаточно, чтобы определители, составленные специальным образом из коэффициентов характеристического уравнения (определители Гурвица), были положительны*. Определители Гурвица составляются следующим образом. В определителе высшего порядка по диагонали сверху вниз и слева направо должны разместиться коэффициенты от a_1 до a_7. В строках определителя слева от диагонали записываются коэффициенты с увеличивающейся нумерацией, а справа от нее — с уменьшающейся. За коэффициентами a_0, a_7 с предельной нумерацией свободные места заполняются нулями. Для характеристического уравнения (14.10) определитель высшего порядка имеет вид

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(14.13)}$$

Последующие определители получаются из предыдущих вычеркиванием правого столбца и нижней строки. Последний определитель равен a_1. Условием отсутствия положительных корней является выполнение неравенств

$$\Delta_7 > 0; \quad \Delta_6 > 0; \ldots; \quad \Delta_1 > 0. \qquad \textbf{(14.14)}$$

Так как $\Delta_7 = a_7\Delta_6$, а $\Delta_6 > 0$, то первый критерий в (14.14) заменим неравенством $a_7 > 0$.

Таблица 14.1

a_0	a_2	a_4	a_6
a_1	a_3	a_5	a_7
$C_{13} = a_2 - a_0a_3/a_1$	$C_{23} = a_4 - a_0a_5/a_1$	$C_{33} = a_6 - a_0a_7/a_1$	
$C_{14} = a_3 - a_1C_{23}/C_{13}$	$C_{24} = a_5 - a_1C_{33}/C_{13}$	a_7	
$C_{15} = C_{23} - C_{13}C_{24}/C_{14}$	$C_{25} = C_{33} - a_7C_{13}/C_{14}$		
$C_{16} = C_{24} - C_{14}C_{25}/C_{15}$	a_7		
$C_{17} = C_{25} - a_7C_{15}/C_{16}$			
a_7			

При расчетах статической устойчивости СМ удобнее пользоваться критерием Рауса из-за единообразия вычислений. Критерий Рауса для уравнения (14.10) запишем в виде табл. 14.1.

Для устойчивости системы, соответствующей характеристическому уравнению (14.10), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительными. Если хотя бы один из этих коэффициентов отрицательный, то устойчивая работа СМ нарушается. Следовательно, граница устойчивой работы СМ соответствует таким значениям параметров уравнения (14.10), при которых один из коэффициентов первого столбца табл. 14.1 обращается в нуль.

При исследовании статической устойчивости СМ необходимо найти пределы изменения основных параметров машины и нагрузки, при которых машина работает устойчиво. Границы устойчивости просто определять в плоскости двух параметров, от которых зависят коэффициенты характеристического уравнения. Для этого выделяются два варьируемых параметра, например угол нагрузки Θ_0 и ток i_{f0}. При заданных значениях Θ_0 и i_{f0} рассчитывают коэффициенты табл. 14.1. Изменяя Θ_0 при $i_{f0} = \text{const}$, расчеты повторяют до тех пор, пока один из коэффициентов первого столбца таблицы не станет отрицательным. При этом возможны два случая, когда первым проходит через нуль и становится отрицательным: 1) свободный член a_7 (точка перехода этого коэффициента через нуль определяет величину Θ_0, соответствующую границе области сползания для данного i_{f0}); 2) любой другой коэффициент первого столбца (это характеризует переход через границу самораскачивания). При этом если первым станет отрицательный коэффициент C_{16} или C_{15}, то шаг изменения Θ_0 выбран большим и его необходимо уменьшить. Расчеты повторяют для различных значений другого варьируемого переменного (в данном случае i_{f0}) и находят области устойчивой и неустойчивой работы в плоскости параметров i_{f0} и Θ_0 при постоянных остальных параметрах СМ. Аналогично рассчитывают границы устойчивости при других варьируемых параметрах.

Так как коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... , a_7 характеристического уравнения — сложные функции параметров СМ, возможности расчета статической устойчивости вручную весьма ограничены. Поэтому расчеты статической устойчивости данным методом целесообразно выполнять на ЦВМ.

Приближенный метод. Наряду с точным методом исследования статической устойчивости при сползании и самораскачивании широко распространен приближенный метод. Этот метод основан на рассмотрении режима малых колебаний ротора и сводится к анализу синхронизирующего и демпферного моментов машины. При малых гармонических колебаниях ротора электромагнитный момент вращения

$$\Delta M = \Delta\Psi_d i_{q0} + \Psi_{d0}\Delta i_q - \Delta\Psi_q i_{d0} - \Psi_{q0}\Delta i_d. \qquad (14.15)$$

Чтобы выразить момент в зависимости от параметров, нагрузки и характера колебаний ротора, необходимо из (14.6) определить токи и потокосцепления и подставить найденные значения в (14.15). Сущность приближения заключается в том, что при малых гармонических колебаниях частоты вращения ротора переходят от дифференциальных уравнений (14.6) к комплексным, характеризующим установившиеся колебания, заменой оператора $d/d\tau$ на $j\omega_\nu$ [6]. Вместо действительных значений $\Delta\Theta$, Δi_d, Δi_q и т. д. необходимо оперировать комплексами $\Delta\dot{\Theta}$, $\Delta\dot{I}_d$, $\Delta\dot{I}_q$ и т. д. Так как действительное значение $\Delta\Theta$ изменяется во времени по закону косинуса, оно соответствует вещественной части комплекса

$$\Delta\dot{\Theta} = \Delta\Theta_m (\cos\omega_\nu\tau + j\sin\omega_\nu\tau). \tag{14.16}$$

Аналогично определяют действительные значения токов и других параметров. Если возбуждение СМ не регулируется, то $\Delta U_f = 0$ и система комплексных уравнений после исключения из нее токов ротора (см. § 9.7) с учетом (14.8) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&-U_{q0}\Delta\dot{\Theta} = j\omega_\nu\Delta\dot{\Psi}_d - \Delta\dot{\Psi}_q + j\omega_\nu\Delta\dot{\Theta}\Psi_{q0} + r_1\Delta\dot{I}_d;\\
&U_{d0}\Delta\dot{\Theta} = j\omega_\nu\Delta\dot{\Psi}_q + \Delta\dot{\Psi}_d - j\omega_\nu\Delta\dot{\Theta}\Psi_{d0} + r_1\Delta\dot{I}_q;\\
&\Delta\dot{\Psi}_d = x_d\,(j\omega_\nu)\Delta\dot{I}_d;\quad \Delta\dot{\Psi}_q = x_q\,(j\omega_\nu)\,\Delta\dot{I}_q,
\end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

где $x_d(j\omega_\nu)$, $x_q(j\omega_\nu)$ — комплексные индуктивные сопротивления машины.

Из совместного решения уравнений (14.17) комплексные значения токов

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\dot{I}_d &= \frac{(-U_{1m}\sin\Theta_0 + j\omega_\nu\Psi_{d0})\,x_q(j\omega_\nu) - (U_{1m}\cos\Theta_0 +}{(j\omega_\nu x_d(j\omega_\nu) + r_1)(j\omega_\nu x_q(j\omega_\nu) + r_1) +}\cdots\\
&\cdots\frac{+ j\omega_\nu\Psi_{q0})(j\omega_\nu x_q(j\omega_\nu + r_1)}{+ x_d(j\omega_\nu)\,x_q(j\omega_\nu)}\cdot\Delta\dot{\Theta};\\
\Delta\dot{I}_q &= \frac{(U_{1m}\cos\Theta_0 + j\omega_\nu\Psi_{q0})\,x_d(j\omega_\nu) + (-U_{1m}\sin\Theta_0 +}{(j\omega_\nu x_d(j\omega_\nu) + r_1(j\omega_\nu x_q(j\omega_\nu) +}\cdots\\
&\cdots\frac{+ j\omega_\nu\Psi_{d0})(j\omega_\nu x_d(j\omega_\nu) + r_1)}{+ r_1) + x_d(j\omega_\nu)\,x_q(j\omega_\nu)}\cdot\Delta\dot{\Theta}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.18}$$

Электромагнитный момент вращения (14.15) примет вид

$$\Delta\dot{M} = (x_d(j\omega_\nu)\,i_{q0} - \Psi_{q0})\,\Delta\dot{I}_d + (\Psi_{d0} - x_q\,(j\omega_\nu)i_{d0})\,\Delta\dot{I}_q. \tag{14.19}$$

Подставляя (14.18) в (14.19), находим комплексный момент:

$$\Delta\dot{M} = (M_s) + j\omega_\nu M_d)\,\Delta\dot{\Theta}. \tag{14.20}$$

Электромагнитный момент вращения как функция времени представляет собой действительную часть (14.20). Учитывая, что $\Delta\Theta$ определяется по (14.16), получим

$$\Delta M = \mathrm{Re}\left[(M_s + j\omega_\nu M_d)\,\Delta\dot{\Theta}\right] = M_s \Delta\Theta_m \cos\omega_\nu\tau -$$
$$- \omega_\nu M_d \Delta\Theta_m \sin\omega_\nu\tau = M_s\Delta\Theta + M_d\,(d\Delta\Theta/d\tau) = \Delta M_s + \Delta M_d. \quad \mathbf{(14.21)}$$

Следовательно, действительный момент ΔM, обусловленный малыми гармоническими колебаниями частоты вращения ротора, состоит из двух составляющих. Первая составляющая момента пропорциональна углу отклонения $\Delta\Theta$ и называется синхронизирующим моментом, а M_s — коэффициентом синхронизирующего момента. Вторая составляющая пропорциональна скорости изменения угла $\Delta\Theta$, т. е. скольжению, и называется демпферным или асинхронным моментом, а M_d — коэффициентом демпферного момента.

В соответствии с (14.20) коэффициенты синхронизирующего и демпферного моментов

$$M_s = \mathrm{Re}\left[\Delta\dot{M}/\Delta\dot{\Theta}\right];\quad M_d = (1/\omega_\nu)\,\mathrm{Im}\left[\Delta\dot{M}/\Delta\dot{\Theta}\right]. \quad \mathbf{(14.22)}$$

Уравнение (14.9) движения ротора с учетом (14.15) и (14.20) после сокращения на $\Delta\Theta$ запишем в виде

$$-T_J\omega_\nu^2 + M_s + j\omega_\nu M_d = 0. \quad \mathbf{(14.23)}$$

Это выражение — характеристическое уравнение системы (14.17) и (14.9), а коэффициенты M_s и M_d в общем случае — функции ω_ν. Приравнивая нулю вещественные и мнимые части (14.23), запишем

$$-T_J\,\omega_\nu^2 + M_s = 0;\quad \omega_\nu\,M_d = 0. \quad \mathbf{(14.24)}$$

Уравнения (14.24) справедливы в том случае, когда вещественная и мнимая части равны нулю при одном и том же значении резонансной частоты $\omega_\nu = \omega_0$. Частота свободных колебаний ротора (резонансная частота) определяется из уравнения $-T_J\,\omega_\nu^2 + M_s = 0$. При определенных условиях частота свободных колебаний ротора может быть равна нулю. Это возможно при условии

$$M_s = 0. \quad \mathbf{(14.25)}$$

В этом случае нарушение статической устойчивости происходит при апериодическом изменении угла Θ; уравнение (14.25) характеризует границу сползания. Граница самораскачивания определяется равенством

$$M_d = 0. \quad \mathbf{(14.26)}$$

Убедимся в справедливости критерия самораскачивания. В соответствии с (14.3) и (14.21) на рис. 14.1 представлены кривые изменения моментов ΔM_d, ΔM_s и скольжения СМ для случая, когда коэффициент демпферного момента отрицателен. Согласно принятым допущениям, момент и скольжение положительны в режиме двигателя. Тогда из рисунка следует, что демпферный момент ΔM_d (14.21), обусловленный гармоническими колебаниями ротора, при $M_d < 0$ всегда действует в направлении движения ротора, т. е. стремится увеличить любые случайные колебания частоты вращения ротора. Если $M_d > 0$, момент ΔM_d изменит знак на противоположный и в любой момент времени будет действовать против направления движения ротора, что препятствует возникновению колебаний [21, 30].

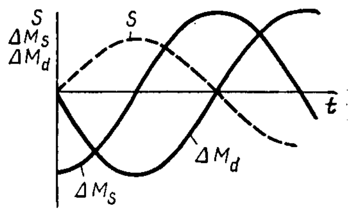

Рис. 14.1. Изменение электромагнитного момента и скольжения при гармонических колебаниях ротора

Таким образом, физическая картина работы СМ в процессе гармонических колебаний позволяет сделать вывод о том, что необходимое и достаточное условие самораскачивания — возникновение отрицательного демпферного момента.

Критерий устойчивости СМ сформулируем так: *СМ работает устойчиво, если коэффициент демпферного момента при резонансной частоте положителен, т. е.*

$$M_d > 0. \qquad (14.27)$$

Для определения влияния какого-либо параметра СМ, например λ, на область устойчивой работы необходимо решить уравнения (14.24) с двумя неизвестными: λ и ω_0. Рассматриваемый параметр λ и резонансная частота ω_0 — положительные вещественные числа, исключение составляет угол Θ_0, который в режиме генератора отрицателен. Остальные параметры СМ считаем известными и постоянными. Варьируя параметрами СМ, можно определить границы устойчивой работы, которые целесообразно строить в плоскости двух параметров, как и при точном методе.

Демпферный момент с учетом активного сопротивления обмотки статора в первой степени [5, 21] представим в виде двух составляющих. Одна составляющая не зависит от активного сопротивления обмотки статора и положительна, другая — обусловлена активным сопротивлением обмотки статора и отрицательна. Следовательно, появление отрицательного демпферного момента объясняется наличием активного сопротивления в цепи обмотки статора. С увеличением активного сопротивления отрицательная составляющая демпферного момента возрастает. Если результирующий демпферный момент отрицателен, то это приводит к возникновению самораскачивания.

Недостаток приближенного метода исследования статической устойчивости — громоздкость выражений для синхронизирующего и демпферного моментов, особенно в части, зависящей от активного сопротивления цепи обмотки статора. Это приводит к тому, что в выражениях для M_s и M_d члены, зависящие от активного сопротивления, учитываются приближенно. Обычно учитывают составляющие моментов, зависящие только от r_1 и реже от r_1^2 [21]. Поэтому приближенным методом удобно пользоваться только при качественной оценке статической устойчивости. Для получения количественных зависимостей, характеризующих границы устойчивой работы, необходимо пользоваться точным методом.

§ 14.4. Влияние параметров на статическую устойчивость при сползании и самораскачивании

Чтобы спроектировать СМ, работающую устойчиво в заданном режиме, необходимо знать влияние конструктивных параметров,

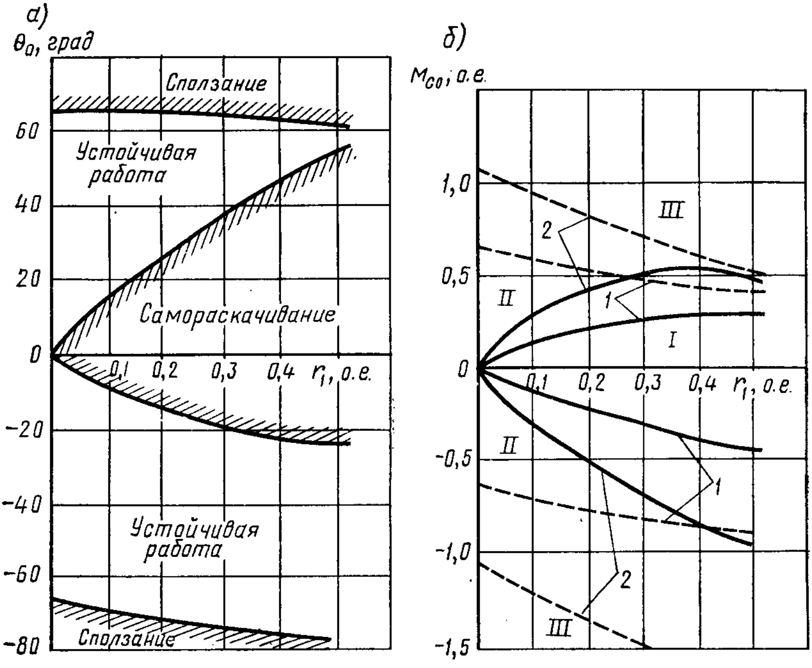

Рис. 14.2. Области устойчивой работы синхронной машины

нагрузки и возбуждения на область статической устойчивости. Исследования показали, что параметры влияют на устойчивость работы следующим образом. Перегрузочная способность (сползание) СМ зависит только от параметров установившегося режима работы. С увеличением магнитного потока возбуждения или воздушного зазора при постоянном потоке возбуждения перегрузочная способность возрастает, а с увеличением активного сопротивления в цепи обмотки статора — уменьшается. Область самораскачивания СМ определяется параметрами установившегося и переходного режимов работы.

Рассмотрим СМ без демпферной обмотки на роторе. Наиболее существенное влияние на сораскачивание СМ оказывает активное сопротивление в цепи обмотки статора. На рис. 14.2, *а* приведены области устойчивой работы СМ ($x_{ad} = 2{,}1$ о.е.; $x_{aq} = 0{,}9$ о.е.; $x_{\sigma 1} = 0{,}1$ о.е.; $x_{\sigma f} = 0{,}2$ о.е.; $r_f = 0{,}015$ о.е.) в координатах Θ_0, r_1. Положительные значения угла Θ_0 и электромагнитного момента M_0 соответствуют работе в режиме двигателя, а отрицательные — в режиме генератора. Из рисунка видно, что рост активного сопротивления в цепи обмотки статора расширяет зону самораскачивания, и наоборот. Более полно нагрузку СМ характеризует электромагнитный момент. Поэтому на рис. 14.2, *б* приведены области устойчивости (*I* — самораскачивание; *II* — устойчивая работа; *III* — сползание) той же СМ, но в координатах M_{c0}, r_1 при двух значениях тока в обмотке возбуждения: i_{f1} — кривые *1* и $i_{f2} > i_{f1}$ — кривые *2*.

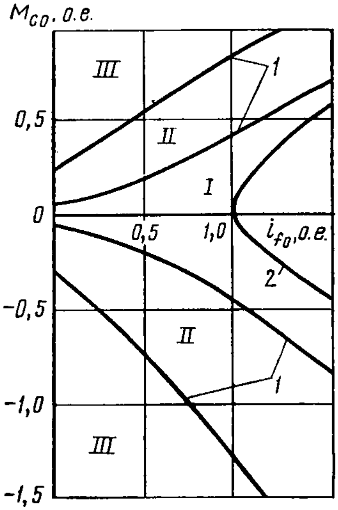

Рис. 14.3. Область самораскачивания синхронной машины в зависимости от нагрузки и тока возбуждения

Увеличение тока возбуждения расширяет область самораскачивания, но при этом растет перегрузочная способность машины. На рис. 14.3 приведена область устойчивой работы (*II*) в координатах M_{c0}, i_{f0} для СМ без демпферных обмоток (кривые 1) на роторе и при их наличии (кривая 2). В режиме перевозбуждения область (*I*) самораскачивания расширяется. Демпферная обмотка на роторе не влияет на границу (*III*) сползания, но смещает область самораскачивания в сторону больших токов возбуждения. Практически самораскачивание возникает в СМ , не имеющих демпферных обмоток на роторе, при неполной нагрузке, а также в машинах небольшой мощности, работающих от сети частотой меньше 50 Гц. Увеличение момента инерции сужает область самораскачивания.

При исследовании статической устойчивости иногда допускают, что переходные процессы в обмотке статора при малых возмущениях практически не влияют на условия самораскачивания и ими можно пренебречь. Тогда трансформаторные ЭДС $d\Delta\Psi_d/d\tau$; $d\Delta\Psi_q/d\tau$; ... и ЭДС скольжения $s\Psi_{d0}$; $s\Psi_{q0}$ в (14.6) приравнивают нулю, благодаря чему степень характеристического уравнения уменьшается на две единицы. Выражения для коэффициентов характеристического уравнения упрощаются, что облегчает расчеты. Исследования показали, что границы сползания не зависят от переходных процессов в обмотке статора, однако переходные процессы в обмотке статора, как правило, значительно расширяют область самораскачивания. Следовательно, при расчетах статической устойчивости СМ необходимо учитывать влияния переходных процессов в обмотке статора.

Область устойчивой работы СМ в значительной степени зависит от параметров демпферных обмоток. Надлежащим выбором параметров демпферных обмоток практически при любых режимах работы можно исключить возможность появления самораскачивания СМ.

Наличие демпферных контуров по продольной оси оказывает преобладающее влияние на возможную область самораскачивания СМ. При полной демпферной обмотке область самораскачивания перемещается в сторону большего возбуждения и большего активного сопротивления, благодаря чему создаются условия полного устранения самораскачивания.

Устранение самораскачивания возможно также и при применении автоматического регулирования возбуждения СМ по току или напряжению статора или по углу Θ нагрузки. На измерительный элемент регулятора может воздействовать также комбинация этих величин или их производных.

§ 14.5. Самовозбуждение синхронной машины при наличии емкости в цепи обмотки статора

Самовозбуждение возможно при работе СГ на длинную линию электропередачи, так как линия электропередачи обладает естественной емкостью относительно земли. Возможны случаи непосредственного включения конденсаторов в цепь статора. При работе СМ на емкостную нагрузку периодически изменяющиеся индуктивности ее обмоток фаз и емкость образуют колебательную систему, в которой при определенном соотношении параметров могут возникнуть самопроизвольные колебания тока с возрастающей амплитудой. Для возникновения самовозбуждения достаточно наличия остаточного намагничивания стали машины. Поэтому самовозбуждение возможно и при работе СМ в асинхронном режиме.

Для обеспечения нормальной работы СМ в системах электропередачи важно знать соотношения параметров цепи «машина — емкостная нагрузка», при которых возникает самовозбуждение, делающее невозможной нормальную работу СМ. Поэтому можно рассматривать только условия возникновения процесса самовозбуждения. Для решения этой задачи необходимо исследовать характеристическое уравнение, составленное для дифференциальных уравнений равновесия напряжений СМ [5, 6, 8].

Рассмотрим работу СМ с последовательно включенным в цепь статора емкостным сопротивлением x_c при условии, что на роторе нет демпферных обмоток и напряжения сети, возбуждения и частота вращения ротора постоянные. При составлении дифференциальных уравнений равновесия напряжений необходимо учитывать, что падение напряжения на сопротивлении x_c определяется интегралом $\int x_c i d\tau$. Чтобы исключить интегралы из уравнений равновесия напряжений обмоток статора, эти уравнения необходимо продифференцировать. Тогда систему уравнений равновесия напряжений обмоток СМ представим в виде [14]

$$\left.\begin{aligned} dU_d/d\tau - \omega U_q &= \frac{d}{d\tau}\left[d\Psi_d/d\tau - \omega\Psi_q + r_1 i_d\right] - \\ &- \omega\left(d\Psi_q/d\tau + \omega\Psi_d + r_1 i_q\right) + x_c i_d; \\ dU_q/d\tau + \omega U_d &= \frac{d}{d\tau}\left[d\Psi_q/d\tau + \omega\Psi_d + r_1 i_q\right] + \\ &+ \omega\left(d\Psi_d/d\tau - \omega\Psi_q + r_1 i_d\right) + x_c i_q; \\ U_f &= d\Psi_f/d\tau + r_f i_f. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(14.28)}$$

Если сеть, к которой подключена СМ, бесконечно мощная, а ротор машины вращается с синхронной частотой, то в (14.28) необходимо подставить $dU_d/d\tau = 0$; $dU_q/d\tau = 0$; $\omega = \omega_1 = 1$.

Характеристическое уравнение системы (14.28) является уравнением пятой степени

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0. \quad \textbf{(14.29)}$$

Коэффициенты (14.29) определяются через параметры

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= x_q x_d' T_{d0}; \\ a_1 &= r_1\left(x_q + x_d'\right) T_{d0} + x_d x_q; \\ a_2 &= \left(2x_q x_d' + x_c x_d' + x_c x_q\right) T_{d0} + r_1^2 T_{d0} + r_1\left(x_d + x_q\right); \\ a_3 &= r_1\left(2x_c + x_q + x_d'\right) T_{d0} + x_c x_d + x_c x_q + 2x_d x_q + r_1^2; \\ a_4 &= \left(x_c - x_q\right)\left(x_c - x_d'\right) T_{d0} + r_1^2 T_{d0} + r_1\left(2x_c + x_d + x_q\right); \\ a_5 &= \left(x_c - x_d\right)\left(x_c - x_q\right) + r_1^2. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(14.30)}$$

Возможность возникновения самовозбуждения определяется наличием корней с положительной вещественной частью в (14.29). Последнее, согласно критерию Гурвица, будет при

$$a_5 < 0; \quad \Delta_4 < 0. \quad \textbf{(14.31)}$$

Предпоследний определитель Гурвица характеристического уравнения

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Первое условие (14.31) означает наличие одного положительного корня в характеристическом уравнении и определяет зону синхронного самовозбуждения. Трехфазные токи самовозбуждения в статоре образуют магнитное поле, которое вращается с синхронной частотой, т. е. неподвижно относительно ротора. Второе условие (14.31) соответствует появлению пары сопряженных комплексных корней с положительной частью или двух положительных действительных корней и характеризует зону асинхронного самовозбуждения. Характер развития самовозбуждения свидетельствует о возникновении биений, присущих асинхронным колебаниям, когда магнитное поле статора перемещается относительно ротора с некоторой скоростью. Границы зон самовозбуждения получим из условий (рис. 14.4): $a_5 = 0$ для зоны *I* (синхронного самовозбуждения); $\Delta_4 = 0$ для зон *II* и *III* (асинхронного самовозбуждения).

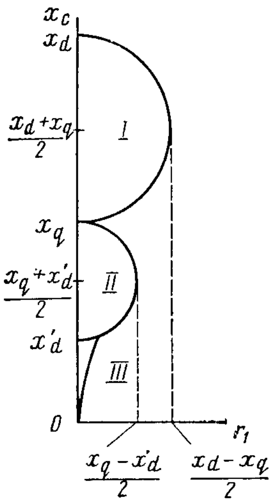

Рис. 14.4. Зоны самовозбуждения явнополюсной синхронной машины без демпферной обмотки

На границе зоны синхронного самовозбуждения характеристическое уравнение содержит один нулевой корень. Условие самовозбуждения

$$a_5 = (x_c - x_d)(x_c - x_q) + r_1^2 = 0, \qquad (14.32)$$

или

$$(x_c - (x_d + x_q)/2)^2 + r_1^2 = [(x_d - x_q)/2]^2. \qquad (14.33)$$

Ясно, что (14.33) — это уравнение окружности с радиусом $(x_d - x_q)/2$ и с координатами центра $x_c = (x_d + x_q)/2$, $r_1 = 0$. На рис. 14.4 изображена половина окружности (зона *I*), соответствующая физически реальному, т. е. положительному, значению активного сопротивления. Окружность пересекает ось координат в точках $x_c = x_d$ и $x_c = x_q$, т. е. при $r_1 = 0$ зона синхронного самовозбуждения определяется значениями емкостного сопротивления внешней сети согласно неравенству

$$x_q < x_c < x_d. \qquad (14.34)$$

Радиус окружности ($a_5 = 0$) определяется максимальным значением активного сопротивления

$$r_{1\,max} = 0{,}5\,(x_d - x_q), \qquad (14.35)$$

при котором возможно появление синхронного самовозбуждения. Если $r_1 > r_{1max}$, то синхронное самовозбуждение не происходит при любых значениях x_c. Граница зоны синхронного самовозбуждения не зависит от постоянной времени T_{d0}, поэтому синхронное самовозбуждение возникает, когда обмотка возбуждения либо замкнута, либо разомкнута

Зоны самовозбуждения *II* и *III*, полученные при $\Delta_4 = 0$

(рис. 14.4), называют зонами асинхронного самовозбуждения. В этом случае частота вращения магнитного поля статора отличается от частоты вращения ротора. Самовозбуждение в этих зонах возможно лишь при замкнутой обмотке возбуждения. Построить зоны асинхронного самовозбуждения можно с помощью любых критериев устойчивости, в том числе и критерия Рауса [6, 14, 52]. Из рис. 14.4 видно, что асинхронное самовозбуждение возникает в случае изменения емкостного сопротивления внешней сети от 0 до x_q при малых значениях r_1.

Для СМ без демпферных обмоток зона *III* узка и ограничивается малыми значениями активного сопротивления, лежащими в пределах значений активного сопротивления цепи обмотки статора, поэтому зоной *III* пренебрегают. В этом случае границу асинхронного самовозбуждения определим приближенно из условия равенства нулю предпоследнего коэффициента характеристического уравнения (14.29):

$$a_4 = 0. \tag{14.36}$$

Зона *II* асинхронного самовозбуждения, найденная по (14.36), ограничивается дугой эллипса. Если постоянная T_{d0} (14.30) достаточно велика ($T_{d0} \geqslant 4$с), то можно принять, что зона *II* ограничивается половиной окружности. Радиус этой окружности равен $(x_q - x'_d)/2$, а центр расположен на оси x_e на расстоянии $(x_q + x'_d)/2$ от начала координат. Максимальное значение активного сопротивления цепи статора, при котором еще возможно асинхронное самовозбуждение,

$$r_{1\max} = (x_q - x'_d)/2. \tag{14.37}$$

При малых значениях постоянной времени обмотки возбуждения зону асинхронного самовозбуждения необходимо находить по точному критерию $\Delta_4 = 0$. В случае синхронного самовозбуждения колебания тока и напряжения статора нарастают медленно, поэтому они поддаются управлению автоматическими регуляторами возбуждения. Асинхронное самовозбуждение наиболее опасно для электрических систем, так как колебания обычно нарастают в течение нескольких периодов до максимального значения, а существующие автоматические регуляторы возбуждения не в состоянии подавить этот быстро развивающийся процесс.

Строгий анализ условий самовозбуждения машины с демпферной обмоткой можно провести по методике [14], т. е. исследуя характеристическое уравнение машины. Характеристическое уравнение для СМ, имеющей на роторе полную демпферную обмотку, при условии постоянства частоты вращения ротора является уравнением седьмой степени. Анализ этого уравнения позволяет определить зоны самовозбуждения и сделать следующие выводы: демпферные обмотки на роторе не влияют на границу зоны синхронного самовозбуждения; мало влияют на границу зоны *II* и существенно расширяют зону *III*. Явление самовозбуждения возникает и при работе АМ с симметричным ротором, когда в цепи обмотки статора включено емкостное сопротивление.

В общем случае явление самовозбуждения машин переменного тока, работающих параллельно сети, нарушает нормальную работу системы. Однако явление самовозбуждения получает и промышленное применение. В АД применяется способ торможения, использующий явление самовозбуждения при замыкании обмотки статора на батарею конденсаторов. В ряде отраслей промышленности используются самовозбуждающиеся генераторы переменного тока (синхронные, реактивные и асинхронные). Специальные генераторы с емкостным самовозбуждением перспективны в силовых импульсных системах [6, 42].

§ 14.6. Расчет динамической устойчивости синхронной машины методом площадей

При конечных возмущениях ротор СМ может испытывать колебания значительной амплитуды. Когда СМ работает параллельно с сетью, колебания угловой частоты вращения ротора происходят относительно синхронной угловой частоты. Одновременно с колебаниями частоты вращения ротора происходят также колебания угла нагрузки.

При конечных возмущениях характер протекания переходного процесса зависит не только от исходного режима машины, но и от вида возмущения. Простейшее возмущение — это внезапное изменение какой-либо величины, остающейся затем постоянной, например внезапное увеличение или снижение нагрузки на валу СД, отключение участка линии передачи между генератором и приемной системой, обусловливающие скачкообразное изменение индуктивности цепи статора, и т. п. На практике встречаются возмущения в виде импульса (кратковременная нагрузка). В общем случае возмущение может иметь сложный характер во времени.

Колебания СМ бывают вынужденные и свободные. *Вынужденные колебания* возникают в тех случаях, когда механический момент на валу не постоянен и содержит пульсирующие составляющие, например при соединении СМ с поршневыми машинами (дизельными двигателями или поршневыми компрессорами). Вынужденные колебания особенно опасны, если их частота близка частоте свободных или собственных колебаний. Возникающий при этом резонанс колебаний может привести машину к выпадению из синхронизма. Для уменьшения вынужденных колебаний СМ снабжают маховиком или ротор машины выполняют с повышенным маховым моментом. Наличие полных демпферных обмоток способствует снижению амплитуды вынужденных колебаний.

Свободные колебания ротора обусловлены самой природой СМ, так как она при работе параллельно с сетью представляет собой колебательную систему. Физическую картину свободных колебаний рассмотрим с помощью статической угловой характеристики, представленной на рис. 14.5,*а*. При постоянной частоте вращения ротора электромагнитный момент СМ уравновешивается моментом сопротивления, приложенным к валу машины. Если это равенство нарушается, то в уравнении равновесия моментов появится динамический момент вследствие изменения угловой частоты вращения ротора.

Пусть момент нагрузки СД быстро увеличился от M_1 до M_2. Под действием $\Delta M = M_2 - M_1$ избыточного момента сопротивле-

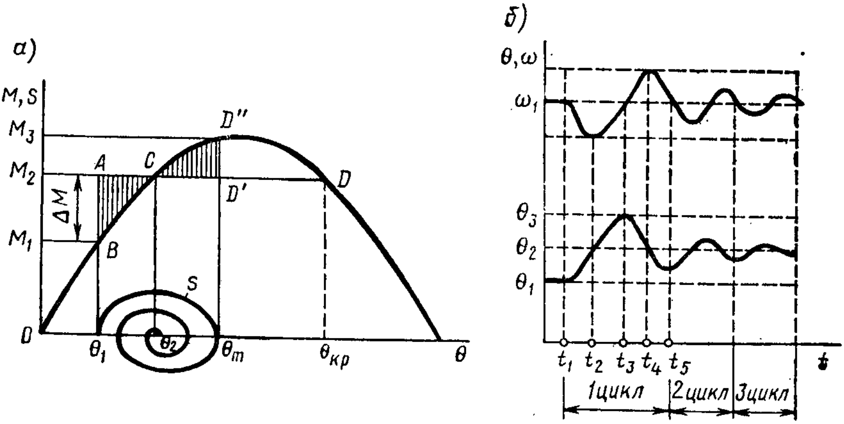

Рис. 14.5. Колебания угловой частоты и угла нагрузки при внезапном изменении момента сопротивления на валу СД двигателя

ния (рис. 14.5,*а*) ротор двигателя тормозится, угол Θ и электромагнитный момент увеличиваются. Запас кинетической энергии вращающихся масс уменьшается. Если бы вращающиеся массы не обладали моментом инерции, то переход к новому установившемуся режиму, характеризуемому углом Θ_2, произошел бы мгновенно. Но вследствие инерции ротор вращается некоторое время с замедленной частотой. В момент времени t_2 (рис. 14.5,*б*) электромагнитный момент возрастает от M_1 до значения M_2, соответствующего углу Θ_2. Однако частота вращения ротора в этот момент меньше синхронной, скольжение s максимальное, угол Θ увеличивается и соответственно увеличивается электромагнитный момент. Под влиянием избыточного положительного момента частота вращения увеличивается. В момент t_3 частота вращения ротора равна синхронной ($s = 0$), электромагнитный момент равен M_3, угол Θ и избыточный положительный момент максимальны. Из-за избыточного электромагнитного момента частота вращения ротора увеличивается выше синхронной (скольжение $s < 0$), угол Θ уменьшается. В момент времени t_4 $\Theta = \Theta_2$, электромагнитный момент $M_2 = M_{c2}$, избыточный момент равен нулю, но $\omega > \omega_1$ и угол Θ продолжает уменьшаться. Если бы на ротор не действовали успокаивающие силы, то угол Θ снизился бы до Θ_1 и в дальнейшем ротор продолжал бы вращаться с колеблющейся частотой бесконечно долго. В СМ имеются успокаивающие силы, уменьшающие амплитуду колебаний ротора, — это демпферные моменты, создаваемые роторными обмотками или массивными частями ротора. Под действием демпферных моментов амплитуда колебаний частоты вращения ротора со временем уменьшается до нуля и наступает установившийся режим, характеризуемый углом Θ_2 нагрузки и электромагнитным моментом $M_2 = M_{c2}$.

При исследовании динамической устойчивости СМ частота вращения ротора — неизвестная переменная величина. Поведение СМ в этих режимах описывается полной системой нелинейных дифференциальных уравнений (9.18) и (7.7), которая решается численными методами на ЦВМ или моделированием на АВМ.

Наиболее простой метод исследования динамической устойчивости — метод площадей, позволяющий в первом приближении определить предельно допустимые возмущения, соответствующие границе динамической устойчивости без расчета исходной нелинейной системы уравнений. Сущность метода в следующем. Определим энергию, расходуемую ротором при торможении:

$$A_{\text{торм}} = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \Delta M d\Theta. \tag{14.38}$$

Представим ее графически в виде площади ABC (рис. 14.5, *а*). Энергия, запасаемая ротором при ускорении,

$$A_{\text{уск}} = \int_{\Theta_2}^{\Theta_3} \Delta M d\Theta \tag{14.39}$$

и численно равна площади $CD'D''$.

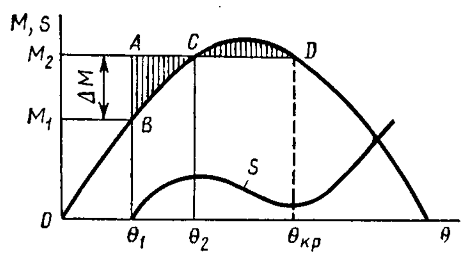

Рис. 14.6. Графическое определение устойчивости режима работы СД при внезапном набросе нагрузки

Если $A_{\text{уск}} = A_{\text{торм}}$, то СД удерживается в синхронизме. В точке D'' вся потерянная ранее кинетическая энергия (рис. 14.5, *а*) оказывается восполненной. При наличии потерь колебания ротора со временем затухают (рис. 14.5, *б*) и зависимость $s = f(\Theta)$ принимает вид спирали (рис. 14.5, *а*). Рассмотрим случай, когда энергия торможения уравновешивается энергией, полученной при ускорении ротора, не в точке D'', а в точке D. Точку D называют критической, так как при дальнейшем увеличении угла Θ на ротор действуют не ускоряющие, а тормозящие силы и двигатель выпадает из синхронизма. Возможен случай, когда $A_{\text{уск}} < A_{\text{торм}}$ (рис. 14.6), зависимость $s = f(\Theta)$ неограниченно растет.

Рассматривая внезапное изменение внешних сил при быстрых изменениях угла Θ, нельзя пренебрегать наведенными токами в обмотках ротора при его перемещении относительно потока реакции якоря. Поэтому для повышения точности расчета динамической устойчивости в первом цикле колебаний необходимо пользоваться динамическими угловыми характеристиками [38]. При расчете последних учитывают влияние электромагнитных переходных процессов на работу СД, а это усложняет расчеты. По мере затухания качаний ротора затухают и свободные составляющие токов в обмотках ротора, поэтому динамическая характеристика СД снижается в сторону статической. Затухание колебаний происходит по сложному закону.

Может оказаться, что после нескольких качаний СД выпадает из синхронизма, так как для нового режима работы он статически неустойчив, хотя динамическая угловая характеристика за счет свободных токов в первые циклы качаний обеспечивает его синхронную работу.

Определим динамическую угловую характеристику СД без демпферной обмотки на роторе. Применяя принцип постоянства потокосцеплений к обмотке ротора, допустим, что при колебаниях частоты вращения свободные токи, возникающие в обмотке ротора, компенсируют изменения продольной составляющей тока статора, а магнитный поток, сцепленный с обмоткой возбуждения, остается постоянным:

$$\Psi_f = x_f i_f + x_{ad} i_d. \qquad \textbf{(14.40)}$$

Тогда из формулы (14.40) находим

$$i_f = (\Psi_f - x_{ad} i_d)/x_f. \qquad \textbf{(14.41)}$$

Потокосцепление обмотки статора по продольной оси

$$\Psi_d = x_d i_d + x_{ad} i_f. \qquad \textbf{(14.42)}$$

При установившемся режиме работы ($\omega = \omega_1 = 1$) и при $r_1 = 0$

$$\Psi_d = U_q = U_{1m} \cos\Theta. \qquad \textbf{(14.43)}$$

Подставляя Ψ_d и i_f в (14.42), получим

$$U_{1m} \cos\Theta = (x_{ad}/x_f)\,\Psi_f + (x_d - x_{ad}^2/x_f)\; i_d, \qquad \textbf{(14.44)}$$

где $(x_{ad}/x_f)\Psi_f = E_d' = \mathrm{const};\ x_d - x_{ad}^2/x_f = x_d'$), тогда

$$U_{1m} \cos\Theta = E_d + x_d i_d \qquad \textbf{(14.45)}$$

или

$$E_d' = U_{1m} \cos\Theta - x_d' i_d. \qquad \textbf{(14.46)}$$

Электродвижущая сила E_d' представляет собой величину, пропорциональную потокосцеплению обмотки возбуждения. В первый момент нарушения режима работы СМ она остается постоянной.

При введении этой ЭДС можно применять одну и ту же схему замещения СМ как в установившемся, так и в переходном режиме работы. Тогда динамическая угловая характеристика СД

$$M = \left(U_{1m} E'_d / x'_d\right) \sin\Theta. \tag{14.47}$$

Это выражение находим из уравнения для электромагнитного момента вращения СД, если пренебречь активным сопротивлением обмотки статора и реактивным моментом, заменяя E_0 на E'_d, а x_d на x'_d. Обычно принимают $E'_d = U_{1m} = 1{,}0$, тогда при $x'_d = 0{,}25$ момент $M_{\max} = 4{,}0$, т. е. СД имеет четырехкратный запас устойчивости по сравнению с расчетами по статической характеристике при $U_{1m} = 1{,}0$; $E_0 = 2{,}0$; $x_d = 2{,}0$. Динамическую устойчивость можно исследовать на основании полной системы дифференциальных уравнений (9.18). Общим методом решения в этом случае будет метод численного интегрирования с использованием вычислительных машин.

§ 14.7. Расчет переходных процессов при исследовании динамической устойчивости на АВМ

При исследовании динамической устойчивости СМ на АВМ возможны различные формы записи полной системы дифференциальных уравнений. Наиболее простая и устойчивая математическая модель получается при использовании дифференциальных уравнений, записанных в координатных осях d и q, жестко связанных с ротором (9.18) и (7.7). Если напряжение, подводимое к обмотке статора, симметрично, то составляющие напряжения по осям d и q представим в виде

$$U_d = -U_{1m} \sin\Theta; \quad U_q = U_{1m} \cos\Theta. \tag{14.48}$$

При электромеханических переходных режимах частота вращения не остается постоянной: $\omega = \omega_1(1 - s)$, причем

$$s = (1/\omega_1)\,(d\Theta/d\tau). \tag{14.49}$$

Тогда уравнения (9.18) равновесия напряжений обмоток статора и ротора и уравнение (7.7) моментов СД при условии, что $\omega_1 = 1$ о.е., запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}
d\Psi_d/d\tau &= -U_{1m}\sin\Theta + (1-s)\,\Psi_q - r_1 i_d;\\
d\Psi_q/d\tau &= U_{1m}\cos\Theta - (1-s)\,\Psi_d - r_1 i_q;\\
d\Psi_f/d\tau &= U_f - r_f i_f;\\
d\Psi_{yd}/d\tau &= -r_{yd} i_{yd}; \quad d\Psi_{yq}/d\tau = -r_{yq} i_{yq};\\
ds/d\tau &= (1/T_J)\,(M_c - \Psi_d i_q + \Psi_q i_d); \quad d\Theta/d\tau = s,
\end{aligned}\right\} \tag{14.50}$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
i_d &= \Psi_d/x_d - (x_{ad}/x_d)(i_f + i_{yd});\\
i_q &= \Psi_q/x_q - (x_{aq}/x_q)\, i_{yq};\\
i_f &= \Psi_f/x_f - (x_{ad}/x_f)(i_d + i_{yd});\\
i_{yd} &= \Psi_{yd}/x_{yd} - (x_{ad}/x_{yd})(i_d + i_f);\\
i_{yq} &= \Psi_{yq}/x_{yq} - (x_{aq}/x_{yq})\, i_q.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.51)
$$

Структурная схема (рис. 14.7) математической модели СД реализует операции, необходимые для решения системы (14.50). Она

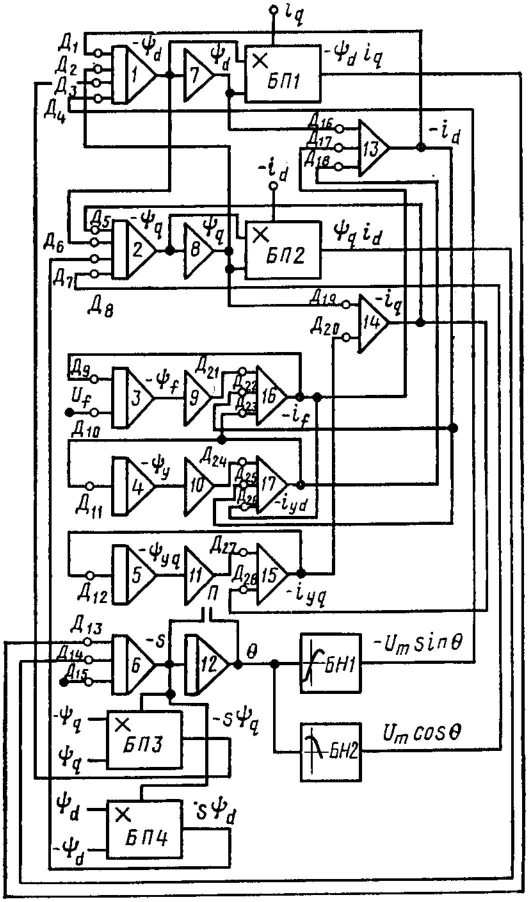

Рис. 14.7. Структурная схема математической модели СД

содержит интеграторы *1—6*, *12*, инверторы *7—11*, сумматоры *13—17*. Произведения токов и потокосцеплений, скольжения и потокосцеплений получают с помощью блоков *Н1—Н4* перемножения.

Изменения угла Θ, возникающие при колебаниях ротора СД, реализуются нелинейными типовыми блоками синуса и косинуса. Для расширения диапазона изменения угла Θ схема дополнена устройством периодизации угла, собранным на высокочувствительном поляризованном реле *П*.

Для иллюстрации результатов решения на АВМ переходных процессов СД на рис. 14.8 приведены осциллограммы изменений угла Θ и скольжения s при внезапном приложении нагрузки M_c на вал двигателя. Эти осциллограммы сняты при постоянном напряжении обмоток статора и номинальном напряжении обмотки возбуждения. Длительность возмущающего воздействия, которым является внезапное приложение момента M_c нагрузки на валу двигателя, составляет $\Delta t = 2{,}2$ с. Момент нагрузки показан в виде прямоугольника сплошной линией.

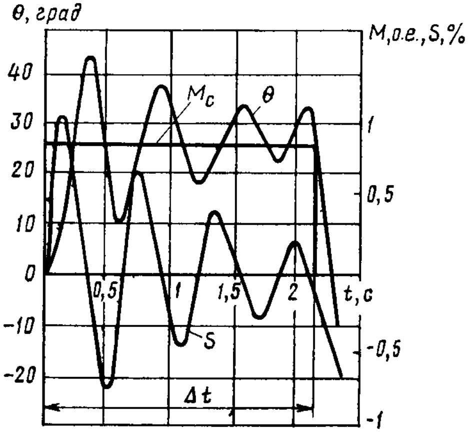

Рис. 14.8. Переходный процесс синхронного двигателя при $U_1 = \text{const}$; $U_f = U_{f\text{ном}}$; $M_c = 0{,}8$ о. е.; $\Delta t = 2{,}2$ с

Анализируя процесс, изображенный на рис. 14.8, видим, что при внезапном приложении нагрузки возникают колебания угла Θ и скольжения s, которые уменьшаются с течением времени. При внезапном снятии нагрузки колебания угла Θ и скольжения меняют свой знак. Амплитуды колебаний угла Θ и скольжения s в течение времени действия нагрузки на валу уменьшаются. Следовательно, СД не выпадает из синхронизма. Задавая значения моментов нагрузки на валу с помощью делителя $Д_{15}$ и меняя длительность их действия, установим, при каких условиях СД выпадает из синхронизма и когда его работа неустойчива. Время действия момента задают с помощью дополнительного реле, которое можно включать и выключать в любой момент времени.

Осциллограммы кривых Θ и s (рис. 14.8) представляют собой выходные сигналы с усилителей 6 и 12. Если необходимо знать характер изменения потокосцеплений или токов, то достаточно снять осциллограммы выходных сигналов с усилителей 1—5, 13—17. Иногда при исследовании динамической устойчивости и втягивания в синхронизм можно пренебречь влиянием электромагнитных переходных процессов и рассматривать только механические переходные процессы с учетом статических механических характеристик. При этом исходным уравнением является уравнение (7.7) движения ротора. Обычно при исследовании уравнения движения ротора считают, что электромагнитный момент вращения, развиваемый СМ, представляется суммой среднего и пульсирующего моментов (11.22). При исследовании динамической устойчивости и втягивания в синхронизм рассматриваются процессы, протекающие при небольших отклонениях частоты вращения ротора от синхронной. В этом случае принимаем, что пульсирующая составляющая момента $M(\Theta)$ не зависит от скольжения и определяется при установившемся синхронном режиме работы. Среднюю составляющую момента СМ, имеющей на роторе полную демпферную обмотку, при изменении скольжения в пределах от 0 до 0,1 представим в виде

$$M_{\text{ср}} = K d\Theta / d\tau, \tag{14.52}$$

где K — коэффициент пропорциональности.

Тогда уравнение движения ротора

$$T_J (d^2\Theta/d\tau^2) + K (d\Theta/d\tau) + M(\Theta) = M_{\text{с}}. \tag{14.53}$$

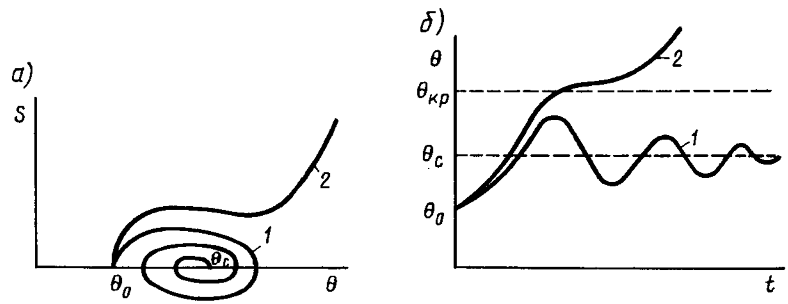

Рис. 14.9. График движения ротора в устойчивом (*1*) и неустойчивом (*2*) режимах

Выражение (14.53) — нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, его можно исследовать с помощью построения семейства интегральных кривых на фазовой плоскости. Так как время τ не входит явно в (14.53), его можно исключить. Тогда порядок уравнения (14.53) снижается на единицу. Принимая скольжение за новую переменную, запишем

$$d\Theta/d\tau = s; \quad d^2\Theta/d\tau^2 = ds/d\tau = s\,(ds/d\Theta), \tag{14.54}$$

тогда (14.53) представим в виде

$$T_J\, s\,(ds/d\Theta) + Ks + M(\Theta) = M_{\text{с}}, \tag{14.55}$$

или

$$ds/d\Theta = [M_{\text{с}} - Ks - M(\Theta)]/(T_J\, s). \tag{14.56}$$

Наиболее наглядно решение (14.56) выглядит в виде семейства интегральных кривых на фазовой плоскости (в координатах s, Θ).

Если непосредственное интегрирование (14.56) невозможно, то семейство интегральных кривых можно построить графически или найти с помощью АВМ. При решении уравнения движения ротора неявнополюсного СД в первом приближении предположим, что электромагнитный момент имеет вид

$$M(\Theta) = M_m \sin\Theta. \tag{14.57}$$

Решение (14.56) на АВМ можно получить в виде осциллограмм как в фазовых координатах s, Θ (рис. 14.9, *а*), так и во времени (рис. 14.9, *б*). Анализ процесса на фазовой плоскости позволяет наглядно представить физику процесса.

§ 14.8. Вынужденные и свободные колебания

Уравнение движения ротора можно использовать при анализе вынужденных и свободных колебаний СМ. В этом случае удобно пользоваться линеаризованными уравнениями, так как при исследовании колебаний линеаризация не вносит существенной погрешности даже при значительных амплитудах колебаний угла Θ. Для неявнополюсного СД момент сопротивления уравновешивается суммой следующих моментов: $T_J\, d^2\Delta\Theta/d\tau^2$—динамического; $M_m \sin\Theta_0$ — электромагнитного; $M_s\Delta\Theta$ — синхронизирующего; $M_d d\Delta\Theta/d\tau$ — демпферного.

Момент сопротивления на валу содержит постоянную M_{c0} и периодические $M_{c\nu}$ составляющие:

$$M_c = M_{c0} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} M_{c\nu} \cos(\omega_\nu \tau + \xi_\nu), \tag{14.58}$$

где ω_ν, ξ_ν — угловая частота и фазный угол гармонических составляющих момента сопротивления.

Следовательно, уравнение движения ротора в режиме синусоидальных колебаний частоты вращения

$$T_J\, d^2\Delta\Theta/d\tau^2 + M_d d\Delta\Theta/d\tau + M_s\Delta\Theta + M_m \sin\Theta_0 =$$

$$= M_{c0} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} M_{c\nu} \cos(\omega_\nu\tau + \xi_\nu). \tag{14.59}$$

Если рассматривать такие колебания частоты вращения ротора, при которых средний момент сопротивления за один оборот остается постоянным и уравновешивает электромагнитный момент вращения, то (14.59) примет вид

$$T_J \frac{d^2\Delta\Theta}{d\tau^2} + M_d \frac{d\Delta\Theta}{d\tau} + M_s\Delta\Theta = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} M_{c\nu} \cos(\omega_\nu \tau + \xi_\nu). \tag{14.60}$$

В общем случае решение уравнения (14.60), позволяющего определить амплитуду и частоту колебаний угла $\Delta\Theta$, состоит из частного решения при установившемся режиме, определяющего вынужденные колебания ротора,

$$\Delta\Theta_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{M_{c\nu}\sin(\omega_\nu \tau + \xi_\nu - \varphi_\nu)}{\omega_\nu \sqrt{M_d^2 + (\omega_\nu T_J - M_s/\omega_\nu)^2}} \qquad (14.61)$$

и из решения однородного уравнения, определяющего свободные затухающие колебания ротора при воздействии возмущающего импульса,

$$\Delta\Theta_2 = A_1 \exp(p_1\tau) + A_2 \exp(p_2\tau). \qquad (14.62)$$

Рассмотрим свободные колебания ротора при отсутствии затухания, т. е. при $M_d = 0$, тогда (14.60) представим в виде

$$d^2\Delta\Theta/d\tau^2 + (M_s/T_J)\,\Delta\Theta = d^2\Delta\Theta/d\tau^2 + \omega_0^2\Delta\Theta = 0, \qquad (14.63)$$

где $\omega_0 = \sqrt{M_s/T_J}$ — угловая частота свободных механических колебаний.

Решение уравнений (14.63) относительно $\Delta\Theta$ имеет вид

$$\Delta\Theta_2 = A_1 \sin\omega_0\tau + A_2\cos\omega_0\tau, \qquad (14.64)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, определяемые из начальных условий.

Скорость изменения угла

$$d\Delta\Theta_2/d\tau = \omega_0 A_1 \cos\omega_0\tau - \omega_0 A_2 \sin\omega_0\tau.$$

Принимая для начального момента $\tau = 0$, получим $\Delta\Theta_2 = \Delta\Theta_m$; $d\Delta\Theta_2/d\tau = 0$, откуда $A_1 = 0$; $A_2 = \Delta\Theta_m$. Следовательно,

$$\Delta\Theta_2 = \Delta\Theta_m \cos\omega_0\tau. \qquad (14.65)$$

Из (14.65) следует, что колебания ротора имеют гармонический вид и амплитуда колебаний $\Delta\Theta_m$ равна тому максимальному углу, на который ротор выводится внешним воздействием из своего положения равновесия. Частота свободных колебаний ротора

$$f_0 = \omega_0(2\pi) = [1/(2\pi)]\sqrt{M_s/T_J}, \qquad (14.66)$$

период свободных колебаний

$$T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{T_J/M_s}. \qquad (14.67)$$

Если демпферный момент не равен нулю, то частоту и коэффициент затухания свободных колебаний определим из выражения

$$d^2\Delta\Theta/d\tau^2 + (M_d/T_J)(d\Delta\Theta/d\tau) + \omega_0\Delta\Theta = 0, \qquad (14.68)$$

характеристическое уравнение которого

$$p^2 + (M_d/T_J)\,p + \omega_0 = 0 \qquad (14.69)$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{св}}, \qquad (14.70)$$

где $\alpha = M_d/(2T_J)$ — коэффициент затухания; $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота свободных колебаний.

Этими формулами можно пользоваться, если известны M_s и M_d. Необходимо иметь в виду, что коэффициенты синхронизирующего и демпферного моментов — функции частоты свободных колебаний. Как видно из (14.61), частота вынужденных колебаний ротора равна ω_ν, поэтому при

$$\omega_\nu = \omega_0 = \sqrt{M_s/T_J} \tag{14.71}$$

наступает резонанс колебаний.

Модуль резонанса (т. е. коэффициент возрастания колебаний) при отсутствии успокоения равен бесконечности. Наличие демпферного момента существенно снижает модуль колебаний, особенно в наиболее опасной зоне, когда $\omega_0/\omega_\nu = 0{,}8 \div 1{,}2$.

§ 14.9. Критерий втягивания в синхронизм

Синхронные двигатели запускаются в ход в асинхронном режиме. Работая в процессе пуска как асинхронный, СД должен развить частоту вращения, близкую к синхронной, и после включения тока возбуждения войти в синхронизм. Втягивание в синхронизм — это тот промежуточный режим работы за время пуска, когда СД уже перестал работать в чисто асинхронном режиме, но еще не работает в синхронном. Период втягивания в синхронизм начинается с момента подачи напряжения на обмотку возбуждения и заканчивается при достижении двигателем синхронной частоты вращения.

Условия втягивания в синхронизм характеризуются входным моментом $M_{вх}$. Обычно при проектировании СД используются специальные критерии синхронизации, основанные на определении критического скольжения, которое изменяется в широких пределах в зависимости от нагрузки на валу двигателя. В качестве критерия втягивания в синхронизм при проектировании и эксплуатации СД следует принимать значение $M_{вх}$, равное максимальному моменту сопротивления на валу, при котором двигатель достигает синхронной частоты вращения, работая от сети с номинальным напряжением и частотой. Для данной конструкции СД момент $M_{вх}$ зависит лишь от момента инерции вращающихся масс.

Чтобы проанализировать влияние различных параметров СД на втягивание в синхронизм, необходимо исследовать электромеханические переходные процессы (14.50). С практической точки зрения важно, втянется двигатель в синхронизм при определенной нагрузке или нет. При синхронной частоте вращения средняя составляющая момента (11.46) отрицательна или равна нулю. Следовательно, она не может быть причиной втягивания в синхронизм даже при работе в режиме XX, причина втягивания СД в синхронизм — пульсирующая составляющая момента при условии, что ротор под действием среднего момента достигает частоты вращения, близкой к синхронной.

Если момент сопротивления M_c меньше максимального момента, развиваемого двигателем в синхронном режиме, то СД втягивается в синхронизм. При этом избыточный момент, развиваемый СД в асинхронном режиме, должен быть достаточным для того, чтобы придать ротору ускорение до синхронной частоты. Руководствуясь этими соображениями, можно вывести упрощенный критерий втягивания в синхронизм. Если пренебрегать электромагнитными переходными процессами, то для исследования процесса синхронизации достаточно рассмотреть уравнение движения ротора, записанное в виде (14.53). В первом приближении считаем, что средняя составляющая момента при втягивании в синхронизм полностью уравновешивает момент сопротивления. Тогда (14.53) упростится и примет вид

$$T_J\, d^2\Theta/d\tau^2 + M_m \sin\Theta = 0. \qquad \textbf{(14.72)}$$

Умножим обе части уравнения (14.72) на $d\Theta$, тогда получим

$$T_J\, (d^2\Theta/d\tau^2)\, d\Theta = -M_m \sin\Theta \cdot d\Theta \qquad \textbf{(14.73)}$$

или

$$0{,}5T_J\, d\,(d\Theta/d\tau)^2 = M_m d\,(\cos\Theta). \qquad \textbf{(14.74)}$$

Так как $d\Theta/d\tau = s$, то

$$0{,}5T_J\, d\,(s)^2 = M_m d\,(\cos\Theta). \qquad \textbf{(14.75)}$$

Из (14.75) следует, что изменение квадрата скольжения маховых масс за период втягивания в синхронизм равно работе синхронизирующих сил. Эта работа при изменении угла нагрузки, например от Θ_1 до Θ_2, пропорциональна заштрихованной площади (рис. 14.10). Максимальная работа равна всей площади, ограниченной кривой.

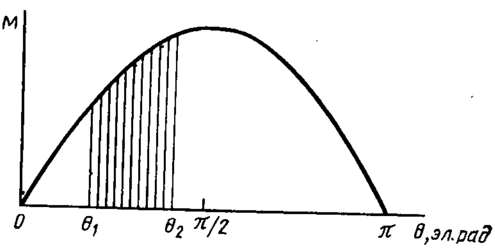

Рис. 14.10. Угловая характеристика СД

Обозначим наибольшее скольжение, при котором еще возможно втягивание в синхронизм, через $s_{кр}$. Для втягивания двигателя в синхронизм максимальная работа синхронизирующих сил должна быть достаточной, чтобы придать ротору ускорение от скольжения $s = s_{кр}$ до $s = 0$.

Интегрируя левую часть уравнения (14.75) в пределах $s = s_{кр} \div 0$, а правую часть — в пределах $\Theta=0 \div \pi$, получим $-0{,}5 \times T_J s_{кр}^2 = -2M_m$, откуда

$$s_{кр} = 2\sqrt{M_m/T_J}. \qquad \textbf{(14.76)}$$

Это уравнение дает возможность определить, что под действием среднего электромагнитного момента ротор должен достичь частоты вращения не меньше $(1 - s_{кр})\omega_1$, тогда двигатель втянется в синхронизм. Уравнение (14.76) получено при допущении, что средний электромагнитный момент уравновешивает момент сопротивления, а реактивный момент равен нулю. Реактивный момент на величину $s_{кр}$ не влияет, так как его работа за период $\Theta = 0 \div \pi$ равна нулю. Однако равенство среднего момента и момента сопротивления имеет место только при скольжении $s_{кр}$. При изменении скольжения от $s_{кр}$ до 0 средний момент изменяется от M_c до 0. Момент сопротивления в этом случае можно считать постоянным, так как частота вращения ротора изменяется незначительно. Поэтому при значениях скольжения меньше $s_{кр}$ появляется дополнительная составляющая момента, обусловленная разностью среднего момента и M_c, которая препятствует втягиванию в синхронизм. Чтобы учесть эту дополнительную составляющую момента, необходимо оперировать с (14.53). Домножая его на $d\Theta$, после преобразования получим

$$d(s)^2 = (2M_m/T_J)\, d(\cos\Theta) + (2/T_J)(M_c - Ks)\, d\Theta. \qquad (14.77)$$

Для решения (14.77) необходимо знать зависимость $s = f(\Theta)$. Интегрируя (14.75), найдем $0{,}5T_J s^2 \approx M_m \cos\Theta + C$, где C — постоянная интегрирования, определяемая из условия, что при $\Theta = \pi$ скольжение $s = 0$, т. е. $C = M_m$; тогда скольжение

$$s = 2\sqrt{M_m/T_J}\,\cos(\Theta/2) = s_{кр}\cos(\Theta/2). \qquad (14.78)$$

При $\Theta = 0$ имеем $Ks_{кр} = M_c$ и, следовательно, $K = M_c/s_{кр}$, тогда средняя составляющая момента

$$Ks = (M_c/s_{кр})\, s_{кр}\cos(\Theta/2) = M_c\cos(\Theta/2). \qquad (14.79)$$

Подставляя (14.79) в (14.77) и интегрируя левую часть уравнения в пределах $s = s_{кр} \div 0$, а правую — в пределах $\Theta = 0 \div \pi$, найдем

$$s_{кр} = 2\sqrt{[M_m - M_c(\pi - 2)/2]/T_J} = 2\sqrt{(M_m - 0{,}6M_c)/T_J}. \qquad (14.80)$$

Это уравнение дает возможность определить максимальную величину скольжения, при которой ротор СД, работающий в асинхронном режиме, под действием синхронизирующих сил может достичь синхронной частоты вращения. Уравнение (14.80) соответствует условиям втягивания в синхронизм полностью возбужденного СД при максимальной работе синхронизирующих сил. На практике требуется определять критическое скольжение, при котором обеспечивается втягивание в синхронизм в случае включения возбуждения в относительно невыгодный момент времени. Для этого случая критическое скольжение получается значительно меньшим, чем определенное по (14.80). Если вместо коэффициента 2 в (14.80) ввести коэффициент 1,05 [33], тогда критерий втягивания в синхронизм (при $M_с < M_m$) представим в виде

$$s_{кр} \leqslant 1{,}05\sqrt{(M_m - 0{,}6M_с)/T_J}\,. \qquad (14.81)$$

При проектировании СД важным вопросом является выбор параметров пусковой обмотки по условиям втягивания двигателей в синхронизм. Критерий (14.81) втягивания в синхронизм позволяет спроектировать двигатель, удовлетворяющий техническим условиям. Так как наиболее полно синхронизирующую способность СД характеризует входной момент, то выражение для $M_{вх}$ получим из (14.81). Учитывая, что $M_{вх}$ представляет собой максимальный момент сопротивления на валу СД, при котором еще возможно втягивание в синхронизм, запишем

$$s_{кр} = M_с/K = M_{вх}/K. \qquad (14.82)$$

В (14.81) момент сопротивления $M_с$, при котором двигатель втянется в синхронизм при данном критическом скольжении, равен входному моменту $M_{вх}$. Следовательно, подставляя (14.82) в (14.81) и решая относительно $M_{вх}$, найдем

$$M_{вх} = [-0{,}66 + \sqrt{0{,}43 + 4{,}4M_mT_J/K^2}\,]/(2T_J/K^2). \qquad (14.83)$$

Полученное уравнение позволяет рассчитать входной момент для СД при заданных значениях напряжения и частоты питающей сети и определить, как будет зависеть момент $M_{вх}$ от изменения момента инерции вращающихся масс.

Раздел четвертый
КОММУТАЦИЯ КОЛЛЕКТОРНЫХ МАШИН

ГЛАВА 15. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОММУТАЦИИ

§ 15.1. Сущность процесса коммутации

Под *коммутацией* коллекторных электрических машин понимают совокупность явлений, связанных с последовательным переходом секций якорной обмотки из одних параллельных ветвей в другие. В процессе этого перехода ток в коммутируемой секции меняет направление на противоположное. На рис. 15.1 показано взаимное расположение коммутируемой секции ab и щетки в различные периоды коммутации. Во время коммутации секция ab замкнута накоротко щеткой. Ток i, протекающий по секции, называют *током коммутируемой секции*.

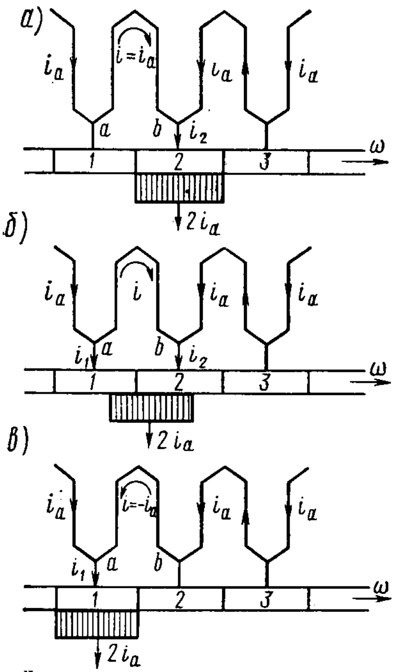

Рис. 15.1. Процесс коммутации секции ab при ширине щетки, равной ширине коллекторной пластины

Ток коммутируемой секции уменьшается от $+i_a$ до нуля, изменяет знак на противоположный и вновь возрастает до тока параллельной ветви $-i_a$. Процесс изменения тока в коммутируемой секции при ширине щетки, равной ширине коллекторной пластины, в общем виде описывается дифференциальным уравнением

$$L_c (di/dt) + R_c i + i_2 r_2 - i_1 r_1 = \pm e_к, \tag{15.1}$$

где L_c — индуктивность коммутируемой секции; R_c — активное сопротивление секции и петушков; r_1, r_2 — сопротивление щеточного контакта набегающего и сбегающего краев щетки; i_1, i_2—токи, протекающие через набегающий и сбегающий края щетки; $e_к$ — ЭДС внешнего поля, или коммутирующая ЭДС.

Коммутация — это сложный процесс, зависящий от большого числа различных факторов. Труднее всего поддается математическому описанию процесс изменения сопротивления щеточного контакта набегающего и сбегающего краев щетки при движении щетки по коллектору. Сложность заключается в том, что удельное сопротивление щеточного контакта — функция многих переменных (плотности тока, атмосферных условий, продолжительности работы машины, температуры коллектора, площади контакта и т. д.). Многочисленные исследования вольт-амперных характеристик щеток показали, что сопротивление щеточного контакта — нелинейная функция плотности тока. Следовательно, (15.1) — нелинейное дифференциальное уравнение и решения в общем виде не имеет.

Точное решение (15.1) возможно только численными методами, приближенное — путем аппроксимации действительной зависимости сопротивления щеточного контакта от плотности тока какой-либо простой зависимостью, причем точность приближения во многом зависит от принятых допущений. В настоящее время имеются следующие теории коммутации: 1) классическая; 2) на основе допущения $\Delta U_{щ} = \mathrm{const}$; 3) оптимальной коммутации. Общие допущения для этих теорий: 1) полное механическое совершенство щеток и коллектора при любых частотах вращения; 2) толщина изоляционной прокладки между коллекторными пластинами бесконечно мала.

§ 15.2. Природа щеточного контакта

Одной из первых появилась гипотеза непрерывного контакта, т. е. контакта, при котором ток равномерно распределяется по всей поверхности щетки. Основное допущение, вытекающее из гипотезы и положенное в основу классической теории коммутации, следующее: постоянство удельного сопротивления щеточного контакта и независимость его от плотности тока, т. е. $r_{щ} = \mathrm{const}$. Однако эта гипотеза не могла объяснить характера зависимости падения напряжения в щеточном контакте от плотности тока; кроме того, удельное сопротивление щеточного контакта, как показали эксперименты, — явно выраженная функция плотности тока под щеткой.

В 30-е годы И. Нейкирхен выдвинул гипотезу точечного контакта, согласно которой скользящий контакт рассматривается как совокупность точек перебегающего непосредственного контакта, действительная поверхность которых в десятки раз меньше всей поверхности щетки. Передача тока от щетки к коллектору и обратно осуществляется через: 1) непосредственный механический контакт между щеткой и коллектором; 2) мельчайшие частицы медной и графитной пыли; 3) ионизированные воздушные щели между щеткой и коллектором. Площадь непосредственного механического контакта состоит из отдельных контактных точек. Так как при работе машины происходит механическое стирание щетки, то контактные точки непрерывно смещаются в различных направлениях. Площадь контактных точек значительно меньше расчетной поверхности щетки, поэтому плотности тока в этих точках очень велики. С действительной поверхностью контакта граничит клиновидное пространство между поверхностями щетки и коллектора, причем на некотором участке этого пространства частицы угольной или металлической пыли образуют пылевую зону. Пылевая зона проводит ток при наличии напряжения между поверхностями щетки и коллектора. При протекании тока через скользящий контакт в результате электрического износа происходит выделение мелких зерен диаметром 0,5—1,5 мкм, причем количество зерен пропорционально плотности тока. Следовательно, с увеличением плотности тока проводимость переходного слоя между щеткой и коллекторной пластиной должна возрастать. С пылевой зоной граничит зона пробоя, в которой расстояния между поверхностями щетки и коллектора настолько малы, что ток проводится путем ионной и электронной эмиссии, но лишь при условии предварительного соприкосновения поверхностей. Эта проводимость преобладает при больших плотностях тока под щеткой.

В последние годы большое внимание уделяется изучению контактной поверхности коллекторных пластин. В воздухе всегда есть влага и всегда содержатся различные оксиды. Поэтому при прохождении тока через слой щеточного контакта возникает явление электролиза. В результате электролиза на коллекторе образуется блестящая пленка оксидов меди, называемая *политурой коллектора*. Пленка оксида меди имеет повышенную твердость и тепловую устойчивость. Исследования показали, что собственное электрическое сопротивление поверхностной пленки оксида меди велико и, когда пленка не нарушена механически, ток протекает через нее путем пробоя. Электрический пробой пленки оксида меди получил название *фриттинга*. Напряжение пробоя определяется толщиной пленки. При толщине пленки оксида меди в 50—400 Å напряжение пробоя составляет 0,5—1,5 В (1 Å = 10^{-10} м).

Разрушение пленки оксида меди вследствие фриттинга приводит к образованию металлических мостиков. Исследования поверхности коллектора показали, что поверхностная пленка оксида меди испещрена малыми пятнами эллиптической формы, вытянутыми в направлении вращения коллектора. Электрическое сопротивление таких токопроводящих пятен по сравнению с сопротивлением пленки оксида меди практически равно нулю.

Особенность скользящего контакта состоит в том, что токопроводящие пятна при перемещении коллекторной пластины от одной щетки к другой успевают окисляться кислородом воздуха. Окисление ускоряется под действием высоких температур в точках электрического контакта. Исследования, проведенные Е. Хольмом, показали, что окисление почти полностью уничтожает токопроводящие пятна в течение одного или нескольких оборотов коллектора.

Таким образом, прохождение тока через пленку оксида меди происходит при протекании двух взаимно противоположных процессов: разрушения пленки путем механического стирания и фриттинга, сопровождающихся образованием токопроводящих пятен; окисления токопроводящих пятен кислородом воздуха. Эти процессы находятся в динамическом равновесии. Количество и размеры токопроводящих пятен определяются значением тока и временем формирования политуры коллектора. С увеличением плотности тока количество токопроводящих пятен растет, следовательно, сопротивление скользящего контакта уменьшается. Ф. Шретер обнаружил полупроводящие свойства коллекторной пленки. Полупроводящие свойства оксидной пленки меди во многом определяются температурой коллекторных пластин. При нагревании коллектора до 70° С токопроводящие свойства пленки резко увеличиваются, сопротивление пленки стремится к нулю.

Изложенная теория щеточного контакта подтверждается экспериментами. Она позволяет объяснить характер вольт-амперных характеристик скользящего контакта и характер зависимости $r_{щ} = f(i)$.

В результате последних исследований в промышленность начали внедряться коллекторы из углеграфитовых материалов. В коммутационном отношении углеграфитовый коллектор работает лучше, так как из-за отсутствия оксидной пленки увеличивается действительная площадь контактирования. Он допускает увеличение номинальных нагрузок в 1,5—2 раза. Применение коллектора из антифрикционного графита снижает износ контактной пары более, чем на порядок. Специальные марки антифрикционных графитов и углепластиков по своим электрическим, физико-механическим и тепловым свойствам приближаются к меди.

§ 15.3. Вольт-амперные характеристики скользящего контакта

Для теоретического анализа коммутации очень важен выбор правильной аппроксимации свойств щеточного контакта. Наиболее наглядно свойства щеточного контакта отражены в его вольт-амперных характеристиках, представляющих собой зависимости падения напряжения между щеткой и коллекторной пластиной от значения протекающего тока (или плотности тока). Экспериментальные исследования показали, что на форму вольт-амперных характеристик щеток влияют многие факторы: материал щеток, состояние коллекторной оксидной пленки, степень и характер вибрации щеточно-коллекторного узла, температура щеток и коллектора, удельное давление в щеточном контакте, полярность щеток и т. д.

На рис. 15.2 приведены вольт-амперные характеристики щеток МГС-8, снятые с различными выдержками времени от начала работы, штриховой линией показана кривая температуры коллектора. Снятие вольт-амперных характеристик установившегося режима работы, получивших название *статических вольт-амперных характеристик* (кривая *а*), начинают с плотности тока 0,5—

1 А/см², увеличивая ее ступенями через 3—4 А/см². Выдержка времени на каждой ступени должна быть 20—30 мин, при этом политура коллектора полностью сформируется для фиксирования практически установившихся значений падения напряжения на сопротивлении щеточного контакта.

Четырехсекундные вольт-амперные характеристики щеток (кривая *б* на рис. 15.2) снимаются при прохождении через скользящий контакт импульсов тока указанной длительности. В течение столь короткого времени политура коллектора существенно не изменяется. Температура коллекторных пластин постоянная, в то время как при снятии статических вольт-амперных характеристик каждая точка характеристики снимается при качественно различной политуре коллектора и разной температуре коллекторных пластин.

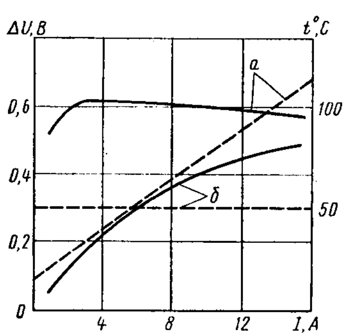

Рис. 15.2. Вольт-амперные характеристики щеток МГС-8

Падение напряжения под катодными щетками, если материал не содержит примесей металла, выше, чем под анодными. Это ведет к различию хода коммутации в секциях, замыкаемых разнополярными щетками. Вследствие естественной нестабильности скользящего контакта получается неудовлетворительная воспроизводимость вольт-амперных характеристик при повторном их снятии. Поэтому статические вольт-амперные характеристики снимают для группы параллельно включенных щеток и получают усредненные характеристики.

Динамические вольт-амперные характеристики скользящего контакта представляют собой зависимость мгновенных значений падения напряжения на сопротивлении щеточного контакта от мгновенных значений плотности тока. Широко распространен метод определения динамических характеристик щеток с помощью контактного кольца с использованием переменного тока стандартной частоты. Однако более близкими к действительности будут вольт-амперные характеристики щетки, снятые при импульсном характере изменения тока на специально выполненном коллекторе. Чтобы учесть неидентичность процесса коммутации под различными коллекторными пластинами, вольт-амперные характеристики щеток рекомендуется снимать при таких длительностях импульсов тока, в течение которых коллектор делает 2—4 оборота. На рис. 15.3 показаны типичные динамические вольт-амперные характеристики щеточного контакта. Наличие восходящей и нисходящей ветвей определяется свойствами политуры коллектора (опыты без политуры показали отсутствие петли).

Нелинейность восходящей ветви динамической вольт-амперной характеристики связана с пробоем оксидной пленки коллектора. Меньшая нелинейность нисходящей ветви объясняется тем, что по достижении наибольшего значения тока на поверхности коллектора образовались токопроводящие пятна, достаточные для протекания данного тока. При последующем уменьшении тока эти пятна, не успевая заметно окислиться, продолжают пропускать ток, обеспечивая этим приближение к линейной обратной ветви. Существенное

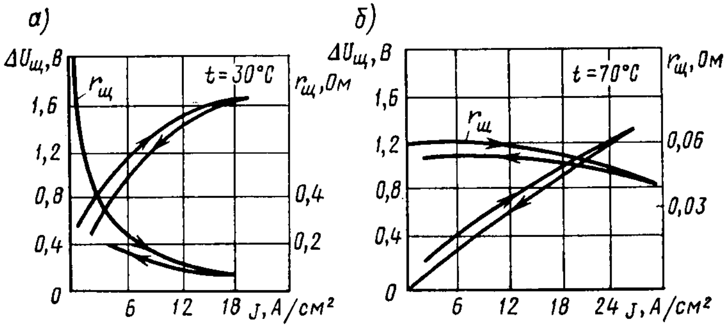

Рис. 15.3. Вольт-амперные характеристики щеточного контакта (щетка ЭГ-74-А) при различной температуре коллектора

влияние на характер вольт-амперных характеристик оказывает температура поверхности коллектора.

Вольт-амперная характеристика скользящего контакта углеграфитовой пары носит линейный характер.

§ 15.4. Классическая теория коммутации

Отличительной особенностью классической теории, разработанной Е. Арнольдом, является допущение: удельное сопротивление щеточного контакта считается постоянным независимо от плотности тока в контакте и от контактной поверхности. Это равносильно аппроксимации вольт-амперной характеристики щеточного контакта прямой линией, исходящей из начала координат (рис. 15.4). Несмотря на то что такая аппроксимация довольно приближенная и справедлива только при малых плотностях тока, выводы классической теории коммутации используются в настоящее время очень широко. Основное значение

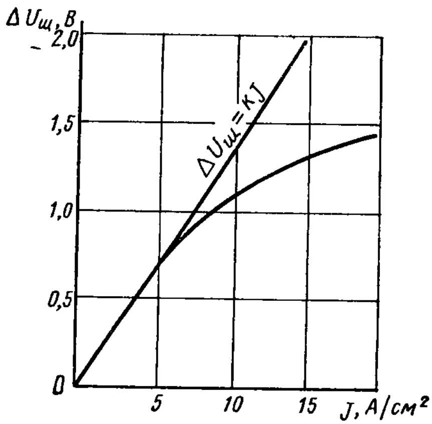

Рис. 15.4. Аппроксимация вольт-амперной характеристики щеточного контакта функцией, соответствующей допущению $r_щ = \text{const}$

классической теории коммутации состоит в том, что на ее базе проводится расчет дополнительных полюсов, дающий результаты, близкие к действительности.

Если искусственно создать условия работы контакта по характеристике $r_{ш} = \text{const}$ (что можно осуществить посредством резкого снижения максимальной плотности тока в контакте), то все выводы классической теории окажутся в полном соответствии с опытом.

Расчет тока в коммутируемой секции. Чтобы упростить анализ процесса коммутации, ширину щетки считаем равной ширине коллекторной пластины. Обозначим $-L_с(di/dt) = e_р$ и перепишем (15.1) в виде

$$e_р \pm e_к = R_с i + r_2 i_2 - r_1 i_1, \qquad (15.2)$$

где $e_р$ — реактивная ЭДС.

В первом приближении сопротивлениями секции и петушков пренебрегаем, а сумму ЭДС принимаем равной нулю. Тогда (15.2) упростится:

$$r_2 i_2 - r_1 i_1 = 0. \qquad (15.3)$$

При условии постоянства удельного сопротивления щеточного контакта сопротивления r_1 и r_2 становятся линейными функциями и изменяются обратно пропорционально площадям касания щетки с коллекторными пластинами. Эти сопротивления выражают через полное время T коммутации и текущее время от начала процесса коммутации t:

$$r_1 = R_{щ} S_{щ}/S_1 = R_{щ} T/t; \quad r_2 = R_{щ} S_{щ}/S_2 = R_{щ} T/(T-t), \qquad (15.4)$$

где $R_{щ}$ — полное сопротивление щеточного контакта; S_1, S_2, $S_{щ}$ — площади контакта набегающего, сбегающего краев щетки и всей поверхности щетки.

Из рис. 15.1 видно, что

$$i_1 = i_a - i; \quad i_2 = i_a + i; \quad i_1 + i_2 = 2i_a. \qquad (15.5)$$

Решая (15.3) и (15.5) совместно относительно тока коммутируемой секции и учитывая (15.4), получим

$$i = i_a (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2) = i_a (1 - 2t/T). \qquad (15.6)$$

Коммутация, соответствующая этому закону изменения тока в коммутируемой секции, называется *прямолинейной*, т. е. ток в секции изменяется линейно от времени. Плотность тока при прямолинейной коммутации постоянна под всей поверхностью щетки. Если сумма ЭДС в коммутируемом контуре не равна нулю, то, решая (15.2) и (15.5) относительно тока в коммутируемой секции, при допущении $R_с = 0$ получим

$$i = i_a (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2) + (e_р \pm e_к)/(r_1 + r_2). \qquad (15.7)$$

Учитывая (15.4), представим ток в коммутируемой секции как функцию времени

$$i = i_a(1 - 2t/T) + [(e_р \pm e_к)/R_щ](1 - t/T)(t/T). \qquad (15.8)$$

Второе слагаемое представляет собой добавочный ток $i_к$, накладываемый на ток прямолинейной коммутации. Реактивная ЭДС $e_р$, являясь ЭДС самоиндукции, замедляет процесс изменения тока в секции. Коммутирующая ЭДС $e_к$ может быть одного знака с $e_р$ или разных. В первом случае, когда $e_р$ и $e_к$ одинаковых знаков

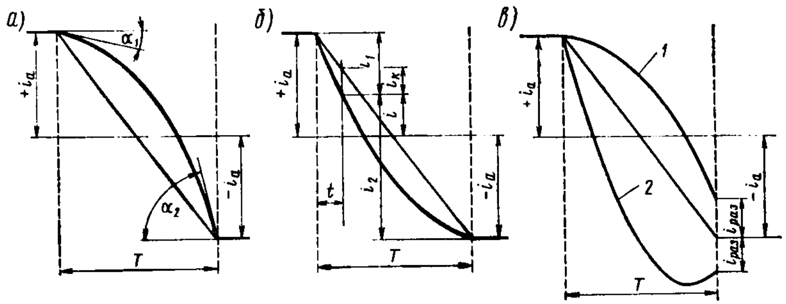

Рис. 15.5. Кривые изменения тока в коммутируемой секции при замедленной (*а*), ускоренной (*б*), сильно ускоренной (*2*) и сильно замедленной (*1*) коммутациях (*в*)

или $e_р > e_к$, коммутация замедлена. Во втором случае, когда $e_к > e_р$, коммутация ускорена. Кривые изменения тока в коммутируемой секции представлены на рис. 15.5, *а*, *б*, *в*. Во всех случаях при отклонении от прямолинейной коммутации происходит перераспределение плотности тока под краями щетки. О плотности тока под краем щетки можно судить по тангенсу угла α: $J_1 = (2i_a/S_щ)\operatorname{tg}\alpha_1$; $J_2 = (2i_a/S_щ)\operatorname{tg}\alpha_2$, где α_1, α_2 — углы наклона касательной к кривой тока соответственно под набегающим и сбегающим краями щетки.

При замедленной коммутации под набегающим краем щетки плотность тока резко падает, а под сбегающим возрастает. При ускоренной коммутации, наоборот, под набегающим краем щетки плотность тока возрастает, а под сбегающим падает. Уменьшение плотности тока под сбегающим краем щетки позволяет добиваться безыскрового размыкания индуктивного контура коммутирующей секции. Следовательно, процесс нормально ускоренной коммутации наиболее благоприятен.

Принятое в классической теории допущение $r_щ = \text{const}$ может привести к неправильному представлению процессов в коммутирующей секции. Согласно классической теории, независимо от значения и знака суммы ЭДС добавочный ток $i_к$ в конце периода коммутации ($t — T$) в соответствии с (15.8) равен нулю. Однако это расходится с реальной картиной процесса коммутации. На рис. 15.5, *в* представлены экспериментальные кривые тока коммутируемой секции при сильно замедленной (кривая *1*) и сильно ускоренной (кривая *2*) коммутации, из которых следует, что в обоих случаях $i_к$ в конце периода коммутации не равен нулю; появляется ток разрыва $i_{раз}$, вызывающий искрение.

§ 15.5. Теория коммутации на основе допущения постоянства падения напряжения в щеточном контакте

О. Г. Вегнер провел многочисленные эксперименты по определению динамических вольт-амперных характеристик щеток (типа ЭГ-73 и ЭГ-74 [9]) и пришел к выводу, что эти характеристики не соответствуют классическому допущению постоянства удельного сопротивления щеточного контакта, а гораздо больше соответствуют допущению постоянства падения напряжения $\Delta U_щ = \text{const}$ на сопротивлении щеточного контакта. Поэтому вольт-амперная характеристика щеточного контакта аппроксимируется прямой линией, параллельной оси абсцисс (рис. 15.6). Такое допущение приемлемо, так как плотность тока под щеткой в существующих электрических машинах достигает 10 А/см² и более

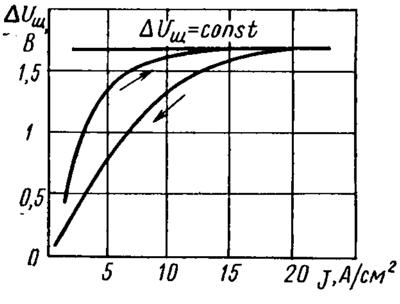

Рис. 15.6. Аппроксимация вольт-амперной характеристики щеточного контакта функцией $\Delta U_щ = \text{const}$

О. Г. Вегнер предположил, что падения напряжения в сбегающем $\Delta U_{щ2} = r_2 i_2$ и набегающем $\Delta U_{щ1} = r_1 i_1$ краях щетки в процессе коммутации остаются постоянными и равными друг другу. В этом случае, согласно (15.1), они взаимно уравновешивают друг друга и не оказывают влияния на процесс коммутации. Уравнение (15.1) упрощается и становится линейным:

$$L_с(di/dt) + R_с i = \pm e_к. \qquad (15.9)$$

Если коммутирующая ЭДС отсутствует, то ток в коммутируемой секции не изменяет знака до конца периода коммутации, уменьшаясь только вследствие влияния активных сопротивлений секции и петушков (рис. 15.7, *а*, *б*) по экспоненциальному закону

$$i = i_a \exp(-t/T_с), \qquad (15.10)$$

где $T_с = L_с/R_с$ — постоянная времени секции.

Процесс коммутации заканчивается дуговой стадией с различным временем горения дуги $T_д$.

Введение в контур коммутируемой секции ЭДС $e_к$, направленной встречно ЭДС самоиндукции, увеличивает скорость изменения тока. Можно так подобрать значение $e_к$, чтобы к концу периода коммутации ток в секции достиг $-i_a$ и даже получилась ускоренная коммутация (рис. 15.8). При $e_к \neq 0$ решение (15.9) имеет вид

$$i = i_a \exp(-t/T_c) - (e_к/R_c)[1 - \exp(-t/T_c)]. \qquad (15.11)$$

Скорость изменения тока в секции в течение периода коммутации определяется ЭДС $e_к$ и постоянной T_c времени контура. Если ток в секции при сверхускоренной коммутации превысил по модулю значение тока параллельной ветви — i_a, то изменяется направле-

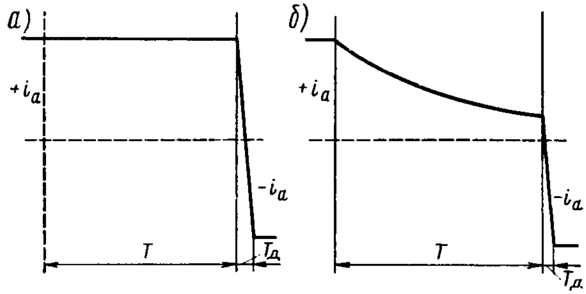

Рис. 15.7. Коммутация с большим остаточным током при использовании щеток с $\Delta U_щ = \text{const}$: a — при $R_c = 0$; $б$ — при $R_c > 0$

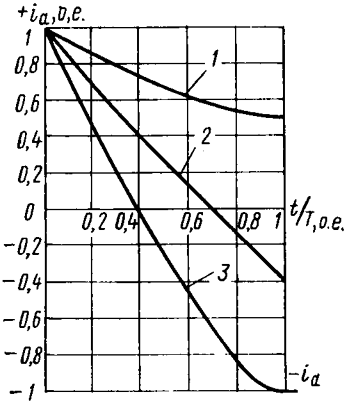

Рис. 15.8. Кривые изменения тока в коммутируемой секции: 1) $e_к = 0$; 2) $e_к/R_c = i_a$; 3) $e_к/R_c = 3i_a$

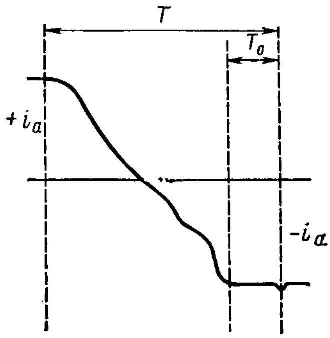

Рис. 15.9. Кривая изменения тока в коммутируемой секции при ускоренной коммутации

ние тока i_2 во втором петушке и, следовательно, меняется знак $\Delta U_{щ2}$. Таким образом, падения напряжения в щеточном контакте на сбегающей и набегающей частях щетки имеют один знак. Уравнение (15.1) преобразуется к виду

$$L_c(di/dt) + R_c i = e_к - (\Delta U_{щ1} + \Delta U_{щ2}). \qquad (15.12)$$

Очевидно, что падение напряжения в щеточном контакте, действуя встречно $e_к$, препятствует дальнейшему увеличению тока коммутируемой секции. Кривая изменения тока в коммутируемой секции при ускоренной коммутации представлена на рис. 15.9. Видно, что сбегающий край щетки нагружен током с момента достижения током секции значения $-i_a$ и до конца периода замыкания секции щеткой. Этот отрезок времени T_0 О. Г. Вегнер назвал *периодом малого тока*.

Недостаток теории О. Г. Вегнера в том, что, принимая ускоренную коммутацию, в которой до момента размыкания секции ток в сбегающем крае щетки равен нулю, за оптимальную, в уравнении коммутируемой секции для сбегающего практически обесточенного края щетки принимаем $\Delta U_{щ2} = \Delta U_{щ1}$. Это вносит погрешность при определении тока на завершающей стадии процесса коммутации. Более правильно принять падение напряжения на сбегающем крае щетки в течение периода малого тока равным нулю. Кроме того, некоторые из существующих типов щеток имеют вольт-амперные характеристики, аппроксимирующиеся к $\Delta U_щ = \mathrm{const}$ с большими погрешностями.

§ 15.6. Теория оптимальной коммутации

Две предыдущие теории коммутации в части допущений относительно свойств щеточного контакта представляют собой две крайности. В реальных условиях, как это вытекает из очертания вольт-амперных характеристик щеточного контакта, свойства контакта заключены в промежутке между этими предельными характеристиками.

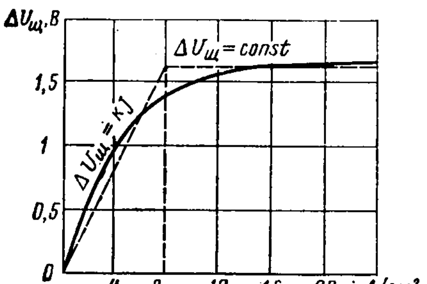

Рис. 15.10. Аппроксимация статической вольт-амперной характеристики щетки по двум участкам

Под руководством М. Ф. Карасева разработана теория коммутации на основе аппроксимации вольт-амперных характеристик щеточного контакта по двум участкам [24]. Статическую вольт-амперную характеристику щеточного контакта аппроксимируют к двум различным функциям: при малых плотностях тока $J < 8$ А/см² — к зависимости, отвечающей условию $r_щ = \mathrm{const}$, а при больших плотностях тока — к функции $\Delta U_щ = \mathrm{const}$ (рис. 15.10), или же аппроксимируют гиперболическими функциями. Считая нормально ускоренную коммутацию наилучшей, оптимальной, для набегающего края щетки принимаем допущение $\Delta U_{щ1} = r_1 i_1 = \mathrm{const}$, а для сбегающего края щетки $\Delta U_{щ2} = kJ$ или $r_{щ2} = \mathrm{const}$, при этом $r_2 = R_щ T/(T-t)$.

Эти допущения физически оправданы, так как при ускоренной коммутации плотность тока в набегающей части щетки повышена в несколько раз относительно средней плотности тока, а на сбегающем крае щетки — значительно снижена. Дифференциальное уравнение (15.1) коммутируемого контура, учитывая эти допущения, а также $i_2 = i + i_a$, запишем в виде

$$L_с(di/dt) + R_сi + R_ш[T/(T-t)](i + i_a) = \Delta U_{щ1} - e_к. \quad (15.13)$$

Для упрощения решения уравнения принимаем $R_с = 0$ и $TR_ш/L_с = \alpha$, тогда при $\alpha = 1$

$$i = i_a(1 - 2t/T) - [(\Delta U_{щ1} - e_к)/R_ш](1 - t/T) \cdot \ln(1 - t/T), \quad (15.14)$$

а при $\alpha \neq 1$

$$i = i_a(1 - 2t/T) - \{2i_a - \alpha(\Delta U_{щ1} - e_к)/[R_ш(\alpha - 1)]\}(1 - t/T)[1 - (1 - t/T)^{\alpha-1}]. \quad (15.15)$$

Первый член правой части (15.14) и (15.15) представляет собой ток прямолинейной коммутации, а второй — добавочный ток $i_к$. Теория оптимальной коммутации предполагает, что в сбегающем крае щетки, еще до момента завершения коммутации, выполняются условия $i_2 \approx 0$ и $di_2/dt \approx 0$, т. е. в кривой тока коммутируемой секции имеет место период (или ступень) малого тока.

Опыты по снятию кривых тока ускоренной коммутации на экспериментальной установке с машинами ПН-145 показали, что теория оптимальной коммутации ближе к действительности, чем предшествующие теории [24]. Теория оптимальной коммутации может быть также построена на базе аппроксимации динамических вольт-амперных характеристик скользящего контакта.

§ 15.7. Применение ЭВМ для расчета процесса коммутации

Дифференциальное уравнение (15.1) несложно решить на АВМ и на ЦВМ. Недостаток АВМ в том, что они дают решение в виде осциллограмм, требующих дополнительной обработки, поэтому ЦВМ наиболее перспективны для расчетов коммутации. Точность решения зависит от того, как полно представлена физическая сторона процесса в алгоритме решения. ЦВМ позволяют учесть в расчетах не только нелинейность сопротивлений r_1 и r_2, но и особенности вольт-амперных характеристик анодных и катодных щеток. При первых решениях на ЦВМ использовались статические характеристики щеточного контакта [10], но при этом не учитывалось различие в работе набегающего и сбегающего краев щетки. Кроме того, использование статических характеристик неправомерно для расчета коммутации машин постоянного тока, работающих в таких переходных режимах, как пуск, реверсы, изменение частоты вращения и т. д. В настоящее время широко исследуется возможность применения в расчетах динамических вольт-амперных характеристик щеток.

Аналитические исследования коммутации при $b_щ > b_к$, как правило, проводятся со значительными допущениями при учете взаимоиндуктивных связей между коммутируемыми секциями. И только при расчетах на ЭВМ наиболее полно учитываются эти связи. Дифференциальное уравнение для каждой коммутируемой секции запишем в виде, удобном для программирования:

$$L_с (di/dt) + \sum_{m=1}^{n} L_{сm} (di_m/dt) = \pm e_к + r_1 i_1 - r_2 i_2, \qquad (15.16)$$

где $L_{сm}$ — коэффициент взаимоиндукции рассматриваемой секции с m-й одновременно коммутируемой секцией; n — количество одновременно коммутируемых секций.

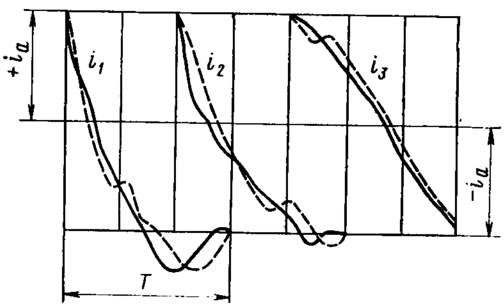

Рис. 15.11. Кривые тока коммутации секций паза

Число дифференциальных уравнений определяется числом одновременно коммутируемых секций под анодными и катодными щетками. При составлении алгоритма расчета по (15.16) необходимо учитывать последовательное вступление в процесс коммутации секций, лежащих в одном пазу.

Расчетные кривые токов коммутируемых секций машин постоянного тока, полученные на ЦВМ при использовании реальных вольт-амперных характеристик щеток, с учетом взаимоиндуктивных связей одновременно коммутируемых секций достаточно хорошо совпадают с экспериментальными кривыми. На рис. 15.11 приведены экспериментальные и расчетные (штриховые линии) токи трех коммутируемых секций, лежащих в одном пазу, при коммутировании их катодной щеткой [45]. Кривые получены при исследовании электромашинного усилителя. Расчеты проводились по участкам, время каждого участка составляет $^1/_3$ периода коммутации одной секции. Исследования показывают, что секции, коммутирующие последними в пазу, имеют замедленную коммутацию, а в предыдущих секциях паза коммутация ускорена.

§ 16.1. Оценка коммутирующей способности электрощеток

Коммутирующая способность электрощеток определяется двумя факторами: 1) каждая щетка для обеспечения удовлетворительной коммутации должна создать хороший в механическом отношении контакт, зависящий в основном от упругих свойств щетки и ее фрикционных характеристик; 2) щетка должна оказывать воздействие на ток коммутируемого контура и в завершающей фазе процесса обеспечивать отсутствие тока в сбегающей части щетки к моменту окончания коммутации.

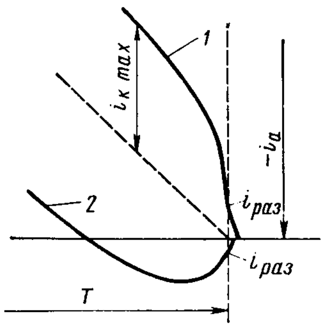

Рис. 16.1. Изменение тока в коммутируемой секции на последних стадиях коммутационного цикла при замедленной (*1*) и сильно ускоренной (*2*) коммутациях

Экспериментальные исследования показали, что на завершающих стадиях коммутационного процесса резко уменьшается добавочный ток коммутации. Наличие коммутирующей способности у щеток ясно видно при рассмотрении осциллограмм добавочного тока (рис. 16.1). Если бы щетка выполняла роль рубильника, то ток разрыва соответствовал бы $i_{кmax}$. Таким образом, щетки положительно влияют на процесс изменения тока при ускоренной и замедленной коммутациях, этого невозможно добиться другими методами. Коммутирущую способность щеток можно связать с ее вольт-амперной характеристикой. Вводим понятие о вынуждающей коммутирующей ЭДС:

$$e_к' = \Delta U_{щ2} - \Delta U_{щ1}. \qquad \textbf{(16.1)}$$

При замедлении коммутации плотность тока под сбегающей частью щетки больше, чем под набегающей, и $\Delta U_{щ2} > \Delta U_{щ1}$. В этом случае вынуждающая коммутация ЭДС действует встречно добавочному току коммутируемой секции, т. е. стремится ускорить процесс изменения тока. Зависимость $e_к'$ от свойств щетки, ярко выраженных в характере ее вольт-амперной характеристики, поясняется рис. 16.2, *а*, *б*. Влияние различных марок щеток на характер процесса коммутации видно из сравнения безыскровых зон, построенных в виде зависимости тока $I_п$ подпитки в долях номинального тока $I_{ном}$ якоря от тока якоря (рис. 16.3) [24]. Одна и та же машина ПН-145 при щетках ЭГ-14 и Г-20 коммутирует замедленно, а при щетках ЭГ-74А и ЭГ-4 — ускоренно. Сравнение безыскровых зон свидетельствует о большой коммутирующей способности щетки Г-20.

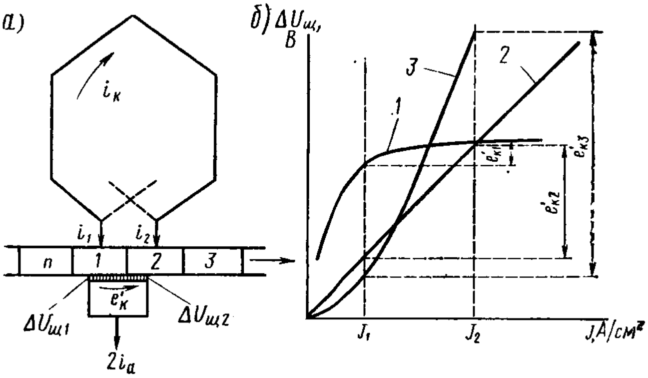

Рис. 16.2. Направление добавочного тока $i_к$ и вынуждающей коммутирующей ЭДС $e'_к$ (*а*) и зависимость значения ЭДС $e'_к$ от вида вольт-амперных характеристик щеток (*б*):

1 — $\Delta U_щ = \mathrm{const}$; *2* — $r_щ = \mathrm{const}$; $\Delta U_щ = kJ$; *3* — $\Delta U_щ = kJ^2$

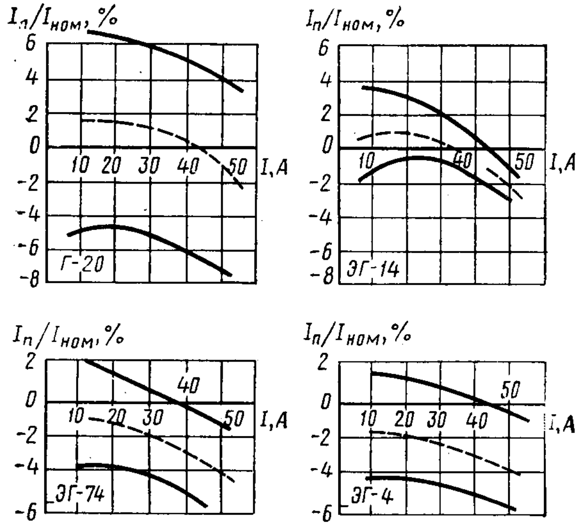

Рис. 16.3. Безыскровые зоны машины, снятые при работе с разными марками щеток ($I_{ном} = 30$ А, $n = 1250$ об/мин)

§ 16.2. Улучшение коммутации применением составных щеток

Составные щетки, используемые в настоящее время, делятся на следующие группы:

1. Разрезные щетки, предназначенные для уменьшения дополнительного тока от ЭДС $e_р$ самоиндукции, обеспечивают более благоприятную работу контакта в механическом отношении. Щетки данной группы широко распространены в реверсируемых машинах.

2. Комбинированные щетки представляют собой комбинацию из двух частей различного материала, при этом элемент щетки, расположенный со стороны набегающего края, выполнен из материала с малым сопротивлением щеточного контакта (металлографит), а элемент сбегающего края щетки — из материала с повышенным сопротивлением (электрографит).

Широко распространены, например, такие пары:

а) МГ-64 $r_щ = 0{,}04$ Ом, $\Delta U_щ = 0{,}46$ В
ЭГ-4 $r_щ = 0{,}1$ Ом, $\Delta U_щ = 1$ В
б) МГ-2 $r_щ = 0{,}02$ Ом, $\Delta U_щ = 0{,}2$ В
ЭГ-74 $r_щ = 0{,}15$ Ом, $\Delta U_щ = 1{,}2$ В

Комбинированные щетки ускоряют коммутацию за счет разности переходных сопротивлений в набегающей и сбегающей частях щеточного контакта. Комбинированные щетки целесообразно использовать в машинах малой мощности, которые не имеют дополнительных полюсов. На рис. 16.4, *б* представлена кривая тока коммутируемой секции для щетки, составленной из двух равных по ширине частей: пары МГ-2 (часть *A*) и ЭГ-74 (часть *B*). Двухступенчатость кривой выражается тем ярче, чем контрастнее щетки. Ускоряющее действие составных щеток объясняется следующим образом. Первый этап коммутации происходит при перекрытии коллекторных пластин *1—2* металлосодержащей частью *A* щетки (рис. 16.4, *а*). Щетка работает с постоянным падением напряжения $\Delta U_{щ1} = \mathrm{const}$, кривая изменения тока соответствует штриховой кривой *1*.

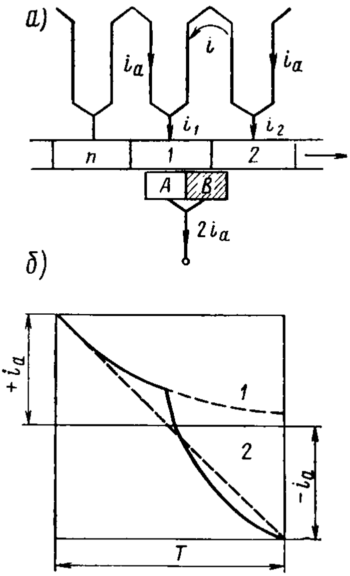

Рис. 16.4. Схема коммутируемого контура (*а*) и кривые тока при составных щетках (*б*)

Если составные части щетки равны, то второй этап коммутации начинается при $t = 0{,}5\ T$. В момент перекрытия коллекторных пластин частью *B* щетки в коммутируемом контуре скачкообразно увеличивается $\Delta U_{щ}$, так как $\Delta U_{щ2}$ значительно больше $\Delta U_{щ1}$. Это равносильно тому, что в контур вводится добавочная коммутирующая ЭДС $e'_{к} = \Delta U_{щ2} - \Delta U_{щ1}$, которая имеет направление, встречное по отношению к ЭДС самоиндукции, что вызывает резкое ускорение коммутации тока секции (кривая *2* на рис. 16.4). Чем большую ЭДС самоиндукции необходимо скомпенсировать, тем более контрастными должны быть составные части щетки. Очевидно, что при составных щетках изменение направления вращения якоря недопустимо.

§ 16.3. Вентильно-механическая коммутация машин постоянного тока

Развитие полупроводниковой техники дало толчок новому направлению поисков средств улучшения коммутации машин постоянного тока. Созданы многочисленные схемы на полупроводниковых элементах, которые расширяют безыскровую зону, а следовательно, повышают коммутационную надежность и мощность машины. На рис. 16.5 показана одна из схем вентильно-механической коммутации. Щетка состоит из двух частей, основной *A* и вспомогательной *B*, соединенных между собой вентилем (неуправляемым диодом). Расстояние между щетками такое, что когда основная щетка сходит с коллекторной пластины, вспомогательная уже набежала на нее, т. е. обе щетки в течение некоторого времени перекрывают одну пластину. Ширину вспомогательной щетки *B* выбирают меньше толщины изоляции между коллекторными пластинами, чтобы щетка *B* не замыкала секцию накоротко.

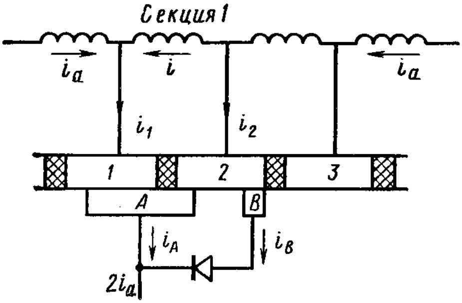

Рис. 16.5. Схема вентильно-механической коммутации

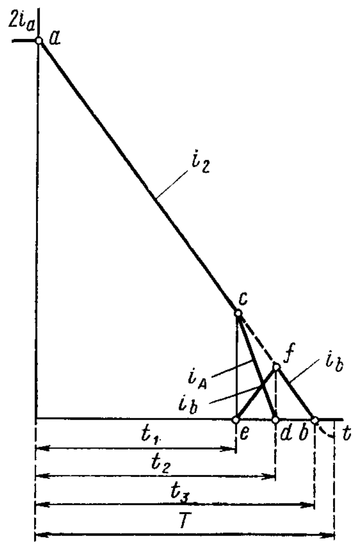

Рис. 16.6. Кривые изменения тока в петушке и вентиле при ускоренной коммутации

Коллектор должен иметь специальную конструкцию с большими изоляционными промежутками. Чтобы вспомогательная щетка не провалилась в изоляционный промежуток, в изоляционную прокладку встраивают холостые медные пластины, не имеющие контакта с коллекторными пластинами.

Пусть щетка A перекрывает коллекторные пластины *1* и *2*, ток в коммутирующей секции изменяется ускоренно. Ток в петушке второй коллекторной пластины изменяется от $2i_a$ до нуля (рис. 16.6). Период коммутации из расчета, что ширина эквивалентной щетки определяется расстоянием между набегающим A и сбегающим B краями щеток, равен T. При сбегании щетки A с коллекторной пластины *2* сопротивление сбегающего края щетки резко возрастает. Под действием возрастающего напряжения на сбегающем крае основной щетки в момент времени t_1 вентиль открывается и ток переходит во вспомогательную ветвь щетки B.

Таким образом, в момент времени t_2, когда основная щетка сбегает с коллекторной пластины *2*, ток во вспомогательной ветви становится равным i_2 и сбегающий край щетки A оказывается обесточенным. В интервале времени $t_1 - t_2$ ток в сбегающем крае щетки A уменьшается по прямой cd, а ток i_B щетки B растет по прямой ef и становится равным i_2, который щетка A должна была бы разорвать при отсутствии щетки B. С момента времени t_2 вентиль оказывается включенным последовательно в контур коммутируемой секции и дальнейшее изменение тока в секции и коллекторной пластине *2* определяется действующими в коммутируемом контуре ЭДС.

В момент времени t_3 ток в сбегающей коллекторной пластине проходит через нуль и вентиль закрывается. Цепь коммутируемой секции оказывается разомкнутой, а щетка B — обесточенной. При прямолинейной коммутации момент времени t_3 совпадает с окончанием периода коммутации T. При ускоренной коммутации ток в коммутируемой секции быстрее достигает значения $-i_a$ и ток в пластине *2* проходит через нуль в момент времени t_3, меньший периода коммутации T. Таким образом, при $t_3 < T$ отключение, т. е. разрыв короткозамкнутого контура, осуществляется вспомогательным вентилем, а не щеткой. Обе части щетки размыкают обесточенные цепи. В момент времени t_3 к вентилю прикладывается напряжение контура в обратном направлении. Это напряжение должно быть меньше напряжения пробоя вентиля и не менять знак до схода щетки B с коллекторной пластины. Если напряжение сменит знак, то через щетку B в момент окончания коммутации будет идти ток и щетка может искрить. Исследования показали, что применение вентилей позволяет существенно улучшить коммутацию и при замедленном ее характере.

При сходе основной щетки с коллекторной пластины происходит форсировка процесса коммутации, как это имеет место у составных щеток (см. § 16.2). Однако если в момент сбегания щетки B с коллекторной пластины ток i_2 не стал равным нулю, то возможно искрение. Экспериментальная проверка на двигателе серии П мощностью 4,7 кВт, 1500 об/мин, с увеличенным числом витков в секции в шесть раз по сравнению с заводской машиной (реактивная ЭДС возросла до 15—20 В) показала, что при номинальной нагрузке ширина зоны безыскровой работы составляет примерно 15%, тогда как лучшие машины в заводском исполнении (реактивная ЭДС порядка 2 В) имеют зону не шире 7—9% [20]. При этом мощность вентиля составляет не более 5—10% мощности машины, 90—95% токовой нагрузки несут главные щетки.

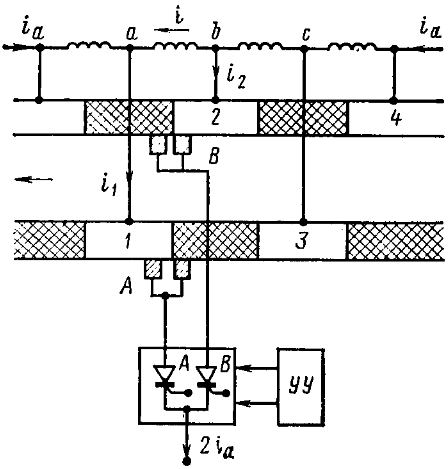

Рис. 16.7. Схема вентильно-механической коммутации на тиристорах

Еще более управляемым становится процесс коммутации при использовании управляемых полупроводниковых элементов. Одна из возможных схем тиристорных коммутаторов для машин постоянного тока представлена на рис. 16.7 [36]. Особенность схемы с тиристорным коммутатором — наличие двух специальных совмещенных коллекторов, каждый из которых выполнен в виде чередующихся медных и изоляционных (заштрихованных) пластин. Две группы щеток одной полярности объединены после тиристорных коммутаторов *А* и *В*. Пусть якорь вращается против часовой стрелки. В исходном состоянии обе щетки группы *А* находятся на коллекторной пластине 1, а щетки группы *В* — на изоляционной пластине.

Тиристор *А* открыт, а *В* закрыт. Токи параллельных ветвей протекают через коллекторную пластину 1. Ток коммутируемой секции $+i_a$ течет от *b* к *a*. Коммутация происходит следующим образом. При движении коллекторов одна из щеток группы *А* заходит на изоляционную пластину, а щетка группы *В* — на медную пластину *2* второго коллектора. В этот момент управляющее устройство (УУ) открывает тиристор *В* и начинается электромагнитный переходный процесс, связанный с реверсированием тока в коммутируемой секции. Ток перераспределяется между пластинами *1* и *2* коллекторов. Уменьшение тока i_1 заканчивается раньше, чем начинается переход второй щетки группы *А* на изоляционную пластину. Тиристор *А* закрывается, и щетка группы *А* сходит с коллекторной пластины *1* обесточенной. Ток параллельных ветвей протекает через коллекторную пластину *2*. Ток в секции *ab* протекает в обратном направлении от *a* к *b*, т. е. равен $(-i_a)$. Процесс коммутации тока в рассматриваемой секции закончен. При дальнейшем движении коллекторов одна из щеток группы *А* набегает на коллекторную пластину *3*, а щетка группы *В* сходит с пластины *2* на изоляционную пластину. В это время УУ открывает тиристор *A* и начинает коммутировать секция *bc*.

Механическое переключение секций, связанное с вращением якоря, происходит при обесточенном состоянии скользящих контактов и не влияет на электромагнитные процессы в коммутирующих секциях и параллельных ветвях обмотки якоря. Тиристоры переключаются специальным УУ с помсщью искусственной коммутации.

Тиристорная схема вентильно-механической коммутации позволяет отказаться от добавочных полюсов, что упрощает конструкцию машины. Достоинство схемы — в надежности коммутации при малых частотах вращения, а также в переходных режимах работы машины. Тиристоры должны быть рассчитаны на полный ток якоря. Недостаток метода — значительное усложнение конструкции щеточно-коллекторного узла машины.

Раздел пятый

МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

ГЛАВА 17. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 17.1. Уравнения электромагнитного поля

Электромагнитное поле в электрической машине описывается системой уравнений Максвелла

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{полн}}; & \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t; \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; & \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \end{array}\right\} \qquad (17.1)$$

дополненной уравнениями связи

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \quad \mathbf{J}_{\text{пр}} = \gamma\mathbf{E}, \qquad (17.2)$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля; $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{D}$ — электрическое смещение (электрическая индукция); $\mathbf{J}_{\text{полн}}$ — полная плотность тока; ρ — объемная плотность электрического заряда; $\mu = \mu_0\mu_r$ —абсолютная магнитная проницаемость; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; μ_r — относительная магнитная проницаемость; $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ Ф/м — электрическая постоянная; ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость; $\mathbf{J}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости; γ — удельная электрическая проводимость.

В общем случае полная плотность тока состоит из плотностей тока проводимости, смещения в диэлектрике, переноса и стороннего. Применительно к электрическим машинам плотностями тока смещения в диэлектрике и переноса можно пренебречь и полную плотность тока записать в виде

$$\mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J}_{\text{ст}} + \mathbf{J}_{\text{пр}}. \qquad (17.3)$$

Сторонний ток, как правило, является первопричиной возникновения электромагнитного поля. Значение и характер распределения $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ известны и не зависят от электромагнитных процессов, происходящих в электрической машине.

Система уравнений (17.1) упрощается в частных случаях, имеющих место в электрических машинах. К таким частным случаям относятся магнитостатические, стационарные и переменные магнитные поля. Магнитостатическое поле представляет собой поле неподвижных постоянных магнитов и описывается системой уравнений

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \qquad (17.4)$$

Первое уравнение указывает на то, что магнитное поле носит безвихревой потенциальный характер. Второе уравнение выражает принцип непрерывности магнитного потока, показывает, что магнитное поле не имеет истоков и соленоидально. Магнитная проницаемость μ характеризует свойства среды. Различают среды линейные, в которых μ не зависит от значения магнитного поля, и нелинейные, в которых при изменении магнитного поля изменяется μ. Все реальные среды — нелинейные. Кроме того, среды делятся на однородные (изотропные), в которых свойства среды одинаковы во всех направлениях, и неоднородные (анизотропные), в которых μ — функция координат.

Первопричина возникновения *стационарного поля* — сторонние токи, постоянные во времени, причем положение проводников в пространстве не изменяется. Система уравнений электромагнитного поля приобретает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ст}}; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \qquad (17.5)$$

Переменные во времени (квазистационарные) *электромагнитные поля* описываются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ст}} + \mathbf{J}_{\text{пр}}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t; \\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}; \quad \mathbf{J}_{\text{пр}} = \gamma\mathbf{E}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.6)$$

В (17.5) и (17.6) сторонний ток считается известным и все процессы, связанные с его возникновением, не рассматриваются.

Количественные оценки электромагнитного поля — это напряженность **E** для электрического поля и напряженность **H** или индукция **B** для магнитного поля. В определении этих величин обычно заключается расчет электромагнитного поля. Для большого класса задач расчет магнитного поля существенно упрощается с введением вспомогательных функций — скалярного или векторного потенциала. Это позволяет получать известные дифференциальные уравнения магнитного поля (Пуассона, Лапласа и т. д.) и пользоваться известными методами решения этих уравнений [3, 4, 16, 35, 49, 51, 55].

§ 17.2. Скалярный магнитный потенциал

С помощью скалярного магнитного потенциала описываются магнитные поля, удовлетворяющие условиям потенциальности

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \qquad (17.7)$$

и соленоидальности

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \qquad (17.8)$$

Таким условиям удовлетворяют магнитостатические поля в средах с линейными магнитными характеристиками. Потенциальность магнитного поля позволяет ввести вспомогательную функцию скалярного магнитного потенциала $\varphi_м$, удовлетворяющую равенству

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_м. \tag{17.9}$$

Подставив (17.9) в (17.8), получим уравнение Лапласа в векторной форме:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_м = 0. \tag{17.10}$$

В большинстве практических задач магнитное поле принимается плоскопараллельным. Если пренебречь изменением магнитного поля, например вдоль оси z, то в декартовой системе координат (в плоскости xy) уравнение (17.10) запишется в виде

$$\partial^2\varphi_м/\partial x^2 + \partial^2\varphi_м/\partial y^2 = 0. \tag{17.11}$$

Скалярный магнитный потенциал определяется из (17.11) и является функцией координат (x, y). Линии, соединяющие точки с одинаковыми потенциалами, называются *линиями равного магнитного потенциала*: $\varphi_м(x, y) = \text{const}$. Картина магнитного поля становится наглядной при изображении силовых линий магнитного поля. Ими являются линии, направление касательных к которым совпадает с направлением вектора напряженности поля $\mathbf{H}$. Уравнение для силовых линий магнитного поля имеет вид [71]:

$$\partial x/H_x = \partial y/H_y \quad \text{или} \quad H_y\partial x = H_x\partial y. \tag{17.12}$$

Составляющие напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_x$ и $\mathbf{H}_y$, согласно (17.9), запишем в виде

$$H_x = -\partial\varphi_м/\partial x; \quad H_y = -\partial\varphi_м/\partial y. \tag{17.13}$$

Подставляя (17.13) в (17.12), получим $(\partial\varphi_м/\partial y)\partial x - (\partial\varphi_м/\partial x)\partial y = 0$, интегрирование которого дает общее уравнение для линий магнитного поля

$$\int\left(\frac{\partial\varphi_м}{\partial y}\,\partial x - \frac{\partial\varphi_м}{\partial x}\,\partial y\right) = \text{const}.$$

Согласно (17.9), линии равной напряженности магнитного поля ортогональны линиям равного потенциала. Они являются функцией координат x, y и могут быть представлены в виде $\psi_м(x, y) = \text{const}$, где $\psi_м$ — функция магнитного потока.

Из-за ортогональности линий с равными потенциалами и напряженностями магнитного поля функции $\varphi_м(x, y)$ и $\psi_м(x, y)$ — сопряженные и связаны условиями Коши — Римана

$$\partial\varphi_м/\partial x = -\partial\psi_м/\partial y; \quad \partial\varphi_м/\partial y = \partial\psi_м/\partial x. \tag{17.14}$$

Как и скалярный магнитный потенциал, функция магнитного потока удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2\psi_м/\partial x^2 + \partial^2\psi_м/\partial y^2 = 0. \tag{17.15}$$

Зная значения $\varphi_м$ или $\psi_м$, определенные из (17.11) или (17.15), в любой точке плоскости определяются составляющие напряженности магнитного поля:

$$H_x = -\partial\varphi_м/\partial x = \partial\psi_м/\partial y; \quad H_y = -\partial\varphi_м/\partial y = -\partial\psi_м/\partial x. \quad (17.16)$$

В теории функций комплексного переменного функции магнитного потока и скалярного магнитного потенциала объединяют в одну функцию комплексного переменного, которая называется *комплексной потенциальной функцией магнитного поля*:

$$\omega_м = \psi_м + j\varphi_м. \quad (17.17)$$

Применяя теорию функций комплексного переменного к анализу магнитных полей, можно найти решение многих задач, которые трудно определить другими методами.

§ 17.3. Магнитное поле линейного тока

На примере расчета магнитного поля линейного тока вне проводника с током рассмотрим понятия скалярного магнитного по-

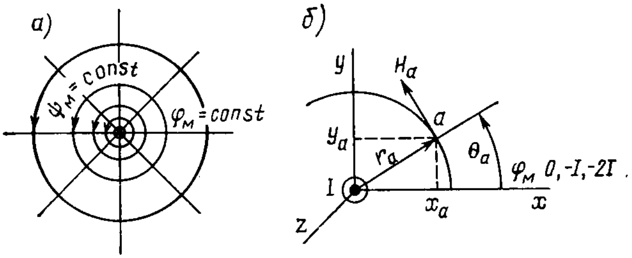

Рис. 17.1. Картина поля линейного тока

тенциала $\varphi_м$ и функции магнитного потока $\psi_м$. Такое магнитное поле будет в однородной среде вокруг бесконечно длинного проводника круглого сечения, по которому течет ток I. Пусть проводник совпадает по направлению с осью z, а ток по проводнику течет в положительном направлении (рис. 17.1). В какой-либо точке a на плоскости xy с координатами x_a, y_a вектор напряженности магнитного поля **H** направлен по касательной к окружности, проходящей через точку a, с центром в начале координат.

В цилиндрической системе координат точка a на плоскости определяется радиусом r_a и углом Θ_a, отсчитанным от оси x против движения часовой стрелки. Напряженность магнитного поля вокруг проводника по закону полного тока

$$\oint_e \mathbf{H}d\mathbf{l} = \mathbf{H}\int_0^{2\pi} Rd\Theta = \mathbf{H}2\pi R = \mathbf{I}.$$

Отсюда $\mathbf{H} = \mathbf{I}/(2\pi R)$. В однородной магнитной среде с проницаемостью μ вектор магнитной индукции **B** совпадает по направлению с вектором магнитной напряженности $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu\mathbf{I}/(2\pi R)$. Очевидно, что вектор $\mathbf{B}$ имеет только касательную составляющую $B_\Theta = \mu\mathbf{I}/(2\pi R)$; $B_R = 0$.

Напряженность магнитного поля и магнитный потенциал вне области с током связаны формулой (17.9), которая в цилиндрической системе координат для касательной составляющей принимает вид $H_\Theta = -(1/R)(\partial\varphi_м/\partial\Theta) = I/(2\pi R)$, откуда

$$\varphi_м = -I\Theta/(2\pi) + \text{const}. \qquad (17.18)$$

Благодаря симметрии магнитного поля при перемещении точки в пространстве вокруг проводника с током против направления вектора напряженности магнитного поля (против положительного направления отсчета углов Θ) потенциал точки возрастает прямо пропорционально изменению ее углового положения относительно тока. Изменение потенциала при движении вокруг проводника с током происходит непрерывно, причем функция $\varphi_м$ определяется однозначно при изменении угла Θ в пределах от 0 до 2π. Приращение потенциала при полном обороте вокруг тока равно I. Линиями равного потенциала являются радиальные линии, проведенные через центр проводника. Окружности, проведенные вокруг проводника с током, являются *линиями равной индукции*. Между двумя окружностями радиусами R_1 и R_2 на единицу длины проводника заключен магнитный поток

$$\Phi = \frac{\mu I}{2\pi}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln r\,\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Из определения функции магнитного потока $\Psi_м$ (см. § 17.2) запишем

$$\psi_м = [I/(2\pi)]\ln r. \qquad (17.19)$$

Линиями функции магнитного потока ($\psi_м = \text{const}$) являются окружности, приращение радиусов которых соответствует постоянной величине приращения потока $\Delta\Phi = \text{const}$. Совокупность линий $\psi_м = \text{const}$ и $\varphi_м = \text{const}$ дает картину магнитного поля (рис. 17.1, *а*), построенную следующим образом. С определенным шагом $\Delta\Theta$ проводим радиальные линии равного магнитного потенциала. Окружности проводим так, чтобы между ними был заключен поток $\Delta\Phi = \text{const}$. Для этого радиусы соседних окружностей должны относиться как $R_{n+1}/R_n = \exp[2\pi\Delta\Phi/(\mu I)]$, где n — порядковый номер окружности.

На рис. 17.1, *а* показана картина магнитного поля при $\Delta\Theta = \pi/4$ и $\exp[2\pi\Delta\Phi/(\mu I)] = 2$. Комплексный потенциал магнитного поля вне области с током

$$\omega_м = \psi_м + j\varphi_м = [I/(2\pi)](\ln r + j\Theta) = [I/(2\pi)]\ln z,$$

где $z = r\exp(j\Theta)$ — комплексная переменная.

§ 17.4. Векторный магнитный потенциал

С помощью векторного потенциала **A** описываются как потенциальные, так и вихревые поля, удовлетворяющие условию соленоидальности. Интеграл векторного магнитного потенциала по любому замкнутому контуру равен магнитному потоку, проходящему через поверхность S, охватываемую этим контуром: $\oint_l \mathbf{A}d\mathbf{l} = \Phi$.

Разделив обе части равенства на S, получим $\left(\oint_l \mathbf{A}d\mathbf{l}\right)/S = \Phi/S$, или при $S \to 0$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{17.20}$$

Так как вихрь градиента любой функции равен нулю, то **A** в (17.20) определяется неоднозначно, потому что ему удовлетворяет любой другой вектор вида $\mathbf{U} = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\delta$, где δ — произвольная скалярная функция.

Поэтому для соленоидальных магнитных полей дополнительно принимают условие $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Воспользовавшись (17.5) и (17.20) для стационарного магнитного поля в средах с линейными магнитными характеристиками ($\mu = \text{const}$), получим $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu\mathbf{J}_{\text{ст}}$. Левую часть этого выражения представим в виде

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{A}.$$

С учетом условия соленоидальности магнитного поля запишем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}_{\text{ст}}.$$

Последнее выражение является уравнением Пуассона в векторной форме. Пусть вектор сторонней плотности тока $\mathbf{J}_{\text{ст}}$, а следовательно, и векторный потенциал **A** для двухмерного поля в декартовой системе координат имеют составляющие только по оси z. Тогда уравнение Пуассона для двухмерного магнитного поля имеет вид

$$\partial^2 A_z/\partial x^2 + \partial^2 A_z/\partial y^2 = -\mu J_{z\,\text{ст}}, \tag{17.21}$$

где A_z, $J_{z\text{ст}}$ — проекции векторов **A** и $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ на ось z.

При $J_{z\text{ст}} = 0$ получим уравнение Лапласа, описывающие магнитное поле в областях без тока:

$$\partial^2 A_z/\partial x^2 + \partial^2 A_z/\partial y^2 = 0. \tag{17.22}$$

Для двухмерного магнитного поля составляющие вектора индукции

$$B_x = \partial A_z/\partial y; \quad B_y = -\partial A_z/\partial x. \tag{17.23}$$

Значения векторного потенциала определяются из решения (17.22) и являются функцией координат x, y. Так как векторный магнитный потенциал обладает свойствами функции потока, то линии, соединяющие точки с одинаковыми значениями A_z, являются *магнитными линиями* (*силовыми линиями магнитного поля*). Совокупность линий равного магнитного потенциала, построенных с определенным шагом изменения значения векторных потенциалов, образует картину магнитного поля. По картине магнитного поля можно судить об интенсивности магнитного потока на отдельных участках области.

Из (17.16) и (17.23) установим связь между скалярными функциями потенциала и векторным потенциалом в областях без тока:

$$\partial A_z/\partial y = -\partial(\mu\varphi_м)/\partial x = \partial(\mu\psi_м)/\partial y;$$

$$\partial A_z/\partial x = \partial(\mu\varphi_м)/\partial y = \partial(\mu\psi_м)/\partial x. \qquad (17.24)$$

В средах с нелинейными магнитными характеристиками уравнение Пуассона для стационарного магнитного поля приобретает вид $\mathrm{rot}\,[(1/\mu)\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] = \mathbf{J}_{ст}$.

В декартовой системе координат для двухмерного поля при $J_{zст}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = -J_{z\,ст}. \qquad (17.25)$$

Двухмерное переменное во времени (квазистационарное) магнитное поле описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = -J_{z\,ст} - J_{пр}. \qquad (17.26)$$

Для расчета $J_{пр}$ воспользуемся законами электромагнитной индукции и Ома в дифференциальной форме. На основании закона электромагнитной индукции (17.1) и (17.20) запишем $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$ или $\mathrm{rot}\,(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0$. Последнее говорит о потенциальности функции $(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t)$; следовательно, справедливо равенство $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\mathrm{grad}\varphi$, или

$$\mathbf{E} = -(\partial\mathbf{A}/\partial t + \mathrm{grad}\,\varphi), \qquad (17.27)$$

где φ — скалярный потенциал электрического поля.

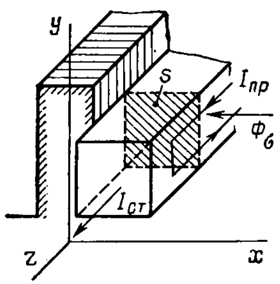

Рис. 17.2. Пример расчета вихревого тока в стержне, лежащем в пазу

Воспользовавшись (17.2) и (17.27), найдем

$$\mathbf{J}_{пр} = -\gamma(\partial\mathbf{A}/\partial t + \mathrm{grad}\,\varphi). \qquad (17.28)$$

В зависимости от решаемых задач градиент скалярной функции φ принимает различные значения. Например, для класса задач, связанных с расчетом переменного во времени магнитного поля в пазах электрических машин с обмоткой, выполненной из массивных стержней (короткозамкнутая обмотка ротора АД, демпферная обмотка СМ и т. д.), градиент скалярной функции φ получим из следующих соображений. При протекании стороннего тока $\mathbf{I}_{ст}$, изменяющегося во времени, возникает поперечно-пазовый поток рассеяния $\Phi_б$, который наводит ЭДС в контуре активной части массивного стержня. Под действием этой ЭДС в массиве стержня протекает вихревой ток $\mathbf{I}_{пр}$ (ток проводимости) (рис. 17.2). Не изменяя стороннего тока, вихревой ток приводит к перераспределению $\mathrm{I}_{ст}$ в поперечном сечении стержня, вытесняя его в верхнюю часть стержня. Контуром для вихревого тока является активная часть массивного стержня, поэтому значение результирующего вихревого тока через поперечное сечение активной части стержня будет равно нулю [40], т. е.

$$\int\limits_s \mathbf{J}_{пр} ds = 0 \quad \text{или} \quad \gamma \int\limits_s (\partial \mathbf{A}/\partial t + \operatorname{grad} \varphi) ds = 0.$$

Из последнего выражения найдем

$$\int\limits_s (\partial \mathbf{A}/\partial t)\, ds = -\int \operatorname{grad} \varphi ds. \qquad \mathbf{(17.29)}$$

Если в сечении активной части стержня $\operatorname{grad} \varphi = \mathrm{const}$, то

$$\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\int\limits_s \mathbf{A} ds\right)\Big/ S\right] = -\partial \mathbf{A}_{ср}/\partial t,$$

где $\mathrm{A}_{ср}$ — среднее значение векторного потенциала в поперечном сечении активной части стержня.

Окончательно плотность тока проводимости

$$\mathbf{J}_{пр} = -\gamma \partial (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{ср})/\partial t. \qquad \mathbf{(17.30)}$$

Когда векторы, характеризующие переменное во времени магнитное поле, изменяются по гармоническому закону с круговой частотой ω, то (17.26) для плоскопараллельного поля принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \dot{\mathrm{A}}_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \dot{\mathrm{A}}_z}{\partial y}\right) = -\dot{\mathrm{J}}_{z\,ст} + j\omega\gamma\,(\dot{\mathrm{A}}_z - \dot{\mathrm{A}}_{ср}) \qquad \mathbf{(17.31)}$$

и расчет ведется с помощью комплексных амплитуд векторов поля.

В некоторых задачах расчета магнитных полей в электрических машинах невозможно пренебречь кривизной отдельных активных или конструктивных элементов машины, поэтому удобно расчетную модель представлять в полярных координатах; (17.31) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \dot{\mathrm{A}}_z}{\partial R}\right) + \frac{1}{\mu R}\left(\frac{\partial \dot{\mathrm{A}}_z}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \dot{\mathrm{A}}_z}{\partial \theta}\right) =$$

$$= -\dot{\mathrm{J}}_{z\,ст} + j\,\omega\gamma\,(\dot{\mathrm{A}}_z - \dot{\mathrm{A}}_{ср})\,. \qquad \mathbf{(17.32)}$$

Уравнения (17.31), (17.32) с нелинейными коэффициентами не имеют аналитических методов решения и поэтому определяются численными методами.

§ 17.5. Магнитное поле у границы раздела двух сред

При переходе из одной среды в другую с различными магнитными характеристиками на границе раздела сред магнитная проницаемость μ претерпевает скачок, а вектор напряженности поля **H** — разрыв. Дифференцирование векторов там, где они терпят разрыв, незаконно и уравнения Максвелла в дифференциальной форме теряют смысл. Поэтому целесообразно рассмотреть поведение векторов **H** и **B** на границе раздела сред. Для этого используем интегральную форму записи закона полного тока

$$\oint\limits_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int\limits_s \mathbf{J}_{\text{полн}} d\mathbf{s} \qquad (17.33)$$

и принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint\limits_s \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0. \qquad (17.34)$$

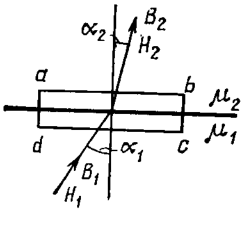

Рис. 17.3. Определение граничных условий ($\mu_1 \gg \mu_2$)

Выделим на границе раздела двух сред контур $abcd$ (рис. 17.3), применительно к которому воспользуемся выражением (17.33). Считая, что внутри контура ток отсутствует, а стороны ad и bc стремятся к нулю, получим $\mathbf{H}_1 \sin\alpha_1 \cdot dc - \mathbf{H}_2 \sin\alpha_2 \cdot ab = 0$, или с учетом, что $ab = dc$,

$$H_{1t} = H_{2t}. \qquad (17.35)$$

Условие (17.25) свидетельствует о равенстве тангенциальных составляющих напряженностей магнитного поля на границе раздела двух сред. Предположим, что ad и bc — образующие цилиндра, тогда при стремлении ad и bc к нулю с учетом (17.34) получим $(\mathbf{B}_1 \cos\alpha_1 - \mathbf{B}_2 \cos\alpha_2)\Delta s = 0$, или

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad (17.36)$$

где B_{1n} и B_{2n} — нормальные составляющие векторов индукции **B** по отношению к поверхности раздела.

Согласно (17.36), на границе раздела двух сред нормальные составляющие индукции изменяются непрерывно. Отношения (17.35) и (17.36) для **B** и **H** называются граничными условиями. Из граничных условий запишем $\mathbf{H}_1 \sin\alpha_1/(\mathbf{B}_1 \cos\alpha_1) = \mathbf{H}_2 \sin\alpha_2/(\mathbf{B}_2 \times \cos\alpha_2)$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_1/\operatorname{tg}\alpha_2 = \mu_1/\mu_2. \qquad (17.37)$$

Согласно *закону преломления магнитных линий на границе двух сред* (17.37), линии магнитного поля на границе воздух — железо нормальны к ферромагнитной поверхности, так как $\mu_{\text{ст}} \gg \mu_0$.

Если электропроводность сред не равна нулю, то вдоль граничной поверхности раздела сред будет распределен поверхностный ток. В этом случае нормальные составляющие индукции по обе стороны границы раздела сред остаются одинаковыми, а тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля отличаются друг от друга на значение поверхностных плотностей тока. Пусть электропроводность поверхности 2 не равна нулю, тогда

$$\mathbf{H}_1 \sin\alpha_1 = \mathbf{H}_2 \sin\alpha_2 + \mathbf{J}_{\text{пов}}. \tag{17.38}$$

При решении задач соотношения, связывающие значения векторов поля по обе стороны поверхности раздела сред, согласно (17.35) и (17.36), выражаются через соответствующие производные функций потока, скалярного или векторного потенциалов магнитного поля. Например, при совпадении линии раздела сред с осью x равенство тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля областей 1 и 2 выразим одним из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &-\partial\varphi_{\text{м1}}/\partial x = -\partial\varphi_{\text{м2}}/\partial x;\ \partial\psi_{\text{м1}}/\partial y = \partial\psi_{\text{м2}}/\partial y;\\ &(1/\mu_1)(\partial A_1/\partial y) = (1/\mu_2)(\partial A_2/\partial y). \end{aligned}\right\} \tag{17.39}$$

Равенство нормальных составляющих индукции магнитного поля областей 1 и 2 выразим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} -\partial(\mu_1\varphi_{\text{м1}})/\partial y &= -\partial(\mu_2\varphi_{\text{м2}})/\partial y;\\ -\partial(\mu_1\psi_{\text{м1}})/\partial x &= -\partial(\mu_2\psi_{\text{м2}})/\partial x;\\ -\partial A_1/\partial x &= -\partial A_2/\partial x. \end{aligned}\right\} \tag{17.40}$$

Однозначность решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих с помощью функций скалярного или векторного потенциала магнитные поля, определяется граничными условиями. В качестве граничных условий принимаются значения потенциальной функции, а также ее производные на границах расчетной области. На практике встречаются следующие граничные условия: 1-го рода (условия Дирихле), когда на границах рассматриваемой области имеются только значения функции; 2-го рода (условия Неймана), когда на границах имеются только производные от функции; 3-го рода (смешанные граничные условия), когда на одной части границ задана функция, а на другой — производные от функции. Если на всех границах заданы граничные условия только 1-го или 2-го рода, то они называются *однородными*.

Согласно (17.24), линии равного векторного и скалярного потенциалов ортогональны; следовательно, для скалярного и векторного потенциалов граничные условия различны. Если для векторного потенциала имеют место граничные условия 1-го рода, то для скалярного потенциала — 2-го рода, и наоборот. Это учитывается при выборе функции, с помощью которой будет проводиться расчет магнитного поля.

При расчете магнитного поля особое внимание уделяется выбору расчетной модели, границы которой выбираются с учетом симметрии и периодичности магнитного поля. Выбор расчетной модели и задание граничных условий рассматриваются в дальнейшем на конкретных примерах.

§ 17.6. Зеркальные отображения

В электрических машинах магнитное поле, создаваемое токами, протекающими по проводникам, замыкается в пространстве, про-

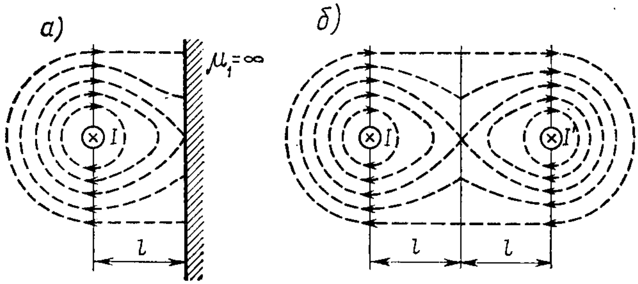

Рис. 17.4. Поле проводника с током у ферромагнитной поверхности

ходя через немагнитные и ферромагнитные среды. Магнитные линии поля циклически распределяются вокруг токов и непрерывно переходят из одной среды в другую. Вхождение линий потока в ферромагнитную среду или выход из нее вызывает появление на граничных поверхностях кажущейся магнитной полярности. При этом магнитную напряженность поля можно рассматривать как совокупность магнитной напряженности, создаваемой непосредственно самими токами, и напряженности, вызываемой кажущейся магнитной полярностью, распределенной на пограничных участках области, заключающей данную точку.

Влияние граничной поверхности на область, ограниченную ею, можно учесть системой токов, создающих то же распределение магнитной напряженности в заданном пространстве при удаленной границе раздела областей в бесконечность. Этот метод называется методом отображений [3, 4]. На рис. 17.4, *а* параллельно бесконечной плоскости, ограничивающей ферромагнитную среду, расположен проводник с током I. Картина магнитного поля показывает, что линии напряженности поля перпендикулярны поверхности ферромагнитной среды, которая является поверхностью равного магнитного потенциала. Аналогичная картина поля в левой полуплоскости имеет место в случае, когда поле образовано двумя проводниками с равными токами, протекающими в одном направлении, при расстоянии между осями проводников $2l$ (рис. 17.4, *б*).

Если относительная магнитная проницаемость ферромагнитной среды $\mu_1 \neq \infty$, то значение отображенного тока

$$I' = [(\mu_1 - 1)/(\mu_1 + 1)]\, I. \qquad (17.41)$$

На практике встречается задача определения поля проводника с током, расположенного в пространстве между двумя ферромагнитными поверхностями (рис. 17.5, *а*).

Картину, аналогичную полученной, в области *ABCD* имеет поле, образованное бесконечно большим числом равно отстоящих друг от друга проводников, находящихся в воздухе и несущих равные токи в одном направлении. Линии ферромагнитных поверхностей (рис. 17.5, *б*) заменены линиями равного магнитного потенциала. Все поле делится на одинаковые части эквипотенциальными прямыми. Таким образом, поле прямолинейного проводника с током

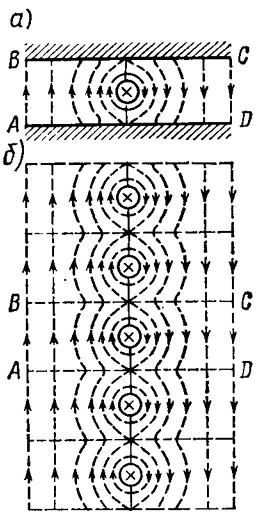

Рис. 17.5. Поле проводника с током в пространстве между ферромагнитными поверхностями

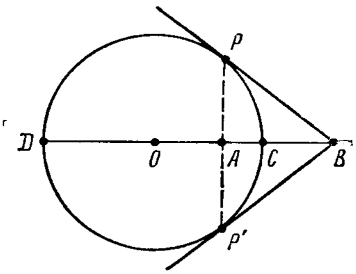

Рис. 17.6. Диаграмма инверсных точек в круге

I, проходящим между ферромагнитными плоскостями, совпадает с полем, образованным действительным током *I* и бесконечным рядом его зеркальных отображений *I'* в ферромагнитных поверхностях с бесконечно большой магнитной проницаемостью.

Практический интерес также представляет задача определения отображения проводника с током относительно поверхности кругового ферромагнитного цилиндра. В этом случае исчезает тождественность между электромагнитным и оптическим отображениями. Из оптики известно, что отражение в цилиндрическом зеркале не дает линейного отображения — объект становится искривленным, расплывчатым. Поэтому при анализе электромагнитных отображений отказываются от законов оптики и пользуются понятием инверсных точек.

Рассмотрим окружность с центром *O* (рис. 17.6). На ее диаметре *DC* выберем какую-либо точку *A*. Затем на продолжении радиуса *OC* окружности строим точку *B* так, чтобы выполнялось равенство

$$OA \cdot OB = OC^2 = R^2. \qquad (17.42)$$

Точки A и B называются *инверсными*. Графически точку B строим так: через точку A проводим хорду перпендикулярно DC и через точки пересечения хорды с окружностью — касательные к окружности, точка их пересечения даст точку B.

Пусть проводник с током I расположен в точке A внутри ферромагнитного полого цилиндра. Напряженность магнитного поля в плоскости цилиндра можно рассчитать, принимая, что поле создается током I в точке A и током I' — в точке B, инверсной по отношению к точке A.

Если проводник с током расположен вне ферромагнитного цилиндрического тела, например в точке B, то напряженность магнитного поля вне цилиндра определяется из условия, что поле создается током I' в точке B и его двумя отображениями: в инверсной точке A (ток I') и в центре окружности (ток I''), причем ток в точке O принимается равным току в точке A, но с противоположным знаком. Когда радиус цилиндра стремится к ∞, т. е. когда цилиндр переходит в плоскость, то отображение в точке O сдвигается в бесконечность и в расчете поля не учитывается.

§ 17.7. Электродинамические усилия, энергия магнитного поля, индуктивность

Рассмотрим выражения для энергии, индуктивности и усилий применительно к стационарным магнитным полям. Внешнее магнитное поле действует на проводник, по которому течет электрический ток, с силой

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})\, dv, \tag{17.43}$$

где dv — элементарный объем проводника, равный произведению его сечения S на длину dl

При интегрировании по сечению проводника получим силу на единицу длины:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})\, S dl = (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\, dl = I\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \tag{17.44}$$

где $\mathbf{I} = \mathbf{J}S$ — вектор тока, направление которого совпадает с направлением тока в проводнике.

Уравнение (17.44) — это закон Ампера в векторной форме. Воспользовавшись теорией векторной алгебры, запишем

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (J_y B_z - J_z B_y)\,\mathbf{i} + (J_z B_x - J_x B_z)\,\mathbf{j} + (J_x B_y - J_y B_x)\,\mathbf{k}, \tag{17.45}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат x, y, z; J_x, J_y, J_z — проекции вектора плотности тока на соответствующие координатные оси; B_x, B_y, B_z — проекции вектора магнитной индукции на соответствующие координатные оси.

По аналогии с (17.45) запишем

$$\mathbf{I}\times\mathbf{B}=(I_yB_z-I_zB_y)\,\mathbf{i}+(I_zB_x-I_xB_z)\,\mathbf{j}+(I_xB_y-$$
$$-I_yB_x)\,\mathbf{k}, \qquad (17.46)$$

где I_x, I_y, I_z — проекции вектора тока на соответствующие координатные оси.

Воспользовавшись (17.44) с учетом (17.45) или (17.46), определим проекции вектора силы $\mathbf{F}$, действующей на проводник конечного сечения с током на координатные оси x, y. Рассматривая двухмерные магнитные поля, совместим вектор плотности тока $\mathbf{J}$ (или вектор тока $\mathbf{I}$) с одной из координатных осей, например с z.

Для проводника конечного сечения

$$F_x=-l\int_s J_zB_y\,ds;\quad F_y=l\int_s J_zB_x\,ds. \qquad (17.47)$$

Для проводника в виде токовой нити

$$F_x=-\int_l I_zB_y\,dl;\quad F_y=\int_l I_zB_x\,dl. \qquad (17.48)$$

Результирующая сила, действующая на проводник с током,

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}. \qquad (17.49)$$

Выражения (17.47), (17.48) исходные при расчетах электродинамических усилий, действующих на обмотки электрических машин.

Векторное произведение двух векторов запишем в виде

$$\mathrm{mod}\,(\mathbf{I}\times\mathbf{B})=IB\sin(\mathbf{I},\mathbf{B}); \qquad (17.50)$$

$$\mathrm{mod}\,(\mathbf{J}\times\mathbf{B})=JB\sin(\mathbf{J},\mathbf{B}). \qquad (17.51)$$

Тогда, воспользовавшись (17.44), найдем значения сил, действующих на проводник конечного сечения:

$$\mathrm{mod}\,F=\int_v JB\sin(\mathbf{J},\mathbf{B})\,dv \qquad (17.52)$$

и на токовую нить:

$$\mathrm{mod}\,F=\int_l IB\sin(\mathbf{I},\mathbf{B})\,dl. \qquad (17.53)$$

Выражения (17.52), (17.53) показывают, что абсолютное значение сил максимально при ортогональности векторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{B}$ или $\mathbf{I}$ и $\mathbf{B}$.

Возьмем прямоугольную бесконечно малых размеров рамку со сторонами a, b и током I и поместим ее в однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ (рис. 17.7). Рамку бесконечно малых размеров с током называют *магнитным диполем*. Рамка в пространстве размещена так, что ее центр совмещен с началом координат, а ось z

проходит через середину сторон b. Вектор $\mathbf{n}$ — это нормаль к поверхности рамки, он образует с осью y угол α. Индукция магнитного поля имеет составляющую только по оси y, т. е. $\mathbf{B} = B_y$. Направление сторон a рамки параллельно оси z, поэтому для них $\mathbf{I} = I_z$. Силы F_1 и F_2, действующие на стороны a рамки, имеют составляющие только по оси x и определяются согласно (17.48):

$$F_1 = -F_2 = -\int_{-a/2}^{a/2} I_z B_y\, dl = -aI_z B_y. \qquad (17.54)$$

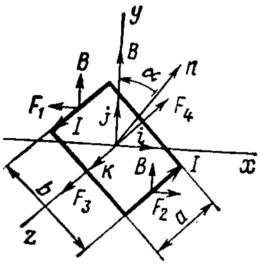

Рис. 17.7. Силы, действующие на рамку с током в магнитном поле

Эти силы создают вращающий момент, действующий в положительном направлении (против часовой стрелки):

$$M = aI_z B_y b \sin\alpha = \mathbf{m} B_y \sin\alpha = \mathbf{m}\times\mathbf{B}, \qquad (17.55)$$

где $\mathbf{m}$ — магнитный дипольный момент:

$$\mathbf{m} = Iab\mathbf{n} = IS\mathbf{n}, \qquad (17.56)$$

S — площадь рамки.

Направление сил F_3 и F_4, действующих на стороны b рамки, определим по правилу левой руки, а их модуль — по (17.53):

$$F_3 = -F_4 = -\int_{-b/2}^{b/2} IB_y \sin(\mathbf{I}, \mathbf{B})\, dl.$$

Силы равны и противоположны по знаку и не оказывают влияния на перемещение рамки. При перемещении рамки под действием вращающего момента на угол $d\alpha$ энергия системы (рамки с током в стороннем магнитном поле) уменьшается на

$$dW_c = -M d\alpha = -ISB_y \sin\alpha \cdot d\alpha = Id(SB_y \cos\alpha) = Id\Phi.$$

Магнитный поток, проходящий через рамку,

$$\Phi = SB_y \cos\alpha = SB_n, \qquad (17.57)$$

где B_n — проекция вектора $\mathbf{B}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости рамки.

При повороте рамки (рис. 17.7) от $\alpha_1 = -\pi/2$ до $\alpha_2 = 0$ сцепленный с ней магнитный поток внешнего поля изменяется от $\Phi_1 = 0$ до $\Phi_2 = \Phi_{max} = SB_y$. При этом энергия системы изменилась на

$$W_c = I\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Phi_{max}. \qquad (17.58)$$

Выражение (17.57), используя теорему Стокса, которая устанавливает связь между поверхностным интегралом нормальной составляющей ротора вектора $\mathbf{A}$ с циркуляцией этого вектора по контуру, ограничивающему поверхность [18], перепишем так:

$$\Phi = \int_s B_n \, ds = \int_s (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_n \, ds = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Учитывая это, (17.58) запишем в виде

$$W_c = \oint_l I\mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{I}\mathbf{A} dl = \int_v \mathbf{A}\mathbf{J} dv, \qquad \textbf{(17.59)}$$

где линейный элемент тока $\mathbf{I}dl$ заменен объемным $\mathbf{J}dv$.

Из (17.59) найдем плотность энергии системы:

$$dW_c/dv = \mathbf{AJ}. \qquad \textbf{(17.60)}$$

Энергия магнитного поля в некотором объеме, ограниченном поверхностью S, охватывающей данный контур с током,

$$W_s = \int_v \mathbf{AJ} dv - \oint_s (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \, ds. \qquad \textbf{(17.61)}$$

При удалении поверхности S в бесконечность, а также в случае равенства векторного магнитного потенциала на поверхности s нулю (17.61) сводится к (17.59).

При отсутствии стороннего поля векторный потенциал собственного магнитного поля рамки с током пропорционален плотности тока:

$$\mathbf{A} = k \cdot \mathbf{J}, \qquad \textbf{(17.62)}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

В этом случае изменение плотности энергии определяется изменением плотности тока контура. Например, при изменении плотности тока от $J_1 = 0$ до $J_2 = J$ плотность энергии контура изменяется на

$$\frac{dW_к}{dv} = \int_{J_1}^{J_2} \mathbf{A} d\mathbf{J} = \int_{J_1}^{J_2} k\mathbf{J} d\mathbf{J} = \frac{1}{2} k\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{AJ}. \qquad \textbf{(17.63)}$$

По аналогии с (17.59), магнитную энергию изолированного контура с током определим как

$$W_к = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{AJ} dv = \frac{1}{2} \oint_l \mathbf{AI} dl. \qquad \textbf{(17.64)}$$

Наряду с (17.64) для расчета энергии контура с током применяют формулы (17.65) — (17.67), полученные из следующих соображений. Известно [49], что $\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{HB} + \mathrm{div}\,(\mathbf{H} \times \mathbf{A})$. Это позволяет записать (17.64) с учетом (17.5) в виде

$$W_к = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \, dv = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{BH} \, dv + \frac{1}{2} \int_v \mathrm{div}\,(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \, dv. \qquad \textbf{(17.65)}$$

Согласно теореме Гаусса, устанавливающей связь между объемным интегралом от дивергенции вектора с интегралом от этого вектора по поверхности, окружающей его, справедливо равенство $\int\limits_v \operatorname{div}(\mathbf{H}\times\mathbf{A})\,dv = \oint\limits_s (\mathbf{H}\times\mathbf{A})\,ds$. Тогда

$$W_к = \frac{1}{2}\int\limits_v \mathbf{B}\,\mathbf{H}\,dv + \frac{1}{2}\oint\limits_s (\mathbf{H}\times\mathbf{A})\,ds. \tag{17.66}$$

Если отнести границу поверхности s на такое расстояние от источника поля, где магнитное поле отсутствует, то

$$\oint\limits_s (\mathbf{H}\times\mathbf{A})\,ds = 0, \quad W_к = \frac{1}{2}\int\limits_v \mathbf{B}\mathbf{H}\,dv. \tag{17.67}$$

Интегрирование в (17.67) распространяется на весь объем существования магнитного поля независимо от источников поля. Потокосцепление контура определяется произведением потока $\Phi_к$ на число витков контура. Связь между потокосцеплением и током контура устанавливается через индуктивность контура. Собственная индуктивность уединенного одновиткового контура

$$L_к = \Psi_к/I = \Phi_к/I = \frac{1}{I}\oint\limits_l \mathbf{A}\,d\mathbf{l} = \frac{1}{I^2}\int\limits_v \mathbf{A}\mathbf{J}dv. \tag{17.68}$$

Связь между магнитной энергией контура (17.64), индуктивностью (17.68) и потокосцеплением устанавливается следующим соотношением:

$$W_к = (1/2)\,L_к I^2 = (1/2)\,\Psi_к I. \tag{17.69}$$

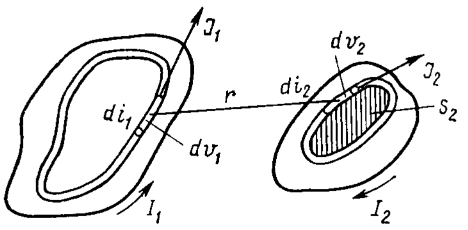

Рис. 17.8. Пример расчета коэффициентов взаимной индукции

В магнитосвязанных контурах магнитный поток, сцепленный с каким-либо контуром, вызван током данного контура и совокупностью токов других контуров. Пусть в среде с линейными магнитными характеристиками расположены произвольно два контура с токами I_1 и I_2 (рис. 17.8). Потокосцепление второго контура запишем в виде

$$\Psi_{21} = (1/I_2)\int\limits_{v_2} \mathbf{J}_2\mathbf{A}_1\,dv_2. \tag{17.70}$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}_1$ определяет магнитное поле второго контура, созданное током первого контура I_1. Плотность тока J_1 и вектор $\mathbf{A}_1$ в среде с магнитной проницаемостью μ_0 связаны соотношением

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{v_1} \mathbf{J}_1\frac{dv_1}{r}. \tag{17.71}$$

После подстановки (17.71) в (17.70) получим

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi I_2} \int\limits_{v_2} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2}{r} dv_1 dv_2. \tag{17.72}$$

Коэффициенты взаимной индукции второго контура с первым

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \int\limits_{v_1}\int\limits_{v_2} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2}{r} dv_1 dv_2. \tag{17.73}$$

Коэффициент взаимной индукции первого контура со вторым

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \int\limits_{v_1}\int\limits_{v_2} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2}{r} dv_1 dv_2 = L_{21}. \tag{17.74}$$

Полное потокосцепление k-го контура, обусловленное собственным потоком и потоком взаимной индукции m контуров, равно

$$\Psi_{к} = L_{к} I_{к} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} L_{m\,к} I_m, \quad m \neq k. \tag{17.75}$$

Таким образом установлена взаимосвязь между энергией, электродинамическими усилиями и индуктивностями контуров.

Поток электромагнитной энергии, передаваемой в единицу времени через единицу поверхности, нормальной к направлению распространения волны электромагнитного поля, называют вектором Умова — Пойнтинга и обозначают

$$\mathbf{S}_{п} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]. \tag{17.76}$$

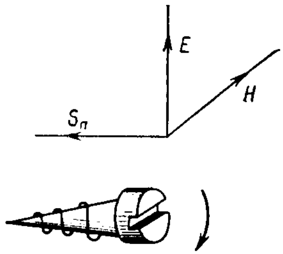

Рис. 17.9. Определение направления вектора Умова — Пойнтинга

Рассмотрим произвольно выбранный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Мощность потока электромагнитной энергии через поверхность S запишем в виде

$$P = \oint\limits_{S} \mathbf{S}_{п} d\mathbf{S} = \oint\limits_{S} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]\, d\mathbf{S}. \tag{17.77}$$

Направление потока энергии определим по правилу правого винта, если головку винта вращать от вектора **E** к вектору **H** по кратчайшему пути (рис. 17.9). Поток энергии перпендикулярен плоскости, содержащей векторы **E** и **H**.

Внутри области V могут существовать источники электромагнитной энергии, в которых механическая работа преобразуется в электромагнитную энергию. Обозначив через P_e мощность этих источников, запишем на основании закона сохранения энергии следующее равенство [16, 49, 51]:

$$P_e = \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) + \int\limits_V \gamma E^2 dV + \int\limits_V \mathbf{J}_{пер}\, \mathbf{E} dV +$$

$$+ \oint\limits_S [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]\, ds. \qquad (17.78)$$

Умножая (17.78) на dt, получим, что работа, совершаемая всеми источниками за время dt, идет на: изменение энергии магнитного и электрического полей в объеме V (первое слагаемое правой части уравнения); выделение теплоты в этом объеме — активные потери (второе слагаемое); увеличение кинетической энергии находящихся в объеме свободных заряженных частиц (в теории электрических машин этим слагаемым пренебрегают — третье слагаемое) и передачу части энергии (последнее слагаемое) за пределы рассматриваемой области сквозь поверхность S.

ГЛАВА 18. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 18.1. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных (метод Фурье — Эйлера) является одним из наиболее распространенных методов расчета потенциальных магнитных полей в областях, ограниченных поверхностями, параллельными координатным поверхностям или совпадающими с ними при однородных граничных условиях. Потенциальные магнитные поля описываются уравнением Лапласа, которое для двухмерного поля в декартовой системе координат запишем в виде

$$\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = 0, \qquad (18.1)$$

где U — функция скалярного или векторного потенциала, или функция потока.

Искомую функцию $U(x, y)$ представим в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной [55]:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \qquad (18.2)$$

После дифференцирования (18.2) по x и y и подстановки в (18.1) получим

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0. \qquad (18.3)$$

Разделив слагаемые в (18.3) на $X(x)\ Y(y)$, запишем

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \cdot \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0. \qquad (18.4)$$

При изменении аргументов слагаемые выражения (18.4) будут оставаться, например, равными λ, но с разными знаками. Это позволяет из (18.4) получить два простых дифференциальных уравнения:

$$d^2X(x)/dx^2 + \lambda X(x) = 0; \tag{18.5}$$

$$d^2Y(y)/dy^2 - \lambda Y(y) = 0, \tag{18.6}$$

где λ — любое положительное или отрицательное число, одинаковое для обоих уравнений.

Знак λ выбирается с учетом граничных условий и возможности существования ненулевых решений. В зависимости от λ корни характеристических уравнений получатся действительными или комплексными. Общие решения дифференциальных уравнений (18.5), (18.6) будут следующими:

при $\lambda < 0$

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= C_1 \exp\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\lambda}\, x\right); \\ Y(y) &= C_1' \cos\left(\sqrt{\lambda}\, y\right) + C_2' \sin\left(\sqrt{\lambda}\, y\right); \end{aligned}\right\} \tag{18.7}$$

при $\lambda > 0$

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right); \\ Y(y) &= C_1' \exp\left(\sqrt{\lambda}\, y\right) + C_2' \exp\left(-\sqrt{\lambda y}\right); \end{aligned}\right\} \tag{18.8}$$

при $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= C_{10}\, x + C_{20}; \\ Y(y) &= C_{10}'\, y + C_{20}'. \end{aligned} \tag{18.9}$$

Ненулевые решения могут получиться при нескольких значениях λ. Тогда решения уравнения Лапласа получим как сумму частных решений:

$$U(x, y) = \sum_{n=\lambda=}^{n=\lambda=\infty} X_n(x) \cdot Y_n(y). \tag{18.10}$$

На примере определения конфигурации полюсов машин переменного тока, обеспечивающих синусоидальное распределение индукции на поверхности расточки статора, рассмотрим использование метода разделения переменных. Принимаем следующие допущения: длина машины бесконечно велика по сравнению с воздушным зазором и магнитное поле — плоскопараллельное; процессы, связанные с образованием магнитного поля в зазоре машины, не рассматриваем, задавая относительные значения потенциалов поверхностей, ограничивающих рассматриваемую область магнитного поля; статор и ротор неподвижны относительно друг друга; пренебрегаем кривизной и зубчатостью поверхности статора, краевыми эффектами на торцах машины, насыщением железа магнитопровода. Это позволяет свести расчет магнитного поля к решению уравнения Лапласа для магнитостатического поля (17.11), записанного в декартовой системе координат. Используем скалярный магнитный потенциал $\varphi_м$. Учитывая периодичность распределения магнитного поля по расточке машины, ограничимся расчетом магнитного поля в пределах τ_1 полюсного деления (рис. 18.1).

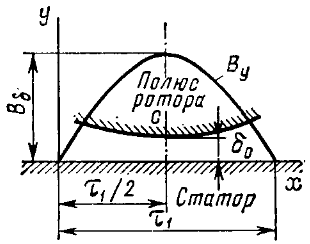

Рис. 18.1. Расчетная схема

Наименьшее значение воздушного зазора δ_0 имеет место под серединой полюса ($x = \tau_1/2$). Магнитная индукция на поверхности расточки статора изменяется по гармоническому закону

$$B_y\,(y = 0) = B_\delta \sin(\pi x/\tau_1). \qquad (18.11)$$

Расчет поля проведем в области полосы, ограниченной линиями $x = 0$, $x = \tau_1$ и $y = 0$. Из-за периодичности магнитного поля и того, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика по сравнению с воздухом, линии магнитного поля нормальны к линиям $x = 0$, $x = \tau_1$ и $y = 0$. Эти линии для магнитного скалярного потенциала будут эквипотенциалями. В качестве граничных условий на линиях $x = 0$ и $x = \tau_1$ и на линии $y = 0$ (поверхность статора) соответственно имеем

$$H_y = -\,(\partial\varphi_м/\partial y)_{\substack{x=0\\x=\tau_1}} = 0; \qquad (18.12)$$

$$H_y = -\,(\partial\varphi_м/\partial y)_{y=0} = (1/\mu_0)\,B_\delta \sin(\pi x/\tau_1);$$
$$H_x = -\,(\partial\varphi_м/\partial x)_{y=0} = 0. \qquad (18.13)$$

Ферромагнитная поверхность якоря эквипотенциальна, поэтому имеем

$$\varphi_м\,(x,\ 0) = 0. \qquad (18.14)$$

Согласно граничному условию (18.13), напряженность магнитного поля на поверхности якоря представляет собой гармоническую функцию координаты x. Следовательно, общее решение (18.5) должно также быть гармонической функцией, т. е. иметь вид (18.8), соответствующий $\lambda > 0$.

Сумма частных решений уравнения Лапласа для функции скалярного магнитного потенциала $\varphi_м(x, y)$ имеет вид (18.10). Так как $\varphi_м(x, 0) = 0$; $H_x(x, 0) = 0$; $H_y(x, 0) = (1/\mu_0)B_\delta \sin(\pi x/\tau_1)$, то $C_{10} = 0$; $C'_{10} = 0$; $C_{20} = 0$; $C'_{20} = 0$. Функция скалярного магнитного потенциала с учетом (18.10)

$$\varphi_м\,(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n\,(x)\cdot Y_n\,(y). \qquad (18.15)$$

При $y = 0$, согласно граничному условию (18.14), $\varphi_м\,(x,\ 0) = \sum\limits_{n=1} X_n\,(x)\cdot Y_n\,(y) = 0$. Так как $X_n(x) \neq 0$, то

$$Y_n(0) = 0. \tag{18.16}$$

Тогда общее решение $Y_n(y)$ (18.8) при $y = 0$ с учетом (18.16) имеет вид $Y_n(0) = C_1' + C_2' = 0$, откуда

$$C_1' = -C_2'. \tag{18.17}$$

С учетом (18.17), $A_{1n} = C_1C_1'$, $A_{2n} = C_2C_1'$ и общих решений для $X_n(x)$ и $Y_n(x)$ выражение (18.15) запишем в виде

$$\varphi_{\text{м}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + A_{2n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\times$$
$$\times\left[\exp\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right) - \exp\left(-\sqrt{\lambda_n}\,y\right)\right]. \tag{18.18}$$

Определим составляющую напряженности магнитного поля H_y:

$$H_y = -\partial\varphi_{\text{м}}(x, y)/\partial y = -\sqrt{\lambda_n}\left(A_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + A_{2n}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\left[\exp\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right) - \exp\left(-\sqrt{\lambda_n}\,y\right)\right]. \tag{18.19}$$

Используя граничное условие (18.13), получим $A_{1n} = 0$; $-2\sqrt{\lambda_n}\,A_{2n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x = \left(1/\mu_0\right)B_\delta\sin\left(\pi x/\tau_1\right)$. Отсюда

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi/\tau_1;$$

$$A_{2n} = -B_\delta\,\tau_1/(2\pi\mu_0). \tag{18.20}$$

Учитывая, что $0{,}5[\exp(\pi y/\tau_1) - \exp(-\pi y/\tau_1)] = \operatorname{sh}(\pi y/\tau_1)$, получим в конечном виде

$$\varphi_{\text{м}}(x, y) = -\frac{B_\delta\sin(\pi x/\tau_1)}{\mu_0\,\pi/\tau_1}\operatorname{sh}(\pi y/\tau_1). \tag{18.21}$$

Определим составляющие напряженности магнитного поля

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -\partial\varphi_{\text{м}}(x, y)/\partial y = [B_\delta\sin(\pi x/\tau_1)\operatorname{ch}(\pi y/\tau_1)]/\mu_0;\\ H_x &= -\partial\varphi_{\text{м}}(x, y)/\partial x = [B_\delta\cos(\pi x/\tau_1)\operatorname{sh}(\pi y/\tau_1)]/\mu_0.\end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

Уравнение для линии магнитного поля (см. § 17.2)

$$\operatorname{ch}(\pi y/\tau_1)\cos(\pi x/\tau_1) = k = \text{const}. \tag{18.23}$$

На рис. 18.2 построена картина магнитного поля при изменении k от $-1{,}8$ до $1{,}8$ с шагом $\Delta k = 0{,}2$. Силовые линии магнитного поля и эквипотенциали ортогональны. Воспользовавшись (18.21), запишем уравнение для эквипотенциальных линий

$$\varphi_{\text{м}}(x, y) = -(B_\delta\,\tau_1/(\mu_0\pi))\sin(\pi x/\tau_1)\operatorname{sh}(\pi y/\tau_1) = k_1 = \text{const}. \tag{18.24}$$

При достаточно большой магнитной проницаемости стали полюса ($\mu \gg \mu_0$) его поверхность эквипотенциальна. Чтобы при внесении полюса картина силовых линий магнитного поля не исказилась (распределение индукции в воздушном зазоре подчинялось синусоидальному закону), конфигурация поверхности полюса должна удовлетворять уравнению (18.24). Постоянная k_1 равна потенциалу точки с координатами $x = \tau_1/2$ и $y = \delta_0$ (рис. 18.1): $k_1 = -(B_\delta \tau_1/(\mu_0\pi)) \operatorname{sh}(\pi\delta_0/\tau_1)$. Таким образом, конфигурация поверхности полюса описывается уравнением

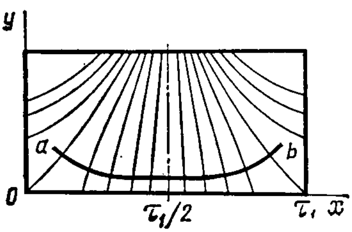

Рис. 18.2. Картина силовых линий магнитного поля на полюсном делении

$$\sin(\pi x/\tau_1)\operatorname{sh}(\pi y/\tau_1) = \operatorname{sh}(\pi\delta_0/\tau_1). \qquad \textbf{(18.25)}$$

Решение этого уравнения при $\delta_0/\tau_1 = 0{,}05$ представлено на рис. 18.2 в виде кривой ab. В реальных случаях $\pi\delta_0 \ll \tau_1, \pi y \ll \tau_1$, что позволяет принять $\operatorname{sh}(\pi y/\tau_1) \approx \pi y/\tau_1$; $\operatorname{sh}(\pi\delta_0/\tau_1) \approx \pi\delta_0/\tau_1$ и существенно упростить (18.25). Для пределов изменения ширины полюсной дуги $0{,}2 \leqslant x/\tau_1 \leqslant 0{,}8$ уравнение (18.25) запишем в виде

$$y = \delta_0/\sin(\pi x/\tau_1). \qquad \textbf{(18.26)}$$

Эта зависимость используется при выборе конфигурации поверхности полюсов, обеспечивающих синусоидальное распределение индукции в воздушном зазоре явнополюсных машин переменного тока.

§ 18.2. Метод Роговского

Метод Роговского используется при расчете стационарных магнитных полей. Расчет проводится с помощью векторного магнитного потенциала, удовлетворяющего уравнению Пуассона в областях с токами и уравнению Лапласа в областях без тока. Сущность метода заключается в том, что функция векторного магнитного потенциала определяется в виде ряда Фурье, аналогичного ряду, который получится при разложении тока в рассматриваемой области (в пределах заданных границ) [3, 4, 55]. Этим методом решаются задачи определения: поля проводников с током, лежащих в бесконечном равномерном воздушном зазоре; поля рассеяния в пазу электрической машины; поля рассеяния обмоток стержневого трансформатора и т. д.

На примере расчета поля рассеяния в пазу электрической машины рассмотрим реализацию метода Роговского. Пусть машина имеет открытые пазы с параллельными ферромагнитными поверхностями стенок. Ферромагнитная среда имеет бесконечно большую магнитную проницаемость. Обмотка — стержневая, однослойная. Ток, протекающий в стержнях обмотки, стационарный, равномерно распределен по сечению стержня. Расчетная схема представлена на рис. 18.3. Бесконечно большая магнитная проницаемость ферромагнитных стенок паза позволяет воспользоваться методом зеркальных отображений и заменить проводник с током, лежащий в пазу, системой бесконечного ряда токов. Удобно рассматривать поле в трех областях. Разделение по областям проводится таким образом, чтобы получить наиболее простое выражение, описывающее распределение плотности тока.

В областях *1* и *3* токи отсутствуют и магнитное поле описывается уравнением Лапласа. В области *2* лежат проводники с током и магнитное поле описывается уравнением Пуассона. Бесконечная система токов является периодической функцией координаты x и может быть представлена в виде ряда Фурье с периодом 2π, соответствующим ширине паза $b_п$. При выбранном положении начала координат ряд Фурье для расчета плотности тока J содержит только составляющие, являющиеся функциями косинуса:

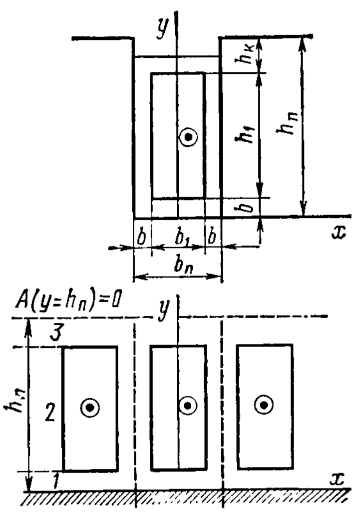

Рис. 18.3. Пример расчета электромагнитного поля в пазу

$$J_z = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos nkx, \qquad (18.27)$$

где коэффициенты ряда Фурье

$$J_0 = J_{ст} b_1/b_п; \quad J_n = (2/\pi) J_{ст} (-1)^n \times \times (1/n) \sin (nkb_1/2); \qquad (18.28)$$

n — порядковый номер гармонической; $k = 2\pi/b_п$.

Из (18.27) следует, что в выражении для векторного потенциала все члены, зависящие от x, должны быть косинусоидальными функциями. На основании (18.10) общее выражение A_z для областей без тока и с током запишем соответственно в виде

$$A_{1,3} = \mu_0 (C_1 + C_2 y) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n (y) \cos (nkx), \qquad (18.29)$$

$$A_2 = \mu_0 (D_1 + D_2 y + D_3 y^2) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n (y) \cos (nkx). \qquad (18.30)$$

Постоянная $D_3 \neq 0$ только при наличии постоянной составляющей плотности тока, т. е. при $J_0 \neq 0$.

В областях без тока, где распределение векторного потенциала описывается уравнением Лапласа (17.22), для функции $Y_n(y)$ справедливо (18.6) при $\lambda = n^2k^2$:

$$d^2 Y_n (y)/dy^2 - n^2 k^2 Y_n (y) = 0. \qquad (18.31)$$

Общее решение (18.31) в соответствии с (18.8) запишем в виде

$$Y_n(y) = C_n \exp(nky) + C'_n \exp(-nky). \quad (18.32)$$

В областях с током, где справедливо уравнение Пуассона (17.21), функция $Y_n(y)$ описывается уравнением

$$d^2Y_n(y)/dy^2 - n^2k^2Y_n(y) = -J_n, \quad (18.33)$$

общее решение которого имеет вид

$$Y_n(y) = D_n \exp(nky) + D'_n \exp(-nky) + J_n/(n^2k^2). \quad (18.34)$$

Для непериодической составляющей

$$A'_2 = \mu_0(D_1 + D_2y + D_3y^2) \quad (18.35)$$

справедливо уравнение $\partial^2A'_2/\partial x^2 + \partial^2A'_2/\partial y^2 = -\mu_0J_0$, откуда

$$\mu_0 2D_3 = -\mu_0 J_0 = -\mu_0 J_{\text{ст}} b_1/b_{\text{п}}. \quad (18.36)$$

Найдем постоянную интегрирования $D_3 = -0{,}5J_{\text{ст}}b_1/b_{\text{п}}$, или, учитывая, что $I_{\text{п}} = J_{\text{ст}}b_1h_1$,

$$D_3 = -I_{\text{п}}/(2b_{\text{п}}h_1). \quad (18.37)$$

Общие решения уравнений для векторного потенциала с учетом (18.32) и (18.34) для любой из областей:

для области *1*

$$A_1 = \mu_0(C_1 + C_2y) + \mu_0\sum_{n=1}^{\infty}[C_n \exp(nky) + C'_n \exp(-nky)]\cos(nkx); \quad (18.38)$$

для области *2*

$$A_2 = \mu_0(D_1 + D_2y + D_3y^2) + \mu_0\sum_{n=1}^{\infty}[D_n \times \exp(nky) + D'_n \exp(-nky) + J_n/(n^2k^2)]\cos(nkx); \quad (18.39)$$

для области *3*

$$A_3 = \mu_0(E_1 + E_2y) + \mu_0\sum_{n=1}^{\infty}[E_n \exp(nky) + E'_n \exp(-nky)]\cos(nkx). \quad (18.40)$$

Для определения постоянных используются граничные условия и условия непрерывности силовых линий магнитного поля на границах зон. Ось координат x направлена по ферромагнитной поверхности дна паза. При $\mu \gg \mu_0$ имеем

$$B_x(y=0) = (\partial A_1/\partial y)_{y=0} = \mu_0 C_2 + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} nk \times$$

$$\times (C_n - C_n') \cos(nkx) = 0. \qquad \textbf{(18.41)}$$

Отсюда $C_2 = 0$; $C_n = C_n'$. С учетом вышеизложенного

$$A_1 = \mu_0 C_1 + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\exp(nky) + \exp(-nky)] \cos(nkx). \qquad \textbf{(18.42)}$$

Считаем, что высота $h_к$, занятая клином паза и изоляцией, достаточно велика, и пренебрегаем выпучиванием силовых линий магнитного поля паза в сторону воздушного зазора. Это позволяет принять линию при $y = h_п$, параллельную оси x, за силовую линию магнитного поля. При использовании векторного потенциала эта линия является также линией равного векторного потенциала. Примем значение векторного потенциала на этой линии

$$A_3(y = h_п) = 0. \qquad \textbf{(18.43)}$$

В этом случае из (18.40) получим $E_1 + E_2 y = 0$; $E_n \exp(nkh_п) + E_n' \exp(-nkh_п) = 0$, откуда

$$E_1 = -h_п E_2; \quad E_п = -E_п' \exp(-2nkh_п).$$

Векторный потенциал в области *3*

$$A_3 = -\mu_0 E_2 (h_п - y) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} E_n' [\exp(-nky) -$$

$$- \exp(-2nkh_п) \exp(nky)] \cos(nkx). \qquad \textbf{(18.44)}$$

При $y = h_п$ индукция имеет только тангенциальную составляющую, которую можно найти из закона полного тока. При магнитной проницаемости зубцов $\mu \gg \mu_0$ и интегрировании по направлению вектора индукции

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{b_п/2}^{-b_п/2} B_x(y = h_п))\, dl = I_п,$$

откуда $B_x(y = h_п) = -\mu_0 I_п / b_п$.

Тогда с учетом (18.44)

$$B_x = (\partial A_3/\partial y)_{y=h_п} = \mu_0 E_2 = -\mu_0 I_п / b_п, \qquad \textbf{(18.45)}$$

откуда $E_2 = -I_п/b_п$.

Постоянные в выражениях векторного потенциала (18.42), (18.39) и (18.44) определим, воспользовавшись принципом непрерывности магнитных линий поля. Согласно этому принципу, на границах областей должно выполняться равенство периодических и непериодических членов в выражениях для векторного потенциала и его первых производных по x и y. При $y = b$ на границе между областями *1* и *2* из условия $A_1 = A_2$ найдем

$$D_1 + D_2 b + D_3 b^2 = C_1; \tag{18.46}$$

$$C_n [\exp(nkb) + \exp(-nkb)] = D_n \exp \times$$
$$\times (nkb) + D'_n \exp(-nkb) + J_n/(n^2k^2) \tag{18.47}$$

и из условия $\partial A_1/\partial y = \partial A_2/\partial y$ имеем

$$D_2 + 2D_3 b = 0; \tag{18.48}$$

$$C_n [\exp(nkb) - \exp(-nkb)] = D_n \exp(nkb) - D'_n \exp(-nkb). \tag{18.49}$$

При $y = b + h_1$ на границе между областями *2* и *3* из условия $A_2 = A_3$ найдем

$$D_1 + D_2(b + h_1) + D_3(b + h_1)^2 = -E_2(h_п - b - h_1); \tag{18.50}$$

$$D_n \exp(nk(b + h_1)) + D'_n \exp(-nk(b + h_1)) +$$
$$+ J_n/(n^2k^2) = E'_n [\exp(-nk(b + h_1)) - \exp(2nkh_п) \times$$
$$\times \exp(nk(b + h_1))]; \tag{18.51}$$

а из условия $\partial A_2/\partial y = \partial A_3/\partial y$ имеем

$$D_2 + 2D_3(b + h_1) = E_2; \tag{18.52}$$

$$D_n \exp(nk(b + h_1)) - D'_n \exp(-nk(b + h_1)) =$$
$$= -E'_n [\exp(-2nkh_п) \exp(nk(b + h_1) + \exp(-nk \times$$
$$\times (b + h_1))]. \tag{18.53}$$

Таким образом, получили систему уравнений (18.46), (18.48), (18.50) и (18.52) для коэффициентов непериодических членов и систему уравнений (18.47), (18.49), (18.51) и (18.53) для коэффициентов периодических членов выражений для векторных потенциалов.

Из (18.48) с учетом (18.37) определим $D_2 = -2bD_3 = I_п b_1/(b_п h_1)$.

Из (18.50) находим $D_1 = -[I_п'(2b_п h_1)][(b + h_1)^2 - 2h_1 b_п]$.

Из (18.46) определим $C_1 = (I_п/b_п)(h_п - b - h_1/2)$.

Из системы уравнений для коэффициентов периодических членов получим выражения для постоянных:

$$C_n = D'_n + [J_n/(2n^2k^2)] \exp(nkb);$$

$$D_n = D'_n + [J_n/(2n^2k^2)] \operatorname{sh}(nkb);$$

$$E'_n = D'_n + [J_n/(2n^2k^2)] \exp(nk(b + h_1));$$

$$D'_n = -[J_n/(2n^2k^2)] [\operatorname{ch}(nkh_к) +$$
$$+ \exp(nkh_п) \operatorname{sh}(nkb)]/\operatorname{ch}(nkh_п).$$

Подставив в (18.38) — (18.40) полученные коэффициенты, запишем выражения для векторных потенциалов:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \mu_0 (I_п/b_п)(h_п - b - h_1/2) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (J_n/(n^2k^2)) \cdot N(n) \times \\
&\quad \times \operatorname{ch}(nky)\cos(nkx); \\
A_2 &= \mu_0 (I_п/(2b_п h_1))\,[2h_1(h_п - b - h_1/2) - (y-b)^2] + \\
&\quad + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (J_n/(n^2k^2))\,[1 - \operatorname{ch}(nk(y-b)) + N(n)\operatorname{ch}(nky)]\cos(nkx); \\
A_3 &= \mu_0 (I_п/b_п)(h_п - y) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (J_n/(n^2k^2))\,[N(n) \times \\
&\quad \times \operatorname{ch}(nky) - \operatorname{ch}(nk(y-b)) + \operatorname{ch}(nk(y-b-h_1))]\cos(nkx);
\end{aligned}\right\} \quad (18.54)$$

где коэффициент

$$N(n) = [\operatorname{ch}(nk(h_п - b)) - \operatorname{ch}(nkh_к)]/\operatorname{ch}(nkh_п).$$

Выражения (18.54) позволяют рассчитать распределение векторного потенциала в области паза. Линии, соединяющие точки с одинаковыми значениями векторных потенциалов, являются силовыми линиями магнитного поля. Типичная картина магнитного поля, имеющая место в пазу электрической машины, представлена на рис. 18.4. Соотношение между высотой и шириной паза $h_п = 2b_п$. Как следует из рис. 18.4, искривления силовых линий магнитного поля, за исключением нижней части паза, практически незаметны.

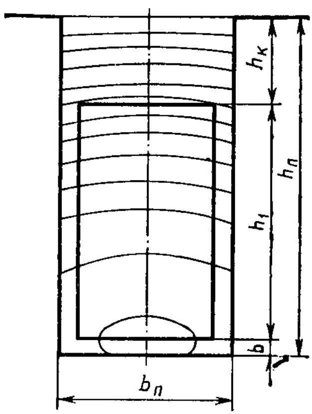

Рис. 18.4. Картина силовых линий магнитного поля в пазу

Искривление силовых линий в нижней части паза показывает наличие потока рассеяния через дно паза. В инженерной практике искривлением силовых линий магнитного поля в пазу с параллельными стенками пренебрегают и не учитывают потоки рассеяния через дно паза, что может привести к заметной ошибке при $h_п/b_п < 1$. Найдем формулу для коэффициента проводимости пазового рассеяния на основании расчетов магнитного поля:

$$\lambda_п = \frac{L_п}{\mu_0 l_1} = \frac{1}{\mu_0 I_п^2} \int_{b}^{b+h_1} \int_{-b_п/2}^{b_п/2} J_z A_2\, dx dy, \qquad (18.55)$$

где l_1 — длина активной части стержня.

Если принять, что толщина изоляции между медью и стенкой паза стремится к нулю, то $J_z = J_0$ и в A_2 (18.54) будут только непериодические составляющие $A_2 = \mu_0[I_п/(2b_п h_1)][2h_1(h_п - b - h_1/2) - (y - b)^2]$; в этом случае после интегрирования (18.55) получим известную зависимость

$$\lambda_п = h_1/(3b_п) + h_к/b_п. \qquad (18.56)$$

Если использовать A_2 (18.54) без упрощений, то из (18.55) получим

$$\lambda_п^* = h_1/(3b_п) + h_к/b_п + \varphi_1(n) + \varphi_2(n), \qquad (18.57)$$

где слагаемые, учитывающие искривление силовых линий магнитного поля,

$$\varphi_1(n) = \frac{b_п}{2\pi^4 h_1}\left(\frac{b_п}{b_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2(n\pi b_1/b_п);$$

$$\varphi_2(n) = \frac{1}{2\pi^5}\left(\frac{b_п}{h_1}\right)^2 \left(\frac{b_п}{b_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin^2(n\pi b_1/b_п)\,[N(n)\,[(\mathrm{sh}(2\pi n(b + h_1)))/b_п - \mathrm{sh}(2\pi n b/b_п)] - \mathrm{sh}(2\pi n h_1/b_п)].$$

Для сравнения ниже приведены расчетные значения проводимости пазового рассеяния, полученные по упрощенной зависимости (18.56) и по формуле (18.57) для $h_п = k_1 b_п$; $h_к = b_п/3$; $b = 0{,}2b_п$:

k_1	1	1,5	2	5
$\lambda_п$ по (18.56)	0,377	0,544	0,711	1,706
$\lambda_п^*$ по (18.57)	0,416	0,559	0,721	1,710
Расхождение, %	10,3	2,8	1,4	0,23

Приведенные данные показывают, что расхождение между значениями проводимостей, рассчитанных по точной и упрощенной формулам, незначительны. В электрических машинах отношение $h_п/b_п$, как правило, больше двух, поэтому погрешность в определении $\lambda_п$ по упрощенной методике не превышает 1—2%. Следовательно, принимаемое на практике при расчете проводимости рассеяния пазовой части обмотки допущение о прямолинейности силовых линий поля рассеяния справедливо.

В высоковольтных машинах с относительно большим отношением $b/b_п$, а также в специальных машинах с малым отношением $h_п/b_п$ [43] поток рассеяния через дно паза может стать соизмеримым с потоком рассеяния через боковую стенку паза. В этом случае $\lambda_п$ рассчитывают по (18.57).

Для надежного крепления обмотки необходимо знать значения электродинамических усилий, действующих на стержни обмотки. Составляющие индукции в области проводника с током имеют вид

$$\left.\begin{aligned}B_x &= \partial A_2/\partial y = \mu_0 I_\text{п}(b-y)/(b_\text{п}h_1) + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty}[J_n/(nk)]\,[N(n)\operatorname{sh}(nky) - \operatorname{sh}(nk(y-b))]\cos(nkx); \\ B_y &= -\partial A_2/\partial x = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty}[J_n/(nk)]\,[1-\operatorname{ch}(nk(y-b)) + \\ &+ N(n)\operatorname{ch}(nky)]\sin(nkx).\end{aligned}\right\} \qquad (18.58)$$

С учетом этих выражений для радиальной составляющей электродинамического усилия справедливо выражение

$$F_y = \int_b^{b+h_1}\int_{-b_\text{п}/2}^{b_\text{п}/2} J_\text{ст} B_x dx\,dy = -\mu_0 \frac{I_\text{п}^2}{2b_\text{п}}(1-\varphi_3(n)), \qquad (18.59)$$

где коэффициент

$$\varphi_3(n) = \frac{b_\text{п}}{2\pi^6}\left(\frac{b_\text{п}}{b_1}\right)^2\left(\frac{b_\text{п}}{h_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^6)\sin^2(\pi n b_1/b_\text{п})\,[N(n)\operatorname{ch}(nk(b+h_1)) - \\ - N(n)\operatorname{ch}(nkb) - \operatorname{ch}(nkh_1) + 1].$$

Под действием радиальной составляющей электродинамического усилия проводник прижимается к дну паза. На F_y влияет искривление силовых линий магнитного поля. Искривление силовых линий магнитного поля в пазу приводит к появлению тангенциальных составляющих F_x электродинамического усилия, сжимающих проводник с током на оси симметрии паза. Из-за симметрии магнитного поля относительно оси паза тангенциальные составляющие электродинамического усилия уравновешивают друг друга, поэтому при симметричном расположении проводника результирующая составляющая электродинамического усилия

$$F_x = \int_b^{b+h_1}\int_{-b_\text{п}/2}^{b_\text{п}/2} J_\text{ст} B_y\,dxdy = 0, \qquad (18.60)$$

действующая на проводник с током, отсутствует.

§ 18.3. Метод Рота

В отличие от предыдущего метода, когда поле делим на несколько областей и в каждой находим потенциал, метод Рота дает одно выражение векторного потенциала для всего поля [3, 4]. Это выражение является решением уравнения Лапласа в пространстве, свободном от тока, и Пуассона для области, занятой проводником. Векторный потенциал магнитного поля — функция координат x, y и выражается в виде двойного ряда Фурье. Векторный потенциал должен удовлетворять начальным условиям, присущим данной задаче.

На примере расчета поля рассеяния стержневого трансформатора рассмотрим метод Рота. Чтобы сделать задачу двухмерной, предполагаем, что сердечник имеет весьма большой диаметр. Катушки обмоток трансформатора заменим прямоугольными шинами с высотой l_1 и l_2 и того же сечения. Решение, полученное при этих условиях, будет соответствовать полю внутри окна трансформатора (рис. 18.5).

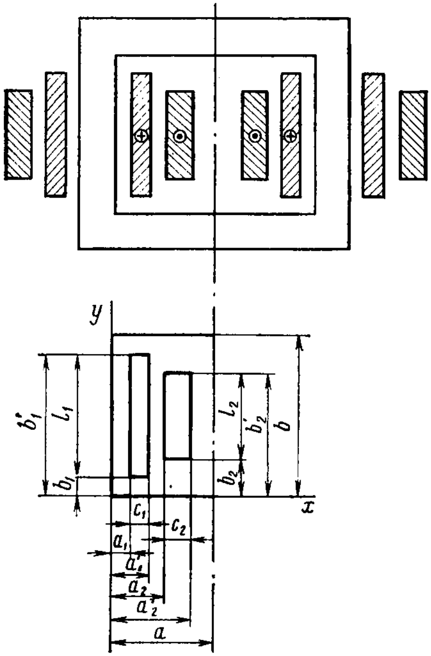

Рис. 18.5. Пример расчета электромагнитного поля в окне трансформатора

Пусть железо имеет бесконечно большую магнитную проницаемость, линии магнитного поля входят в ярмо и сердечник нормально к их поверхностям. Поскольку оба стержня имеют совершенно одинаковую обмотку, плоскость $x = a$ является плоскостью симметрии, поэтому достаточно рассмотреть поле в одной половине окна. По обе стороны плоскости симметрии расположены катушки с одним и тем же направлением тока, поэтому линии поля пересекают плоскость симметрии под прямым углом. Решение уравнений Пуассона и Лапласа определяется в виде функций двойного ряда Фурье:

$$A_z = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk} \cos m_j x \cdot \cos n_k y. \qquad \textbf{(18.61)}$$

Так как ферромагнитные поверхности имеют бесконечно большую магнитную проницаемость, то запишем следующие три граничных условия:

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}(x = 0) = 0; \quad \frac{\partial A_z}{\partial y}(y = 0) = 0; \quad \frac{\partial A_z}{\partial y}(y = b) = 0. \qquad \textbf{(18.62)}$$

Так как линии поля перпендикулярны плоскости симметрии, запишем четвертое граничное условие:

$$(\partial A_z/\partial x)_{(x=a)} = 0. \qquad \textbf{(18.63)}$$

Выражение (18.61) векторного потенциала удовлетворяет первым двум уравнениям (18.62). Чтобы выполнить третье и четвертое граничные условия, необходимо для всех значений x и y соответственно иметь

$$\cos m_j x \cdot \sin n_k b = 0, \quad \cos n_k y \cdot \sin m_j a = 0.$$

Эти равенства выполняются при $n_k = (\pi/b)(k-1)$; $m_j = (\pi/a)(j-1)$.

Постоянный коэффициент C_{jk} определяется из условия, что функция A_z удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках области, свободной от проводников, и уравнению Пуассона в пределах поперечного сечения проводников. В соответствии с этими требованиями вторые производные $\partial^2 A_z/\partial x^2$ и $\partial^2 A_z/\partial y^2$ подставим в (17.21) и (17.22),тогда соответственно для областей с током и свободных от тока получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}(m_j^2 + n_k^2)\cos m_j x \cdot \cos n_k y = \mu J_z; \tag{18.64}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}(m_j^2 + n_k^2)\cos m_j x \cdot \cos n_k y = 0. \tag{18.65}$$

Домножим обе части (18.64) и (18.65) на $\cos m_j x \cdot \cos n_k y$ и проинтегрируем первое выражение в пределах

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_1'; \; b_1 \leqslant y \leqslant b_1';$$

$$a_2 \leqslant x \leqslant a_2'; \; b_2 \leqslant y \leqslant b_2', \tag{18.66}$$

а второе выражение — в пределах $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$ за вычетом областей, определяемых условием (18.66).

Просуммируем результаты интегрирования левых и правых частей этих уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^b C_{jk}(m_j^2 + n_k^2)\cos^2 m_j x \cdot \cos^2 n_k y \cdot dx \cdot dy =$$

$$= (ab/4)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}(m_j^2 + n_k^2); \tag{18.67}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_{a_1}^{a_1'}\int_{b_1}^{b_1'}\mu J_1 \cos m_j x \cdot \cos n_k y \cdot dx \cdot dy + \int_{a_2}^{a_2'}\int_{b_2}^{b_2'}\mu J_2 \cos m_j x \times\right.$$

$$\left.\times \cos n_k y \cdot dx dy\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mu J_1\left[\frac{1}{m_j n_k}(\sin m_j a_1' - \sin m_j a_1)\times\right.\right.$$

$$\times(\sin n_k b_1' - \sin n_k b_1)\Big] + \mu J_2 \Big[\frac{1}{m_j n_k}(\sin m_j a_2' - \sin m_j a_2) \times$$

$$\times(\sin n_k b_2' - \sin n_k b_2)\Big]\Big\}. \qquad (18.68)$$

Приравнивая (18.67) и (18.68), определим

$$C_{jk} = \frac{4\mu}{ab\left(m_j^2 + n_k^2\right)}\Big\{\frac{J_1}{m_j n_k}(\sin m_j a_1' - \sin m_j a_1)(\sin n_k b_1' -$$

$$- \sin n_k b_1) + \frac{J_2}{m_j n_k}(\sin m_j a_2' - \sin m_j a_2)(\sin n_k b_2' -$$

$$- \sin n_k b_2)\Big\}. \qquad (18.69)$$

Коэффициент C_{jk} рассчитывают в зависимости от значений m_j и n_k. Возможны следующие варианты:

1) $m_j = 0$; $n_k \neq 0$, т. е. $j = 1$; $k \neq 1$, тогда

$$C_{1k} = \frac{2\mu}{abn_k^3}\{J_1(a_1' - a_1)(\sin n_k b_1' - \sin n_k b_1) + J_2(a_2' -$$

$$- a_2)(\sin n_k b_2' - \sin n_k b_2)\};$$

2) $m_j \neq 0$; $n_k = 0$, т. е. $j \neq 1$; $k = 1$, тогда

$$C_{j1} = \frac{2\mu}{abm_j^3}\{J_1(b_1' - b)(\sin m_j a_1' - \sin m_j a_1) +$$

$$+ J_2(b_2' - b_2)(\sin m_j a_2' - \sin m_j a_2)\};$$

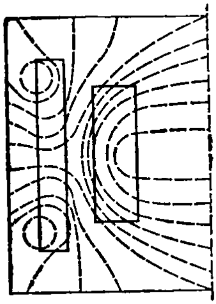

Рис. 18.6. Картина поля в окне трансформатора

3) $m_j \neq 0$; $n_k \neq 0$, т. е. $j \neq 1$; $k \neq 1$, тогда коэффициент C_{jk} рассчитывается согласно (18.69);

4) $m_j = 0$; $n_k = 0$, т. е. $j = 1$, $k = 1$, тогда векторный потенциал магнитного поля равен $A_z = C_{jk} = \text{const}$ для всей области окна трансформатора. Поскольку нас интересуют всегда производные векторного потенциала (т. е. индукции B_x, B_y, которые при $A_z = \text{const}$ равны нулю), этот случай практического значения не имеет.

Задаваясь значениями $A_z = \text{const}$, строим линии поля в окне трансформатора (рис. 18.6). Из выражения для потенциала магнитного поля легко получить составляющие магнитной индукции B_x, B_y и, зная их, определить механические усилия, действующие в обмотках. Например, определим силы, действующие на первичную обмотку трансформатора. Силы, действующие на единицу длины проводника вдоль оси z,

$$F_{x1} = \int_{a_1}^{a_1'} \int_{b_1}^{b_1'} J_1 B_y \, dx \, dy; \quad F_{y1} = \int_{a_1}^{a_1'} \int_{b_1}^{b_1'} J_1 B_x \, dx \, dy.$$

Взяв производные от (18.61) и проинтегрировав в заданных пределах, получим

$$F_{x1} = -J_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{jk}}{n_k} (\sin n_k b_1' - \sin n_k b_1)(\cos m_j a_1' - \cos m_j a_1);$$

$$F_{y1} = J_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{jk}}{m_j} (\sin m_j a_1' - \sin m_j a_1)(\cos n_k b_1' - \cos n_k b_1).$$

В этих выражениях все величины известны и определяются размерами обмоток и окна трансформатора. Однако арифметические вычисления сил занимают значительное время, так как ряды сходятся очень медленно.

§ 18.4. Метод конформных преобразований

Применение теории функций комплексного переменного к анализу полей позволяет найти простое решение многих задач, которые

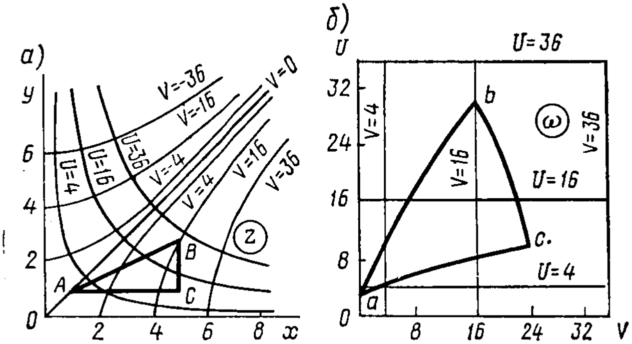

Рис. 18.7. Конформные преобразования: *а* — в плоскости $z = x + jy$, *б* — в плоскости $\omega = v + ju$

трудно или вообще невозможно решить другими методами. К таким задачам относятся задачи построения поля в областях, ограниченных криволинейными или многоугольными границами, например определение поля в воздушном зазоре электрической машины с учетом пазов.

Сущность конформного преобразования заключается в замене действительного поля, которое в силу сложности очертания границ не поддается непосредственному расчету, эквивалентным полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу действительного поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения поля известны. Определение функциональной зависимости, правильно отражающей такую замену, является основной трудностью.

Действительное поле обычно рассматривается в системе координат x, y. Будем рассматривать плоскость, в которой расположены линии потока и эквипотенциальные линии, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$. Каждой точке этой плоскости соответствует определенное число Z, каждой линии на плоскости — определенное уравнение, связывающее координаты ее точек. Например, точке A соответствует число $Z_A = 1 + j \cdot 1$, точке B — число $Z_B = 5 + j \cdot 3$, точке C — число $Z_e = 5 + j \cdot 1$ (рис. 18.7). Уравнению $y = x$ соответствует прямая, проведенная из начала координат под углом $\pi/4$, гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ —кривая $v = 4$, гиперболе $2xy = 16$ — кривая $u = 16$ и т. д.

Подобную картину образуют линии потока и линии равного магнитного потенциала магнитного поля внутри угла между двумя бесконечными ферромагнитными плоскостями, проекции которых совпадают с осями координат x, y. Пусть имеется некоторая функция комплексной переменной $\omega = v + ju$, вещественная и мнимая составляющие которой — однозначные функции x, y: $v = f_1(x, y)$, $u = f_2(x, y)$, т. е. функция комплексной переменной $\omega = f(v, u)$ является в то же время функцией координат x, y плоскости z: $\omega = f(z)$. В этом случае каждому значению $z = x + jy$, определяющему положение какой-либо точки на плоскости z, соответствуют некоторое значение $\omega = v + ju$ и определенная точка на комплексной плоскости ω. Примем, что $v = x^2 - y^2$ и $u = 2xy$. Тогда точка A на плоскости z (рис. 18.7, a) соответствует точке a на плоскости ω с координатами $\omega_a = 0 + j2$ (рис. 18.7, $б$), точка B — точке b с $\omega_b = 16 + j30$ и точка C — точке c с $\omega_c = 24 + j10$. Каким-либо отрезкам на плоскости z, например AC и CB, на плоскости ω соответствуют отрезки ac и cb. Очевидно, что конфигурация отрезков претерпела изменение, однако угол, под которым отрезки пересекаются, остался неизменным. Криволинейные области, заключенные между v и u на плоскости z, превратились в прямоугольники на плоскости ω.

Равномерное поле в плоскости ω — наиболее простое из всех лапласовых полей и, как правило, выбирается за основу, с которой связывают решение задачи. Процесс определения любого поля методом конформных преобразований сводится в конечном счете к выводу уравнения $\omega = f(z)$, которое связывает точки исследуемого поля в плоскости z с точками в плоскости ω. В простейших случаях можно найти зависимость

$$d\omega/dz = M \exp\ (j\Theta), \qquad (18.70)$$

где $M\exp(j\Theta)$ — линейный коэффициент преобразования.

Иначе говоря, преобразование малого отрезка dz при переносе его с плоскости z на плоскость ω заключается в изменении его длины в M раз и в повороте против часовой стрелки на угол Θ:

$$M = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial x)^2} = \sqrt{(\partial u/\partial y)^2 + (\partial v/\partial y)^2};$$

$$\operatorname{tg} \Theta = (\partial u/\partial x)/(\partial v/\partial x) = -(\partial v/\partial y)/(\partial u/\partial y).$$

Бесконечно малому треугольнику в плоскости z будет соответствовать в плоскости ω бесконечно малый подобный треугольник, так как соответственные углы этих треугольников, согласно свойству консерватизма углов при конформном преобразовании, равны, а отношения соответственных сторон (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равны одному и тому же постоянному числу M. Однако из этого не следует, что при конечных размерах форма линий не изменяется.

Напротив, коэффициент M, называемый коэффициентом растяжения, меняется от точки к точке, поэтому изменяется и форма отрезков. Например, прямоугольный треугольник ABC (рис. 18.7,*а*) на плоскости ω трансформировался в криволинейный треугольник *abc* (рис. 18.7 *б*). Изменились соотношения длин сторон, однако углы при вершинах сохранились неизменными. В большинстве задач область исследуемого поля ограничена линиями потока и эквипотенциальными линиями поля. Во многих случаях границы рассматриваемой области представляют совокупность прямолинейных отрезков или могут быть ими аппроксимированы. При нахождении функции $\omega = f(z)$ часто вводят промежуточные плоскости и переменные. Так, например, при решении задач определения поля в областях, ограниченных на плоскости z многоугольными границами, используют вспомогательную комплексную плоскость t. При этом вещественная ось ξ плоскости t связывается уравнением преобразования с границей многоугольника, ограничивающего рассматриваемую область поля в плоскости z. В результате преобразования верхняя полуплоскость плоскости t отображается во внутреннюю область многоугольника. Затем поле верхней полуплоскости, в свою очередь, отображается в полосу между двумя бесконечными плоскостями с потенциалами $\varphi_м = 0$ и $U_м$ комплексной плоскости ω (рис. 18.7, *в*). Любая точка поля полосы является комплексным потенциалом $\omega_м = \psi_м + j\varphi_м$ соответствующей точки на плоскостях t и z. Таким образом, устанавливается связь между координатами точки поля z и соответствующим ей комплексным потенциалом полосы $\omega_м$. Модуль напряженности магнитного поля

$$H = |d\omega_м/dz| = |(d\omega_м/dt)(dt/dz)| = \left|\frac{d\omega_м/dt}{dz/dt}\right|.$$

Расчет магнитного поля в зазоре явнополюсной машины. На примере задачи построения кривой индукции воздушного зазора, создаваемой обмоткой возбуждения явнополюсной СМ, и определения коэффициента формы поля рассмотрим применение метода конформных преобразований.

Для упрощения считаем, что воздушный зазор под полюсом равномерен и равен зазору у краев полюсного наконечника; пренебрегаем кривизной ферромагнитных поверхностей, ограничивающих воздушный зазор машины, принимаем магнитную проницаемость стали равной бесконечности. При определении поля полюсов предполагаем, что поверхность якоря не имеет пазов, а воздушный зазор между поверхностями якоря и полюса равен $\delta' = \delta k_\delta$. Коэффициент воздушного зазора k_δ считаем известным. Полученное при этих допущениях значение индукции под полюсом будет соответствовать индукции B_f, создаваемой реальным потоком при зубчатом якоре. Так как высота полюса больше ширины межполюсного пространства, принимаем при расчетах ярмо машины удаленным от воздушного зазора в бесконечность. Расчеты показывают, что это допущение не вносит существенных погрешностей, если высота полюса больше 0,7—0,8 ширины межполюсного пространства. Учитывая, что задачей является исследование распределения магнитного поля по расточке статора машины, можно не рассматривать поле рассеяния в межполюсном пространстве. Это позволяет принять ток возбуждения сосредоточенным у ярма машины, а ширину полюса — равной ширине полюсного наконечника $b_p = \alpha\tau_1$, где α — коэффициент полюсной дуги. Предполагаем, что длина активной части машины велика и можно не учитывать краевые эффекты, т. е. поле в зазоре машины плоскопараллельное. Расчетная схема машины показана на рис. 18.8, *а*.

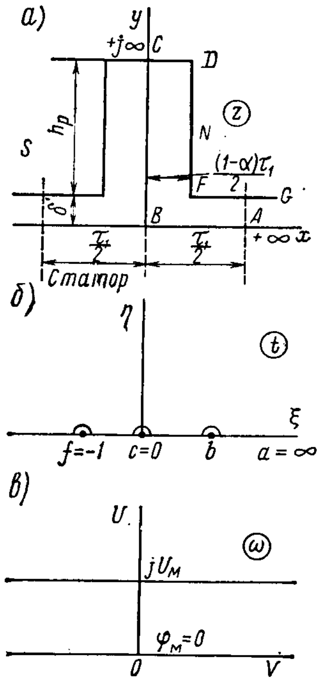

Рис. 18.8. Пример расчета поля в зазоре машины

Учитывая симметрию машины, рассмотрим поле в области *AGFDCB*, ограниченной линиями равного потенциала и линиями потока, а именно: поверхностью расточки статора *BA*, имеющей нулевой потенциал; линией потока *AG*, совпадающей с осью симметрии полюса; поверхностью полюса *GFD*, имеющей потенциал $U_м$; линией ярма *DC*, удаленной в бесконечность, и линией *CB*, совпадающей с осью симметрии межполюсного пространства и являющейся линией равного магнитного потенциала $\varphi = 0$. Так как поле в воздушном зазоре при удалении от кромки полюса к его середине равномерно, линию потока *AG* принимаем удаленной в бесконечность. Таким образом, две пары сторон многоугольника *AGFDCB* уходят в бесконечность. Стороны *BA* и *FG* в $+\infty$ образуют вершину A' с углом при вершине $\alpha_1 = 0$. Стороны BC и FD в $+\infty$ по оси j образуют вершину C' с углом при вершине $\alpha_3 = 0$. Две другие вершины многоугольника имеют углы при вершинах в долях π: для вершины F угол $\alpha_4 = 3/2$, для вершины B угол $\alpha_2 = 1/2$. Координаты вершин: $Z_F = 0{,}5(1 - \alpha)\tau_1 + j\delta'$ и $Z_B = 0$. Сложная конфигурация границ исследуемой области поля не позволяет сразу найти функцию, описывающую это поле в осях x, y. Поэтому устанавливаем связь между исследуемым полем на плоскости z (рис. 18.8, *а*) и известным равномерным полем $\omega_м = \psi_м + j\varphi_м$ в бесконечной полосе комплексной плоскости ω (рис. 18.8, *в*) посредством введения вспомогательной комплексной плоскости $t = \xi + j\eta$ (рис. 18.8, *б*) и преобразования верхней полуплоскости плоскости t во внутреннюю область многоугольника $AGFDCB$ и бесконечную полосу плоскости ω.

Совмещение вещественной оси ξ плоскости t с границей многоугольника $AGFDCB$ выполним следующим образом. Возьмем какую-либо вершину многоугольника, например A, и найдем для нее соответственную точку a на оси ξ. В принципе местоположение соответственной точки, с которой начинается совмещение оси ξ с границами многоугольника, может быть выбрано совершенно произвольно в любой точке положительной или отрицательной части действительной оси ξ. Примем положение точки a, как показано на рис. 18.8, *б*, с координатой $t_a = \xi_a = \infty$. При обходе многоугольника $ABCDFG$ по часовой стрелке соответственные точки многоугольника располагаются на оси в порядке убывания координат: $a > b > c > \ldots$.

Математически преобразование вещественной оси плоскости t в многоугольную границу на плоскости z осуществляется интегрированием дифференциального уравнения Кристоффеля — Шварца:

$$\frac{dz}{dt} = S(t - a)^{\alpha_1 - 1}(t - b)^{\alpha_2 - 1}(t - c)^{\alpha_3 - 1}\ldots, \qquad (18.71)$$

где a, b, c, ... — координаты точек на вещественной оси ξ плоскости t, соответствующие вершинам многоугольника; α_1, α_2, α_3, ... — внутренние углы при вершинах многоугольника в долях π.

Уравнение (18.71) определяет длину и наклон отрезка dt вещественной оси плоскости t при преобразовании его на плоскость z. Так как направление всех элементов dt, образующих вещественную ось плоскости t, одинаково, то аргумент выражения (18.71) определяет наклон элементов dz. При движении вдоль оси ξ [$+\infty$; $-\infty$] элементы dz описывают границу многоугольника. Например, при движении по вещественной оси плоскости t в пределах $b<t<a$ в плоскости z получим соответственные перемещения dz по прямой AB, образующей с вещественной осью x угол $\varphi_A = \pi$. Значение угла φ_A определяется аргументом функции (18.71) в заданных пределах изменения t:

$$\arg(dz/dt) = \arg S + (\alpha_1 - 1)\arg(t - a) + (\alpha_2 - 1)\arg(t - b) + \ldots \qquad (18.72)$$

Аргументы множителей $(t - a)$, $(t - b)$, $(t - c)$, ... , являющихся действительными числами, могут быть равны нулю, если знак числа положительный, или π, если знак отрицательный. Очевидно, что при изменении t в пределах $b < t < a$ аргументы множителей остаются постоянными. В точке b функция теряет регулярность. При движении по оси ξ эту точку необходимо обойти по малой полуокружности радиуса r, расположенной в верхней полуплоскости, причем радиус r можно сделать сколь угодно малым $r \to 0$. Точка b является соответственной точкой вершины B на плоскости z. Как только будет осуществлен переход на участок $c < t < b$, величина $(t - b)$, которая на предыдущем участке была положительной, становится отрицательной, что равносильно тому, что аргумент множителя $(t - b)$ изменяется на π. Аргументы других сомножителей не изменяются. Следовательно, аргумент функции dz/dt получит приращение $\Delta\varphi = (\alpha_2 - 1)\pi$, т. е. в точке B происходит смена направления перемещений отрезка dt на угол $(-\pi/2)$. При перемещении по вещественной оси плоскости t в пределах $c < t < b$ в плоскости z получим соответственные перемещения по прямой BC'. При переходе через точку C' аргумент функции dz/dt получит приращение на величину $\Delta\varphi = (\alpha_3 - 1)\pi$, т. е. в точке C происходит смена направления перемещения на угол $-\pi$ и отрезки dt укладываются на сторону $C'F$ многоугольника и т. д. Таким образом, вся действительная ось плоскости t переходит в контур многоугольника $A'BC'F$.

Положение начала координат в плоскости t выбирается независимо от выбранного начала координат в плоскости z. Можно принять, что началу координат на плоскости t соответствует любая вершина многоугольника или любая другая точка на его сторонах.

Так как полуплоскость можно отобразить саму на себя и при этом три произвольные точки перевести в три наперед заданные точки, то при определении функции z можно всегда принять известными три соответственные точки, лежащие на вещественной оси ξ плоскости t. Обычно за известные координаты принимают $\xi = 0$, ± 1 и $\pm\infty$. Если вершине многоугольника плоскости z на плоскости t соответствует бесконечно удаленная точка, то относящийся к этой вершине множитель выпадает из уравнения Кристоффеля — Шварца. Это часто используют для упрощения интеграла Кристоффеля — Шварца. Обычно принимают на плоскости t, равной бесконечности, координату точки, которая соответствует вершине многоугольника, удаленной в бесконечность на плоскости z. На действительной оси плоскости t (рис. 18.8, *б*) помещены точки, соответствующие вершинам многоугольника $A'FC'B$ в плоскости z: вершине C' с координатой $Z_{C'} = j\infty$ — точка c с координатой $t_c = 0$; вершине A' с координатой $Z_{A'} = \infty$ — точка a с $t_a = \infty$. Координату одной из двух оставшихся вершин можно выбрать на оси ξ плоскости t также произвольно. Принимаем, что вершине F соответствует точка f с координатой $t_f = -1$. Можно было бы выбрать известной точку, соответствующую вершине B. Тогда ее координата была бы равна $t_b = 1$. Неизвестную координату вершины B на плоскости t обозначим через b. В дальнейшем она будет определена через геометрические размеры области. Таким образом, уравнение Кристоффеля — Шварца

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\alpha_1-1}\ (t-b)^{\alpha_2-1}\ (t-c)^{\alpha_3-1}\ (t-f)^{\alpha_4-1}$$

после подстановки известных координат соответственных точек, значения углов α и исключения множителя, соответствующего вершине (имеющей координату $t_a = \infty$), принимает вид

$$dz/dt = S(t-b)^{-1/2}t^{-1}(t+1)^{3/2-1} = (S/t)\sqrt{(t+1)/(t-b)}, \quad (18.73)$$

или при разделении переменных

$$dz = S\sqrt{(t+1)/(t-b)}\ (dt/t). \quad (18.74)$$

Задача определения неизвестных соответственных точек по заданным координатам вершин многоугольника в плоскости z встречает на практике очень большие трудности, за исключением редких случаев, когда интеграл Кристоффеля — Шварца выражается через элементарные функции. В большинстве задач константы определяют численными методами. Постоянные S и b наиболее просто определяются методом вычетов или равносильным ему методом представления уравнения Кристоффеля — Шварца в полярных координатах, заменой $t = R\exp(j\Theta)$ и определения интеграла при $R \to 0$ и $R \to \infty$. Если $t = R\exp(j\Theta)$, тогда $dt = jR\exp(j\Theta)\cdot d\Theta$ и

$$dz = jS\sqrt{(R\exp(j\Theta)+1)/(R\exp(j\Theta)-b)}\,d\Theta. \quad (18.75)$$

В вершине A' плоскости z при переходе от поверхности расточки статора к поверхности полюса функция z делает скачок на $\Delta Z_{A'} = j\delta'$. Вершине A' на плоскости t соответствует точка a, удаленная в бесконечность; следовательно, радиус $R \to \infty$. Тогда $dz = jSd\Theta$. Переходу от поверхности статора к поверхности полюса в точке a соответствует изменение угла Θ на π. Таким образом, при $R = \infty$ получим $\Delta Z_{A'} = j\delta' = jS\pi$, откуда $S = \delta'/\pi$.

В вершине C' плоскости z при переходе от линии нулевого потенциала BC к поверхности полюса функция z делает скачок на $\Delta Z_{C'} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\tau_1$. Вершине C' на плоскости t соответствует точка c, лежащая в начале координат. Следовательно, радиус $R = 0$. Переходу от линии BC к поверхности полюса в точке C соответствует изменение угла Θ на π. Таким образом, при $R = 0$ получим $\Delta Z_{C'} = (1-\alpha)\tau_1/2 = j\pi S\sqrt{-1/b}$,

откуда
$$b = [2\delta'/((1-\alpha)\tau_1)]^2. \quad (18.76)$$

Уравнение (18.73) принимает вид

$$dz/dt = (\delta'/\pi)\,(1/t)\,\sqrt{(t+1)/(t-b)}\,, \tag{18.77}$$

где b определяется по (18.76).

После интегрирования (18.77) запишем

$$Z = (\delta'/\pi)\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{(t+1)/(t-b)}\,(dt/t) + S_1.$$

Постоянную S_1 находим из соответствия точек B и b. Имеем $Z_B = 0$ (рис. 18.8), т. е.

$$Z_B = (\delta'/\pi)\Big/\int\limits_{t_0}^{b}\sqrt{(t+1)/(t-b)}\,(dt/t) + S_1 = 0, \qquad \text{откуда}$$

$$S_1 = -\frac{\delta'}{\pi}\int\limits_{t_0}^{b}\sqrt{(t+1)/(t-b)}\,(dt/t) = \frac{\delta'}{\pi}\int\limits_{b}^{t_0}\sqrt{(t+1)(t-b)}\,(dt/t).$$

Следовательно,

$$Z = \frac{\delta'}{\pi}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-b}}\,\frac{dt}{t} + \int\limits_{b}^{t_0}\sqrt{\frac{t+1}{t-b}}\,\frac{dt}{t}\right] =$$

$$= \frac{\delta'}{\pi}\int\limits_{b}^{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-b}}\,\frac{dt}{t}. \tag{18.78}$$

Полученное уравнение удобно интегрировать методом подстановки, вводя новую переменную

$$\beta = \sqrt{(t-b)/(t+1)} \quad \text{или} \quad \beta^2 = (t-b)/(t+1), \tag{18.79}$$

откуда $t = (b+\beta^2)/(1-\beta^2)$; $dt = [2\beta(1+b)/(1-\beta^2)^2]d\beta$. Значению $t = b$ соответствует $\beta = 0$. После подстановки (18.78) запишем

$$Z = (\delta'/\pi)\int\limits_{0}^{\beta}\{2\,(1+b)/[(1-\beta^2)\,(b+\beta^2)\,]\}\,d\beta. \tag{18.80}$$

Подынтегральное выражение представим в виде суммы простейших дробей:

$$2\,(1+b)/[(1-\beta^2)\,(b+\beta^2)] = A/(1-\beta) + B/(1+\beta) +$$
$$+ (C\beta + D)/(b+\beta^2).$$

Из тождества $2(1+b) = A(1+\beta)(b+\beta^2) + B(1-\beta)(b+\beta^2) + (C\beta + D)(1-\beta^2)$ запишем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &A - B - C = 0; \quad bA - bB + C = 0;\\ &A + B - D = 0; \quad bA + bB + D = 2\,(1+b),\end{aligned}\right\}$$

решая которую получим постоянные $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$. Выражение (18.80) принимает вид

$$Z = (\delta'/\pi) \int\limits_0^\beta [1/(1-\beta) + 1/(1+\beta) + 2/(b+\beta^2)]d\beta.$$

Отсюда

$$Z = \frac{\delta'}{\pi}\left[\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\sqrt{b}}\right], \qquad (18.81)$$

где β определяется по (18.79), а b — по (18.76).

Таким образом, получено уравнение, устанавливающее связи между параметрами на плоскостях z и t. Связь между известным равномерным полем в бесконечной полосе комплексной плоскости ω и полем вспомогательной плоскости t устанавливается путем преобразования вещественной оси плоскости t в многоугольник, образуемый бесконечной полосой.

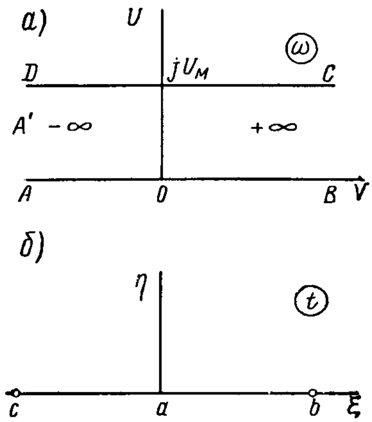

Рис. 18.9. Полоса в плоскости $\omega = v + ju$, соответствующая равномерному полю (*а*), и вспомогательная плоскость t (*б*)

Преобразование вещественной оси плоскости t в многоугольник, образуемый бесконечной полосой. Равномерное поле между двумя бесконечными плоскостями разного потенциала описывается наиболее простыми функциями. Поэтому равномерное поле используют в качестве эталона при конформных преобразованиях. Примем, что на комплексной плоскости $\omega = v + ju$ расположена бесконечная полоса, одна из границ которой имеет потенциал $\varphi_м = 0$ и совпадает с вещественной осью v плоскости ω, а вторая граница, имеющая потенциал $\varphi_м = U_м$, расположена параллельно первой (рис. 18.9). Эта полоса образует прямоугольник $ABCD$. Координаты углов у прямоугольника $ABCD$ на плоскости ω принимаем следующим образом: координата угла B $\omega_B = \infty$, угла C $\omega_C = \infty + jU_м$, угла D $\omega_D = -\infty + jU_м$ и угла A $\omega_A = -\infty$. Задача значительно упрощается, если принять, что стороны BA и CD, параллельно уходящие в бесконечность, образуют в бесконечности вершины многоугольника A' с координатой $\omega_{A'} = -\infty$ и B' с координатой $\omega_{B'} = \infty$. Углы при вершинах A' и B' равны: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. На комплексной плоскости t, вещественную ось которой необходимо преобразовать в многоугольник, образуемый бесконечной полосой, выбираем соответственные вершинам многоугольника точки: вершине B' — соответственную точку b с координатой $t_b = \infty$, вершине A' — точку a с $t_a = 0$.

Учитывая, что из уравнения Кристоффеля — Шварца выпадают множители, относящиеся к вершинам, удаленным в бесконечность на вещественной оси плоскости t, а также что угол $\alpha_1 = 0$ и $a = 0$, уравнение (18.71) примет вид

$$d\omega/dt = S(t - a)^{\alpha_1 - 1} = S/t. \tag{18.82}$$

После интегрирования получим

$$\omega = S\int_{t_0}^{t} dt/t + S_1. \tag{18.83}$$

Постоянная интегрирования S_1 представляет собой точку на плоскости ω, соответствующую началу координат $t = 0$. Определим постоянную S_1 из соответствия точек A' и a на плоскостях ω и t:

$$\omega_{A'} = S\int_{t_0}^{t=0} dt/t + S_1 = -\infty;$$

$$S_1 = -\infty - S\int_{t_0}^{0} dt/t = -\infty + S\int_{0}^{t_0} dt/t.$$

Подставляя полученное значение S_1 в (18.83), запишем

$$\omega = S\int_{0}^{t} dt/t - \infty = S\ln t\,\Big|_{0}^{t} - \infty = S\ln t. \tag{18.84}$$

Для определения постоянной S преобразуем (18.82), делая подстановку $t = R\exp(j\Theta)$ и $dt = jR\exp(j\Theta)d\Theta$, получим

$$d\omega = S(dt/t) = jSd\Theta. \tag{18.85}$$

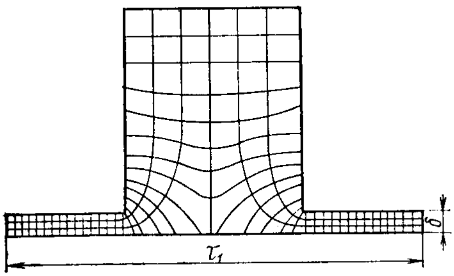

Рис. 18.10. Картина поля в воздушном зазоре явнополюсной машины

В плоскости ω при переходе от AB к CD потенциал получает приращение $d\omega = jU_м$. Вершине B в плоскости t соответствует точка b, удаленная в бесконечность, в которой осуществляется переход от поверхности нижней полосы к поверхности верхней полосы поворотом на угол $d\Theta = \pi$. Таким образом, $d\omega = jU_м = jS\pi$, откуда $S = U_м/\pi$.

Выражение (18.84) принимает вид

$$\omega = (U_м/\pi)\ln t. \tag{18.86}$$

Задаваясь различными значениями линий потока и линий равного магнитного потенциала, можно определить t и по его значению — координаты x, y на плоскости z. Таким образом, можно построить линии потока и линии равного потенциала исследуемой области (рис. 18.10).

Значение магнитной индукции в какой-либо точке исследуемого поля

$$B_f = \mu_0 H = \mu_0 (d\omega/dz) = \mu_0 (d\omega/dt)/(dz/dt).$$

При этом, согласно (18.82) и (18.73),

$$d\omega/dt = (U_м/\pi)(1/t); \quad dz/dt = (\delta'/\pi)(1/t)\ \sqrt{(t+1)/(t-b)}.$$

Следовательно,

$$B_f = \mu_0 (U_м/\delta')\sqrt{(t-b)/(t+1)} = (\mu_0 U_м/\delta')\beta. \qquad \textbf{(18.87)}$$

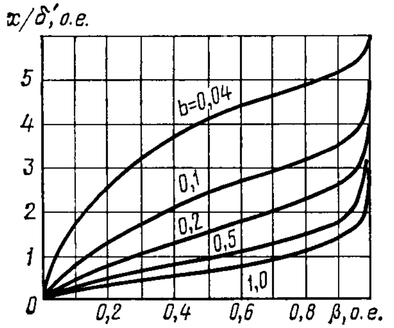

Рис. 18.11. Зависимости относительного перемещения от b и β

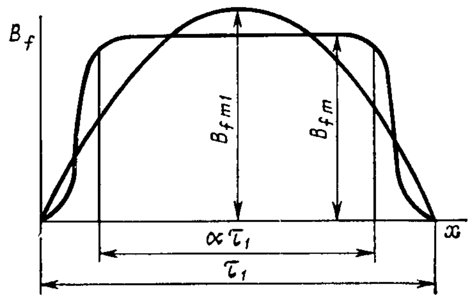

Рис. 18.12. Кривая индукции воздушного зазора

Выразить $d\omega/dz$ непосредственно через параметры плоскости z невозможно, поэтому для получения зависимости изменения магнитной индукции в функции z производится подстановка значения t в (18.87) и (18.81), что дает значения B_f и z, связанные друг с другом. Для расчетов можно использовать кривые, связывающие относительное перемещение x/δ' вдоль полюсного деления машины с коэффициентом β (рис. 18.11). Например, для построения кривой распределения индукции воздушного зазора вдоль расточки статора от линии симметрии межполюсного пространства до линии симметрии полюса необходимо изменять t от b до ∞. При $t = b$ $B_f = 0$, точке b в плоскости z соответствует B. При $t = \infty$ $B_f = B_\delta = \mu_0 U_м/\delta'$, точке $t = \infty$ соответствует в плоскости z точка A. Задаваясь значениями координаты x (рис. 18.11), находим соответствующее значение β и индукцию в воздушном зазоре по (18.87). В качестве примера на рис. 18.12 построена кривая индукции в воздушном зазоре при $\alpha = 0,7$ и $b = 0,04$. Рассчитанные значения B_f получены при изменении x от 0 до $\tau_1/2$. Вторая половина кривой индукции на полюсном делении построена по законам симметрии.

Зная распределение индукции вдоль полюсного деления, можно определить основную гармоническую индукцию B_{fm1} и коэффициент формы поля обмотки возбуждения $k_f = B_{fm1}/B_{fm}$. Для определения B_{fm1} разлагаем функцию B_f в ряд Фурье:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x/\tau_1) + b_n \sin(n\pi x/\tau_1)).$$

Так как кривая B_f при выбранном начале координат — нечетная периодическая функция, то коэффициенты a_0 и a_n равны нулю. Коэффициент b_n определим из равенства

$$b_n = (2/\tau_1) \int_0^{\tau_1} f(x) \sin(n\pi x/\tau_1)\, dx,$$

где n— порядок гармонической.

Так как функция $f(x) = B_f(x)$ задана в виде таблицы соответственных значений B_f и x, то b_n определим методом численного интегрирования, например с помощью формулы прямоугольников:

$$b_n = (2/m) \sum_{i=0}^{m-1} B_{fi} \sin(n\pi i/m),$$

где m — число участков, на которые разбит интервал; i — номер участка; B_{fi} — индукция на рассматриваемом участке.

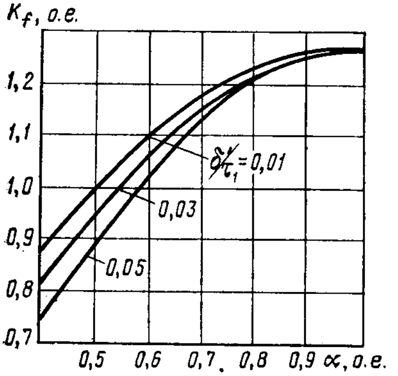

Рис. 18.13. Зависимость коэффициента формы поля возбуждения от α

При $n = 1$ расчет b_n дает значение основной гармонической индукции B_{fm1}. Расчеты коэффициента формы поля для ряда значений δ'/τ_1 в функции α представлены на рис. 18.13. Значения коэффициента формы поля для неравномерного зазора под полюсом приведены в [18].

§ 18.5. Расчет переменных электромагнитных полей в токопроводящих средах

Переменные магнитные поля характеризуются наличием в токопроводящих элементах поверхностного эффекта, заключающегося в том, что магнитное поле и вызванные им вихревые токи сосредоточиваются у поверхности токопроводящих сред. При поверхностном эффекте увеличиваются добавочные потери, для снижения которых предусматриваются различные меры: магнитопровод машины набирается из отдельных листов электротехнической стали, а стержни обмоток подразделяются на изолированные друг от друга элементарные проводники малого сечения. В то же время явление поверхностного эффекта применяется, например, для улучшения пусковых характеристик АД с короткозамкнутым ротором. Повышение активного сопротивления стержней в момент пуска из-за поверхностного эффекта приводит к увеличению кратности пускового момента при одновременном снижении пускового тока.

Рассмотрим расчет переменного магнитного поля, создаваемого током, протекающим по массивному стержню, лежащему в открытом пазу с параллельными сторонами. Примем допущения: магнитная проницаемость стали ярма и зубцов бесконечно велика; силовые линии магнитного поля нормальны к боковым стенкам и параллельны дну паза; магнитное поле за линию cd (рис. 18.14) не распространяется; сердечник набран из тонких листов электротехнической стали, где вихревые токи отсутствуют; температура по сечению стержня одинакова; распределение магнитного поля в пазу вдоль активной части машины не изменяется; векторы магнитного поля изменяются во времени периодически.

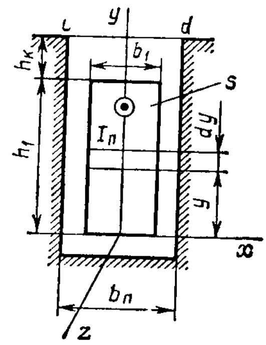

Рис. 18.14. Расчетная схема

Принятые допущения позволяют ограничиться расчетом одномерного магнитного поля, изменяющегося только по координате y:

$$\operatorname{rot}\dot{H} = -\partial\dot{H}_x/\partial y = (b_1/b_п)(\dot{J}_{пр} + \dot{J}_{ст}) = (b_1/b_п)\,\dot{J}_z. \qquad (18.88)$$

Результирующая плотность тока $\dot{J}_z$ складывается из плотностей токов проводимости $\dot{J}_{пр}$ и стороннего $\dot{J}_{ст}$, направленных по оси z.

Считаем распределение сторонней плотности тока по сечению стержня равномерным. Так как силовые линии магнитного поля параллельны дну паза, то $\partial\dot{J}_z/\partial x = 0$. Тогда на основании операции ротора любого вектора запишем

$$\operatorname{rot}\dot{J}_z = \partial\dot{J}_z/\partial y = \partial(\dot{J}_{пр} + \dot{J}_{ст})/\partial y = \partial\dot{J}_{пр}/\partial y. \qquad (18.89)$$

Так как $\dot{J}_{ст} = \mathrm{const}$, то и напряженность стороннего электрического поля $\dot{E}_{ст} = \mathrm{const}$. Тогда обобщенный закон Ома запишем в виде

$$\operatorname{rot}\dot{J}_z = \gamma(\operatorname{rot}\dot{E} + \operatorname{rot}\dot{E}_{ст}) = \gamma\operatorname{rot}\dot{E}, \qquad (18.90)$$

где $\dot{E}$ — напряженность электрического поля, вызванного переменным магнитным полем стержня с током.

Из закона электромагнитной индукции $\operatorname{rot}\dot{E} = -\partial\dot{B}_x/\partial t = -j\omega\mu\dot{H}_x$, где $\dot{B}_x$, $\dot{H}_x$ — индукция и напряженность магнитного поля, созданного током, протекающим по стержню, и закона Ома (18.90) запишем

$$\partial\dot{J}_z/\partial y = -j\omega\mu_0\gamma\dot{H}_x. \qquad (18.91)$$

Продифференцировав (18.88) по y и подставив в него (18.91), получим уравнение для расчета поля в токопроводящей области

$$\partial^2\dot{H}_x/\partial y^2 = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}_x b_1/b_п = k^2\,\dot{H}_x, \qquad (18.92)$$

где коэффициент $k = (1+j)\sqrt{0{,}5\omega\mu_0\gamma b_1/b_п} = (1+j)/\Delta$; глубина проникновения магнитного поля

$$\Delta = \sqrt{2b_п/(\omega\mu_0\gamma b_1)}. \qquad (18.93)$$

Общее решение уравнения (18.92) имеет вид

$$\dot{H}_x = C_1\exp(ky) + C_2\exp(-ky). \qquad (18.94)$$

Замыкаясь в пределах активной части стержня, ток проводимости не влияет на значение полного тока в пазу, а приводит к его перераспределению по высоте стержня, поэтому

$$\dot{I}_п = b_1\int\limits_0^{h_1}\left(\dot{J}_{ст} + \dot{J}_{пр}\right)dy = \dot{I}_{ст}.$$

Для упрощения расчетов примем, что комплексная функция стороннего тока имеет только вещественную часть $\dot{I}_{ст} = I_{ст}$, тогда полный ток в пазу $\dot{I}_п = I_{ст}$.

Воспользовавшись законом полного тока, найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 из (18.94). При $y = 0$ $b_п\dot{H}(0) = 0$; следовательно, $C_1 = -C_2$; при $y = h_1$ $b_п\dot{H}(h_1) = -I_{ст}$ и $C_1[\exp(kh_1) - \exp(-kh_1)] = -I_{ст}/b_п$, откуда

$$C_1 = -I_{ст}/[b_п(\exp(kh_1) - \exp(-kh_1))]. \qquad (18.95)$$

После подстановки (18.95) в (18.94) получим

$$\dot{H} = -\frac{I_{ст}}{b_п}\cdot\frac{\exp(ky) - \exp(-ky)}{\exp(kh_1) - \exp(-kh_1)} = -\frac{I_{ст}}{b_п}\cdot\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh_1}. \qquad (18.96)$$

Плотность тока найдем с помощью (18.88), дифференцируя $\dot{H}$:

$$\dot{J}_z = (I_{ст}/b_1)\,k\operatorname{ch} ky/\operatorname{sh} kh_1.$$

Модуль напряженности магнитного поля имеет вид

$$|\dot{H}| = \sqrt{\dot{H}\dot{H}^*} = (I_{ст}/b_п)\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2y/\Delta) - \cos(2y/\Delta)}{\operatorname{ch}(2h_1/\Delta) - \cos(2h_1/\Delta)}},$$

где H^* — функция, комплексно сопряженная $\dot{H}$.

Модуль плотности тока представим в виде

$$|\dot{J}_z| = \sqrt{\dot{J}_z\dot{J}_z^*} = \frac{\sqrt{2}\,I_{ст}}{\Delta b_1}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2y/\Delta) + \cos(2y/\Delta)}{\operatorname{ch}(2h_1/\Delta) - \cos(2h_1/\Delta)}},$$

где $\dot{J}_z^*$ — функция, комплексно сопряженная $\dot{J}_z$; $h_1/\Delta = \xi$ — приведенная или относительная высота проводника.

Активные потери на единицу длины стержня запишем в виде

$$P_a = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_s \dot{J}_z\dot{J}_z^* ds = \frac{b_1}{2\gamma}\int\limits_0^{h_1}\left(\operatorname{mod}\dot{J}\right)^2 dy = \frac{I_{\text{ст}}^2}{\gamma b_1 \Delta}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\xi + \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}\right) = r_a I_{\text{ст}}^2,$$

где r_a — активное сопротивление единицы длины стержня.

В предположении равномерного распределения тока по сечению определим омические потери на единицу длины стержня $P_{\text{ом}} = I_{\text{ст}}^2/(\gamma b_1 h_1) = r_{\text{ом}} I_{\text{ст}}^2$, где $r_{\text{ом}}$ — омическое сопротивление единицы длины стержня.

Влияние поверхностного эффекта на сопротивление стержня оценивается отношением

$$k_R = \frac{r_a}{r_{\text{ом}}} = \frac{P_a}{P_{\text{ом}}} = \xi\frac{\operatorname{sh} 2\xi + \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}. \qquad \textbf{(18.97)}$$

Определим энергию магнитного поля в области стержня:

$$W_{\text{м}} = \frac{\mu_0 b_{\text{п}} l_1}{2}\int\limits_0^{h_1}\dot{H}\dot{H}^* dy = \frac{\mu_0 I^2{}_{\text{ст}} l_1 \Delta}{4 b_{\text{п}}}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\xi - \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}\right).$$

Энергия магнитного поля и внутренняя индуктивность стержня связаны соотношением (17.69), из которого имеем

$$L_{\text{c}}' = \frac{2W_{\text{м}}}{I_{\text{ст}}^2} = \frac{\mu_0 h_1 l_1}{2\xi b_{\text{п}}}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\xi - \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}\right).$$

Без учета поверхностного эффекта

$$L_{\text{c}} = \mu_0 h_1 l_1/(3 b_{\text{п}}).$$

Влияние поверхностного эффекта на индуктивность стержня оценивается отношением

$$k_L = \frac{L_{\text{c}}'}{L_{\text{c}}} = \frac{3}{2\xi}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\xi - \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}\right). \qquad \textbf{(18.98)}$$

В области клина $h_{\text{к}}$ (рис. 18.14) при $y > h_1$ удельная проводимость $\gamma = 0$ и (18.92) приобретает вид $\partial^2\dot{H}_x/\partial y^2 = 0$, общее решение которого

$$\dot{H}_x = C_1 y + C_2. \qquad \textbf{(18.99)}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями для напряженности магнитного поля $\dot{H}$ на линиях $y = h_1$ и $y = h_1 + h_{\text{к}}$. Из (18.96) при $y = h_1$ получим

$$\dot{H}_x = -I_{\text{ст}}/b_{\text{п}} = C_1 h_1 + C_2. \qquad \textbf{(18.100)}$$

Пренебрегая затуханием магнитного поля в области клина, из закона полного тока запишем напряженность магнитного поля на линии $y = h_1 + h_к$:

$$\dot{H}_x = -I_{ст}/b_п = C_1(h_1 + h_к) + C_2. \qquad (18.101)$$

Из уравнения (18.100) и (18.101) следует, что $C_1 = 0$; $C_2 = -I_{ст}/b_п$. После подстановки этого выражения в (18.99) получим

$$\dot{H}_x = -I_{ст}/b_п. \qquad (18.102)$$

Энергия магнитного поля в области клина

$$W_м = \frac{\mu_0 b_п l_1}{2} \int_0^{h_к} \dot{H}_x \overset{*}{\dot{H}}_x dy = \frac{\mu_0}{2} \frac{h_к}{b_п} I_{ст}^2.$$

Внешняя индуктивность L_b стержня на единицу длины паза

$$L_b = 2W_м/I_{ст}^2 = \mu_0 l_1 h_к/b_п.$$

Полная индуктивность стержня в пазу с учетом поверхностного эффекта

$$L = \mu_0 l_1 (h_1 k_L/(3b_п) + h_к/b_п).$$

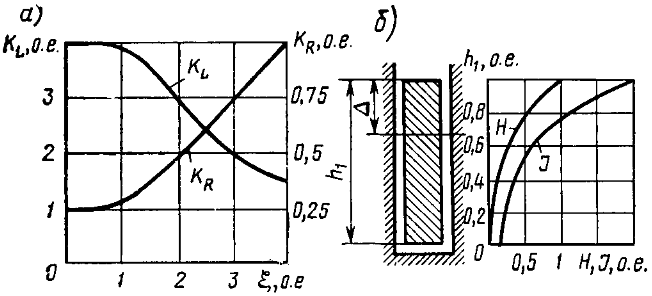

Рис. 18.15. Пример расчета переменного электромагнитного поля в стержне

Значения функций k_L и k_R от ξ представлены на рис. 18.15, *а*. Очевидно, что с увеличением ξ активное сопротивление массивного стержня будет возрастать, а индуктивность — уменьшаться. При $\xi > 1$ без большой погрешности принимаем $k_R = \xi$, $k_L = 3/(2\xi)$.

Важной характеристикой поля является глубина проникновения (18.93), показывающая, на каком расстоянии от поверхности стержня по координате y индукция магнитного поля уменьшается в е раз. При частоте $\omega = 314$ 1/с и параметрах $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ 1/(Ом·м), $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м для медного стержня в пазу глубина проникновения $\Delta \approx 0{,}01$ м. Расчетная схема, кривые распределения в относительных единицах напряженности магнитного поля $|\dot{H}|$ и плотности тока $|\dot{J}|$ по высоте медного стержня ($\xi = h_1/\Delta = 3$) представлены на рис. 18.15, *б*. За базисные величины приняты $H_б = I_{ст}/b_п = 1$; $J_б = J_{ст} = 1$. Из рис. 18.15 следует, что бо́льшая часть потока рассеяния и тока стержня сосредоточена на глубине проникновения. Здесь же будет выделяться и бо́льшая часть потерь в стержне.

Аналогичные зависимости имеют место, когда в пазу лежит несколько изолированных друг от друга проводников, тогда важное значение имеет относительная высота каждого отдельного проводника. Поверхностный эффект при рассмотрении группы проводников в каждом отдельном проводнике зависит не только от размеров самого проводника, но и от общего тока всех проводников, лежащих под ним. Ниже приведены значения критической высоты проводников при условии, что добавочные потери в проводниках не превышают 33% основных потерь [56]:

Число проводников на высоте паза	1	2	3	4	5
Предельная высота проводника, мм	17,0	10,5	8,5	7,4	6.6

Расчеты электромагнитного поля в пазу со сложной конфигурацией стенок затруднительны На практике оценку влияния поверхностного эффекта на параметры стержня сложной конфигурации проводят приближенно или решают задачу численными методами.

§ 18.6. Исследование влияния электропроводящего экрана на электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени

На примере исследования влияния электропроводящего экрана на электромагнитное поле, созданное проводником при протекании по нему переменного тока, рассмотрим метод решения задач электродинамики с помощью функции векторного магнитного потенциала. Пусть проводник параллелен бесконечной плоскости экрана и длина его бесконечно велика. Это позволяет рассматривать поле плоскопараллельным. Расчетная схема показана на рис. 18.16.

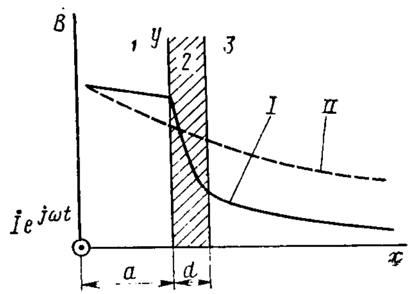

Рис. 18.16. Кривые распределения индукции вдоль оси x при наличии экрана (*I*) и без экрана (*II*)

Рассматриваемое пространство разделим на зоны. Зона *1*, в которой находится проводник с током, простирается в области изменения x от $-\infty$ до 0. Магнитная проницаемость среды этой зоны μ_0, электропроводность $\gamma = 0$, за исключением точки $x = -a$, $y = 0$, в которой лежит проводник. Пусть по проводнику протекает переменный ток с постоянной амплитудой. Для рассматриваемой области этот ток является сторонним. Зона *2* соответствует области, занимаемой токопроводящим экраном, и простирается от $x = 0$ до $x = d$, где d — толщина экрана. Электропроводность экрана γ_1, магнитная проницаемость μ_0. Зона *3* расположена по другую сторону экрана по отношению к проводнику с током. Электропроводность этой зоны $\gamma = 0$, магнитная проницаемость μ_0. В зонах *1*, *3* электромагнитное поле описывается уравнением Лапласа

$$\partial^2\dot{A}_z/\partial x^2 + \partial^2\dot{A}_z/\partial y^2 = 0, \tag{18.103}$$

а в зоне *2* — уравнением Гельмгольца

$$\partial^2\dot{A}_z/\partial x^2 + \partial^2\dot{A}_z/\partial y^2 = j\omega\gamma_1\mu_0\dot{A}_z. \tag{18.104}$$

Решение вихревого поля в зоне *2* ищем в виде функции

$$\dot{A}_2 = f_2(\lambda, x)\cos\lambda y. \tag{18.105}$$

В зоне *1* векторный потенциал магнитного поля представим в виде двух составляющих: $\dot{A}_1 = \dot{A}_{10} + \dot{A}_{12}$, где A_{10} описывает поле проводника с током в однородной изотропной среде, A_{12} учитывает влияние вихревого поля зоны *2* [3]. В декартовой системе координат векторный потенциал

$$\dot{A}_{10} = [\mu_0 \dot{I}_{\text{ст}}/(2\pi)] \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Аналогично (18.105), находим векторный потенциал:

$$\dot{A}_{12} = f_1(\lambda, x)\cos\lambda y. \tag{18.106}$$

Векторный потенциал магнитного поля в зоне *3*

$$\dot{A}_3 = f_3(\lambda, x)\cos\lambda y. \tag{18.107}$$

Искомые функции $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_3$ должны удовлетворять уравнению Лапласа, а $\dot{A}_2$ — уравнению Гельмгольца. Определим общее выражение векторного потенциала $\dot{A}_{12}$. Для этого (18.106) продифференцируем дважды по x, y и подставим в (18.103): $[\partial^2 f_1(\lambda, x)/\partial x^2]\cos\lambda y - f_1(\lambda, x)\lambda^2\cos\lambda y = 0$. После сокращения на $\cos\lambda y$ получим однородное уравнение второй степени $\partial^2 f_1(\lambda, x)/\partial x^2 - f_1(\lambda, x)\lambda^2 = 0$, решение которого имеет вид

$$f_1(\lambda, x) = C_1\exp(\lambda x) + C_2\exp(-\lambda x).$$

Так как при бесконечном удалении от источника поля ($x \to -\infty$) векторный потенциал имеет конечную величину, то коэффициент C_2 должен быть равен нулю. Следовательно, $\dot{A}_{12} = C_1\exp(\lambda x)\cos\lambda y$.

Более общее решение получим при интегрировании по параметру λ

$$\dot{A}_{12} = \int_0^\infty C(\lambda)\exp(\lambda x)\cos\lambda y d\lambda.$$

Интегрирование производим в пределах $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, так как $\cos\lambda y$ — функция четная; $C(\lambda)$ — некоторая функция λ. Таким образом,

$$\dot{A}_1 = \frac{\mu_0 \dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2} + \int_0^\infty C(\lambda)\exp(\lambda x)\cos\lambda y d\lambda.$$

Аналогично определим векторный потенциал зоны *2* (18.105):

$$\dot{A}_2 = \int_0^\infty [D_1(\lambda)\exp(px) + D_2(\lambda)\exp(-px)]\cos\lambda y d\lambda,$$

где

$$p = \sqrt{\lambda^2 + jk^2}; \quad k^2 = \omega\mu_0\gamma.$$

Так как при бесконечном удалении от источника поля ($x \to +\infty$) векторный потенциал имеет конечную величину, то в зоне *3*

$$\dot{A}_3 = \int_0^\infty E(\lambda)\exp(-\lambda x)\cos\lambda y d\lambda.$$

Коэффициенты $C(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $E(\lambda)$ определим из условия равенства нормальных и тангенциальных составляющих индукции на границах сред, т. е. в плоскостях $x = 0$ и $x = d$. Если $x = 0$, то $\partial\dot{A}_1/\partial x = \partial\dot{A}_2/\partial x$; $\partial\dot{A}_1/\partial y = \partial\dot{A}_2/\partial y$ и тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu_0 \dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\cdot\frac{a}{a^2+y^2} + \int_0^\infty C(\lambda)\lambda\cos\lambda y d\lambda = \int_0^\infty [pD_1(\lambda) - \\ &\qquad - pD_2(\lambda)]\cos\lambda y d\lambda; \\ &\frac{\mu_0 \dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\cdot\frac{y}{a^2+y^2} - \int_0^\infty C(\lambda)\lambda\sin\lambda y d\lambda = \\ &\qquad = -\int_0^\infty [D_1(\lambda) + D_2(\lambda)]\lambda\sin\lambda y d\lambda. \end{aligned}\right\} \quad (18.108)$$

Отношения $a/(a^2+y^2)$ и $y/(a^2+y^2)$ выразим следующими интегральными функциями:

$$a/(a^2+y^2) = \int_0^\infty \exp(-\lambda a)\cos\lambda y d\lambda;$$

$$y/(a^2+y^2) = \int_0^\infty \exp(-\lambda a)\sin\lambda y d\lambda.$$

Тогда равенства (18.108) преобразуем к виду

$$\left.\begin{aligned}&[\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}/(2\pi)]\exp(-\lambda a)+\lambda C(\lambda)=pD_1(\lambda)-pD_2(\lambda);\\&[\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}/(2\pi)]\exp(-\lambda a)-\lambda C(\lambda)=-\lambda D_1(\lambda)-\lambda D_2(\lambda).\end{aligned}\right\}\quad(18.109)$$

Если $x=d$, то $\partial\dot{A}_2/\partial x=\partial\dot{A}_3/\partial x$; $\partial\dot{A}_2/\partial y=\partial\dot{A}_3/\partial y$ и тогда

$$\left.\begin{aligned}&pD_1(\lambda)\exp(pd)-pD_2(\lambda)\exp(-pd)=-\lambda E(\lambda)\exp(-\lambda d);\\&\lambda D_1(\lambda)\exp(pd)+\lambda D_2(\lambda)\exp(-pd)=\lambda E(\lambda)\exp(-\lambda d).\end{aligned}\right\}\quad(18.110)$$

Решая систему уравнений (18.109) — (18.110), получим следующие значения коэффициентов:

$$D_1(\lambda)=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{\pi}\cdot\frac{(p-\lambda)\exp(-\lambda a-pd)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)};$$

$$D_2(\lambda)=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{\pi}\cdot\frac{(p+\lambda)\exp(-\lambda a+pd)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)};$$

$$E(\lambda)=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{\pi}\cdot\frac{2p\exp(-\lambda a+\lambda d)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)};$$

$$C(\lambda)=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{\pi}\left[\frac{\exp(-\lambda a)}{2\lambda}+\frac{(p-\lambda)\exp(-\lambda a-pd)+(p+\lambda)\exp(-\lambda_a+pd)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)}\right].$$

Общие выражения для векторных потенциалов магнитного поля по областям следующие:

$$\dot{A}_1=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2}+\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left[\frac{\exp(-\lambda a)}{\lambda}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p-\lambda)\exp(-\lambda a-pd)+(p+\lambda)\exp(-\lambda a+pd)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)}\right]\cdot\exp(\lambda x)\cdot\cos\lambda y d\lambda;\quad(18.111)$$

$$\dot{A}_2=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{(p-\lambda)\exp(-\lambda a-pd)\exp(px)+(p+\lambda)\exp(-\lambda a+pd)\exp(-px)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)}\times$$
$$\times\cos\lambda y d\lambda,\quad(18.112)$$

$$\dot{A}_3=\frac{\mu_0\dot{I}_{\text{ст}}}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{2p\exp(-\lambda a+\lambda d)\cdot\exp(-\lambda x)}{(p-\lambda)^2\exp(-pd)-(p+\lambda)^2\exp(pd)}\cdot\cos\lambda y d\lambda.\quad(18.113)$$

При анализе электромагнитного поля вблизи токопроводящего экрана представляет интерес определение влияния экрана на магнитную индукцию в областях 1 и 3. Амплитудное значение индукции определим через составляющие индукции по осям x, y:

$$\dot{B}_x=\partial\dot{A}_z/\partial y;\quad \dot{B}_y=-\partial\dot{A}_z/\partial x;\quad B=\sqrt{|\dot{B}_x|^2+|\dot{B}_y|^2}.$$

Дифференцирование выражений (18.111) — (18.113) по x, y не представляет сложности, однако вычисление интегралов возможно только приближенно, например методами численного интегрирования на ЦВМ. Кривая *1* распределения индукции вдоль оси x представлена на рис. 18.16 для случая, когда толщина экрана $d = \Delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\gamma)}$. Штриховой линией *II* показана кривая изменения поля в однородной среде (воздухе) при отсутствии экрана.

ГЛАВА 19. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

§ 19.1. Сущность численных методов

Уравнения электромагнитного поля, описывающие его с помощью скалярного или векторного магнитного потенциала в областях со сложной конфигурацией границ или с нелинейными характеристиками сред, обычно не имеют аналитического решения. Такие уравнения решаются численно, например с помощью метода конечных разностей. Метод конечных разностей предполагает замену непрерывного распределения скалярного или векторного магнитного потенциала дискретным. С этой целью область, где рассчитывается магнитное поле, покрывается сеткой. В зависимости от системы координат, в которой записаны уравнения электромагнитного поля, форма ячеек сетки может быть прямоугольной, квадратной (прямоугольная система координат) или в виде сегментов (полярная система координат). Система координат и соответствующая ей форма ячеек сетки выбираются такими, чтобы наиболее точно аппроксимировать границы расчетной области. Точность аппроксимации границ отдельных участков может иногда потребовать использования сетки с различной формой ячеек для одной и той же расчетной области.

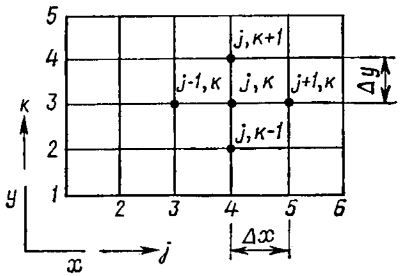

Рис. 19.1. Равномерная прямоугольная сетка

Равномерная сетка с прямоугольной формой ячеек представлена на рис. 19.1. Для удобства расчетов каждый узел сетки обозначен двойным индексом j, k. Индекс j обозначает порядковый номер вертикальной линии сетки (столбца), а индекс k — порядковый номер горизонтальной линии сетки (строки). Если один из узлов принимает индексацию j, k, то относительно него узлы будут иметь индексацию, представленную на рисунке. Узел с индексами j, k по отношению к соседним узлам называется *центральным*. Центральный узел и окружающие его соседние узлы образуют «шаблон» сетки.

Связь потенциалов каждого узла сетки с соседними описывается конечно-разностными уравнениями, образующими систему. Порядок системы определяется количеством внутренних узлов сетки. Решение уравнения электромагнитного поля сводится к решению системы конечно-разностных уравнений. Предположим, что независимая величина, например координата x центрального узла (рис. 19.1), получит малое конечное приращение $\Delta x = a$. Соответствующее приращение потенциальной функции φ называется *разностью первого порядка или первой разностью функции*:

$$\delta^{I} = \Delta\varphi = \varphi(j-1,\ k) - \varphi(j,\ k). \tag{19.1}$$

Величина $\delta^{I}/a = \Delta\varphi/\Delta x$ называется *разностным отношением первого порядка* и при $\Delta x \to 0$

$$\delta^{I}/a\,(\Delta x \to 0) = \partial\varphi/\partial x. \tag{19.2}$$

Первые разности функций φ, в свою очередь, являются функцией независимой переменной x. Разности первых разностей называются *разностью второго порядка или второй разностью функции*:

$$\delta^{II} = \delta^{I}(j+1,\ k) - \delta^{I}(j,\ k). \tag{19.3}$$

Величина $\delta^{II}/a^2 = \Delta\varphi^2/\Delta x^2$ называется *разностным отношением второго порядка* и при $\Delta x \to 0$

$$\delta^{II}/a^2\,(\Delta x \to 0) = \partial^2\varphi/\partial x^2. \tag{19.4}$$

В двухмерных задачах величины поля являются функциями координат x, y. Сделаем приращения координат равными. Тогда по осям x, y

$$\left.\begin{aligned} \delta_x^{II} &= [\varphi(j+1,\ k) - \varphi(j,\ k)] - [\varphi(j,\ k) - \varphi(j-1,\ k)] = \\ &= \varphi(j+1,\ k) + \varphi(j-1,\ k) - 2\varphi(j,\ k); \\ \delta_y^{II} &= [\varphi(j,\ k+1) - \varphi(j,\ k)] - [\varphi(j,\ k) - \\ &- \varphi(j;\ k-1)] = \varphi(j,\ k+1) + \varphi(j,\ k-1) - 2\varphi(j,\ k). \end{aligned}\right\} \tag{19.5}$$

Распределение потенциала в безвихревом поле подчиняется уравнению Лапласа $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$. Подставим значения производных из (19.4) с учетом (19.5). После сокращения постоянной величины a^2 получим расчетное уравнение Лапласа в разностной форме для некоторой узловой точки с координатами j, k:

$$\varphi(j+1,\ k) + \varphi(j-1,\ k) + \varphi(j,\ k+1) + \varphi(j,\ k-1) - \\ - 4\varphi(j,\ k) = 0. \tag{19.6}$$

Отсюда потенциал центрального узла

$$\varphi(j,\ k) = 0{,}25\,[\varphi(j+1,\ k) + \varphi(j-1,\ k) + \\ + \varphi(j,\ k+1) + \varphi(j,\ k-1)]. \tag{19.7}$$

Решение, полученное методом разностей, представляет собой совокупность частных значений функции, описывающей магнитное поле в дискретных точках, равномерно распределенных по всей области поля. Значения функции в точках находят путем замены дифференциального уравнения в частных производных, которым описывается поле, системой алгебраических уравнений в конечных разностях, связывающих значение потенциала в любой точке области поля со значениями потенциалов смежных точек поля [3]. При этом можно выбрать произвольное пространственное распределение точек. Однако при выборе равномерного распределения точек задача значительно упрощается. Равномерное распределение обеспечивается расположением точек в «узлах» любой равномерной сетки.

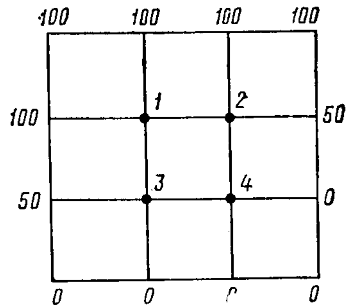

Рис. 19.2. Пример расчета релаксационным методом

Когда количество расчетных точек невелико, потенциалы узловых точек легко найти путем решения системы, составленной из уравнений типа (19.6) для каждого узла. Пусть известны значения потенциала на границах квадрата (рис. 19.2). Требуется определить потенциалы в точках *1*, *2*, *3* и *4*. Для каждой из этих точек, как для узловых, составим уравнения Лапласа в разностной форме:

$$\left.\begin{aligned} &100+\varphi_2+100+\varphi_3-4\varphi_1=0;\\ &\varphi_1+50+100+\varphi_4-4\varphi_2=0;\\ &50+\varphi_4+\varphi_1+0-4\varphi_3=0;\\ &\varphi_3+0+\varphi_2+0-4\varphi_4=0. \end{aligned}\right\} \qquad (19.8)$$

Решая систему, находим: $\varphi_1 = 75$; $\varphi_2 = 62{,}5$; $\varphi_3 = 37{,}5$; $\varphi_4 = 25$.

В задачах расчета магнитных полей используют сетки, содержащие сотни узлов. Такой же порядок, равный числу внутренних узлов сетки, имеют системы конечно-разностных уравнений. Для решения систем уравнений используют прямые и итерационные методы. Выбор прямых или итерационных методов зависит от вида матрицы. Матрицы системы конечно-разностных уравнений являются редкими, т. е. содержат большое количество нулевых элементов. Для таких матриц прямые методы решения, например метод исключения Гаусса, нецелесообразны, так как для своей реализации требуют хранения в памяти ЦВМ большого количества матричных элементов, что может оказаться выше возможностей некоторых ЦВМ. Прямые методы находят применение в основном для решения систем уравнений с плотными матрицами.

Для решения систем уравнений с редкими матрицами удобны итерационные методы. Итерационные методы не требуют хранения многих матричных элементов, они самокорректирующиеся, что минимизирует ошибки округления. Для решения систем конечно-разностных уравнений широко используется метод последовательных смещений (метод Гаусса — Зейделя). Для ускорения сходимости итерационного процесса при решении уравнений в конечных разностях методом Либмана вводится релаксационный параметр β [3, 4, 35].

Рассмотрим простой итерационный метод. Начальные значения потенциалов узлов *1—4* обычно принимают равными нулю. По (19.7) находим потенциал *1* узла и вписываем его вместо начального. Затем при обходе по строкам находим потенциал *2* узла, используя найденное значение φ_1, и вписываем его вместо начального. После вычисления потенциалов первой строки переходим к расчету потенциалов второй строки и т. д. до полного обхода всех узловых точек. Затем производим вторую, третью, ... , n-ю итерацию, пока потенциалы узлов не будут отличаться от значений в предыдущем цикле на некоторую величину, определяющую точность расчетов, например $\Delta\varphi = 0,1$ (табл. 19.1).

Таблица 19.1

Номер узла	Потенциал узла при итерациях				
	1	2	3	4	5
1	50	68,75	73,4375	74,6093	74,9023
2	50	59,375	61,7187	62,3046	62,4521
3	25	34,375	36,7187	37,3046	37,4511
4	18,75	23,4375	24,6093	24,9023	24,9755

Недостаток этого метода — медленная сходимость. Существует ряд итерационных методов с быстрой сходимостью, наиболее простой из которых экстраполяционный метод Либмана. Сущность метода в том, что новое значение потенциала узла определяется как сумма старого значения и некоторой доли остатка, найденного по (19.6). Потенциал некоторой узловой точки при обходе узлов по строкам (рис. 19.1):

$$\varphi^n(j, k) = \varphi^{n-1}(j, k) + \beta \cdot 0,25\,[\varphi^{n-1}(j+1, k) + \varphi^n(j-1, k) + \\ + \varphi^n(j, k+1) + \varphi^{n-1}(j, k-1) - 4\varphi^{n-1}(j, k)], \qquad \textbf{(19.9)}$$

где n — номер итерации.

В остальном метод аналогичен простому итерационному методу последовательных смещений. Значение коэффициентов релаксации принимают в пределах $1 < \beta < 2$. При $\beta = 1$ уравнение (19.9) переходит в (19.7), а при $\beta \to 2$ процесс решения становится неустойчивым (табл. 19.2). Сходимость решения существенно зависит от принятого релаксационного параметра, однако оптимальное β различно для каждой из задач и найти его можно лишь приближенно, часто только путем подбора.

Таблица 19.2

Релаксационный параметр	Потенциал узла при итерациях				
	1	2	3	4	5
1,1	55	72,943	77,0648	71,1221	75,0228
1,2	60	76,8	75,888	74,8204	74,9860
1,3	65	80,3562	76,3751	73,9886	75,3933
1,4	70	83,65	75,8135	72,5797	75,9336
1,5	75	86,7187	73,3886	71,0174	78,0240
1,9	95	97,4937	95,6583	96,7339	207,837

Продолжение табл. 19.2

Релаксационный параметр	Потенциал узла при итерациях					
	6	7	8	9	10	11
1,1						
1,2						
1,3	74,995					
1,4	74,970					
1,5	74,233	. 70,1088	76,1957	73,970	75,454	74,907
1,9	Переполнение					

Примечание. Итерационный процесс прекращается при достижении требуемой точности.

Из табл. 19.2 видно, что при $\beta > 1$ процесс схождения носит периодический характер с затухающими колебаниями относительно истинного значения в отличие от апериодического процесса простого итерационного метода. Срыв колебаний и, как следствие, ускорение сходимости решения возможны принятием $\beta = 1$ после перехода потенциалов через их максимальные значения; например, в рассматриваемом примере при $\beta = 1,5$ максимум потенциала достигается во второй итерации. Принимаем $\beta = 1$ после третьей итерации или при достижении минимального значения после четвертой итерации (табл. 19.3).

Таблица 19.3

Исходные данные при $\beta=1,5$		Потенциалы узлов при дополнительных итерациях с $\beta=1$			
номера итераций	потенциалы узлов φ_1	1	2	3	4
3	73,3886	71,8078	74,4938	74,8734	74,9680
4	71,0174	75,6885	75,0670		
5	78,0240	75,4967	75,0639		

Другие методы ускорения сходимости решения рассмотрены далее.

§ 19.2. Конечно-разностные уравнения для областей с разными магнитными характеристиками

При замене производных конечно-разностными отношениями на границах раздела сред с разными магнитными характеристиками необходимо предусмотреть выполнение граничных условий (17.35) и (17.36). Различия в магнитных и электрических характеристиках сред для одной и той же расчетной области приводят к различию конечно-разностных уравнений, что затрудняет их совместное решение. Эти недостатки автоматически устраняются, если для получения конечно-разностного уравнения использовать закон полного тока в интегральной форме. Уравнению (17.31) соответствует запись закона полного тока в интегральной форме:

$$\oint_l \dot{H} dl = \int_s \dot{J}_{\text{ст}} ds + j\omega\gamma \int_s \left(\dot{A}_{\text{ср}} - \dot{A}\right) ds. \qquad (19.10)$$

Сетка должна удовлетворять линейному изменению потенциалов между соседними узлами и постоянству магнитных свойств среды в пределах каждой ячейки. Линейное изменение векторных потенциалов между соседними узлами достигается уменьшением шага сетки в областях быстрого изменения значений векторного потенциала. Однородность магнитных свойств среды в пределах каждой ячейки сетки автоматически выполняется, если ферромагнитные области изотропные и в них отсутствуют потери на гистерезис и вихревые токи. В этом случае в ферромагнитных областях для переменных и постоянных полей устанавливается с помощью основной кривой намагничивания однозначная зависимость между максимальными значениями (комплексными амплитудами) индукции и напряженности магнитного поля:

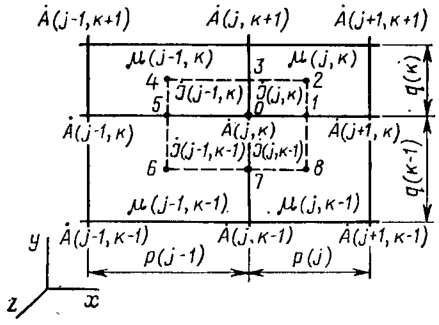

Рис. 19.3. Шаблон прямоугольной сетки

$$\mu = \dot{B} / \dot{H}, \qquad (19.11)$$

где μ — действительное значение магнитной проницаемости.

Рассмотрим сетку с прямоугольной формой ячейки (рис. 19.3). Разделим ячейки сетки средними линиями и получим контур интегрирования $8—2—4—6—8$. Для контура интегрирования левую часть уравнения (9.10) в конечных разностях запишем в виде

$$\oint_l \dot{\mathrm{H}} dl = \int_8^2 \dot{\mathrm{H}} dl + \int_2^4 \dot{\mathrm{H}} dl + \int_4^6 \dot{\mathrm{H}} dl + \int_6^8 \dot{\mathrm{H}} dl, \qquad (19.12)$$

причем

$$\int_8^2 \dot{\mathrm{H}} dl = \frac{0,5}{p(j)} \left(\frac{q(k-1)}{\mu(j,\ k-1)} + \frac{q(k)}{\mu(j,\ k)} \right) \left(\dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \dot{\mathrm{A}}(j+1,\ k) \right); \qquad (19.13)$$

$$\int_2^4 \dot{\mathrm{H}} dl = \frac{0,5}{q(k)} \left(\frac{p(j)}{\mu(j,\ k)} + \frac{p(j-1)}{\mu(j-1,\ k)} \right) \left(\dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \dot{\mathrm{A}}(j,\ k+1) \right); \qquad (19.14)$$

$$\int_4^6 \dot{\mathrm{H}} dl = \frac{0,5}{p(j-1)} \left(\frac{q(k-1)}{\mu(j-1,\ k-1)} + \frac{q(k)}{\mu(j-1,\ k)} \right) \left(\dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \right.$$
$$\left. - \dot{\mathrm{A}}(j-1,\ k) \right); \qquad (19.15)$$

$$\int_6^8 \dot{\mathrm{H}} dl = \frac{0,5}{q(k-1)} \left(\frac{p(j)}{\mu(j,\ k-1)} + \frac{p(j-1)}{\mu(j-1,\ k-1)} \right) \left(\dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \right.$$
$$\left. - \mathrm{A}(j,\ k-1) \right). \qquad (19.16)$$

Обозначим

$$T(j,\ k) = 0,5q(k)/(p(j)\mu(j,\ k));\ S(j,\ k) = 0,5 \times$$
$$\times p(j)/(q(k)\mu(j,\ k)). \qquad (19.17)$$

Введем коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = T(j,\ k) + T(j,\ k-1); \quad C_2 = S(j,\ k) + S(j-1,\ k); \\ &C_3 = T(j-1,\ k) + T(j-1,\ k-1);\ C_4 = S(j,\ k-1) + \\ &\quad + S(j-1,\ k-1); \\ &C_5 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \end{aligned}\right\} \qquad (19.18)$$

Тогда (19.12) с учетом (19.13) — (19.18) запишем в виде

$$\oint_l \dot{\mathrm{H}} dl = C_5 \dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \dot{\mathrm{U}}(j,\ k), \qquad (19.19)$$

где

$$\dot{\mathrm{U}}(j,\ k) = C_1 \dot{\mathrm{A}}(j+1,\ k) + C_2 \dot{\mathrm{A}}(j,\ k+1) + C_3 \dot{\mathrm{A}}(j-1,\ k) +$$
$$+ C_4 \dot{\mathrm{A}}(j,\ k-1) \qquad (19.20)$$

Контур интегрирования 8—2—4—6—8 (рис. 19.3) ограничивает токопроводящую область площадью

$$S_м(j,\ k) = 0{,}25\,(p(j) + p(j-1))\,(q(k) + q(k-1)). \qquad (19.21)$$

В пределах $S_м(j,\ k)$ плотность вихревого и стороннего токов постоянна. Плотность стороннего тока задают в виде вещественного числа $J_{ст}$. Для конечно-разностной аппроксимации правой части выражения (19.10) определим ограниченные контуром интегрирования 8—2—4—6—8 соответственно сторонний и вихревой токи:

$$\dot{I}(j,\ k) = \int\limits_{S_м} J_{ст}ds = J_{ст}(j,\ k)\,S_м(j,\ k), \qquad (19.22)$$

$$\dot{I}_b(j,\ k) = j\omega\gamma \int\limits_{S_м} \left(\dot{A}_{ср} - \dot{A}\right)ds = jC_6\left(\dot{A}_{ср} - \dot{A}(j,\ k)\right), \qquad (19.23)$$

где коэффициент

$$C_6 = \omega\gamma S_м(j,\ k). \qquad (19.24)$$

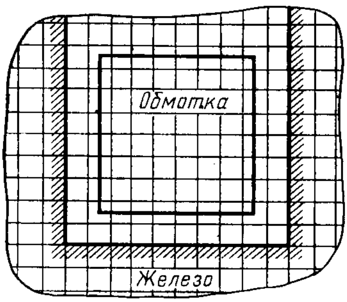

Рис. 19.4. Сетка со средним разделением в области тока

Границы токопроводящей области могут совпадать с линиями сетки или проходить строго посередине между ними. Целесообразно использовать сетку со средним разделением, когда границы токопроводящей области проходят строго посередине между линиями сетки (рис. 19.4). В этом случае (19.22) и (19.23) будут справедливы для всех узлов сетки, находящихся в токопроводящей области и на ее границе. Если границы токопроводящей области будут совпадать с линиями сетки, то для расчета элементов тока в узлах сетки на границе токопроводящей области потребуются выражения, отличные от записанных выше. При этом разнотипность выражений для расчета элементов тока в узлах сетки в токопроводящей области и на ее границе затрудняет составление программы и увеличивает время расчета на ЦВМ из-за необходимости использования логических выражений.

Формулы (19.19), (19.22) и (19.23) позволяют получить уравнение в конечных разностях для расчета комплексного векторного потенциала в любом j, k-м узле сетки:

$$\dot{A}(j,\ k) = \left(\dot{U}(j,\ k) + \dot{I}(j,\ k) + jC_6\dot{A}_{ср}\right)/(C_5 + jC_6). \qquad (19.25)$$

В линейных задачах целесообразно комплексный векторный потенциал представить в виде

$$\dot{A}(j,\ k) = A_1(j,\ k) + jA_2(j,\ k) \qquad (19.26)$$

и вести отдельно расчет для его действительной A_1 и мнимой A_2 частей.

Для этого в (19.25) все комплексные величины запишем в виде действительной и мнимой частей:

$$\dot{U}(j,\ k) = U_1(j,\ k) + jU_2(j,\ k); \quad \dot{A}_{ср} = A_{1с} + jA_{2с}. \qquad (19.27)$$

С учетом (19.27) уравнение (19.25) представим в виде

$$\dot{A}(j,\ k) = (U_1(j,\ k) + jU_2(j,\ k) + I(j,\ k) + jC_6A_{1с} - $$
$$- C_6A_{2с})/(C_5 + jC_6). \qquad (19.28)$$

Домножив числитель и знаменатель (19.28) на комплексно-сопряженное число знаменателя, получим

$$\dot{A}(j,\ k) = [C_5U_1(j,\ k) + C_5I(j,\ k) - C_5C_6A_{2с} + C_6U_2(j,\ k) +$$
$$+ C_6^2A_{1с} + j(C_5U_2(j,\ k) + C_6C_5\ A_{1с} - C_6U_1(j,\ k) -$$
$$- C_6I(j,\ k) + C_6^2\ A_{2с})]/(C_5^2 + C_6^2). \qquad (19.29)$$

Из (19.29) выделим два уравнения для расчета соответственно действительной и мнимой частей векторного потенциала:

$$A_1(j,\ k) = [C_5(U_1(j,\ k) + I(j,\ k) - C_6A_{2с}) + C_6 \times$$
$$\times (U_2(j,\ k) + C_6A_{1с})]/(C_5^2 + C_6^2), \qquad (19.30)$$

$$A_2(j,\ k) = [C_5(U_2(j,\ k) + C_6A_{1с}) - C_6(U_1(j,\ k) +$$
$$+ I(j,\ k) - C_6A_{2с})]/(C_5^2 + C_6^2). \qquad (19.31)$$

Подразделение (19.29) на два независимых уравнения позволяет проводить расчеты переменного магнитного поля с помощью действительных величин, что существенно уменьшает затраты машинного времени на ЦВМ и в некоторых случаях упрощает составление программы на алгоритмических языках.

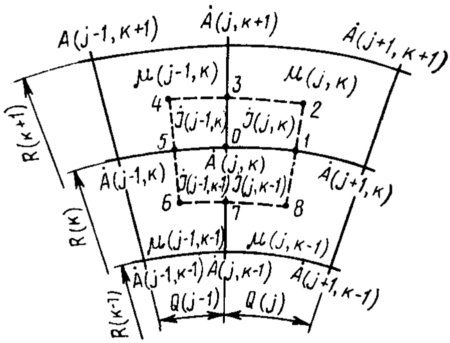

Рис. 19.5. Шаблон полярной сетки

Уравнения (19.25) и (19.29) также справедливы и для полярной сетки, где координаты любого j, k-го узла — функции радиуса $R(k)$ и полярного угла $Q(j)$. Шаблон полярной сетки представлен на рис. 19.5. Целесообразно использовать сетку со средним разделением, когда граница токопроводящей области проходит посередине между линиями сетки. Площадь, ограниченную контуром интегрирования 8—2—4—6—8, определим по формуле $S_м(j, k) = (Q(j-1) + Q(j))\,(R(k+1) + 2R(k) + R(k-1))\cdot(R(k+1) - R(k-1))/16$. Для расчета коэффициентов C_2, C_4 (19.18) находим

$$T(j, k) = 0{,}5\,(R(k+1) - R(k))/(Q(j)\,\mu(j, k));$$

$$S(j, k) = 0{,}25Q(j)\,(R(k+1) + R(k))/[(R(k+1) - R(k))\,\mu(j, k)], \tag{19.32}$$

Для коэффициентов C_1 и C_3 справедливы выражения

$$C_1 = (T(j\ k) + T(j, k-1))/R(k);$$

$$C_3 = (T(j-1, k) + T(j-1, k-1))/R(k). \tag{19.33}$$

Уравнение (19.25) с учетом (19.19) приведем к виду, удобному для решения системы уравнений методом верхней релаксации:

$$\dot{A}^n(j, k) = (1-\beta)\,\dot{A}^{n-1}(j, k) + \beta\,[C_1\dot{A}^{n-1}(j+1, k) + C_2\dot{A}^{n-1}(j, k+1) + C_3\dot{A}^n(j-1, k) + C_4\dot{A}^n(j, k-1) + I(j, k) + jC_6\dot{A}_{ср}]/(C_5 + jC_6). \tag{19.34}$$

По порядковым номерам итераций при векторных потенциалах можно заключить, что расчет ведется по столбцам, так как для расчета $\dot{A}^n_j(j, k)$ на n-й итерации используются значения векторных потенциалов соседних узлов (ниже и левее узла j, k, рис. 19.3 и 19.5), полученные на этой же n-й итерации.

Приведем уравнения (19.30) и (19.31) к виду, удобному для метода верхней релаксации:

$$A_1^n(j, k) = (1-\beta)\,A_1^{n-1}(j, k) + \beta\,[C_5\,(C_1A_1^{n-1}(j+1, k) + C_2A_1^{n-1}(j, k+1) + C_3A_1^n(j-1, k) + C_4A_1^n(j, k-1) + I(j, k) - C_6A_{2c} + C_6\,(C_1A_2^{n-1}(j+1, k) + C_2A_2^{n-1}(j, k+1) + C_3A_2^n(j-1, k) + C_4A_2^n(j, k-1) + C_6A_{1c})]/(C_5^2 + C_6^2); \tag{19.35}$$

$$A_2^n(j, k) = (1-\beta)\,A_2^{n-1}(j, k) + \beta\,[C_5\,(C_1A_2^{n-1}(j+1, k) + C_2A_2^{n-1}(j, k+1) + C_3A_2^n(j-1, k) + C_4A_2^n(j, k-1) + C_6A_{1c}) - C_6\,(C_1A_1^{n-1}(j+1, k) + C_2A_1^{n-1}(j, k+1) + C_3A_1^n(j-1, k) + C_4A_1^n(j, k-1) + I(j, k) - C_6A_{2c})]/(C_5^2 + C_6^2). \tag{19.36}$$

Уравнения (19.34) — (19.36) справедливы для расчета переменных магнитных полей на сетках в прямоугольной и полярной системах координат. При расчете стационарных магнитных полей ($\omega = 0$, поэтому $C_6 = 0$) уравнение (19.34) упрощается:

$$A^n(j,\ k) = (1-\beta)A^{n-1}(j,\ k) + \beta\,[C_1A^{n-1}(j+1,\ k) + C_2 \times$$
$$\times A^{n-1}(j,\ k+1) + C_3A^n(j-1,\ k) + C_4A^n(j,\ k-1) + I(j,\ k)]/C_5. \tag{19.37}$$

При решении систем конечно-разностных уравнений методом верхней релаксации возникают трудности в выборе оптимального значения релаксационного параметра β, обеспечивающего сходимость итерационного процесса за приемлемое число итераций. В линейных задачах расчета стационарных магнитных полей на прямоугольных сетках с числом узлов $(p+1)(q+1)$ для определения оптимального β используем формулу [3]

$$\beta = 2\left(1 - \pi\sqrt{1/p^2 + 1/q^2}\right). \tag{19.38}$$

Чаще используют разного рода автоматические корректировки релаксационного параметра β в ходе итераций. Автоматическую корректировку осуществим следующим образом. Предварительно по (19.38) определим начальное значение β. Затем в ходе каждой итерации рассчитываем коэффициент [39]

$$\eta = \frac{\sum\limits_j \sum\limits_k \operatorname{mod}\left(a^{n+1}(j,\ k) - a^n(j,\ k)\right)}{\sum\limits_j \sum\limits_k \operatorname{mod}\left(a^n(j,\ k) - a^{n-1}(j,\ k)\right)}, \tag{19.39}$$

где $a(j,\ k) = A_1(j,\ k)$ и $a(j,\ k) = A(j,\ k)$ при расчете соответственно переменных и стационарных магнитных полей.

В зависимости от коэффициента η проводится следующая корректировка релаксационного параметра: если $\eta < 1$, то $\beta^{n+1} = \beta^n + \delta_1$; если $\eta \geqslant 1$, то $\beta^{n+1} = \beta^n - \delta_2$. Величины δ_1 и δ_2 задаются в пределах $\delta_1 = 0{,}002 \div 0{,}003$, $\delta_2 = 0{,}01 \div 0{,}02$. Целесообразно ограничить изменение релаксационного параметра пределами $1{,}10 \leqslant \beta \leqslant 1{,}8$. Если указанная корректировка малоэффективна, то можно воспользоваться корректировкой β по [35].

Эффективный метод ускорения сходимости итерационного процесса — применение закона полного тока в интегральной форме. Практическая реализация такого ускорения рассматривается в примере расчета магнитного поля в пазу электрической машины (см. § 19.5).

§ 19.3. Учет реальных магнитных характеристик ферромагнитных сред

При расчете магнитных полей методом конечных разностей реальная характеристика сред учитывается коэффициентами $T(j,\ k)$ и $S(j,\ k)$, в которые входит магнитная проницаемость [см. (19.17), (19.32)]. В случае переменных магнитных полей, изменяющихся по гармоническому закону, магнитная проницаемость — комплексная величина, она может быть найдена из отношения

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{B}}{\dot{H}} = \sqrt{\left(\frac{B_m}{H_m}\right) - \left(\frac{B_1H_2 - B_2H_1}{H_m^2}\right)^2} - $$

$$-j\left(\frac{B_1H_2 - B_2H_1}{H_m^2}\right) = \mu - j\mu', \tag{19.40}$$

где B_m и H_m — амплитуды индукции и напряженности магнитного поля; B_1, H_1 и B_2, H_2 — действительные и мнимые части комплексных гармонических индукции $\dot{B}$ и напряженности $\dot{H}$ магнитного поля; μ и μ' — действительная и мнимая части комплексной магнитной проницаемости $\dot{\mu}$.

Если P_{1v} — гистерезисные потери на единицу объема, а Q_{1v} — намагничивающая мощность магнитной цепи, то действительную и мнимую части магнитной проницаемости определим по формулам [51]

$$\mu = 2Q_{1v}/(\omega H_m^2); \quad \mu' = 2P_{1v}/(\omega H_m^2). \tag{19.41}$$

В первом приближении пренебрегаем потерями в ферромагнитных областях. При $P_{1v} = 0$ комплексная магнитная проводимость равна μ (19.11). В ферромагнитных областях связь между магнитной проводимостью и амплитудными значениями B_m и H_m устанавливается однозначно с помощью основной кривой намагничивания $\mu = f(B_m)$ или $\mu = f(H_m)$. При расчете магнитных полей методом конечных разностей обычно используют зависимость $\mu(j, k) = f(B(j, k))$, где $\mu(j, k)$ и $B(j, k)$ — соответственно магнитная проницаемость и модуль магнитной индукции в пределах одной и той же ячейки сетки.

Воспользуемся шаблоном сетки в декартовой системе координат (см. рис. 19.3). Здесь в центре ячейки с координатами j, k указаны направления составляющих индукции $\dot{B}_x(j, k)$ и $\dot{B}_y(j, k)$ с учетом направления тока. Согласно принятому направлению координатных осей определим составляющие индукции:

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_x(j, k) &= \partial\dot{A}/\partial y = (\dot{A}(j, k) - \dot{A}(j, k+1) + \\ &+ \dot{A}(j+1, k) - \dot{A}(j+1, k+1))/(2q(k)); \\ \dot{B}_y(j, k) &= -\partial\dot{A}/\partial x = (\dot{A}(j, k) - \dot{A}(j+1, k) + \\ &+ \dot{A}(j, k+1) - \dot{A}(j+1, k+1))/(2p(j)). \end{aligned}\right\} \tag{19.42}$$

Модуль магнитной индукции

$$B(j, k) = \sqrt{(\operatorname{mod}\dot{B}_x(j, k))^2 + (\operatorname{mod}\dot{B}_y(j, k))^2}. \tag{19.43}$$

В случае стационарных магнитных полей (19.43) упрощается и приобретает вид

$$B(j,\ k)=\sqrt{B_x^2(j,\ k)+B_y^2(j,\ k)}. \qquad (19.44)$$

Для сетки в полярной системе координат (рис. 19.5) тангенциальную $\dot{B}_Q$ и радиальную $\dot{B}_R$ составляющие индукции определим по формулам

$$\left.\begin{aligned}\dot{B}_Q(j,\ k)&=0{,}5\,[\dot{A}(j,\ k)-\dot{A}(j,\ k+1)+\dot{A}(j+1,k)-\\&\quad-\dot{A}(j+1,\ k+1)]/(R(k+1)-R(k));\\ \dot{B}_R(j,\ k)&=0{,}5\,[(\dot{A}(j,k)-\dot{A}(j+1,\ k))/R(k)+(\dot{A}(j,k+1)-\\&\quad-\dot{A}(j+1,\ k+1))/R(k+1)]/Q(j).\end{aligned}\right\} \qquad (19.45)$$

С учетом соответствия $\dot{B}_Q\sim\dot{B}_x$ и $\dot{B}_R\sim\dot{B}_y$ модуль магнитной индукции для сетки в полярной системе координат определим по (19.43) или (19.44). Кривые намагничивания электротехнических сталей обычно приводятся в виде таблиц или графиков. При расчетах магнитных полей с помощью ЦВМ пользоваться таблицами или графиками невозможно. Возникает необходимость аппроксимации характеристик намагничивания электротехнической стали аналитическими функциями. На рис. 19.6 представлена характерная кривая намагничивания электротехнических сталей. Выделим два участка: *1* — нелинейный, до индукции полного насыщения B_s; *2* — линейный, при индукциях свыше B_s.

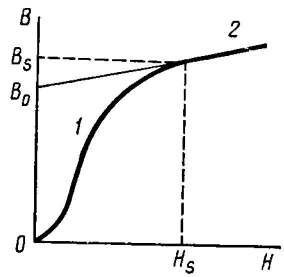

Рис. 19.6. Пример аппроксимации кривой намагничивания

Ввиду сложной зависимости $B=f(H)$ на первом участке невозможно достаточно точно аппроксимировать кривую намагничивания одним простым аналитическим выражением. Кривую намагничивания до индукции полного насыщения можно разделить на несколько участков, количество которых зависит от типа функции, с помощью которой предполагается аппроксимация. Наиболее широко распространена аппроксимация участков кривой намагничивания линейными функциями (кусочно-линейная аппроксимация) или степенными многочленами. Кусочно-линейная аппроксимация достаточно просто реализуется с помощью вычислительной машины. Аппроксимация участков кривой намагничивания степенными многочленами более точная, однако может потребовать больших затрат машинного времени для реализации.

Рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию. Кривую намагничивания (до индукции B_s, рис. 19.6) разобьем на участки с равномерным шагом $\Delta B=B(i+1)-B(i)$, где i — порядковый номер участка. Из характеристики намагничивания каждому значению индукции $B(i)$ соответствует напряженность магнитного поля $H(i)$. Каждый i-й участок аппроксимируется линейной функцией вида

$$(H(j,\ k) - H(i))/(H(i+1) - H(i)) = (B(j,\ k) - B(i))/\Delta B, \quad (19.46)$$

где $H(j,\ k)$ и $B(j,\ k)$ — текущие значения модулей напряженности и индукции магнитного поля.

Модуль магнитной индукции $B(j,\ k)$ определяется из расчетов магнитного поля. С учетом зависимости

$$H(j,\ k) = B(j,\ k)/\mu(j,\ k) \quad (19.47)$$

выражение (19.46) приводим к виду

$$\mu(j,\ k) = B(j,\ k)/[(H(i+1) - H(i))(B(j,\ k) - B(i))/\Delta B + H(i)]. \quad (19.48)$$

Номер участка кривой намагничивания определим по формуле

$$i = B(j,\ k)/\Delta B + 1 \quad (19.49)$$

с округлением в меньшую сторону до целого числа.

Для расчетов $\mu(j,\ k)$ по (19.48) необходимо хранить в оперативной памяти ЦВМ массивы $B(i)$ и $H(i)$. С целью разгрузки оперативной памяти (19.48) упростим. Для обеспечения приемлемой точности аппроксимации достаточно взять $\Delta B = 0{,}1$ Тл. В этом случае магнитная индукция на i-м участке кривой намагничивания $B(i) = \Delta B \cdot i = 0{,}1\ i$, поэтому (19.48) запишем в виде

$$\mu(j,\ k) = B(j,\ k)/[(H(i+1) - H(i))(10 \cdot B(j,\ k) - i) + H(i)]. \quad (19.50)$$

Для расчета $\mu(j,\ k)$ по (19.50) достаточно иметь только массив $H(i)$. При индукциях $B(j,\ k) > B_s$ характеристика намагничивания носит линейный характер. На этом участке зависимость $\mu(j,\ k) = f(B(j,\ k)$ описывается выражением

$$\mu(j,\ k) = \mu_0 B(j,\ k)/(B(j,\ k) - B_0), \quad (19.51)$$

где $B(j,\ k)$ определяется по формулам (19.43), (19.44); B_0 определяется графически из кривой намагничивания (рис. 19.6).

Перерасчет магнитной проницаемости ферромагнитных областей проводится обычно после каждой итерации. С целью исключения больших бросков изменения магнитной проницаемости между итерациями корректируем магнитную проницаемость по формуле

$$\mu^{n+1}(j,\ k) = \mu^{n-1}(j,\ k)(1 - \alpha) + \alpha \cdot \mu^{n}(j,\ k), \quad (19.52)$$

где α — коэффициент подрелаксации, обычно $0{,}05 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}3$.

Если коэффициенты $T(j,\ k)$ и $S(j,\ k)$ в виде массивов хранятся в оперативной памяти ЦВМ, то их значения после каждой итерации уточняются по формулам

$$T^{n+1}(j,\ k) = T^n(j,\ k)\cdot\mu^n(j,\ k)/\mu^{n+1}(j,\ k);$$
$$S^{n+1}(j,\ k) = S^n(j,\ k)\cdot\mu^n(j,\ k)/\mu^{n+1}(j,\ k), \qquad (19.53)$$

в противном случае ведется их перерасчет по (19.17), (19.32).

§ 19.4. Практическая реализация метода конечных разностей

Практическая реализация метода конечных разностей предполагает составление программы расчета магнитного поля на ЦВМ. Для написания программы расчета необходимо: выбрать расчетную модель, выбрать систему координат и тип сетки, нанести сетку на расчетную модель, предварительно оценить затраты машинного времени и возможности ЦВМ.

При выборе расчетной модели необходимо, чтобы ее границы являлись или силовыми линиями, или линиями симметрии магнитного поля, или линиями раздела сред воздух — железо. Система координат выбирается такой, чтобы форма ячеек сетки обеспечивала наиболее точную аппроксимацию границ расчетной модели. При построении сетки учитываются граничные условия, границы токопроводящих и ферромагнитных областей расчетной модели. Наличие в расчетной модели участков быстрого изменения векторного потенциала может потребовать использования сетки с неравномерным шагом. Уравнения в конечных разностях, полученные с использованием закона полного тока в интегральной форме, требуют, чтобы линии сетки ограничивали расчетную модель. В противном случае для расчета векторных потенциалов в узлах вблизи границ, не совпадающих с линиями сетки, потребуются уравнения в конечных разностях в другой форме записи [3, 4], что затруднит составление программы и может отрицательно повлиять на сходимость итерационного процесса. При построении сетки необходимо учитывать, что с увеличением узлов точность расчетов возрастает в меньшей степени, чем затраты машинного времени. Поэтому удобно начинать расчеты поля на сетке с крупным шагом, постепенно уменьшая его до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность расчетов. Для проведения расчетов на сетке с числом узлов $(m\cdot n)$ в памяти ЦВМ необходимо отвести место для хранения следующей информации:

1) массива векторных потенциалов размерностью $(m\cdot n)$ для стационарных и $(m\cdot n)\cdot 2$ — переменных магнитных полей;

2) массива шагов сетки общей размерностью $(m + n - 2)$ для сетки с неравномерным шагом;

3) массива магнитной проницаемости $(m - 1)\times(n - 1)$ и массива напряженности участков кривой намагничивания размерностью (i) при наличии сред с нелинейными магнитными характеристиками;

4) массива плотностей тока размерностью $(g\cdot k)$ для стационарного и $2\cdot(g\cdot k)$ — переменного магнитного поля, причем $(g\cdot k)$ — число узлов области с током;

5) программы расчета, записанной на одном из алгоритмических языков или в машинных кодах.

Необходимость хранения такой информации и конечность объема оперативной памяти ЦВМ могут быть причиной ограничения количества узлов сетки. Например, при программировании на языке ФОРТРАН-4 объем оперативной памяти ЦВМ ЕС-1020, ЕС-1030, ЕС-1060 позволяет рассчитывать в средах с нелинейными магнитными характеристиками стационарные и переменные магнитные поля на сетке с числом узлов соответственно 1000 — 1200 и 400—500. Целесообразно отвести в оперативной форме памяти ЦВМ место для хранения массивов коэффициентов $T(j, k)$ и $S(j, k)$. Общая размерность этих массивов $2\cdot(m\cdot n)$. Организация массивов позволяет отказаться от пересчета коэффициентов $T(j, k)$ и $S(j, k)$ в средах с магнитной проницаемостью μ_0, что существенно снижает затраты машинного времени.

§ 19.5. Расчет магнитного поля рассеяния на зубцовом шаге машины

При выборе расчетной модели считаем, что число пазов на полюс и фазу достаточно велико, чтобы пренебречь влиянием насыщения зубцов на границе фазных зон на картину магнитного поля в середине фазной зоны. Тогда, за исключением зубцовых делений на границах фазных зон, картина магнитного поля будет периодически повторяться на каждом зубцовом делении. Ось симметрии паза является осью симметрии проводника, и картина магнитного поля симметрична относительно этой оси. По сравнению с магнитной проницаемостью зубцов магнитную проницаемость спинок статора и ротора можно считать бесконечно большой. Периодичность магнитного поля на каждом зубцовом делении, его симметрия относительно оси паза и бесконечно большая магнитная проницаемость спинок статора и ротора позволяют ограничиться расчетом поля на половине зубцового деления (рис. 19.7). Силовые линии магнитного поля нормальны к осям симметрии паза $(2, k)$, зубца $(18, k)$ и к линии, проходящей по дну паза и основанию зубца $(j, 2)$. Граничные условия на этих линиях следующие: $\dot{B}_y(2, k) = 0$; $B_y(18, k) = 0$; $B_x(j, 2) = 0$. Выполнение граничных условий обеспечивается введением дополнительных линий сетки: $(1, k)$ — симметричной относительно оси паза $(2, k)$; $(19, k)$ — симметричной относи-

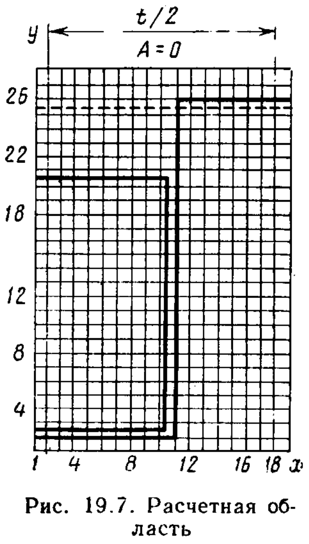

Рис. 19.7. Расчетная область

тельно оси зубца (18, k); (j, 1) — симметричной относительно линии (j, 2) — и присвоением после каждой итерации векторным потенциалам следующих значений: $A(1, k) = A(3, k)$; $A(19, k) = A(17, k)$; $A(j, 1) = A(j, 3)$.

Поля рассеяния обмоток статора и ротора не связаны между собой и при равенстве намагничивающих сил обмоток, что имеет место в сверхпереходных режимах, потоки рассеяния доходят только до середины воздушного зазора. Это позволяет принять линию (j, 28) посередине воздушного зазора за линию нулевого потенциала $A\ (j, 28) = 0$.

При расчете переменных магнитных полей использовалось уравнение (19.34), а при расчете стационарных магнитных полей — (19.37). Для ускорения сходимости итерационного процесса производилась автоматическая корректировка релаксационного параметра β и использовался закон полного тока в интегральной форме. Для любого замкнутого контура l расчетной области справедлив закон полного тока (19.10). Однако после первых итераций он может не выполняться:

$$\dot{\mathrm{C}} = \int\limits_s \dot{\mathrm{J}}\, ds \Bigg/ \left(\oint\limits_l \dot{\mathrm{H}}\, dl \right) \neq 1 + j, \qquad \textbf{(19.54)}$$

где $\dot{\mathrm{C}}$ может служить мерой сходимости итерационного процесса и использоваться для ускорения его сходимости.

Контур интегрирования выбирают таким, чтобы он совпадал с линией поля. Для области рис. 19.7 в качестве контура интегрирования взят участок между линиями (j, 25) и (j, 26), который обозначен пунктирной линией. Ток $\mathrm{I}_{\text{п}}$, ограниченный контуром интегрирования, целесообразно представить в виде вещественной $I_{\text{п}1}$ и мнимой $I_{\text{п}2}$ частей:

$$\dot{\mathrm{I}}_{\text{п}} = I_{\text{п}1} + jI_{\text{п}2} = \int\limits_s \dot{\mathrm{J}} ds \qquad \textbf{(19.55)}$$

Вихревой ток (ток проводимости) в сечении S активной части стержня равен нулю, поэтому $I_{\text{п}2} = 0$. Вещественная часть тока стержня

$$I_{\text{п}1} = \int\limits_s J_{\text{ст}} ds = \sum_{j=2}^{10} \sum_{k=3}^{20} J_{\text{ст}}(j,\ k)\, S_{\text{м}}(j,\ k), \qquad \textbf{(19.56)}$$

где $S_{\text{м}}(j, k)$ рассчитывается по (19.21), причем на линии симметрии паза $S_{\text{м}}(2,\ k) = 0{,}5 S_{\text{м}}(j,\ k)$.

Контурный интеграл выражения (19.54) в конечных разностях запишем в виде

$$\dot{\mathrm{Z}} = \oint\limits_l \dot{\mathrm{H}} dl = \sum_{j=2}^{17} \sum_{k=25}^{25} (\dot{\mathrm{A}}(j,\ k) - \dot{\mathrm{A}}(j,\ k+1) +$$

$$+ \dot{\mathrm{A}}(j+1,\ k) - \dot{\mathrm{A}}(j+1,\ k+1))\, S(j,\ k), \qquad \textbf{(19.57)}$$

где $S(j,\ k)$ рассчитывается по (19.17).

Корректировка векторных потенциалов с использованием закона полного тока может проводиться следующим образом. После каждой итерации определяется действительная часть C_1 коэффициента $\dot{C}$ (19.54): $C_1 = I_{\text{п}1}/Z_1$, где Z_1 — действительная часть комплексного числа $\dot{Z}$.

После первых итераций $C_1 \gg 1$. Для стабилизации сходимости итерационного процесса целесообразно ограничить значение коэффициента C_1. Например, в программе расчета можно предусмотреть условие: если $C_1 > 2{,}5$, то $C_1 = 2{,}5$ и $C_1 = 0{,}5C_1 + 0{,}5$. После каждой итерации в области, ограниченной контуром интегрирования ($j = 2 \div 18$; $k = 2 \div 25$), проводится корректировка векторных потенциалов по их действительной части $A_1(j, k) = C_1A_1(j, k)$. Такая корректировка векторных потенциалов, основанная на перемножении, называется *мультипликативной.*

При сходимости итерационного процесса мнимая часть комплексного числа $\dot{Z}$ (19.57) стремится к нулю, так как $I_{\text{п}2} = 0$. Для ускорения этого процесса можно использовать следующий алгоритм. После каждой итерации определяем $\Delta C = 0 - Z_2$ и приращение для мнимой части векторных потенциалов:

$$\Delta A = \Delta C \Big/ \sum_{j=2}^{10} \sum_{k=25}^{25} S(j, k).$$

Корректировка векторных потенциалов по их мнимой части проводится в области $j = 2 \div 18$, $k = 2 \div 25$ по формуле $A_2(j, k) = A_2(j, k) + \Delta A$. Такая корректировка, основанная на сложении, называется *аддитивной*. Контроль за сходимостью итерационного процесса на каждой n-й итерации осуществляется по модулю максимальной относительной разности векторных потенциалов

$$\Delta A = \operatorname{mod}\left[\max\left(A_1^n(j, k) - A_1^{n-1}(j, k)\right)/\max A_1^n(j, k)\right] \quad (19.58)$$

и коэффициенту C_1. Сходимость итерационного процесса считаем обеспеченной, если достигается одновременное выполнение условий $\Delta A \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-4}$ и $0{,}995 \leqslant C_1 \leqslant 1{,}005$. Без корректировки магнитной проницаемости такая сходимость обычно обеспечивается для стационарных полей за 80—120 итераций, для переменных — за 120—180 итераций. При расчете полей с учетом насыщения магнитопровода необходимое количество итераций возрастает на 15—20%.

Расчеты магнитных полей в области половины зубцового деления проводим с целью определения проводимости пазового рассеяния, а для переменных полей дополнительно определяем активное сопротивление и активные потери массивного стержня. Коэффициент рассеяния активной части стержня, лежащего в пазу, в конечных разностях для области половины зубцового деления

$$\lambda_{\text{с}} = \left[\sum_{j=2}^{10} \sum_{k=3}^{20} A(j, k)\, J_{\text{ст}}(j, k)\, S_{\text{м}}(j, k)\right] \Big/ (2\mu_0 I_{\text{п}1}^2), \quad (19.59)$$

где $A(j, k)$ — векторный потенциал стационарного магнитного поля; $I_{п1}$ — ток, рассчитываемый по формуле (19.56).

Коэффициент $\lambda_с$ включает в себя проводимости пазового $\lambda_п$ рассеяния и рассеяния $\lambda_г$ воздушного зазора:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_п &= \lambda_с - \lambda_г;\\ \lambda_г &= A(11,26)/(2\mu_0 I_{п1}).\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(19.60)}$$

При таком определении к пазовому потоку рассеяния относится поток, входящий в стенку паза с учетом выпучивания в воздуш-

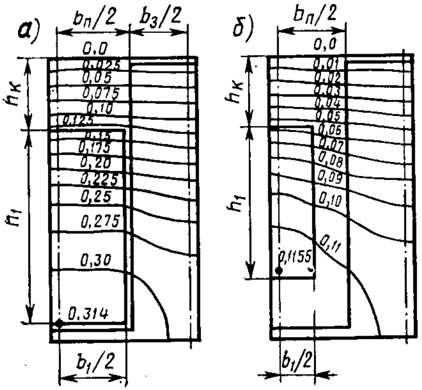

Рис. 19.8. Картины силовых линий магнитного поля при различных отношениях $b_1/b_п$

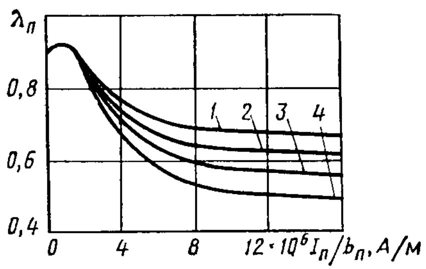

Рис. 19.9. Коэффициент $\lambda_п$ при различных отношениях $b_з/b_п$ и токах в пазу

ный зазор. Типичные картины стационарного магнитного поля в области половины зубцового деления при магнитной проницаемости железа $\mu = 1000\,\mu_0$ представлены на рис. 19.8, *а*, *б*. Из рисунка видно, что искривление силовых линий магнитного поля в области паза возрастает с уменьшением b_1 по отношению к ширине паза $b_п$. Значения коэффициентов проводимости пазового рассеяния, полученные на основании расчетов магнитных полей аналитическими и численными методами при $\mu = \infty$, различаются незначительно (табл. 19.4).

Таблица 19.4

$h_п$, мм	$b_п$, мм	$h_к$, мм	h_1, мм	b_1, мм	$\lambda_п$ (18.56)	$\lambda_п$ (18.57)	$\lambda_п$ (19.60)
62	36	15	36	18	0,75	0,77	0,78
62	36	15	46	34	0,84	0,84	0,85
51	36	4,9	46	34	0,55	0,55	0,54

На рис. 19.9 представлены результаты расчета $\lambda_п$ при различных значениях тока в пазу $I_п$ с учетом насыщения железа зубцов.

Ширина паза $b_п = 50$ мм, отношение $h_п/b_п = 2$. Отношение $b_з/b_п$ для кривых: *1* — 0,5; *2* — 0,7; *3* — 1; *4* — 1,5.

Влияние насыщения на проводимость пазового рассеяния оценим с помощью коэффициента насыщения [39]

$$k_н = 1 - \frac{b_3}{t_1}\left(1 - \frac{H_0}{I_п/b_п}\right)\frac{0,6 + 3h_к/h_1}{1 + 3h_к/h_1}, \tag{19.61}$$

где $H_0 = B_0/\mu_0$, причем B_0 определяется из кривой намагничивания (см. рис. 19.6).

Формула (19.61) справедлива при $I_п/b_п > H_0$. Если $I_п/b_п \leqslant H_0$, то коэффициент насыщения принимаем $k_н = 1$. Коэффициент проводимости пазового рассеяния с учетом насыщения $\lambda_{пн} = k_н \cdot \lambda_п$, где $\lambda_п$ — коэффициент проводимости пазового рассеяния, рассчитанный без учета насыщения.

При расчете переменных электромагнитных полей коэффициент проводимости рассеяния стержня в пазу

$$\lambda_с = \frac{1}{2\mu_0 I_{п1}^2}\int_s \dot{A}\,\dot{J}^* ds = \sum_{j=2}^{10}\sum_{k=3}^{20} \dot{A}\,(j,k)\,(J_1(j,k) - $$
$$- jJ_2(j,k))S_м(j,k), \tag{19.62}$$

где J_1 и J_2 — действительная и мнимая части комплексной плотности тока $\dot{J}(j,k)$.

Активные потери на единицу длины стержня

$$P_a = 2\sum_{j=2}^{10}\sum_{k=3}^{20}(\dot{J}(j,k)\cdot\dot{J}^*(j,k)\cdot S_м(j,k))/\gamma, \tag{19.63}$$

омические потери на единицу длины стержня

$$P_0 = I_{1п}^2/(\gamma S). \tag{19.64}$$

Сечение половины стержня запишем в виде $S = \sum_{j=2}^{10}\sum_{k=3}^{20} S_м(j,k)$, причем при $j = 2$ $S_м(2, k) = 0,5S_м(j, k)$.

Увеличение потерь и активного сопротивления, вызванное поверхностным эффектом, оценивается коэффициентом k_R. В табл. 19.5 представлены коэффициенты k_R и $\lambda_п$, полученные на основа-

Таблица 19.5

$h_п$, мм	$b_п$, мм	$h_к$, мм	h_1, мм	b_1, мм	k_R	$\lambda_п$
62	36	15	36	18	2,47/2,7	0,64/0,6
62	36	15	46	34	4,64/4,6	0,56/0,55
51	36	4,9	46	34	4,14/4,6	0,26/0,27

Примечание. Для k_R и $\lambda_п$ даны значения в знаменателе на основании аналитических, а в числителе — числовых расчетов.

нии расчетов магнитного поля аналитическим и численным методами. Магнитная проницаемость зубцов $\mu = 1000\ \mu_0$. Различие в результатах k_R и λ, полученных на основании аналитических и числовых расчетов магнитного поля, тем заметнее, чем меньше отношение b_I/b_{II}. На рис. 19.10 представлено распределение плотности тока по высоте массивного стержня в двух его сечениях: *I* — центр стержня (рис. 19.10, *б*); *II* — периферия (рис. 19.10, *в*).

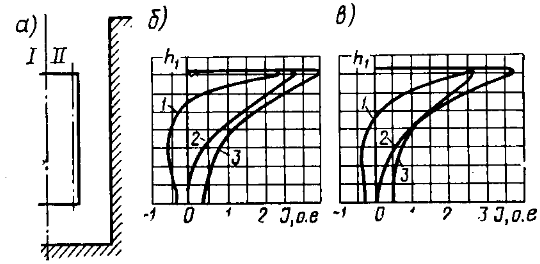

Рис. 19.10. Распределение плотности тока по высоте стержня: в расчетной области (*а*), в сечении I (*б*), в сечении II (*в*)

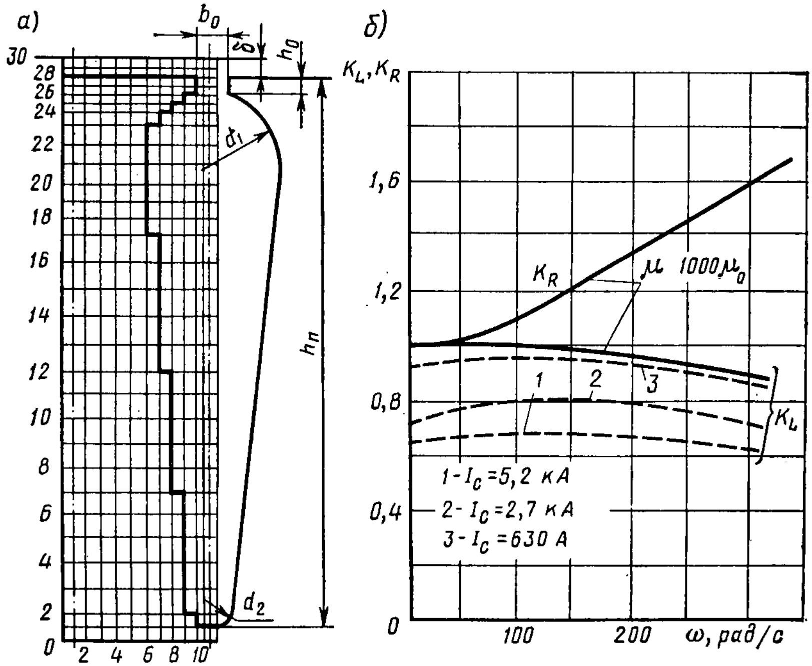

Рис. 19.11. Расчетная область (*а*) и кривые k_L и k_R в функции угловой частоты тока (*б*)

Кривые соответствуют: *1* — мнимой части; *2* — действительной части; *3* — модулю плотности тока. Несмотря на то что распределения действительной и мнимой части плотности тока по ширине стержня отличаются, распределение модуля плотности тока по ширине стержня можно считать равномерным.

Наиболее целесообразно воспользоваться методом конечных разностей при расчете переменных магнитных полей в пазах сложной конфигурации. На рис. 19.11, *а* представлены модель для расчета переменного магнитного поля в области половины зубцового деления короткозамкнутого ротора АД и результаты расчета коэффициентов k_R и k_L (рис. 19.11, *б*), характеризующих увеличение активного сопротивления стержня r_a и изменение коэффициента проводимости пазового рассеяния $\lambda_п$. Расчеты показывают, что насыщение зубцов оказывает влияние только на значение коэффициента k_L, уменьшая его. Коэффициент k_R от насыщения практически не зависит. Инженерные методики расчета, приведенные в руководствах по проектированию асинхронных машин [17], дают удовлетворительные результаты в отношении коэффициента k_R и несколько заниженные в отношении коэффициента k_L.

§ 19.6. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах

С целью комплексного учета влияния на электромагнитные процессы в электрических машинах таких факторов, как двусторонняя зубчатость сердечников статора и ротора, изменение конфигурации зазора при вращении ротора и насыщение частей магнитопровода, на кафедре электрических машин МЭИ разработан новый универсальный метод электромагнитного расчета электрических машин, названный *методом проводимостей зубцовых контуров* [58]. Согласно этому методу эквивалентная магнитная цепь составляется на основе анализа полного двумерного поля машины. Метод в комплексном виде учитывает влияние на электромагнитные процессы в электрических машинах двусторонней зубчатости сердечников статора и ротора, изменение конфигурации зазора при перемещении ротора, насыщение частей магнитопровода. Тем самым исключаются обычно принимаемые допущения. В этом отношении он выгодно отличается от существующих методов, в которых перечисленные факторы учитываются с недостаточной полнотой. Причем особенно существенными эти уточнения оказались для электрических машин с высокими электромагнитными нагрузками; с резко выраженной дискретностью зубцового слоя и обмоток; в случае применения обмоток дробных, несимметричных, с различным числом витков в катушках. Большими возможностями метод обладает для учета дискретности зубцового слоя сердечников при определении пусковых характеристик синхронных машин, механических характеристик асинхронных машин с короткозамкнутой обмоткой, токов в демпферной и короткозамкнутой обмотках, формы кривой напряжения синхронных машин и т. д.

Идея метода состоит в разбиении двумерной области поля электрической машины на ряд мелких подобластей, в каждой из которых поле может быть рассчитано в линейном приближении одним из известных численных методов. В качестве такой подобласти выбрана зона магнитного поля так называемого зубцового контура, т. е. контура, охватывающего один зубец сердечника. Такое поле рассчитывается особым образом при назначенных граничных условиях, уменьшающих размеры его зоны до нескольких зубцовых делений. Совокупность магнитных полей от токов зубцовых контуров дает в сумме полное магнитное поле в активной зоне (на протяжении расчетной длины), включающее как главное поле, так и поля пазового и дифференциального рассеяний. Поле лобового рассеяния учитывается на стадии расчета электрических цепей машины путем введения в дифференциальные уравнения ЭДС лобового рассеяния, выраженных через соответствующие индуктивности. Таким образом, в методе зубцовых контуров рассматривается полное поле машины с учетом его изменения во времени при взаимном перемещении зубчатых сердечников.

Универсальный способ расчета полей и процессов в электрических машинах отличается от прочих методов повышенной степенью точности воспроизведения магнитных полей в зоне наиболее существенного с точки зрения электромеханического преобразования энергии поля — в зоне зазора, возможностью учета конкретной, а не идеализированной структуры в прилегающих к нему областях зубцовых зон, точным учетом структуры обмоток и их МДС с любой степенью нерегулярности. В принципе не представляет больших затруднений учет потерь в стали, хотя бы по основной гармонической изменения магнитного потока. Перспективен этот метод и для анализа различного рода несимметричных режимов, коротких замыканий, определения уровней защиты при аварийных нарушениях в цепях обмоток.

Широкие возможности представляет метод при разработке моделей, одновременно учитывающих детальным образом магнитные явления в электрических машинах и процессы в электрических цепях, связывающих машины с системами. При исследовании переходных и неустановившихся режимов решение достигается при наиболее естественных мгновенных значениях токов обмоток машин. Представление токов обмоток их мгновенными значениями существенно облегчает анализ работы машин совместно с полупроводниковыми преобразователями, вентилями и другими нелинейными элементами.

Особые преимущества метод имеет при создании новых, нетрадиционных конструкций электрических машин и электромеханических преобразователей с резко выраженной зубчатостью, особенностями обмоток, а также при необходимости исследования влияния любого характера отклонений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общие тенденции современного технического образования, особенно курс на широкое применение вычислительной техники, привели к тому, что математика стала неотъемлемой частью профессиональной подготовки инженера. В специальных курсах находят приложение ранее полученные знания, закрепляются навыки постановки и решений математических задач, программирования и анализа решений на ЭВМ.

Специальный курс электрических машин в нашем изложении полностью соответствует указанным аспектам и содержит практически все важнейшие математические методы исследования режимов работы, магнитных полей и параметров электрических машин.

В настоящей книге основное внимание уделено математическому описанию и исследованию работы электрических машин переменного и постоянного тока в установившихся и переходных режимах. Уравнения, описывающие режимы работы электрических машин при переменной частоте вращения, даже в случае постоянства параметров являются нелинейными дифференциальными уравнениями. Их решение связано с известными трудностями. Хороший эффект достигается применением численных методов с использованием ЭВМ.

Если напряжения, подводимые к обмоткам электрической машины, известны, а частота вращения ротора постоянна, такие уравнения для установившихся режимов работы могут быть решены алгебраическими методами, а для переходных процессов — операторным методом. Когда же частота вращения ротора не остается постоянной, но закон ее изменения известен, уравнения равновесия напряжений рассматриваются независимо от уравнения моментов (уравнения движения). Но в этом случае уравнения равновесия напряжения являются нелинейными. Если не принять упрощающих допущений, решать их можно только численными методами.

Наиболее просто уравнения электрических машин, описывающие электромеханические переходные процессы, решаются на аналоговых вычислительных машинах. Обработка результатов расчета в этом случае требует минимального времени, так как интересующие нас зависимости получаются в виде осциллограмм. Ряд исследований электрических машин может быть успешно выполнен применением цифровых вычислительных машин (расчет магнитного поля в различных частях электрической машины, учет нелинейности характеристик намагничивания применяемых материалов, анализ устойчивости синхронных машин и другие).

Выбор того или иного метода решения зависит от постановки задачи и точности, с которой должен быть получен результат исследований, а также от допущений, которые принимаются при составлении уравнений.

Раздел, посвященный коммутации коллекторных электрических машин, не претендует на полноту анализа проблемы, а отражает лишь нашедшие наибольшее признание аналитические исследования коммутации.

Большое внимание в книге уделено расчету магнитных молей. Это объясняется тем, что для более точного расчета магнитной цепи и параметров электрических машин необходимо умение рассчитать электромагнитное поле в различных областях электрической машины.

Дальнейшее развитие теории электрических машин и совершенствование методов исследования их режимов работы связано с увеличивающимися масштабами применения современных высокопроизводительных электронных вычислительных машин всех классов.

Особое значение для дальнейшего совершенствования электрических машин имеет поиск оптимальных решений при проектировании и выборе режимов их работы. Эти проблемы необходимо решать при создании автоматизированных систем проектирования электрических машин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Специальные электрические машины/ А. И. Бертинов, Д. А. Бут, С. Р. Мизюрин и др. Под ред. А. И. Бертинова. — М.: Энергоиздат, 1982.— 552 с.

2. *Алябьев М. И.* Общая теория судовых электрических машин. — Л.: Судостроение, 1965. — 391 с.

3. *Бинс К., Лауренсон П.* Анализ и расчет электрических и магнитных полей. — М.: Энергия, 1970. — 376 с.

4. *Брынский Е. А., Данилевич Я. Б., Яковлев В. И.* Электромагнитные поля в электрических машинах. — Л.: Энергия, 1979. — 176 с.

5. *Важнов А. И.* Переходные процессы в машинах переменного тока. — Л.: Энергия, 1980. — 256 с.

6. Самовозбуждение и самораскачивание в электрических системах/ Под ред. *В. А. Веникова.* — М.: Высшая школа, 1964. — 198 с.

7. *Веников В. А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. — М.: Высшая школа, 1985. — 536 с.

8. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики/ Под ред. *В. А. Веникова.* — М.: Высшая школа, 1981. — 288 с.

9. *Вегнер О. Г.* Теория и практика коммутации машин постоянного тока. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 272 с.

10. *Вегнер О. Г.* Расчет процесса коммутации машин постоянного тока при помощи ЭЦВМ. — Электромеханика, 1966, № 4, с. 400—409.

11. *Васютинский С. В.* Вопросы теории и расчета трансформаторов. — Л.: Энергия, 1970. — 432 с.

12. *Вольдек А. И.* Электрические машины. — Л.: Энергия, 1974. — 840 с.

13. *Глебов И. А. Кашарский Э. Г., Рутберг Ф. Г.* Синхронные генераторы кратковременного и ударного действия. — Л.: Наука, 1985. — 224 с.

14. *Горев А. А.* Переходные процессы синхронной машины. — Л.: Наука, 1985. — 502 с.

15. *Грузов Л. Н.* Методы математического исследования электрических машин. — Л.: Госэнергоиздат, 1953. — 264 с.

16. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1948. — 728 с.

17. *Гурин Я. С., Кузнецов Б. И.* Проектирование серий электрических машин. — М.: Энергия, 1978. — 479 с.

18. *Домбровский В. В.* Справочное пособие по расчету электромагнитного поля в электрических машинах. — Л.: Энергоатомиздат, 1983. — 256 с.

19. *Иванов-Смоленский А. В.* Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование. — М.: Энергия, 1969. — 304 с.

20. *Ивашин В. В., Милорадов И. А.* О вентильно-механической коммутации машин постоянного тока. — Изв. Томского политехнического ин-та, 1966, т. 160, с. 91—95.

21. *Казовский Е. Я.* Переходные процессы в электрических машинах переменного тока. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1962. — 624 с.

22. Анормальные режимы работы крупных синхронных машин/ *Е. Я. Казовский, Я. Б. Данилевич, Э. Г. Кашарский, Г. В. Рубисов.* — Л.: Наука,1969. — 429 с.

23. *Жерве Г. К.* Промышленные испытания электрических машин. — Л.: Энергоатомиздат, 1984. — 408 с.

24. Оптимальная коммутация машин постоянного тока/ Под ред. *М. Ф. Карасева.* — М.: Транспорт, 1967. — 180 с.

25. *Терзян А. А.* Автоматизированное проектирование электрических машин. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 256 с.

26. *Костенко М. П.* Электрические машины. Спецчасть. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1949. — 712 с.

27. *Копылов И. П.* Электромеханические преобразователи энергии.— М.: Энергия, 1973. — 392 с.

28. *Копылов И. П.* Применение вычислительных машин в инженерно-экономических расчетах. — М.: Высшая школа, 1980. — 256 с.

29. *Конкордиа Ч.* Синхронные машины. Переходные и установившиеся процессы. — М : Госэнергоиздат, 1969. — 266 с.

30. *Кононенко Е. В.* Синхронные реактивные машины. — М.: Энергия, 1970. — 280 с.

31. *Лайон В.* Анализ переходных процессов в электрических машинах переменного тока. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1968. — 400 с.

32. Гидрогенераторы./ И. А. Глебов, В. В. Домбровский, А. А. Дукштау и др. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 368 с.

33. *Лютер Р. А.* Расчет синхронных машин. — Л.: Энергия, 1979. — 272 с.

34. *Мамиконянц Л. Г.* Включение синхронных машин на параллельную работу способом самосинхронизации. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1954. — 22 с.

35. *Новик Я. И.* Численные методы расчета магнитного поля электрических машин с учетом насыщения. — В кн.: Бесконтактные электрические машины. — Рига: Знание, 1972., т. II, с. 3—44.

36. *Плющ Б. М., Ломакин В. А., Прилежаев А. Н.* Анализ электромагнитных процессов при вентильно-механической коммутации в машине постоянного тока без добавочных полюсов. — Электричество, 1973, № 9, с. 29—34.

37. *Иванов-Смоленский А. В.* Электрические машины. — М.: Энергия, 1980. — 928 с.

38. *Постников И. М.* Обобщенная теория и переходные процессы электрических машин. — М.: Высшая школа, 1975. — 319. с.

39. Расчет величин воздействий на стержни обмотки статора ударного генератора /*Г. А. Сипайлов, К. А. Хорьков, В. С. Баклин.* — Электротехника, 1977, № 9, с. 47—50.

40. Расчет электромагнитного поля и параметров экранированных лобовых частей однофазного ударного генератора /*А. М. Кутарев, Г.А. Сипайлов, К. А. Хорьков.* — Электричество, 1981, № 8, с. 22—26.

41. Экспериментальное определение параметров синхронных машин частотным методом/ *Н. С. Сиунов, М. С. Микляев, Г. А. Калистратов.* — ВЭП, 1962, № 7, с. 48—51.

42. *Сипайлов Г. А., Лоос А. В.* Математическое моделирование электрических машин. — М.: Высшая школа, 1980. — 176 с.

43. *Сипайлов Г. А., Хорьков К. А.* Генераторы ударной мощности. — М.: Энергия, 1979. — 128 с.

44. *Сыромятников И. А.* Режимы работы асинхронных и синхронных электродвигателей. — М.: Энергоиздат, 1984. — 240 с.

45. *Скороспешкин А. И., Костылев Б. И., Бекишев Р. Ф.* Аналитические исследования коммутации на основе динамических вольт-амперных характеристик. — Изв. Томского политехнического ин-та, т. 190, 1968, с. 186—193.

46. Электромагнитные переходные процессы в асинхронном электроприводе /*М. М. Соколов, Л. П. Петров, Л. Б. Масандилов, В. А. Ладензон.* — М.: Энергия, 1967. — 201 с.

47. *Фильц Р. В.* Математические основы теорий электромеханических преобразователей. — Киев.: Наукова думка, 1979. — 208 с.
48. *Тазони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев: Техника, 1974. — 352 с.
49. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 616 с.
50. *Трещев И. И.* Электромеханические процессы в машинах переменного тока. — Л.: Энергия, 1980. — 334 с.
51. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1980. — 335 с.
52. *Урусов И. Д.* Линейная теория колебаний синхронной машины. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 167 с.
53. *Фильчаков И. Ф.* Приближенные методы конформных отображений.— Киев: Наукова думка, 1964. — 531 с.
54. *Хэнкок Н.* Матричный анализ электрических машин. — М.: Энергия, 1967. — 225 с.
55. *Штафль М.* Электродинамические задачи в электрических машинах и трансформаторах. — М. — Л.: Энергия, 1966. — 200 с.
56. *Шуйский В. П.* Расчет электрических машин. — Л.: Энергия, 1968. — 732 с.
57. Стандарт СЭВ СТ СЭВ 1106—78 «Машины электрические синхронные. Методы испытаний». — М.: Издательство стандартов, 1978. — 80 с.
58. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах /*А. В. Иванов-Смоленский, Ю. В. Абрамкин, А. И. Власов, В. А. Кузнецов.* Под ред. А. В. Иванова-Смоленского. — М:. Энергоиздат, 1986. — 216 с.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Физические величины

I, i, F — ток, магнитодвижущая сила, А
U, E — напряжение, электродвижущая сила, В
Φ, Ψ — поток, потокосцепление, Вб
B — индукция магнитного поля, Тл
P — мощность, Вт
W — энергия, Дж
M — момент вращения, Н·м
f — частота, Гц
ω — угловая частота, 1/с
Ω — частота вращения, рад/с
t, τ — время, с; эл. с
Z, r, x — полное, активное и индуктивное сопротивления, Ом
L, l — индуктивность, Гн
$G(p)$ — операторная проводимость, о.е.
$Z(p)$ — операторное сопротивление, о.е.
J — момент инерции, кг·м^2
T_J — инерционная постоянная, эл.с

Условные обозначения

m — число фаз обмотки
p — число пар полюсов
τ_1 — полюсное деление, м
γ — текущий угол поворота ротора, эл. рад
l_1 — длина активной части, м
δ — величина воздушного зазора, м

Математические символы

d/dt, p — оператор дифференцирования
Re — вещественная часть комплекса
Im — мнимая часть комплекса
Σ — сумма
x — векторная величина
$\dot{x}$ — комплексная величина
exp — экспоненциальная функция
ln — основание натурального логарифма
mod — модуль
max — максимум
min — минимум
grad — градиент
rot — ротор вектора
div — дивергенция вектора

Сокращения часто используемых названий и терминов

МДС — магнитодвижущая сила
ЭДС — электродвижущая сила
ВКЗ — внезапное короткое замыкание
ЦВМ — цифровая вычислительная машина
АВМ — аналоговая вычислительная машина
АМ — асинхронная машина
АД — асинхронный электродвигатель
СД — синхронный электродвигатель
СГ — синхронный генератор
СМ — синхронная электрическая машина
УУ — управляющее устройство
КЗ — короткое замыкание
XX — холостой ход
о.е. — относительные единицы

Индексы

a, b, c — обмоток фаз статора
d, q — обмоток фаз в осях d, q
yd, yq — обмотки демпферной
f — обмотки возбуждения
R — активный, радиальный
L — индуктивный
Q — тангенциальный
а — апериодический
б — базисный
вх — входной
к — коммутирующий
кр — критический
м — магнитный
н — насыщенный
ном — номинальный
п — периодический
пул — пульсирующий
р — ротора
раз — разрыва
ср — средний
ст — сторонний
с — сопротивления
щ — щетки
α, β — обмоток фаз в осях α, β
δ — воздушного зазора
σ — рассеяния
0, 1, 2 — последовательности нулевой, прямой, обратной

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Геннадий Антонович Сипайлов,
Евгений Васильевич Кононенко,
Константин Александрович Хорьков

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

(специальный курс)

Зав. редакцией Н. И. Хрусталева. Редактор Т. Д. Жарова. Мл. редактор Л. М. Измайлова. Переплет художника А. А. Камаева. Художественный редактор В. И. Мешалкин. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 6075

Изд. № СТД-481. Сдано в набор 16.06.86. Подп. в печать 20.02.87. Т-08339. Формат 60×90/16. Бум. кн. журн. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 18 усл. печ. л. 18 усл. кр.-отт. 17,70 уч.-изд. л. Тираж 20 000 экз. Зак. 1465. Цена 1 руб.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.