МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

Утверждено Методической
комиссией института

А.Я.Балагуров, Т.Д.Шермергор

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ

Учебное пособие по курсу
"Физические основы интегральных оптоэлектронных схем"

Москва 1987

УДК 621.383.8 (075.8)

Балагуров А.Я., Шермергор Т.Д. Физические принципы оптоэлектроники. Учебное пособие по курсу "Физические основы интегральных оптоэлектронных схем". – М.: Изд. МИЭТа, 1987. – 92 с.

Учебное пособие предназначено для студентов IУ курса ФТФ, специализирующихся по направлению "Интегральная оптоэлектроника". Курс "Физические основы интегральных оптоэлектронных схем" является первым из профилирующих курсов по этому направлению и призван дать студентам необходимые сведения о физических процессах, лежащих в основе работы интегральных оптоэлектронных схем (ИОС). Освоение этого курса позволит студентам перейти к изучению физики работы базовых элементов ИОС.

Ил. 24, список лит. – 4 назв.

Рецензенты: Ю.Х.Векилов, Э.А.Полторацкий

ВВЕДЕНИЕ

В течение последнего двадцатилетия быстрыми темпами развивается оптоэлектроника – область науки и техники, связанная с оптическими методами обработки, передачи и хранения информации. Все шире входят в обиход волоконно-оптические линии связи, позволившие произвести настоящую революцию в технике передачи информации благодаря исключительной широкополосности, достигающей 10^{10} Гц, помехозащищенности, малым габаритам и массе. Огромные массивы информации, достигающие 10^9 байт, способны хранить компактные оптические диски. Созданы оптические процессоры, способные с большой скоростью решать задачи опознавания образов, анализа спектра радиосигналов, выполнять логические операции и т.п. Круг задач, решаемых оптоэлектроникой, расширяется с каждым годом. Растет и выпуск специалистов в этой перспективной области знаний.

Оптоэлектроника, родившаяся на стыке квантовой электроники, оптики и микроэлектроники, охватывает исключительно широкий круг физических явлений. В связи с этим признано целесообразным начинать изучение цикла специальных профилирующих дисциплин с курса "Физические основы оптоэлектроники".

В первой из двух частей учебного пособия по указанному курсу рассмотрены методы описания электромагнитных волн в неограниченной среде на основе волновой и геометрической оптики, а также в приближении гауссовых пучков. Явление дифракции в приближении физической оптики рассмотрено в связи с реализацией оптического преобразования Фурье. На этой основе исследуются принципы построения оптических аналоговых процессоров. Теория гауссовых пучков применена для исследования полей и собственных частот оптических резонаторов. Рассмотрены вопросы устойчивости резонатора. Завершается первая часть изучением электрооптического эффекта - одного из основных эффектов, используемых для модуляции оптических пучков. На примере ниобата лития проанализированы схемы построения амплитудного и фазового модуляторов оптического излучения.

I. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

I.I. Волновое уравнение

Уравнения Максвелла в системе СИ имеют следующий вид:

$$div\vec{D} = \rho; \tag{I.1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{I.2}$$

$$div\vec{B} = 0; \tag{I.3}$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{I.4}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции; ρ – объемная плотность свободных зарядов; $\vec{j}$ – плотность тока проводимости.

Во многих практически важных случаях выполняются простые линейные соотношения

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Вектор плотности потока мощности (вектор Умова – Пойнтинга) равен

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Если поле изменяется по гармоническому закону и в качестве $\vec{E}$ и $\vec{H}$ используются комплексные величины, то среднее по времени значение вектора Умова – Пойнтинга равно

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*,$$

где $\overline{H}^*$ – комплексно сопряженная $\overline{H}$ величина.

Пусть источники отсутствуют, т.е. $\rho = 0$, $\overline{j} = 0$. Будем считать, что ε является функцией координат, а величина μ постоянна. Вычисляя ротор от (I.2) и учитывая (I.I) – (I.4), находим

$$\Delta\overline{E} + \nabla\left(\overline{E}\,\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}, \qquad \text{(I.5)}$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Если $\varepsilon = const$, из (I.5) следует волновое уравнение

$$\Delta\overline{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}. \qquad \text{(I.6)}$$

Одним из решений волнового уравнения является плоская волна

$$\psi = f\left(t - \frac{1}{v}\,\overline{m}\,\overline{r}\right),$$

где ψ – любая компонента вектора напряженности; f – произвольная функция, имеющая вторую производную; $\overline{m}$ – единичный вектор направления распространения волны, ортогональный к плоскому волновому фронту; $\overline{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения поля; $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость распространения волны.

Важным частным случаем является плоская монохроматическая волна

$$\psi = Ae^{i(\omega t - \overline{k}\overline{r})},$$

где

$$\overline{k} = k\overline{m}, \qquad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v}.$$

В большинстве сред скорость распространения волн зависит от частоты: $v = v(\omega)$. Это явление называется дисперсией. Для того, чтобы исследовать распространение плоской волны в диспергирующей среде, достаточно воспользоваться интегральным преобразованием Фурье:

$$f(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{i(\omega t-kz)}d\omega.$$

Произвольную волну можно разложить по плоским монохроматическим волнам. Вводя компоненту

$$k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-k_x^2-k_y^2}, \qquad (I.7)$$

запишем

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int_{-\infty}^{+\infty}dk_y\,\varphi(k_x,k_y,\omega)\times$$

$$\times\exp\left[i(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z)\right]. \qquad (I.8)$$

Компонента k_z становится мнимой, когда подкоренное выражение в (I.7) отрицательно. В этом случае имеем дело с нераспространяющейся волной, также являющейся решением волнового уравнения. Эти волны включены в интегральное представление (I.8). Нераспространяющиеся волны появляются, в частности, при полном внутреннем отражении волны.

Покажем теперь, что простое волновое уравнение (I.6) при определенных условиях можно использовать вместо (I.5) даже в случае неоднородной среды, когда ε является функцией координат. Оценим величины первого и второго слагаемых в левой части (I.5):

$$|\Delta\bar{E}|\approx\frac{E}{\lambda^2};\quad\left|\nabla\left(\bar{E}\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right|\approx\frac{E}{\lambda}\frac{\delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon},$$

где λ – длина волны; $\delta\varepsilon\approx|\nabla\varepsilon|\lambda$ – изменение диэлектрической проницаемости на длине волны. Видно, что второе слагаемое в левой части (I.5) пренебрежимо мало по сравнению с первым слагаемым, если

$$\delta\varepsilon\ll\varepsilon, \qquad (I.9)$$

т.е. если изменение ε на расстоянии длины волны много меньше самой величины ε. При этом для неоднородной среды вместо (I.5) можно использовать волновое уравнение (I.6). На границе раздела сред условие (I.9) не выполняется. Однако и в данном случае достаточно решать волновое уравнение (I.6) в каждой среде и "сшивать" решения посредством граничных условий. В случае диэлектриков они имеют вид:

$$E_{t_1}=E_{t_2};\quad H_{t_1}=H_{t_2};\quad \varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n};\quad B_{1n}=B_{2n}.$$

Из физических соображений поле должно быть ограниченным в любой конечной области пространства, а на бесконечности обычно требуют исчезновения поля.

I.2. Отражение и преломление плоской волны. Фазовые соотношения при полном внутреннем отражении

Приведем без вывода формулы Френеля для отражения и преломления плоской электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2. Направление осей x, y и z показано на рис.I.I. Волну, имеющую ненулевую компоненту электрического поля вдоль z, будем называть E-волной (рис.I.а), а волну с ненулевой компонентой H_z – соответственно H-волной (рис.I.б).

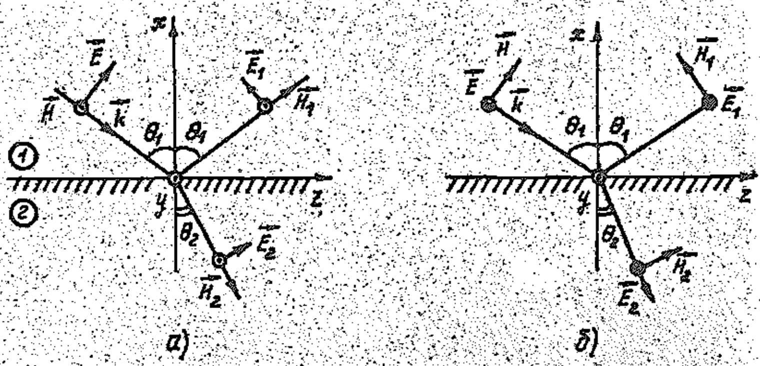

Рис.I.I. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны: а – E-волна (p-поляризация); б – H-волна (s-поляризация).

Если амплитуда электрического поля падающей E-волны равна A_E, то амплитуды прошедшей и отраженной волн равны соответственно

$$T_E = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} A_E \quad \text{и} \quad R_E = \frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)} A_E. \tag{I.10}$$

Для H-волны аналогичные соотношения для амплитуд электрического поля имеют вид

$$T_H = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} A_H \quad \text{и} \quad R_H = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} A_H. \tag{I.11}$$

Пусть θ_1 и θ_2 вещественны (случай полного внутреннего отражения, когда θ_2 становится комплексным, будет рассмотрен ниже), тогда из вещественности тригонометрических функций следует, что фаза компоненты отраженной и прошедших волн либо равна фазе падающей волны, либо отличается от нее на величину π. Из (I.10) и (I.11) видно, что T_E и A_E, T_H и A_H имеют одинаковые знаки, т.е. сдвига фазы нет. Для отраженной волны фаза зависит от соотношения между θ_1 и θ_2. Если показатель преломления второй среды выше, чем первой $(n_1 < n_2)$, то $\theta_1 > \theta_2$ и знаки R_H и A_H противоположны, т.е. при отражении фаза изменяется на величину π. В этом случае $tg(\theta_1-\theta_2)$ положителен, а знак R_E определяется стоящим в знаменателе $tg(\theta_1+\theta_2)$.

При $(\theta_1+\theta_2) < \frac{\pi}{2}$ скачка фазы нет. Когда $\theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (соответствующее значение $\theta_{1Б}$ называется углом Брюстера: $tg\,\theta_{1Б} = \frac{n_2}{n_1}$), знаменатель становится бесконечным, т.е. отражение отсутствует. Если $\theta_1+\theta_2 > \frac{\pi}{2}$, появляется скачок фазы на величину π. Углы θ_1 и θ_2 связаны законом Снеллиуса:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{I.12}$$

Если волна падает из более плотной в менее плотную среду $(n_1 > n_2)$, то при $\theta_1 > \theta_{кр}$, где

$$\sin\theta_{кр} = \frac{n_2}{n_1},$$

прошедшая волна во второй среде отсутствует. Это явление называют полным внутренним отражением.

Угол θ_2 становится комплексным:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1; \quad \cos\theta_2 = i\sqrt{\sin^2\theta_2 - 1} = i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_1 - 1}. \qquad (I.13)$$

Выбор знака перед мнимой единицей будет объяснен ниже.

Записывая (I.10) и (I.11) в виде

$$R_E = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_2} A_E; \qquad (I.14)$$

$$R_H = -\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1} A_H \qquad (I.15)$$

и подставляя (I.13) в (I.14) и (I.15), находим комплексные амплитуды отраженных волн:

$$R_H = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_1 - i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_1 + i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} A_E;$$

$$R_H = \frac{\cos\theta_1 - i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_1 + i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} A_H. \qquad (I.16)$$

Из (I.16) видно, что модули амплитуд при полном внутреннем отражении не изменяются: $|R_E| = |A_E|$ и $|R_H| = |A_H|$, т.е. интенсивность света после полного внутреннего отражения равна интенсивности падающего света.

Из (I.16) следует, что при полном внутреннем отражении $R_E = A_E e^{i2\varphi_E}$ и $R_H = A_H e^{i2\varphi_H}$, где сдвиги фаз $2\varphi_E$ и $2\varphi_H$ определяются соотношениями

$$tg\,\varphi_E = -\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}\,\Big/\,n_1\cos\theta_1;$$

$$tg\,\varphi_H = -\frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}{n_1\cos\theta_1}.$$

Поле прошедшей волны имеет вид

$$E = A' \exp\left[i\omega\left(t - \frac{-x\cos\theta_2 + z\sin\theta_2}{v_2}\right)\right], \tag{I.17}$$

где $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – скорость распространения электромагнитной волны во второй среде. Направления осей x, y, z указаны на рис.I.I.

Подставляя $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$ и $\cos\theta_2 = \pm i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_1 - 1}$ в (I.17), получим выражение

$$E = A' \exp\left(\pm\frac{\omega x}{v_2}\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_1 - 1}\right)\exp\left[i\omega\left(t - \frac{z n_1 \sin\theta_1}{n_2 v_2}\right)\right],$$

описывающее неоднородную плоскую волну. Как видно, поле во второй среде при полном внутреннем отражении экспоненциально затухает в направлении от границы раздела (при указанном направлении координаты x физический смысл в показателе экспоненты имеет только знак "плюс"). Эта волна распространяется вдоль координаты z. Поверхности постоянных значений амплитуды и фазы для такой волны ортогональны друг к другу.

Как показывает расчёт, при полном внутреннем отражении среднее значение компоненты вектора Умова – Пойнтинга в направлении нормали к границе раздела диэлектриков равно нулю, а для тангенциальной компоненты в общем случае отлично от нуля, т.е. энергия не проникает во вторую среду, а течет вдоль поверхности раздела в плоскости падения.

I.3. Теория дифракции

Явление дифракции, являющееся характерной особенностью распространения волн, играет важную роль в системах оптической обработки информации.

Дифракционный интеграл Кирхгофа – Гюйгенса

Если длина волны существенно мала по сравнению с линейными размерами системы, на которой происходит дифракция, поляризация световой волны несущественна и можно использовать скалярное волновое уравнение. Подставляя в (I.6) временну́ю зависимость поля в виде $exp(i\omega t)$, получим уравнение

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{I.18}$$

где

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Введем функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{I.19}$$

Умножая (I.18) на G, а (I.19) на ψ и вычитая из второго соотношения первое, получим

$$\psi(\vec{r})\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \psi\nabla^2 G - G\nabla^2\psi.$$

Интегрируя это выражение по объему и используя теорему Гаусса - Остроградского, находим

$$\psi(\vec{r}\,') = \int\limits_V (\psi\nabla^2 G - G\nabla^2\psi)\,dV = \int\limits_V \nabla(\psi\nabla G - G\nabla\psi)\,dV =$$

$$= \oint\limits_S (\psi\nabla G - G\nabla\psi)\,d\vec{S},$$

или

$$\psi(\vec{r}\,') = \oint\limits_S \left(\psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS. \tag{I.20}$$

Интегрирование производится по замкнутой поверхности S; n - внешняя нормаль. Точка с радиус-вектором $\vec{r}\,'$ расположена внутри этой поверхности.

Функцию Грина для свободного пространства найдем, решая (I.19). Разложим левую и правую части уравнения в интеграл Фурье и, учитывая, что $\nabla e^{i\vec{\varkappa}\vec{R}} = -\varkappa^2 e^{i\vec{\varkappa}\vec{R}}$, приравняем подынтегральные выражения:

$$(k^2 - \varkappa^2)\,G_{\vec{\varkappa}} = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Отсюда

$$G(\vec{R})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{\varkappa}\vec{R}}\,d\vec{\varkappa}}{k^2-\varkappa^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{i\varkappa R\cos\theta}\varkappa^2\sin\theta\,d\varkappa\,d\theta}{k^2-\varkappa^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\varkappa\,\delta\sin\varkappa R\,d\varkappa}{R(k^2-\varkappa^2)}=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-ikR}}{R},$$

то есть

$$G(\vec{R})=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-ikR}}{R}, \qquad (I.21)$$

где

$$R=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

Подставляя (I.21) в (I.20), находим решение волнового уравнения в виде дифракционного интеграла Кирхгофа – Гюйгенса:

$$\psi(\vec{r}')=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\frac{e^{-ikR}}{R}-\psi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\right]dS. \qquad (I.22)$$

Дифракционный интеграл позволяет вычислить значение поля в любой точке объема, ограниченного замкнутой поверхностью S, если известно значение поля и его производной по нормали в каждой точке S.

Во многих практически важных случаях наблюдают дифракцию на отверстиях в экранах. В этом случае поверхность S целесообразно выбрать следующим образом (см.рис. I.2). Часть поверхности S_1 проходит по внутренней стороне экрана и соединяется с частью сферы S_2. Центром сферы является точка P, в которой вычисляется дифрагированное поле. Если радиус этой сферы бесконечно увеличивается, то в практически существенных случаях

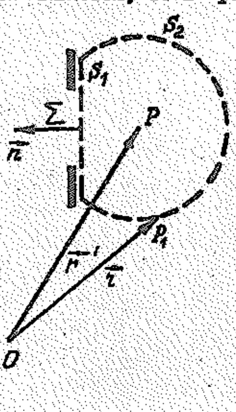

Рис.I.2. Выбор поверхности интегрирования.

интеграл по S_2 стремится к нулю. Если экран непрозрачен всюду, кроме открытого отверстия Σ, целесообразно применять так называемые граничные условия Кирхгофа:

а) на отверстии Σ поле ψ и его производная $\partial\psi/\partial n$ имеют такие же значения, как и в отсутствии экрана;

б) на S_1 в области геометрической тени ψ и $\partial\psi/\partial n$ тождественно равны нулю.

Хотя эти условия являются приближенными, а второе из них вообще должно приводить к тождественному равенству нулю поля ψ в объеме, тем не менее в оптике, где длина волны весьма мала, практическое применение дифракционного интеграла с граничными условиями Кирхгофа дает весьма точные и хорошо согласующиеся с экспериментом результаты.

Сделаем еще два замечания по поводу соотношения (I.22). Во-первых, оно симметрично относительно источника и точки наблюдения, так как в выражение входит лишь $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$. Это означает, что точечный источник, находящийся в точке $\vec{r}$ (см.рис.I.2), создает в точке $\vec{r}'$ такое же поле, какое производил бы в точке $\vec{r}$ точечный источник той же интенсивности, помещенный в точку $\vec{r}'$. Это соотношение называют теоремой взаимности Гельмгольца.

Во-вторых, рассмотрим дифракцию света на дополнительных экранах, т.е. на экранах, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого, и наоборот. Пусть $\psi_1(\vec{r}')$ и $\psi_2(\vec{r}')$ – поля, создаваемые при размещении между источником и точкой наблюдения соответственно первого и второго экранов. Тогда

$$\psi_1+\psi_2=\psi,$$

где ψ – поле в точке наблюдения при отсутствии экранов. Это соотношение называется принципом Бабине. Так, например, если $\psi_1=0$, то $\psi_2=\psi$, т.е. в точках, где интенсивность при наличии одного экрана равна нулю, в присутствии дополнительного экрана интенсивность будет такая, как если бы экраны вообще отсутствовали. В точках, где $\psi=0$, имеем $\psi_2=-\psi_1$, т.е. фазы ψ_1 и ψ_2 отличаются на π, а интенсивности равны: $|\psi_1|^2=|\psi_2|^2$.

Для практических целей можно найти приближенные значения дифракционного интеграла. В волновой, или дальней, зоне $R\gg\lambda$, т.е. $k\gg\frac{1}{R}$ для всех R, входящих в (I.22). При этом величина производной от $1/R$ много меньше, чем от $exp(ikR)$, и (I.22) приобретает вид

$$\psi(\vec{r}\,')=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}+ik\psi\frac{\partial R}{\partial n}\right)\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS. \qquad (I.23)$$

Если апертура отверстий в экранах мала по сравнению с расстояниями до плоскостей, на которых наблюдается дифракционная картина, можно упростить (I.23) следующим образом. Направим ось z по нормали к отверстию в экране. Имеем $|x-x'|\ll|z-z'|$; $|y-y'|\ll|z-z'|$. Раскладывая R в ряд Тейлора, находим

$$R=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\approx(z'-z)+\frac{1}{2}\,\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{z-z'}+\dots .$$

Поскольку в (I.23) входит произведение kR, необходимо, чтобы произведение k на отброшенные малые члены в ряду Тейлора было мало по сравнению с единицей. Ограничиваясь квадратичным членом разложения R, запишем это условие в виде

$$\left|\frac{k}{8}\,\frac{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]^2}{(z'-z)^3}\right|\ll 1. \qquad (I.24)$$

Пусть на плоский экран падает плоская волна под углом γ. Геометрия дифракции показана на рис.I.3. Имеем $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial z}$, так что $\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{\partial\psi}{\partial z}=ik_z\psi=ik\psi\cos\gamma$, а также $\frac{\partial R}{\partial n}=-\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z'-z}{R}=\cos\alpha$,

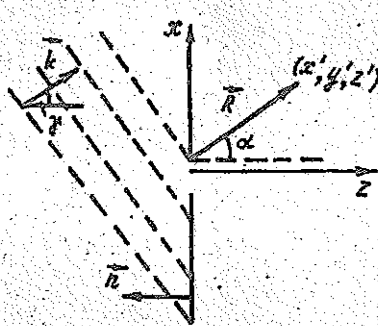

Рис.I.3. Геометрия дифракции при освещении отверстия плоской волной.

Подставляя эти соотношения в (I.23), находим

$$\psi(x',y',z') = \frac{ik}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}(\cos\gamma+\cos\alpha)\,\psi(x,y,z)\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS, \qquad (I.25)$$

где Σ – часть плоскости, опирающаяся на края отверстия в экране.

При выполнении условия (I.24) можно подставить ряд Тейлора в соотношение (I.25), что приведет его к виду

$$\psi(x',y',z') = \frac{i}{2\lambda}\,e^{-ikz'}\int\limits_{\Sigma}(\cos\gamma+\cos\alpha)\,\frac{\psi(x,y,z)}{z'-z}\,\times$$

$$\times\exp\left\{ik\left[z-\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2(z'-z)}\right]\right\}dS. \qquad (I.26)$$

Если рассматриваемая точка настолько близка к отверстию, что необходимо принимать во внимание член x^2+y^2 в показателе экспоненты (I.26), говорят о дифракции Френеля. Если же дифрагированная волна наблюдается вдали от экрана, этот член пренебрежимо мал и имеет место дифракция Фраунгофера.

В тех случаях, когда отверстия в экране имеют вид длинных полос, прямолинейных штрихов и т.п., целесообразно рассматривать одномерную картину дифракции. Функция Грина будет теперь не сферической (I.21), а цилиндрической волной. Можно показать, что с той же степенью приближения дифракционное поле вместо (I.26) описывается формулой

$$\psi(x',z') = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\lambda}}\,e^{-ikz'}\int\limits_{C}\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\sqrt{z'-z}}\,\psi(x,z)\,\times$$

$$\times\exp\left\{ik\left[z-\frac{(x'-x)^2}{2(z'-z)}\right]\right\}dl, \qquad (I.27)$$

где C – контур интегрирования; dl – элемент длины.

Если плоская волна падает на экран под малым углом γ и угол α также мал (параксиальные пучки), то $\cos\gamma+\cos\alpha\simeq 2$. Примем плоскость экрана за начало отсчета $z\,(z=0)$, вместо координат (x,y) для точек отверстия в экране будем писать (ξ,η), а координаты точек, в которых вычисляем поле, обозначим через x,y,z. Положим в (I.26) $z'=0$. Для случая дифракции Френеля вместо (I.26) имеем

$$\psi(x,y,z)=\frac{i}{\lambda z}\exp(-ikz)\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{ik}{2z}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\right\}d\xi d\eta, \qquad (I.28)$$

где в соответствии с граничными условиями Кирхгофа введено обозначение

$$\psi(\xi,\eta,0)\equiv\varphi(\xi,\eta),$$

т.е. $\varphi(\xi,\eta)$ есть распределение поля падающей волны в отверстии, на котором происходит дифракция. В случае дифракции Фраунгофера пренебрегаем слагаемыми $\xi^2+\eta^2$ в показателе экспоненты в (I.28) и приводим это выражение к виду *

$$\psi(x,y,z)=\frac{i}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\times$$

$$\times\exp\left[i\left(k\frac{x}{z}\xi+k\frac{y}{z}\eta\right)\right]d\xi d\eta. \qquad (I.29)$$

Если углы отклонения лучей невелики и

$$\exp\left[-ik\frac{(\xi^2+\eta^2)}{2z}\right]\approx 1, \qquad (I.30)$$

из (I.29) следует, что поле ψ в дальней зоне на плоскости $z=const$ с точностью до фазового множителя представляет собой фурье-образ двумерного распределения поля в отверстии $\varphi(\xi,\eta)$. Действительно, вводя пространственные частоты

$$\omega_x=\frac{kx}{z} \quad \text{и} \quad \omega_y=\frac{ky}{z}, \qquad (I.31)$$

запишем (I.29) в виде преобразования Фурье:

$$\psi(\omega_x,\omega_y)=A\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left[i(\omega_x\xi+\omega_y\eta)\right]d\xi d\eta,$$

где A-постоянная.

---

* Вне отверстия в экране $\varphi(\xi,\eta)\equiv 0$.

Такая связь полей $\psi(x,y)$ и $\varphi(\xi,\eta)$ является физической основой метода оптической обработки информации, голографического опознавания образов и др.

Условие (I.30) выполняется с точностью порядка I %, если расстояние от экрана до точки наблюдения $z > \frac{25d^2}{\lambda}$, где d – наибольший размер отверстия в экране. При d = I мм и λ = 0,6 мкм имеем $z > 50$ м, что неприемлемо для практических целей. Однако в главе 3 будет показано, что с помощью сферической линзы можно скомпенсировать фазовый множитель (I.30) и, таким образом, существенно снизить требования к расстоянию z.

Пусть E – полная энергия, падающая на отверстие. По закону сохранения энергии (поглощение света в системе отсутствует) плоскости наблюдения должна достигать вся энергия E, т.е.

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,y)|^2 dx\,dy = E. \qquad (I.32)$$

По теореме Парсеваля

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\omega_x,\omega_y)|^2 d\omega_x\, d\omega_y = (2\pi)^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |A\varphi(\xi,\eta)|^2 d\xi\, d\eta. \qquad (I.33)$$

С учетом (I.3I) левая часть (I.33) равна $\frac{k^2E}{z^2}$. Если поле в отверстии экрана имеет постоянную величину, то (I.33) можно представить как

$$\frac{k^2E}{z^2} = (2\pi)^2 |A\varphi|^2 D,$$

где D – площадь отверстия.

Отсюда с учетом фазового множителя находим

$$A\varphi = \frac{ik}{2\pi z}\sqrt{\frac{E}{D}}$$

и распределение поля в плоскости на расстоянии z от экрана:

$$\psi(x,y) = \frac{i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}} \iint exp\left[i(\omega_x\xi + \omega_y\eta)\right] d\xi d\eta, \qquad (I.34)$$

где пространственные частоты ω_x и ω_y связаны с координатами x

и y соотношениями (I.31), а интегрирование ограничено отверстием в экране.

Дифракция Фраунгофера на отверстиях различной формы

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на равномерно освещенном прямоугольном отверстии с размерами $2a$ и $2b$ вдоль ξ и η соответственно. Интегрируя (I.34), находим поле дифрагированной волны:

$$\psi(x,y)=\frac{i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\exp\left[i\left(\frac{kx}{z}\xi+\frac{ky}{z}\eta\right)\right]d\xi\, d\eta=$$

$$=\frac{i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\int\limits_{-a}^{a}\exp\left(i\frac{kx}{z}\xi\right)d\xi\int\limits_{-b}^{b}\exp\left(i\frac{ky}{z}\eta\right)d\eta=\frac{i}{\lambda z}\sqrt{ED}\,\frac{\sin\omega_x a}{\omega_x a}\,\frac{\sin\omega_x b}{\omega_x b},$$

где $D=4ab$ – площадь прямоугольного отверстия.

Освещенность, создаваемая дифрагированной волной на плоскости, находящейся на расстоянии z от экрана, равна

$$|\psi(x,y)|^2=\frac{1}{\lambda^2 z^2}ED\left(\frac{\sin\omega_x a}{\omega_x a}\right)^2\left(\frac{\sin\omega_y b}{\omega_y b}\right)^2.$$

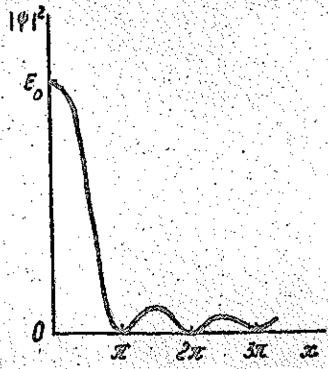

Рис.I.4. Распределение освещенности при дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

Освещенность в центре в $\frac{D}{(\lambda z)^2}$ раз больше, чем освещенность отверстия. Распределение освещенности, например, вдоль оси x показано на рис.I.4. Минимумы освещенности соответствуют значениям

$$\omega_x a=m\pi;\ \omega_y b=n\pi,$$

$$m,n=\pm1,\pm2,\ldots .$$

Чем меньше значения a и b, тем больше углы отклонения x/z и y/z, соответствующие минимумам и максимумам определенных порядков.

Пусть теперь отверстие в экране имеет форму круга радиуса a и освещается плоской волной. Радиус-вектор произвольной точки отверстия $\vec{r}$ с декартовыми координатами ξ и η будем теперь описывать полярными координатами r и β, а радиус-вектор точки плоскости наблюдения $\vec{R}$ – соответственно полярными координатами R и θ. Входящее в показатель экспоненты в (I.34) выражение $x\xi + y\eta$ преобразуем следующим образом:

$$x\xi + y\eta = \vec{R}\vec{r} = Rr\cos(\beta-\theta),$$

а элемент поверхности запишем в виде $r dr d\beta$.

Подставляя эти соотношения в (I.34), с учетом (I.3I) найдем

$$\psi(R,\theta) = \frac{i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi} exp\left[i\frac{k}{z}Rr\cos(\beta-\theta)\right] r dr d\beta. \qquad (I.35)$$

Выбором направления осей ξ и η добьемся, чтобы $\theta = 0$. Используя интегральное представление бесселевой функции

$$J_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} exp(i\gamma\cos\alpha)d\alpha,$$

приведем (I.35) к виду

$$\psi(R,\theta) = \frac{i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\int\limits_0^a r dr\int\limits_0^{2\pi} exp\left[i\frac{k}{z}Rr\cos\beta\right]d\beta =$$

$$= \frac{2\pi i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\int\limits_0^a J_0\left(\frac{kRr}{z}\right) r dr =$$

$$= \frac{2\pi i}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\frac{az}{kR}J_1\left(\frac{kRa}{z}\right) = \frac{i\pi a^2}{\lambda z}\sqrt{\frac{E}{D}}\left[\frac{2J_1(k\alpha a)}{k\alpha a}\right], \qquad (I.36)$$

где введено обозначение для угла отклонения от оси z соответствующего луча $\alpha \cong \frac{R}{z}$ и $D = \pi a^2$.

Распределение освещенности, создаваемой дифракционным полем на экране, имеющее согласно (I.36) вид

$$|\psi(R,\theta)|^2 = \frac{ED}{\lambda^2 z^2}\left[\frac{2J_1(k\alpha a)}{k\alpha a}\right]^2,$$

показано на рис.I.5. В центре дифракционной картины освещенность достигает максимального значения $\frac{ED}{\lambda^2 z^2}$. Вокруг центрального светлого круга чередуются темные и светлые кольца. Освещенность равна нулю при значениях R, удовлетворяющих условию $J_1\left(\frac{kRa}{z}\right) = 0$. Первый нуль достигается при $\frac{kRa}{z} = 3,832$, так что угол, соответствующий первому минимуму, равен

$$\alpha_1 = \frac{3,832}{2\pi}\frac{\lambda}{a} = 1,22\frac{\lambda}{2a},$$

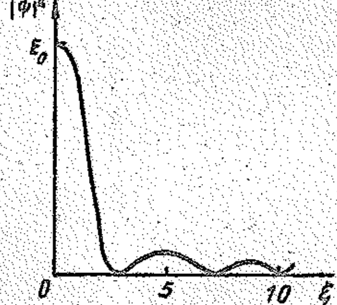

Рис.I.5. Распределение освещенности при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии.

что весьма близко к результату, полученному для прямоугольного отверстия.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на синусоидальной дифракционной решетке, коэффициент пропускания которой имеет вид

$$T(\xi) = T_0 + g\cos\frac{2\pi\xi}{a}, \tag{I.37}$$

где a – период решетки; g – глубина модуляции коэффициента пропускания. Поле непосредственно после решетки имеет вид $\psi(\xi,\eta) = \psi_0 T(\xi,\eta)$, где ψ_0 – амплитуда падающей плоской волны. Поскольку дифракция происходит на одномерной структуре, в приближении Фраунгофера из (I.27) находим

$$\psi(x,z) = \frac{e^{i\pi/4}\psi_0 e^{-ikz}}{\sqrt{\lambda z}}\int\limits_{-\frac{Na}{2}}^{\frac{Na}{2}}\left(T_0 + g\cos\frac{2\pi\xi}{a}\right)\exp(ik\alpha\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\varphi_0 e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-ikz}}{\sqrt{z}} \left[2T_0 \frac{\sin\frac{N}{2}ka\alpha}{k\alpha} + g \frac{\sin\frac{N}{2}(ka\alpha+2\pi)}{k\alpha+\frac{2\pi}{a}} + g \frac{\sin\frac{N}{2}(ka\alpha-2\pi)}{k\alpha-\frac{2\pi}{a}} \right], \quad (I.38)$$

где введен угол $\alpha = \frac{x}{z}$, а N – число периодов на длине решетки.

Первое слагаемое в квадратных скобках в (I.38) представляет собой дифракционное поле щели шириной Na . Максимум поля соответствует неотклоненному положению $\alpha = 0$. Угловая полуширина этого лепестка диаграммы направленности определяется из соотношения

$$\frac{N}{2} ka \Delta\alpha = \pi$$

и равна

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{Nka} = \frac{\lambda}{Na} . \quad (I.39)$$

Чем больше штрихов в решетке N , тем уже дифракционный максимум. Два других слагаемых описывают боковые лепестки, максимумы которых соответствуют нулевым аргументам синусов и имеют угловые направления

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{2\pi}{ka} = \pm \frac{\lambda}{a} . \quad (I.40)$$

Полуширина этих максимумов также определяется (I.39).

Таким образом, в отличие от известной штриховой решетки, коэффициент пропускания которой имеет прямоугольную периодическую форму, а дифракционное поле – множество максимумов, соответствующих углам $\alpha_m = m\frac{\lambda}{a}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, дифракционная решетка с синусоидальной модуляцией коэффициента пропускания (I.37) создает всего два боковых максимума, определяемых (I.40).

Дифракция Брэгга

Важным случаем дифракции электромагнитных волн, в том числе и оптического диапазона, является дифракция в прозрачной среде с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся по гармоническому закону. Рассмотрим вначале изотропную среду. Пусть относительная диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon = \varepsilon^{o} + \Delta\varepsilon \sin(\Omega t - Kx), \qquad (I.41)$$

где ε^{o} и $\Delta\varepsilon$ – соответственно невозмущенное значение и амплитуда модуляции относительной диэлектрической проницаемости. Подобная зависимость диэлектрической проницаемости от времени и координаты существует, в частности, при распространении в твердом теле упругой волны с частотой Ω и волновым числом K вдоль координаты x. Если ε является функцией времени и $\mu = 1$, то при условии (I.9) волновое уравнение имеет вид

$$\Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon E),$$

где $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}$.

Предположим, что ширина области, в которой ε имеет вид (I.41), вдоль оси y равна L (см.рис.I.6). Плоская электромагнитная волна с частотой ω и волновым числом k падает из среды с диэлектрической проницаемостью ε^{o} на область с модулированной ε под углом θ к оси y. Волновое уравнение примет вид

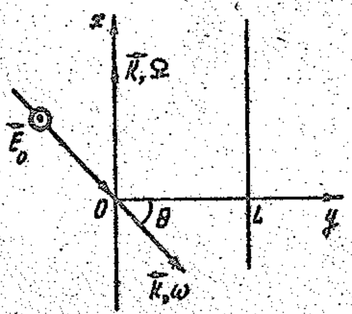

Рис.I.6. Дифракция оптической волны на структуре с периодическим изменением диэлектрической проницаемости.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\left[\varepsilon^\circ + \Delta\varepsilon \sin(\Omega t - Kx)\right] E\right\}. \qquad (I.42)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде плоских волн, распространяющихся в направлении дифракционных максимумов. Учтем также изменение частоты оптической волны вследствие эффекта Допплера при взаимодействии с движущейся периодической структурой (I.4I). Запишем искомое поле в виде

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m(y) \exp\left\{i\left[(\omega + m\Omega)t + (k\sin\theta - mK)x - ky\cos\theta\right]\right\}, \qquad (I.43)$$

где $E_m(y)$ – амплитуда дифракционного максимума m-го порядка, его частота равна

$$\omega' = \omega + m\Omega.$$

Пусть глубина модуляции диэлектрической проницаемости мала:

$$\Delta\varepsilon \ll \varepsilon^\circ,$$

тогда амплитуда $E_m(y)$ является медленно изменяющейся функцией координаты (на длине волны λ имеем $|\Delta E_m| \ll |E_m|$), поэтому при подстановке (I.43) в (I.42) пренебрегаем вторыми производными $\frac{\partial^2 E_m}{\partial y^2}$. Далее, пренебрегая всеми членами, содержащими сомножителем частоту Ω (так как $\Omega \ll \omega$), подставляя

$$\sin(\Omega t - Kx) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(\Omega t - Kx)} - e^{-i(\Omega t - Kx)}\right]$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим систему уравнений для амплитуд:

$$\frac{dE_m}{dy} + \frac{\xi}{2L}\left[E_{m+1}(y) - E_{m-1}(y)\right] = -i\,\frac{mK}{\cos\theta}\left(\sin\theta - m\sin\theta_Б\right) E_m(y), \qquad (I.44)$$

где введены обозначения:

$$\xi = -\frac{k\,\Delta\varepsilon\, L}{2\varepsilon^\circ\cos\theta}; \qquad (I.45)$$

$$\sin\theta_Б = \frac{K}{2k} = \frac{\lambda}{2\Lambda} = \frac{\lambda_0}{2n\Lambda}; \qquad (I.46)$$

L – длина области взаимодействия оптической и акустической волн; λ_0 – длина оптической волны в вакууме; $n=\sqrt{\varepsilon^0}$ – показатель преломления среды; $\theta_Б$ – угол Брэгга; Λ – длина акустической волны.

Рассмотрим два режима.

I. Режим Рамана – Ната.

Найдем решение (I.44) в двух предельных случаях. Пусть значение Λ велико настолько, что $\theta_Б \to 0$. Этот случай называется режимом Рамана – Ната. Опуская соответствующий член в (I.44), получим уравнение для амплитуд плоских волн:

$$\frac{dE_m}{dy} + \frac{\xi}{2L}\left(E_{m+1} - E_{m-1}\right) = -imKtg\theta E_m. \qquad (I.47)$$

Учитывая рекуррентное соотношение для цилиндрических функций

$$2\frac{dZ_m}{dz} + \left(Z_{m+1} - Z_{m-1}\right) = 0,$$

начальное условие $E_m(0) = 0$ при $m \neq 0$, а также ограниченность поля при $y = 0$, можно найти решение (I.47) в виде

$$E_m(y) = E^0 \exp\left(-\frac{i}{2} mKy\, tg\theta\right) J_m\left[\xi \frac{\sin(Ky\, tg\frac{\theta}{2})}{KL\, tg\frac{\theta}{2}}\right], \qquad (I.48)$$

где J_m – функция Бесселя m-го порядка; E^0 – амплитуда падающей оптической волны.

Интенсивность m-го дифракционного пучка на выходе из области взаимодействия $(y=L)$ находим как $|E_m(L)|^2$:

$$I_m = I^0 J_m^2\left(\frac{\xi \sin f}{f}\right),$$

где

$$f = KL\, tg\frac{\theta}{2},$$

а I° – интенсивность оптической волны, падающей на область взаимодействия, т.е. при $y = 0$.

Дифрагированное поле представляет собой совокупность дифракционных минимумов и максимумов. Угловое направление максимумов относительно неотклоненной волны ($m = 0$) определяется соотношением

$$\sin\theta_m = \frac{mK}{k} = \frac{m\lambda}{\Lambda}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

При малых значениях амплитуды модуляции диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$ и длины области взаимодействия L интенсивность максимумов I_m убывает с увеличением $|m|$.

2. Брэгговское отражение.

Рассмотренный выше режим Рамана – Ната соответствует дифракции оптической волны на фазовой решетке, т.е. структуре, оптическая толщина которой nL, а следовательно, и набег фазы периодически зависят от координаты x. Соотношение (I.48) может быть получено непосредственным применением интеграла Кирхгофа – Френеля в виде (I.27), если функция пропускания имеет вид

$$T = e^{i\left(1 + g\cos\frac{2\pi x}{a}\right)},$$

соответствующий фазовой модуляции волны.

При увеличении частоты Ω (уменьшении пространственного периода модуляции диэлектрической проницаемости Λ) или увеличении длины взаимодействия L направление распространения падающей оптической волны внутри периодической структуры уже нельзя считать прямолинейным, а фазовая модуляция света дополняется амплитудной модуляцией. Происходит переход от дифракции на фазовой решетке (режим Рамана – Ната) к дифракции на объемной периодической структуре (режим Брэгга, или брэгговское отражение). Этот переход (с увеличением Ω или L), наиболее заметный при падении света под углом Брэгга (I.46), проявляется в постепенном возрастании асимметрии распределения интенсивностей дифракционных максимумов, причем среди максимумов с $m \neq 0$ максимальна интенсивность максимума первого порядка ($m = 1$).

В пределе при $L \to \infty$ весь дифрагированный свет сосредотачивается в этом максимуме, и волна как бы отражается от плоскостой постоянных значений диэлектрической проницаемости под тем же углом, под которым падает на них. По этой причине такой режим дифракции называют еще брэгговским отражением.

Характерное значение угла дифракции соответствует $\alpha \approx \frac{\lambda}{\Lambda}$, поэтому отклонение луча на длине взаимодействия L равно $\delta = \frac{\lambda L}{\Lambda}$. Если $\frac{\delta}{\Lambda} \ll 1$, имеет место режим Рамана – Ната (отклонение луча в структуре пренебрежимо мало). Случай $\frac{\delta}{\Lambda} \gg 1$ соответствует дифракции Брэгга. Обычно величину $\frac{\delta}{\Lambda}$ умножают на 2π и пользуются безразмерным параметром

$$Q = \frac{2\pi \lambda L}{\Lambda^2}.$$

Практически режим Рамана – Ната наблюдается при $Q \leq 0,3$ (т.е. $\frac{\delta}{\Lambda} \leq 0,05$), а брэгговское отражение – при $Q \geq 4\pi$ (т.е. $\frac{\delta}{\Lambda} \geq 2$).

С микроскопической точки зрения дифракция света на периодической структуре (I.41), созданной акустической волной, можно рассматривать как процесс рассеяния фотона, падающего под углом $\theta_Б$, на фононе. Законы сохранения энергии и импульса частиц после сокращения на $\hbar$ имеют вид

$$\omega' = \omega \pm \Omega;$$

$$\vec{k}' = \vec{k} \pm \vec{K},$$

где знак "плюс" ("минус") соответствует поглощению (излучению) фонона. Ввиду того, что $\omega \gg \Omega$, можно считать (в случае изотропной среды) $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$.

Процесс рассеяния фотона удобно описывать с помощью векторной диаграммы (рис.I.7), из которой легко найти угол Брэгга (I.46). В анизотропной среде $|\vec{k}'| \neq |\vec{k}|$, поэтому анализ усложняется. Этот случай будет рассмотрен позже.

Количественное описание режима дифракции Брэгга также проведем на основе (I.44), ограничившись лишь двумя волнами, соответствующими $m = 0$ и $m = I$ (т.е. $E_m \equiv 0$, $m \neq 0, I$).

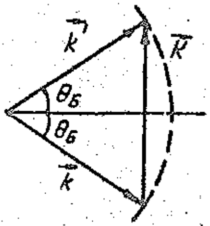

Рис.I.7. Векторная диаграмма рассеяния фотона на фононе (с поглощением фонона).

$$\frac{dE_0}{dy} = -\frac{\xi}{2L} E_1 ; \qquad (I.49)$$

$$\frac{dE_1}{dy} + i\frac{2\beta}{L} E_1 = \frac{\xi}{2L} E_0 , \qquad (I.50)$$

где

$$\beta = KL \frac{\sin\theta - \sin\theta_Б}{2\cos\theta} .$$

Соотношения (I.49) и (I.50) называются уравнениями связанных волн.

Начальными условиями являются

$$E_0(0) = E^0 \quad \text{и} \quad E_1(0) = 0. \qquad (I.51)$$

Исключая из (I.50) E_0 с помощью (I.49), находим уравнение для дифрагированного поля:

$$\frac{d^2 E_1}{dy^2} + i\frac{2\beta}{L}\frac{dE_1}{dy} + \frac{\xi^2}{4L^2} E_1 = 0 ,$$

решение которого с начальным условием (I.51) имеет вид

$$E_1(y) = E^0 \exp\left(-i\frac{\beta y}{L}\right) \frac{\xi/2}{\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2}} \sin\left[\frac{y}{L}\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2}\right] .$$

На выходе области взаимодействия ($y = L$) эффективность дифракции Брэгга равна ($I_1 = |E_1|^2$):

$$\eta = \frac{I_1}{I^0} = \frac{\xi^2}{4\left[\beta^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right]} \sin^2\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2} , \qquad (I.52)$$

а $I^0 = |E^0|^2$.

С учетом (I.45) преобразуем (I.52) к виду

$$\eta = W^2 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi L}{\Lambda\cos\theta}\sqrt{W^2 + (\sin\theta_Б - \sin\theta)^2}\right]}{W^2 + (\sin\theta_Б - \sin\theta)^2} , \qquad (I.53)$$

где

$$W = \frac{\Lambda}{2\lambda} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^{\circ}}.$$

Из (I.53) видно, что интенсивность дифракции Брэгга максимальна при угле падения $\theta = \theta_Б$ и составляет

$$\eta_{max} = \sin^2\left(\frac{\pi n L}{2\lambda_0 \cos\theta_Б} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^{\circ}}\right).$$

При малой глубине модуляции ($\xi \ll 1$) из (I.53) находим

$$\eta = W^2 \left\{\frac{\sin\left[\frac{\pi L}{\Lambda \cos\theta}\left(\sin\theta_Б - \sin\theta\right)\right]}{\sin\theta_Б - \sin\theta}\right\}^2.$$

Полученные формулы будут использованы при анализе акустооптических модуляторов и дефлекторов.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛУЧЕВОЙ ОПТИКИ

В том случае, когда длина световой волны мала в сравнении с характерным размером среды или устройства, в которых она распространяется, можно использовать предельный случай волновой оптики $\lambda \to 0$, называемой геометрической, или лучевой оптикой. Электромагнитную волну можно рассматривать как плоскую в любом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не изменялись на расстоянии порядка λ. В этом случае можно ввести волновые поверхности, или фронты, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова, и в каждой точке задать направление распространения волны, нормальное к волновой поверхности. При этом можно рассматривать лучи, т.е. линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны. Геометрическая оптика не учитывает также и векторную природу света.

2.1. Уравнения лучевой оптики

Запишем выражение для поля в виде

$$\psi = \psi_0(x,y,z)e^{-ik_0 S(x,y,z)}, \tag{2.1}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$, а ψ_0 и S – действительные функции. Величина S называется эйконалом. Если $\lambda \to 0$, фаза волны является очень быстро изменяющейся функцией ($k_0 \to \infty$), в то время как амплитуда ψ_0 меняется значительно медленнее. Функцию $S(x,y,z)$ также можно считать мало изменяющейся на длине волны λ. Подставляя (2.1) в волновое уравнение (1.30), получим

$$\left[k^2 - k_0(\nabla S)^2\right]\psi_0 - ik_0(2\nabla S\nabla\psi_0 + \psi_0\nabla^2 S) + \nabla^2\psi_0 = 0,$$

где слагаемые сгруппированы в порядке уменьшения степени k_0. Ввиду действительности ψ_0 и S второй член в этом выражении должен равняться нулю. Пренебрегая последним слагаемым при $k_0 \to \infty$, находим

$$(\nabla S)^2 = n^2, \tag{2.2}$$

где показатель преломления

$$n = \frac{k}{k_0} = \sqrt{\varepsilon}$$

является в общем случае функцией координат.

Решение уравнения (2.2), называемого уравнением эйконала, задает волновые поверхности, являющиеся поверхностями постоянного эйконала:

$$S(x,y,z) = const.$$

Направление лучей определяется вектором

$$\vec{v} = \nabla S,$$

величина которого согласно (2.2) равна

$$|\vec{v}| = n. \tag{2.3}$$

Проведем радиус-вектор $\vec{r}$ в произвольную точку луча. Пусть s является расстоянием, измеренным вдоль луча. Введем единичный вектор, касательный к световому лучу

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

где ds – элемент длины дуги, вдоль которой распространяется луч.

Так как направление луча нормально к волновой поверхности $S(x,y,z)=const$, векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ должны быть коллинеарными. Учитывая (2.3), запишем

$$n\frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla S. \tag{2.4}$$

Продифференцируем (2.4) по s:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{dr}\right) = \frac{d}{ds}\nabla S, \tag{2.5}$$

тогда имеем

$$\frac{d}{ds}\nabla S = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d}{d\vec{r}}\nabla S = \frac{d\vec{r}}{ds}\nabla^2 S. \tag{2.6}$$

Вычисляя градиент от левой и правой частей (2.2), находим

$$2\nabla S\nabla^2 S = 2n\nabla n.$$

Подставим сюда ∇S из (2.4):

$$n\frac{d\vec{r}}{ds}\nabla^2 S = n\nabla n.$$

Сокращая на n и подставляя это выражение вместе с (2.6) в (2.5), получим уравнение луча:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n. \tag{2.7}$$

Уравнения эйконала и луча представляют собой две возможные формы описания в геометрической оптике. Важным частным случаем являются так называемые параксиальные лучи, т.е. лучи, мало отклоняющиеся от оптической оси $(\alpha \ll 1)$. Направляя ось z вдоль оптической оси, находим

$$ds \approx dz,$$

что позволяет упростить (2.7) и записать уравнение параксиальных лучей в виде

$$\frac{d}{dz}\left(n\frac{d\vec{r}}{dz}\right)=\nabla n.$$

Поскольку $rot\, grad\; S\equiv 0$, циркуляция ∇S равна нулю:

$$\oint \nabla S\, d\vec{\ell}=0.$$

Подставляя сюда (2.4), запишем

$$\int\limits_{P_1}^{P_2} n\frac{d\vec{r}}{ds}\, d\vec{\ell_1}=\int\limits_{P_1}^{P_2} n\frac{d\vec{r}}{ds}\, d\vec{\ell_2}, \qquad (2.8)$$

где P_1 и P_2 – две произвольные точки на контуре интегрирования, а $d\vec{\ell_1}$ и $d\vec{\ell_2}$ – элементы длины двух кривых, соединяющих P_1 и P_2.

Пусть точки P_1 и P_2 соединены световыми лучами, которые примем за линии интегрирования. В этом случае $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $d\vec{\ell}$ коллинеарны и их произведение дает элемент длины светового луча dS, а (2.8) приобретает вид

$$\int\limits_{P_1}^{P_2} n\, ds_1=\int\limits_{P_1}^{P_2} n\, ds_2. \qquad (2.9)$$

Интегралы, стоящие в левой и правой частях (2.9), называются оптической длиной пути луча. Из (2.9) следует, что точки P_1 и P_2 можно соединить двумя различными световыми лучами лишь в том случае, если оптические длины путей одинаковы для обоих лучей. В частности, если P_1 – точка объекта, а P_2 – точка его изображения, то все лучи, приходящие из P_1 в P_2 , должны иметь одинаковую оптическую длину пути.

Несложно показать, что применение (2.9) к распространению луча вблизи границы раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2, приводит к закону Снеллиуса (1.12).

2.2. Формализм Гамильтона в лучевой оптике

Поле волны запишем в виде

$$\psi=\psi_0\, e^{-i\varphi}. \qquad (2.10)$$

Разложим φ в ряд с точностью до членов первого порядка:

$$\varphi = \varphi_0 + \vec{r}\,\nabla\varphi + t\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (2.11)$$

Сравнивая (2.10) и (2.11) с уравнением плоской монохроматической волны

$$\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},$$

можно записать

$$\vec{k} = \nabla\varphi; \quad \omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (2.12)$$

поскольку в малом участке пространства волну можно рассматривать как плоскую. Сравнивая (2.12) с известными из механики выражениями, связывающими импульс с градиентом действия, а функцию Гамильтона - с отрицательной производной действия по времени, можно сделать вывод, что роль импульса в лучевой оптике играет волновой вектор $\vec{k}$, а роль функции Гамильтона, т.е. энергии частицы, - частота волны ω. Отсюда уравнения Гамильтона для лучей имеют вид

$$\dot{\vec{k}} = -\frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}}; \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}. \qquad (2.13)$$

Второе из уравнений (2.13) определяет групповую скорость волны.

Из (2.13) следует также принцип наименьшего действия для лучей в виде

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}\vec{k}\,d\vec{s} = 0,$$

где $d\vec{s}$ - элемент длины луча, вдоль которого производится интегрирование. Поскольку $\vec{k}$ и $d\vec{s}$ коллинеарны и $|\vec{k}| = \frac{n\omega}{c}$, принцип наименьшего действия можно записать в двух эквивалентных формах:

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} n(x,y,z)\,ds = 0 \qquad (2.14)$$

и

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} dt = 0. \qquad (2.15)$$

Соотношение (2.15) выражает тот факт, что световой луч имеет траекторию, соответствующую минимуму времени распространения (принцип Ферма). Согласно (2.14) этой траектории отвечает минимальный оптический путь.

Подставляя в (2.14)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\, dz,$$

запишем принцип наименьшего действия в виде

$$\delta \int n(x,y,z) \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\, dz = 0,$$

где множитель перед dz является функцией Лагранжа. Роль времени здесь играет координата z.

Уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dz} \frac{n x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\, \frac{\partial n}{\partial x};$$

$$\frac{d}{dz} \frac{n y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\, \frac{\partial n}{\partial y},$$

или

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x};$$

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y},$$

что совпадает с (2.7).

Введем обобщенные импульсы луча:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{n x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = n \frac{dx}{ds}; \qquad (2.16)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{n y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = n \frac{dy}{ds}. \qquad (2.17)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H=p_x x'+p_y y'-L=-\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2}. \qquad (2.18)$$

В параксиальном приближении ($x'\ll 1$; $y'\ll 1$; $p_x\ll n$; $p_y\ll n$) гамильтониан упрощается:

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2}{2n_0}-n(x,y,z),$$

где n_0 – среднее значение показателя преломления, а

$$n(x,y,z)=n_0+\Delta n(x,y,z),$$

причем отклонение мало: $|\Delta n|\ll n_0$.

Запишем уравнение Гамильтона – Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial z}=-H\left(x,y,\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial y}\right).$$

Подставляя сюда (2.18) и возводя обе части равенства в квадрат, приходим к уравнению эйконала (2.2).

Согласно (2.16) и (2.17) можно представить обобщенные импульсы луча в виде

$$p_x=n\sin\alpha_x ; \qquad (2.19)$$

$$p_y=n\sin\alpha_y , \qquad (2.20)$$

где α_x и α_y – углы между элементом длины луча $\overline{dS}$ и плоскостями, соответственно, yz и xz. Из закона Снеллиуса (1.12) следует непрерывность обобщенного импульса луча на поверхности разрыва n.

2.3. Теорема Лиувилля

Физическое состояние луча задается набором канонических переменных x, y, p_x, p_y, т.е. точкой в соответствующем четырехмерном фазовом пространстве. Фазовая траектория описывает изменение координат и углов наклона луча в процессе распространения.

Рассмотрим пучок лучей, которые заполняют некоторую площадь в реальном пространстве и имеют некоторый разброс по направлениям. Этим лучам отвечает некоторый объем в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля, доказанная в курсах классической механики и статистической физики, может быть сформулирована для пучка лучей в нескольких эквивалентных формах.

I. Объем фазового пространства $\Delta\Gamma$, соответствующий пучку лучей, остается постоянным. Другими словами, фазовый объем, содержащий постоянное число фазовых точек лучей, не зависит от z.

2. Якобиан преобразования канонических переменных x, y, p_x, p_y от некоторой начальной точки $z = z_1$ до произвольной точки z равен единице:

$$\frac{\partial(x, y, p_x, p_y)}{\partial(x_1, y_1, p_{x_1}, p_{y_1})} = 1, \quad \text{или} \quad d\Gamma = d\Gamma_1.$$

Теорема Лиувилля справедлива и при наличии поверхностей разрыва показателя преломления (что соответствует разрыву потенциальной энергии в механике).

В качестве примера рассмотрим оптический корректор, т.е. прибор, имеющий бесконечно малую толщину, но изменяющий угол наклона любого проходящего луча в определенной зависимости от его положения, т.е. осуществляющий переменный по волновому фронту фазовый сдвиг. Из рис.2.I видно, что координата луча не из-

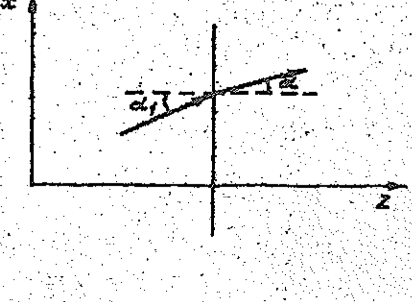

Рис.2.I. Ход луча в оптическом корректоре.

меняется при прохождении через корректор: $x_1 = x$. Из теоремы Лиувилля следует

$$\frac{\partial(x,p_x)}{\partial(x_1,p_{x_1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial p_x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_{x_1}} & \frac{\partial p_x}{\partial p_{x_1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_x}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial p_x}{\partial p_{x_1}} \end{vmatrix} = 1, \tag{2.21}$$

где учтено, что $x_1 = x$ и координата x не зависит от угла наклона входящего луча, т.е. $\frac{\partial x}{\partial p_{x_1}} = 0$. Из (2.21) находим $\frac{\partial p_x}{\partial p_{x_1}} = 1$.

Интегрируя это уравнение в частных производных, находим

$$p_x = p_{x_1} + f(x_1),$$

где $f(x)$ - произвольная функция координаты x_1 . Предполагая, что показатель преломления до и после корректора одинаков, с учетом (2.19) и (2.20) имеем $(x = x_1)$:

$$\sin\alpha = \sin\alpha_1 + F(x). \tag{2.22}$$

Для параксиальных пучков это соотношение имеет вид

$$\alpha - \alpha_1 = F(x),$$

т.е. тонкий оптический корректор (например, тонкую линзу) можно рассматривать как прибор, который изменяет угол падающего луча на определенную величину, зависящую от его положения, но не наклона.

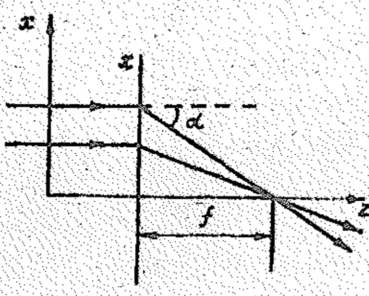

Рис.2.2. Тонкая линза как оптический корректор.

Так, для тонкой линзы пучки, распространяющиеся вдоль оси, должны пересечься на оси в фиксированной точке f (рис.2.2). Имеем

$$\alpha_1 = 0; \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+f^2}}.$$

Согласно (2.22) в данном случае

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+f^2}}.$$

Для случая осевой симметрии вместо x надо подставить радиус r. В параксиальном приближении

$$F(r) \approx \frac{r}{f} \quad \text{и} \quad \alpha - \alpha_1 = \frac{r}{f}. \qquad (2.23)$$

В частности, луч, проходящий через центр линзы $(r=0)$, не отклоняется.

Геометрическая оптика основана на предельном переходе $\lambda \to 0$. Учет конечной длины λ приводит к принципу неопределенности, в котором роль постоянной Планка играет длина волны λ.

$$\Delta x \Delta p \geqq \frac{\lambda}{4\pi}.$$

Отсюда, в частности, следует оценка предельной разрешающей способности оптической системы:

$$\Delta x \geqq \frac{\lambda}{4\pi n \sin\alpha},$$

что согласуется с известной формулой Рэлея.

3. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Как отмечалось в главе I, дифракция света позволяет осуществлять преобразование Фурье одномерных и двумерных оптических сигналов. Введение в оптическую схему линзы в качестве фазового корректора позволяет существенно упростить реализацию преобразования Фурье.

3.1. Волновая оптика тонких линз

Идеальная линза не изменяет амплитуду проходящей через нее волны, но создает сдвиг фазы, зависящей от координаты (для осесимметричной линзы – от расстояния r до оптической оси):

$$\psi_o(r) = \psi_i(r) e^{i\gamma(r)},$$

где ψ_i – входное поле непосредственно перед линзой; ψ_o – выходное поле непосредственно после линзы; γ – фазовый сдвиг.

Если на линзу падает плоская волна, то на выходе должна быть сформирована сходящаяся сферическая волна с фокусом в точке f (см.рис.3.1). Рассмотрим сферический волновой фронт, касающийся тонкой линзы в точке $r = 0$. При $r=\rho$ он находится на

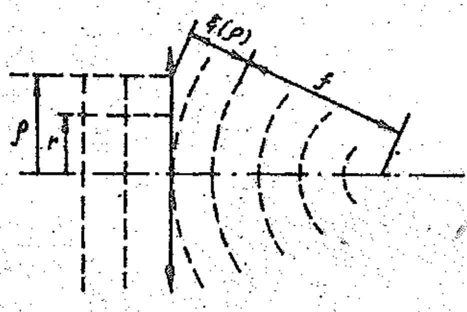

Рис.3.1. Действие линзы как фазового корректора.

расстоянии $\xi(\rho)$ от линзы. Поскольку все точки волнового фронта имеют одинаковую фазу, на оси линзы должен быть создан отрицательный сдвиг фазы (запаздывание по фазе) по сравнению с точкой $r=\rho$:

$$\gamma(0) = -\frac{2\pi\xi(\rho)}{\lambda} = -k\xi(\rho).$$

Для произвольного r на рис. 3.1 имеем

$$[f + \xi(r)]^2 = r^2 + f^2,$$

откуда, пренебрегая ξ^2, получим

$$\xi = \frac{r^2}{2f}. \qquad (3.1)$$

Сдвиг фаз, который должна создавать линза в точках на расстоянии r от оси по отношению к $r = 0$, равен

$$\gamma(r) = \gamma(0) - [-k\xi(r)] = -k[\xi(\rho) - \xi(r)],$$

что с учетом (3.I) дает

$$\gamma(r) = -\frac{k}{2f}(\rho^2 - r^2). \qquad (3.2)$$

Рассмотрим соотношение между полями во входной и выходной плоскостях, между которыми расположена тонкая линза (рис.3.2). Пусть ψ_0 – распределение поля во входной плоскости, ψ_1 и ψ_2 –

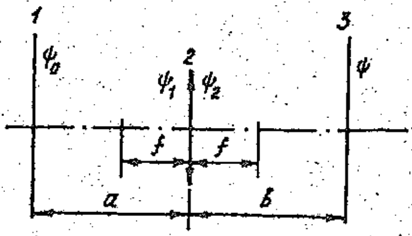

Рис.3.2. Формирование изображения с помощью тонкой линзы: I – входная плоскость; 2 – линза; 3 – выходная плоскость.

поля непосредственно перед линзой и после нее, ψ – поле в выходной плоскости. Используя (I.26), получим

$$\psi_1(x_1,y_1) = \frac{ie^{-ik(z_1-z_0)}}{\lambda(z_1-z_0)} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_0,y_0) \exp\left\{-ik\left[\frac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}{2(z_1-z_0)}\right]\right\} dx_0 dy_0 \qquad (3.3)$$

и

$$\psi(x,y) = \frac{ie^{-ik(z-z_1)}}{\lambda(z-z_1)} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(x_1,y_1) \exp\left\{-ik\left[\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2(z-z_1)}\right]\right\} dx_1 dy_1, \qquad (3.4)$$

где согласно (3.2)

$$\psi_2(x_1,y_1)=\psi_1(x_1,y_1)\exp\left[-\frac{ik}{2f}(\rho^2-r^2)\right], \tag{3.5}$$

а

$$r^2=x_1^2+y_1^2.$$

Пусть расстояния от плоскостей до линзы равны фокусному расстоянию:

$$z_1-z_0=f \quad \text{и} \quad z-z_1=f,$$

т.е. входная и выходная плоскости являются фокальными плоскостями линзы.

Подставляя (3.3) и (3.5) в (3.4), получим четырехкратный интеграл от функции $\psi_0(x_0,y_0)$, умноженный на экспоненту с показателем, равным

$$-\frac{ik}{2f}\left(\rho^2-2x_1x_0-2y_1y_0+x_1^2+y_1^2+x_0^2+y_0^2+x^2+y^2-2xx_1-2yy_1\right).$$

При интегрировании в (3.4) предполагается, что линза имеет бесконечные размеры. Физически это означает, что пучок, падающий на линзу, освещает только часть ее поверхности. Конечность размера (апертуры) линзы ограничивает достижимое разрешение деталей изображения.

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{ik}{2f}\left(-2x_1x_0-2xx_1+x_1^2\right)\right]dx_1=\sqrt{-\frac{i2\pi f}{k}}\exp\left[\frac{ik}{2f}(x+x_0)^2\right]$$

и аналогичное соотношение выполняется для y-координат, показатель подынтегральной экспоненты упрощается и (3.4) приобретает вид

$$\psi(x,y)=\frac{i}{\lambda f}e^{-2ikf}e^{-\frac{ik\rho^2}{2f}}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_0(x_0,y_0)\exp\left[i\frac{k}{f}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0. \tag{3.6}$$

Таким образом, поля ψ и ψ_0 в фокальных плоскостях линзы связаны друг с другом (с точностью до несущественного фазового и амплитудного множителей) преобразованием Фурье. Сравнивая (3.6) и (I.29), заметим, что если входным полем является поле в передней фокальной плоскости, то поле в задней фокальной плоскости линзы соответствует дальнему дифракционному полю Фраунгофера. Таким образом, применение линзы снимает сильное ограничение (I.30) на расстояние до плоскости изображения.

Вводя пространственные частоты

$$\omega_x = \frac{kx}{f} \quad \text{и} \quad \omega_y = \frac{ky}{f},$$

запишем (3.6) в виде

$$\psi(\omega_x, \omega_y) = C \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_0, y_0) \exp\left[i(\omega_x x_0 + \omega_y y_0)\right] dx_0\, dy_0,$$

где C – постоянная.

Важной особенностью оптического преобразования Фурье является параллельный метод обработки информации, в отличие от последовательного метода, характерного для ЭВМ. В принципе преобразование Фурье произвольного двумерного поля осуществляется за время распространения света на расстояние, равное двойному фокусному расстоянию линзы, и оно может быть меньше I нс.

3.2. Преобразование оптического сигнала с помощью линейной пространственно-инвариантной системы

Пространственный оптический сигнал опишем комплексной амплитудой световой волны:

$$u(x,y) = A(x,y)\, e^{i\varphi(x,y)}.$$

Если волна распространяется в линейной системе, то связь выходного $u(x,y)$ и входного $u_0(x_0,y_0)$ оптических сигналов выражается с помощью линейного оператора $\hat{L}$:

$$u(x,y) = \hat{L} u_0(x_0, y_0). \tag{3.7}$$

Используя свойства δ-функции Дирака, запишем входной сигнал в виде

$$u_0(x_0, y_0) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0', y_0')\, \delta(x_0' - x_0)\, \delta(y_0' - y_0)\, dx_0'\, dy_0'.$$

Выходной сигнал в соответствии с (3.7) равен

$$u(x,y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0',y_0')\hat{L}\left[\delta(x_0'-x_0)\delta(y_0'-y_0)\right]dx_0'\,dy_0'.$$

Здесь использован тот факт, что $\hat{L}$ – линейный оператор.

Импульсным откликом системы h называется ее выходной сигнал в том случае, когда на вход подан элементарный сигнал, описываемый δ-функцией, т.е.

$$h(x,y;\,x_0',y_0')=\hat{L}\left[\delta(x_0'-x_0)\delta(y_0'-y)\right].$$

Теперь можно записать выходной сигнал в виде

$$u(x,y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0,y_0)\,h(x,y;\,x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0. \qquad (3.8)$$

Это соотношение подтверждает тот факт, что линейная система полностью описывается ее откликом на входной импульсный сигнал.

Если пространственный сдвиг входного сигнала в плоскости (x_0, y_0) вызывает только сдвиг выходного сигнала в плоскости (x, y) без изменения его формы, такая система называется пространственно-инвариантной. Реальные оптические системы инвариантны лишь в некоторых ограниченных частях входной и выходной плоскостей, называемых изопланарными участками.

Для линейной пространственно-инвариантной системы выражение (3.8) приобретает вид

$$u(x,y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0,y_0)\,h(x-x_0,y-y_0)\,dx_0\,dy_0, \qquad (3.9)$$

т.е. выходной сигнал такой системы представляет собой свертку входного сигнала с импульсным откликом системы: $u=u_0*h$.

Поскольку фурье-образ свертки функций равен произведению фурье-образов этих функций, имеем

$$V(\omega_x,\omega_y)=V_0(\omega_x,\omega_y)\,H(\omega_x,\omega_y),$$

где

$$V(\omega_x,\omega_y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\,e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}\,dx\,dy;$$

$$V(\omega_x,\omega_y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_o(x,y)e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}dxdy;$$

$$H(\omega_x,\omega_y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}dxdy.$$

Последние соотношения показывают, что анализ и синтез линейных пространственно-инвариантных систем удобно проводить в пространственно-частотной области, так как вместо трудоемкой операции свертки функций достаточно найти их фурье-образы, перемножить их и выполнить обратное преобразование Фурье. А именно эти операции сравнительно легко и быстро осуществляются с помощью оптических устройств.

3.3. Основные принципы оптической обработки информации

Рассмотрим оптическое аналоговое вычислительное устройство, показанное на рис.3.3. Плоская волна падает на транспарант, находящийся в передней фокальной плоскости линзы 3. Транспарант пред-

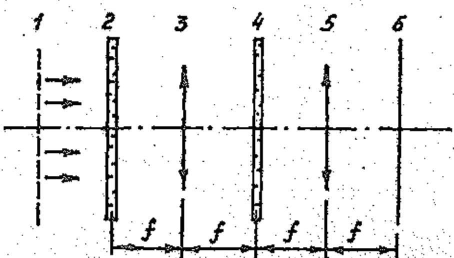

Рис.3.3. Оптическое аналоговое вычислительное устройство: I – падающая плоская волна; 2,4 – транспаранты; 3,5 – линзы; 6 – экран или регистрирующая среда.

ставляет собой прозрачную (или частично прозрачную) среду, у которой амплитудный коэффициент пропускания света есть некоторая функция координат $f(x,y)$.

Транспарант может изменять как амплитуду, так и фазу волны по определенному закону, так что в общем случае $f(x,y)$ есть комплексная функция. Входное поле первой линзы есть $Af(x,y)$, где A – амплитуда плоской волны, освещающей транспарант (не путать функцию f с фокусным расстоянием f). В дальнейшем для упрощения записи положим $A=1$. На входе транспаранта 4, расположенного в задней фокальной плоскости линзы 3, формируется фурье-преобразование функции $f(x,y)$, т.е.

$$F[f(x,y)].$$

Если транспарант 4 имеет коэффициент пропускания, равный единице, то линза 5, расположенная на расстоянии f от транспаранта, строит на экране в задней фокальной плоскости преобразование Фурье от $F[f(x,y)]$, т.е. строит исходную функцию $f(x,y)$, поскольку

$$F\{F[f(x,y)]\}=f(-x,-y).$$

Направления координатных осей в выходной плоскости системы выбраны противоположно направлениям осей координат во входной плоскости, чтобы учесть инверсию, которая появляется в результате двух последовательных преобразований Фурье. В этом случае выходное поле на экране совпадает с входным полем $f(x,y)$. Изменяя функцию пропускания транспаранта 2, которую будем обозначать $H(\omega_x, \omega_y)$, можно осуществлять определенные преобразования исходной функции $f(x,y)$. Например, пусть транспарант 4 представляет собой непрозрачный экран с квадратным отверстием в центре. В этом случае через транспарант пройдут только пространственные частоты от $\omega_{x_0}=ka/f$ до $-\omega_{x_0}$ и от $\omega_{y_0}=ka/f$ до $-\omega_{y_0}$, где $2a$ – сторона квадратного отверстия. Подобный транспарант представляет собой фильтр нижних частот.

Представленная на рис.3.3 оптическая система обработки информации методами пространственной фильтрации формирует в выходной плоскости распределение поля

$$u(x,y)=B\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_0(\omega_x,\omega_y)\,H(\omega_x,\omega_y)\exp\left[-i(\omega_x x+\omega_y y)\right]d\omega_x d\omega_y,$$

где B – константа.

Если $H(\omega_x, \omega_y) = 1$, то на выходе, как было показано выше, изображение с точностью до несущественного множителя совпадает с изображением на входе. Такая оптическая система называется идеальной. Реально же всегда существует ограничение по высоким пространственным частотам, что приводит к некоторому размытию изображения.

3.4. Примеры преобразований, реализуемых оптическим процессором

Важным классом задач, успешно решаемых оптическими методами, является распознавание образов. Эти задачи могут решаться путем применения так называемых согласованных фильтров. Пространственный фильтр называется согласованным с входным сигналом $s(x,y)$, если его импульсный отклик имеет вид

$$h(x,y) = s^*(-x,-y).$$

В этом случае выходной сигнал согласно (3.9) равен

$$u(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0,y_0)\, s^*(x_0-x, y_0-y)\, dx_0\, dy_0,$$

т.е. представляет собой функцию корреляции входного сигнала u_0 и функции s. Если на вход оптической системы подать сигнал $u_0(x_0, y_0) = s(x_0, y_0)$, то выходной сигнал будет автокорреляционной функцией входного сигнала и примет вид яркой точки. С физической точки зрения это объясняется тем, что непосредственно за фильтром амплитуда сигнала, равная

$$S(\omega_x, \omega_y) S^*(\omega_x, \omega_y) = |S(\omega_x, \omega_y)|^2,$$

становится действительной, т.е. согласованный фильтр в точности компенсирует фазовую характеристику падающей на него световой волны. По этой причине отфильтрованный сигнал имеет плоский фронт и второй линзой фокусируется в яркую точку. Если $u_0 \neq s$, то выходной сигнал будет размытым.

Задача распознавания образов решается следующим образом. Пусть входной сигнал состоит из набора сигналов s_k:

$$u_0(x_0, y_0) = \sum_k s_k(x_0, y_0).$$

Если необходимо выявить наличие и местоположение некоторого сигнала s_n, достаточно отфильтровать входной сигнал с помощью фильтра, согласованного с s_n. Тогда в соответствующей точке выходной плоскости оптической системы будет наблюдаться яркое пятно света. Если в u_0 сигнал s_n содержится в нескольких местах (например, буква "а" на странице текста), то в каждом соответствующем месте выходной плоскости появится яркий автокорреляционный максимум.

Согласованный фильтр помогает также выделить сигнал на фоне шумов. Пусть входной сигнал равен

$$u_0(x_0, y_0) = s(x_0, y_0) + n(x_0, y_0),$$

где s – известный сигнал; n – аддитивный стационарный шум. В теории линейной фильтрации доказывается, что максимальное отношение сигнал – шум на выходе достигается при использовании фильтра с передаточной функцией

$$H(\omega_x, \omega_y) = \frac{k_н S^*(\omega_x, \omega_y)}{|N(\omega_x, \omega_y)|^2}, \tag{3.10}$$

где $|N(\omega_x, \omega_y)|^2$ – спектральная плотность мощности шума; $k_н$ – константа.

В частном случае белого шума $|N(\omega_x, \omega_y)|^2 = const$, поэтому из (3.10) следует

$$H(\omega_x, \omega_y) = k'_н S^*(\omega_x, \omega_y),$$

т.е. фильтр для оптимального выделения сигнала из белого шума должен быть согласован с этим сигналом.

Методы оптической пространственной фильтрации позволяют осуществлять разнообразные математические преобразования: суммирование и вычитание, дифференцирование и интегрирование и другие более сложные линейные операции. В качестве примера рассмотрим фильтр, позволяющий вычислить двумерный лапласиан от входного сигнала, т.е. получить на выходе Δu_0. Фурье-образы производных равны

$$F\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] = i\omega_x U_0(\omega_x, \omega_y); \quad F\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right] = -\omega_x^2 U_0(\omega_x, \omega_y) \text{ и т.д.}$$

и, следовательно, установив на месте транспаранта 4 (см.рис.3.3) фильтр с передаточной характеристикой

$$H(\omega_x, \omega_y) = -(\omega_x^2 + \omega_y^2),$$

на выходе получим распределение поля, соответствующее $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$.

Фильтр, инверсный данному, можно применить для решения уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y) \qquad (3.11)$$

при условиях

$$u \to 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \to 0 \quad \text{при} \quad x, y \to \pm\infty.$$

В этом случае передаточная характеристика фильтра должна иметь вид

$$H(\omega_x, \omega_y) = -\frac{1}{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \qquad (3.12)$$

поскольку решение (3.11) для фурье-образов равно

$$U(\omega_x, \omega_y) = \frac{F(\omega_x, \omega_y)}{\omega_x^2 + \omega_y^2}.$$

Таким образом, формируя на транспаранте 2 (рис.3.3) распределение поля, соответствующее $f(x,y)$, и установив в качестве транспаранта 4 фильтр с передаточной характеристикой (3.12), на плоскости 6 находим распределение поля, соответствующее искомой функции $u(x,y)$.

Заметим, что дифференцирование входного сигнала позволяет подчеркнуть области резкого изменения интенсивности поля, т.е. выделить контуры объектов и т.п.

Создание фильтров с заданными передаточными характеристиками является наиболее сложной задачей в технике оптической фильтрации. Существуют два основных способа синтеза таких фильтров – оптическая запись фильтров на светочувствительных материалах и цифровой синтез фильтров с помощью ЭВМ. Конкретные методы реализации этих двух способов будут рассмотрены в следующих курсах.

4. ГАУССОВЫ ПУЧКИ

Реальные световые пучки не являются ни плоскими волнами, ни бесконечно тонкими лучами. В данной главе рассмотрены гауссовы пучки, являющиеся хорошей моделью оптических волн, создаваемых приборами квантовой электроники и оптоэлектроники.

4.1. Линзовые волноводы

Рассмотрим бесконечную систему соосных выпуклых линз, имеющих одинаковые фокусные расстояния f (рис.4.1). Будем считать, что расстояния между линзами $L=2f$ (конфокальные линзы). Для удобства анализа разделим каждую линзу на две бесконечно близ-

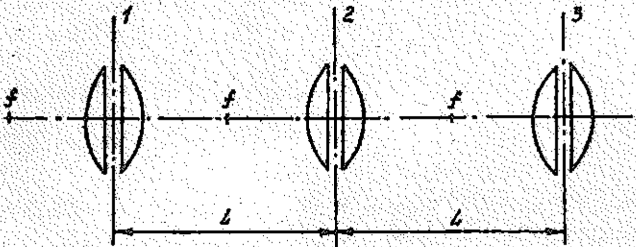

Рис.4.1. Линзовый волновод: 1, 2, 3 – линзы.

кие друг другу половины, между которыми мысленно проведем опорную плоскость. Рассмотрим поле на этих плоскостях. В подобной периодической структуре (период L) поле будет существенно отличаться от поля в средах, инвариантных относительно непрерывных смещений, где зависимость от координаты z имеет вид $e^{i\beta z}$. В периодической структуре должны осуществляться решения типа функций Блоха.

Пусть поле на опорной плоскости линзы 1 (см.рис.4.1) имеет вид $\psi_1(x,y)$. Согласно (3.2) поле непосредственно справа от линзы 1 имеет вид

$$\bar{\psi}_1 = exp\left[-i(k/4f)(a^2-x^2-y^2)\right]\psi_1(x,y), \tag{4.1}$$

где учтено, что фокусное расстояние половины линзы вдвое больше, чем целой линзы. Поле $\bar{\varphi}_2$ непосредственно слева от линзы 2 можно определить с помощью дифракционного интеграла Кирхгофа – Гюйгенса (I.28) в приближении Френеля:

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{i}{2\lambda f} \exp(-i2kf) \int\limits_{\Sigma_1} \bar{\varphi}_1 \exp\left\{-i\frac{k}{4f}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]\right\} dx dy, \qquad (4.2)$$

где Σ_1 – поверхность линзы I.

Поле на опорной плоскости второй линзы φ_2 связано с $\bar{\varphi}_2$ аналогично тому, как φ_1 связано с $\bar{\varphi}_1$. Согласно (4.I) находим

$$\varphi_2(x', y') = \exp\left[-i\left(\frac{k}{4f}\right)(a^2 - x'^2 - y'^2)\right]\bar{\varphi}_2. \qquad (4.3)$$

Ввиду периодичности линзового волновода поле φ_2 должно совпадать с полем φ_1 с точностью до множителя γ. Если апертура линзы велика по сравнению с областью, занятой полем (т.е. $a \to \infty$), и потери в линзах отсутствуют, то величина γ должна предотавлять собой некоторый фазовый множитель $e^{i\alpha}$. Если апертура линзы мала, то $|\gamma| < 1$.

Условие для собственного решения (моды) поля в линзовом волноводе имеет вид

$$\varphi_2 = \gamma \varphi_1. \qquad (4.4)$$

Произвольное поле в линзовом волноводе является суперпозицией бесконечного числа мод, т.е. собственных решений (4.4).

Подставляя (4.I) – (4.3) в (4.4), находим интегральное уравнение для мод конфокального линзового волновода:

$$\varkappa^2 \varphi(x', y') = \frac{1}{2\lambda f} \int \varphi(x,y) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{\lambda f}\right)(xx' + yy')\right] dx dy, \qquad (4.5)$$

где

$$\varkappa^2 = -i\gamma \exp\left[ik\left(2f + \frac{a^2}{2f}\right)\right] -$$

собственное значение.

Считая радиус линзы бесконечно большим и предполагая, что

$$\varphi(x,y) = \varphi(x) g(y),$$

разобьем (4.5) на два уравнения:

$$\varkappa\varphi(x')=\frac{1}{\sqrt{2\lambda f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\exp\left[i\left(\frac{\pi}{\lambda f}\right)xx'\right]dx \qquad (4.6)$$

и

$$\varkappa g(y')=\frac{1}{\sqrt{2\lambda f}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\exp\left[i\left(\frac{\pi}{\lambda f}\right)yy'\right]dy.$$

Решения этих интегральных уравнений, являющиеся модами линзового волновода, могут быть получены с помощью следующего интегрального представления:

$$i^n e^{-\xi'^2/2}H_n(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi\xi'}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)\,d\xi, \qquad (4.7)$$

где

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} -$$

полиномы Эрмита степени n.

Выпишем первые четыре полинома Эрмита:

$$H_0(\xi)=1;\quad H_1(\xi)=2\xi;\quad H_2(\xi)=4\xi^2-12;\quad H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi.$$

Из сравнения (4.7) и (4.6) следует, что решения (4.6) описываются функциями

$$\varphi_n(x)=A_n H_n\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda f}}\,x\right)e^{-\frac{\pi x^2}{2\lambda f}},\quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (4.8)$$

а собственные значения равны

$$\varkappa_n=i^n. \qquad (4.9)$$

Из условия ортонормированности мод:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\delta_{mn},$$

находим

$$A_n=\frac{1}{(2^n n!)^{1/2}(\lambda f)^{1/4}}.$$

Таким образом, моды линзового волновода с большими апертурами линз имеют вид

$$\varphi_{mn}=\frac{1}{(2^{m+n}m!n!\lambda f)^{1/2}}H_m\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda f}}x\right)H_n\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda f}}y\right)\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2\lambda f}\right)(x^2+y^2)\right], \quad (4.10)$$

а собственные значения равны

$$\varkappa^2_{mn}=i^{m+n}.$$

Соотношение (4.7) отражает тот факт, что преобразование Фурье функций $H_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ с точностью до множителя i^n совпадает с самой функцией. Таким образом, каждая линза волновода, осуществляя преобразование Фурье поля типа (4.8), с точностью до фазового множителя не изменяет его вида.

Рассмотрим теперь линзы конечной апертуры. Пусть апертура представляет собой квадрат со стороной $2a$. Интегрирование в (4.6) теперь должно выполняться в пределах от $-a$ до a:

$$\beta\varphi(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi f}}\int_{-a}^{a}\varphi(x)\exp\left[i\left(\frac{\pi}{\lambda f}\right)xx'\right]dx. \quad (4.11)$$

В свою очередь, функция $\varphi(x)$ может быть представлена в виде

$$\beta\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\lambda f}}\int_{-a}^{a}\varphi(x'')\exp\left[i\left(\frac{\pi}{\lambda f}\right)xx''\right]dx''. \quad (4.12)$$

Линза формирует перевернутое изображение, поэтому при подстановке в (4.11) выражения (4.12) в последнем необходимо сделать замену $x\to -x$. Ввиду четности или нечетности собственных функций $\varphi_n(x)$ для них выполняется соотношение

$$\varphi_n(-x)=(-1)^n\varphi_n(x). \quad (4.13)$$

Подставляя (4.12) и (4.13) в (4.11) и выполняя интегрирование по x, получим интегральное уравнение для нахождения собственных функций и собственных значений для линзового волновода с квадратной апертурой:

$$(-1)^n\beta^2\varphi(x')=\int_{-a}^{a}\frac{\sin\frac{\pi a}{\lambda f}(x'-x'')\varphi(x'')\,dx''}{\pi(x'-x'')}. \quad (4.14)$$

Если $a \to \infty$, то $\beta \to 1$ и собственные значения (4.I4) совпадают с (4.9), так как $\varkappa_n = \sqrt{(-1)^n} = i^n$. При конечной апертуре собственные значения (4.I4) зависят от безразмерного параметра, входящего в интегральное уравнение

$$\delta = \frac{\pi a^2}{\lambda f} = \frac{ka^2}{2f}.$$

Величина δ с точностью до коэффициента порядка единицы равна отношению угла, под которым одна апертура видна из центра другой апертуры $\left(\alpha_1 \approx \frac{a}{2f}\right)$, к углу дифракции $\left(\alpha_2 \approx \frac{\lambda}{a}\right)$. Из (I.24) следует, что величина δ характеризует степень справедливости приближения Френеля в задачах дифракции. Уменьшение δ соответствует возрастанию роли дифракционной расходимости пучка и увеличению дифракционных потерь вследствие выхода части поля за размеры апертуры. Поскольку поперечный размер моды увеличивается с ростом n, высшие моды в первую очередь подавляются конечной апертурой линз (или диафрагм).

Численное решение уравнения (4.I4) при больших n и δ приводит к приближенному выражению

$$\beta_n = \frac{1}{1+e^{\pi b}}, \tag{4.I5}$$

где

$$b = \frac{\frac{\pi}{2}n - \delta + \frac{\pi}{4}}{0{,}29 + 2\ln 2 + 0{,}5\ln\delta}. \tag{4.I6}$$

Если номер моды $n \ll \frac{2}{\pi}\delta$, то $\beta_n \approx 1$, т.е. дифракционные потери в линзовом волноводе малы. Однако при $n \gg \frac{2}{\pi}\delta$ имеем $\beta_n \ll 1$. Область перехода от β_n, близких к единице, к очень малым β_n весьма узка и расположена вблизи критического значения

$$n_{кр} = \frac{2}{\pi}\delta.$$

Пусть, например, $\delta = 30$, тогда $n_{кр} = 19$. Согласно (4.I5) и (4.I6) имеем

$$\beta_{19} = 0{,}356, \quad \beta_{25} = 4{,}74\cdot 10^{-6}, \quad \beta_{30} = 1{,}32\cdot 10^{-11}.$$

Таким образом, дифракционные потери в линзовом волноводе резко возрастают, если номер моды $n \geq n_{кр}$. Физической причиной этого является уменьшение доли светового потока, перехватываемого конечной апертурой с ростом n .

Указанный выше характер перехода β_n от единицы к малым значениям в узкой области, положение которой определяется $n_{кр}$, позволяет при $n < n_{кр}$ пользоваться с достаточной степенью точности собственными функциями (4.10) для линзового волновода с бесконечной апертурой, но в отличие от него считать число мод не бесконечным, а ограниченным сверху величиной $n_{кр}$.

4.2. Предельное разрешение

Рассмотрим две конфокальные линзы. В передней фокальной плоскости первой линзы расположим точечный объект

$$f(x^a, y^a) = \delta(x^a)\delta(y^a),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Изображение в задней фокальной плоскости второй линзы согласно (4.14) будет иметь вид

$$f(x') = \frac{\sin \frac{\pi a x'}{\lambda f}}{\pi x'} . \qquad (4.17)$$

Изображения двух близко расположенных точечных объектов называются разрешенными по Рэлею, если максимум поля изображения одного объекта совпадает с первым минимумом изображения второго объекта. Согласно (4.17) эти два объекта будут разрешены по Рэлею, если расстояние между объектами Δx удовлетворяет соотношению

$$\frac{\pi a \Delta x}{\lambda f} \geq \pi,$$

т.е. если

$$\Delta x \geq \frac{\lambda f}{a} , \quad \text{или} \quad \Delta x \geq \frac{\lambda}{\alpha},$$

где $\alpha = a/f$ – угол, под которым луч входит в точку изображения. С увеличением α разрешение улучшается.

4.3. Лазерные резонаторы

Лазерный резонатор, образованный двумя вогнутыми зеркалами, показан на рис.4.2,а. Пусть фокусное расстояние одного зеркала равно f_1, второго – f_2. Каждое вогнутое зеркало можно заменить плоским зеркалом и линзой с фокусным расстоянием $2f_i$ (i = 1,2), так как луч вследствие отражения от плоского зеркала дважды проходит через линзу (см.рис.4.2,б). Если следить за распростране-

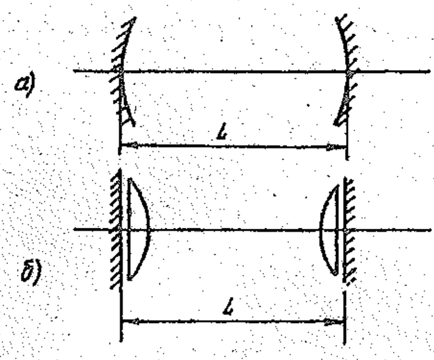

Рис.4.2. Конфокальный лазерный резонатор (а) и его эквивалентная схема (б).

нием выделенного луча света при последовательном отражении от левого и правого зеркал, его траектория будет аналогична траектории луча в линзовом волноводе, у которого фокусные расстояния линз чередуются, а расстояние между линзами равно L (рис.4.3). Однако между волноводом и резонатором имеется существенное различие. В резонаторе поле можно представить в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу волн, интерференция которых приводит к образованию стоячих волн. В отличие от волновода резонатор имеет дискретный частотный спектр мод. Если учитывать это обстоятельство, то описанный выше метод расчета поля в линзовом волноводе может быть использован также для анализа мод лазерного резонатора.

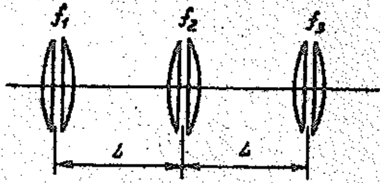

Рис.4.3. Линзовый волновод, эквивалентный лазерному резонатору.

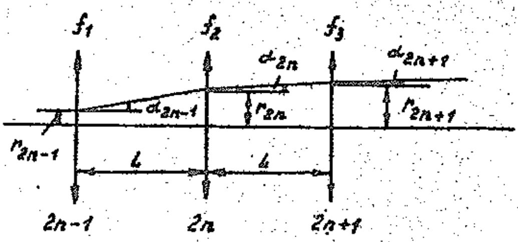

Рис.4.4. Траектория луча в линзовом волноводе, показанном на рис.4.3.

Исследуем вначале вопрос об устойчивости луча в линзовом волноводе, эквивалентном лазерному резонатору (рис.4.3). Траектория луча показана на рис.4.4. Из (2.23) следует, что для параксиального луча

$$\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1}=-\frac{r_{2n}}{f_1};\quad \alpha_{2n+1}-\alpha_{2n}=-\frac{r_{2n+1}}{f_2};$$

$$\alpha_{2n+2}-\alpha_{2n+1}=-\frac{r_{2n+2}}{f_1},$$

где α_i – углы между лучами и осью; r_i – расстояние от оси до лучей на линзах.

Из геометрических соображений следует

$$r_{2n}=r_{2n-1}+\alpha_{2n-1}L;$$

$$r_{2n+1}=r_{2n}+\alpha_{2n}L;$$

$$r_{2n+2}=r_{2n+1}+\alpha_{2n+1}L.$$

Исключая из этих уравнений углы, получим

$$r_{2n+1} + r_{2n-1} = r_{2n}\left(2-\frac{L}{f_1}\right);$$

$$r_{2n+2} + r_{2n} = r_{2n+1}\left(2-\frac{L}{f_2}\right).$$

Отсюда находим уравнения для положения лучей отдельно на четных и нечетных линзах:

$$r_{2n+2} + \left[2-\left(2-\frac{L}{f_1}\right)\left(2-\frac{L}{f_2}\right)\right] r_{2n} + r_{2n-2} = 0; \tag{4.18}$$

$$r_{2n+1} + \left[2-\left(2-\frac{L}{f_1}\right)\left(2-\frac{L}{f_2}\right)\right] r_{2n-1} + r_{2n-3} = 0.$$

Уравнения для четных и нечетных линз независимы, поэтому их можно решать отдельно.

Подставим в (4.18) частное решение в виде

$$r_m = A e^{im\theta}.$$

Амплитуда A отлична от нуля, если выполняется соотношение

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{2}\left[2-\left(2-\frac{L}{f_1}\right)\left(2-\frac{L}{f_2}\right)\right]. \tag{4.19}$$

Вводя обозначения

$$x = 1-\frac{L}{2f_1};$$

$$y = 1-\frac{L}{2f_2},$$

запишем (4.19) в виде

$$\cos 2\theta = 2xy - 1. \tag{4.20}$$

Для того, чтобы лучи не уходили на бесконечность, необходимо, чтобы θ было действительным числом. Тогда

$$-1 \le \cos 2\theta \le 1.$$

Границы допустимых значений x и y могут быть получены из (4.20) подстановками $\cos 2\theta = \pm 1$, что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 1, \\ xy = 0. \end{cases}$$

На рис.4.5 показано графическое решение этой системы: заштрихованы области допустимых значений x и y, соответствующих устойчивой траектории луча в резонаторе (волноводе). Некоторые характерные значения фокусных расстояний приведены ниже.

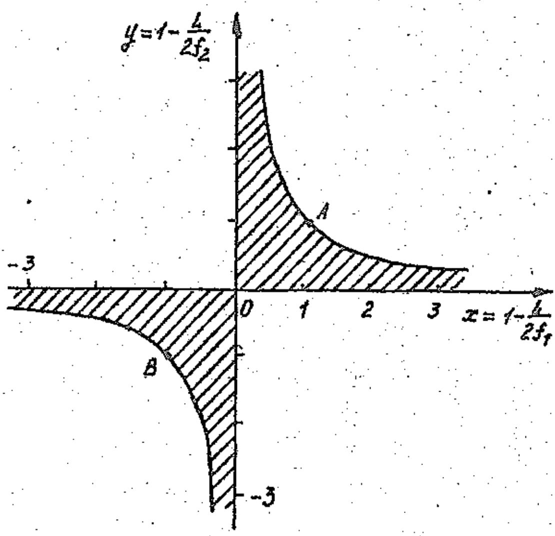

Рис.4.5. Области устойчивости (заштрихованы) лазерного резонатора и линзового волновода.

Точка $A(1,1)$ соответствует резонатору с плоскими зеркалами ($f_1=f_2=\infty$). Если хотя бы одно из зеркал изготовить слегка вогнутым (выпуклым), то резонатор станет устойчивым (неустойчивым). Аналогичное заключение можно сделать относительно концентрического резонатора с $f_1=f_2=\frac{L}{4}$ (точка B). Если одно из зеркал является плоским ($f_2\to\infty$), то резонатор, как видно из рис.4.5, будет устойчивым при всех $f_1>\frac{L}{2}$. Если зеркала имеют одинаковое фокусное расстояние f, то резонатор устойчив при $f>\frac{L}{4}$. Конфокальный резонатор (точка O, $f_1=f_2=\frac{L}{2}$) лежит на границе устойчивости. При одновременном увеличении f_1 и уменьшении f_2 (или наоборот) колебания в конфокальном резонаторе становятся неустойчивыми.

Если активная среда лазера обладает малым коэффициентом усиления, необходимо применять устойчивые резонаторы, т.е. выбрать соотношения f_1, f_2 и L, соответствующие заштрихованной зоне. При достаточно большом коэффициенте усиления выбирают резонаторы, соответствующие границе области устойчивости, а для некоторых специальных применений используются неустойчивые резонаторы.

4.4. Параметры гауссовых пучков

Рассмотрим распространение пучка, поле которого в плоскости $z=0$ задано в виде

$$\psi(x,y,0)=A\exp\left[-(x^2+y^2)/w_0^2\right]. \tag{4.2}$$

Параметр w_0 характеризует расстояние от оси z до точек, в которых величина поля убывает в e раз. Зависимость поля от z можно найти с помощью дифракционного интеграла (I.28):

$$\psi(x',y',z')=\frac{iA}{\lambda z}e^{-ikz}\,\times$$

$$\times\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}-i\frac{k}{2z}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]\right\}dx\,dy. \tag{4.2}$$

Интеграл по x равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2} - i\frac{k}{2z}(x'-x)^2\right]dx = \sqrt{\pi}\,\frac{w_0\sqrt{2z}}{\sqrt{2z+ikw_0^2}}\times$$

$$\times exp\left[-i\frac{2kz\,x'^2}{4z^2+(kw_0^2)^2}\right]exp\left[-\frac{(kw_0x')^2}{4z^2+(kw_0^2)^2}\right].$$

Интегрируя также по y и подставляя полученные выражения в (4.22), находим поле на расстоянии z :

$$\psi(x',y',z') = \frac{2i\pi w_0^2}{\lambda(2z + kw_0^2)}Ae^{-ikz}exp\left[-i\frac{2kzr'^2}{4z^2+(kw_0^2)^2}\right]\times$$

$$\times exp\left[-\frac{(kw_0r')^2}{4z^2+(kw_0^2)^2}\right], \tag{4.23}$$

где

$$r'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Первый экспоненциальный множитель характеризует фазу волны на оси ($r'=0$), второй – кривизну фазового фронта, третий – распределение поля в поперечном направлении.

Квадрат полуширины пучка увеличивается с ростом z (пучок "расплывается" в поперечном направлении):

$$w^2(z) = w_0^2\left[1+\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2\right] = w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]. \tag{4.24}$$

В дальней зоне угол расходимости пучка равен

$$\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

Заметим, что гауссов пучок имеет минимальную расходимость по отношению к пучку с любой другой формой поперечного распределения интенсивности.

Фазовый сдвиг относительно точки $z=0$ согласно (4.23) равен

$$kd = \frac{kzr'^2}{4z^2+(kw_0^2)^2}. \tag{4.25}$$

В параксиальном приближении из треугольника на рис.4.6

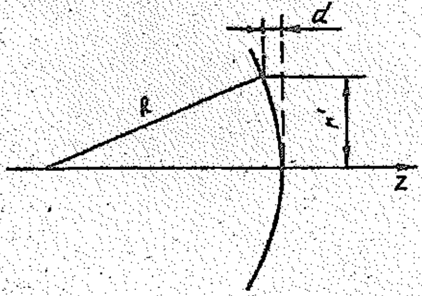

Рис.4.6. Фазовый фронт гауссова пучка.
Фазовый сдвиг равен kd.

находим

$$r'^2 + R^2 = (R+d)^2,$$

что при $d \ll R$ приводит к

$$R = \frac{r'^2}{2d}.$$

Сравнивая это выражение с (4.25), находим радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка:

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]. \qquad (4.26)$$

При $z = 0$ имеем $w(z) = w_0$ и $R(z) = \infty$. Величина w_0 определяет минимальный радиус гауссова пучка и называется радиусом перетяжки. С помощью (4.24) и (4.26) распределение поля (4.23) можно записать в виде

$$\psi(x,y,z) = \frac{w_0 A}{w(z)} \exp\left\{-i\left[kz + \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} - \mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)\right]\right\} \exp\left\{-\left[\frac{r}{w(z)}\right]^2\right\}. \qquad (4.27)$$

Такой пучок называется гауссовым пучком. Вид гауссова пучка показан на рис.4.7.

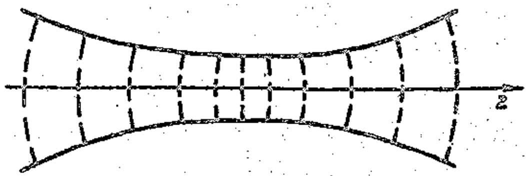

Рис.4.7. Вид гауссова пучка: сплошная линия показывает ширину пучка (на уровне e^{-1} от амплитуды на оси); пунктирные линии – фазовые фронты.

Введем комплексные параметры пучка q и P :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\,\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}; \tag{4.28}$$

$$P = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) + i\ln\frac{w_0}{w(z)}.$$

С помощью (4.24) и (4.26) можно представить q в иной форме:

$$q = z + i\,\frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \tag{4.29}$$

где z отсчитывается от наиболее узкого места пучка.

Поле гауссова пучка (4.27) можно записать через P и q в весьма простом виде:

$$\psi(x,y,z) = A\exp\left[-i\left(P + \frac{\pi}{\lambda q}r^2\right)\right]e^{-ikz}. \tag{4.30}$$

Рассмотрим теперь гауссовы пучки как решение волнового уравнения

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0. \tag{4.31}$$

Ищем решение в виде волны, мало отличающейся от плоской волны:

$$\psi(x,y,z) = u(x,y,z)\,e^{-ikz}, \tag{4.32}$$

т.е. предполагаем, что функция u мало изменяется вдоль z на длине волны λ. Подставляя (4.32) в (4.31) и пренебрегая членом, содержащим $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, находим приближенное уравнение для u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{4.33}$$

называемое в теории диффузии параболическим уравнением. Легко убедиться в том, что гауссов пучок (4.30) является решением (4.33).

Найдем теперь решение (4.33) в виде мод более высокого порядка. С этой целью представим $u(x,y,z)$ в следующем виде (воспользуемся методом Фурье):

$$u(x,y,z) = f\left(\frac{x}{w}\right) g\left(\frac{y}{w}\right) \exp\left\{-i\left[P + \frac{\pi}{\lambda q} r^2 + \Phi(z)\right]\right\},$$

где w, P и q являются функциями z, и это выражение подставим в (4.33).

Можно показать, что

$$f = H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w}\right); \quad g = H_n\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w}\right),$$

где $H_m(\xi)$ – полином Эрмита, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d^2 H_m}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH_m}{d\xi} + 2mH_m = 0.$$

Для $\Phi(z)$ из (4.33) следует уравнение

$$kw^2\frac{d\Phi}{dz} = -2(m+n),$$

решение которого с учетом (4.24) при условии $\Phi(0) = 0$ имеет вид

$$\Phi = -(m+n)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right).$$

Таким образом, приближенное решение волнового уравнения имеет вид

$$\psi_{mn}(x,y,z)=A\frac{w_0}{w}H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right)\exp\left\{-i\left[kz-(m+n+1)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)+\frac{\pi r^2}{\lambda R}\right]\right\}\exp\left[-\left(\frac{r}{w}\right)^2\right]. \qquad (4.34)$$

Параметр полуширины w и радиус кривизны R одинаковы для всех мод пучка Эрмита – Гаусса, поэтому преобразование всех мод при их распространении можно рассматривать независимо от m и n. Таким образом, достаточно изучить распространение моды низшего порядка ψ_{00}. Справедливость решения (4.34) ограничена условием: член содержащий сомножителем выражение $(m+n+1)$, должен быть много меньше величины kz. Моды Эрмита – Гаусса образуют полную систему ортогональных функций, поэтому поле произвольной волны можно разложить по модам Эрмита – Гаусса.

4.5. Преобразование гауссовых пучков

Комплексный параметр гауссова пучка q согласно (4.28) содержит обе характеристики пучка: R и $w(z)$, которые могут быть однозначно найдены из действительной и мнимой частей $1/q$. При распространении гауссова пучка в свободном пространстве от точки z_1 до точки z_2 параметр q в соответствии с (4.29) изменяется следующим образом:

$$q_2=q_1+(z_2-z_1)=q_1+d. \qquad (4.35)$$

Пусть теперь гауссов пучок проходит через идеальную тонкую линзу. При этом ширина пучка w не изменяется, а фаза согласно (3.2) изменяется на величину

$$e^{i\gamma}=e^{i\left(\frac{\pi r^2}{\lambda f}\right)}. \qquad (4.36)$$

Произведение (4.27) на (4.36) снова дает гауссов пучок с иным радиусом кривизны:

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_2}-\frac{1}{f},$$

что вместе с (4.28) ввиду $w_1 = w_2$ приводит к соотношению

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{f}, \qquad \text{или} \qquad q_3 = \frac{q_2}{-\frac{1}{f} q_2 + 1}. \tag{4.37}$$

Покажем, что преобразование гауссова пучка в каждом случае можно выразить через матрицу

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

причем параметр пучка q определяется через ее элементы следующим образом:

$$q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}. \tag{4.38}$$

Если

$$q_m = \frac{A_i q_i + B_i}{C_i q_i + D_i} \qquad \text{и} \qquad q_n = \frac{A_m q_m + B_m}{C_m q_m + D_m},$$

то

$$q_n = \frac{A_n q_i + B_n}{C_n q_i + D_n},$$

причем

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Матрица для распространения луча в свободном пространстве на расстояние d согласно (4.35) равна

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Матрица преобразования, вносимого линзой, в соответствии с (4.37) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.41)$$

Подставляя (4.35) в (4.37) и выражая q_3 через q_1, докажите самостоятельно справедливость соотношения (4.39).

Таким образом, матрица преобразования для гауссовых пучков может быть найдена при рассмотрении лучей в приближении геометрической оптики.

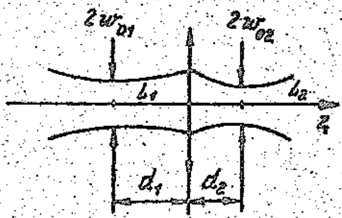

Рис.4.8. Преобразование гауссова пучка линзой.

Рассмотрим согласование гауссовых пучков с помощью линзы (см.рис.4.8). Пусть радиус перетяжки падающего гауссова пучка равняется $2w_{01}$. Необходимо найти положение линзы с фокусным расстоянием f такое, чтобы радиус перетяжки выходящего гауссова пучка равнялся $2w_{02}$, т.е. нужно найти отмеченные на рис.4.8 расстояния d_1 и d_2. Комплексный параметр пучка в точках L_1 и L_2 находим из (4.29), полагая $z = 0$, так как эти точки соответствуют наиболее узким местам пучка:

$$q_{10} = i\frac{\pi}{\lambda} w_{01}^2 = ib_1; \qquad q_{20} = i\frac{\pi}{\lambda} w_{02}^2 = ib_2. \qquad (4.42)$$

Матрица преобразования Q от точки L_1 к точке L_2 в соответствии с (4.39) – (4.41) равна

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{d_2}{f} & d_1+d_2-\frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \qquad (4.43)$$

Согласно (4.38)

$$q_{20} = \frac{Aq_{10}+B}{Cq_{10}+D}.$$

Подставляя сюда (4.42) и отделяя действительную и мнимую части, находим

$$b_1 b_2 = -\frac{B}{C};$$

$$b_1 A - b_2 D = 0.$$

С учетом (4.43) можно найти решения этой системы:

$$d_1 = f \pm \frac{w_{01}}{w_{02}} \sqrt{f^2 - f_0^2};$$
$$d_2 = f \pm \frac{w_{02}}{w_{01}} \sqrt{f^2 - f_0^2}, \qquad (4.44)$$

где

$$f_0 = \frac{\pi}{\lambda} w_{01} w_{02}.$$

Фокусное расстояние линзы должно удовлетворять условию $f > f_0$, других ограничений на f нет. Знаки в правых частях (4.44) необходимо выбирать одинаковыми (либо оба положительными, либо оба отрицательными), т.е. условие согласования мод можно удовлетворить двумя различными способами.

Фокусировку гауссова пучка можно исследовать с помощью (4.23), если вместо (4.21) взять сходящуюся волну

$$\psi(x, y, 0) = A \exp\left[-\frac{r^2}{w_0^2} + i\,\frac{\pi r^2}{\lambda f}\right], \qquad (4.45)$$

которая может быть получена из гауссова пучка, пропущенного через линзу с фокусным расстоянием f. Формально (4.45) равно произведению (4.21) на (4.36). Решение в этом случае можно найти из (4.23), если сделать замену

$$\frac{1}{w_0^2} \to \frac{1}{w_0^2}\left(1 - i\,\frac{\pi w_0^2}{\lambda f}\right). \qquad (4.46)$$

Комплексная амплитуда поля на оси ($r = 0$) в соответствии с (4.23) и (4.46) равна

$$A(z)=\frac{ikw_0^2A}{2z-i\frac{kw_0^2z}{f}+ikw_0^2}=\frac{A}{\sqrt{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2+\frac{4z^2}{k^2w_0^4}}}e^{i\alpha},$$

где α – дополнительный сдвиг фазы.

Амплитуда волны достигает максимального значения в точке

$$z^*=\frac{f}{1+\frac{4f^2}{k^2w_0^4}},\tag{4.47}$$

т.е. раньше точки геометрического фокуса $z=f$. Геометрическая сходимость пучка (характерная длина f) конкурирует с дифракционной расходимостью, характерная длина для которой равна $\frac{kw_0^2}{2}$. Отношение этих длин

$$\delta=\frac{kw_0^2}{2f}\tag{4.48}$$

позволяет судить о преобладании того или иного из этих процессов. С учетом (4.48) запишем (4.47) в виде

$$z^*=\frac{f}{1+\frac{1}{\delta^2}}.$$

Максимальное значение амплитуды на оси пучка равно

$$A_{max}=A\sqrt{1+\delta^2}.$$

При $\delta\gg1$, т.е. $f\ll\frac{kw_0^2}{2}$,

$$A_{max}\approx\frac{kw_0^2}{2f}A.$$

Плотность потока мощности в фокальном пятне пропорциональна величине $(1+\delta^2)$.

4.6. Собственные частоты лазерного резонатора

Если радиусы кривизны зеркал резонатора совпадают с радиусами кривизны гауссового или эрмит-гауссова пучка, поле при от-

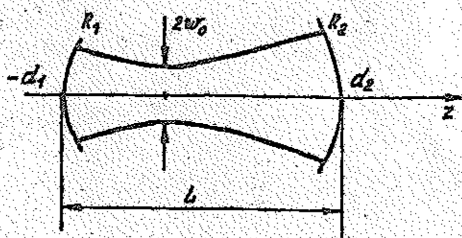

Рис.4.9. Лазерный резонатор. Кривизна зеркал совпадает с кривизной фазового фронта эрмит-гауссова пучка.

ражении перейдет в само себя, т.е. будет оформирована мода резонатора (см.рис.4.9). Набег фазы эрмит-гауссова пучка вдоль оси ($r = 0$) для одного прохода волны от I-го до 2-го зеркала на расстояние L согласно (4.34) равен

$$\Delta\varphi = kL - (m+n+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda d_1}{\pi w_0^2} + \operatorname{arctg}\frac{\lambda d_2}{\pi w_0^2}\right). \qquad (4.49)$$

Условие образования стоячей волны в резонаторе имеет вид

$$\Delta\varphi = p\pi, \quad \text{где} \quad p = 1, 2, \ldots \qquad (4.50)$$

В соответствии с (4.26) имеем

$$R_1 = d_1\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda d_1}\right)^2\right]; \qquad R_2 = d_2\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda d_2}\right)^2\right].$$

Исключая w_0, получим

$$\frac{R_1 - d_1}{R_2 - d_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

что вместе с $d_1 + d_2 = L$ позволяет найти соотношения

$$d_1 = \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}; \qquad d_2 = \frac{L(R_1 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \qquad (4.51)$$

и вычислить полуширину пучка в наиболее узком месте:

$$w_0^4=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2(R_1-d_1)d_1=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{(R_1+R_2-2L)^2}. \qquad (4.52)$$

Подставляя (4.5I) и (4.52) в (4.49) и используя теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg}\varphi_1+\operatorname{arctg}\varphi_2=\arccos\left(\frac{1-\varphi_1\varphi_2}{\sqrt{1+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_1^2\varphi_2^2}}\right),$$

которая в данном случае приводит к выражению

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\pi}\frac{d_1}{w_0^2}\right)+\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\pi}\frac{d_2}{w_0^2}=\arccos\sqrt{\left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right)},$$

запишем условие резонанса (4.50) с учетом (4.49) для частоты ($\nu=c/\lambda$):

$$\nu_{mnp}=\frac{c}{2L}\left[p+\frac{m+n+1}{\pi}\arccos\sqrt{\left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right)}\right].$$

Число p равно числу полуволн на расстоянии L между зеркалами, числа m и n равны числу нулей поля соответственно вдоль осей x и y. В частном случае конфокального резонатора ($R_1=R_2=L$) выражение для собственных частот упрощается:

$$\nu_{mnp}=\frac{c}{2L}\left[p+\frac{1}{2}(m+n+1)\right].$$

При $m=n=0$ получаем основную моду с частотой ν_{00p}, которой соответствует гауссов пучок. При больших числах p (например, в резонаторах газовых лазеров $p\approx 10^6$) поле моды мало отличается от поперечной (плоской) волны, и моду обозначают TEM_{np}. Поскольку размеры пучка и дифракционные потери на зеркалах резко увеличиваются с ростом m и n, реально в лазерных резонаторах возбуждается малое число мод, соответствующих нескольким первым номерам m и n. Распределение поля мод TEM_{mnp} на квадратных зеркалах резонатора показано на рис.4.10.

Ширина резонансной линии обратно пропорциональна добротности резонатора Q, определяемой формулой

$$Q=\frac{\omega W}{P}, \qquad (4.53)$$

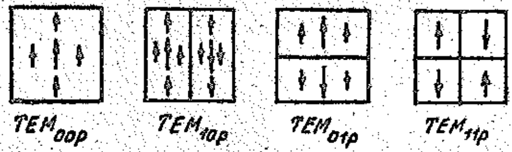

Рис.4.10. Распределение поля мод TEM_{mnp} на квадратных зеркалах лазерного резонатора.

где W – запасенная в моде резонатора энергия; ω – частота колебаний; P – мощность потерь в резонаторе.

Если зеркала резонатора имеют коэффициенты отражения r, то волна, идущая, например, слева направо и имеющая энергию $\frac{W}{2}$, теряет на зеркале энергию $\frac{W}{2}(1-r)$ за время $\tau = \frac{L}{c}$. Мощность потерь обеих волн, бегущих навстречу друг другу, равна

$$P = \frac{cW(1-r)}{L}.$$

Подставляя это значение в (4.53), находим добротность открытого резонатора:

$$Q = \frac{\omega L}{c(1-r)} = \frac{2\pi L}{\lambda(1-r)}.$$

Например, при $L = 10$ см, $\lambda = 1$ мкм и $r = 0{,}95$ находим $Q \approx 10^7$. Дифракционные потери, шероховатость поверхности зеркал и т.п. приводят к уменьшению добротности резонатора.

5. ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Действие электрического поля на вещество приводит к изменению его диэлектрических свойств. Это следствие нелинейной зависимости поляризации вещества от напряженности электрического поля. При этом с точки зрения распространения электромагнитной волны можно рассмотреть два случая: 1) напряженность электрического поля в волне велика настолько, что она сама вызывает изменение диэлектрической проницаемости(это так называемое самовоздействие электромагнитных волн характерно для распространения световых лазерных пучков большой интенсивности, оно будет рассмотрено позже); 2) напряженность поля электромагнитной волны невелика, но к веществу приложено электрическое поле большой напряженности, причем частота этого поля мала по сравнению с частотой электромагнитной (световой) волны (именно этот случай рассматривается в данной главе).

Дальнейшее рассмотрение удобно вести для тензора η_{ij}, обратного тензору диэлектрической проницаемости ε_{ij}. Изменение тензора η_{ij} при наличии поля $\vec{E}$ можно представить в виде

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk} E_k + K_{ijkl} E_k E_l + \ldots , \qquad (5.1)$$

где $\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij} - \eta_{ij}^{(0)}$; $\eta_{ij}^{(0)}$ – невозмущенный тензор; E_k – компонента низкочастотного электрического поля напряженностью $\vec{E}$. (Когда поляризуемость связана с электронной компонентой вещества, частота низкочастотного электрического поля может достигать 10^{10} Гц и даже ИК-диапазона).

Соотношение (5.1) дает наиболее общую зависимость изменения тензора второго ранга η_{ij} под действием вектора $\vec{E}$ в виде разложения по степеням электрического поля. Первое слагаемое описывает линейное по напряженности электрического поля изменение диэлектрических свойств вещества (линейный электрооптический эффект, или эффект Поккельса). Еще раз подчеркнем, что и линейный электрооптический эффект является следствием нелинейной поляризации вещества под действием электрического поля достаточно большой напряженности.

Тензор r_{ijk} есть тензор третьего ранга, он называется тензором электрооптических коэффициентов. Если $r_{ijk} \neq 0$ ($i,j,k = 1,2,3$), то первое слагаемое в (5.1) при не слишком больших $\vec{E}$ является преобладающим. Если $r_{ijk} \equiv 0$, то изменение η_{ij} определяется квадратичным членом $K_{ijkl} E_k E_l$ (квадратичный электрооптический эффект, или эффект Керра).

В отличие от линейного электрооптического эффекта, которым обладают только кристаллы определенной симметрии, квадратичный электрооптический эффект в той или иной степени проявляется для любого вещества, в том числе и оптически изотропного в электрических полях достаточно большой напряженности. Для изотропных тел $\Delta\eta_{ij} = K E_i E_j$. Наибольшей из известных величин K обладает нитробензол, тем не менее ячейки Керра требуют для управления полей свыше 10^4 В при апертуре в несколько миллиметров. По этой причине в оптоэлектронике, как правило, применяется линейный электрооптический эффект, в котором требуется напряженность поля на один – два порядка ниже, чем для эффекта Керра.

5.I. Эффект Поккельса

В данном параграфе мы рассмотрим феноменологическую теорию электрооптического эффекта, т.е. не будем вскрывать связь тензора r_{ijk} с микроскопическим устройством кристалла.

В соответствии с (5.I) для линейного электрооптического эффекта

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^{(0)} + r_{ijk} E_k . \qquad (5.2)$$

Рассмотрим подробнее свойства тензора электрооптических коэффициентов r_{ijk}. Этот тензор третьего ранга симметричен по первой паре индексов:

$$r_{ijk} = r_{jik} , \qquad i,j,k = 1,2,3,$$

так как симметричен тензор диэлектрической непроницаемости:

$$\eta_{ij} = \eta_{ji} , \quad i,j = 1,2,3.$$

Поскольку здесь содержится 9 соотношений, то из 27 компонент тензора r_{ijk} независимы не более I8 компонент. Выберем за независимые компоненты r_{ijk} те, у которых $i \le j$.

Можно показать, что линейный электрооптический эффект может существовать только в кристаллах, не имеющих центра симметрии. Воспользуемся принципом Кюри, утверждающим, что все элементы симметрии точечной группы кристалла являются в то же время элементами симметрии любого его свойства.

При ортогональном преобразовании кристаллофизической системы координат, как и любой другой декартовой системы координат x_1, x_2, x_3, компоненты тензора третьего ранга преобразуются по следующему правилу:

$$r'_{ijk} = c_{im} c_{jn} c_{kl} r_{mnl} , \qquad (5.3)$$

где величина

$$c_{ik} = \vec{e}_i{}' \vec{e}_k, \qquad i,k = 1,2,3 \tag{5.4}$$

является косинусом угла между соответствующими ортами старого $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и нового $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ базисов. Совокупность величин c_{ik} образует матрицу ортогонального преобразования (c_{ik}).

Рассмотрим кристалл, обладающий центром симметрии. При преобразовании инверсии ($x_1' = -x_1$; $x_2' = -x_2$; $x_3' = -x_3$) решетка такого кристалла переходит сама в себя, поэтому в соответствии с принципом Кюри все физические свойства центросимметричного кристалла не изменяются. В частности

$$r'_{ijk} = r_{ijk}. \tag{5.5}$$

С другой стороны, матрица такого ортогонального преобразования имеет, очевидно, вид

$$c_{mn} = -\delta_{mn},$$

поэтому в соответствии с (5.3)

$$r'_{ijk} = -r_{ijk}. \tag{5.6}$$

Сравнивая (5.5) и (5.6), находим, что для центросимметричного кристалла

$$r_{ijk} \equiv 0,$$

т.е. линейный оптический эффект в таких кристаллах отсутствует.

Симметрия тензоров η_{ij} и r_{ijk} по индексам i и j позволяет упростить запись соотношения (5.2). Перечислим независимые компоненты η_{ij} в следующем порядке:

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ & \eta_{22} & \eta_{23} \\ & & \eta_{33} \end{pmatrix}$$

и поставим этим индексам в соответствие числа от I до 6:

II $\to$ I, 22 $\to$ 2, 33 $\to$ 3, 23 $\to$ 4, I3 $\to$ 5, I2 $\to$ 6.

Тогда независимые компоненты η_{ij} можно переименовать в порядке η_α ($\alpha = 1,2,...,6$). Аналогично независимые компоненты r_{ijk} можно переименовать в $r_{\alpha k}$ ($\alpha = 1,2,...,6$; $k = 1,2,3$). Тогда вместо (5.2) запишем

$$\Delta\eta_\alpha = r_{\alpha k} E_k ,$$

что в матричной форме можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} . \qquad (5.7)$$

Таким образом, тензор $\Delta\eta_{ij}$ мы представили в виде вектора с 6 компонентами, а тензор r_{ijk} – в виде матрицы 3 х 6.

По найденному изменению тензора диэлектрической проницаемости можно найти изменение компонент тензора диэлектрической проницаемости (считаем, что $|\Delta\eta_{ij}| \ll \eta_{ij}$):

$$\Delta\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{im}\,\Delta\eta_{mn}\,\varepsilon_{nj}, \qquad (5.8)$$

что совместно с (5.2) полностью определяет оптические свойства кристалла. Под действием электрического поля эллипсоид тензора диэлектрической проницаемости кристалла согласно (5.7) меняет значения главных диэлектрических проницаемостей и направления главных диэлектрических осей. Таким образом, кубический кристалл, изотропный в отношении оптических свойств, превращается в одноосный, одноосный становится двухосным, а в двухосном изменяются соответствующие значения показателей преломления.

Линейный электрооптический эффект позволяет путем варьирования напряженности электрического поля, приложенного к кристаллу, изменить разность фаз волн с главными направлениями поляризации, т.е. такой эффект позволяет осуществлять фазовую модуляцию электромагнитной волны, а при использовании поляризаторов и анализаторов – амплитудную модуляцию. Поскольку изменения компонент тензора диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$ в случае линейного электрооптического эффекта линейно связаны с напряженностью электрического поля, нелинейные искажения при амплитудной и фазовой модуляции для таких кристаллов наименьшие.

В случае квадратичного электрооптического эффекта (эффекта Керра) нелинейные искажения принципиально связаны с процессом модуляции. Фазовая модуляция при этом эффекте приводит к повороту плоскости поляризации электромагнитной волны, выходящей из кристалла. Таким образом, применяя поляризатор и анализатор, можно за счет электрооптического эффекта осуществлять и амплитудную модуляцию электромагнитной волны.

5.2. Линейный электрооптический эффект в ниобате лития

Центр симметрии отсутствует у 21 точечной группы симметрии кристаллов, для которых, следовательно, не запрещен линейный электрооптический эффект. Однако в классе 432 другие элементы симметрии приводят к условию $r_{ijk} = 0$. Таким образом, свойства симметрии не запрещают существования эффекта Поккельса в 20 классах кристаллов. Заметим, что для этих же классов кристаллов может существовать и пьезоэлектрический эффект. Симметрия тензора пьезоэлектрических коэффициентов совпадает с симметрией тензора электрооптических коэффициентов.

Чем выше симметрия кристалла, тем большее число компонент тензора r_{ijk} обращается в нуль. Так, для кристаллического класса $\bar{4}3m$, к которому принадлежит в частности арсенид галлия $GaAs$, лишь одна независимая компонента r_{41} отлична от нуля: $r_{41} \neq 0$.

Рассмотрим подробно тензор электрооптических коэффициентов для одного из наиболее распространенных кристаллов оптоэлектроники – ниобата лития $LiNbO_3$. Он состоит из слоев ионов кислорода, расположенных в плотнейшей гексагональной упаковке (ПГУ), а образуемые ионами кислорода октаэдрические пустоты на одну треть заполнены ионами лития, на одну треть – ионами ниобия и на одну треть – вакантны. Ниобат лития принадлежит к ромбоэдрической (или тригональной) сингонии, классу $3m$, т.е. имеет ось симметрии третьего порядка (она является оптической осью кристалла) и плоскость симметрии, параллельную оси симметрии. Ниобат лития является сильным пьезоэлектриком. Кристаллофизические оси x_1, x_2, x_3 для данного класса выбираются следующим образом: ось x_3 направляют вдоль оптической оси (оси симметрии), ось x_1 – перпендикулярно плоскости симметрии, ось x_2 располагают в плоскости симметрии, ортогонально к x_1 и x_3 .

Операция зеркального отражения в плоскости m сводится к изменению знака координаты x_1 :

$$x_1' = -x_1; \quad x_2' = x_2; \quad x_3' = x_3, \quad c_{11} = -1, \text{ остальные } \quad c_{ik} = \delta_{ik}.$$

Согласно (5.4) любая компонента r_{ijk} , содержащая индекс I нечетное число раз, меняет при таком преобразовании знак на противоположный. С другой стороны, согласно принципу Кюри операция зеркального отражения, входящая в группу симметрии данного класса, не может изменять компонент тензора электрооптических коэффициентов, следовательно, все компоненты, содержащие индекс I нечетное число раз, равны нулю. Для независимых компонент это выглядит следующим образом:

$$r_{111} = r_{122} = r_{123} = r_{133} = r_{132} = r_{221} = r_{231} = r_{331} = 0. \qquad (5.9)$$

Таким образом, число ненулевых независимых компонент не превышает I0.

Далее , компоненты r_{ijk} ниобата лития должны быть инвариантны относительно поворота системы координат вокруг оси x_3 на углы I20 и 240 $^\circ$, поскольку ось x_3 является осью третьего порядка. Вычисляя направляющие косинусы (5.4), находим матрицу поворота на I20 $^\circ$:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В новой системе координат

$$r_{233}' = c_{21}c_{33}c_{33}r_{133} + c_{22}c_{33}c_{33}r_{233} = -\frac{1}{2}r_{233},$$

так как из (5.9) следует, что $r_{133} = 0$. Но в силу принципа Кюри $r'_{233} = r_{233}$. Из этих двух соотношений находим $r_{233} = 0$.

Аналогично

$$r'_{332} = C_{33} C_{33} C_{21} r_{331} + C_{33} C_{33} C_{22} r_{332} = -\frac{1}{2} r_{332},$$

но $r'_{332} = r_{332}$ при повороте на 120°, поэтому $r_{332} = 0$.

Таким образом, не более 8 независимых компонент r_{ijk} для ниобата лития отличны от нуля.

Далее, при повороте на 120°

$$r'_{112} = C_{11} C_{11} C_{22} r_{112} + C_{11} C_{12} C_{21} r_{121} + C_{12} C_{11} C_{21} r_{211} +$$

$$+ C_{12} C_{12} C_{22} r_{222} = -\frac{1}{8} r_{112} + \frac{3}{8} r_{121} + \frac{3}{8} r_{211} - \frac{3}{8} r_{222}.$$

Отсюда, учитывая, что ввиду симметрии по первым двум индексам $r_{211} = r_{121}$ и что при таком преобразовании $r'_{112} = r_{112}$, находим

$$r_{112} = \frac{2}{3} r_{121} - \frac{1}{3} r_{222}. \tag{5.10}$$

Аналогично вычисляем

$$r'_{121} = C_{11} C_{22} C_{11} r_{121} + C_{11} C_{21} C_{12} r_{112} + C_{12} C_{21} C_{11} r_{211} +$$

$$+ C_{12} C_{22} C_{12} r_{222} = -\frac{1}{8} r_{121} + \frac{3}{8} r_{112} + \frac{3}{8} r_{211} - \frac{3}{8} r_{222}.$$

Учитывая, что $r_{211} = r_{121}$ и $r'_{121} = r_{121}$, получим

$$r'_{121} = \frac{1}{2} r_{112} - \frac{1}{2} r_{222}. \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) следует

$$r_{112} = r_{121} = - r_{222}. \tag{5.12}$$

Теперь найдем

$$r'_{113} = C_{11} C_{11} C_{33} r_{113} + C_{12} C_{12} C_{33} r_{223} = \frac{1}{4} r_{113} + \frac{3}{4} r_{223}.$$

С учетом $r'_{113} = r_{113}$ получаем

$$r_{113} = r_{223}. \qquad (5.13)$$

Аналогично

$$r'_{232} = \frac{1}{4} r_{232} + \frac{3}{4} r_{131};$$

$$r_{232} = r_{131}. \qquad (5.14)$$

Из (5.12) - (5.14) находим, что у кристалла $3m$ имеется всего 4 независимых компоненты тензора r_{ijk}. В качестве них выберем

$$r_{113} \equiv r_{13}; \quad r_{222} \equiv r_{22}; \quad r_{131} \equiv r_{51}; \quad r_{333} \equiv r_{33}.$$

Тогда (5.12) - (5.14) запишем в виде

$$r_{12} = -r_{22}; \quad r_{61} = -r_{22}; \quad r_{23} = r_{13}; \quad r_{42} = r_{51}.$$

Таким образом, матрица, соответствующая тензору электрооптических коэффициентов кристалла, принадлежащего классу $3m$, и в частности, ниобата лития, имеет вид

$$(r_{\alpha k}) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.15)$$

Для ниобата лития значения независимых компонент тензора электрооптических коэффициентов при длине волны света $\lambda = 0{,}633$ мкм приблизительно равны:

$r_{22} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-12}$ м/В; $r_{33} \approx 31 \cdot 10^{-12}$ м/В; $r_{13} \approx 8 \cdot 10^{-12}$ м/В;
$r_{51} \approx 28 \cdot 10^{-12}$ м/В.

Заметим, что ввиду действия пьезоэффекта и упругооптического эффекта возникает вторичное действие электрического поля на тензор диэлектрической проницаемости: электрическое поле вызывает появление деформации в кристалле, которые, в свою очередь, вносят изменение в тензоры η_{ij} и ε_{ij}. В связи с этим значения коэффициентов $r_{ijk}^{(S)}$, определяемых при постоянных деформациях (например, на частотах электрического поля, лежащих значительно выше частот акустических резонансов образца, когда кристалл "зажат"), отличаются от коэффициентов $r_{ijk}^{(T)}$, определяемых при постоянном упругом напряжении (например, на частотах, лежащих значительно ниже частот акустических резонансов образца, когда кристалл "свободен"). Выше приведены значения $r_{ijk}^{(T)}$ для $LiNbO_3$.

Еще более простой вид имеет тензор электрооптических коэффициентов для кристаллов кубической системы. Так, для класса $\bar{4}3m$, к которому принадлежит, в частности, другой очень перспективный кристалл оптоэлектроники – арсенид галлия $GaAs$, имеется только одна отличная от нуля независимая компонента r_{41}, и тензор r_{ijk} характеризуется матрицей

$$(r_{\alpha k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}$$

Для $GaAs$ $r_{41} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-12}$ м/В.

5.3. Расчет запаздывания для ниобата лития во внешнем электрическом поле

Исследуем изменение диэлектрической проницаемости кристалла $LiNbO_3$ в случае, когда направление приложенного электрического поля совпадает с направлением одной из кристаллофизических осей.

I. Поле $\vec{E}$ направлено вдоль оси x_1, т.е. $\vec{E}=(E,0,0)$. Из (5.7) и (5.15) находим для этой ориентации $\vec{E}$:

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = \Delta\eta_4 = 0; \quad \Delta\eta_5 = r_{51}E; \quad \Delta\eta_6 = -r_{22}E. \tag{5.16}$$

Уравнение поверхности волновых нормалей (оптической индикатрисы) в таком электрическом поле будет иметь вид

$$\frac{1}{n_o^2}x^2 + \frac{1}{n_o^2}y^2 + \frac{1}{n_e^2}z^2 + 2\Delta\eta_{12}xy + 2\Delta\eta_{13}xz = 1,$$

где n_o и n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления.

Поскольку $\Delta\eta_{12} \equiv \Delta\eta_6$ и $\Delta\eta_{13} \equiv \Delta\eta_5$, с учетом (5.16) находим

$$\frac{1}{n_o^2}x^2 + \frac{1}{n_o^2}y^2 + \frac{1}{n_e^2}z^2 - 2r_{22}Exy + 2r_{51}E_{xz} = 1. \tag{5.17}$$

Последнее слагаемое в левой части (5.17) обусловливает малый поворот эллипсоида волновых нормалей в плоскости xz и не дает заметного вклада в изменение оптических свойств кристалла, поэтому оно в дальнейшем опускается. Приведем (5.17) к главным осям. Для этого перейдем к новым координатам x', y', z, повернутым относительно старых координат x, y, z на 45° вокруг оси $z \equiv x_3$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'); \quad z = z'. \tag{5.18}$$

Из (5.17) и (5.18) находим

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E\right)x'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E\right)y'^2 + \frac{1}{n_e^2}z^2 = 1. \tag{5.19}$$

Как видно из (5.19), ниобат лития в таком поле стал двухосным кристаллом, причем главные значения показателя преломления определяются соотношениями

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E; \quad \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E.$$

С учетом малости поправки $|r_{22}En_0^2| \ll 1$ из (5.19) находим

$$n_1'^2 = \frac{n_0^2}{1-r_{22}En_0^2} \approx n_0^2(1+r_{22}En_0^2); \quad n_1' \approx n_0 + \frac{1}{2}n_0^3 r_{22}E;$$

$$n_2' \approx n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 r_{22}E; \qquad n_3' \doteq n_e. \tag{5.20}$$

Пусть оптическая волна распространяется вдоль оси z (ось x_3). Разность фаз двух необыкновенных волн на длине кристалла ℓ будет равна

$$\Gamma \equiv \Delta\varphi = \omega(t_1 - t_2) = \omega\left(\frac{\ell}{\ } \quad \frac{\ell}{\ }\right) = \frac{\omega\ell}{c}\left(n_1 - n_2\right) =$$

$$= \frac{\omega\ell r_{22} n_0^3 E}{c} = \frac{2\pi\ell n_0^3 r_{22} E}{\lambda}. \tag{5.21}$$

Величина Γ называется запаздыванием. Для ниобата лития $n_0^3\, r_{22} = 37\cdot 10^{-12}$ м/В.

Пусть на кристалл падает волна с вектором $\vec{E}'$, ориентированным вдоль оси x. Считаем, что напряженность поля волны $\vec{E}'$ много меньше напряженности поля $\vec{E}$, приложенного к кристаллу. Проекции $\vec{E}'$ на главные оси x' и y' будут иметь одинаковую амплитуду. Соответствующие взаимно ортогональные волны имеют вид

$$E'_{x'} = A\exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}n_1' z\right)\right];$$

$$E'_{y'} = A\exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}n_2' z\right)\right],$$

где n_1', n_2' определяются (5.20). Разность фаз этих волн описывается (5.21).

Результирующее поле в каждой плоскости $z=const$ зависит от Γ. При $\Gamma \neq 0$ волна будет иметь эллиптическую поляризацию. Если $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ – поляризация круговая, а при $\Gamma = \pi$ $E_{x'} = -E_{y'}$, т.е. волна снова линейно поляризована, но на этот раз вдоль оси y, т.е. под углом 90° к направлению поляризации на входе.

2. Электрическое поле $\vec{E}$ приложено вдоль оси x_2, т.е. $\vec{E}=(0, E, 0)$. Из (5.7) и (5.15) находим для этой ориентации $\vec{E}$:

$$\Delta\eta_1 = -r_{22}E; \quad \Delta\eta_2 = r_{22}E; \quad \Delta\eta_4 = r_{51}E.$$

Снова пренебрегая слагаемым $2r_{51}Exz$, запишем эллипсоид нормалей в виде

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E\right)y^2 + \frac{1}{n_e^2}z^2 = 1.$$

Видно, что также как и в первом случае, наиболее эффективная модуляция соответствует распространению света вдоль оси x_3, причем сдвиг фаз между двумя необыкновенными волнами дается той же формулой (5.21).

3. Электрическое поле $\vec{E}$ приложено вдоль оси x_3, т.е. $\vec{E}=(0,0,E)$. Из (5.7) и (5.15) следует, что отличны от нуля

$$\Delta\eta_1 = r_{13}E; \quad \Delta\eta_2 = r_{13}E; \quad \Delta\eta_3 = r_{33}E,$$

поэтому эллипсоид волновых нормалей примет вид

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)y^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E\right)z^2 = 1.$$

Следовательно,

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13}E; \quad n_2' = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13}E; \quad n_3' = n_e - \frac{1}{2}n_e^3 r_{33}E. \qquad (5.22)$$

Как видно из (5.22), в случае, когда электрическое поле направлено вдоль оптической оси, кристалл ниобата лития остается одноосным. Если свет распространяется вдоль оптической оси, разность фаз для взаимно ортогональных электромагнитных волн равна нулю. При распространении света вдоль оси x (также как и при распространении вдоль оси y) разность фаз для обыкновенной и необыкновенной волн (запаздывание) равна

$$\Gamma = \Delta\varphi = \frac{\omega \ell E}{2c}\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right) = \frac{\pi \ell E}{\lambda}\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right).$$

Для ниобата лития

$$\frac{1}{2}\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right) = 112 \cdot 10^{-12} \text{ м/В}.$$

5.4. Амплитудная электрооптическая модуляция

Схема электрооптического амплитудного модулятора показана на рис.5.1. Модулирующее напряжение U прикладывается к электродам, нанесенным на противоположные грани кристалла.

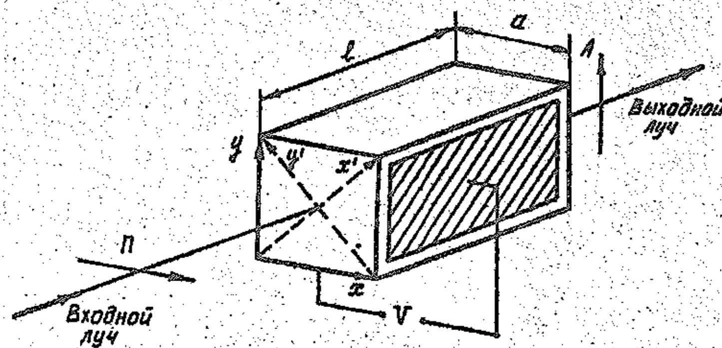

Рис.5.1. Схема электрооптического амплитудного модулятора.

Пусть ось поляризатора П направлена вдоль оси x, а анализатора A – вдоль оси y. При отсутствии напряжения на электродах обе волны, распространяющиеся вдоль оси z, будут обыкновенными и $\Gamma = 0$. Интенсивность света, падающего на фотоприемник, равна нулю. Если на кристалл подано напряжение V, то в нем создается поле напряженностью V/a, и согласно (5.21) появится запаздывание

$$\Gamma = \frac{2\pi l n_0^3 r_{22} V}{\lambda a} = \pi \frac{V}{V_\pi} ,$$

где

$$V_\pi = \frac{\lambda a}{2 l n_0^3 r_{22}} -$$

полуволновое напряжение, т.е. напряжение, при котором запаздывание равно π, а пространственное запаздывание волн равно $\lambda/2$.

Взаимно ортогональные волны не интерферируют. Для получения интерференции необходим анализатор, выделяющий из каждой волны проекцию на его ось. Эти проекции интерферируют. Поскольку ось анализатора направлена вдоль оси y, сумма проекций E'_x и E'_y на эту ось равна

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A\cos\alpha - A\cos(\alpha+\Gamma)\right] = -\sqrt{2}A\sin\frac{\Gamma}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\Gamma}{2}\right),$$

где через α обозначена фаза более быстрой волны.

Соответственно средняя за период интенсивность прошедшей анализатор волны равна

$$I = \langle E'^2_y \rangle = A^2\sin^2\frac{\Gamma}{2} = I_0\sin^2\frac{\Gamma}{2},$$

где $I_0 = \frac{1}{2}(A^2+A^2) = A^2$ – средняя за период интенсивность волны, падающей на кристалл.

Пропускание модулятора $\eta = I/I_0$ как функция приложенного напряжения показана на рис. 5.2. Кривая $\eta = \eta(V)$ называется модуляционной характеристикой.

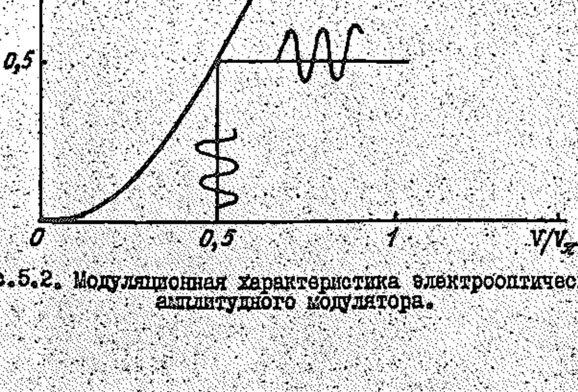

Рис.5.2. Модуляционная характеристика электрооптического амплитудного модулятора.

Обычно рабочую точку смещают до значения $\Gamma = \frac{\pi}{2}$, соответствующего пропусканию 50 %. При этом искажения сигнала минимальны.

Пусть на кристалл подано дополнительно переменное напряжение $V_m \sin\omega_m t$, тогда $\Gamma = \frac{\pi}{2} + \Gamma_m \sin\omega_m t$. Интенсивность на выходе анализатора равна

$$I = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Gamma_m \sin\omega_m t\right) = \frac{1}{2} I_0 \left[1 + \sin(\Gamma_m \sin\omega_m t)\right].$$

При малых напряжениях модуляции $\Gamma_m \ll 1$ и

$$\eta = \frac{1}{2}\left(1 + \Gamma_m \sin\omega_m t\right),$$

т.е. глубина модуляции является линейной функцией модулирующего напряжения $V_m \sin\omega_m t$ и гармоники сигнала не возникают. Максимальные искажения сигнала соответствуют рабочей точке $\Gamma_0 = 0$.

На основе электрооптического эффекта созданы амплитудные модуляторы света с частотой свыше 10^9 Гц.

5.5. Фазовая модуляция света

Если волна имеет вид

$$E' = E_0 \cos\left[k x_3 - \omega t + \alpha(t)\right],$$

где фаза $\alpha(t)$ – функция времени, такая волна называется модулированной по фазе.

Осуществляется фазовая модуляция по той же схеме, только ось поляризатора направлена вдоль оси x' (или y'). В этом случае в кристалле распространяется одна волна $E'_{x'}$ (или соответственно $E'_{y'}$). Внешнее электрическое поле, приложенное к кристаллу, не меняет состояния поляризации, а выходная фаза в соответствии с (5.21) изменяется на

$$\Delta\varphi_{x'} = -\frac{\omega \ell}{c}\Delta n'_1 = \frac{\omega \ell n_0^3 r_{22} E}{2c}.$$

Если управляющее напряжение поля изменяется синусоидально:

$$V = V_m \sin\omega_m t,$$

то поле волны на выходе из кристалла имеет вид

$$E'_3 = E_0 \cos(\omega t + \delta_m \sin\omega_m t), \qquad (5.23)$$

где $\delta_m = \dfrac{\omega \ell n_0^3 r_{22} V_m}{2ca}$ – коэффициент фазовой модуляции.

Используем разложение

$$\cos(\delta_m \sin\omega_m t) = J_0(\delta_m) + 2J_2(\delta_m)\cos 2\omega_m t + 2J_4(\delta_m)\cos 4\omega_m t + \dots;$$

$$\sin(\delta_m \sin\omega_m t) = 2J_1(\delta_m)\sin\omega_m t + 3J_3(\delta_m)\sin 3\omega_m t + \dots, \qquad (5.24)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя m-го порядка.

Из (5.23) и (5.24) находим

$$E' = E_0\big[J_0(\delta_m)\cos\omega t + J_1(\delta_m)\cos(\omega+\omega_m)t -$$

$$-J_1(\delta_m)\cos(\omega-\omega_m)t + J_2(\delta_m)\cos(\omega+2\omega_m)t +$$

$$+ J_2(\delta_m)\cos(\omega-2\omega_m)t + J_3(\delta_m)\cos(\omega+3\omega_m)t -$$

$$- J_3(\delta_m)\cos(\omega-3\omega_m)t + \dots\big].$$

Модуляция фазы синусоидальным напряжением с частотой ω_m приводит к появлению в выходном сигнале составляющих с частотами $\omega \pm n\,\omega_m$ при $n = 1, 2, \dots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая часть учебного пособия по курсу "Физические основы интегральных оптоэлектронных схем" содержит, главным образом, описание методов изучения оптических полей в вакууме или в средах с постоянными оптическими характеристиками. Этот круг вопросов охватывает оптические устройства формирования изображения, реализацию фурье-преобразования, оптические коррелометры и устройства опознавания образов и т.п. На этой теоретической основе в курсе "Методы расчета и конструирования интегральных оптоэлектронных схем" анализируются, в частности, вопросы распространения поверхностных электромагнитных волн в оптических волноводах и световодах. Однако для целей управления оптическими пучками необходимо уметь изменять оптические характеристики вещества. В главе 5 данного пособия рассмотрен один из важнейших эффектов такого рода – электрооптический эффект. Другие методы воздействия на оптические характеристики веществ будут рассмотрены во второй части учебного пособия. Там же будут освещены вопросы излучения и поглощения света веществом, физические основы работы источников излучения и фотоприемников, а также нелинейные эффекты, используемые в оптоэлектронике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ПИХТИН А.Н. Физические основы квантовой электроники и оптоэлектроники. – М.: Высшая школа, 1983. – 304 с.
2. ЯРИВ А. Введение в оптическую электронику. – М.: Высшая школа, 1983. – 398 с.
3. ОСИНСКИЙ В.И. Интегральная оптоэлектроника. – М.: Наука, 1977. – 246 с.
4. МАРКУЗЕ Дж. Оптические волноводы. – М.: Мир, 1974. – 574 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Св.план, 1987, поз. 21

Алексей Яковлевич Балагуров
Тимофей Дмитриевич Шермергор

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ

Редактор Е.А.Семина
Технический редактор Л.Г.Лосякова
Корректор Н.В.Ильяшенко

Л: – 100375. Подписано в печать 9.XI.87. Т. – 150 экз.
Формат 60х84 1/16. Уч.-изд.л. 4,6. Цена 28 коп. Заказ 1041.

Ротапринт множительного участка № 25 (МИЭТ, 103498)