В ДЛЯ ВУЗОВ

Б.Т. Емцев

ТЕХНИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Издание второе,
переработанное и дополненное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальности
"Гидравлические машины и средства автоматики"

МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1987

ББК 30.123
Е60
УДК 532.5 (075.8)

Рецензент *кафедра гидравлики и гидроавтоматики МВТУ им. Н. Э. Баумана*

Емцев Б. Т.

Е60 Техническая гидромеханика: Учебник для вузов по специальности «Гидравлические машины и средства автоматики». — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.: ил.

(В пер.): 1 р. 30 к.

Изложены физические свойства жидкостей и газов, общие законы гидромеханики и фундаментальные прикладные задачи, наиболее актуальные для машиностроения: теория гидравлических сопротивлений, одномерные течения вязких жидкостей и газа, потенциальные течения несжимаемой среды, течения вязкой жидкости в малых зазорах (щелях) машин, теория пограничного слоя и др.
Второе издание (1-е изд. 1978 г.) переработано с учетом расширения областей применения ЭВМ и дополнено материалами по обтеканию тел и кавитации.

$Е \frac{2305020000-079}{038(01)-87}$ 79-87

ББК 30.123

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания пересмотрен и заново отредактирован весь текст книги, часть материала исключена, многие выводы и доказательства сделаны более компактными. Так, например, исключено отдельное доказательство теоремы Жуковского о подъемной силе, поскольку эта теорема вытекает из приводимых в книге формул Чаплыгина; исключены главы «Теорема Жуковского для решетки», «Уравнения движения в слое переменной толщины», поскольку эти вопросы являются специальными и рассматриваются в курсе «Теория лопастных гидромашин».

Наряду с этим некоторые вопросы изложены в новой редакции и в книгу включена новая глава. Так, дано новое, более общее изложение теории гидравлических сопротивлений, заново написан параграф, посвященный численным методам решения уравнений Навье — Стокса, книга дополнена новой главой «Обтекание тел. Кавитация».

Общая ориентация книги, ее назначение и объем сохранены и соответствуют первому изданию.

Автором с благодарностью приняты и учтены замечания многих специалистов, сделанные по первому изданию.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основой для этой книги послужили лекции по курсу «Гидромеханика», которые автор в течение многих лет читал в Московском энергетическом институте для студентов специальности «Гидравлические машины и средства автоматики».

Этот курс является базовым в системе образования специалистов указанного профиля. Он должен служить основой для ряда дисциплин теоретического и прикладного характера, таких, как «гидродинамическая теория решеток», «теория лопастных гидромашин», «Устройства гидропневмоавтоматики» и др. Назначением и местом курса в учебном плане определяется его основная задача: сочетать изложение классических теорем и методов гидромеханики с изложением современных инженерных методов гидродинамических расчетов. Из обширного материала современной прикладной гидромеханики в книгу включены главным образом вопросы, связанные с гидравлическими расчетами в области машиностроения. Автор стремился излагать эти вопросы на основе общих теорем и уравнений механики жидкости, усвоение и ясное понимание которых необходимы для сознательного и творческого использования расчетных методов.

При отборе и компоновке материала для каждого из разделов автор исходил из следующих соображений.

Для лучшего понимания теоретических построений и расчетных методов читатель должен в первую очередь получить представление об истинном, наблюдаемом в опытах, характере реальных гидромеханических явлений. Тогда легче и правильнее усваивается сущность теоретических моделей этих явлений, создается более ясное и правильное представление о степени приближенности исходных предпосылок и границ применимости теории. Например, уже в гл. 2 «Кинематика» даются первые сведения о возможной кинематической структуре потоков реальных жидкостей, включая описание кинематической картины ламинарного и турбулентного течений. Этим же соображением обусловлено изложение законов движения идеальной жидкости только после того, как выведены уравнения вязкой жидкости. В пользу такого расположения материала говорит возможность рассматривать закономерности идеальной жидкости как частные случаи соответствующих законов движения вязкой жидкости. Иными словами, при отборе и расположении материала автор стремился реализовать принципы: от реального объекта к теоретической модели и от общего к частному.

Содержание книги является расширенным содержанием курса, читаемого в МЭИ для указанной выше специальности. Но автор отдает себе отчет в том, что не во всех вузах на аналогичный курс отводится число часов, достаточное для изложения всех включенных в книгу разделов. Для того чтобы сделать ее полезной и в этих случаях, гл. 1—6 построены так, что они могут служить самостоятельным и завершенным курсом технической гидромеханики. Гл. 7—10 могут служить дополнением первых шести глав тем материалом, который для данного вуза окажется наиболее подходящим. Книга почти не содержит справочного материала и изложения экспериментальной гидромеханики. Эти разделы, обширные и важные для инженерного образования, по мнению автора, должны осваиваться учащимися в ходе выполнения расчетных и лабораторных работ и им должны быть посвящены специальные пособия.

Книга рассчитана на студентов, завершивших изучение курсов высшей математики, физики и теоретической механики на машиностроительных факультетах втузов со сроком обучения пять с половиной лет. Такая ориентация книги позволила в доказательствах и выводах использовать как общие формы законов и теорем механики, так и векторный анализ, теорию функций комплексного переменного и некоторые другие разделы математики, включаемые в программы ряда технических вузов. Применение в курсе технической гидромеханики этого теоретического аппарата представляется целесообразным не только потому, что с его помощью достигается компактность и строгость изложения, но и потому, что овладение им применительно к задачам гидромеханики открывает изучающему возможность свободно читать современную научную литературу. Наряду с этим в книге не используется тензорное исчисление, поскольку этот раздел математики часто не включается в программы технических вузов или включается в недостаточном объеме.

Учитывая инженерный характер специальности, для которой предназначена книга, автор счел возможным поступиться полнотой и строгостью некоторых доказательств и ограничиться описанием качественной стороны явлений. В книге использованы некоторые методы и приемы курса гидравлики, имеющие целью получение простых расчетных зависимостей.

ВВЕДЕНИЕ

Гидромеханикой называется наука, изучающая движение и равновесие жидкостей, а также взаимодействие между жидкостями и твердыми телами, полностью или частично погруженными в жидкость.

Жидкости, занимая по молекулярному строению промежуточное положение между газами и твердыми телами, проявляют свойства, присущие как газам, так и деформируемым твердым телам. Это позволяет описать механическое движение всех упомянутых сред едиными дифференциальными уравнениями, составляющими основу механики сплошной среды. Решение этих уравнений требует учета специфических свойств каждой из упомянутых сред, поэтому механика сплошных сред разделяется на ряд самостоятельных дисциплин: гидромеханику, газовую динамику, теорию упругости, теорию пластичности и др.

Жидкости и газы с точки зрения механики различаются только степенью сжимаемости. В условиях, когда это свойство не проявляется или не является определяющим, решения уравнений движения сплошной среды оказываются одинаковыми как для жидкостей, так и для газов. Этим объясняется существование дисциплины, называемой гидрогазодинамикой или механикой жидкостей и газов. Если при изложении этой дисциплины преобладают вопросы движения жидкостей, то ее обычно называют просто гидромеханикой.

В зависимости от теоретической или прикладной направленности употребляются наименования теоретическая и техническая или прикладная гидромеханика. Исторически сложилась в самостоятельную дисциплину одна ветвь технической гидромеханики, получившая название гидравлики. Ее спецификой издавна являлись состав рассматриваемых задач (главным образом одномерных), а также широкое применение упрощенных и эмпирических методов их решения с целью получения результатов, удобных для использования в инженерной практике.

Широкое использование методов гидравлики во многих отраслях техники вплоть до середины нашего столетия обусловлено в значительной степени тем, что, несмотря на крупные достижения теоретической гидромеханики, многие технические задачи не получали достаточно строгих и точных решений, пригодных для применения в инженерной практике. Выходом из положения являлись эмпирические формулы и сильно упрощенные расчетные схемы, главным образом одномерные, которые и составляли основное содержание гидравлики. Однако ограниченные возможности таких методов и появление новых более сложных задач привели к необходимости максимально возможного использования достижений теоретической гидромеханики, практическая результативность которой возросла, особенно в связи с применением численных методов и ЭВМ. В настоящее время различие между гидравликой и технической или прикладной гидромеханикой исчезает, и теперь, по-видимому, можно констатировать, что современная гидравлика представляет собой техническую механику жидкости, прочно опирающуюся на теоретический фундамент классической гидромеханики. В то же время гидравлика относится к прикладным наукам и одной из отличительных черт ее является доведение решений до вида, удобного для инженерных расчетов.

В гидромеханике широко используются математические методы, благодаря чему ряд полученных в ней результатов обладает строгостью и точностью. Однако сложность механической структуры движений реальных жидкостей и газов не позволяет получить такие результаты для большинства случаев, важных для практики, поэтому широко используют приближенные уравнения и приближенные методы их решений. Такие решения требуют обязательной проверки, а иногда и корректировки согласно экспериментальным данным. Кроме того, эксперимент в гидромеханике служит для первичного изучения явлений, без чего нельзя построить достоверные расчетные модели. Поэтому роль эксперимента в гидромеханике весьма значительна. Современные гидродинамические лаборатории представляют собой крупные исследовательские организации со сложным и высокоточным оборудованием.

Гидромеханика находит применение в большинстве отраслей техники и для многих из них является теоретической базой. К числу последних относятся авиация, кораблестроение, энергомашиностроение, атомная энергетика, гидротехническое строительство и гидроэнергетика, водоснабжение и канализация, теплотехника, водный транспорт и др. Значительна роль этой науки в химической технологии, легкой промышленности, автоматике, физиологии, метеорологии. Для каждой из этих отраслей характерен свой круг гидродинамических задач и соответствующих методов их решения. Однако все они основываются на общих законах движения и покоя жидкостей и газов, а также на некоторых общих методах описания гидромеханических явлений.

1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЖИДКОГО И ГАЗООБРАЗНОГО СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА

Материальные тела могут находиться в твердом, жидком или газообразном состояниях. Каждое из этих состояний характеризуется специфическими свойствами, которые определяются особенностями атомно-молекулярной структуры тел, непосредственно связанной с силами взаимодействия между частицами (в частности, молекулами). Такими силами являются силы притяжения и отталкивания, зависящие от расстояния между молекулами. При некотором расстоянии $r = r_0$ сила взаимодействия равна нулю, но она становится силой притяжения, если $r > r_0$, и силой отталкивания, если $r < r_0$.

В твердых кристаллических телах молекулы располагаются на расстояниях порядка r_0 и образуют кристаллическую решетку. Молекулярные движения, которыми обусловлена тепловая энергия твердого тела, представляет собой неупорядоченные колебания молекул около устойчивых центров. Благодаря этой устойчивости твердые тела сохраняют объем и форму.

В газах при нормальных условиях межмолекулярные расстояния велики, а силы притяжения малы. Каждая молекула практически не испытывает действия связей с другими молекулами, что в теории позволяет пренебрегать силами взаимодействия между ними. Модель газа, в которой полностью игнорируют силы притяжения между молекулами, называется совершенным газом. Молекулы совершенного газа движутся равномерно и прямолинейно до столкновения друг с другом. Под столкновением понимают резкое изменение направления движения молекул под действием сил отталкивания, которые быстро возрастают при их сближении. Благодаря свободному беспорядочному движению молекул газ может неограниченно расширяться во все стороны и принимает форму сосуда, в котором он заключен. При этом стенки сосуда испытывают удары молекул газа. Сила, с которой молекулы действуют на стенки сосуда, приходящаяся на единицу площади стенки, называется давлением p.

Суммарная масса молекул газа, заключенных в единице объема, называется его плотностью ρ. Давление, плотность и абсолютная температура T являются основными величинами, характеризующими состояние газа. Они называются термодинамическими параметрами состояния и входят в систему уравнений макроскопического движения газа.

Взаимодействие (притяжение) между молекулами твердого тела и газа более сильное, чем между молекулами самого газа, поэтому касательное (сдвиговое) перемещение твердой поверхности приводит к сдвигу слоя газа, соприкасающегося с ней. При этом сила, необходимая для сдвига газового слоя, может быть сколь угодно малой, если она действует достаточное время.

Свойство вещества неограниченно деформироваться под действием сколь угодно малой силы сдвига называется легкоподвижностью или текучестью. Все газы обладают этим свойством. Однако это не означает отсутствие в них сопротивления сдвигу; оно всегда существует в реальных газах и называется вязкостью. Более подробно оно рассмотрено в п. 1.4.

Жидкости по молекулярному строению занимают промежуточное положение между кристаллическими твердыми телами и газами. Сведения о молекулярном строении жидкостей менее полны, чем о строении твердых тел и газов. Считают, что молекулы жидкостей расположены так же плотно, как и молекулы твердых тел. Об этом свидетельствует равенство плотностей твердых тел и их расплавов. Следовательно, межмолекулярные силы и потенциальная энергия молекул жидкости имеют тот же порядок, что и для твердых тел. Жидкости, как и твердые тела, устойчиво сохраняют занимаемый ими объем.

Характер теплового движения молекул в жидкостях более сложный, чем в твердых телах. Согласно упрощенной модели тепловые движения молекул жидкости представляют нерегулярные колебания относительно некоторых центров. Кинетическая энергия колебаний отдельных молекул в какие-то моменты может оказаться достаточной для преодоления межмолекулярных связей. Тогда эти молекулы получают возможность скачком перейти в окружение других молекул, тем самым поменяв центр колебаний. Таким образом, каждая молекула некоторое время t^*, называемое временем «оседлой жизни», находится в упорядоченном строю с несколькими ближайшими молекулами. Совершив перескок, молекула жидкости оказывается среди новых молекул, выстроенных уже другим образом. Поэтому в жидкости наблюдается только ближний порядок в расположении молекул.

Скачки молекул совершаются хаотически, новое место никак не предопределено прежним. Непрерывно и в большом количестве совершающиеся скачкообразные переходы молекул с места на место обеспечивают их диффузию и текучесть жидкостей. Если на границе жидкости приложена сдвигающая сила, то, как и в газах, появляется преимущественная направленность скачков и возникает течение жидкости в направлении действия силы. Для большинства жидкостей сила при этом может быть любой сколь угодно малой. Однако существуют жидкости с настолько упорядоченной молекулярной структурой, что требуется некоторое усилие для осуществления сдвига. Такие жидкости называют пластичными. Если время действия сдвигающей силы мало по сравнению с t^*, то непрерывного перемещения молекул вообще не возникает, и жидкости, как твердые тела, оказывают упругое сопротивление сдвигу. Если время действия сдвигающей силы больше t^*, то возникает течение и проявляется вязкость, т. е. сопротивление сдвигу.

Сложность молекулярного строения жидкостей затрудняет получение теоретическим путем достаточно общих зависимостей между молекулярными характеристиками и термодинамическими параметрами: температурой, давлением, вязкостью. Поэтому в гидромеханике пользуются экспериментально установленными зависимостями (некоторые из них приведены в п. 1.4).

При всех различиях в молекулярной структуре твердых тел, жидкостей и газов между ними не всегда можно провести четкую границу. Многие тела, которые мы привыкли считать твердыми, при определенных условиях ведут себя как жидкости, а некоторые жидкости проявляют свойства твердых тел. Так, например, асфальт при мгновенном резком приложении силы ведет себя как твердое тело, а при длительном действии той же силы течет. Существуют материалы, которые ведут себя как упругие твердые тела, если они длительно находятся в состоянии покоя, и проявляют свойства жидкостей при интенсивном перемешивании. В концентрированных полимерных растворах могут одновременно проявляться свойства твердых тел и жидкостей.

1.2. ГИПОТЕЗА СПЛОШНОСТИ СРЕДЫ

В гидромеханике рассматриваются макроскопические движения жидкостей и газов, а также силовое взаимодействие этих сред с твердыми телами. При этом, как правило, размеры рассматриваемых объемов жидкостей, газов и твердых тел оказываются несопоставимо большими по сравнению с размерами молекул и межмолекулярными расстояниями. Это естественно, поскольку межмолекулярные расстояния в жидкостях составляют всего 10^{-7}—10^{-8} см и изменяются обратно пропорционально давлению, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении 10^{-5} см. Поэтому обычно жидкости и газы воспринимаются как сплошные среды, масса которых непрерывно распределена по объему. Исключение составляют сильно разреженные газы.

Указанные обстоятельства позволяют ввести гипотезу сплошности изучаемой среды и заменить реальные дискретные объекты упрощенными моделями, представляющими собой материальный континуум, т. е. материальную среду, масса которой непрерывно распределена по объему. Такая идеализация упрощает реальную дискретную систему и позволяет использовать для ее описания хорошо разработанный математический аппарат исчисления бесконечно малых и теорию непрерывных функций.

Параметры, характеризующие термодинамическое состояние, покой или движение среды, считаются при этом непрерывно изменяющимися по всему объему, занятому средой, кроме, быть может, отдельных точек, линий или поверхностей, где могут существовать разрывы.

Критерием приемлемости всякой физической гипотезы является степень совпадения результатов, полученных на ее основе, с результатами наблюдений и измерений. Для жидкости и газа правомерность использования гипотезы сплошной среды в широком диапазоне изменения параметров полностью подтверждается.

Теоретические результаты, полученные для гипотетической сплошной среды, тем больше приближаются к результатам наблюдений, чем полнее и точнее учтены в ней свойства реальных жидкостей и газов. К сожалению, идеализацию среды во многих случаях не удается ограничить только допущением ее сплошности. Из-за сложности изучаемых явлений приходится не учитывать и некоторые другие свойства реальных сред.

В зависимости от тех свойств, которые приписываются гипотетической сплошной среде, получают различные ее модели. При использовании результатов, полученных для идеализированной среды, важно определить границы их применимости и точность в этих границах. Для установления границ применимости необходимо знать существо явлений или хотя бы интуитивно правильно их понимать.

В механике жидкостей и газов широко используется понятие «жидкой частицы». Этим термином обозначают малый объем сплошной среды, который при движении деформируется, но масса которого не смешивается с окружающей средой. Несколько упрощенно жидкую частицу можно представить как каплю краски, пущенную в жидкость (имеющую те же свойства, что и капля) и перемещающуюся вместе с ней. При изучении равновесия и движения жидкостей и газов жидкую частицу представляют как материальный объект, к которому применимы все законы механики. Изучаемую массу жидкости или газа рассматривают при этом как совокупность непрерывно распределенных по объему жидких частиц.

Широко используется в гидромеханике термин «жидкий объем», под которым понимают малый или конечный объем жидкости, состоящий во время движения из одних и тех же частиц. Аналогичный смысл имеют термины «жидкая поверхность» и «жидкая линия».

Для выбора эффективных моделей при решении различных задач гидрогазодинамики необходимо знать истинные свойства жидкостей и газов. От полноты учета этих свойств зависит правильность теоретических результатов и обоснованное определение границ их применимости.

1.3. ПЛОТНОСТЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ОБЪЕМНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Согласно гипотезе сплошности масса среды распределена в объеме непрерывно и в общем неравномерно. Основной динамической характеристикой среды является плотность распределения массы по объему или просто плотность среды, которая в произвольной точке A определяется соотношением

$$\rho = \lim_{\Delta W \to 0} (\Delta M / \Delta W), \qquad (1.1)$$

где ΔM — масса, заключенная в малом объеме ΔW, включающем точку A; предел берется при стягивании объема ΔW к этой точке.

Размерность плотности

$$[\rho] = M/L^3,$$

где M — размерность массы; L — размерность длины.

Единицами измерения плотности являются кг/м^3 в системе СИ и кгс·с^2/м^4 в технической системе.

Наряду с плотностью в рассмотрение вводится понятие удельного объема v, который представляет собой объем, содержащий единицу массы:

$$v = 1/\rho. \qquad (1.2)$$

Плотность среды может изменяться от точки к точке и в данной точке со временем, т. е. $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Однако эта функциональная связь не является непосредственной, так как плотность жидкостей и газов определяется фактически значениями термодинамических параметров состояния (p и T), которые при движении среды зависят от координат (x, y, z) и времени (t).

Связь между плотностью, температурой и давлением устанавливается уравнением состояния, которое для реальных жидкостей выводится в кинетической теории. Из-за сложности общего уравнения состояния и трудности определения входящих в него констант для качественного анализа свойств этих сред пользуются приближенными теоретическими или эмпирическими уравнениями. Широкое применение получило, например, уравнение Ван-дер-Ваальса

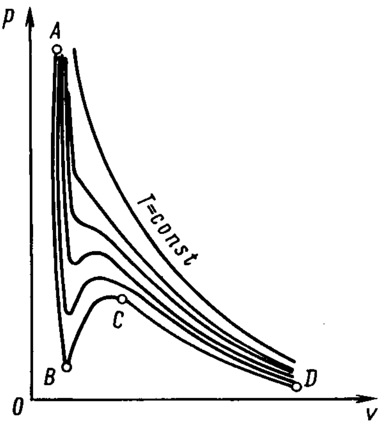
$$(p + a/v^2)(v - b) = RT, \qquad (1.3)$$

где a, b и R — константы для данной среды.

Это уравнение, выведенное в кинетической теории газов, является приближенным, но качественно верно отражает полученные опытным путем закономерности.

На рис. 1.1 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса, выражающие зависимости удельного объема от давления $[v = f(p)]$ при различных постоянных температурах. Жидкому состоянию соответствует участок AB (показан для одной кривой), а газо-

Рис. 1.1. Изотермы Ван-дер-Ваальса



образному — участок CD. Как показывают кривые AB и CD, с увеличением давления объем жидкостей и газов уменьшается. Разные наклон и кривизна этих участков свидетельствуют о разной степени сжимаемости рассматриваемых сред.

Количественно сжимаемость оценивают изотермическим коэффициентом сжимаемости

$$\chi = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T. \qquad (1.4)$$

Для жидкостей (участок AB изотермы) производная $(\partial v/\partial p)_T$ мало отличается от нуля [обычно $\chi = (10^{-9} \div 10^{-10})$ 1/Па], что свидетельствует об их малой сжимаемости. Для всех жидкостей χ уменьшается с возрастанием давления и увеличивается с повышением температуры.

Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить выражение для коэффициента сжимаемости, но из-за приближенности этого уравнения практическое применение получили выражения χ, найденные опытным путем.

Соотношение (1.4) можно представить в другом виде, заменив v на $1/\rho$ и обозначив $1/\chi$ через $\mathscr{E}$:

$$d\rho/\rho = dp/\mathscr{E}. \qquad (1.5)$$

Величина $\mathscr{E}$ называется модулем упругости жидкости. Для воды при нормальных условиях $\mathscr{E} = 2{,}25 \cdot 10^9$ Па. В форме (1.15) уравнение сжимаемости выражает закон Гука для жидкостей.

Для совершенных газов (участок CD изотермы на рис. 1.1) соотношение между p и v приближенно описывается уравнением Клайперона

$$pv = RT, \qquad (1.6)$$

откуда, учитывая, что $T = \text{const}$, получаем

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{p}.$$

Следовательно, изотермический коэффициент сжимаемости газов определяется формулой

$$\chi = 1/p, \qquad (1.7)$$

при этом изотермический модуль упругости газов

$$\mathscr{E} = p. \qquad (1.8)$$

Формулы (1.7) и (1.8) свидетельствуют о высокой сжимаемости газов.

Объем жидкостей и газов изменяется при изменении не только давления, но и температуры. Как правило, жидкости и газы расширяются с повышением температуры, а плотность их при этом уменьшается. Исключение составляет вода, плотность которой возрастает при повышении температуры от 0 до 4 °С и достигает максимума при 4 °С. Такая аномалия объясняется особенностями молекулярного строения воды.

Количественно изменение объема при изменении температуры и постоянном давлении оценивается коэффициентом теплового объемного расширения

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{\partial T}\right)_p. \tag{1.9}$$

У жидкостей этот коэффициент зависит от температуры и давления, возрастая с повышением первой и уменьшаясь с увеличением второго. При нормальных условиях для этилового спирта α равно $1{,}1\cdot10^{-1}$, для глицерина $5{,}3\cdot10^{-4}$, для ртути $1{,}8\cdot10^{-4}$, для воды $1{,}5\cdot10^{-4}$ 1/К.

Для газов из уравнения (1.6) при $p = \mathrm{const}$ получаем

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T},$$

т. е.

$$\alpha = 1/T.$$

Исходя из общего уравнения состояния $p = f(v, T)$, можно показать, что между коэффициентами сжимаемости и объемного теплового расширения существует связь вида

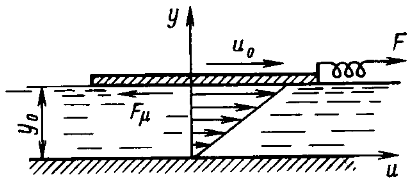
$$\frac{\alpha}{\chi} = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v,$$

где производная $\partial p/\partial T$ вычисляется при постоянном объеме.

1.4. ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Как уже известно, молекулярные движения в жидкостях и газах обусловливают сопротивление этих сред сдвигающим усилиям. Наличие силы сопротивления при сдвиге можно обнаружить из опыта (рис. 1.2). На неподвижной нижней пластинке находится слой жидкости толщиной y_0, на свободной поверхности — легкая пластинка площадью S. Если к пластинке приложить силу F, она начнет перемещаться. После некоторого «разгонного» интервала времени установится равномерное движение пластинки с некоторой скоростью u_0. Это означает, что за время разгона возникает приложенная к пластинке сила $\boldsymbol{F}_\mu = -\boldsymbol{F}$. Она может быть только силой сопротивления жидкости (сопротивление воздуха мало и во внимание не принимается).

Рис. 1.2. Схема для определения силы вязкости



Механизм возникновения силы сопротивления можно представить следующим образом. Слой жидкости, прилегающей к пластинке, прилипает к ней и движется вместе с пластинкой со скоростью u_0. Вследствие молекулярных связей этот слой увлекает за собой следующий и т. д. Поскольку нижний слой примыкает к неподвижной пластинке, его скорость равна нулю. Таким образом, в жидкости возникает слоистое движение с некоторым распределением скоростей по высоте $u = f(y)$.

В рассматриваемом случае распределение скоростей линейное. Вследствие действия межмолекулярных связей между движущимися слоями жидкости возникает сила F_μ вязкости или внутреннего трения. Ньютон * указал на те параметры, от которых она зависит. Для рассматриваемого движения с линейным распределением скоростей по толщине слоя

$$F_\mu = -\mu S u_0/y_0,$$

но в более общем случае при произвольном профиле скорости современная запись закона внутреннего (вязкого) трения Ньютона имеет вид

$$F_\mu = \pm \mu S du/dy, \tag{1.10}$$

где μ — динамический коэффициент вязкости (табл. 1); S — площадь соприкосновения слоев; du/dy — градиент скорости, являющийся показателем интенсивности ее изменения по нормали к ее направлению (при слоистом движении он равен скорости сдвиговой деформации); знак «+» или «—» выбирают в зависимости от знака градиента скорости и направления силы F_μ.

Вязкое или касательное напряжение

$$\tau_\mu = F_\mu/S = \pm\mu du/dy. \tag{1.11}$$

Как указано выше, газы также обладают вязкостью, но механизм межмолекулярного взаимодействия, проявляющегося в этом свойстве, в них иной, нежели в жидкостях. Исходя из представлений о молекулярной структуре жидкостей (см. п. 1.1), можно предположить, что в этих средах при повышении температуры возрастает кинетическая энергия колебательных движений молекул, учащаются их «перескоки», в результате чего облегчается относительный сдвиг слоев. Макроскопически это обнаруживается в уменьшении вязкости.

---

* Исаак Ньютон (1643—1727) — великий английский физик и математик. В области механики жидкости сформулировал закон вязкости или внутреннего трения, открыл явление сжатия струи при истечении через отверстие, исследовал относительное равновесие жидкости, приливно-отливные явления.

1. Значения динамического коэффициента вязкости μ (Па·с) для некоторых жидкостей

Жидкость	Температура, °C	
	0	20
Вода	$17{,}9 \cdot 10^{-4}$	$10{,}1 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	$17 \cdot 10^{-4}$	$15{,}7 \cdot 10^{-4}$
Глицерин	$4{,}6 \cdot 10^{-0}$	$0{,}87 \cdot 10^{-0}$
Смазочное масло	$0{,}64 \cdot 10^{-0}$	$0{,}17 \cdot 10^{-0}$
Стандартный бензин	$7{,}07 \cdot 10^{-4}$	—

В газах вязкость обусловлена хаотическим движением молекул, благодаря которому происходит обмен количеством движения. При относительном сдвиге слоев газа этот обмен создает тенденцию к выравниванию скоростей, т. е. препятствует сдвигу и порождает силу внутреннего трения (вязкости). Для совершенного газа напряжение τ_μ можно вычислить, применив теорему импульсов к массе молекул, пересекающих единичную площадку на поверхности раздела сдвигаемых слоев. В результате получается формула, имеющая такую же структуру, как и формула (1.11). Следовательно, последняя справедлива как для жидкостей, так и для газов, и различие этих сред проявляется только в закономерностях изменения коэффициента вязкости.

Динамический коэффициент вязкости μ, являющийся основной количественной характеристикой вязкости жидкостей и газов, имеет размерность

$$[\mu] = \left[\frac{F_\mu}{S\, du/dy}\right] = \frac{FT}{L^2} = \frac{M}{LT},$$

где F — размерность силы; T — размерность времени.

Единицами измерения для μ являются Па·с в системе СИ; г/(см·с) (пуаз) в системе СГС и кгс·с/м^2 в технической системе.

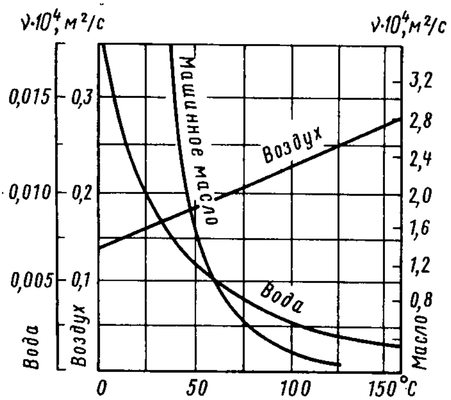
Наряду с динамическим коэффициентом вязкости в гидрогазодинамике широко используют кинематический коэффициент вязкости ν, определяемый соотношением

$$\nu = \mu/\rho. \tag{1.12}$$

2. Значения $\mu \cdot 10^5$ (Па·с) для различных газов

Газ	Температура, °C			
	−50	0	20	50
Воздух	1,708	1,840	1,954	2,180
Водяной пар	0,883	0,975	1,065	1,250
Углекислый газ CO_2	1,367	1,486	1,607	1,827

Рис. 1.3. Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды машинного масла и воздуха от температуры



Легко убедиться, что

$$[\nu] = L^2/T.$$

Единицами измерения кинематического коэффициента вязкости являются м²/с и см²/с (стокс).

В соответствии с качественно описанным выше механизмом возникновения вязкости в жидкостях и газах динамическая вязкость сильно зависит от температуры (табл. 2), причем для жидкостей при повышении температуры она уменьшается, а для газов — возрастает. Давление мало влияет на значения μ.

Для воды Пуазейлем * получена формула

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2)^{-1},$$

где μ и μ_0 — динамический коэффициент вязкости при температурах t и 0° С.

Для газов можно воспользоваться формулой Сатерленда

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273}\right)^{3/2},$$

где C — постоянная, зависящая от рода газа; T — термодинамическая температура; μ_0 — значение μ при 0 °С; для воздуха $\mu_0 = 17{,}12\cdot10^{-6}$ Па·с; $C = 111$ [9].

На рис. 1.3 приведены зависимости кинематического коэффициента вязкости воды, машинного масла и воздуха от температуры.

1.5. ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ ЖИДКОСТЕЙ С ГАЗАМИ И ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Условия, в которых находятся молекулы покоящейся жидкости на границах с газами, другими жидкостями или твердыми телами, отличаются от условий, в которых находятся молекулы внутри жидкого объема. Во втором случае частицы со всех сторон подвержены воздействию соседних частиц с теми же свойствами, поэтому все силы, действующие на рассматриваемую частицу, уравновешиваются. Если же молекулы расположены на границе, то силы, действующие со стороны граничного тела,

* Жан Луи Мари Пуазейль (1799—1869) — французский врач и физик. Установил эмпирическую зависимость коэффициента вязкости воды от температуры, а также опытным путем открыл закон ламинарного (слоистого) течения в круглой трубе.

могут отличаться от сил, действующих внутри объема жидкости. Система сил оказывается неуравновешенной, и появляется равнодействующая, направленная внутрь или наружу объема жидкости. Чтобы жидкость находилась в покое, эта равнодействующая должна уравновешиваться некоторой иной силой (например, силой давления).

Если указанная сила, испытываемая молекулами поверхностного слоя, направлена внутрь жидкости, то для перемещения частицы изнутри объема на поверхность необходимо затратить некоторую энергию, т. е. выполнить работу. Это значит, что молекулы поверхностного слоя имеют избыточную по сравнению с внутренними молекулами потенциальную энергию. Энергия U_s молекул пропорциональна площади поверхности S, занимаемой этими молекулами:

$$U_s = \sigma S. \tag{1.13}$$

Величина σ называется коэффициентом поверхностного натяжения.

Система, находящаяся в равновесии, занимает то из возможных для нее положений, которое соответствует минимуму энергии. Следовательно, жидкость в равновесии имеет минимальную поверхность, т. е. существуют силы, стремящиеся уменьшить последнюю. Они направлены по касательной к этой поверхности. Эти силы обнаруживаются простыми опытами и называются силами поверхностного натяжения.

Если выбрать на свободной поверхности жидкости некоторую линию длиной l и приложить к поверхности распределенную по этой линии и нормальную к ней, но касательную к поверхности внешнюю силу F_1, то сила поверхностного натяжения F_σ будет препятствовать разрыву (разделу) поверхности вдоль этой линии. Пусть в результате действия такой внешней силы поверхность по нормали к линии длиной l растянулась на величину dh. Тогда изменение поверхностной энергии $dU_s = \sigma dS = \sigma l dh$ должно равняться работе приложенной силы $F_1 dh = F_\sigma dh$, т. е.

$$F_\sigma = \sigma l. \tag{1.14}$$

Следовательно, коэффициент поверхностного натяжения σ есть сила, действующая по касательной к поверхности жидкости и приходящаяся на единицу длины l линии раздела.

Единицами измерения σ являются Н/м в системе СИ, и дин/см в системе СГС.

Благодаря действию сил поверхностного натяжения объем жидкости, на который не действуют никакие другие силы, принимает сферическую форму. Это было подтверждено во время космических полетов и в земных условиях.

Со свойством поверхностного натяжения связана способность жидкостей образовывать капли, из-за которой обычные жидкости иногда называют капельными.

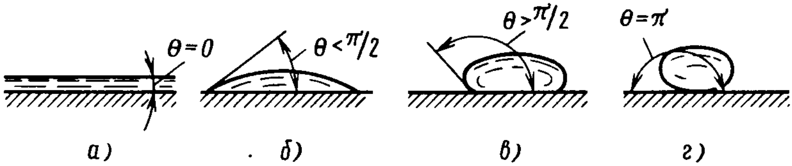


Рис. 1.4. Возможные случаи смачивания твердой поверхности вязкой жидкостью

На границе между жидкостью и твердым телом возникают силы взаимодействия между молекулами этих двух сред. Соотношение между этими силами и силами взаимодействия между молекулами самой жидкости определяет характер граничных явлений. Если на твердую горизонтальную плоскость поместить каплю жидкости, то возможны случаи:

а) полного растекания жидкости по твердой поверхности тонким слоем (полное смачивание), когда краевой угол $\theta = 0$ (рис. 1.4, *а*);

б) частичного смачивания, когда краевой угол $\theta < \pi/2$ (рис. 1.4, *б*);

в) частичного несмачивания, когда $\pi/2 < \theta < \pi$ (рис. 1.4, *в*);

г) полного несмачивания, когда $\theta = \pi$ (рис. 1.4, *г*).

Хотя существует несмачивание, но при движении жидкости скорости частиц, соприкасающихся с твердой поверхностью, в большинстве случаев равны скорости последней. Этот факт для гидродинамики весьма важен, так как на нем основана формулировка граничных условий при математической постановке гидродинамических задач.

Силы молекулярного взаимодействия между жидкостью и твердыми стенками создают искривление свободной поверхности вблизи этих стенок. В трубке малого диаметра (капилляре) поверхность может быть или вогнутой (смачивание) или выпуклой (несмачивание). Искривление свободной поверхности сопровождается появлением дополнительного давления, в результате чего уровень в таких трубках поднимается или понижается. Высота капиллярного подъема жидкости

$$h = 2\sigma \cos \theta/(\rho g r),$$

где g — ускорение свободного падения; r — радиус трубки.

Из формулы следует, что при малых r подъем может быть значительным.

1.6. ИСПАРЕНИЕ И КИПЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ. КАВИТАЦИЯ

Переход жидкости в пар называется испарением, а обратный переход — конденсацией. Жидкость может находиться в равновесии со своим паром. Это равновесие наступает само собой, если жидкость длительное время заключена в закрытом сосуде. Тогда с течением времени достигается такое состояние, при котором число молекул, переходящих из жидкости в пар, равно числу молекул, совершающих обратный переход. В этом случае пар называют насыщенным и в нем устанавливается вполне определенное при данной температуре давление, называемое упругостью насыщенного пара. Эта величина возрастает с увеличением температуры. Ниже приведены значения упругости (Па) насыщенных паров воды и ртути при разных температурах:

Температура, °С	20	40	60
Вода	$2{,}32\cdot10^3$	$7{,}12\cdot10^3$	$19{,}9\cdot10^3$
Ртуть	0,196	0,882	3,53

Образование насыщенных паров приводит к тому, что на свободной поверхности жидкости не может быть достигнуто давление ниже упругости насыщенного пара, соответствующей данной температуре.

Жидкость может испаряться не только со свободной поверхности, но и внутрь пузырей, образующихся в ней при определенных температуре и давлении. Такой фазовый переход называется кипением. Оно может наступить в покоящейся или движущейся жидкости при температуре, равной температуре кипения при данном давлении, или при давлении, равном упругости насыщенного пара при данной температуре.

Как показывают физические исследования, кипение возникает лишь в том случае, если в жидкости имеются пузырьки защемленного у стенок газа или если такие пузырьки образуются вследствие выделения газа, растворенного в жидкости. Тогда при повышении температуры или понижении давления жидкость испаряется внутрь пузырьков, они растут в объеме и прорываются наружу через свободную поверхность. Возникает процесс кипения.

Если жидкость освобождена от растворенного и защемленного газа, то процесс кипения не возникает даже при температуре, значительно превосходящей температуру кипения. Жидкости в таком состоянии называют перегретыми. Дегазированные жидкости не кипят и при понижении давления ниже упругости насыщенных паров. Доказано, что такие жидкости могут выдерживать значительные растягивающие напряжения.

Однако в технике приходится, как правило, иметь дело с жидкостями, в которых есть растворенный или защемленный в виде пузырьков газ. Технические жидкости не только не выдерживают растягивающих усилий, но и вскипают при давлениях, равных упругости насыщенных паров.

Кипение жидкостей приводит к нарушению сплошности среды, поэтому значения параметров, при которых оно наступает, определяют границу применимости всех выводов, основанных на гипотезе сплошности.

Для гидродинамики особый интерес представляет частный случай кипения, которое возникает в движущейся жидкости вследствие местных понижений давления до давления насыщенного пара. Такой вид кипения называют кавитацией. Последняя играет особую и главным образом отрицательную роль в гидродинамике машин и аппаратов и других технических приложениях. Кавитация может проявляться как в виде отдельных пузырьков, возникающих в местах пониженного давления и уносимых потоком (пузырьковая перемещающаяся кавитация), так и в виде сплошных, заполненных парами жидкости, полостей, присоединенных к поверхности обтекаемых тел (суперкавитация). Могут существовать и другие внешние проявления кавитации.

Кавитация, как правило, сопровождается изменением закономерностей течения в связи с нарушением сплошности, а также разрушением материала твердых стенок при схлопывании пузырьков вблизи границ течения. Некоторые гидродинамические устройства (например, измерители расхода жидкости) при появлении кавитации становятся неработоспособными. Исследование причин и механизма кавитационных разрушений лопастей гидравлических турбин, насосов, гребных винтов представляет собой одну из важных технических проблем.

Поведение жидкости при понижении давления существенно зависит от наличия в ней растворенного газа. Закономерность растворения газов в жидкостях в первом приближении устанавливается законом Генри, согласно которому концентрация газа, растворенного в жидкости, пропорциональна его давлению над раствором.

1.7. МОДЕЛИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ И МЕТОДЫ ГИДРОМЕХАНИКИ

Математическое описание движения жидкой среды общими дифференциальными уравнениями, учитывающими все физические свойства, присущие этой среде, является сложной задачей. Если даже ограничиться учетом только текучести, вязкости и сжимаемости, то и тогда уравнения движения, выражающие основные законы механики, оказываются настолько сложными, что пока не удалось разработать общих аналитических методов их решения. Применение численных методов интегрирования таких уравнений на базе современных ЭВМ также связано со значительными трудностями. Поэтому в гидромеханике широко используют различные упрощенные модели среды и отдельных явлений.

Под моделью реальной среды понимают такую гипотетическую среду, в которой учтены только некоторые физические свойства, существенные для определенного круга явлений и технических задач. Другие малосущественные свойства среды в модели не рассматриваются.

Одной из основных в гидромеханике является модель несжимаемой идеальной (или невязкой) жидкости. Так называется гипотетическая сплошная среда, обладающая текучестью, лишенная вязкости и полностью несжимаемая. Эта модель служит объектом исследования в разделе гидромеханики «Теория идеальной несжимаемой жидкости». Если не учитывать вязкость и сжимаемость жидкости, то можно существенно упростить математическое описание движения жидкости и получить многие решения в конечном замкнутом виде. Несмотря на значительную степень идеализации среды, теория несжимаемой невязкой жидкости в большинстве случаев дает не только качественно, но и количественно подтверждаемые опытным путем результаты, полезные для практических приложений. Но не менее существенное значение этой теории состоит в том, что она является базой для других моделей, более полно учитывающих свойства реальных сред. Однако следует подчеркнуть, что пренебрежение вязкостью приводит к значительной идеализации, поэтому теория идеальной несжимаемой жидкости может приводить к результатам, резко расходящимся с опытными данными.

Более полно свойства реальной жидкости учитываются в модели вязкой несжимаемой жидкости, которая представляет собой среду, обладающую текучестью и вязкостью, но абсолютно несжимаемую. Теория вязкой несжимаемой жидкости лишь в ограниченном числе случаев с простейшими условиями позволяет получить точные решения полных уравнений движения. Наибольшее значение в этой теории имеют приближенные уравнения и их решения. Такие уравнения получают путем отбрасывания в полных уравнениях движения тех членов, которые мало влияют на соответствие теоретических решений результатам опыта. Решения приближенных уравнений могут быть как точными, так и приближенными.

Как известно, капельные жидкости являются малосжимаемыми средами, поэтому для широкого круга теоретических и прикладных задач пренебрежение сжимаемостью вполне допустимо и мало влияет на вид получаемых решений и степень совпадения теоретических результатов с данными измерений. Но все же существуют случаи движения жидкостей, которые нельзя достаточно достоверно описать, если не учитывать сжимаемость. Примером может служить явление гидравлического удара в трубах, рассматриваемое далее.

Несмотря на то, что газы являются средами, легко сжимаемыми, это свойство не проявляется сколько-нибудь существенно, если скорость движения сравнительно невелика (ориентировочно при нормальных условиях менее 70 м/с). Поэтому для газов, текущих с малыми скоростями, применимы обе рассмотренные модели. Кроме того, как правило, при описании движения газов допустимо пренебрегать влиянием силы тяжести. Поэтому можно говорить о моделях идеальной невесомой несжимаемой жидкости (газа) или вязкой невесомой несжимаемой жидкости (газа).

Существуют и другие модели несжимаемых жидкостей, используемые в специальных разделах гидродинамики и учитывающие некоторые специфические свойства этих сред. К ним относятся, например, электропроводящие вязкие несжимаемые среды, изучаемые в магнитной гидродинамике, двухфазные несжимаемые среды, представляющие собой смеси жидкостей и газов или смеси жидкостей и твердых взвешенных частиц и т. п.

При скоростях, сопоставимых со скоростью звука в газе и, тем более, превышающих ее, сжимаемость существенно влияет на характер гидродинамических явлений и учитывать ее часто бывает более важно, чем даже учитывать вязкость. Движение газов с учетом их сжимаемости составляет объект изучения в газовой динамике, где основную роль играют две модели среды: идеальный (т. е. невязкий) газ и вязкий газ. В последние десятилетия получили широкое развитие разделы газовой динамики, в которых существенными являются электропроводимость, диссоциация молекул, степень разрежения и другие специфические особенности среды. Разработаны соответствующие модели этих сред и эффективные методы их исследования.

В настоящем курсе рассматриваются модели идеальной и вязкой несжимаемой жидкостей и лишь в небольшой степени идеального газа. Ниже приводится краткая характеристика только тех методов, которые применяются для решения задач, основанных на этих моделях.

Наиболее разработанной является группа аналитических методов, которые заключаются в составлении дифференциальных (иногда интегральных или конечных) уравнений движения, учитывающих специфику конкретного гидродинамического явления, и в отыскании точных или приближенных их решений. Тот или иной метод может быть построен на одной из указанных моделей среды. Кроме того, на основе предварительного изучения составляется расчетная модель или схема данного явления, в которой по возможности полно учитываются его существенные свойства. Общие уравнения движения упрощаются на основе учета характерных особенностей данного явления или задачи, и выбирается подходящий математический метод решения полученных таким путем уравнений.

Важную роль при этом играет выбор рациональной системы координат; одну и ту же задачу, не разрешимую в произвольно выбранной системе, можно решить, если выбрать подходящую специальную систему координат. Граничные условия при математической формулировке задачи назначаются в соответствии с данными предварительного качественного изучения явления или логического анализа. Математический аппарат, применяемый в гидромеханике, весьма разнообразен, но наиболее широко используемыми разделами математики являются обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, функции комплексного переменного, интегральные уравнения, численные методы.

Выше отмечалась важная роль эксперимента в гидромеханике. Можно добавить, что иногда он является единственной возможностью получения эффективного, т. е. пригодного для практического использования решения задачи.

Широкое применение находят полуэмпирические методы, которые состоят в том, что на основе некоторой модели явления теоретически устанавливается структура (общий вид) зависимости между искомыми параметрами, а входящие в нее константы или вспомогательные функциональные связи определяются экспериментально.

Тесно связана с экспериментальным методом его теоретическая основа — теория подобия. В этом разделе гидромеханики устанавливают те условия и правила, по которым результаты экспериментов на макетах следует переносить на натурный объект. Этим, однако, роль теории подобия не исчерпывается, так как она служит эффективным средством обобщения и обработки экспериментальных данных, а также дает методы качественного анализа гидродинамических явлений. Последнюю функцию выполняет также теория размерностей, тесно связанная с теорией подобия.

Следует также упомянуть о методе аналогий, использующем то обстоятельство, что некоторые явления разной физической природы (например, электрические, магнитные, тепловые, гидродинамические) могут описываться одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями. Это позволяет, например, гидродинамические явления воспроизводить на электрических моделях; для течения несжимаемой жидкости применять метод, разработанный применительно к газовым течениям, и т. п.

Выше указаны только главные группы методов, применяемые в гидромеханике. Каждая из них включает несколько частных методов или специальных приемов. В настоящем курсе читатель познакомится с методами, которые отвечают рассматриваемому кругу задач.

2. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

2.1. ДВА МЕТОДА ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Кинематика жидкости является разделом гидромеханики, в котором движение изучается вне зависимости от действующих сил; в кинематике устанавливаются связи между координатами жидких частиц, их скоростями, ускорениями и другими параметрами, а также закономерности их изменения во времени.

Благодаря текучести жидкой среды отсутствуют жесткие связи между ее отдельными частицами, и общий характер движения оказывается более сложным, чем характер движения твердого тела.

Понятие скорости, одно из основных в кинематике, применительно к движению жидкости требует известной конкретизации. Так как жидкие частицы перемещаются в общем случае с разными скоростями, то употребляется термин «скорость жидкой частицы». Однако последняя представляет собой сплошную совокупность материальных точек, заполняющих некоторый малый объем, деформируемый во время движения. Поэтому приведенный термин оказывается недостаточно конкретным. Условимся под скоростью частицы понимать скорость некоторой ее точки, условно выбираемой и называемой полюсом.

В опытах наблюдать движение жидких частиц и измерять их скорости можно различными способами. Простейшим является подкрашивание частиц краской той же плотности, что и изучаемая жидкость. Наблюдения за поведением таких подкрашенных частиц показывают, что при определенных условиях, которые будут установлены в гл. 6, частицы могут двигаться упорядоченно, образуя слоистое или ламинарное течение (от лат. lamina — пластина, полоска). При других условиях частицы, наряду с основным движением по некоторому преимущественному направлению, перемещаются из слоя в слой, их мгновенные скорости резко изменяются по величине и направлению. Иными словами, в этом случае на упорядоченное движение частиц накладывается хаотическое или пульсационное движение, приводящее к разрушению слоистой структуры и перемешиванию слоев. Такое движение получило название турбулентного (от лат. turbulentus — беспорядочный). Столь сложное движение жидкости требует специфических способов его математического описания.

Одним из таких способов является определение зависимости от времени координат точки, в которой в данный момент находится наблюдаемая жидкая частица. Эту зависимость можно выразить в координатной форме

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),$$

или в векторной

$$r = r(t),$$

где r — радиус-вектор точки с координатами x, y, z; t — время.

Но, очевидно, для описания движения конечной массы жидкости этой зависимости недостаточно, так как в ней не содержатся параметры, выделяющие данную частицу из бесконечного множества других. В качестве таких параметров можно, например, выбрать значения декартовых прямоугольных координат α, β, γ той точки пространства, в которой частица находилась в начальный момент времени t_0. Тогда положение любой частицы в произвольный момент времени будет определено зависимостями

$$x = x(t, \alpha, \beta, \gamma);\ y = y(t, \alpha, \beta, \gamma);\ z = z(t, \alpha, \beta, \gamma)$$

или векторной функцией

$$r = r(t, \alpha, \beta, \gamma).$$

Имея эту зависимость, можно выразить мгновенную скорость жидкой частицы в виде вектора

$$u = \partial r/\partial t \tag{2.1}$$

или в проекциях на оси координат

$$u_x = \partial x/\partial t;\ u_y = \partial y/\partial t;\ u_z = \partial z/\partial t. \tag{2.1$'$}$$

Ускорение и его проекции определяются формулами

$$a = \partial^2 r/\partial t^2; \tag{2.2}$$

$$a_x = \partial^2 x/\partial t^2;\ a_y = \partial^2 y/\partial t^2;\ a_z = \partial^2 z/\partial t^2. \tag{2.2$'$}$$

Если параметры α, β, γ зафиксированы, то приведенными соотношениями устанавливаются кинематические характеристики конкретной жидкой частицы, аналогично тому, как определяются соответствующие характеристики материальной точки. При изменении величин α, β, γ осуществляется переход от одной жидкой частицы к другой, таким образом можно охарактеризовать движение всей конечной массы жидкости. Изложенный способ описания движения жидкой среды называется методом Лагранжа *, а параметры α, β, γ — переменными Лагранжа.

---

* Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — выдающийся французский математик и механик, член Парижской академии наук. Автор фундаментальных исследований по многим разделам математики. Основоположник аналитической механики.

Несмотря на весьма полную информацию о движении массы жидкости, которую дает этот метод, он не получил преимущественного применения в гидромеханике и употребляется только для решения некоторых специальных задач. Это связано с тем, что уравнения движения, составленные на основе метода Лагранжа, сложны и трудноразрешимы.

Наиболее широкое применение в гидромеханике находит метод Эйлера *, который заключается в описании поля скоростей в пространстве, занятом движущейся жидкостью. Он основан на понятии местной скорости или скорости в точке (этим термином обозначают скорость жидкой частицы, находящейся в выбранной точке пространства в данный момент времени). В общем случае местные скорости различны в один и тот же момент времени в разных точках и наряду с этим могут изменяться во времени в каждой точке. Таким образом, если $\boldsymbol{u}$ — вектор местной скорости, то в общем случае

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.3}$$

или в форме проекций

$$u_x = u_x(x, y, z, t);\; u_y = u_y(x, y, z, t);\; u_z = u_z(x, y, z, t), \tag{2.3'}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки с координатами x, y, z, называемыми переменными Эйлера.

Этими функциями характеризуется поле скоростей движущейся жидкости, т. е. совокупность значений вектора $\boldsymbol{u}$, определенного в каждой точке пространства или его части.

Если местная скорость $\boldsymbol{u}$ явно зависит от времени, т. е. изменяется с течением последнего, то движение и соответствующее ему поле скоростей называют неустановившимися или нестационарными. Если в каждой точке пространства вектор $\boldsymbol{u}$ имеет постоянное во времени значение, то движение и поле скоростей будут установившимися или стационарными. В этом случае

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{2.4}$$

или в проекциях на оси координат

$$u_x = u_x(x, y, z);\; u_y = u_y(x, y, z);\; u_z = u_z(x, y, z). \tag{2.4'}$$

Ламинарные течения могут быть как установившимися, так и неустановившимися, но турбулентные течения, строго говоря, всегда являются неустановившимися; неупорядоченное движение

* Леонард Эйлер (1707—1783) — один из крупнейших математиков мира. Швейцарец по происхождению, он длительное время жил и работал в Петербурге (1727—1741) и с 1766 г. до конца жизни являлся действительным членом Петербургской академии наук. Помимо выдающихся математических работ Л. Эйлер опубликовал ряд основополагающих результатов по гидромеханике, в том числе дифференциальные уравнения равновесия и движения невязкой жидкости.

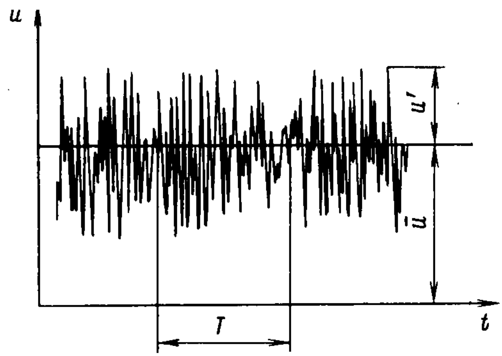


Рис. 2.1. Пульсации скорости в турбулентном потоке

частиц в турбулентном потоке создает резкие изменения местных скоростей во времени, называемые пульсациями скорости.

На рис. 2.1 приведены результаты измерений местной мгновенной скорости турбулентного потока воздуха. Местная скорость изменяется во времени достаточно резко, однако ее значение колеблется около некоторого среднего. Поскольку использование в расчетах мгновенных скоростей приводит к трудностям и некоторой неопределенности, вводится понятие местной усредненной скорости

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} u\, dt, \tag{2.5}$$

где u — мгновенная местная скорость; t — произвольный момент времени; T — период усреднения.

Способ усреднения, выраженный соотношением (2.5), не является единственно возможным, но благодаря простоте его широко применяют в гидромеханике. При этом предполагается, что операция повторного усреднения не изменяет результата, т. е.

$$\bar{\bar{u}} = \bar{u}.$$

Проекции вектора усредненной скорости

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} u_x\, dt;\quad \bar{u}_y = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} u_y\, dt;\quad \bar{u}_z = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} u_z\, dt. \tag{2.5'}$$

Разность векторов u и $\bar{u}$ называют пульсационной скоростью или просто пульсацией:

$$u' = u - \bar{u};$$

$$u'_x = u_x - \bar{u}_x;\quad u'_y = u_y - \bar{u}_y;\quad u'_z = u_z - \bar{u}_z.$$

Нетрудно убедиться, что усредненное значение пульсации равно нулю:

$$\frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} u'\, dt = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} (u - \bar{u})\, dt = \bar{u} - \bar{u} = 0.$$

В случае, показанном на рис. 2.1, усредненная скорость от времени не зависит. Турбулентное течение при этом условно называют усредненно установившимся или просто установившимся. Однако возможны случаи, когда усредненная местная скорость закономерно изменяется во времени. Такое течение называют усредненно неустановившимся. Операция усреднения для таких течений требует некоторого уточнения.

Имея в виду действительный характер движения реальных жидкостей, в дальнейшем будем считать местные скорости непрерывными дифференцируемыми функциями координат и времени, независимо от того, какое реальное течение (ламинарное или турбулентное) они описывают. Только в особых случаях будем допускать существование разрывов скоростей и их производных на некоторых поверхностях, линиях или в точках.

Если функции (2.3) или (2.4) определены, то можно не только составить представление о характере движения массы жидкости, но и найти кинематические характеристики, необходимые для составления динамических уравнений движения.

Поскольку законы механики (второй закон Ньютона, закон количества движения и т. п.) сформулированы применительно к материальным телам, каковыми в механике жидкости и газа являются жидкие частицы и их конечные совокупности, то необходимо уметь, пользуясь методом Эйлера, выражать ускорения $\boldsymbol{a}$ жидких частиц. В соответствии с физическим смыслом оно определяется полной производной вектора скорости по времени:

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/dt.$$

Для выражения этого ускорения в переменных Эйлера учтем, что для движущейся частицы ее координаты являются функциями времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$. Тогда проекции скорости u_x, u_y, u_z будут сложными функциями времени:

$$u_x = u_x\,[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t];$$

$$u_y = u_y\,[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t];\quad u_z = u_z\,[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t].$$

Используя правило дифференцирования сложных функций, для проекций полного ускорения получим

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt};$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\frac{dz}{dt};$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Поскольку для движущейся частицы $dx/dt = u_x$, $dy/dt = u_y$, $dz/dt = u_z$, окончательно

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z};\\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z};\\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}\tag{2.6}$$

Для представления ускорения

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{du_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{du_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{du_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

в компактной форме введем оператор Гамильтона

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Рассматривая величину ∇ формально как вектор с проекциями $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$, представим первую формулу системы (2.6) в виде

$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\left(u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)u_x.$$

Аналогично представим проекции a_y и a_z.

Учитывая, что выражение в круглой скобке имеет структуру скалярного произведения $\boldsymbol{u}\nabla$ * и выражая вектор ускорения в виде $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, получим символическую форму полного ускорения жидкой частицы:

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}. \tag{2.7}$$

Как следует из выражения (2.7), ускорение складывается из двух частей. Первая — $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$, называемая локальной производной, выражает изменение во времени вектора $\boldsymbol{u}$ в фиксированной точке пространства. Эта величина определяет местное или локальное ускорение. Вторая часть — $(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}$ называется конвективной производной вектора $\boldsymbol{u}$. Эта величина выражает изменение скорости в пространстве в данный момент времени.

В частном случае установившегося движения локальное ускорение равно нулю и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}.$$

Полная производная $d\boldsymbol{u}/dt$ в формуле (2.7) называется еще индивидуальной или субстанциональной производной.

2.2. ЛИНИИ И ТРУБКИ ТОКА. РАСХОД ЖИДКОСТИ

Наглядное представление о поле скоростей движущейся жидкости можно получить, если построить векторные линии этого поля, называемые в гидромеханике линиями тока. По определению линия тока есть кривая, в каждой точке которой вектор скорости в данный момент времени направлен по касательной. Очевидно, при установившемся движении линии тока во времени неизменны, тогда как при неустановившемся они в разные моменты

---

* В действительности $\boldsymbol{u}\nabla$ не обладает всеми свойствами скалярного произведения, так как, например, $\boldsymbol{u}\nabla\neq\nabla\boldsymbol{u}$.

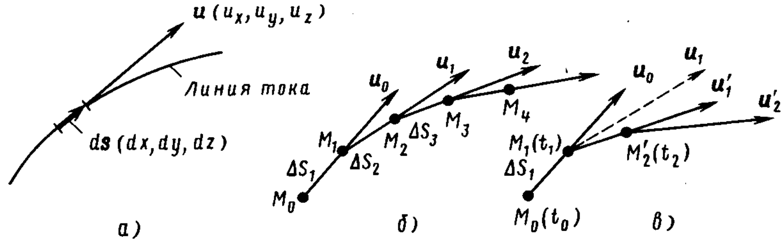


Рис. 2.2. Схема к построению линий тока и траекторий

могут иметь разную форму. Возможно, однако, и такое неустановившееся течение, при котором форма линий тока сохраняется, но изменяются местные скорости.

Уравнение семейства линий тока можно получить исходя из их определения, согласно которому вектор местной скорости $\boldsymbol{u}$ (u_x, u_y, u_z) должен быть коллинеарен направленному отрезку дуги линии тока ds (dx, dy, dz) (рис. 2.2, *а*).

Так как одноименные проекции коллинеарных векторов пропорциональны, то

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z. \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8), состоящее из двух независимых дифференциальных уравнений (третье уравнение является их следствием), определяет форму линий тока. При неустановившемся движении время t, от которого зависят u_x, u_y, u_z, рассматривается как параметр.

Выясним взаимосвязь между линиями тока и траекториями жидких частиц. Пусть в некоторой точке M_0 в момент t_0 скорость имеет значение u_0. Построим линию тока следующим образом. Отложим на векторе $\boldsymbol{u}_0$ малый отрезок Δs_1 (рис. 2.2, *б*) и в точке M_1 построим присущий ей вектор $\boldsymbol{u}_1$. Затем на этом векторе отложим отрезок Δs_2 и аналогично построим вектор $\boldsymbol{u}_2$ и т. д. Важно подчеркнуть, что все построение выполняют для одного фиксированного момента времени t_0, а потому безразлично, является течение установившимся или неустановившимся. Если отрезки Δs_i примем достаточно малыми, то приближенно получим кривую, удовлетворяющую определению линии тока.

Попытаемся теперь подобным образом построить траекторию той жидкой частицы, которая в момент t_0 находилась в точке M_0. Пусть за малое время Δt_1 она проходит путь Δs_1 (рис. 2.2, *в*). В линейном приближении этот путь можно считать совпадающим с направлением вектора $\boldsymbol{u}_0$. Тогда в конце интервала Δt_1 частица попадает в точку M_1. Если движение установившееся, то скорость в этой точке будет той же, какой она была в момент t_0. В этом случае частица далее переместится по направлению вектора $\boldsymbol{u}_1$, достигнет точки M_2 и т. д. Очевидно, ее траектория совпадает с линией тока. Если же движение неустановившееся, то за время

Δt_1 вектор u_1 изменится и к моменту перемещения частицы в точку M_1 ее скорость будет u_1'. Следовательно, из точки M_1 частица направится вдоль вектора u_1' и не попадет в точку M_2, поэтому и траектория ее не совпадет с линией тока.

Таким образом, линии тока и траектории совпадают только при установившемся движении жидкости.

Обратим внимание на то, что линии тока не могут пересекаться ни в одной точке, где скорость не равна нулю или бесконечности (теоретически допускается сколь угодно большое значение скорости в отдельных точках). Действительно, если бы две линии тока пересекались в одной точке, где скорость конечна, то это означало бы, что частица, находящаяся в этой точке в один и тот же момент времени, имеет две разные скорости, что физически невозможно. Если же в данной точке $u = 0$ или $u = \infty$, то через нее может проходить несколько или даже бесконечное множество линий тока. Такие точки называются критическими. Они являются особыми точками дифференциальных уравнений линий тока.

Кроме линий тока и траекторий иногда используют понятие линии отмеченных частиц. Так называют линию, на которой в данный момент расположены частицы, прошедшие в разное время через одну и ту же точку пространства. При установившемся движении линии отмеченных частиц совпадают с траекториями и линиями тока.

Введем еще одно важное понятие. Выберем в жидкости замкнутый контур l (рис. 2.3) и проведем через каждую его точку линию тока. Получим трубчатую поверхность, которую называют трубкой тока. Если контур l мал, то трубку тока называют элементарной. В пределах поперечного сечения элементарной трубки тока распределение скоростей жидких частиц принимают равномерным, а сечение считают плоским. Очевидно, жидкость не может протекать через боковую поверхность трубки тока, так как на ней $u_n = 0$.

Совокупность частиц, ограниченных поверхностью элементарной трубки тока, обычно называют элементарной струйкой, а поток конечных размеров рассматривают как совокупность элементарных струек. Таким образом мы приходим к струйной модели потока жидкости.

Если поперечное сечение потока в каждой его точке нормально к вектору скорости, то его называют живым сечением. В общем случае живые сечения криволинейны, а распределение скоростей в них неравномерно. Такие сечения существуют не для всех потоков. Можно доказать, что условием существования живых сечений потока конечных размеров является соотношение $u \cdot \mathrm{rot}\, u = 0$, т. е. ортогональность вектора скорости и его ротора.

Обозначим через dS вектор площадки (в векторном анализе элементарные площадки рассматриваются как векторные величины, направление которых определяется их нормалями, а модули равны их площадям) любого поперечного сечения элементарной

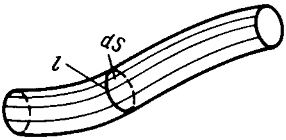


Рис. 2.3. Элементарная трубка тока

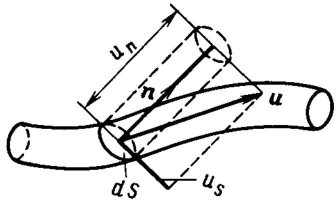


Рис. 2.4. Схема для определения объемного расхода

трубки тока (рис. 2.4). Составим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u}$ и $d\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = u_n\,dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к площадке; u_n — проекция скорости на нормаль $\boldsymbol{n}$.

Величина $u_n dS$ будет положительной, если векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{n}$ образуют острый угол, и отрицательной, если этот угол тупой.

Абсолютная величина $u_n dS$ представляет собой объем dQ жидкости, протекшей через площадку dS за единицу времени. Действительно, вектор скорости можно разложить на составляющие: нормальную u_n и касательную u_s к площадке. При этом только нормальная составляющая u_n обусловливает протекание жидкости через площадку. За единицу времени протекает количество жидкости объемом $|u_n dS| = dQ$.

В дальнейшем величину dQ будем называть объемным расходом элементарной струйки.

Рассматривая произвольное конечное сечение площадью S реального потока жидкости, определим

$$Q = \left|\int\limits_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}\right| = \left|\int\limits_S u_n\,dS\right| \tag{2.9}$$

как объемный расход жидкости через это сечение.

Соответственно абсолютные значения величин

$$dM = \rho u_n\,dS \text{ и } M = \int\limits_S \rho u_n\,dS \tag{2.10}$$

называют массовым расходом элементарной струйки и массовым расходом через поверхность площадью S.

2.3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (СПЛОШНОСТИ)

Закон сохранения массы для движущейся произвольным образом жидкости выражается уравнением неразрывности или сплошности, которое является одним из фундаментальных уравнений гидромеханики. Для его вывода проведем в жидкости фиксированную в пространстве замкнутую поверхность S (рис. 2.5), ограничивающую объем W, и выделим на ней элемен-

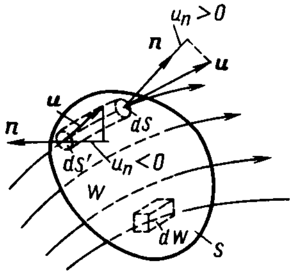


Рис. 2.5. Схема для вывода уравнения неразрывности

тарную площадку dS. Через n обозначим единичный вектор внешней к S нормали. Тогда произведение $\rho u_n dS$ будет представлять собой массу, вытекающую из объема W или поступившую в него за единицу времени, в зависимости от направления скорости на площадке dS. Так как n внешняя нормаль, то $u_n > 0$ на тех площадках dS, где жидкость вытекает из объема W, и $u_n < 0$ на той части поверхности S, через которую она втекает в этот объем. Следовательно, интеграл $\int\limits_S \rho u_n\, dS$ представляет собой разность масс жидкости, вытекшей из объема и поступившей в него за единицу времени. Допустим, что внутри объема W есть источники или точки поглощения массы, в которых она генерируется или поглощается с быстротой $\theta = d\rho_*/dt$ (где ρ_* — плотность жидкости в точках генерации или поглощения) в расчете на единицу объема.

Из-за неодинаковости притока и оттока массы через поверхность S, а также из-за притока или поглощения массы через источники, плотность ее в каждой точке будет изменяться с быстротой $\partial\rho/\partial t$, а изменение массы в объеме W за единицу времени равно $\int\limits_W \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dW$.

Закон сохранения массы теперь можно выразить уравнением

$$\int\limits_W \frac{\partial\rho}{\partial t} dW = -\int\limits_S \rho u_n\, dS + \int\limits_W \theta\, dW. \tag{2.11}$$

Знак минус перед первым интегралом правой части взят потому, что этот интеграл положителен, если через поверхность S за единицу времени вытекает больше жидкости, чем втекает, что способствует уменьшению плотности во времени, т. е. обусловливает отрицательное значение левой части выражения (2.11). Иными словами, интегралы $\int\limits_W \frac{\partial\rho}{\partial t} dW$ и $\int\limits_S \rho u_n dS$ всегда имеют разные знаки.

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_S \rho u_n\, dS = \int\limits_W \left(\frac{\partial\rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho u_z}{\partial z}\right) dW.$$

В векторном анализе сумма частных производных от проекций вектора по одноименным координатам называется дивергенцией или расхождением вектора. В данном случае

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{u} = \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z},$$

поэтому уравнение (2.11) можно переписать в виде

$$\int_W (\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{u} - \theta)\, dW = 0.$$

Так как объем W произвольный, подынтегральная функция равна нулю, т. е.

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{u} = \theta. \qquad (2.12)$$

Это уравнение является уравнением неразрывности в дифференциальной форме для произвольного движения сжимаемой жидкости. Соотношение (2.11) представляет собой интегральную форму уравнения неразрывности.

Если будем рассматривать условие сохранения массы движущегося жидкого объема, то придем также к уравнению (2.12), которому в этом случае можно придать иной вид.

Поскольку $\rho = \rho\,(x, y, z, t)$ и при движении жидкого объема $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, $z = z\,(t)$, то

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) =$$

$$= \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial \rho}{\partial z} =$$

$$= \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

т. е. уравнение (2.12) будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \theta$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \theta, \qquad (2.13)$$

где $d\rho/dt$ — индивидуальная производная плотности.

Следует подчеркнуть, что дифференциальные формы уравнения неразрывности дают связь между величинами в произвольной точке движущейся среды. Для точек, где нет генерации или поглощения массы, $\theta = 0$ и вместо выражения (2.13) будем иметь

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \qquad (2.14)$$

В дальнейшем будем рассматривать только этот случай.

Для установившегося движения сжимаемой жидкости $\partial\rho/\partial t = 0$ и, следовательно, из уравнения (2.12) при $\theta = 0$ получаем

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{u} = 0. \qquad (2.15)$$

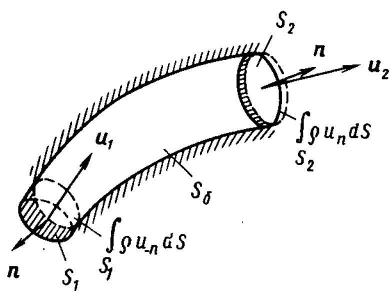


Рис. 2.6. Схема для вывода гидравлической формы уравнения неразрывности

Для любого движения несжимаемой жидкости $d\rho/dt = 0$. Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \qquad (2.16)$$

В технических расчетах существенное значение имеет гидравлическая форма уравнения неразрывности (уравнение расхода).

Рассмотрим установившийся поток сжимаемой жидкости в трубе произвольной формы (рис. 2.6). Поверхностью $S = S_1 + S_2 + S_б$ ограничим некоторый отсек жидкости в трубе. Согласно уравнению (2.11) при установившемся движении ($\partial\rho/\partial t = 0$) и отсутствии источников ($\theta = 0$)

$$\int\limits_S \rho u_n\, dS = \int\limits_{S_1} \rho u_n\, dS + \int\limits_{S_2} \rho u_n\, dS + \int\limits_{S_б} \rho u_n\, dS = 0.$$

Так как боковая поверхность $S_б$ непроницаема, то на ней $u_n = 0$ и, следовательно,

$$\int\limits_{S_б} \rho u_n\, dS = 0, \text{ а } \int\limits_{S_1} \rho u_n\, dS = -\int\limits_{S_2} \rho u_n\, dS.$$

Принимая во внимание, что на поверхности S_1 нормали направлены наружу выделенного отсека и $u_n = -u_{-n}$, где u_{-n} — проекция скорости на внутреннюю нормаль, запишем

$$\int\limits_{S_1} \rho u_{-n}\, dS = \int\limits_{S_2} \rho u_n\, dS.$$

Если поверхности S_1 и S_2 нормальны в каждой точке линиям тока, то, обозначив площади живых сечений потока в трубе через ω_1 и ω_2 и учитывая, что в сечении ω_1 скорость $u_{-n} = u_1$, а в сечении ω_2 скорость $u_n = u_2$, представим последнее уравнение в форме

$$\int\limits_{\omega_1} \rho u_1\, d\omega = \int\limits_{\omega_2} \rho u_2\, d\omega, \qquad (2.17)$$

выражающей равенство массовых расходов через живые сечения ω_1 и ω_2.

Если эти сечения плоские, а распределение скоростей и плотностей в каждом из них равномерное, то из выражения (2.17) получаем

$$\rho_1\omega_1 u_1 = \rho_2\omega_2 u_2. \qquad (2.18)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и, следовательно,

$$u_1\omega_1 = u_2\omega_2.$$

Отсюда видно, что объемный расход $Q = u\omega$ несжимаемой жидкости остается постоянным вдоль трубы.

Если распределение скоростей в живом сечении неравномерное, то вводя в рассмотрение среднюю скорость, определяемую отношением $v = Q/\omega$, получим широко употребляемую в технических расчетах гидравлическую форму уравнения неразрывности

$$v_1\omega_1 = v_2\omega_2. \qquad (2.19)$$

2.4. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Решения некоторых технических задач основываются на использовании ортогональных криволинейных координат. Будем считать, что декартовы прямоугольные координаты x, y, z являются непрерывными функциями трех переменных q_1, q_2, q_3, которые примем за криволинейные координаты, т. е. $x = x(q_1, q_2, q_3)$; $y = y(q_1, q_2, q_3)$; $z = z(q_1, q_2, q_3)$. Для вывода уравнения неразрывности выделим с помощью криволинейных координатных поверхностей элементарный фиксированный в пространстве объем dW с ребрами ds_1, ds_2, ds_3, расположенными вдоль координатных линий (рис. 2.7).

Из математики известно, что если q_1, q_2, q_3 образуют криволинейную ортогональную систему, то длины дуг ds_1, ds_2, ds_3 связаны с приращениями независимых переменных dq_1, dq_2, dq_3 соотношениями

$$ds_1 = H_1dq_1;\ ds_2 = H_2dq_2;\ ds_3 = H_3dq_3, \qquad (2.20)$$

где H_i $(i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты Ляме;

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \qquad (2.21)$$

Пусть далее u_1, u_2, u_3 — проекции вектора местной скорости на оси q_1, q_2, q_3 в точке O. Тогда в единицу времени через грань *1-2* протечет масса жидкости $\rho u_1 ds_2 ds_3 = \rho u_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3$, а через противоположную грань *3-4* — масса

$$\rho u_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(\rho u_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3) dq_1.$$

Следовательно, разность масс, вытекшей из объема dW и поступившей в него в направлении оси q_1 за единицу времени, составит $\frac{\partial}{\partial q_1}(\rho u_1 H_2 H_3)\, dq_1 dq_2 dq_3$.

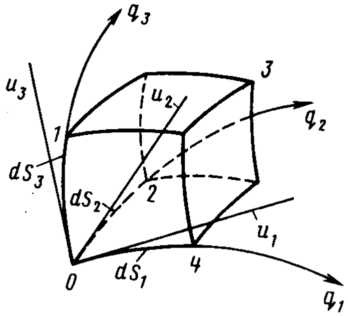


Рис. 2.7. Схема для вывода уравнения неразрывности в криволинейной ортогональной системе координат

В направлении двух других осей аналогичные разности масс имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(\rho u_2 H_1 H_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3; \quad \frac{\partial}{\partial q_3}(\rho u_3 H_1 H_2)\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

С другой стороны, если в некоторый момент масса жидкости в объеме dW составляла $\rho ds_1 ds_2 ds_3 = \rho H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$, то ее изменение в единицу времени составит

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3) = \frac{\partial \rho}{\partial t} H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Приравнивая выражения для изменения массы в объеме dW (выражая закон сохранения массы), получаем

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(\rho u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\rho u_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\rho u_3 H_1 H_2) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} H_1 H_2 H_3$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\rho u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\rho u_2 H_1 H_3) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(\rho u_3 H_1 H_2)\right] = 0. \qquad (2.22)$$

Для несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(u_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(u_3 H_1 H_2) = 0. \qquad (2.23)$$

Рассмотрим важный для практических приложений частный случай цилиндрической системы координат (рис. 2.8), полагая $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$. При этом $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Для коэффициентов Ляме получаем выражения $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$.

Уравнение неразрывности (2.22) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z r)\right] = 0. \qquad (2.24)$$

Для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \qquad (2.25)$$

Уравнение (2.24) неразрывности применяют для решения задач теории турбомашин и др.

2.5. ОБЩИЙ ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ. ТЕОРЕМА КОШИ-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Выясним, как происходит движение жидкой частицы и чем оно отличается от движения твердого тела. Для этого рассмотрим сначала произвольное движение твердого тела относительно некоторой системы координат x, y, z. Как известно из механики, такое движение можно разложить на перемещение тела вместе

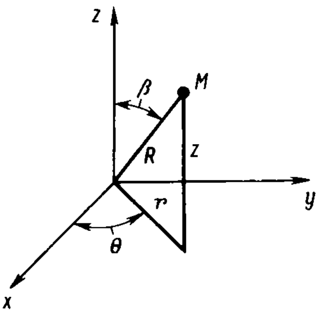


Рис. 2.8. Цилиндрическая (r, θ, z) и сферическая (R, β, θ) системы координат

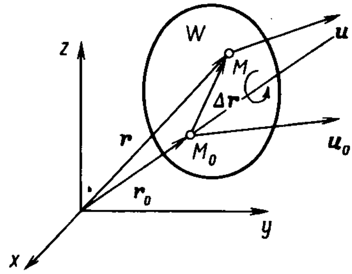


Рис. 2.9. Схема для вывода связи между скоростями двух точек движущегося тела

с некоторой его точкой M_0 и вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку (рис. 2.9). Тогда скорость произвольной точки M можно выразить через скорость $\boldsymbol{u}_0$ точки M_0 и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{r}, \qquad (2.26)$$

где $\Delta \boldsymbol{r}$ (Δx, Δy, Δz) $= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M относительно точки M_0, причем $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) и $\boldsymbol{r}_0$ (x_0, y_0, z_0) — соответственно радиусы-векторы точек M и M_0 относительно начала координат.

Согласно правилу проектирования векторного произведения получаем

$$\begin{aligned} u_x &= u_{0x} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y = u_{0x} + \omega_y (z - z_0) - \omega_z (y - y_0); \\ u_y &= u_{0y} + \omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z = u_{0y} + \omega_z (x - x_0) - \omega_x (z - z_0); \qquad (2.26') \\ u_z &= u_{0z} + \omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x = u_{0z} + \omega_x (y - y_0) - \omega_y (x - x_0). \end{aligned}$$

Выразим проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ через изменения скоростей u_x, u_y, u_z по координатам. Так, дифференцируя второе равенство системы (2.26') по z, а третье по y, находим

$$\partial u_y / \partial z = -\omega_x \text{ и } \partial u_z / \partial y = \omega_x,$$

откуда

$$\omega_x = (\partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z)/2.$$

Аналогично получим

$$\omega_y = (\partial u_x / \partial z - \partial u_z / \partial x)/2;$$

$$\omega_z = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y)/2.$$

Эти формулы будем использовать при дальнейшем анализе движения жидкой частицы.

Очевидно, связь между скоростями точек движущейся жидкой частицы должна быть более сложной, так как в процессе движения частица деформируется и расстояния между ее точками изменяются. Пусть тело W (рис. 2.9) представляет собой жидкую частицу. Выберем в ней точки M и M_0 достаточно близкими и разложим в ряд Тейлора мгновенные значения проекций u_x, u_y, u_z скорости в точке M, ограничиваясь линейными членами ряда. Для компоненты u_x имеем

$$u_x = u_{0x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_0 \Delta z,$$

где Δx, Δy, Δz — проекции вектора $\Delta \boldsymbol{r}$, а индексом 0 отмечены значения производных в точке M_0.

Используя тождества

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

приведем выражение для u_x к виду

$$u_x = u_{0x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0 \Delta z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_0 \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0 \Delta z. \tag{2.27}$$

Не повторяя рассуждений, по аналогии выпишем формулы, которые можно получить для двух других компонент скорости:

$$u_y = u_{0y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \Delta x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)_0 \Delta z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)_0 \Delta z; \tag{2.28}$$

$$u_z = u_{0z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)_0 \Delta y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0 \Delta x +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_0 \Delta z. \tag{2.29}$$

Согласно правилу составления формул для проекций векторного произведения, вторые и третьи члены правых частей выражений (2.27)—(2.29) образуют проекции векторного произведения некоторого вектора ω на радиус-вектор $\Delta \boldsymbol{r}$, причем

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{2.30}$$

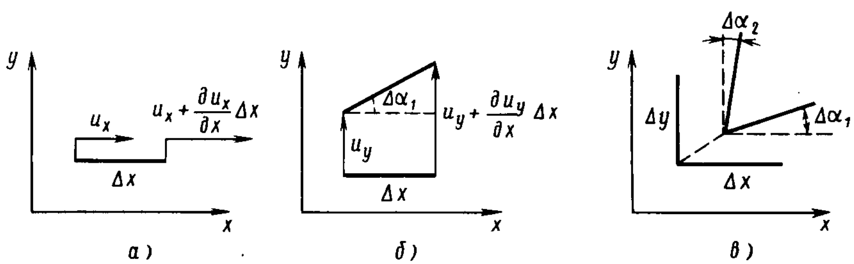


Рис. 2.10. Деформация жидких отрезков и углов

Сравнивая эти формулы с приведенными выше выражениями проекций вектора угловой скорости твердого тела, можно заключить, что жидкая частица, так же как и твердое тело, вращается с угловой скоростью ω (ω_x, ω_y, ω_z) относительно некоторой мгновенной оси.

В гидромеханике, наряду с вектором ω, вращение частиц характеризуют вектором $\Omega = 2\omega = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$, который называется вихрем или ротором вектора $\boldsymbol{u}$.

Как видно из выражений (2.27)—(2.29), для жидкой частицы формулой (2.26) определяется лишь некоторая часть вектора скорости $\boldsymbol{u}$, которую можно назвать скоростью $\boldsymbol{u}_{\text{кт}}$ квазитвердого движения. Полная же скорость определяется формулами (2.27)—(2.29), которые можно представить в векторной форме:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\text{кт}} + \boldsymbol{u}_{\text{деф}}, \qquad (2.31)$$

где $\boldsymbol{u}_{\text{кт}} = \boldsymbol{u}_0 + \omega \times \Delta r$; $\boldsymbol{u}_{\text{деф}}$— скорость, обусловленная деформацией жидкой частицы.

Чтобы выяснить смысл вектора $\boldsymbol{u}_{\text{деф}}$, рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть малый жидкий отрезок Δx (рис. 2.10, *а*) движется вдоль оси x. Если u_x — скорость его левого конца, то скорость правого конца будет $u_x + (\partial u_x/\partial x)\,\Delta x$. Из-за разницы этих скоростей за время Δt длина отрезка изменится на величину $(\partial u_x/\partial x)\,\Delta x\,\Delta t$, а скорость этого изменения будет $(\partial u_x/\partial x)\,\Delta x$. Следовательно, в формулах (2.27)—(2.29) члены вида $(\partial u_x/\partial x)\,\Delta x$, $(\partial u_y/\partial y)\,\Delta y$, $(\partial u_z/\partial z)\,\Delta z$ представляют собой скорости удлинений соответствующих элементарных отрезков или, иначе, скорости линейных деформаций. Очевидно, производные $\partial u_x/\partial x = \varepsilon_{xx}$, $\partial u_y/\partial y = \varepsilon_{yy}$, $\partial u_z/\partial z = \varepsilon_{zz}$ являются скоростями удельных линейных деформаций или скоростями удлинений отрезков единичной длины.

Теперь рассмотрим движение жидкого отрезка Δx вдоль оси y (рис. 2.10, *б*). Если скорость его левого конца u_y, то скорость правого $u_y + (\partial u_y/\partial x)\,\Delta x$. Из-за неодинаковости скоростей отрезок Δx за время Δt переместится и повернется на угол

$$\Delta\alpha_1 \approx \mathrm{tg}\,(\Delta\alpha_1) = \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x\,\Delta t = \frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta t.$$

Его угловая скорость будет $\Delta\alpha_1/\Delta t = \partial u_y/\partial x$. Рассуждая аналогично, можно убедиться, что угловая скорость отрезка Δy (рис. 2.10, *в*) равна $\partial u_x/\partial y$.

Вследствие вращения отрезков Δx и Δy, образовывавших вначале прямой угол, произойдет угловая деформация частицы в плоскости xy. Скорость угловой деформации определится суммой $\partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y$. В гидродинамике за меру скорости угловой деформации принимают половину этой суммы. Таким образом, приходим к выводу, что величины

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right);$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \qquad (2.32)$$

характеризуют скорости угловых деформаций (или деформаций сдвига). Теперь формулы (2.27)—(2.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \varepsilon_{xx} \Delta x + \varepsilon_{xy} \Delta y + \varepsilon_{xz} \Delta z; \\ u_y &= u_{y0} + \omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z + \varepsilon_{yx} \Delta x + \varepsilon_{yy} \Delta y + \varepsilon_{yz} \Delta z; \qquad (2.33) \\ u_z &= u_{z0} + \omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x + \varepsilon_{zx} \Delta x + \varepsilon_{zy} \Delta y + \varepsilon_{zz} \Delta z. \end{aligned}$$

Эти формулы выражают теорему Коши—Гельмгольца *: в общем случае движение жидкой частицы можно разложить на переносное вместе с некоторым полюсом, вращательное с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс, и деформационное, которое заключается в линейных деформациях со скоростями ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} и угловых деформациях со скоростями $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$.

Следует отметить, что эта теорема указывает лишь на один из возможных способов разложения сложного движения жидкой частицы на простейшие составляющие. Однако он является физически наиболее обоснованным, так как определяет главные характерные особенности движения жидкой среды.

В частных случаях некоторые из составляющих движения могут отсутствовать. Особый интерес представляет движение частиц без вращения или безвихревое движение ($\omega = 0$), имеющее ряд замечательных свойств. Прежде чем переходить к его изучению, выясним основные закономерности более общего, вихревого движения, когда $\omega \neq 0$.

---

* Огюстен Луи де Коши (1789—1857) — французский математик. Инженер по образованию, он был автором многих фундаментальных исследований по разным разделам математики и механики (теория пределов, функции комплексного переменного, движение жидкостей и др.).

Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик, математик, физиолог и психолог, выполнил ряд выдающихся исследований по физике, механике и физиологии. Создал основы теории струйных и вихревых движений.

2.6. ВИХРЕВЫЕ ЛИНИИ И ТРУБКИ. ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА. ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕЙ

Рассмотрим случай, когда в каждой точке пространства, занятого движущейся жидкостью, вектор ω отличен от нуля, т. е. все частицы вращаются. Для поля вектора ω можно построить векторные линии. Назовем кривую, в каждой точке которой вектор ω в данный момент направлен по касательной, вихревой линией. Тогда элементарные отрезки ds такой линии (рис. 2.11) будут служить мгновенными осями вращения тех жидких частиц, которые на них расположены. Очевидно, указанное движение возможно лишь благодаря деформациям вращающихся жидких частиц, поскольку вихревая линия, вообще говоря, криволинейна и в целом не может служить осью вращения конечного объема жидкости.

Дифференциальное уравнение вихревых линий легко получить из условия коллинеарности вектора угловой скорости ω (ω_x, ω_y, ω_z) и элементарного направленного отрезка дуги вихревой линии ds (dx, dy, dz). Условие пропорциональности одноименных проекций этих векторов имеет вид

$$dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z. \tag{2.34}$$

Зная функции ω_x (x, y, z), ω_y (x, y, z), ω_z (x, y, z), из системы двух уравнений (2.34), можно найти конфигурацию вихревых линий.

Проведем через точки малого замкнутого контура dl (рис. 2.12) вихревые линии. Полученную трубчатую поверхность будем называть элементарной вихревой трубкой, а совокупность ограниченных ею частиц — вихревым шнуром. Если площадь $d\sigma$ поперечного сечения вихревого шнура достаточно мала, то можно принять, что в его пределах вектор ω имеет постоянное значение. Скалярное произведение dJ векторов ω и $d\sigma$ называется интенсивностью или напряженностью вихревой трубки и служит мерой вихревого движения:

$$dJ = \omega \cdot d\sigma = \omega_n \, d\sigma. \tag{2.35}$$

Возьмем теперь произвольную поверхность σ и, разбив ее на

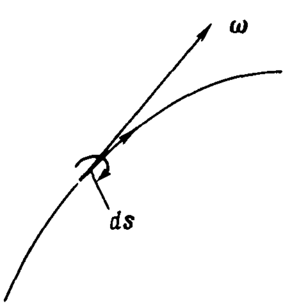


Рис. 2.11. Вихревая линия

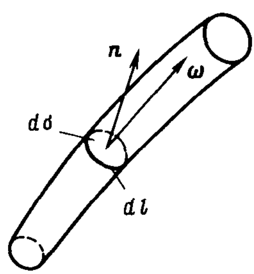


Рис. 2.12. Вихревая трубка

элементарные площадки $d\sigma$, построим на каждой из них вихревую трубку. Суммарная интенсивность этих трубок представляет собой поток вектора ω через поверхность σ:

$$J = \int_\sigma \omega \cdot d\sigma = \int_\sigma \omega_n \, d\sigma. \qquad (2.36)$$

Величина $2J = 2\int_\sigma \omega_n \, d\sigma = \int_\sigma \Omega_n \, d\sigma$ представляет собой поток вектора вихря Ω через поверхность σ или просто поток вихрей.

Можно ввести понятие о конечной вихревой трубке, если провести вихревые линии через точки произвольного замкнутого контура L (рис. 2.13). В пределах поперечного сечения σ такой конечной трубки вектор ω будет, вообще говоря, переменным.

Докажем теорему Гельмгольца: *поток вихрей через поперечное сечение вихревой трубки в данный момент времени постоянен по ее длине.*

Выделим объем W, ограниченный боковой поверхностью $\sigma_б$ вихревой трубки и двумя ее поперечными сечениями σ_1 и σ_2. Поток вихрей через поверхность $\sum = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_б$ можно представить в виде

$$\int_\Sigma \omega_n \, d\sigma = \int_{\sigma_1} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_б} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_n \, d\sigma.$$

На поверхности $\sigma_б$ $\omega_n \equiv 0$, так как вектор ω направлен по касательной к поверхности вихревой трубки. Следовательно, второй интеграл в правой части последнего равенства равен нулю. Кроме того, по теореме Гаусса—Остроградского $\int_\Sigma \omega_n \, d\sigma = \int_W \operatorname{div} \omega \, dW$.

Поскольку $\omega = (1/2) \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ и, как легко убедиться непосредственным вычислением, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv 0$,

$$\int_\Sigma \omega_n \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_W \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \, dW = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\sigma_1} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_n \, d\sigma = 0.$$

Учитывая, что на поверхности σ_1 нормаль $\boldsymbol{n}_1$ направлена наружу объема W, заменим ее на внутреннюю $-\boldsymbol{n}_1$. Тогда последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int_{\sigma_1} \omega_{-n} \, d\sigma = \int_{\sigma_2} \omega_n \, d\sigma, \qquad (2.37)$$

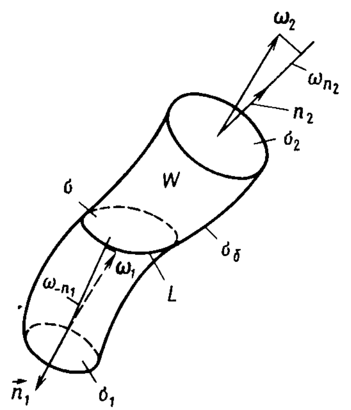
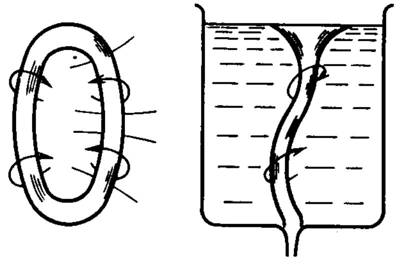


Рис. 2.13. Схема для доказательства теоремы Гельмгольца

Рис. 2.14. Вихревые трубки:

а — замкнутая; *б* — с концами на границах области, занятой жидкостью



а) б)

что и доказывает теорему Гельмгольца. Если вихревая трубка является элементарной, то в пределах каждого из сечений $\omega_n = \text{const}$, тогда

$$\omega_{-n_1}\sigma_1 = \omega_{n_2}\sigma_2. \tag{2.38}$$

Из уравнений (2.37) и (2.38) следует, что поскольку угловые скорости не могут быть бесконечно большими, ни в одной точке внутри жидкости площадь сечения вихревой трубки не может обратиться в нуль. Вихревая трубка не может также начаться или закончиться внутри жидкости конечным сечением. В самом деле, это означало бы, что при переходе частиц через такое сечение внутрь жидкости вектор ω должен измениться скачком от конечного значения до нуля, что противоречит предложению о непрерывности поля скоростей. Вихревые трубки должны быть либо замкнутыми, имеющими вид вихревых колец (рис. 2.14, *а*), либо иметь концы, лежащие на границах области, занятой жидкостью (рис. 2.14, *б*). Вихревые трубки в виде колец можно наблюдать, например, при начальной стадии истечения жидкости через отверстие в среду той же плотности (рис. 2.15).

Структура вихревых движений реальных жидкостей многообразна. В некоторых случаях возникают крупные вихри, которые можно наблюдать визуально, если в жидкость ввести краску или специальные вещества. На рис. 2.16 приведен фотоснимок такого вихря, образующегося при обтекании острого ребра.

Но вихревое движение не всегда сопровождается образованием визуально наблюдаемых вихревых шнуров. Например, при прямоли-

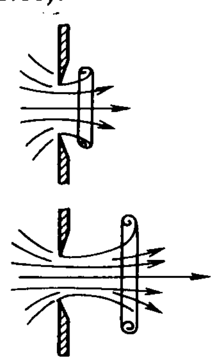


Рис. 2.15. Формирование вихревого кольца при истечении струи жидкости в среду той же плотности

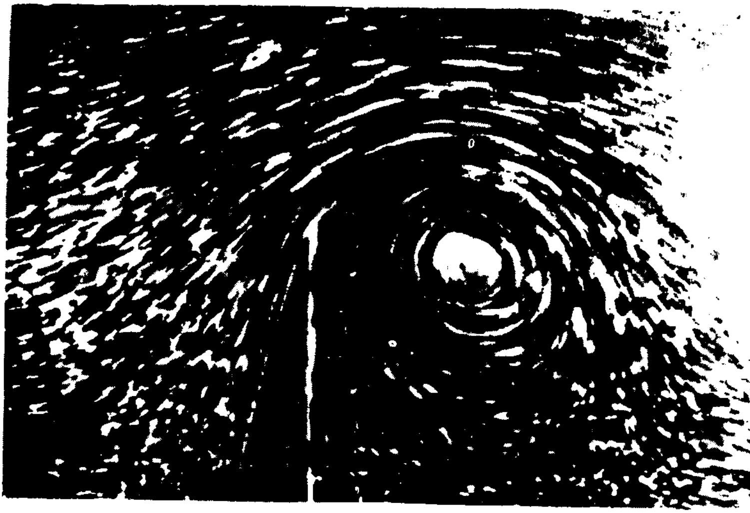


Рис. 2.16. Вихрь, образующийся при обтекании заостренной кромки

нейном перемещении вязкой жидкости между неподвижными плоскими параллельными стенками (рис. 2.17) проекции ее скорости в системе координат xy равны $u_x = f(y)$, $u_y = u_z = 0$, где $f(y)$ — непрерывная функция, а проекции вектора угловой скорости ω согласно выражениям (2.30) $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$. Отсюда следует, что данное течение — вихревое, причем вектор ω во всех точках параллелен оси z (нормален плоскости чертежа); при этом вихревые линии представляют собой прямые, нормальные линиям тока. Однако вихревая структура течения в данном случае визуально не наблюдается. Движение данного типа может быть безвихревым, т. е. происходить без вращения частиц, только при $f(y) = \text{const}$. Последнее означает равномерность распределения скоростей по толщине потока (однородность поля), что в реальных условиях невозможно из-за прилипания вязких жидкостей к твердым стенкам.

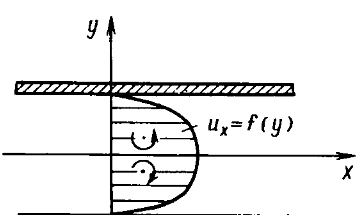


Рис. 2.17. Вихревое движение жидкости между параллельными пластинами

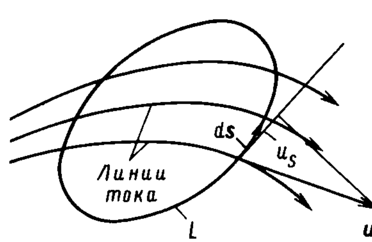


Рис. 2.18. Схема для определения циркуляции скорости по замкнутому контуру

Течения реальных жидкостей между твердыми стенками, как правило, являются вихревыми и в других случаях. Наряду с упорядоченными элементарными вихрями, непрерывно распределенными в области течения, в таких потоках могут образовываться зоны, заполненные крупными, визуально наблюдаемыми вихрями, подобными показанным на рис. 2.16.

2.7. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ И ТЕОРЕМА СТОКСА

Интенсивность вихрей является прямой характеристикой вихревого движения, но ее нельзя непосредственно измерить. Кроме того, в некоторых расчетах удобнее оперировать такой мерой вихревого движения, которая выражалась бы не через угловую, а через поступательную скорость. Этому отвечает понятие циркуляции скорости.

Циркуляцией Г вектора скорости $\boldsymbol{u}$ по некоторому контуру называется криволинейный интеграл от скалярного произведения $\boldsymbol{u}$ на элементарный вектор $d\boldsymbol{s}$ дуги контура L (рис. 2.18):

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{2.39}$$

Циркуляцию можно представить в виде

$$\Gamma = \oint_L u\cos(s,\ u)\,ds = \oint_L u_s\,ds = \oint_L u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz, \tag{2.40}$$

где dx, dy, dz — проекции вектора $d\boldsymbol{s}$.

Отметим свойства циркуляции, вытекающие из ее определения как криволинейного интеграла:

1) циркуляция скорости по всему контуру равна сумме циркуляций по отдельным его участкам;

2) при изменении направления обхода контура на обратное изменяется знак циркуляции (условимся считать положительной циркуляцию, которая получается, если контур обходить так, чтобы ограниченная им область оставалась слева).

Связь между циркуляцией и интенсивностью вихрей устанавливается теоремой Стокса *. Сформулируем и докажем ее для односвязной (А) и многосвязной (Б) областей.

А. *Циркуляция скорости по замкнутому контуру, ограничивающему односвязную область, равна потоку вихрей через эту область.*

---

* Джорж Габриель Стокс (1819—1903) — выдающийся английский физик и математик, автор ряда исследований по математике и гидродинамике. Дал вывод уравнений движения вязкой жидкости (см. гл. 5), исследовал закон медленного движения шара в жидкости и волны на поверхности жидкости. Получил ряд важных математических результатов, в числе которых излагаемая теорема.

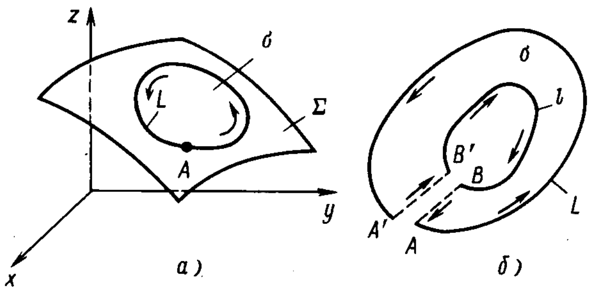


Рис. 2.19. Схема для доказательства теоремы Стокса

Для доказательства на произвольной незамкнутой поверхности $\sum$ расположим замкнутый, не пересекающий себя контур L (рис. 2.19, *а*), ограничивающий площадь σ.

Как известно из теории криволинейных интегралов, если на поверхности $\sum$ заданы три непрерывные и дифференцируемые функции P, Q и R, то для них справедлива формула Стокса

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,\ x)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,\ y)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,\ z)\right]d\sigma=\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Выбирая в качестве функций P, Q и R проекции скорости u_x, u_y и u_z соответственно и применяя формулу Стокса, получаем

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\cos(n,\ x)+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\cos(n,\ y)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\cos(n,\ z)\right]d\sigma=\oint_L u_x\,dx+u_y\,dy+u_z\,dz. \quad (2.41)$$

Разности производных, стоящие в круглых скобках под знаком интеграла, представляют собой, очевидно, удвоенные компоненты вектора угловой скорости ω, а правая часть является циркуляцией скорости по выбранному контуру. Учтем, кроме того, геометрические соотношения: $d\sigma\cos(n,\ x)=d\sigma_x$; $d\sigma\cos(n,\ y)=d\sigma_y$; $d\sigma\cos(n,\ z)=d\sigma_z$, где $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ — проекции площадки $d\sigma$ на плоскости, нормальные осям x, y, z. Эти величины можно рассматривать как проекции вектора $d\sigma$. Тогда выражение (2.41) можно записать в виде

$$2\int_\sigma \omega_x\,d\sigma_x+\omega_y\,d\sigma_y+\omega_z\,d\sigma_z=\Gamma.$$

Подынтегральное выражение в последнем равенстве представляет собой скалярное произведение векторов ω и $d\sigma$. Следовательно,

$$\Gamma=2\int_\sigma \omega\cdot d\sigma=2\int_\sigma \omega\cdot n\,d\sigma=2\int \omega_n\,d\sigma. \quad (2.42)$$

Правая часть выражения (2.42) есть поток вихрей через область σ, т. е. удвоенная интенсивность вихрей, пронизывающих эту область. Равенством (2.42) доказывается теорема Стокса для односвязной области.

Б. ***Поток вихрей через многосвязную область равен разности между циркуляцией по внешнему контуру L и суммой циркуляций по всем внутренним контурам l_i.***

Докажем теорему вначале для двухсвязной области. Для этого соединим внешний L и внутренний l контуры «перемычкой», как показано на рис. 2.19, *б*. Точки A и A', B и B' расположим достаточно близко одна к другой. Сложный контур $ALA'B'lBA$ ограничивает односвязную область и к нему применима теорема Стокса, доказанная в п. А. Следовательно, $\Gamma_{ALA'B'lBA} = 2J$, где J — суммарная интенсивность вихрей, пронизывающих область σ. Разбивая криволинейный интеграл, которым выражается циркуляция, на интегралы по отдельным участкам, получаем

$$\Gamma_{ALA'} + \Gamma_{A'B'} + \Gamma_{B'lB} + \Gamma_{BA} = 2J.$$

Будем приближать точку A' к точке A и B' к B. Тогда в пределе получим $\Gamma_{AB} = -\Gamma_{B'A'}$, поскольку эти величины представляют собой криволинейные интегралы, взятые по одному и тому же отрезку AB, проходимому дважды в противоположных направлениях. Следовательно,

$$\Gamma_{ALA'} + \Gamma_{B'lB} = 2J.$$

Учтем, наконец, что $\Gamma_{ALA'} = \Gamma_L$ и $-\Gamma_{B'lB} = \Gamma_l$ представляют собой циркуляции соответственно по внешнему и внутреннему контурам, взятые в одном направлении. Тогда

$$\Gamma_L - \Gamma_l = 2J = 2\int_\sigma \omega_n \, d\sigma, \tag{2.43}$$

что и доказывает теорему Стокса для двухсвязной области. Обобщение доказательства для многосвязной области не составляет труда. Нетрудно убедиться, что

$$\Gamma_L - \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{li} = 2J, \tag{2.44}$$

где Γ_{li} — циркуляции по внутренним контурам n-связной области.

Таким образом, циркуляция скорости по замкнутому контуру может служить, наряду с интенсивностью J, мерой вихревого движения. Использование циркуляции в теоретических вычислениях и практических расчетах очень удобно и эффективно.

2.8. БЕЗВИХРЕВОЕ ИЛИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим частный случай, когда установившееся движение жидкости происходит без вращения частиц, т. е. предположим, что во всем объеме, занятом жидкостью, $\omega \equiv 0$. Это условие можно записать в виде

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0; \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0,$$

что равносильно системе

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{2.45}$$

Из теории криволинейных интегралов известно, что соотношения (2.45) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы трехчлен вида $u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz$ представлял собой полный дифференциал некоторой функции трех переменных, которую обозначим через $\varphi(x, y, z)$. Таким образом,

$$u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = d\varphi.$$

Учитывая, что полный дифференциал выражается формулой

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

можно записать

$$u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Так как это равенство выполняется при любых dx, dy, dz, коэффициенты при дифференциалах независимых переменных в левой и правой частях должны быть равны, т. е.

$$u_x = \partial\varphi/\partial x; \quad u_y = \partial\varphi/\partial y; \quad u_z = \partial\varphi/\partial z. \tag{2.46}$$

Следовательно, при безвихревом движении проекции вектора скорости $\boldsymbol{u}$ являются частными производными некоторой функции φ, называемой потенциалом скорости. Так как равенства (2.46) остаются справедливыми, если заменить φ на $\varphi + C$, где $C = \text{const}$, то следует считать, что потенциал скорости определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Вектор скорости можно представить в виде

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.47}$$

или

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{2.48}$$

Приведенные рассуждения и соотношения справедливы также для неустановившегося движения. В этом случае их можно применить к любому фиксированному моменту времени, которое будет играть роль параметра, и, следовательно, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$.

Используя понятие производной по направлению, легко показать, что для любого направления $u_s = \partial\varphi/\partial s$.

Действительно, обозначим через s^0 единичный вектор выбранного направления s. Тогда согласно выражениям (2.48) и (2.47)

$$u_s = \mathrm{grad}_s\,\varphi = s^0 \cdot \mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(s,\ x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(s,\ y) +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(s,\ z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}. \quad (2.49)$$

Следовательно, проекция вектора скорости на любое направление равна производной потенциала скорости по этому направлению:

$$u_s = u\cos(s,\ u) = \partial\varphi/\partial s. \quad (2.50)$$

Рассмотрим два частных направления s^0.

А. $s^0 \parallel u$. Для этого случая $\cos(s,\ u) = 1$, и производная по этому направлению принимает наибольшее значение, равное модулю вектора скорости: $\partial\varphi/\partial s = u$. Иными словами, вектор скорости $\boldsymbol{u}$ указывает направление быстрейшего изменения функции φ. Так как вектор $\boldsymbol{u}$ касателен к линии тока, то вдоль нее функция φ изменяется быстрее, чем в любом другом направлении.

Б. $s^0 \perp u$. В этом случае $\cos(s,\ u) = 0$ и $\partial\varphi/\partial s = 0$. Следовательно, вдоль данного направления функция φ остается постоянной. Но в пространстве бесконечно много направлений, ортогональных к вектору скорости u. В каждой точке линии тока они образуют некоторую поверхность, называемую эквипотенциальной, уравнение которой имеет вид

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \mathrm{const}. \quad (2.51)$$

Таким образом, в потенциальном или безвихревом потоке жидкости можно построить семейства эквипотенциальных поверхностей и совокупность линий тока, каждая из которых пересекает любую эквипотенциальную поверхность и перпендикулярна ей (рис. 2.20).

Рассмотрим произвольную (не обязательно эквипотенциальную) поверхность $\sum$ и замкнутый контур L, расположенный на ней (см. рис. 2.19). Если поток во всех точках является безвихре-

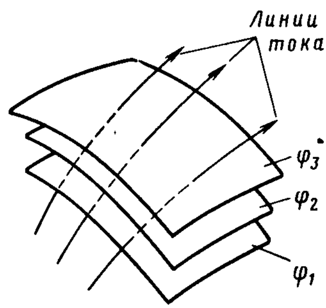


Рис. 2.20. Ортогональность линий тока эквипотенциальным поверхностям

вым, то согласно теореме Стокса $\Gamma_L = 0$. Учитывая общее выражение (2.40) циркуляции, получаем

$$\Gamma_L = \int_L u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \oint \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz =$$

$$= \oint d\varphi = \varphi_{A'} - \varphi_A = 0,$$

где $\varphi_{A'}$ и φ_A — значения потенциала скорости в точке A после обхода контура и его исходное значение в этой точке соответственно.

Так как $\varphi_{A'} = \varphi_A$, следовательно, после обхода контура значение потенциала скорости не изменилось. Иными словами, если поток внутри некоторой замкнутой области потенциален, то его потенциал скорости является однозначной функцией.

Если хотя бы в одной точке внутри контура поток является вихревым, то согласно теореме Стокса циркуляция не будет равна нулю (исключением является случай, когда вихри имеют разные знаки и таковы, что их суммарная интенсивность равна нулю) и в результате рассуждений, подобных приведенным выше, получим

$$\varphi_{A'} = \varphi_A + \Gamma_L.$$

Следовательно, если внутри области потенциальность нарушается, то потенциал является функцией многозначной, изменяющейся на величину циркуляции после каждого обхода контура. При наличии вихрей внутри области она перестает быть односвязной. Подробнее этот случай изложен в работе [14].

2.9. ПЛОСКИЕ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ФУНКЦИЯ ТОКА И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА

Свойства течений, изложенные в предыдущих параграфах, справедливы для любых пространственных (трехмерных) течений несжимаемой или сжимаемой жидкости. Здесь же рассмотрим частный, но практически важный случай плоского течения несжимаемой жидкости, т. е. такого, в котором: а) конфигурация линий тока во всех плоскостях, нормальных некоторой прямой, одинакова и б) все линии тока являются плоскими кривыми, лежащими в этих плоскостях.

Выбрав указанную прямую в качестве одной из осей координат (например, z), заключаем, что для всего поля течения соответствующая проекция скорости равна нулю ($u_z = 0$).

Хотя, строго говоря, в природе плоских течений не встречается, однако существует много случаев, когда поток с достаточной для целей практики точностью может считаться плоским. Например, поток воздуха, обтекающий длинное цилиндрическое крыло (рис. 2.21, *а*), если из рассмотрения исключить области вблизи концов крыла; поток воды в широком прямоугольном канале (рис. 2.21, *б*), если из рассмотрения исключить области,

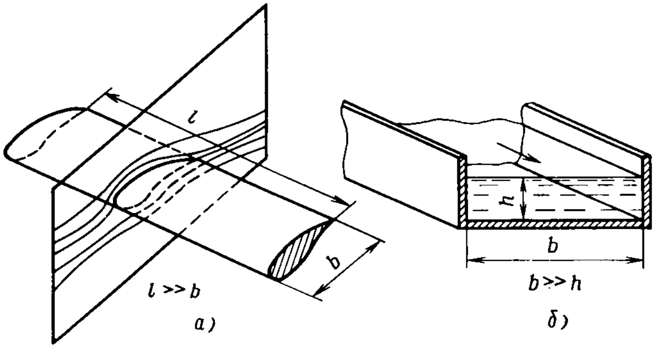


Рис. 2.21. Примеры плоских течений:
а — обтекание длинного цилиндрического крыла; б — течение в широком канале

примыкающие к боковым стенкам. Подобных примеров существует множество.

Изучение плоских течений существенно облегчается, во-первых, потому, что уравнения, их описывающие, значительно проще, чем в общем случае, а во-вторых, потому, что достаточно исследовать течение всего лишь в одной плоскости, чтобы составить представление о потоке в целом.

Пусть $u_z \equiv 0$. Тогда уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y = 0 \text{ или } \partial u_x/\partial x = -\partial u_y/\partial y, \tag{2.52}$$

а уравнение линий тока

$$dx/u_x = dy/u_y \text{ или } u_x\,dy - u_y\,dx = 0. \tag{2.53}$$

Соотношение (2.52) является условием необходимым и достаточным, чтобы левая часть выражения (2.53) была полным дифференциалом некоторой функции двух переменных. Обозначим эту функцию через ψ и назовем функцией тока. Тогда

$$u_x\,dy - u_y\,dx = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy.$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем

$$u_x = \partial\psi/\partial y; \quad u_y = -\partial\psi/\partial x. \tag{2.54}$$

Вдоль любой линии тока выполняется условие (2.53) и, значит, вдоль нее $d\psi = 0$ или $\psi = \mathrm{const}$, т. е. функция ψ сохраняет вдоль любой линии тока постоянное значение, которое, однако, различно для разных линий тока.

Чтобы выяснить физический смысл функции ψ, проведем две произвольные линии тока PQ и MN (рис. 2.22) и вычислим расход q жидкости, протекающей между ними, считая размер потока в направлении нормали к плоскости чертежа равным единице. Используя общее выражение расхода (2.9), получаем

$$q = \int_l u_n \, dl = \int_l \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, dl,$$

где l — произвольная кривая, соединяющая линии тока.

Иначе,

$$q = \int_l [u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y)] \, dl.$$

Как видно из рис. 2.22, $dl \cos(n, x) = dy$; $dl \cos(n, y) = -dx$. Тогда

$$q = \int_l u_x \, dy - u_y \, dx = \int_l \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int_l d\psi = \psi_B - \psi_A,$$

т. е. разность значений функции тока на двух линиях тока равна расходу жидкости между ними. Если $\psi_A = 0$, то $q = \psi_B$ и поэтому можно сказать, что ψ является расходной функцией.

Подчеркнем, что существование функции тока не зависит от наличия или отсутствия в жидкости вихрей; оно вытекает из уравнения (2.53) неразрывности для плоских течений и потому функция тока приведенного вида существует только для плоских течений. Если течение не плоское, а двумерное, т. е. одна из проекций скорости в какой-либо системе координат равна нулю, то функция тока также существует, однако связана с проекциями скорости соотношениями, отличными от (2.54) (см. п. 7.14).

Допустим, что поток не только плоский, но и потенциальный. Тогда в нем можно провести эквипотенциальные поверхности, которые в данном случае являются цилиндрическими и в пересечении с плоскостью течения дают плоские эквипотенциальные линии. Таким образом, плоский потенциальный поток несжимаемой жидкости характеризуется двумя ортогональными семействами кривых: $\psi = \text{const}$ (линии тока) и $\varphi = \text{const}$ (эквипотен-

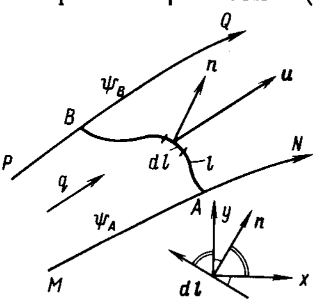


Рис. 2.22. Схема для объяснения физического смысла функции тока

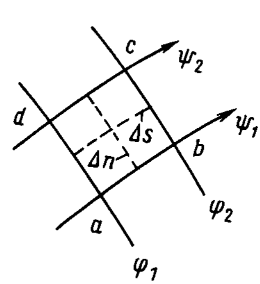
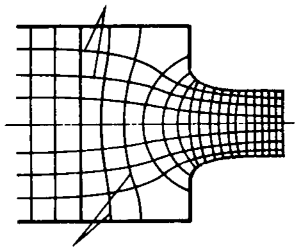


Рис. 2.23. К обоснованию квадратичности гидродинамической сетки

Рис. 2.24. Гидродинамическая сетка плоского потока



циали). Эти два семейства образуют гидродинамическую сетку, имеющую следующие свойства:

1) сетка ортогональна (доказательство вытекает из содержания п. 7.2);

2) одноименные линии сетки не пересекаются нигде, кроме точек с нулевой и бесконечной скоростью (критические или особые точки); для линий тока это уже доказано (п. 2.2), для эквипотенциалей это справедливо в силу ортогональности их линиям тока;

3) сетка в малом квадратична.

Рассмотрим малую ячейку *abcd* (рис. 2.23), образованную парой отрезков линий тока (*ab* и *dc*) и парой эквипотенциалей (*ad* и *bc*). Пусть Δn — отрезок средней эквипотенциали, а Δs — отрезок средней линии тока. Расход через ячейку можно выразить в виде

$$\Delta q = u\,\Delta n = \Delta\psi,$$

где $\Delta\psi$ — приращение функции тока на отрезке Δn между линиями тока *ab* и *dc*.

Но

$$u = \partial\varphi/\partial s \approx \Delta\varphi/\Delta s,$$

где $\Delta\varphi$ — приращение потенциала на отрезке Δs между эквипотенциалями *ad* и *bc*.

Тогда

$$\Delta q = \Delta\psi = (\Delta\varphi/\Delta s)\,\Delta n \quad \text{или} \quad \Delta\psi\,\Delta s = \Delta\varphi\,\Delta n.$$

Следовательно, если сетка состоит из малых криволинейных квадратов ($\Delta s \approx \Delta n$), то $\Delta\varphi \approx \Delta\psi$ и наоборот. В этом смысле употреблен термин «квадратичность».

Перечисленные свойства гидродинамической сетки позволяют использовать ее для определения параметров (в первую очередь, скоростей) плоских потенциальных потоков.

На рис. 2.24 показана гидродинамическая сетка, построенная для случая истечения жидкости под давлением из сосуда с плоскими стенками.

3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИДКОСТИ

3.1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТЯХ

Жидкости и газы всегда подвержены действию некоторых сил, которые являются в основном распределенными, т. е. приложенными во всех точках поверхности или объема. Однако в исключительных случаях в жидкостях могут действовать и сосредоточенные силы. Они возникают, например, как предельные значения распределенных сил, действующих на бесконечно малый жидкий объем, если его ускорение неограниченно возрастает.

По характеру действия распределенные силы можно разделить на поверхностные и массовые (объемные). К первым относятся силы вязкости и давления, а ко вторым — силы тяжести, инерции, электромагнитные и др.

Поверхностные силы являются результатом непосредственного воздействия на частицы жидкости соседних с ними частиц или других тел. Для качественного и количественного описания поверхностных сил служит понятие о напряжениях. В покоящемся или движущемся объеме жидкости W проведем произвольную поверхность S (рис. 3.1, *а*) и мысленно отбросим часть жидкости, расположенную справа от этой поверхности. Чтобы оставшаяся жидкость при этом сохранила состояние покоя или движения, приложим к ней по поверхности S распределенную систему сил, эквивалентную тому воздействию, которое оказывала отброшен-

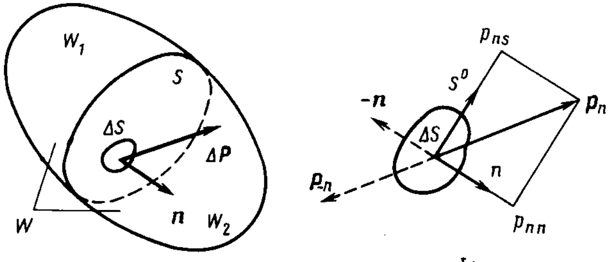


Рис. 3.1. Поверхностные силы и их напряжения:

а — ΔP — поверхностная сила, действующая на площадке ΔS; *б* — разложение вектора напряжения p_n на нормальную и касательную составляющие ная часть жидкости объемом W_2 на оставшуюся часть объемом W_1. Пусть на элементарную площадку ΔS, характеризуемую единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}$, действует сила $\Delta \boldsymbol{P}$.

Тогда

$$\lim_{\Delta S \to 0} (\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S) = \boldsymbol{p}_n \tag{3.1}$$

назовем напряжением поверхностных сил в той точке, к которой стягивается площадка ΔS. Заметим, что индекс n здесь обозначает не проекцию (ибо $\boldsymbol{p}_n$ — вектор), а ориентацию площадки ΔS в пространстве, т. е. указывает, что $\boldsymbol{p}_n$ — напряжение на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$.

По отношению к площадке вектор $\boldsymbol{p}_n$ в общем случае может быть направлен как угодно и потому он имеет нормальную и касательную составляющие. Из рис. 3.1, *б* видно, что

$$\boldsymbol{p}_n = p_{ns}\boldsymbol{s}^0 + p_{nn}\boldsymbol{n}, \tag{3.2}$$

где p_{nn} — проекция вектора $\boldsymbol{p}_n$ на направление нормали; p_{ns} — проекция вектора $\boldsymbol{p}_n$ на направление касательной к площадке ΔS.

В частном случае может быть $p_{ns} = 0$ и $\boldsymbol{p}_n = p_{nn}\boldsymbol{n}$.

Поскольку в каждой точке поверхности S, проведенной внутри жидкости, можно указать две нормали: $\boldsymbol{n}$ и $-\boldsymbol{n}$ (рис. 3.1, *б*), то им будут соответствовать два напряжения: $\boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{p}_{-n}$. Тогда силы $\boldsymbol{p}_n \Delta S$ и $\boldsymbol{p}_{-n} \Delta S$ будут выражать взаимное действие через площадку ΔS объемов жидкости, расположенных по обе стороны от нее. Согласно третьему закону Ньютона $\boldsymbol{p}_n \Delta S = -\boldsymbol{p}_{-n} \Delta S$ или $\boldsymbol{p}_n = -\boldsymbol{p}_{-n}$.

Соответственно векторам $\boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{p}_{-n}$ будем различать две стороны площадки ΔS, к которым эти векторы приложены, приписывая этим сторонам разные знаки.

Для характеристики массовых сил введем понятие о плотности их распределения. Если на элементарный объем ΔW жидкости действует сила $\Delta \boldsymbol{f}$, то вектор $\boldsymbol{F}$, определяемый условием

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta W \to 0} [\Delta \boldsymbol{f}/(\Delta W \rho)], \tag{3.3}$$

называется плотностью распределения массовых сил в той точке, к которой стягивается объем ΔW. Очевидно, $\boldsymbol{F}$ является массовой силой, приходящейся на единицу массы жидкости, и имеет размерность ускорения. В дальнейшем ее проекции на оси декартовых прямоугольных координат обозначаются через F_x, F_y, F_z.

Величины $\boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{F}$ являются основными характеристиками сил, действующих в жидкости. Они могут играть роль как внешних, так и внутренних сил. Напомним, что в механике внутренними силами системы материальных тел называют силы взаимодействия между телами, принадлежащими системе, а внешними — силы воздействия на тела системы других тел, к данной системе не принадлежащих. В механике жидкой среды материальными объектами, образующими систему, являются жидкие частицы или жидкие объемы. Соответственно напряжения p_n и p_{-n} будут внутренними, если они действуют в точках поверхности раздела между частицами или объемами, образующими выбранную систему. Если же поверхность является граничной для рассматриваемой совокупности жидких частиц системы, то напряжение p_{-n} — внешнее. Аналогично величина $\rho F W$ может быть внутренней силой, если она создается телом, включенным в рассматриваемую систему. Так, например, сила тяжести будет внутренней для системы океан—суша и внешней для любого выделенного объема воды в океане.

3.2. СВОЙСТВА НАПРЯЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

Выделим в движущейся жидкости элементарный объем ΔW в виде тетраэдра, три грани которого ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z лежат в координатных плоскостях, а четвертая ΔS_n нормальна направлению n (рис. 3.2). Обратим внимание на то, что грани ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z являются отрицательными площадками, поскольку нормалями к ним служат векторы $-i$, $-j$, $-k$.

Пусть p_x, p_y, p_z, p_n — напряжения, действующие на соответствующих гранях тетраэдра; a — вектор ускорения его центра масс. Тогда векторное уравнение движения жидкого тетраэдра, выражающее второй закон Ньютона, будет иметь вид

$$F\rho\,\Delta W + p_n\,\Delta S_n - p_x\,\Delta S_x - p_y\,\Delta S_y - p_z\,\Delta S_z = a\rho\,\Delta W.$$

Учтем, что $\lim\limits_{\Delta S_n \to 0} (\Delta W/\Delta S_n) = 0$, а $\Delta S_x/\Delta S_n = \cos(n, x) = \alpha_{nx}$ и т. д. Тогда, разделив все члены последнего уравнения на ΔS_n, в пределе получим

$$p_n = p_x\alpha_{nx} + p_y\alpha_{ny} + p_z\alpha_{nz}. \qquad (3.4)$$

Следовательно, напряжение на любой площадке ΔS_n можно выразить через напряжения на трех взаимно ортогональных площадках, которыми могут быть и координатные площадки. Соотношение (3.4) в проекциях на оси координат имеет вид

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha_{nx} + p_{yx}\alpha_{ny} + p_{zx}\alpha_{nz};\\ p_{ny} &= p_{xy}\alpha_{nx} + p_{yy}\alpha_{ny} + p_{zy}\alpha_{nz};\\ p_{nz} &= p_{xz}\alpha_{nx} + p_{yz}\alpha_{ny} + p_{zz}\alpha_{nz}. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

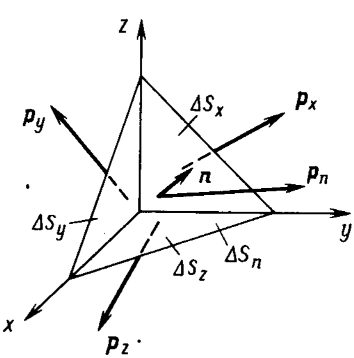


Рис. 3.2. Напряжения, действующие на гранях тетраэдра

Здесь, как можно видеть, для каждой из проекций p_{ij} употребляются два индекса, первый из которых указывает ориентацию площадки (ее нормаль), а второй — ось, на которую проектируется вектор. Так, например, величина p_{xx} есть проекция на ось x (второй индекс) напряжения p_x, действующего на площадке, нормальной к оси x (первый индекс). Поэтому p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} представляют собой нормальные к соответствующим площадкам напряжения. Разноименные индексы определяют касательные напряжения. Например, p_{yz} есть проекция на ось z напряжения p_y, приложенного к площадке, нормальной к оси y.

В дальнейшем для краткости проекции p_{ij} напряжений будем называть просто напряжениями.

Используя уравнение моментов, можно показать, что между касательными напряжениями существует связь вида

$$p_{xy} = p_{yx};\ p_{yz} = p_{zy};\ p_{zx} = p_{xz},$$

которая называется законом парности касательных напряжений.

Следовательно, напряженное состояние жидкости в точке определяется шестью независимыми скалярными величинами, три из которых являются нормальными напряжениями, а три — касательными [знаки и численные значения проекций векторов зависят от выбора осей координат, тогда как скалярные величины не зависят от него; поэтому проекции векторов (и другие аналогичные по свойствам величины) иногда называют псевдоскалярами]. Совокупность девяти величин типа p_{ij}, связанных соотношениями (3.5), образует тензор напряжений.

Из изложенного следует, что напряженное состояние в точке движущейся жидкости определяется тензорной величиной.

В реальных жидкостях нормальные напряжения могут создаваться как давлением одних частиц на другие, так и действием сил вязкости. Касательные напряжения являются результатом действия сил вязкости и зависят от давления лишь постольку, поскольку от него зависит коэффициент вязкости. Для модели идеальной жидкости (см. п. 7.1), в которой все касательные напряжения равны нулю, полные напряжения направлены по нормали к соответствующим площадкам и согласно равенствам (3.5) выражаются формулами

$$p_{nx} = p_{xx}\alpha_{nx};\ p_{ny} = p_{yy}\alpha_{ny};\ p_{nz} = p_{zz}\alpha_{nz}. \tag{3.6}$$

При этом напряжения должны быть сжимающими, т. е. направленными по внутренним нормалям, так как растягивающих усилий идеальная жидкость, как и технические жидкости, не выдерживает (см. п. 6.1). Поэтому величины p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} можно вычислить из соотношения

$$p_{nx} = p_n l = p_n \cos(n,\ x) = p_n\alpha_{nx};\ p_{ny} = p_n\alpha_{ny};\ p_{nz} = p_n\,\alpha_{nz}. \tag{3.6'}$$

Сопоставляя равенства (3.6) и (3.6'), получаем

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}.$$

Эти равенства показывают, что при отсутствии касательных напряжений нормальные напряжения не зависят от ориентации площадок и представляют собой давление p в точке жидкости, т. е.

$$p = -p_n = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}. \tag{3.7}$$

Очевидно, в силу выражения (3.7) вектор напряжения в данном случае можно представить в виде

$$\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}.$$

Знак минус показывает, что напряжение направлено по внутренней нормали, т. е. является сжимающим.

Заметим, что касательные напряжения равны нулю также в любой вязкой жидкости, находящейся в покое, так как при существовании любых сколь угодно малых сдвиговых усилий из-за легкоподвижности среды произошло бы относительное перемещение слоев, т. е. жидкость была бы выведена из состояния покоя. Следовательно, полученный вывод о независимости нормальных напряжений от ориентаций площадок справедлив для любой покоящейся жидкости. Давление p в этом случае называется гидростатическим.

3.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Для вывода уравнений движения жидкости выделим произвольный жидкий объем W, ограниченный поверхностью S, и запишем для него уравнение, выражающее закон количества движения: производная по времени количества движения системы равна сумме действующих на нее внешних сил.

Поскольку на каждую единицу массы действует сила $\boldsymbol{F}$, главный вектор массовых сил выражается интегралом $\int\limits_W \rho \boldsymbol{F}\, dW$. Главный вектор поверхностных сил получим, суммируя элементарные силы $\boldsymbol{p}_n\, dS$, распределенные по поверхности S: $\int\limits_S \boldsymbol{p}_n\, dS$.

Количество движения $\boldsymbol{K}$ массы жидкости в объеме W и его производную выразим интегралами

$$\boldsymbol{K} = \int\limits_W \rho \boldsymbol{u}\, dW; \quad \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_W \rho \boldsymbol{u}\, dW,$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость движения центра масс объема dW.

Уравнение количества движения запишем в форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_W \rho \boldsymbol{u}\, dW = \int\limits_W \rho \boldsymbol{F}\, dW + \int\limits_S \boldsymbol{p}_n\, dS.$$

Левую часть его представим в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_W \rho u\, dW = \int\limits_W \frac{du}{dt}\rho\, dW + \int\limits_W u\frac{d}{dt}(\rho\, dW).$$

Полагая массу жидкого объема постоянной, заключаем, что $\frac{d}{dt}(\rho\, dW) = 0$. Тогда уравнение количества движения примет вид

$$\int\limits_W \rho\frac{du}{dt}dW = \int\limits_W \rho F\, dW + \int\limits_S p_n\, dS. \tag{3.8}$$

Это уравнение представляет собой интегральную форму уравнения движения жидкости. Чтобы получить его дифференциальную форму, преобразуем поверхностный интеграл, входящий в него, в объемный. Для этого учтем, что согласно выражению (3.4)

$$\int\limits_S p_n\, dS = \int\limits_S [p_x\cos(n,\ x) + p_y\cos(n,\ y) + p_z\cos(n,\ z)]\, dS.$$

Используя известные из векторного анализа формулы, справедливые для любого вектора G,

$$\int\limits_S G\cos(n,\ x)\, dS = \int\limits_W \frac{\partial G}{\partial x}dW;\quad \int\limits_S G\cos(n,\ y)\, dS = \int\limits_W \frac{\partial G}{\partial y}dW;$$

$$\int\limits_S G\cos(n,\ z)\, dS = \int\limits_W \frac{\partial G}{\partial z}dW,$$

получим

$$\int\limits_S p_n\, dS = \int\limits_W \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right)dW.$$

Подставив это выражение в уравнение (3.8) и записав все члены уравнения по одну сторону от знака равенства, находим

$$\int\limits_W \left(\rho F + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} - \rho\frac{du}{dt}\right)dW = 0.$$

Поскольку это уравнение должно быть справедливым для любого объема W, то из равенства нулю интеграла вытекает равенство нулю подынтегральной функции.

Таким образом,

$$\rho F + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \rho\frac{du}{dt}. \tag{3.9}$$

Выражение (3.9) представляет собой векторную форму искомого уравнения движения жидкости в напряжениях, которое эквивалентно трем уравнениям в проекциях, имеющим вид

$$F_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) = \frac{du_x}{dt};$$
$$F_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right) = \frac{du_y}{dt}; \qquad (3.10)$$
$$F_z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) = \frac{du_z}{dt}.$$

В систему уравнений (3.10), называемых уравнениями движения в напряжениях, входят в качестве неизвестных функций три проекции скорости u_x, u_y, u_z и шесть независимых компонент тензора напряжений: p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$. Проекции массовых сил F_x, F_y, F_z, как правило, заранее известны. Поэтому для несжимаемой жидкости система (3.10) включает девять неизвестных функций и, следовательно, является незамкнутой. Для сжимаемой жидкости (газа) в число неизвестных должна быть включена также плотность ρ; поэтому, хотя систему (3.10) можно дополнить уравнением неразрывности, содержащим плотность и проекции скорости, этого оказывается недостаточно для того, чтобы она была замкнутой; необходимо ввести в рассмотрение еще какие-нибудь связи между указанными функциями. Такие связи можно установить только путем принятия некоторых гипотез, основанных на данных наблюдений и выражающих физические свойства жидкостей. Наиболее просто система (3.10) замыкается для случая покоящейся жидкости.

Обратим внимание на физическое содержание уравнений (3.8) и (3.9). Они выведены из закона количества движения системы, которая для случая сплошной среды образуется непрерывной совокупностью жидких частиц, составляющих объем W. Поэтому указанные уравнения можно рассматривать как специфические для жидкой среды формы уравнения количества движения. Но при сделанном предположении о постоянстве массы жидкого объема эти же уравнения можно вывести непосредственно из второго закона Ньютона или принципа Даламбера. Поэтому уравнения (3.8) и (3.9) можно также рассматривать как соответственно интегральную и дифференциальную формы второго закона Ньютона для жидкого объема. При этом левая часть уравнения (3.8) представляет собой суммарную инерционную силу, а правая — сумму действующих на массу жидкости внешних сил. В уравнении (3.9) правая часть выражает произведение массы на ускорение (силу инерции) для единичного объема, а левая — сумму действующих на него массовых и поверхностных сил.

4.1. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если жидкость неподвижна относительно стенок резервуара, в который она заключена, то она будет покоящейся относительно любой системы координат, жестко связанной с резервуаром. При этом резервуар может покоиться относительно Земли, и тогда говорят, что жидкость находится в абсолютном покое, или двигаться с постоянным ускорением, и тогда говорят об относительном покое жидкости.

Как показано в п. 3.2, в покоящейся жидкости касательные напряжения в каждой точке равны нулю, а нормальные направлены по внутренним нормалям и равны гидростатическому давлению, взятому с обратным знаком (см. п. 3.2).

Полагая в уравнениях движения (3.10) проекции скорости равными нулю $u_x = u_y = u_z = 0$ и используя равенства (3.7), получаем дифференциальные уравнения равновесия жидкости:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;\; F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;\; F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \qquad (4.1)$$

Уравнения (4.1), называемые уравнениями Эйлера, являются общими дифференциальными уравнениями гидростатики, справедливыми как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости.

Проследив еще раз вывод уравнений (3.10) движения жидкости, можно убедиться, что уравнения (4.1) выражают условия равенства нулю проекций на оси координат массовых и поверхностных сил, действующих на единицу массы жидкости. Три уравнения (4.1) эквивалентны одному векторному уравнению

$$\boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = 0 \text{ или } \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0. \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.2) можно проинтегрировать в общем виде. Действительно, массовые силы, которые встречаются в природе и технике, в большинстве имеют потенциал, т. е. вектор $\boldsymbol{F}$ является градиентом некоторой функции $\Phi(x, y, z)$, называемой потенциалом массовых сил. Это выражается уравнением (выбор знака минус поясним в п. 3.2)

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}\Phi \qquad (4.3)$$

или в проекциях

$$F_x = -\partial\Phi/\partial x;\ F_y = -\partial\Phi/\partial y;\ F_z = -\partial\Phi/\partial z. \qquad (4.3')$$

Подставляя выражение (4.3) в (4.2), получаем

$$\mathrm{grad}\,\Phi + (1/\rho)\,\mathrm{grad}\,p = 0.$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$. Используя это, имеем

$$\mathrm{grad}\,(\Phi + p/\rho) = 0.$$

Равенство нулю градиента означает равенство нулю всех его проекций, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0;\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\Phi + p/\rho = \mathrm{const}. \qquad (4.4)$$

Выражение (4.4) является общим интегралом дифференциального уравнения (4.2) Эйлера. Из него следует, что поверхности уровня $\Phi = \mathrm{const}$ в покоящейся жидкости совпадают с поверхностями равного давления (изобарическими поверхностями).

Для случая сжимаемой жидкости из-за переменной плотности ρ ее нельзя ввести под знак grad. Чтобы для этого случая получить интеграл уравнения (4.2), введем в рассмотрение новую функцию $\mathcal{P}(x, y, z)$, называемую функцией давления и определяемую дифференциальным равенством

$$d\mathcal{P} = dp/\rho. \qquad (4.5)$$

Процесс изменения состояния жидкости (газа) называется баротропным, если ее плотность зависит только от давления, т. е. $\rho = f(p)$. К баротропным процессам относятся течение несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$), изотермический ($\rho = \mathrm{const}\cdot p$) и адиабатный ($\rho = \mathrm{const}\cdot p^{1/k}$) процессы, где k — показатель адиабаты. Для таких процессов величина $d\mathcal{P}$ является полным дифференциалом и равенство (4.5) эквивалентно трем следующим:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\ \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\ \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (4.6)$$

Умножив каждое из них соответственно на орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и, сложив, получим

$$\mathrm{grad}\,\mathcal{P} = (1/\rho)\,\mathrm{grad}\,p. \qquad (4.7)$$

С учетом формул (4.7) и (4.3) уравнение (4.2) можно записать в виде $\mathrm{grad}\,(\Phi + \mathcal{P}) = 0$, откуда

$$\Phi + \mathcal{P} = \mathrm{const}. \qquad (4.8)$$

Для получения конкретного вида функции $\mathcal{P}$ давления для сжимаемой жидкости нужно использовать функциональную зависимость $\rho = f(p)$, которая, как известно, задается уравнениями термодинамических процессов.

Укажем еще одну форму дифференциального уравнения равновесия жидкости, удобную для решения некоторых прикладных задач. Она получается при умножении уравнений (4.1) на произвольные приращения независимых переменных dx, dy, dz соответственно и сложении их:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right)$$

или

$$(1/\rho)\, dp = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{4.9}$$

4.2. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ГИДРОСТАТИКИ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ПОНЯТИЕ О НАПОРЕ

Рассмотрим абсолютный покой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Выберем оси координат, как показано на рис. 4.1, и найдем вид потенциальной функции Ф. Поскольку из массовых сил действует только сила тяжести, то при выбранной системе координат

$$F_x = F_y = 0;\; F_z = -g \text{ или } \partial\Phi/\partial x = \partial\Phi/\partial y = 0;\; \partial\Phi/\partial z = g.$$

Таким образом, искомая функция Ф зависит только от одной переменной z. В результате интегрирования последнего равенства получаем

$$\Phi = gz + C, \tag{4.10}$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, потенциальная функция для силы тяжести линейно зависит от вертикальной координаты. Нетрудно убедиться, что функцию Ф можно истолковать как потенциальную энергию положения, отнесенную к единице массы, поэтому она должна быть возрастающей при направлении оси z вертикально вверх. Этим обусловлен знак минус в формуле (4.3). Подставив найденное для Ф выражение в равенство (4.4) и разделив его на g, получим

$$z + p/(\rho g) = \text{const}. \tag{4.11}$$

Эта формула выражает гидростатический закон распределения давления, состоящий в том, что в тяжелой (подверженной действию сил тяжести) несжимаемой жидкости давление линейно зависит от вертикальной координаты.

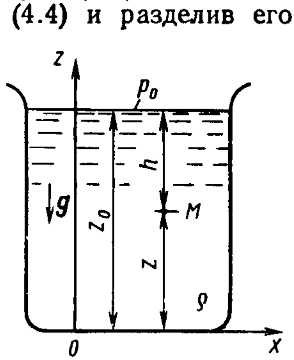


Рис. 4.1. Схема для вывода основной формулы гидростатики

Чтобы найти постоянную в уравнении (4.11), надо использовать какое-нибудь граничное условие. Пусть, например, жидкость покоится в резервуаре (рис. 4.1), причем на ее свободной поверхности давление равно p_0. Назовем это давление внешним. Для точек свободной поверхности

$$z_0 + p_0/(\rho g) = \text{const}.$$

Вычитая это соотношение из уравнения (4.11), находим

$$p = p_0 + \rho g\,(z_0 - z),$$

или, обозначив $(z_0 - z)$ через h (заглубление точки M под свободную поверхность), получим основную формулу гидростатики

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{4.12}$$

где величина $\rho g h$ называется весовым давлением.

Из формулы (4.12) следует, что всякое изменение внешнего давления p_0 вызывает изменение давления во всех точках покоящейся жидкости на то же значение. Этот вывод известен как закон Паскаля *.

Если жидкость находится в ненапряженном состоянии, т. е. в ней отсутствуют напряжения сжатия, то $p = 0$. Значения p, отсчитанные от этого нуля, называют иногда абсолютным давлением.

В технике часто представляет интерес избыток давления p над атмосферным $p_{\text{ат}}$, который называется избыточным или манометрическим давлением $p_{\text{и}}$. По определению

$$p_{\text{и}} = p - p_{\text{ат}}. \tag{4.13}$$

Для произвольной точки M, заглубленной на величину h под свободную поверхность, избыточное давление

$$p_{M\text{и}} = p_0 + \rho g h - p_{\text{ат}},$$

откуда следует, что избыточное давление совпадает с весовым, если давление на свободной поверхности равно атмосферному (т. е. $p_0 = p_{\text{ат}}$).

Если все члены формулы (4.12) разделить на ρg, то они будут иметь линейную размерность:

$$p/(\rho g) = p_0/(\rho g) + h.$$

Отсюда следует, что каждому давлению p соответствует линейная величина $p/(\rho g)$, которая представляет собой высоту столба жидкости, создающего в своем основании данное давление. Это наглядно иллюстрируется схемой, показанной на рис. 4.2. Если на свободной поверхности в резервуаре давление p_0, а из

---

* Блез Паскаль (1623—1662) — выдающийся французский математик, физик и философ. Кроме ряда математических работ написал «Трактат о равновесии жидкостей», в котором решил некоторые задачи гидростатики, в частности сформулировал принцип действия гидравлического пресса.

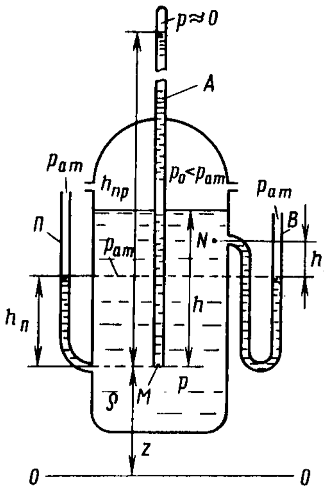
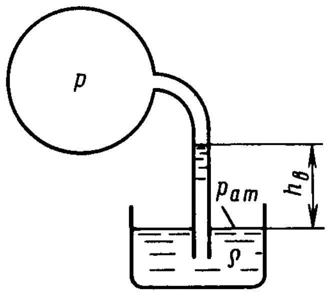


Рис. 4.2. Схема для определения приведенной $h_{пр}$, пьезометрической $h_п$ и вакуумметрической $h_в$ высот

Рис. 4.3. Определение вакуумметрической высоты



запаянной сверху трубки A удален воздух, то под действием давления $p_M = p_0 + \rho g h$ жидкость в трубке поднимается над точкой M на некоторую высоту $h_{пр}$, называемую приведенной. Принимая приближенно, что на свободной поверхности в трубке давление равно нулю (в действительности оно равно упругости насыщенных паров жидкости при данной температуре и сравнительно невелико), согласно выражению (4.12) получим $p_M = \rho g h_{пр}$. Следовательно, приведенная высота есть высота столба жидкости, на свободной поверхности которого давление равно нулю, а в основании — данному давлению жидкости.

Для трубки $П$, открытой в атмосферу и называемой пьезометром, получим

$$p_M = p_{ат} + \rho g h_п,$$

откуда

$$h_п = (p_M - p_{ат})/(\rho g) = p_{Mи}/(\rho g). \tag{4.14}$$

Величину $h_п$ называют пьезометрической высотой.

Если давление в точках какого-либо объема жидкости меньше атмосферного ($p < p_{ат}$), то такое состояние называют вакуумом. Для его характеристики вводится понятие вакуумметрического давления ($p_в$), под которым подразумевается недостаток данного давления до атмосферного:

$$p_в = p_{ат} - p. \tag{4.15}$$

Соответствующая высота называется вакуумметрической:

$$h_в = (p_{ат} - p)/(\rho g) = p_в/(\rho g). \tag{4.16}$$

На рис. 4.2 и 4.3 показаны вакуумметрические высоты для капельной жидкости и газа.

Давление измеряется в единицах силы, отнесенных к единице площади. В системе СИ единицей давления служит паскаль (Па; 1 Па = 1 Н/м^2), а в технической системе техническая атмосфера (ат; 1 ат = 1 кгс/см^2).

Кроме того, давление можно измерять в единицах длины столба данной жидкости. При этом следует пользоваться формулой $h = p/(\rho g)$. При выражении давления высотой столба жидкости чаще всего применяют метры водяного столба, миллиметры ртутного столба и миллиметры спиртового столба.

Гидростатический закон распределения давления, выраженный формулой (4.11), справедлив, очевидно, для любого положения координатной плоскости xOy. Эту плоскость называют плоскостью сравнения, а величины $H_{ст} = z + p/(\rho g)$ — гидростатическим и $H_п = z + p_и/(\rho g)$ — пьезометрическим напорами. Из формулы (4.11) следует, что напоры $H_{ст}$ и $H_п$ постоянны для всех точек данной массы покоящейся жидкости.

4.3. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ

Состояние, при котором жидкость покоится относительно стенок резервуара, движущегося с постоянным ускорением относительно Земли, называют обычно относительным покоем. Выбирая систему координат, жестко связанную со стенками резервуара, приходим к статической задаче, основой для решения которой служат уравнения Эйлера (4.1). В соответствии с известным принципом механики при использовании уравнений равновесия в системе координат, которая движется с ускорением, необходимо в число действующих массовых сил включить также силы инерции. Имея это в виду, рассмотрим два случая относительного равновесия.

1. Равновесие жидкости в цилиндрическом сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси.

Рассмотрим состояние жидкости в сосуде (рис. 4.4, *а*) по истечении достаточного времени после начала вращения, когда достигнут относительный покой. Выберем оси координат, как показано на рис. 4.4, *а*, и применим к жидкости дифференциальное уравнение гидростатики в форме (4.9). В число массовых сил наряду с силой тяжести $F_g = g$ необходимо включить центробежную силу инерции

$$F_{цб} = (v^2/r)\, r^0 = \omega^2 r r^0,$$

где v — окружная скорость жидкой частицы, находящейся в произвольной точке M (x, y); r — радиус вращения частицы, r^0— единичный вектор радиального направления; ω — угловая скорость сосуда.

Для проекций на оси координат результирующей массовых сил получим выражения

$$F_x = \frac{v^2}{r}\cos(r,\ x) = \omega^2 r\cos(r,\ x) = \omega^2 x;$$

$$F_y = \frac{v^2}{r} \sin(r,\ x) = \omega^2 r \sin(r,\ x) = \omega^2 y;$$

$$F_z = -g.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.9), получаем

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 (x\,dx + y\,dy) - g\,dz$$

или

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\omega^2}{2} d(x^2 + y^2) - g\,dz.$$

После интегрирования находим

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C. \tag{4.17}$$

Полагая $p = \text{const}$, из выражения (4.17) получаем уравнение изобарических поверхностей

$$\rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C_1 = 0. \tag{4.18}$$

Как следует из формулы (4.18), эти поверхности представляют собой конгруэнтные параболоиды вращения с осью z. Одним из таких параболоидов является свободная поверхность жидкости.

Обозначим через z_0 координату вершины параболоида свободной поверхности (рис. 4.4, *а*). Так как в вершине $x = y = 0$, $C_1 = \rho g z_0$ и уравнение свободной поверхности согласно выражению (4.18) имеет вид

$$z_п - z_0 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}. \tag{4.19}$$

Если внешнее давление равно p_0, то, задавая в уравнении (4.17) $p = p_0$, $x = y = 0$, $z = z_0$, находим постоянную $C = p_0 + \rho g z_0$. Тогда закон распределения давления можно выразить формулой

$$p = p_0 + \rho g \left(\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2g} + z_0 - z \right). \tag{4.20}$$

Для произвольной точки M с координатами x, y, z выражение в скобке представляет собой заглубление h точки M под свободную поверхность. Таким образом,

$$p = p_0 + \rho g h,$$

т. е. справедлив линейный (гидростатический) закон распределения давления по глубине, которая в данном случае отсчитывается от криволинейной свободной поверхности.

2. Равновесие жидкости в сосуде, движущемся прямолинейно с постоянным ускорением.

Рассмотрим равновесие жидкости в сосуде, движущемся с ускорением a вдоль прямой MN, наклоненной к горизонту под уг-

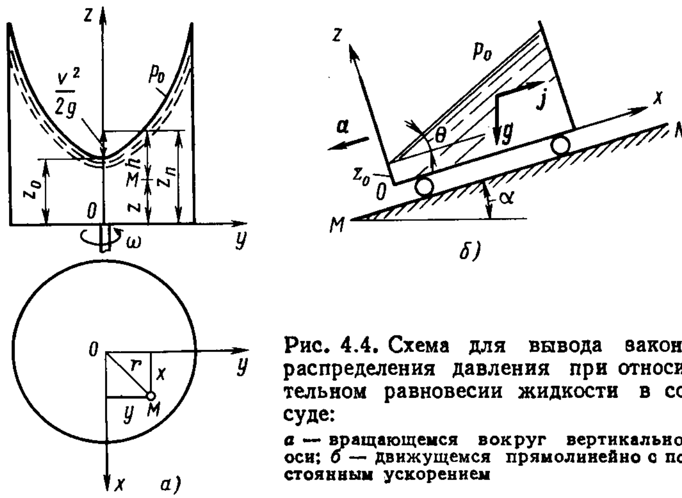


Рис. 4.4. Схема для вывода закона распределения давления при относительном равновесии жидкости в сосуде:

а — вращающемся вокруг вертикальной оси; *б* — движущемся прямолинейно с постоянным ускорением

лом α (рис. 4.4, *б*). К массовым силам наряду с силой тяжести в данном случае относится сила инерции $F_i = -a = j$, направленная противоположно ускорению сосуда. В системе координат, показанной на рис. 4.4, *б*, проекции массовых сил

$$F_x = j - g\sin\alpha;\ F_y = 0;\ F_z = -g\cos\alpha.$$

Подставляя эти выражения в уравнение равновесия (4.9), получаем

$$(1/\rho)\,dp = [(j - g\sin\alpha)\,dx - g\cos\alpha\,dz],$$

а после интегрирования

$$p = \rho\,(j - g\sin\alpha)\,x - \rho g\cos\alpha\cdot z + C. \qquad (4.21)$$

Полагая в уравнении (4.21) $p = \text{const}$, получаем уравнение изобарических поверхностей

$$\rho\,(j - g\sin\alpha)\,x - \rho g\cos\alpha\cdot z + C_1 = 0. \qquad (4.22)$$

Уравнение (4.22) дает семейство плоскостей, параллельных оси y. Одной из этих плоскостей является свободная поверхность. Обозначим через z_0 координату точки пересечения свободной поверхности с осью z. Подставив в формулу (4.22) $x = 0$ и $z = z_0$, находим $C_1 = \rho g z_0\cos\alpha$ для свободной поверхности. Уравнение этой поверхности имеет вид

$$z - z_0 = \frac{j - g\sin\alpha}{g\cos\alpha}\,x, \qquad (4.23)$$

где $\frac{j - g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = \operatorname{tg}\theta$.

Если сосуд движется без трения только под действием силы тяжести, то $j = g \sin \alpha$ и $\theta = 0$, т. е. свободная поверхность параллельна плоскости MN.

Полагая в формуле (4.21) $x = 0$, $z = z_0$ и $p = p_0$, находим произвольную постоянную

$$C = p_0 + \rho g z_0 \cos \alpha.$$

Закон распределения давления имеет вид

$$p = p_0 + \rho (j - g \sin \alpha) x + \rho g \cos \alpha (z_0 - z). \tag{4.24}$$

4.4. СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ТВЕРДЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В общем случае сила, с которой жидкость действует на твердую поверхность S, равна сумме элементарных сил $d\boldsymbol{P}$, действующих на малых площадках dS, составляющих эту поверхность (рис. 4.5).

Если $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, внешней к объему жидкости, а p — давление на площадке dS, то сила $d\boldsymbol{P} = p\boldsymbol{n}\, dS$.

Суммируя силы $d\boldsymbol{P}$, получаем выражение для главного вектора

$$\boldsymbol{P} = \int_S p\boldsymbol{n}\, dS, \tag{4.25}$$

называемого силой давления жидкости на поверхность S, и выражение для главного момента

$$\boldsymbol{L} = \int_S \boldsymbol{r} \times p\boldsymbol{n}\, dS, \tag{4.26}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор площадки dS относительно центра приведения системы сил.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Равномерное давление на плоскую стенку ($p = \text{const}$, $\boldsymbol{n} = \text{const}$).

В этом случае суммируемые векторы $d\boldsymbol{P}$ составляют систему параллельных и одинаково направленных сил, которую всегда можно свести только к силе давления $\boldsymbol{P}$. При $p = \text{const}$ и $\boldsymbol{n} = \text{const}$ из выражения (4.25) получаем

$$\boldsymbol{P} = p\boldsymbol{n}S. \tag{4.27}$$

Линия действия силы $\boldsymbol{P}$ проходит через центр масс площадки S.

Равномерное давление может создаваться покоящимся газом, так как

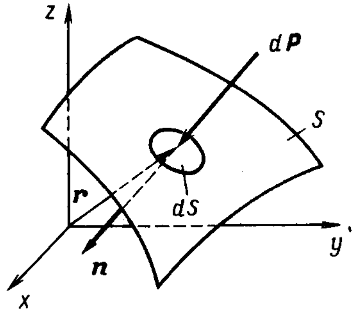


Рис. 4.5. Схема для определения силы давления покоящейся жидкости на твердую поверхность

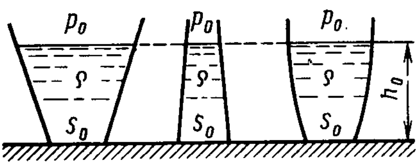


Рис. 4.6. Схемы, иллюстрирующие «гидростатический парадокс»

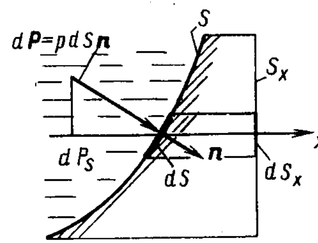


Рис. 4.7. Схема для определения силы равномерно распределенного давления жидкости на криволинейную поверхность

благодаря его малой плотности можно пренебречь весовым давлением и считать давление одинаковым во всех точках газа.

Равномерное давление может создаваться и капельной жидкостью, например, при ее воздействии на горизонтальные площадки в случае абсолютного покоя или движения сосуда с ускорением вверх или вниз. При равномерном давлении $P = pS$. Например, для схемы, показанной на рис. 4.6, давление на дне $p = p_0 + \rho g h_0$, а сила $P = (p_0 + \rho g h_0) S_0$. Заметим, что сила давления на дно не зависит от формы сосуда («гидростатический парадокс»).

2. Равномерное давление на криволинейную стенку ($p = \text{const}$, $n \neq \text{const}$).

В этом случае элементарные силы dP имеют разные направления. Главный вектор P системы вычисляется через свои проекции. Чтобы найти его проекцию P_x на ось x, спроектируем на эту ось векторы dP (рис. 4.7):

$$dP_x = p\,dSn_x = p\cos(n,\ x)\,dS = p\,dS_x,$$

где dS_x — проекция площадки dS на плоскость, нормальную оси x.

Искомая величина P_x при $p = \text{const}$

$$P_x = \int_S p\cos(n,\ x)\,dS = p\int_{S_x} dS_x = pS_x. \tag{4.28}$$

Линия действия силы P_x проходит через центр масс площади проекции S_x. Таким образом, проекция на направление оси x силы P равномерного давления жидкости на криволинейную поверхность S равна произведению давления на площадь проекции S_x этой криволинейной поверхности на плоскость, нормальную оси x. Если такие проекции на три взаимно ортогональные оси пересекаются в одной точке, то систему сил dP можно свести только к силе

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \tag{4.29}$$

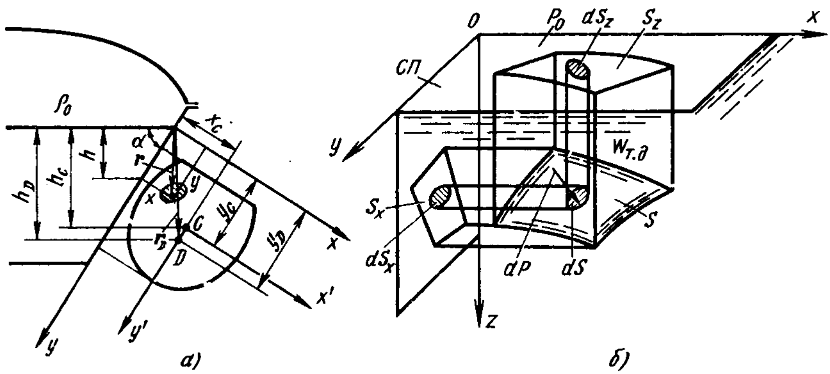


Рис. 4.8. Схемы для определения силы неравномерно распределенного давления жидкости, действующего:

а — на плоскую стенку; *б* — на криволинейную поверхность

направление которой определяется направляющими косинусами

$$\cos(P,\ x) = P_x/P;\ \cos(P,\ y) = P_y/P;\ \cos(P,\ z) = P_z/P. \qquad (4.30)$$

Если составляющие не пересекаются в одной точке, то система сводится к силе и моменту.

3. Неравномерное давление на плоскую стенку ($p \neq \text{const}$, $\boldsymbol{n} = \text{const}$).

Системy элементарных сил $d\boldsymbol{P}$, одинаковых по направлению, но различных по величине, можно свести в данном случае к одной силе

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n} \int_S p\, dS, \qquad (4.31)$$

где S — площадь стенки.

Величина этой силы

$$P = \int_S p\, dS \qquad (4.32)$$

зависит от закона распределения давления p по площадке S. При воздействии на S капельной жидкости эти законы могут быть различными. Их конкретный вид зависит от ориентации площадки и действующих на жидкость массовых сил при абсолютном и относительном покое.

Вычислим силу $\boldsymbol{P}$, действующую на площадку S, составляющую часть наклонной стенки резервуара. Ось x расположим вдоль линии пересечения стенки со свободной поверхностью, а ось y — в плоскости стенки (рис. 4.8, *а*). Для наглядности плоскость стенки повернем вокруг оси y на 90° и совместим ее с плоскостью чертежа. Пусть x и y — координаты центра масс элементарной площадки dS, а h — его заглубление под свободную поверхность. Согласно уравнениям (4.32) и (4.12)

$$P = \int_S (p_0 + \rho g h)\,dS = p_0 S + \rho g \int_S h\,dS = P_{вн} + P_{вс}.$$

Сила $P_{вн} = p_0 S$ является силой внешнего давления, равномерно распределенного по площадке S, и ее линия действия проходит через центр масс этой площадки. Сила $P_{вс} = \rho g \int_S h\,dS$ является силой весового давления, распределенного неравномерно, и так как $h = y \sin\alpha$, то

$$P_{вс} = \rho g \int_S y \sin\alpha\,dS = \rho g \sin\alpha \int_S y\,dS = \rho g \sin\alpha J,$$

где $J = \int_S y\,dS$ — статический момент площади S относительно оси x.

Поскольку $J = y_C S$, где y_C — координата центра масс C площадки S, получим

$$P_{вс} = \rho g \sin\alpha y_C S = \rho g h_C S, \tag{4.33}$$

где h_C — заглубление центра масс C под свободную поверхность.

Таким образом,

$$P = p_0 S + \rho g h_C S, \tag{4.34}$$

т. е. полную силу давления жидкости на плоскую стенку можно вычислить как сумму сил внешнего и весового давлений. Последняя, согласно выражению (4.33), равна произведению площади S на весовое давление в ее центре масс.

Линия действия силы $P_{вс}$ проходит через некоторую точку D, называемую центром давления. Для определения его координат составим уравнение, выражающее теорему о равенстве момента равнодействующей и суммы моментов составляющих:

$$\mathbf{r}_D \times \mathbf{P}_{вс} = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} p_{вс}\,dS, \tag{4.35}$$

где $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы соответственно точки D и текущей точки площадки S; $p_{вс} = \rho g h$ — весовое давление в текущей точке.

По правилам составления проекций векторного произведения находим

$$y_D P_{вс} = \int_S y p_{вс}\,dS; \quad x_D P_{вс} = \int_S x p_{вс}\,dS.$$

Учитывая формулу (4.33), а также то, что $p_{вс} = \rho gh = \rho gy \sin \alpha$, из последних выражений получаем

$$x_D = \frac{\int\limits_S xy\, dS}{y_C S}; \quad y_D = \frac{\int\limits_S y^2\, dS}{y_C S}. \tag{4.36}$$

Более удобные выражения для x_D и y_D найдем, если воспользуемся теоремой о соотношении между моментами инерции, взятыми относительно параллельных осей:

$$\int\limits_S xy\, dS = x_C y_C S + J_{x'y'}; \quad \int\limits_S y^2\, dS = y_C^2 S + J_{x'},$$

где x_C и y_C — координаты центра масс C в системе xy; $J_{x'y'}$ — центробежный момент инерции площади S относительно осей x' и y'; x', y' — оси координат, проходящие через центр масс C площадки S параллельно осям x и y; $J_{x'}$ — момент инерции площади S относительно оси x'.

Окончательно

$$x_D = x_C + J_{x'y'}/(y_C S); \quad y_D = y_C + J_{x'}/(y_C S). \tag{4.37}$$

Вторая из формул (4.37) показывает, что центр весового давления расположен под центром масс на расстоянии $J_{x'}/(y_C S)$.

4. Неравномерное давление на криволинейную твердую поверхность ($p \neq \text{const}$, $n \neq \text{const}$).

Такое давление может создать тяжелая жидкость при абсолютном или относительном покое. Элементарные силы dP составляют в этом случае самую общую систему, которая сводится к силе давления P [см. (4.25)] и моменту [см. (4.26)]. Однако существуют частные случаи, когда система сводится к одной силе давления P, например, если линии действия элементарных сил dP пересекаются в одной точке (сферическая стенка).

Рассмотрим криволинейную поверхность S, находящуюся под действием внешнего избыточного давления $p_{0и}$ и весового давления ρgz (рис. 4.8, *б*). Как было показано в предыдущем пункте, задачу определения силы давления можно расчленить, определяя раздельно силы весового и внешнего давлений. Кроме того, ее можно свести к определению только силы весового давления, заменив внешнее давление действием эквивалентного слоя жидкости.

Силу весового давления P определим по ее проекциям. Горизонтальная проекция

$$P_x = \int\limits_S dP_x = \int\limits_S p \cos(n,\ x)\, dS = \rho g \int\limits_S z \cos(n,\ x)\, dS =$$

$$= \rho g \int\limits_S z\, dS_x,$$

где $dS_x = dS \cos\ (n,\ x)$ — проекция площадки dS на вертикальную плоскость, нормальную к оси x.

Последний интеграл представляет собой статический момент площади S_x относительно оси y. Следовательно,

$$P_x = \rho g z_{Cx} S_x, \tag{4.38}$$

где z_{Cx} — координата центра масс площадки S_x.

Аналогично получим

$$P_y = \rho g z_{Cy} S_y, \tag{4.39}$$

где S_y — площадь проекции криволинейной поверхности на плоскость, нормальную оси y.

Таким образом, чтобы вычислить горизонтальную проекцию P_i $(i = x, y)$ силы весового давления жидкости на криволинейную поверхность, следует площадь S_i проекции этой поверхности на плоскость, нормальную к рассматриваемой горизонтальной оси, умножить на давление в центре масс площади S_i.

Проекция силы весового давления на вертикальную ось

$$P_z = \rho g \int\limits_S z \cos(n, z)\, dS = \rho g \int\limits_S z\, dS_z, \tag{4.40}$$

где S_z — проекция на плоскость xOy поверхности S.

Последний интеграл представляет собой объем $W_{т.д}$ тела, ограниченного поверхностью S, цилиндрической боковой поверхностью $S_б$ с вертикальными образующими и проекцией S_z криволинейной поверхности S на свободную поверхность жидкости. Это тело называется телом давления, а величина $\rho g \int\limits_S z dS_z$ есть вес жидкости в нем.

Таким образом, вертикальная проекция силы весового давления на криволинейную поверхность равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \rho g W_{т.д}.$$

Сила P определяется формулой

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

а направление линии ее действия — направляющими косинусами

$$\cos(P, x) = P_x/P;\ \cos(P, y) = P_y/P;\ \cos(P, z) = P_z/P.$$

Если P_x, P_y, P_z пересекаются в одной точке, то система сил сводится к силе давления, проходящей через эту точку.

Возможны два случая взаимного расположения криволинейной поверхности в жидкости (рис. 4.9): а) жидкость расположена над поверхностью; тело давления заполнено жидкостью и условно считается положительным, а вертикальная составляющая P_z силы P направлена вниз; б) тело давления не заполнено жидкостью и считается отрицательным; вертикальная сила P_z направлена вверх.

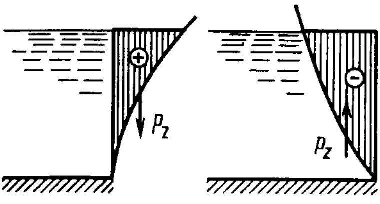


Рис. 4.9. Тела давления:
а — положительное; *б* — отрицательное

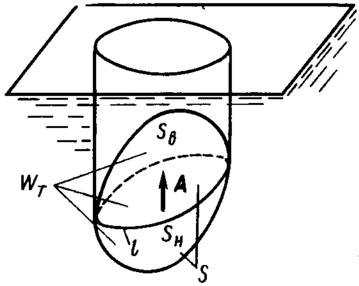


Рис. 4.10. Схема для определения вертикальной силы, действующей на замкнутую криволинейную поверхность, полностью погруженную под уровень жидкости

Если криволинейная поверхность замкнута и полностью погружена под уровень абсолютно покоящейся жидкости (рис. 4.10), то действие последней сводится к одной вертикальной силе. Действительно, используя изложенный выше прием определения горизонтальных проекций силы давления, приходим к выводу, что вдоль любой горизонтальной оси на поверхность погруженного тела действуют две равные по величине и противоположные по направлению силы, которые взаимно уравновешиваются.

Чтобы найти вертикальную силу, спроектируем поверхность S на свободную поверхность жидкости. Проектирующие вертикали отметят на поверхности тела замкнутую линию l, которая делит поверхность S на две части: верхнюю $S_в$ и нижнюю $S_н$. Для верхней части тело давления положительно и соответствующая ему сила направлена вертикально вниз, а для нижней — тело давления отрицательно и сила направлена вверх. Обозначив объемы этих тел давления соответственно через $W_в$ и $W_н$, найдем результирующую вертикальную силу A:

$$A = \rho g (W_н - W_в) = \rho g W_т,$$

где $W_т$ — объем тела.

Таким образом, сила давления покоящейся жидкости на погруженное в нее тело направлена вертикально вверх и равна весу жидкости в объеме тела. Этот результат составляет содержание закона Архимеда *; сила A называется архимедовой или гидростатической подъемной силой. Если G — вес тела, то его плавучесть определяется соотношением сил A и G. При $G > A$

* Архимед (287—212 до н. э.) — древнегреческий ученый, математик и механик. Оставил после себя многочисленные труды по вопросам математики, механики, гидростатики. Наиболее известны законы рычага, способы вычисления длин кривых, законы гидростатики.

тело тонет, при $G < A$ всплывает, при $G = A$ плавает в состоянии безразличного равновесия. Следует иметь в виду, что линии действия сил G и A могут не совпадать, так как линия действия веса G проходит через центр масс тела, а линия действия архимедовой силы A — через центр его объема. При неравномерном распределении плотности тела может появиться момент, способствующий опрокидыванию тела.

В заключение заметим, что силу давления жидкости на криволинейную поверхность при относительном покое можно определить общим способом суммирования элементарных сил давления, применительно к заданной форме поверхности и условиям относительного покоя.

5. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

5.1. ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА НЬЮТОНА О СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И СКОРОСТЯМИ ДЕФОРМАЦИЙ

Уравнения (3.10) движения жидкости в напряжениях образуют незамкнутую систему. Недостающие уравнения устанавливаются на основе физических гипотез, выражающих экспериментально определенные свойства сплошных сред.

Для жидкостей и газов такой фундаментальной гипотезой служит обобщение на случай произвольного движения этих сред закона вязкого трения, выраженного формулой (1.11). Чтобы подойти к обоснованию этого обобщения, сформулируем некоторые известные данные о свойствах жидких и газовых сред:

напряжение на произвольной площадке в общем случае можно разложить на нормальную и касательную составляющие;

если касательные напряжения равны нулю, т. е. вектор напряжения нормален к площадке, то его величина не зависит от ориентации площадки и представляет собой давление;

касательные напряжения порождаются только вязкостью.

Кроме того, можно показать, что вязкостные напряжения, возникающие при сдвиге одного слоя жидкости относительно другого, не только порождают касательные напряжения на произвольных площадках, но и влияют на значение нормальных напряжений.

Имея в виду эти замечания, допустим, что можно представить вектор $\boldsymbol{p}_n$ напряжения в точке как сумму двух составляющих, одна из которых $\boldsymbol{k}_n$ обусловлена только вязкостью и не зависит от давления, а другая, зависящая от давления, нормальна к площадке и потому может быть представлена в виде $N\boldsymbol{n}$, где N — скаляр (рис. 5.1). Таким образом,

$$\boldsymbol{p}_n = N\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}_n. \qquad (5.1)$$

Запишем выражение (5.1) применительно к трем взаимно ортогональ-

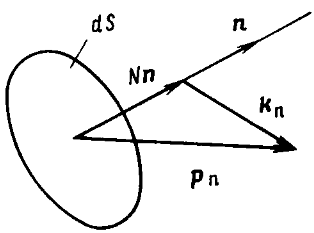


Рис. 5.1. Схема для обоснования зависимости между напряжениями и скоростями деформаций в вязкой жидкости

ным площадкам, проходящим через одну точку и расположенным в координатных плоскостях (см. п. 3.1),

$$p_x = -N\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}_x;\ p_y = -N\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}_y;\ p_z = -N\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_z$$

и выпишем проекции на координатные оси полных напряжений:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -N + k_{xx};\ p_{xy} = k_{xy};\ p_{xz} = k_{xz}; \\ p_{yx} &= k_{yx};\ p_{yy} = -N + k_{yy};\ p_{yz} = k_{yz}; \\ p_{zx} &= k_{zx};\ p_{zy} = k_{zy};\ p_{zz} = -N + k_{zz}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Согласно закону Ньютона вязкостные напряжения при прямолинейном движении жидкости пропорциональны скоростям угловых деформаций.

Обобщением этого факта на случай произвольного движения является гипотеза о том, что касательные напряжения, а также зависящие от ориентаций площадок части нормальных напряжений пропорциональны соответствующим скоростям деформаций. Иными словами, предполагается во всех случаях движения жидкости линейная связь между вязкостными напряжениями и скоростями деформаций. При этом коэффициентом пропорциональности в формулах, выражающих эту связь, должен быть динамический коэффициент вязкости μ, так как для прямолинейного движения эти формулы должны превращаться в формулу Ньютона (1.11) для вязкостного напряжения.

Таким образом, высказанное гипотетическое утверждение можно выразить формулами:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};\ k_{yy} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};\ k_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ k_{xy} &= k_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ k_{yz} &= k_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ k_{zx} &= k_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Чтобы определить введенную выше скалярную величину N, найдем среднее арифметическое из нормальных напряжений на трех площадках, расположенных в координатных плоскостях. Согласно выражениям (5.2)

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -N + \frac{1}{3}(k_{xx} + k_{yy} + k_{zz}),$$

откуда с учетом формул (5.3)

$$N = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u}. \tag{5.4}$$

Можно показать (доказательство здесь не приводится), что в данной точке жидкости сумма $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ имеет одно и то же значение для любых трех взаимно ортогональных площадок, проходящих через точку, т. е. не зависит от ориентации этих площадок. Иными словами, эта сумма обладает свойствами давления, а потому уместно принять гипотетическое утверждение о том, что среднее арифметическое из нормальных напряжений на трех взаимно ортогональных площадках, проходящих через одну точку, есть взятое с обратным знаком гидродинамическое давление в этой точке, т. е.

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p \tag{5.5}$$

и, следовательно,

$$N = p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u}.$$

Зависимость (5.5) нельзя строго доказать, она представляет собой гипотезу, которую можно считать косвенно подтвержденной всей практикой современной гидромеханики, поскольку пока нет фактов, опровергающих эту гипотезу. Теперь окончательные выражения для нормальных и касательных напряжений в вязкой жидкости можно записать в виде

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};\\
p_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u} + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};\\
p_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z};\\
p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right);\\
p_{yz} &= p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right);\\
p_{zx} &= p_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, и выражения для нормальных напряжений упрощаются:

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};\quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};\quad p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{5.7}$$

Таким образом, соотношениями (5.6) устанавливаются зависимости между напряжениями в вязкой жидкости и скоростями деформаций. Они позволяют исключить из уравнений движения (3.10) все компоненты тензора напряжений, заменив их давлением p и скоростями деформаций.

5.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА*)

Подставив в уравнения движения (3.10) выражения (5.6), получим

$$\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = \rho\frac{du_x}{dt};$$

$$\rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = \rho\frac{du_z}{dt}; \quad (5.8)$$

$$\rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = \rho\frac{du_z}{dt}.$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье — Стокса; их используют для описания движений вязких сжимаемых жидкостей и газов.

Уравнения движения невязких жидкостей и газов легко получить из уравнений Навье — Стокса как частный случай при $\mu = 0$; для несжимаемых жидкостей следует принять $\rho = \text{const}$.

Система уравнений Навье — Стокса незамкнута, так как содержит шесть неизвестных: u_x, u_y, u_z, p, ρ и μ. Еще одним уравнением, связывающим эти неизвестные, является уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

В качестве уравнений, замыкающих систему, используют уравнения состояния среды и зависимости вязкости от параметров состояния. Во многих случаях приходится применять также другие термодинамические соотношения.

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) в большинстве случаев вязкость можно считать постоянной, что позволяет значительно

---

*Луи Мари Анри Навье (1785—1836) — видный французский инженер и механик, профессор Школы мостов и дорог, а затем Политехнической школы в Париже, член французской академии наук. Первым вывел (в 1824 г.) уравнения движения вязкой жидкости.

упростить уравнения (5.8). После простых преобразований, учитывая, что $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, получаем

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \frac{du_x}{dt};$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = \frac{du_y}{dt}; \qquad (5.9)$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) = \frac{du_z}{dt}.$$

Если раскрыть полные ускорения du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt, выделив в них локальную и конвективную части, то получим развернутую форму уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z};$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}; \qquad (5.9')$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Вместе с уравнением неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ уравнения (5.9) образуют замкнутую систему для определения функций u_x, u_y, u_z и p.

Представим уравнения Навье — Стокса в векторной форме. Для этого умножим первое из них на $\boldsymbol{i}$, второе — на $\boldsymbol{j}$, третье — на $\boldsymbol{k}$ и сложим. Получим

$$\boldsymbol{F} - (1/\rho)\operatorname{grad} p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{u}/dt, \qquad (5.10)$$

где $\nabla^2\boldsymbol{u} = \nabla^2 u_x\boldsymbol{i} + \nabla^2 u_y\boldsymbol{j} + \nabla^2 u_z\boldsymbol{k}$.

Формулы (5.9) или (5.10) могут быть истолкованы как уравнения второго закона Ньютона в форме, специфической для вязкой несжимаемой жидкости. Действительно, их правые части представляют собой отнесенные к единице массы произведения массы на ускорения (единичную силу инерции), а левые — сумму отнесенных к единице массы сил, в числе которых массовая сила $\boldsymbol{F}\,(F_x, F_y, F_z)$, силы давления $\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho}\times\right.$ $\left.\times\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ и вязкости $\nu\nabla^2\boldsymbol{u}\,(\nu\nabla^2 u_x, \nu\nabla^2 u_y, \nu\nabla^2 u_z)$.

Выделяя конвективную часть уравнения (см. п. 1.2), уравнение (5.10) представим в виде

$$F-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u. \tag{5.11}$$

Для получения еще одной употребительной формы уравнения (5.10) используем формулу векторного анализа

$$\operatorname{grad}(a\cdot b)=(a\nabla)b+(b\nabla)a+a\times\operatorname{rot}b+b\times\operatorname{rot}a,$$

где a и b — произвольные векторы.

Правильность этой формулы можно проверить непосредственным вычислением.

Пусть $a=b=u$. Тогда

$$\operatorname{grad}(u\cdot u)=\operatorname{grad}u^2=2(u\nabla)u+2(u\times\Omega),$$

где $\Omega=\operatorname{rot}u$.

Разрешая это уравнение относительно конвективного ускорения $(u\nabla)u$ и исключая его из формулы (5.11), получаем уравнение Громеки — Ламба * движения вязкой жидкости

$$F-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p-\operatorname{grad}\frac{u^2}{2}+\nu\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-u\times\Omega. \tag{5.12}$$

Считая, что массовые силы обладают потенциалом, т. е. $F=-\operatorname{grad}\Phi$, и учитывая, что при $\rho=\text{const}$ $(1/\rho)\operatorname{grad}p=\operatorname{grad}(p/\rho)$, уравнение (5.12) приведем к виду

$$-\operatorname{grad}\left(\Phi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-u\times\Omega. \tag{5.13}$$

Уравнения Навье — Стокса в форме (5.13) удобны для решения ряда задач динамики вязкой жидкости.

Во многих задачах течение вязкой жидкости обладает осевой симметрией и его лучше описывать, пользуясь цилиндрической системой координат. Уравнения Навье — Стокса в этой системе имеют вид

$$F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)=$$
$$=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r};$$

$$F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+$$
$$+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}; \tag{5.14}$$

* Громека Ипполит Степанович (1851—1889) — русский физик, профессор Казанского университета, автор многих исследований по гидромеханике (теория винтовых потоков; неустановившееся движение вязкой жидкости в трубах, распространение ударных волн в жидкостях и др.).

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Вместе с уравнением неразрывности (2.25) уравнения (5.14) образуют замкнутую систему уравнений движения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах.

Общая задача гидромеханики состоит в определении функций u_x, u_y, u_z, p, ρ и μ с помощью системы уравнений Навье — Стокса (5.8) или (5.9), уравнения неразрывности (2.14) или (2.16) и дополнительных соотношений, замыкающих систему. Таким образом, гидродинамическая задача сводится к математической задаче получения решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Математическая теория таких систем разработана пока недостаточно и для них нет общей формулировки и доказательства теорем существования и единственности. Однако для частных видов системы (5.9), описывающих определенные классы течений, такие теоремы сформулированы и доказаны.

Поскольку общие решения дифференциальных уравнений в частных производных содержат произвольные функции, для получения конкретных решений нужно их определить. Для этого должны быть заданы начальные и граничные условия, которым удовлетворяют найденные решения.

Под начальными условиями понимают заданные значения искомых функций в начальный момент времени во всей области течения, а под граничными — заданные значения, которые должны принимать искомые функции в точках граничных поверхностей во все моменты времени.

Рассмотрим начальные и граничные условия для неустановившегося движения несжимаемой жидкости (ρ = const, μ = const). В качестве начальных условий задается распределение скоростей u_x, u_y, u_z в области течения в начальный момент времени t_0:

$$u_x = f_1(x, y, z, t_0);\ u_y = f_2(x, y, z, t_0);\ u_z = f_3(x, y, z, t_0). \quad (5.15)$$

Задавать давление нет необходимости, так как для момента t_0 его можно определить из исходных уравнений по известным f_1, f_2 и f_3. Граничные условия зависят от характера границ. На неподвижной непроницаемой стенке они заключаются в равенстве нулю на ней скоростей жидкости ($u = 0$), так как частицы вязкой жидкости прилипают к стенке. Это условие имеет вид

$$u_x(x_c, y_c, z_c, t) = 0;\ u_y(x_c, y_c, z_c, z) = 0;\ u_z(x_c, y_c, z_c, t) = 0,$$

где x_c, y_c, z_c — координаты точек твердой стенки.

На подвижной непроницаемой границе скорость жидкости совпадает со скоростью движения самой границы. Границей области течения может служить свободная поверхность. Ее форма, а также значения скоростей на ней неизвестны и сформулированные выше кинематические условия для такой границы нельзя задать. Однако на свободной поверхности давление во всех точках постоянно и равно внешнему давлению p_0. Это обстоятельство может быть истолковано как одно из граничных условий

$$p_{\text{с. п}} = p_0 = \text{const}. \qquad (5.16)$$

Точные решения общей задачи гидромеханики удается получить только для простейших граничных условий. Поэтому большое значение приобретает получение из уравнений движения некоторых частных соотношений, устанавливающих связи между параметрами движения, справедливые при некоторых ограничениях или для отдельных классов течений. Таким соотношением является уравнение Бернулли *.

5.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СТРУЙКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости, для которого уравнения (5.13) имеют вид

$$-\operatorname{grad} E + \nu\nabla^2 \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}, \qquad (5.17)$$

где $E = \Phi + p/\rho + u^2/2$.

Выберем на произвольной линии тока в момент t направленный отрезок дуги dS $(dx,\ dy,\ dz)$ (рис. 5.2) и умножим на него скалярно все члены этого уравнения **:

$$-\operatorname{grad} E \cdot d\boldsymbol{s} + \nu\nabla^2 \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega})\, d\boldsymbol{s}.$$

Вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}$ в силу свойств векторного произведения направлен нормально к плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\Omega}$. Так как векторы $d\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{u}$ коллинеарны, $\boldsymbol{A} \perp d\boldsymbol{s}$ и, следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\boldsymbol{s} = 0. \qquad (5.18)$$

Заметим, что для зафиксированного момента времени

$$\operatorname{grad} E \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz = d_s E$$

---

* Даниил Бернулли (1700—1782) — выдающийся математик и физик. Жил в Петерубурге с 1725 по 1733 г., член Парижской академии наук. Занимался многими вопросами механики жидкостей и газов. В частности, получил излагаемое уравнение для случая установившегося движения несжимаемой жидкости.

** Здесь используется в векторной форме методика получения уравнения Бернулли, которая в скалярном варианте изложена в работе [15].

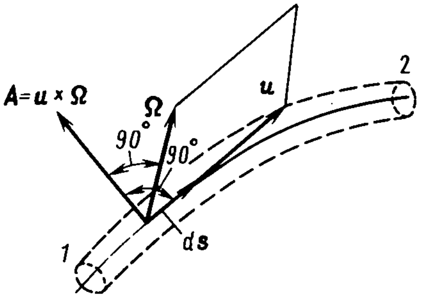


Рис. 5.2. Схема к выводу уравнения Бернулли для струйки вязкой несжимаемой жидкости

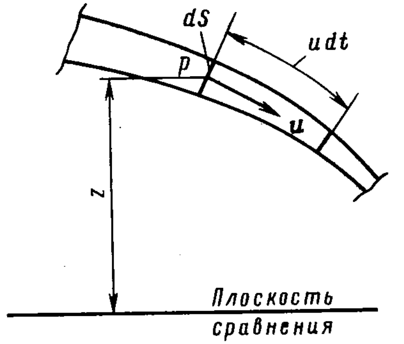


Рис. 5.3. Схема для вычисления работы сил давления

представляет собой дифференциал функции E по направлению s. Таким образом,

$$-d_s E + \nu \nabla^2 u \cdot ds = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot ds. \tag{5.19}$$

Интегрируя это уравнение вдоль линии тока от сечения *1* до сечения *2* для данного момента времени, получаем

$$E_1 - E_2 + \nu \int_{s_1}^{s_2} \nabla^2 u \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot ds, \tag{5.20}$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения величин в сечениях *1* и *2*.

Если из числа массовых сил действует только сила тяжести, то $\Phi = gz$, и, введя обозначения,

$$h'_c = -\frac{\nu}{g} \int_{s_1}^{s_2} \nabla^2 u \cdot ds = -\frac{\nu}{g} \int_{s_1}^{s_2} (\nabla^2 u_x \, dx + \nabla^2 u_y \, dy + \nabla^2 u_z \, dz); \tag{5.21}$$

$$h'_i = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot ds, \tag{5.22}$$

перепишем формулу (5.20) в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_c + h'_i. \tag{5.23}$$

Учитывая, что в поперечных сечениях элементарных трубок тока параметры течения считаются неизменными, можно утверждать, что уравнение (5.23) справедливо вдоль трубки, осью которой является выбранная линия тока.

Для установившегося движения локальное ускорение всюду равно нулю. Так как при этом $h_i' = 0$, уравнение (5.23) принимает вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_c'. \qquad (5.24)$$

Это уравнение, называемое уравнением Д. Бернулли, является одним из фундаментальных уравнений гидромеханики. Определим его физический смысл.

Сначала рассмотрим установившееся движение ($\partial u/\partial t = 0$) и перепишем выражение (5.19) в виде

$$d_s \frac{u^2}{2} = -d_s\Phi - d_s \frac{p}{\rho g} + \nu\nabla^2 u \cdot ds. \qquad (5.19')$$

В левой части стоит дифференциал по направлению s величины $u^2/2$, которую называют плотностью кинетической энергии. По существу, $u^2/2$ является кинетической энергией жидкой частицы, отнесенной к единице ее массы. Величина $-d_s\Phi$ есть дифференциал потенциала массовой силы, который, как известно из общей механики, является элементарной работой этой силы. Чтобы истолковать величину $d_s p/(\rho g)$, рассмотрим живое сечение dS элементарной трубки тока, для которого скорость жидкости равна u, а давление равно p (рис. 5.3).

Если за время dt частицы, расположенные в этом сечении, переместились на расстояние udt, то работа силы давления pdS на этом пути будет равна $pdSudt$. Отнеся эту работу к массе жидкости в объеме $dSudt$, найдем, что величина p/ρ представляет собой работу сил давления, отнесенную к единице массы. Последний член уравнения (5.19′) представляет собой работу удельной (т. е. отнесенной к единице массы) силы вязкости $\nu\nabla^2 u$ на элементарном пути ds. Заметим, что этим членом учитывается работа как внутренних, так и внешних вязкостных напряжений.

Таким образом, уравнение (5.19′) выражает теорему живых сил для бесконечного малого объема жидкости: дифференциал удельной кинетической энергии равен сумме элементарных удельных работ всех внутренних и внешних массовых и поверхностных сил, действующих на жидкость данного объема.

Теорема живых сил, вытекающая из уравнений движения, выражает баланс механической энергии, а для идеальной жидкости ($\nu = 0$) — частный случай закона сохранения энергии.

Переходя к конечной форме уравнения [см. (5.24)], представим его в виде

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} - h_c', \qquad (5.24')$$

где все члены отнесены к единице веса и имеют линейную размерность. Из уравнения (5.24′) следует, что изменение удельной кинетической энергии равно сумме удельных работ силы тяжести

$(z_1 - z_2)$, давления $(p_1 - p_2)/(\rho g)$ и вязкости $(-h'_t)$, т. е. это уравнение выражает в конечной форме теорему живых сил.

Для общего случая неустановившегося движения получено уравнение (5.23), в которое входит член h'_i, называемый инерционным напором. Как видно из выражения (5.22), он зависит от локального ускорения $\partial u/\partial t$ и, как можно показать, выражает специфические для неустановившегося движения обратимые преобразования энергии. Подробнее об этом изложено в гл. 6.

5.4. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА* ДЛЯ РАЗВИТОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

При выводе уравнений Навье — Стокса не делалось каких-либо предположений о режиме движения. Поскольку свойство вязкости присуще реальным жидкостям независимо от режима их движения и при переходе от ламинарного течения к турбулентному другие физические свойства не изменяются, можно предполагать, что обобщенная гипотеза Ньютона, а значит, и опирающиеся на нее уравнения Навье — Стокса справедливы как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости. Однако в последнем случае использовать уравнения Навье — Стокса для получения каких-либо прикладных решений практически невозможно. Входящие в них мгновенные скорости и давление при турбулентных режимах являются пульсирующими. Даже если бы эти параметры удалось найти путем решения уравнений Навье — Стокса, что представляет крайне трудную задачу, то использовать их в практических целях было бы очень трудно. Поэтому для турбулентного режима определяют усредненные по времени скорости и давления, которые могут как зависеть, так и не зависеть от времени. В первом случае турбулентное течение считается неустановившимся, а во втором — установившимся.

Для получения уравнений турбулентного течения используют уравнения Навье — Стокса, все члены которых усредняют по времени.

Как известно из кинематики (см. п. 2.1), истинная мгновенная скорость связана с усредненной соотношением $u = \bar{u} + u'$, где u' — пульсация. Для давления также можно написать $p = \bar{p} + p'$, причем

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} p\,dt.$$

---

* Осборн Рейнольдс (1842—1912) — выдающийся английский физик и инженер, профессор университета в Манчестере, член Лондонского королевского общества. Получил важнейшие результаты в областях изучения кавитации, смены режимов течения, турбулентности, гидродинамической теории смазки.

Дополнительно к изложенному в п. 2.1 заметим, что интервал T должен быть достаточно большим по сравнению с максимальным периодом пульсаций, но в случае усредненно неустановившегося движения малым по сравнению с характерным для него интервалом времени (например, периодом колебательного движения, временем опорожнения резервуара и т. п.).

Если движение усредненно установившееся (или квазиустановившееся), т. е. усредненные величины не зависят от времени, то, выполняя операцию усреднения, можно убедиться, что для двух пульсирующих величин φ и ψ справедливо равенство $\overline{\bar{\varphi}\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}$. При неустановившемся движении это равенство принимается в качестве постулата, выражающего одно из качеств операции усреднения. Легко убедиться, что усредненное значение производной любого порядка по координатам равно производной того же порядка от усредненного значения величины. Например,

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi\,dt = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}.$$

Этому же правилу подчиняется и производная по времени

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dt = \frac{1}{T}\left[\varphi(x, y, z, t+T/2) - \varphi(x, y, z, t-T/2)\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi\,dt = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi\,dt\right] = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}.$$

Производя усреднение, приходим к выводу, что уравнение неразрывности не изменяет своего вида:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{u}} = 0.$$

Обратимся теперь к уравнениям Навье — Стокса для несжимаемой жидкости и произведем усреднение каждого из их членов. Для этого предварительно выполним тождественное преобразование конвективных членов. Учитывая уравнение неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, убеждаемся, что, например, для первого уравнения

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z).$$

Поэтому первое уравнение Навье — Стокса можно записать в виде

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z).$$

Аналогично записываются два других уравнения. Результат усреднения каждого из членов левой части и локального ускорения в правой части полученной системы может быть записан сразу на основе приведенных выше свойств принятой операции усреднения. Остановимся на усреднении конвективных членов. Например, учитывая, что $\overline{\bar{u}_x\bar{u}_x} = \bar{u}_x\bar{u}_x$ и $\bar{u}'_x = 0$, находим

$$\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}u_x u_x\,dt\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_x + u'_x)\,dt\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}(\bar{u}_x\bar{u}_x + 2\bar{u}_x u'_x + u'_x u'_x)\,dt\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\bar{u}_x\bar{u}_x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'_x u'_x})$$

и аналогичные выражения для остальных конвективных членов уравнений Навье — Стокса.

Таким образом, с учетом уравнения неразрывности для усредненного установившегося турбулентного течения, когда $\partial\bar{u}_x/\partial t = \partial\bar{u}_y/\partial t = \partial\bar{u}_z/\partial t = 0$, получаем уравнения Рейнольдса:

$$\begin{aligned}
F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u}_x &= \bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z} + \\
&+ \frac{\partial(\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'_x u'_z})}{\partial z}; \\
F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\bar{u}_y &= \bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z} + \\
&+ \frac{\partial(\overline{u'_y u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'_y u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'_y u'_z})}{\partial z}; \qquad (5.25) \\
F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\bar{u}_z &= \bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y} + \bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z} + \\
&+ \frac{\partial(\overline{u'_z u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'_z u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'_z u'_z})}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Уравнения Рейнольдса можно получить также в любой криволинейной системе координат.

Система (5.25) отличается от уравнений Навье — Стокса не только тем, что в нее входят усредненные скорости вместо мгновенных, но и наличием девяти новых членов, зависящих от пульсаций скорости. Представив каждый из этих членов в форме

$$\frac{\partial(\overline{u_x u_x})}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u_x u_x}), \ \ldots$$

перепишем уравнения Рейнольдса, перенося все члены, зависящие от пульсаций, в левую часть. Для краткости рассмотрим только первое уравнение:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u_x' u_x'}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u_x' u_y'}) -$$

$$- \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\rho\overline{u_x' u_z'}) = \bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}. \qquad (5.26)$$

Из формулы (5.26) следует, что наряду с членами вида

$$\nu\nabla^2\bar{u}_x = \frac{1}{\rho}\mu\nabla^2\bar{u}_x,$$

выражающими действие вязкостных напряжений, уравнения Рейнольдса содержат члены вида

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u_x' u_x'}), \ \ldots,$$

которые выражают действие напряжений, присущих только турбулентному потоку. Эти напряжения, порожденные пульсациями скорости, называют турбулентными или кажущимися, подчеркивая последним термином, что их появление в уравнениях движения есть результат формального перехода от мгновенных скоростей к усредненным. Тем не менее, если сравнить усредненный турбулентный поток с ламинарным, эти напряжения дают отнюдь не «кажущийся» эффект, состоящий, в частности, в значительном увеличении сопротивлений и соответствующем изменении профиля скорости.

Таким образом, в турбулентном потоке полные касательные напряжения слагаются из вязкостных и турбулентных:

$$\tau = \tau_\mu + \tau_т, \qquad (5.27)$$

причем последние определяются формулой

$$\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i' u_j'} \qquad (5.28)$$

и обладают свойством взаимности: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Как видно из выражения (5.28), турбулентные напряжения зависят от интенсивности пульсаций скорости. Опыт показывает, что всюду в толще потока, кроме близких к стенкам слоев, $\tau_т \gg \tau_\mu$, так что вязкостными напряжениями можно пренебрегать. Однако у стенки τ_μ соизмеримо с $\tau_т$. На самой стенке пульсации равны нулю и $\tau_т = 0$. Поэтому турбулентные напряжения не могут быть приложены к твердому телу.

Уравнения Рейнольдса содержат десять неизвестных и, следовательно, образуют незамкнутую систему. Замыкание системы сводится к установлению связей между турбулентными напряжениями и другими переменными, входящими в уравнения. Установление таких связей в общем виде представляет трудную и далеко не решенную задачу. В современной прикладной гидромеханике она решается на основе гипотез, выдвинутых рядом авторов применительно к частным случаям движения. Зависимости, получаемые на основе таких гипотез, содержат функции или константы, подлежащие определению из опытов, а совокупность применяемых для этого методов составляет содержание полуэмпирических теорий турбулентности. В следующем параграфе приведены минимально необходимые сведения о некоторых из этих теорий.

Если ввести в рассмотрение вектор силы сопротивления $f(f_x, f_y, f_z)$, определяемый проекциями вида (выписывается только одна из них)

$$f_x = \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho \overline{u'_x u'_x}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{u'_x u'_y}) - \\ - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{u'_x u'_z}),$$

то уравнения (5.26) можно представить в векторной форме

$$F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + f = \frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)\, u,$$

где знаки осреднения опущены. Далее это уравнение легко привести к виду, аналогичному уравнению Громеки — Ламба (5.13). Затем, повторяя рассуждения, изложенные в п. 5.3, нетрудно получить уравнение (5.24) Бернулли, справедливое вдоль линии тока усредненного турбулентного течения, в котором член h'_c, учитывающий потери энергии, выражается зависимостью

$$h'_{c.т} = \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2}(f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz).$$

Таким образом, подтверждается применимость уравнения (5.24) Бернулли для элементарной струйки не только ламинарного, но и усредненного турбулентного потока. В последнем случае потери механической энергии определяются, как видно, не только вязкостными напряжениями. Однако следует иметь в виду сделанное выше замечание о природе и роли турбулентных напряжений. Соответствующие им дополнительные потери появляются в уравнении Бернулли только как следствие замены истинных мгновенных скоростей усредненными, тогда как физической первопричиной потерь остается только вязкость.

5.5. НЕКОТОРЫЕ ГИПОТЕЗЫ О ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Рассмотрим прямолинейный установившийся турбулентный поток с неравномерным распределением усредненных скоростей, зависящих только от координаты y (рис. 5.4). Одна из существующих гипотез о связи турбулентного напряжения $\tau_т$ с усредненной скоростью $\bar{u}$ выражается зависимостью

$$\tau_т = \rho\varepsilon\, (d\bar{u}/dy). \tag{5.29}$$

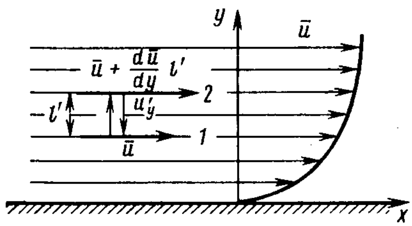


Рис. 5.4. Распределение скоростей в установившемся турбулентном потоке вблизи стенки

Эта формула, предложенная Ж. Буссинеском * (1877 г.), формально аналогична формуле Ньютона для вязкостного напряжения τ_μ. Коэффициент ε называется кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости и имеет размерность L^2/T. Если предположить или установить из опыта зависимость ε от координат, то выражением (5.29) будет определена связь турбулентного напряжения и усредненной местной скорости.

Простейшим является допущение о постоянстве ε для того или иного класса турбулентных течений. В некоторых частных случаях (для свободных турбулентных струй, свободной турбулентности) оно оправдывается в том смысле, что построенные теоретические закономерности распределения усредненных скоростей и других параметров с достаточной для практических целей точностью совпадают с результатами опытов. Однако в большинстве случаев допущение $\varepsilon = \text{const}$ приводит к результатам, отличающимся от экспериментальных.

Для течений, ограниченных стенками, можно подобрать зависимости ε от координат, дающие достаточно точное соответствие теоретических и экспериментальных данных. Так, для течения вблизи плоской стенки, уравнение которой $y = 0$ (см. рис. 5.4), предположение, что $\varepsilon = ky$, где $k = \text{const}$, приводит к логарифмическому распределению усредненных скоростей, хорошо подтвержденному опытами (см. ниже). Для течений в трубах Госсом (1961 г.) предложена зависимость $\varepsilon = k_1 [1 - (1 - y/r_0)^2]$, где $k_1 = \text{const}$; r_0 — радиус трубы. Она дает удовлетворительные результаты. Есть и другие предположения относительно величины ε.

Полуэмпирическая теория Л. Прандтля ** (1925 г.), широко применяемая в разнообразных задачах, основана на понятии

---

* Жозеф Валантен Буссинеск (1842—1929) — французский ученый, механик, доктор и профессор Парижского университета, член Парижской академии наук. Изучал турбулентные течения, волны в открытых руслах, гидравлический прыжок, гидравлические сопротивления, фильтрацию. Внес значительный вклад в развитие прикладной гидромеханики.

**Людвиг Прандтль (1875—1953) — немецкий ученый в области механики, один из основателей экспериментальной аэродинамики. Наиболее значительные результаты получил в области течений вязких жидкостей и газов. Создал полуэмпирическую теорию турбулентности, нашедшую широкое применение, получил фундаментальные результаты в теории пограничного слоя, проявив при этом уникальную физическую интуицию и глубокое понимание сущности явлений. В Геттингенском университете создал школу гидроаэродинамики, которая известна крупными научными достижениями.

пути перемешивания. Чтобы пояснить его, допустим, что жидкая частица, имевшая в слое 1 усредненную скорость $\bar{u}$ (см. рис. 5.4), под влиянием турбулентной пульсации перемещается на расстояние l' в слой 2, где усредненная скорость равна $\bar{u} + (d\bar{u}/dy)\,l'$. Основное допущение данной теории заключается в том, что путь между слоями 1 и 2 жидкая частица проходит без взаимодействия с другими частицами, т. е. так, как молекула газа проходит путь свободного пробега. Тогда в результате смешения с частицами слоя 2 переместившаяся частица приобретает усредненную скорость этого слоя, т. е. в нем будет иметь место пульсация продольной скорости:

$$u'_x \sim \frac{d\bar{u}}{dy}\,l'.$$

Далее предполагают, что u'_x и u'_y — величины одного порядка. Следовательно,

$$|u'_x u'_y| \sim \left|(l')^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\right| = (l')^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2.$$

Модуль касательного турбулентного напряжения

$$|\bar{\tau}_т| = |\rho \overline{u'_x u'_x}| = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2, \tag{5.30}$$

где l — линейная величина, в которую включен коэффициент пропорциональности из предыдущего выражения.

Величину l называют длиной пути перемешивания (или смешения). Из приведенных рассуждений следует, что путь перемешивания характеризует существующую в турбулентном потоке возможность для жидких частиц * свободно перемещаться из одного слоя в другой, а значит, является одной из характеристик внутреннего механизма турбулентного потока. Однако не следует понимать его буквально как путь свободного перемещения жидких частиц; в современной гидромеханике эту величину трактуют как геометрическую характеристику внутренней структуры турбулентного потока или как масштаб турбулентности.

Используя выражения (5.29) и (5.30), легко установить связь между кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости ε и длиной пути перемешивания l:

$$\varepsilon = l^2 \left|\frac{du}{dy}\right|. \tag{5.31}$$

Как гипотеза Буссинеска, так и гипотеза Прандтля сводят задачу нахождения зависимости турбулентных касательных напряжений от усредненных скоростей к задаче определения некоторой функции координат ε или l, характерной для турбулентного потока.

---

* Иногда переносимые под влиянием пульсаций жидкие массы называют молями и соответственно турбулентный обмен — молярным.

Решения второй задачи основаны или только на экспериментальных данных, или на дополнительных гипотезах. Так, например, Л. Прандтль предположил, что для полубезграничного потока вдоль плоскости справедлива линейная зависимость длины пути перемешивания l от расстояния y от стенки, т. е. $l = \varkappa y$, где $\varkappa$ — универсальная постоянная. С достаточной степенью точности эта гипотеза была подтверждена опытным путем для потока вблизи плоской стенки, однако оказалась неприменимой для течения в плоском канале и круглой трубе. Для последних случаев предложены эмпирические зависимости, приведенные в гл. 6.

Т. Карман * сделал попытку связать длину l пути перемешивания только с локальными параметрами усредненного потока, для чего ввел гипотезу о подобии пульсаций скорости во всех точках данного турбулентного потока, и на ее основе получил зависимость

$$l = -\varkappa \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2},$$

которая вытекает также из соображений размерностей. Однако формула Кармана, как и формула Прандтля, подтверждается опытами лишь в ограниченной области вблизи стенки и для потока в трубах дает результаты, резко расходящиеся с действительностью вблизи оси трубы. Тем не менее введение пути перемешивания оказалось весьма эффективным, так как определив для него эмпирическую зависимость, можно получить структуру расчетных формул (для скоростей и других параметров течения), дающих результаты, с достаточной степенью точности соответствующие экспериментальным.

Проиллюстрируем изложенное простейшим примером полубезграничного турбулентного потока вблизи плоской стенки (см. рис. 5.4). Поток будем считать двумерным, т. е. предположим, что движение вдоль оси z (по нормали к плоскости чертежа) полностью отсутствует. Поскольку стенка предполагается безграничной, то ни один из усредненных параметров потока не должен зависеть от координаты x, отсчитываемой вдоль стенки. Эти ограничения означают, что

$$\bar{u}_y = 0;\ \bar{u}_z = 0;\ u'_z = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial \overline{u'_x u'_x}}{\partial x} = 0,$$

---

* Теодор Карман (1881—1963) — выдающийся ученый в области механики. Т. Карману принадлежит ряд исследований по вопросам пограничного слоя, гидравлических сопротивлений, вихревых движений, газогидравлической аналогии и др.

а также то, что равны нулю все производные по z. Пренебрегая, кроме этого, действием массовых сил, упростим уравнения Рейнольдса:

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{u'_x u'_y}) = 0;$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{u'_y u'_y}) = 0.$$

Второе из этих уравнений определяет изменение давления по нормали к стенке и показывает, что оно имеет место, если поле пульсаций неоднородно по направлению оси y. В этом случае $\bar{p} + \rho\overline{u'_y u'_y} = \text{const}$. Первое уравнение позволяет найти закон распределения усредненной скорости $\bar{u}_x(y)$. Перепишем его в виде

$$\frac{d}{dy}\left(\rho\nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \rho\overline{u'_x u'_y}\right) = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial y}(\tau_\mu + \tau_т) = 0.$$

Отсюда следует, что суммарное напряжение в рассматриваемом потоке есть величина постоянная: $\tau_0 = \tau_\mu + \tau_т = \text{const}$. Принимая гипотезу Прандтля для турбулентных напряжений, запишем полное напряжение:

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \tag{5.32}$$

где знак усреднения скорости и индекс x опущены.

Достаточно очевидно, и это подтверждается опытом, что по мере приближения к стенке турбулентные пульсации должны затухать и, следовательно, должен существовать пристенный слой, где течение почти или полностью ламинарное. Такой слой называют вязким подслоем; как показывают опыты, пульсации в нем хотя и наблюдаются, однако существенного влияния на структуру течения не оказывают. Толщина вязкого подслоя, как правило, невелика (составляет доли миллиметра). В пределах вязкого подслоя $\tau_\mu \gg \tau_т$ и последним можно пренебречь. По мере удаления от стенки роль турбулентных пульсаций возрастает и, начиная с некоторого расстояния, $\tau_т \gg \tau_\mu$. Таким образом, весь поток можно разбить на область турбулентного течения и вязкий подслой, в результате чего получаем двухслойную модель турбулентного потока. Для турбулентной области можно пренебречь чисто вязкостными напряжениями и принять

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \text{ откуда } \frac{du}{dy} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Используя для длины l пути перемешивания формулу Прандтля и вводя обозначение

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}, \tag{5.33}$$

проинтегрируем последнее уравнение, в результате чего получим зависимость

$$u = \frac{u_*}{\varkappa}\ln y + C, \tag{5.34}$$

выражающую закон распределения скоростей в турбулентной области. Величина u_* имеет размерность L/T и называется динамической скоростью. Она является важной и достаточно универсальной характеристикой турбулентного потока (см. гл. 6). Очевидно, зависимость (5.34) не нарушится, если вместо постоянной C введем $C' = C - (u_*/\varkappa) \ln (u_*/\nu)$, поскольку u_* и $\varkappa$ — величины постоянные. Тогда выражение (5.34) примет безразмерный вид:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \lg \frac{u_* y}{\nu} + C'. \tag{5.35}$$

Величину $u_* y/\nu$ можно рассматривать как безразмерное расстояние от стенки. Логарифмический вид формулы (5.35) получен как следствие гипотезы Прандтля. Однако ниже будет показано, что независимо от той или иной полуэмпирической теории распределение скоростей турбулентного потока вблизи стенки выражается зависимостью

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right), \tag{5.36}$$

которая описывает универсальный профиль скорости вблизи гладкой стенки.

Рассмотренный пример иллюстрирует, каким образом гипотеза о турбулентных напряжениях позволяет получить практическое решение уравнений Рейнольдса. Правда, из-за простоты данного примера тот же результат может быть получен и без их использования. Тем не менее эти уравнения составляют основу теории турбулентных потоков и находят все более широкое применение.

Из других гипотез о турбулентных напряжениях следует отметить разработанную Тейлором * гипотезу переноса вихрей, согласно которой в турбулентном потоке происходит обмен молярными массами, причем завихренность (угловая скорость деформации) их сохраняется на длине пути перемешивания. Исходя из этой гипотезы, можно получить выражение для турбулентного напряжения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_т}{\partial y} = l^2 \frac{du_x}{dy} \frac{d^2 u_x}{dy^2},$$

используемое для определения профиля усредненной скорости и других параметров. Как и теория Прандтля, теория Тейлора требует дополнительной гипотезы о зависимости $l\,(y)$ и введения опытных констант.

Кроме рассмотренных выше гипотез о турбулентных напряжениях, существуют и другие. В последнее время успешно раз-

* Джефри Инграм Тейлор (1886—1975) — английский ученый в области механики, член Лондонского королевского общества. Внес фундаментальный вклад в теорию турбулентности: развил теорию устойчивости течений вязкой жидкости, теорию турбулентной диффузии, создал полуэмпирическую теорию турбулентности.

рабатываются принципиально иные подходы к изучению турбулентности, в том числе основанные на идеях А. Н. Колмогорова * и использующие теорию вероятностей и статистические методы.

Заметим в заключение, что если задача состоит только в описании закона распределения усредненной скорости в турбулентном потоке, то для простых случаев ее можно решить при помощи анализа размерности опытных данных, не вникая в физическую природу турбулентного течения и не строя для него физических моделей.

5.6. МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ Л. ЭЙЛЕРА

Идеальная или невязкая жидкость является упрощенной моделью реальной (вязкой) жидкости. По предположению, идеальная жидкость имеет все свойства реальной, кроме вязкости, поэтому для получения уравнения ее движения можно применить уравнения Навье — Стокса, положив $\mu = 0$ **. Тогда уравнения движения вязкого газа (5.8) и движения вязкой несжимаемой жидкости (5.9) упрощаются и принимают вид

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}; \quad F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}; \quad F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}. \quad (5.37)$$

Выражение (5.37) называют уравнениями Эйлера. Они описывают движение сжимаемой и несжимаемой идеальной жидкости. Их векторные формы легко получить из соответствующих уравнений Навье — Стокса, положив в них $\nu = 0$. Так, из формул (5.10)—(5.12) находим

$$\boldsymbol{F} - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p = d\boldsymbol{u}/dt, \quad (5.38)$$

т. е.

$$\boldsymbol{F} - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p = \partial \boldsymbol{u}/\partial t + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u}, \quad (5.39)$$

и

$$\boldsymbol{F} - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p - \mathrm{grad}\,\frac{u^2}{2} = \partial \boldsymbol{u}/\partial t - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}. \quad (5.40)$$

Удобную для интегрирования форму уравнения для сжимаемой жидкости можно получить, предположив баротропность

---

* Колмогоров Андрей Николаевич (род. 1903) — академик, выдающийся советский математик. Автор фундаментальных исследований по теории вероятностей, теории функций, топологии, математической логике. Выдвинул ряд плодотворных идей в статистической теории турбулентности.

** Отсюда не следует, что всякое решение уравнений Навье—Стокса будет давать соответствующее решение уравнений идеальной жидкости, если в нем положить $\nu = 0$. Дело в том, что в решении дифференциальных уравнений входят граничные условия, которые существенно различны для вязкой и идеальной жидкостей.

процесса (см. п. 4.1) и введя функцию давления, определяемую выражениями (4.5)—(4.7). Тогда уравнение (5.40) примет вид

$$-\operatorname{grad}(\Phi + \mathscr{P} + u^2/2) = \partial \boldsymbol{u}/\partial t - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}. \qquad (5.41)$$

Для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{grad}(\Phi + p/\rho + u^2/2) = \partial \boldsymbol{u}/\partial t - \boldsymbol{u}\times\Omega. \qquad (5.42)$$

Используя обозначение $E = \Phi + \mathscr{P} + \frac{u^2}{2}$, запишем уравнение (5.41) в компактной векторной форме

$$-\operatorname{grad} E = \partial \boldsymbol{u}/\partial t - \boldsymbol{u}\times\Omega \qquad (5.43)$$

или в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} -\partial E/\partial x &= \partial u_x/\partial t - (u_y\Omega_z - u_z\Omega_y);\\ -\partial E/\partial y &= \partial u_y/\partial t - (u_z\Omega_x - u_x\Omega_z);\\ -\partial E/\partial z &= \partial u_z/\partial t - (u_x\Omega_y - u_y\Omega_x). \end{aligned} \qquad (5.44)$$

Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости вместе с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему. Для сжимаемого газа эту систему необходимо дополнить по меньшей мере еще одним уравнением, например, выражающим условие баротропности или другое термодинамическое соотношение.

Граничные условия на твердых поверхностях для идеальной и вязкой жидкостей существенно различны. При движении идеальной жидкости отсутствует прилипание частиц к твердым поверхностям и жидкость скользит вдоль стенки. Граничным условием в этом случае служит непроницаемость границы, что для неподвижной стенки означает равенство нулю на ней нормальной составляющей скорости жидкости

$$u_n|_c = 0. \qquad (5.45)$$

Это условие означает, что вектор скорости касателен к граничной поверхности, т. е. последняя является линией тока. Поэтому любую линию тока в идеальной жидкости можно принять за твердую границу, не нарушив структуры течения.

Если движение идеальной жидкости потенциальное, то условию (5.45) можно придать вид

$$u_n|_c = \partial\varphi/\partial n|_c = 0, \qquad (5.46)$$

где φ — потенциал скорости.

В случае плоского течения, для которого существует функция тока $\psi(x, y)$, граничное условие на твердой поверхности можно записать в виде

$$\psi|_c = \psi_0 = \mathrm{const},$$

откуда следует, что твердая стенка является одной из линий тока, значение функции тока на которой равно ψ_0.

Если граничная поверхность задана уравнением $S(x, y, z) = 0$, то grad S есть вектор, нормальный к этой поверхности. Значит, условие (5.45) равносильно условию ортогональности вектора скорости на стенке $\mathbf{u}|_c$ и вектора grad S. Следовательно, скалярное произведение этих векторов на стенке равно нулю:

$$\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial x} u_x + \frac{\partial S}{\partial y} u_y + \frac{\partial S}{\partial z} u_z = 0. \qquad (5.47)$$

Для подвижной твердой границы используется условие безотрывности течения и непроницаемости стенки, которое сводится к равенству нормальных составляющих скоростей $u_n|_c$ жидкости и v_n стенки:

$$u_n|_c = v_n. \qquad (5.48)$$

Если подвижная граничная поверхность задана уравнением $S(x, y, z, t) = 0$, то последнему условию можно придать иную форму. При безотрывном движении частицы ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ должны в любой момент удовлетворять уравнению граничной поверхности, т. е. $S[x(t), y(t), z(t), t] = 0$. Так как $dS = 0$,

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{\partial S}{\partial t} dt = 0 \qquad (5.49)$$

и, учитывая, что $dx/dt = u_x$, $dy/dt = u_y$, $dz/dt = u_z$, получим граничное условие на подвижной стенке

$$u_x \frac{\partial S}{\partial x} + u_y \frac{\partial S}{\partial y} + u_z \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad (5.50)$$

Граничное условие на свободной поверхности для идеальной жидкости, как и для вязкой, имеет вид

$$p = p_0 = \text{const}.$$

5.7. ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Для некоторых классов течений идеальной жидкости из уравнений Эйлера можно получить общие интегралы. С этой целью используем векторную форму (5.43)

$$-\operatorname{grad} E = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}$$

применительно к следующим течениям.

1. *Установившееся безвихревое течение.* Для такого течения характерно выполнение условий $\partial u/\partial t = 0$ и $\boldsymbol{\Omega} = 0$ во всем пространстве, кроме отдельных точек или поверхностей, где $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$. Из выражения (5.43) следует, что при этом grad $E = 0$, т. е. $E = \text{const}$ или

$$\Phi + \mathscr{P} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \qquad (5.51)$$

Важно подчеркнуть, что это соотношение, называемое интегралом Бернулли, выполняется для всего пространства, занятого потенциально движущейся жидкостью.

2. *Установившееся вихревое течение.* В этом случае $\partial u/\partial t = 0$, но $\Omega \neq 0$. Следовательно,

$$\operatorname{grad} E = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{5.52}$$

Допустим сначала, что во всех точках некоторой части движущейся жидкости векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ коллинеарны: $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{\Omega}$. Тогда в этой части $\operatorname{grad} E = 0$ или $E = \text{const}$, т. е. получаем результат, совпадающий с выражением (5.51). Это движение называют винтовым. Поскольку в каждой точке совпадают направления векторов поступательной и угловой скоростей, то частицы движутся вдоль некоторых линий тока, которые одновременно являются вихревыми линиями, т. е. их элементарные отрезки служат мгновенными осями вращения отдельных частиц. Подобные течения могут образовываться, например, при обтекании крыла конечного размаха. Для таких течений не выполняется условие $\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$ и, следовательно, в них нельзя провести живых сечений.

Рассмотрим более общий случай вихревого течения, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ не коллинеарны. Для получения интеграла выберем произвольный направленный отрезок $d\boldsymbol{s}$ (dx, dy, dz) и скалярно умножим на него обе части уравнения (5.52):

$$\operatorname{grad} E \cdot d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Векторное произведение $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}$ представляет собой вектор, направленный нормально к плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{u}$ (см. рис. 5.2). Следовательно, если $d\boldsymbol{s}$ совпадает с одним из них, т. е. указывает направление линии тока или вихревой линии, то векторы $\boldsymbol{A}$ и $d\boldsymbol{s}$ ортогональны, и тогда $\boldsymbol{A} \times \times d\boldsymbol{s} = 0$. Иными словами, вдоль линий тока и вихревых линий $\operatorname{grad} E \cdot d\boldsymbol{s} = dE = 0$ или

$$E = \Phi + \mathscr{P} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \tag{5.53}$$

Уравнение (5.53) аналогично уравнению (5.51). Однако следует помнить, что если в уравнении (5.51) значение E одно и то же для всей движущейся жидкости, то в уравнении (5.53) оно постоянно лишь вдоль какой-нибудь линии тока или вихревой линии и может изменяться при переходе с одной из них на другую. Но если образовать поверхность, проведя через все точки какой-нибудь линии тока вихревые линии (рис. 5.5), то, очевидно, на всей такой поверхности функция E будет постоянна. Точно так же $E = \text{const}$ на поверхности, образованной системой линий тока, проведенных через точки одной и той же вихревой линии.

Если массовой силой является только сила тяжести ($\Phi = gz$), интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, $\mathscr{P} = p/\rho$) можно представить в виде

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}, \tag{5.54}$$

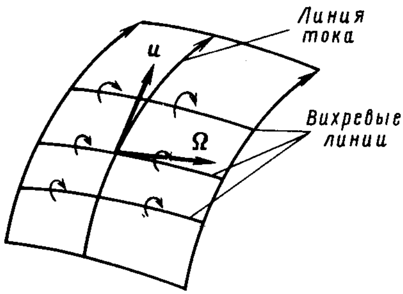


Рис. 5.5. Построение поверхности, для которой $E = \text{const}$

что является частным случаем уравнения Бернулли (5.24) при отсутствии вязкости ($\nu = 0$).

В некоторых задачах влияние силы тяжести несущественно. При этом $z \ll p/(\rho g)$ или $z \ll u^2/(2g)$, и вместо уравнения (5.54) можно использовать уравнение Бернулли в форме

$$p + \rho u^2/2 = \text{const}. \tag{5.55}$$

Для идеального (невязкого) газа функция $\mathcal{P}$ давления имеет различный вид для разных термодинамических процессов. Для баротропных процессов она выражается в элементарных функциях. Рассмотрим два частных случая.

А. Изотермическое течение газа.

Уравнение процесса имеет вид

$$p/\rho = p_0/\rho_0 = RT_0,$$

где p_0, ρ_0 и T_0 — фиксированные значения давления, плотности и абсолютной температуры в некоторой точке.

Тогда

$$\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln p + C.$$

Не учитывая несущественную постоянную C, получим интеграл Бернулли в виде

$$\Phi + \frac{p_0}{\rho_0} \ln p + \frac{u^2}{2} = \text{const}.$$

Поскольку для газа влияние массовых сил на характер течения несущественно в большинстве технических задач, то обычно этот интеграл применяют в форме

$$\frac{p_0}{\rho_0} \ln p + \frac{u^2}{2} = \text{const}.$$

Если в точке, где давление равно p_0, скорость имеет значение u_0, то, определяя постоянную и учитывая, что $p_0/\rho_0 = p/\rho$, получаем

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = 0. \tag{5.56}$$

Б. Адиабатное течение газа.

Уравнение процесса имеет вид

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} \quad \text{или} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k},$$

где $k = C_p/C_V$ — показатель адиабаты.

При этом функция давления

$$\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Подставляя это выражение в формулу (5.53) и учитывая малое влияние массовых сил, получаем уравнение Бернулли для адиабатного движения идеального совершенного газа

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{u_0^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \tag{5.57}$$

Уравнения (5.56) и (5.57) можно применять при тех же ограничительных условиях, что и интеграл Бернулли, из которого они получены. С практической точки зрения имеет смысл использовать их лишь в случаях, когда существенно проявляется сжимаемость газа, что имеет место при скоростях, соизмеримых со скоростью звука. Для описания движения газа с малыми скоростями можно пользоваться уравнением Бернулли для несжимаемой жидкости.

3. *Неустановившееся безвихревое течение.* Для этого случая $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \neq 0$ и $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Последнее условие, как известно из кинематики, эквивалентно существованию потенциала скорости φ, для которого $\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{u}$.

Поскольку речь идет о неустановившемся движении, то φ зависит не только от координат, но и от времени t, которое будем рассматривать как параметр. Тогда уравнение (5.43) можно записать в форме

$$-\operatorname{grad} E = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi$$

или, меняя порядок операций $\partial/\partial t$ и grad, $\operatorname{grad}\left(E + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0$.

Из этого выражения следует, что функция, стоящая под знаком grad, не зависит от координат x, y, z, но это не значит, что она не зависит от времени. Поэтому запишем

$$E + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t) \text{ или } \Phi + \mathcal{P} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t), \tag{5.58}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

Соотношение (5.58) называется интегралом Лагранжа.

Для несжимаемой жидкости ($\mathcal{P} = p/\rho$) в поле силы тяжести ($\Phi = gz$) из выражения (5.58) получаем уравнение

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_1(t), \tag{5.59}$$

которому можно придать форму, вытекающую из уравнения (5.23) как частный случай. Для этого выберем в некоторый момент времени произвольную трубку тока. Поскольку правая часть уравнения (5.59) зависит только от времени, значения левой части в данный момент времени должны быть одинаковы в сечениях *1* и *2* трубки (см. рис. 5.2). Поэтому

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}+\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_1=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_2. \quad (5.60)$$

Если s — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль оси трубки тока, то, как известно, $u=\partial\varphi/\partial s$, откуда

$$\varphi=\int u\,ds+f_2(t) \text{ и } \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int u\,ds+f_2'(t)=\int\frac{\partial u}{\partial t}ds+f_2'(t),$$

где $f_2(t)$ — произвольная функция времени.

Очевидно, $f_2'(t)|_1=f_2'(t)|_2$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_2-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_1=\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds.$$

Теперь выражение (5.60) можно записать в виде

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds. \quad (5.61)$$

Это уравнение, очевидно, есть частный случай уравнения (5.23) при $\nu=0$.

4. *Относительное движение идеальной жидкости.* Рассмотрим движение жидкости в канале, который перемещается с ускорением относительно Земли. В этом случае движение жидкости относительно стенок канала будем называть относительным. Такое течение имеет место, например, в турбомашинах: оно создается в проточных каналах между лопастями, образующими гидродинамическую решетку (рис. 5.6).

Если это движение рассматривать в системе координат, жестко связанной со стенками канала, то при постоянной во времени относительной скорости движение будет установившимся. Полагая жидкость идеальной, его можно описать уравнениями Эйлера, однако в отличие от абсолютного движения, в соответствии с известным принципом механики, необходимо в число массовых сил ввести силы инерции.

Пусть движение происходит вдоль трубки тока, вращающейся как целое с постоянной угловой скоростью ω (рис. 5.7). В число массовых сил должны быть включены: сила тяжести $\boldsymbol{F}_g=\boldsymbol{g}$, центробежная сила $\boldsymbol{F}_ц=(v^2/r)\,\boldsymbol{r}^0=\omega^2r\boldsymbol{r}^0$, кориолисова сила $\boldsymbol{F}_к=-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$, где $v=\omega r$ — окружная переносная скорость на окружности радиусом r; $\boldsymbol{r}^0$ — единичный вектор радиального направления; $\boldsymbol{u}$ — относительная скорость движения вдоль струйки.

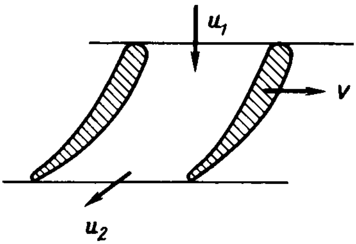


Рис. 5.6. Схема, иллюстрирующая относительное течение жидкости

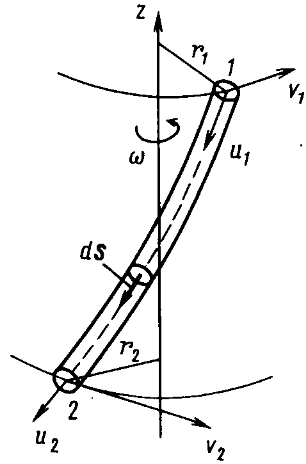


Рис. 5.7. Схема к выводу уравнения Бернулли для относительного движения в элементарной струйке

Уравнение движения в подвижной (неинерциальной) системе координат согласно выражению (5.40) запишем в виде

$$\boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_ц + \boldsymbol{F}_к - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\frac{u^2}{2} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u}\times\Omega. \qquad (5.62)$$

Полагая движение установившимся ($\partial \boldsymbol{u}/\partial t = 0$) и безвихревым ($\Omega = 0$), а также учитывая, что $\boldsymbol{F}_g = -\operatorname{grad}(gz)$, $\boldsymbol{F}_ц = \operatorname{grad}(\omega^2 r^2/2)$ и $(1/\rho)\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\mathscr{P}$, получаем

$$\operatorname{grad}\left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \mathscr{P} + \frac{u^2}{2}\right) = 2\omega\times\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\times\Omega. \qquad (5.63)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на элементарный вектор ds перемещения вдоль оси струйки и учтем, что вектор кориолисовой силы нормален к вектору относительной скорости $\boldsymbol{u}$, т. е. нормален к вектору ds, а значит, $\boldsymbol{F}_к\cdot ds = 0$. Тогда получим

$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \mathscr{P} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \qquad (5.64)$$

Применяя этот интеграл к двум сечениям *1* и *2* элементарной струйки, учитывая, что $\omega r = v$ есть переносная скорость, получим уравнение относительного движения тяжелой идеальной жидкости

$$gz_1 + \frac{u_1^2 - v_1^2}{2} + \mathscr{P}_1 = gz_2 + \frac{u_2^2 - v_2^2}{2} + \mathscr{P}_2. \qquad (5.65)$$

Для несжимаемой жидкости $\mathscr{P} = p/\rho$ и уравнение (5.65) принимает вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \qquad (5.66)$$

5.8. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВИХРЕЙ

В гл. 2 были описаны основные кинематические свойства вихревых движений и доказаны соответствующие теоремы. Теперь, располагая уравнениями динамики, можно установить динамические свойства вихрей. В основе их рассмотрения лежит теорема Томсона *: если идеальная жидкость движется под действием сил, обладающих однозначным потенциалом, и процесс баротропен, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру постоянна во времени. Напомним, что контур называют жидким, если во время движения он состоит из одних и тех же частиц.

Для доказательства теоремы выберем такой контур и рассмотрим два его положения L и L', соответствующие двум близким моментам времени t и $t + dt$ (рис. 5.8). Условимся операцию дифференцирования вдоль контура в данный фиксированный момент времени обозначать буквой δ, а дифференциалы перемещений в пространстве с течением времени — буквой d. Если $\delta\boldsymbol{l}$ — элементарный вектор дуги контура L в момент t, то в момент $t + dt$ вследствие перемещения в пространстве и деформации жидких частиц он будет иметь значение $\delta\boldsymbol{l} + d(\delta\boldsymbol{l})$. При этом если его нижний конец переместится на величину $d\boldsymbol{s}$, то верхний из-за неодинаковости скоростей — на величину $d\boldsymbol{s} + \delta(d\boldsymbol{s})$. Так как $\delta\boldsymbol{l} + d\boldsymbol{s} + \delta(d\boldsymbol{s}) = d\boldsymbol{s} + d\boldsymbol{l} + d(\delta\boldsymbol{l})$, получаем $\delta(d\boldsymbol{s}) = d(\delta\boldsymbol{l})$, т. е. порядок дифференцирования δ и d можно менять.

Теперь, обозначив через Γ циркуляцию скорости по жидкому контуру L, вычислим ее производную по времени $d\Gamma/dt$. По определению $\Gamma = \oint\limits_L \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{l}$ и, следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint\limits_L \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{l}.$$

Поскольку интегрирование осуществляется по переменной l, а время t играет роль параметра, то знак производной можно внести под знак интеграла и, пользуясь правилом дифференцирования, скалярного произведения, записать

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint\limits_L \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{l}) = \oint\limits_L \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{l} + \oint\limits_L \boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{l}). \tag{5.67}$$

* Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824—1907) — выдающийся английский физик. Автор важных работ в области электродинамики, гидродинамики и математики. Доказал фундаментальную теорему теории вихревых движений.

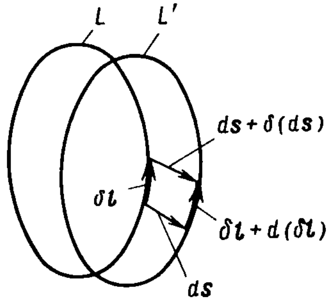


Рис. 5.8. Схема для доказательства теоремы Томсона

Для вычисления первого интеграла используем уравнение Эйлера (5.38):

$$\oint\limits_L \frac{du}{dt}\cdot\delta l = \oint\limits_L \left(F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right)\cdot\delta l.$$

По условию теоремы $F = -\operatorname{grad}\Phi$ и $(1/\rho)\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\mathscr{P}$, причем второе из этих равенств имеет место только при баротропных процессах. Учитывая однозначность функций Φ и $\mathscr{P}$, получаем

$$\oint\limits_L \frac{du}{\partial t}\cdot\delta l = -\oint\limits_L \operatorname{grad}(\Phi + \mathscr{P})\cdot\delta l = -\oint\limits_L \delta(\Phi + \mathscr{P}) = 0.$$

При вычислении второго интеграла в выражении (5.67) учтем, что $u = ds/dt$ представляет собой скорость движения жидких частиц. Следовательно, в силу однозначности функции u

$$\oint\limits_L u\cdot\frac{d}{dt}(\delta l) = \oint\limits_L u\cdot\delta\frac{ds}{dt} = \oint\limits_L u\cdot\delta u = \oint\limits_L \delta\frac{u^2}{2} = 0.$$

Таким образом, $d\Gamma/dt = 0$, что означает постоянство циркуляции Γ во времени, а значит, и справедливость сформулированной выше теоремы Томсона.

Заметим, что если процесс не баротропен, то равен нулю лишь второй из интегралов выражения (5.67) и

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint\limits_L \frac{du}{dt}\cdot\delta l, \tag{5.68}$$

где $du/dt = a$ — полное ускорение частицы и потому формулу (5.68) можно прочитать следующим образом: индивидуальная производная от циркуляции по замкнутому жидкому контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.

Поскольку для вывода уравнения (5.68) не используются уравнения динамики, то это утверждение справедливо как для идеальной, так и для вязкой жидкостей. Однако сама теорема Томсона применима лишь для идеальной жидкости, поскольку в реальной всегда действуют силы вязкости, не обладающие потенциалом.

Из теоремы Томсона следует свойство сохраняемости вихревых движений в идеальной баротропной жидкости. Действительно, пусть в начальный момент времени суммарная интенсивность вихревых трубок в некоторой части движущейся жидкости имела значение J. В силу теоремы Стокса циркуляция Γ по любому замкнутому контуру, охватывающему эти трубки, равна $2J$. Так как по теореме Томсона $d\Gamma/dt = 0$, то циркуляция, а значит, и интенсивность J не изменяются во все время движения. В частности, если в начальный момент движение было полностью безвихревым (всюду в области течения $\Gamma = 0$ и $J = 0$), то оно останется безвихревым во все время движения. Иными словами, в идеальной баротропной жидкости вихревые движения не могут возникать или исчезать, если действующие на жидкость силы имеют однозначный потенциал. (Утверждение о невозможности возникновения вихрей при указанных условиях известно под наименованием теоремы Лагранжа).

Таким образом, теорема Томсона указывает на то, что причины возникновения и исчезновения вихрей лежат за пределами теории идеальной баротропной жидкости. Поскольку для вязкой несжимаемой жидкости баротропность имеет место ($\rho = \text{const}$), причиной образования вихрей для нее может служить только вязкость. В газах вихри могут возникать также вследствие нарушения баротропности. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если жидкость идеальная, но плотность зависит не только от давления, а и от других параметров (например, от температуры), то формулу (5.68) можно переписать в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_L \operatorname{grad} \Phi \cdot \delta \boldsymbol{l} - \oint_L \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot \delta \boldsymbol{l}.$$

Здесь $\operatorname{grad} \Phi \cdot \delta \boldsymbol{l} = \delta\Phi$ и $\oint_L \delta\Phi = 0$, а так как $\operatorname{grad}\, p \cdot \delta \boldsymbol{l} = \delta p$,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_L \frac{1}{\rho}\, \delta p. \tag{5.69}$$

Это соотношение, установленное В. Бьеркнесом, показывает, что при небаротропных движениях газа циркуляция, а значит, и интенсивность вихрей могут изменяться во времени даже при отсутствии вязкости.

Следует также иметь в виду, что при доказательстве теоремы Томсона используется предположение о непрерывности изменения скорости вдоль жидкого контура. Если он пересекает поверхность разрыва (см. гл. 7), то последняя может порождать вихри даже при соблюдении условий теоремы.

5.9. УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Уравнения Эйлера, Навье — Стокса и Рейнольдса дают связь между параметрами движущейся среды в каждой точке пространства, занятого жидкостью. Чтобы описать движение конечной массы жидкости, нужно получить решение этих уравнений, т. е. решить общую задачу гидромеханики. Вследствие математических трудностей это удается сделать далеко не во всех случаях. Между тем есть немало технических задач, в которых не требуется знать скорости и давления во всех точках жидкости, а достаточно определить некоторые интегральные величины, например силы воздействия потока на ограничивающие твердые поверхности или обтекаемые тела.

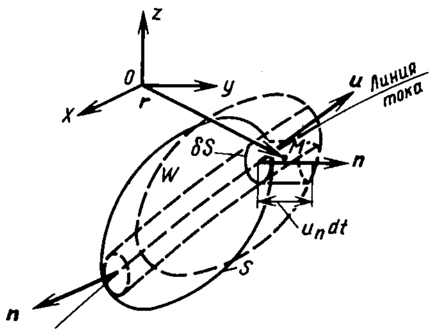


Рис. 5.9. Схема для вывода уравнений количества движения и момента количества движения

Для решения таких задач эффективным является применение интегральных форм уравнений количества движения и момента количества движения. Методика их использования проиллюстрирована на конкретных примерах в гл. 6, 7 и др.; в данном параграфе приведены уравнения количества движения и момента количества движения в общей форме, удобной для практического применения. Закон количества движения сформулирован в гл. 3, где в общей форме получено соответствующее уравнение (3.8). Оно, однако, малоудобно для практического применения из-за необходимости вычислять объемный интеграл, требующий знания закона распределения скоростей в этом объеме. Более удобную форму уравнения количества движения можно получить, если перейти от описания потока по методу Лагранжа к описанию по методу Эйлера.

Рассмотрим установившееся движение жидкого объема W, ограниченного поверхностью S, и зафиксируем положение последней в некоторый момент t (рис. 5.9). В дальнейшем эту поверхность будем называть контрольной.

Выделим на ней малую площадку δS, определяемую нормалью $\boldsymbol{n}$. За время dt через площадку δS протекает жидкость массой $\rho u_n \delta S dt$, а проносимое вместе с ней количество движения равно $\rho u_n \delta S \boldsymbol{u} dt = \delta\,(d\boldsymbol{K})$, где символ δ означает дифференцирование по поверхности, $\boldsymbol{K}$ — главный вектор количества движения жидкого объема. Важно заметить, что $\delta\,(d\boldsymbol{K}) > 0$ для тех площадок δS, через которые жидкость вытекает из объема W $(u_n > 0)$, и $\delta\,(d\boldsymbol{K}) < 0$ для площадок, через которые жидкость втекает в объем W $(u_n < 0)$. Следовательно, выражение

$$\int_S \delta\,(d\boldsymbol{K}) = d\boldsymbol{K} = \int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\, dt \delta S$$

представляет собой разность количеств движения вынесенного и внесенного в объем W за время dt жидкостью, протекшей за это время через поверхность S. В силу установившегося характера движения величина $d\boldsymbol{K}$ будет полным изменением количества движения жидкости в объеме W за время dt. Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \int_S \rho u_n \boldsymbol{u} \delta S. \tag{5.70}$$

Этот результат показывает, что производная по времени количества движения жидкости в произвольном объеме равна потоку количества движения через поверхность, ограничивающую этот объем.

Теперь, заменив обозначение δ на d, уравнение количества движения (3.8) можно записать в виде

$$\int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS = \int_W \rho \boldsymbol{F}\, dW + \int_S \boldsymbol{p}_n\, dS \tag{5.71}$$

и прочитать как теорему: при установившемся движении жидкого объема главный вектор внешних сил, действующих на заключенную в нем жидкость, равен потоку количества движения через контрольную поверхность.

Изложенным выше способом мы определили только конвективную производную количества движения. В общем случае неустановившегося движения для того чтобы найти изменение количества движения, следует брать индивидуальную производную, включающую также и локальную часть:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} + \int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS, \tag{5.72}$$

а уравнение количества движения должно быть записано в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} + \int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS = \int_W \rho \boldsymbol{F}\, dW + \int_S \boldsymbol{p}_n\, dS. \tag{5.73}$$

Уравнение (5.71) связывает главный вектор поверхностных сил со значениями скоростей на контрольной поверхности.

Для определения силового воздействия жидкости на твердые тела достаточно знать распределение скоростей только по контрольной поверхности. Последнюю можно выбирать произвольно, однако (по практическим соображениям) так, чтобы скорости на ней наиболее просто определялись из условий задачи. Область или объем, ограниченные контрольной поверхностью, могут быть и не односвязными — внутри могут быть заключены одно или несколько твердых тел.

При выводе уравнения момента количества движения учтем, что для элементарной массы ρdW количество движения равно $\rho dW \boldsymbol{u}$, а его момент относительно начала координат есть $(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u})\, \rho dW$, где $\boldsymbol{r}$— радиус-вектор центра масс объема dW. Следовательно, для массы жидкости в объеме W момент количества движения

$$\boldsymbol{L} = \int_W (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u})\, \rho\, dW.$$

Согласно известной теореме механики производная по времени от момента количества движения (кинетического момента) системы равна сумме моментов, действующих на эту систему внешних сил, т. е.

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int_W (r\times u)\,\rho\, dW = \int_W (r\times F)\,\rho\, dW + \int_S (r\times p_n)\, dS. \quad (5.74)$$

Для установившегося движения полную производную объемного интеграла можно выразить через интеграл по контрольной поверхности S, подобно тому, как это было сделано для производной от количества движения.

Обозначим через r радиус-вектор центра масс элементарного объема $u_n\delta S dt$ (рис. 5.9). Тогда, очевидно, величина

$$\delta(dL) = r\times(\rho u_n \delta S\, dtu) \equiv (r\times u)\,\rho u_n \delta S\, dt$$

будет представлять собой момент количества движения элементарной массы $\rho u_n \delta S dt$, протекающей за время dt через площадку δS. Для этой величины справедливо замечание о знаках, сделанное выше по поводу элементарного потока количества движения. Поэтому, интегрируя последнее выражение по поверхности S, получим изменение момента количества движения L за время dt:

$$dL = dt\int_S (r\times u)\,\rho u_n \delta S.$$

Отсюда найдем выражение для индивидуальной производной момента количества движения жидкого объема:

$$\frac{dL}{dt} = \int_S (r\times u)\,\rho u_n \delta S.$$

Теперь уравнение момента количества движения примет вид

$$\int_S (r\times u)\,\rho u_n\, dS = \int_W (r\times F)\,\rho\, dW + \int_S (r\times p_n)\, dS. \quad (5.75)$$

Это уравнение служит основой для решения ряда фундаментальных задач теории турбомашин. Пример его использования приведен в п. 6.12.

Для неустановившегося движения уравнение включает также локальную производную от момента количества движения:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \int_S (r\times u)\,\rho u_n\, dS = \int_W (r\times F)\,\rho\, dW + \int_S (r\times p_n)\, dS. \quad (5.75')$$

5.10. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Как следствие уравнений движения вязкой жидкости выше получено уравнение Бернулли, которое выражает теорему об изменении кинетической энергии, т. е. является уравнением баланса механической энергии. Но в природе и технике встречается множество явлений и процессов, сопровождающихся выполнением механической работы, теплообменом с внешней средой и превращением механической энергии в теплоту. В этих случаях закон сохранения энергии выражается более общим уравнением и не является следствием уравнений движения.

Для получения общей формы уравнения, выражающего закон сохранения энергии, выделим конечный объем W сжимаемой или несжимаемой жидкости, ограниченный поверхностью S и находящийся в движении. Рассматривая массу этого объема жидкости как неизолированную термодинамическую систему, можно применить к ней закон сохранения и превращения энергии, согласно которому изменение полной энергии системы равно сумме притока теплоты к системе и совершенной над ней работы внешних сил.

Для выражения каждой из упомянутых в этой формулировке величин обозначим через U внутреннюю энергию * единицы массы жидкости; q — количество теплоты, подводимое к единице массы жидкости за единицу времени; обозначения остальных величин оставим прежними.

Полная энергия $Э$ выделенного жидкого тела складывается из внутренней и кинетической энергий и ее можно выразить интегралом **

$$Э = \int_W \rho (U + u^2/2)\, dW, \tag{5.76}$$

а изменение энергии за время dt — дифференциалом

$$dЭ = d\int_W \rho \left(U + \frac{u^2}{2}\right) dW.$$

Внешние силы могут быть поверхностными и массовыми. Работу первых можно рассчитать, выделив на поверхности S площадку dS и приняв во внимание, что сила, распределенная по ней, равна $p_n dS$. Если за время dt площадка dS перемещается на расстояние $ds = udt$, то работа этой силы будет равна скалярному произведению силы на путь: $p_n \cdot ds dS$, а суммарная работа поверхностных сил выразится интегралом $\int_S p_n \cdot ds dS$.

Работу массовых сил можно представить в виде

$$\int_W F \cdot ds \rho\, dW,$$

где ds — элементарное перемещение массы $\rho\, dW$ за время dt.

* Под внутренней понимают энергию, равную сумме кинетических и потенциальных энергий всех составляющих жидкое тело частиц (молекул, атомов, ионов и др.).

** Аддитивность внутренней энергии имеет место не во всех случаях, но мы ограничимся предположением, что энергию отдельных частиц можно суммировать. Следует обратить внимание на то, что здесь в полную энергию не включается потенциальная энергия положения. Это означает, что сила тяжести является внешней и ее работа учитывается в правой части уравнения энергии.

Полное количество теплоты, подведенное к массе жидкости в объеме W за время dt, равно

$$dQ = \int_W \rho q \, dW \, dt.$$

Теперь можно написать уравнение, выражающее закон сохранения энергии:

$$d \int_W \rho \left(U + \frac{u^2}{2} \right) dW = \int_S p_n \cdot ds \, dS + \int_W F \cdot ds \rho \, dW + \int_W \rho q \, dW \, dt.$$

Разделив члены этого выражения на dt и учитывая, что $ds/dt = u$ есть скорость движения жидких частиц, получаем интегральную форму закона сохранения энергии *

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \left(U + \frac{u^2}{2} \right) dW = \int_S p_n \cdot u \, dS + \int_W \rho F \cdot u \, dW + \int_W \rho q \, dW. \quad (5.77)$$

Для получения дифференциальной формы этого уравнения учтем, прежде всего, что $\rho dW = dm$ есть масса объема dW, остающаяся постоянной во время движения. Следовательно, $dm/dt = 0$ и

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \left(U + \frac{u^2}{2} \right) dW = \int_W \rho \frac{d}{dt} \left(U + \frac{u^2}{2} \right) dW.$$

Далее преобразуем поверхностный интеграл правой части уравнения (5.77) в объемный. Для этого учтем выражение (3.4) напряжения p_n и, используя известную формулу

$$\int_S b_i \cos(n, x_i) \, dS = \int_W \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dW,$$

где b_i — i-я проекция произвольного вектора; n — направление нормали к поверхности S,

получим

$$\int_S p_n \cdot u \, dS = \int_S [p_x \cdot u \cos(n, x) + p_y \cdot u \cos(n, y) +$$

$$+ p_z \cdot u \cos(n, z)] \, dS = \int_W \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_x \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_y \cdot u) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} (p_z \cdot u) \right] dW.$$

Подставляя последние два соотношения в уравнение (5.77) и отбрасывая знак интеграла ввиду произвольности объема W,

* Термин «сохранение» следует понимать как «неуничтожимость», а не как «постоянство» или «неизменность». Постоянство полной энергии имеет место только при тепловой изоляции системы и отсутствии действия внешних сил.

получаем дифференциальное уравнение энергии для произвольного движения сжимаемой вязкой жидкости:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(U + \frac{u^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} + \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{u}) + \rho q. \tag{5.78}$$

Уравнения (5.77) и (5.78), выражающие в разных формах общий закон сохранения энергии, могут быть прочитаны следующим образом: производная по времени от полной энергии жидкого тела равна сумме мощностей внешних (массовых и поверхностных) сил и притока теплоты к нему за единицу времени.

Рассмотрим детально члены уравнения (5.78), выражающие мощность внешних поверхностных сил, обозначив ее N_p. Продифференцировав скалярные произведения, получим

$$N_p = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right) + \boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}.$$

Вычислим величину

$$J_1 = \boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)$$

для несжимаемой жидкости, воспользовавшись выражениями проекций напряжений p_x, p_y, p_z, через скорости деформаций согласно формуле (5.6). Учитывая при этом, что для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$, после преобразований получим

$$J_1 = -\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad} p + \mu\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}.$$

Для величины

$$J_2 = \boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial z}$$

в результате аналогичных преобразований находим

$$J_2 = \mu\Phi_д,$$

где

$$\Phi_д = 2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 \quad \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2$$

называется диссипативной функцией.

Можно показать, что величина J_2 равна мощности внутренних вязкостных напряжений, которая расходуется на преобразование механической энергии в тепловую. Поэтому функция $\Phi_д$ характеризует процесс диссипации энергии (от латинского dissipare — рассеивать).

Теперь уравнение (5.78) перепишем в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\left(U + \frac{u^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad} p + \mu(\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u} + \Phi_д) + \rho q. \quad (5.79)$$

Если учесть, что

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right) = \rho\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},$$

и использовать уравнение (5.10) Навье — Стокса, умножив его скалярно на $\boldsymbol{u}$; то вместо выражения (5.79) получим уравнение

$$\rho\frac{dU}{dt} = \mu\Phi_д + \rho q, \quad (5.80)$$

называемое уравнением притока теплоты. Если обозначить через $Э_к = \rho u^2/2$ кинетическую энергию единицы объема жидкости, то формулу (5.79) можно представить в виде

$$\frac{dЭ}{dt} = \frac{dЭ_к}{dt}\mu + \mu\Phi_д + \rho q, \quad (5.81)$$

где $Э = \rho\,(U + u/2)^2$ — полная энергия единичного объема.

Полученные формы уравнения энергии позволяют описать процесс ее преобразования в движущейся вязкой жидкости. Так, формула (5.78) выражает закон сохранения энергии: **изменение полной энергии среды в единицу времени равно мощности внешних массовых и поверхностных сил плюс приток теплоты за то же время.** Тот же смысл имеет уравнение (5.79), в котором мощность внешних поверхностных сил выражена суммой

$$-\boldsymbol{u}\operatorname{grad} p + \mu(\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u} + \Phi_д).$$

Из уравнения (5.80) следует, что изменение внутренней энергии за единицу времени обусловлено диссипацией механической энергии (превращением ее в тепловую) и притоком теплоты извне за то же время. Процесс диссипации зависит только от вязкости и для идеальной жидкости ($\mu = 0$) не имеет места. Из уравнения (5.81) следует, что изменение полной энергии складывается из изменения кинетической энергии, тепловой энергии, полученной от диссипации и притока теплоты извне.

Если же учесть, что изменение полной энергии в единицу времени равно мощности всех внешних сил, то можно сделать вывод, что эта мощность частично расходуется на изменение кинетической энергии, а частично теряется вследствие процесса диссипации (теорема о диссипации энергии).

Вычитая из выражения (5.79) уравнение (5.80), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right) = \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\operatorname{grad} p + \mu\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}. \quad (5.82)$$

Это уравнение выражает теорему живых сил (теорему кинетической энергии): производная по времени кинетической энергии жидкого объема равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на эту массу. При этом мощность всех поверхностных сил выражается суммой двух последних членов. Если учесть, что $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{s}/dt$, где $d\boldsymbol{s}$ — вектор элементарного перемещения, то нетрудно доказать, что выражение (5.82) совпадает с уравнением Бернулли (5.19).

Придадим общему уравнению энергии еще одну форму, дополнительно поясняющую процесс трансформации энергии в жидкой среде. Учтем, что индивидуальную производную $dЭ/dt$ полной энергии можно представить как сумму локальной и конвективной; используем также уравнение неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Тогда

$$\frac{dЭ}{dt} = \frac{\partial Э}{\partial t} + u_x \frac{\partial Э}{\partial x} + u_y \frac{\partial Э}{\partial y} + u_z \frac{\partial Э}{\partial z} = \frac{\partial Э}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x Э) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y Э) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z Э).$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.79), получаем

$$\frac{\partial Э}{\partial t} = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} - \frac{\partial}{\partial x}(u_x Э - \boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial y}(u_y Э - \boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial z}(u_z Э - \boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{u}).$$

Если ввести в рассмотрение вектор $\boldsymbol{E}$ с проекциями на оси

$$E_x = u_x Э - \boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{u};\quad E_y = u_y Э - \boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{u};\quad E_z = u_z Э - \boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{u},$$

то последнее уравнение примет вид

$$\partial Э/\partial t = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{E}. \tag{5.83}$$

Вектор $\boldsymbol{E}$ называют вектором плотности потока полной энергии, а уравнение (5.83) — уравнением переноса полной энергии [22]. Из него следует, что изменение в единицу времени полной энергии в точке складывается из мощности внешних массовых сил и притока энергии, который в свою очередь обусловлен конвективным переносом и работой внешних поверхностных сил.

5.11. ПОДОБИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Несмотря на высокий уровень развития современной гидродинамической теории, далеко не все задачи могут быть решены теоретически с достаточной для практических целей точностью. Многие задачи приходится решать экспериментально. При создании современных гидравлических и газодинамических машин, приборов, летательных аппаратов, сооружений и т. п. гидродинамический расчет является важнейшим и обязательным этапом проектирования, но все же результирующая оценка качеств и характеристик создаваемой машины или сооружения производится на основе экспериментальных испытаний модели или натурного объекта. Роль гидродинамического эксперимента

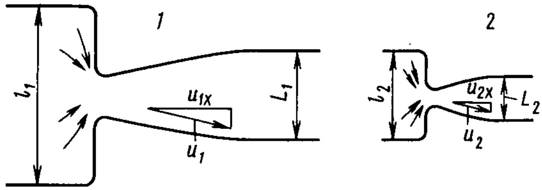


Рис. 5.10. Схемы для объяснения геометрического и кинематического подобия потоков

велика, и существует обширный раздел гидромеханики, составляющий в значительной степени самостоятельную дисциплину — экспериментальную гидродинамику (или экспериментальную аэродинамику, если речь идет об опытах с воздушной средой).

При постановке гидродинамического эксперимента одним из основных является вопрос о том, по каким правилам должна быть изготовлена модель испытуемого объекта и по каким зависимостям следует пересчитать данные опытов, чтобы получить достоверное описание натурного гидродинамического явления. На этот вопрос дает ответ раздел гидромеханики, называемый теорией подобия, которая по существу является теоретической основой эксперимента. Кроме того, теория подобия дает методы построения рациональной структуры теоретических зависимостей и комбинаций входящих в них параметров, чем облегчается анализ и получение обобщенных выводов из теоретических решений.

В теории подобия различают **геометрическое подобие** являющееся подобием границ областей течений, **кинематическое подобие**, под которым подразумевают подобие полей местной скорости, и **динамическое подобие**, являющееся подобием сил. Дадим более полное их определение.

Пусть имеется натурный объект (поток) (рис. 5.10), подлежащий гидродинамическому исследованию, и его модель. Все параметры натурного потока будем отмечать индексом *1*, а модельного — индексом *2*. Чтобы получить область течения, геометрически подобную натурному потоку, разделим все линейные размеры последнего на некоторое число m_l — линейный масштаб и полученные результаты примем за соответствующие линейные размеры модельного потока. Число m_l выбирают из практических соображений, которые диктуются, например, производственными возможностями лаборатории.

Таким образом, получаем связь между геометрическими параметрами l_1 и l_2 потоков *1* и *2*:

$$l_1/l_2 = m_l. \tag{5.84}$$

Линейные размеры, связанные соотношением (5.84), называют соответственными или сходственными. Точки, координаты которых удовлетворяют этому соотношению, называют сходственными.

Модельный поток *2*, геометрические параметры которого удовлетворяют условию (5.84), назовем геометрически подобным потоку *1*. Иначе можно сказать, что два потока будут геометрически подобными, если любой линейный размер одного из них можно получить из линейного размера другого путем умножения на постоянный множитель.

Если в потоке *1* выбрать характерный линейный размер L_1, то в потоке *2*, геометрически подобном, ему будет соответствовать сходственный размер L_2. Приняв L_1 и L_2 за единицы измерения всех линейных величин в соответствующих потоках, найдем безразмерные отношения

$$l_1/L_1 = \bar{l}_1;\ l_2/L_2 = \bar{l}_2,$$

которые, в частности, могут быть безразмерными координатами некоторых точек. Поскольку

$$l_1/l_2 = (\bar{l}_1/\bar{l}_2)(L_1/L_2) \text{ и } l_1/l_2 = L_1/L_2 = m_l,$$

ясно, что $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$. Следовательно, безразмерные координаты сходственных точек одинаковы.

Допустим теперь, что потоки *1* и *2* геометрически подобны. Обозначим через u_1 и u_2 скорости в их сходственных точках, а через u_{1i} и u_{2i} их одноименные проекции на i-ю ось координат. Если отношение

$$u_{1i}/u_{2i} = m_u \quad (i = x,\ y,\ z) \tag{5.85}$$

одинаково для любой пары сходственных точек, то потоки *1* и *2* будем считать кинематически подобными.

Для неустановившегося течения условие (5.85) должно выполняться в моменты времени, которые называются сходственными и определяются соотношением

$$\Delta t_1/\Delta t_2 = m_t,$$

где Δt_1 и Δt_2 — интервалы времени, отсчитываемые от момента начала движения или иного условного начала отсчета времени; m_t — масштаб времени.

Нетрудно убедиться, что из кинематического подобия потоков вытекает геометрическое подобие их линий тока. Действительно, линии тока в потоках *1* и *2* определяются уравнениями

$$\frac{dx_1}{u_{1x}} = \frac{dy_1}{u_{1y}} \text{ и } \frac{dx_2}{u_{2x}} = \frac{dy_2}{u_{2y}}.$$

Если имеет место кинематическое подобие [см. формулу (5.85)], то

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dy_1 u_{1x} u_{2y}}{u_{1y}\, dy_2 u_{2x}} = \frac{dy_1}{dy_2} \text{ или } \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}.$$

Это соотношение означает, что углы наклона касательных к линиям тока в сходственных точках одинаковы для обоих потоков, а это и есть геометрическое подобие линий тока. Для установившихся потоков это будет одновременно и геометрическим подобием траекторий жидких частиц.

Кинематическое подобие можно определить и несколько иначе. Если Δt_1 и Δt_2 — малые интервалы времени, за которые жидкие частицы проходят сходственные отрезки путей, то

$$u_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta t_1} \text{ и } u_2 = \frac{\Delta l_2}{\Delta t_2},$$

откуда масштаб времени

$$m_t = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}\frac{u_2}{u_1} = \frac{m_l}{m_u}.$$

Если $m_t = \text{const}$, то и $m_u = \text{const}$, так как $m_l = \text{const}$, что соответствует определению кинематического подобия. Поэтому иногда кинематически подобными называют потоки, для которых отношение отрезков времени, затрачиваемых жидкими частицами для прохождения сходственных отрезков путей, постоянно.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться, что если выбрать характерные значения скоростей v_1 и v_2, то при кинематическом подобии безразмерные скорости в сходственных точках одинаковы:

$$u_1/v_1 = u_2/v_2 \text{ или } \bar{u}_1 = \bar{u}_2.$$

Рассмотрим далее какую-либо пару сходственных точек и обозначим проекции на координатные оси равнодействующих сил через F_{1i} и F_{2i} $(i = x, y, z)$. Если

$$F_{1i}/F_{2i} = m_F \tag{5.86}$$

есть величина постоянная для любой пары сходственных точек, то потоки *1* и *2* называют динамически подобными.

Не обязательно под F_{1i} и F_{2i} подразумевать равнодействующие; это могут быть силы какой-либо определенной физической природы (тяжести, вязкости, упругости и др.). Тогда приведенное определение будет выражать подобие данной категории сил. Можно убедиться, что безразмерные значения сил в динамически подобных потоках одинаковы. Заметим еще, что поскольку выражение (5.86) относится к любой из трех составляющих силы F, то этим определяется подобие векторов сил, действующих в сходственных точках.

Из изложенного следует, что кинематическое и динамическое подобия могут существовать только при наличии геометрического подобия. Поэтому дальше речь пойдет только о потоках, для которых геометрическое подобие заведомо обеспечено.

Если для какой-либо группы гидродинамических явлений имеет место кинематическое и динамическое подобие, то их называют механически подобными. Механическое подобие является частным случаем общего подобия физических процессов, которое можно определить для тепловых, электрических, упругих и других явлений.

Сформулируем условия, необходимые и достаточные для существования механического подобия, на примере изотермического течения несжимаемой вязкой жидкости.

Из определений кинематического и динамического подобий следует, что если они обеспечены, то безразмерные координаты сходственных точек, скорости и силы одинаковы. Нетрудно убедиться, что безразмерные ускорения и плотности также равны в сходственных точках. Иначе, все физические параметры механически подобных потоков, представленные в безразмерном виде для сходственных точек, одинаковы. Можно, наконец, сделать вывод, что безразмерные поля физических параметров таких потоков одинаковы. Одинаковость безразмерных значений физических параметров можно было бы принять за определение механического подобия и вывести из него первоначальную формулировку.

Физические параметры в любом из потоков связаны системой дифференциальных уравнений, описывающих движение. Но если речь идет о механически подобных потоках, для которых безразмерные параметры одинаковы, то сами уравнения, представленные в безразмерном виде, должны быть одинаковыми. Действительно, дифференциальные уравнения движения связывают между собой мгновенные значения физических параметров движения (сил, ускорений и др.). Но если безразмерные выражения этих параметров одинаковы в подобных потоках, то, поскольку связывающие их уравнения имеют общий характер, т. е. выполняются для произвольных пространственно-временных точек, эти уравнения должны быть одинаковыми.

Заметим, что для существования подобия необходимо, чтобы рассматриваемые процессы были качественно одинаковыми. Можно, например, рассмотреть движение в одном и том же канале несжимаемой жидкости и газа при сверхзвуковых скоростях. Эти течения качественно различны потому, что при движении газа существенно проявляется его сжимаемость и изменение температуры, и описывающие его уравнения будут содержать члены, которых не будет в уравнениях несжимаемой жидкости. Поэтому дифференциальные уравнения этих двух процессов различны, даже после приведения к безразмерному виду.

Наряду с этим существуют качественно различные явления, описываемые одинаковыми по форме уравнениями. Такие явления называют аналогиями.

Совокупность параметров, определяющих какой-либо гидродинамический процесс, можно рассматривать как конкретное решение дифференциальных уравнений этого процесса. Ему соответствуют вполне определенные начальные и граничные условия. Они представляют собой зависимости или константы, определяющие физические параметры в начальный момент и на границах во время движения. Следовательно, не только уравнения процесса, но также безразмерные формы начальных и граничных условий (условий однозначности) в механически подобных потоках должны быть одинаковыми. Имея это в виду, запишем уравнения Навье — Стокса и приведем их к безразмерному виду, для чего выберем характерные физические параметры L, V, T, P, F_0 (если F — сила тяжести, то в качестве F_0 удобно взять ускорение g свободного падения) и отнесем к ним соответствующие размерные величины:

$$\bar{x} = x/L; \quad \bar{y} = y/L; \quad \bar{z} = z/L; \quad \bar{u}_x = u_x/V; \quad \bar{u}_y = u_y/V; \quad \bar{u}_z = u_z/V;$$

$$\bar{p} = p/P; \quad \bar{F}_x = F_x/F_0; \quad \bar{F}_y = F_y/F_0; \quad \bar{F}_z = F_z/F_0; \quad \bar{t} = t/T.$$

Для плотности и вязкости, которые считаем постоянными, характерные величины не выбираем, так как они сами ими являются. Примем также во внимание размерность дифференциальных операторов ∇ и grad:

$$[\nabla] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \cdots\right] = \frac{1}{L}; \quad [\mathrm{grad}\, \varphi] = \frac{1}{L}[\varphi].$$

Векторное уравнение Навье — Стокса (5.11) теперь можно представить в виде

$$F_0 \bar{F} - \frac{P}{\rho L} \mathrm{grad}\, \bar{p} + \frac{\nu V}{L^2} \nabla^2 \bar{u} = \frac{V}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{V^2}{L} (\bar{u} \nabla) \bar{u}.$$

Чтобы придать этому уравнению безразмерный вид, разделим все его члены на коэффициент V^2/L при конвективном ускорении. Получим

$$\frac{F_0 L}{V^2} \bar{F} - \frac{P}{\rho V^2} \mathrm{grad}\, \bar{p} + \frac{\nu}{VL} \nabla^2 \bar{u} = \frac{L}{VT} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u}, \tag{5.87}$$

где все дифференциальные операции выполняются по безразмерным переменным. В этом уравнении все члены, включая комбинации характерных параметров, безразмерны. Для всех динамически подобных потоков оно должно быть одинаковым, а следовательно, необходимо, чтобы коэффициенты каждого из членов для этой группы потоков были одинаковыми, т. е.

$$F_0 L/V^2 = \mathrm{idem}; \quad P/(\rho V^2) = \mathrm{idem}; \quad \nu/(VL) = \mathrm{idem}; \quad L/(VT) = \mathrm{idem}. \tag{5.88}$$

Входящие в условия (5.88) безразмерные комплексы играют роль критериев подобия и имеют следующие собственные наименования: $V^2/(F_0 L) = \mathrm{Fr}$ — число Фруда; $P/(\rho V^2) = \mathrm{Eu}$ — число Эйлера; $VL/\nu = \mathrm{Re}$ — число Рейнольдса; $L/(VT) = \mathrm{Sh}$ — число Струхала (вместо обозначения Sh иногда употребляют обозначение Н и называют его числом гомохронности).

Теперь условия (5.88) можно записать в виде

$$\mathrm{Fr} = \mathrm{idem}; \ \mathrm{Eu} = \mathrm{idem}; \ \mathrm{Re} = \mathrm{idem}; \ \mathrm{Sh} = \mathrm{idem}. \tag{5.89}$$

Суммируя изложенное, можно констатировать, что одинаковые безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие группу гидродинамических процессов, вместе с безразмерными условиями однозначности (начальными и граничными условиями), а также одинаковые значения критериев подобия являются необходимыми условиями механического подобия. Доказать их достаточность удается не во всех случаях, так как это связано с вопросом о существовании и единственности решений уравнений Навье — Стокса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Допустим, что для изучаемого класса течений теорема существования и единственности решений уравнений Навье — Стокса доказана. Зафиксируем конкретные значения критериев (5.89) и сформулируем в безразмерных величинах условия однозначности для безразмерных уравнений Навье — Стокса. Тогда решив их, получим единственное решение, в которое в качестве параметров войдут зафиксированные значения чисел Fr, Eu, Re, Sh. Это решение определит целый класс физически реальных процессов, размерные параметры которых в сходственных точках будут отличаться только численными множителями, а безразмерные будут одинаковыми. Иначе говоря, получим класс механически подобных потоков.

Следовательно, сформулированные выше условия в данном случае оказываются не только необходимыми, но и достаточными для существования механического подобия. Однако такое заключение нельзя распространить на произвольное движение вязкой жидкости, поскольку теорема существования и единственности решения уравнений Навье — Стокса доказана хотя и для многих, но все же частных классов движения. В общем случае необходимые и достаточные условия подобия не определены. Правда, это не исключает возможности практического использования теории подобия. В практике при постановке эксперимента существование и единственность группы потоков, подобных натурному, предполагают apriori, модель выполняют, исходя из необходимых условий подобия, и ее принадлежность к указанному классу проверяют на основе сопоставления частично известных натурных данных с результатами измерений на модели.

Выясним физический смысл чисел Fr, Eu, Re, Sh и соответствующих критериев (5.89). Выражения для них получены делением коэффициентов при отдельных членах уравнений движения на коэффициент при конвективной силе инерции. Эти члены представляют собой отнесенные к единице массы силы различной физической природы: $V^2/gL = \mathrm{Fr}$ характеризует отношение (но не равно ему) силы инерции к силе тяжести; $VL/\nu = \mathrm{Re}$ — отношение силы инерции к силе вязкости; $P/(\rho V)^2 = \mathrm{Eu}$ — отношение силы давления к силе инерции; $L/(VT) = \mathrm{Sh}$ — отношение локальной инерционной силы к конвективной. Таким образом, все критерии характеризуют отношения сил различной физической природы и потому являются критериями динамического подобия.

Рассмотрим теперь некоторые аспекты практического применения подобия гидродинамических явлений.

При постановке любой гидродинамической задачи должны быть заданы граничные, а для нестационарных задач и начальные условия в виде функциональных связей или значений констант, которым должны удовлетворять некоторые параметры процесса на граничных поверхностях (в том числе и на свободных). Параметры внутри области течения, а также не заданные на границах необходимо определить. Например, при исследовании установившегося движения жидкости в некотором канале заранее известно, что скорости на стенках канала равны нулю, а распределение скоростей во входном поперечном сечении может быть задано. Скорости внутри потока, а также давления внутри канала и на его стенках следует определить. Поэтому при построении модели можно произвольно выбрать линейный масштаб, а критерии подобия определить лишь те, которые составлены из заданных величин, относящихся к границам.

В рассматриваемом примере при постановке исследования можно определить число Re (по размерам входного сечения и заданной на входе скорости), но нельзя определить число Eu, так как давления заранее неизвестны. В каждой задаче некоторые из критериев можно найти лишь после ее решения, т. е. они являются функциями других критериев, которые выражаются через исходные данные и называются определяющими. В зависимости от постановки задачи определяющие критерии могут становиться неопределяющими и наоборот. Но может оказаться, что ни один из указанных выше критериев не является определяющим, так как в любой из них входит величина, подлежащая определению. Тогда роль определяющего критерия может выполнить комбинация этих критериев. Примеры, иллюстрирующие это положение, приведены в следующем параграфе.

Для получения полного механического подобия необходимо одновременное равенство в сравниваемых потоках нескольких критериев. Выясним совместимость критериев Fr и Re. Из условия Fr = idem получим

$$\frac{V_1^2}{g_1L_1} = \frac{V_2^2}{g_2L_2} \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{g_2L_2}{g_1L_1}},$$

где индексами 1 и 2 отмечены соответственно параметры натурного и модельного потоков.

Следовательно, масштаб скоростей должен быть связан с линейным масштабом соотношением

$$m_u = \sqrt{m_g m_l}.$$

Полагая $m_g = 1$, видим, что по критерию Фруда скорость модельного потока должна быть меньше скорости натурного в $\sqrt{m_l}$ раз. По критерию Рейнольдса Re = idem получим

$$V_1L_1/\nu_1 = V_2L_2/\nu_2 \quad \text{или} \quad V_2/V_1 = (\nu_2/\nu_1)\,(L_1/L_2).$$

Масштабы величин связаны соотношением

$$m_u = m_\nu/m_l,$$

откуда следует, что для одной и той же жидкости ($m_\nu = 1$) скорость модельного потока должна быть больше скорости натурного в m_l раз. Это противоречие с требованиями критерия Фруда можно было бы устранить путем выбора надлежащего масштаба вязкости m_ν, что, однако, практически невозможно, так как эксперименты можно проводить лишь с водой и воздухом и только в редких случаях использовать другие жидкости (например, масло или глицерин). Поэтому практически критерии Фруда и Рейнольдса являются несовместимыми.

Однако в каждом гидродинамическом явлении можно указать лишь одну внешнюю силу, влияние которой на характер движения является основным, определяющим и, не учитывая другие силы, моделировать по одному критерию. Практикой исследований установлено, что течения со свободной поверхностью в поле силы тяжести формируются под преимущественным влиянием этой силы и должны моделироваться по критерию Фруда.

Напорные течения, т. е. течения в закрытых трубах и каналах без образования свободной поверхности, моделируются по критерию Рейнольдса. Число Эйлера чаще всего является неопределяющим критерием и представляет собой функции Fr и Re. Конечно, моделирование по какому-нибудь одному критерию обеспечивает подобие лишь одной силы. Такое подобие является приближенным. Однако теория подобия позволяет указать рациональную методику внесения экспериментальных поправок на неточность соблюдения ее требований.

Обоснование возможности не учитывать критерий Фруда при моделировании напорных течений можно получить, если ввести вместо полного давления p разность $p - p_g = p'$, где p_g — гидростатическое давление ($p_g = p_0 + \rho g h$, здесь p_0 — постоянное давление в некоторой точке отсчета; h — заглубление, отсчитываемое вниз по вертикали от этой точки).

При вертикальном расположении оси z

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = -g;$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho g}{\rho}\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} - g.$$

После подстановки этих значений в уравнения движения последние не будут содержать членов, учитывающих массовую силу (силу тяжести), а следовательно, в числе критериев подобия будет отсутствовать и критерий Фруда. Если же поток имеет свободную поверхность, то описанный прием не дает результата. Рассмотрим для простоты открытый поток идеальной жидкости. На свободной поверхности, где $p = p_0 = \text{const}$, должно выполняться условие

$$z_{\text{п}} + u_{\text{п}}^2/(2g) = \text{const}.$$

Выбрав характерный линейный размер L, представим это условие в безразмерном виде

$$z_п/L + \mathrm{Fr}_п/2 = \mathrm{const}, \text{ где } \mathrm{Fr}_п = u_п^2/(gL).$$

Из этого соотношения следует, что форма границы области течения (свободной поверхности), определяемая безразмерной координатой $z_п/L$, зависит от граничного значения числа $\mathrm{Fr}_п$ и, следовательно, подобие не может быть осуществлено без критерия Фруда.

5.12. МЕТОД РАЗМЕРНОСТЕЙ

Уравнения, связывающие параметры гидродинамических процессов, выражают те или иные физические законы и потому их структура не должна зависеть от системы единиц измерения. Учитывая это обстоятельство и принимая во внимание возможность применять для описания гидродинамических (так же как и для других физических) процессов разнообразные, в том числе специально выбранные системы единиц, можно установить некоторые общие свойства указанных уравнений. Знание этих свойств позволяет во многих случаях прогнозировать структуру искомых связей между физическими размерными и безразмерными параметрами. Используя формулу размерности (предполагается, что она известна читателю из курса физики), можно указать также рациональные комбинации физических параметров, определение связей между которыми дает результаты, относящиеся сразу к целому классу явлений. Совокупность этих, а также некоторых других, с ними связанных, вопросов составляет теорию размерностей, которая особенно полезна на первых стадиях изучения явления, когда еще отсутствует достоверное математическое описание.

Рассмотрим зависимость

$$q = f(l, t, m, v, a, \ldots, w), \tag{5.90}$$

которая выражает функциональную связь между размерной величиной q и размерными, не зависящими одна от другой величинами l, t, m...

Установим общую структуру функции $f(l, t, \ldots)$, предполагая, что она описывает некоторый физический (в частности, гидродинамический) закон. Допустим, что из числа величин l, t, m, ..., w первые три, т. е. l, t и m, имеют независимые размерности, т. е. формула размерности любой из этих величин не может быть представлена как комбинация формул размерности двух других *.

* В качестве величин l, t и m с независимыми размерностями могут быть взяты не обязательно величины с простыми размерностями, как, например, длина, время и масса. Вместо времени может быть взята скорость или ускорение, вместо массы — плотность, вместо длины — произведение скорости на время и т. п.

Заметим, что все нижеследующие рассуждения остаются справедливыми и в том случае, если величин с независимыми размерностями будет не три, а сколько угодно.

Если величинами l, t, m, которые условимся называть основными, исчерпывается число величин с независимыми размерностями, то размерности остальных величин v, a, ... можно выразить через размерности l, t, m. Так, если L, T и M соответственно единицы измерения для l, t и m, то формулами размерности будут

$$[l] = L; \quad [t] = T; \quad [m] = M; \quad [v] = L^{x_v}T^{y_v}M^{z_v}; \quad [a] = L^{x_a}T^{y_a}M^{z_a}, \ldots$$

Изменим теперь единицы измерения основных величин соответственно в α_l, α_t и α_m раз, т. е. перейдем к единицам

$$L_1 = \alpha_l L; \quad T_1 = \alpha_t T; \quad M_1 = \alpha_m M.$$

Тогда величины q, l, t, m, v ... в уравнении (5.90) будут выражаться в этих новых единицах, но вид уравнения не должен измениться, так как оно описывает, по предположению, некоторый физический закон, который не может зависеть от выбора системы единиц. Поэтому в новых единицах вместо уравнения (5.90) можем записать

$$q_1 = f(l_1, t_1, m_1, v_1, \ldots). \tag{5.91}$$

Величины q_1, l_1, t_1, ..., выраженные в новых единицах L_1, T_1 и M_1, связаны с их значениями в старых единицах соотношениями

$$l_1 = \alpha_l l; \quad t_1 = \alpha_t t; \quad m_1 = \alpha_m m; \quad q_1 = \alpha_l^{x_q}\alpha_t^{y_q}\alpha_m^{z_q} q; \quad v_1 =$$
$$= \alpha_l^{x_v}\alpha_t^{y_v}\alpha_m^{z_v} v; \ldots$$

Выражение (5.91) можно переписать в виде

$$q\alpha_l^{x_q}\alpha_t^{y_q}\alpha_m^{z_q} = f\left(\alpha_l l, \ \alpha_t t, \ \alpha_m m, \ \alpha_l^{x_v}\alpha_t^{y_v}\alpha_m^{z_v} v, \ldots\right). \tag{5.91'}$$

Поскольку масштабы α_l, α_t и α_m единиц измерения основных величин произвольны, то, в частности, их можно выбрать так, чтобы

$$\alpha_l = 1/l; \quad \alpha_t = 1/t; \quad \alpha_m = 1/m.$$

При этом фактически за единицы измерения принимаются основные величины l, t и m, входящие в уравнение (5.90). Тогда формула (5.91) перейдет в следующую:

$$q/\left(l^{x_q}t^{y_q}m^{z_q}\right) = f\left(1, \ 1, \ 1, \ v/\left(l^{x_v}t^{y_v}m^{z_v}\right), \ a/\left(l^{x_a}t^{y_a}m^{z_a}\right), \ldots\right).$$

Входящие в это уравнение комплексы

$$q/\left(l^{x_q}t^{y_q}m^{z_q}\right), \quad v/\left(l^{x_v}t^{y_v}m^{z_v}\right), \ldots$$

являются, очевидно, безразмерными. Вводя для них соответствующие обозначения π_q, π_v, π_a..., приходим к уравнению

$$\pi_q = f(1, \ 1, \ 1, \ \pi_v, \ \pi_a, \ldots, \pi_w), \tag{5.92}$$

или в более компактной записи

$$\varphi(\pi_q, \pi_v, \pi_a, \ldots, \pi_w) = 0. \tag{5.93}$$

Обобщая полученный результат для произвольного числа величин, входящих в исходное уравнение (5.90), можно сформулировать следующую теорему.

Выражающую некоторый физический закон функциональную зависимость между $n = k + s$ размерными величинами, из которых k величин имеют независимые размерности, можно представить в виде зависимости между $n - k$ безразмерными комплексами π_i ($i = q, t, v, \ldots$), каждый из которых является комбинацией из $k + 1$ размерных величин.

Эта теорема, получившая название π-теоремы, является основной в теории размерностей и в то же время входит в число трех основных теорем теории подобия. Ее роль в теории подобия определяется тем, что безразмерные комплексы π_i представляют собой критерии подобия и, следовательно, уравнение (5.93) дает связь между ними.

π-теорема имеет общефизический характер. Для приложения этой теоремы к задачам прикладной гидромеханики следует конкретизировать встречающиеся в них механические величины и их безразмерные комбинации. Так, при описании движения вязкой упругой жидкости встречаются три группы величин:

1) геометрические параметры, характеризующие размеры и формы граничных поверхностей — l_1, l_2, l_3, ...;

2) кинематические и динамические характеристики течения — скорость u (или расход Q), давление p (или его градиент dp/dx), касательное напряжение τ, сила сопротивления F_c;

3) характеристики физических свойств жидкости — плотность ρ, динамический коэффициент вязкости μ, модуль упругости $\mathscr{E}$, коэффициент поверхностного натяжения σ.

Приведенный перечень параметров не является обязательным, его можно расширить, а некоторые из параметров заменить другими. Например, вместо динамического коэффициента вязкости можно ввести кинематический коэффициент $\nu = \mu/\rho$. Геометрическими параметрами могут быть углы, определяющие конфигурацию границ или поля течения. Как правило, искомой исследуемой величиной является параметр второй группы, т. е. кинематическая или динамическая характеристика потока, которую нужно определить как функцию всех или части остальных параметров. Следует подчеркнуть, что составление полного перечня параметров, определяющих исследуемый процесс, является важной частью решения задачи методом размерностей. Оно упрощается, если процесс описан математически, в частности дифференциальными уравнениями; в противном случае необходимо иметь четкое представление о физической сущности процесса, основанное на предварительном экспериментальном изучении. Для применения метода размерностей, как правило, необходима схематизация явления, подобная той, какая применяется для математического описания.

В качестве параметров с независимыми размерностями в гидромеханике обычно выбирают характерные длину l, скорость v и плотность ρ, которые входят в каждую из безразмерных комбинаций π_i.

Составим безразмерные комбинации π_i для линейных размеров l, a, b, характерной скорости v, плотности ρ жидкости, перепада Δp давления, касательного напряжения τ, ускорения g свободного падения, динамического коэффициента вязкости μ, поверхностного натяжения σ, модуля упругости жидкости $\mathscr{E}$.

Поскольку параметров с независимыми размерностями всего три (l, v и ρ), $k = 8$, $n = 11$. Следовательно, необходимо получить восемь безразмерных комплексов π_i. Согласно общей формуле

$$\pi_a = a/\left(l^{x_a} v^{y_a} \rho^{z_a}\right).$$

Так как π_a безразмерная величина, очевидно, $x_a = 1$, $y_a = 0$, $z_a = 0$. Следовательно, $\pi_a = a/l$. Аналогично $\pi_b = b/l$. Тогда

$$\pi_p = \Delta p/\left(l^{x_p} v^{y_p} \rho^{z_p}\right).$$

Необходимые показатели степени x_p, y_p, z_p проще всего подобрать, записав размерность π_p в виде $[\pi_p] = L^0 T^0 M^0$ (где L^0, T^0 и M^0 — единицы длины, времени и массы) и сравнив с ней размерности правой части последнего равенства. Так как

$$[\Delta p] = M/(T^2 L);\ [l] = L;\ [v] = L/T;\ [\rho] = M/L^3,$$

получим

$$L^0 T^0 M^0 = \left(\frac{M}{T^2 L}\right) L^{-x_p} \left(\frac{L}{T}\right)^{-y_p} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{-z_p}.$$

Приравняем показатели степеней при одноименных величинах в левой и правой частях:

$$-1 - x_p - y_p + 3z_p = 0;$$

$$-2 + y_p = 0;$$

$$1 - z_p = 0.$$

Решая эту систему, находим $x_p = 0$; $y_p = 2$; $z_p = 1$. Следовательно,

$$\pi_p = \Delta p/(\rho v^2).$$

Аналогично определяем остальные безразмерные комбинации π_i:

$$\pi_\tau = \tau/(\rho v^2); \quad \pi_g = lg/v^2; \quad \pi_\mu = \mu/(\rho l v) = \nu/(lv); \quad \pi_\sigma = \sigma/(l\rho v^2);$$

$$\pi_{\mathscr{E}} = \mathscr{E}/(\rho v^2),$$

Безразмерные параметры π_a и π_b, очевидно, характеризуют геометрию потока, π_p — число Эйлера Eu; $1/\pi_g$ и $1/\pi_\mu$ — соответственно числа Фруда и Рейнольдса. Параметр π_τ выражает в безразмерном виде напряжение, обусловленное силами трения; величину $C_f = 2\pi_\tau$ называют обычно коэффициентом трения. Величины

$$\mathrm{We} = l\rho v^2/\sigma = 1/(\pi_\sigma) \text{ и } \mathrm{Ca} = \rho v^2/\mathscr{E} = 1/\pi_{\mathscr{E}}$$

называют соответственно числами Вебера и Коши; они характеризуют действие в жидкости сил поверхностного натяжения и упругости. Полученный результат можно представить в форме

$$\varphi\left(\frac{a}{l},\ \frac{b}{l},\ \frac{\Delta p}{\rho v^2},\ \frac{\tau}{\rho v^2},\ \frac{lg}{v^2},\ \frac{\nu}{lv},\ \frac{\sigma}{l\rho v^2},\ \frac{\mathscr{E}}{\rho v^2}\right) = 0$$

или

$$\varphi_1\left(\frac{a}{l},\ \frac{b}{l},\ \mathrm{Eu},\ C_f,\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{We},\ \mathrm{Ca}\right) = 0. \qquad (5.94)$$

Любой из безразмерных параметров этих функций можно рассматривать как зависимый, а остальные как аргументы, но чаще всего искомыми величинами являются Eu или C_f.

Метод размерностей не дает возможности установить в конкретных случаях вид функции φ, однако знание даже общей зависимости, выражаемой уравнением (5.94), полезно как для теоретического анализа, так и для рациональной постановки эксперимента.

Рассмотрим несколько примеров использования метода размерности в конкретных задачах.

Пример 1. *Определение сопротивления движению несжимаемой жидкости в цилиндрических трубах.* Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической гладкой трубе. Пусть задача состоит в нахождении структуры зависимости падения давления Δp на участке длиной l от параметров системы.

Из предыдущего известно, что из-за отсутствия свободной поверхности числа Фруда и Вебера не влияют на характер движения, а значит, и на искомую зависимость. Так как жидкость несжимаема, на нее не влияет также и число Коши. Из геометрических параметров для труб с гладкими стенками можем указать только два: длину l участка и диаметр d трубы. Считаем известным, что при движении заданной жидкости (параметры ρ и μ) по трубе фиксированного диаметра устанавливается однозначное соответствие между характерной скоростью v и падением давления Δp на участке длиной l. При этом, разумеется, устанавливается и определенное значение касательного напряжения τ, но оно вполне определяется перепадом Δp и потому не может служить независимым параметром. С учетом этих соображений к параметрам, определяющим явление, отнесем l, d, v, ρ, Δp, μ. Из этих шести размерных параметров можно составить всего три π-параметра:

$$l/d; \quad \Delta p/(\rho v^2); \quad v\,d\rho/\mu,$$

поэтому искомая связь должна иметь вид

$$\varphi\,(l/d,\quad \Delta p/\,(\rho v^2),\quad vd/\nu) = 0$$

или, если принять $\Delta p/(\rho v^2)$ за функцию, то она будет зависеть от двух безразмерных аргументов:

$$\Delta p/(\rho v^2) = f\,(l/d,\quad vd/\nu).$$

Так как граничные условия вдоль трубы не изменяются (постоянный диаметр, гладкая поверхность), естественно предположить линейную зависимость Δp от l. Опыт подтверждает это предположение. Поэтому последнюю связь можно представить в виде

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d}\,\varphi_*\left(\frac{vd}{\nu}\right).$$

Введя обозначение $\lambda = 2\varphi_*$, получим

$$\Delta p = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2}\,\rho, \tag{5.95}$$

где $\lambda = \lambda\,(\mathrm{Re})$; $\mathrm{Re} = vd/\nu$.

Формула (5.95) впервые была получена эмпирическим путем и является основной расчетной формулой для гладких труб. Эксперимент и теоретические решения хорошо подтверждают наличие функциональной зависимости $\lambda\,(\mathrm{Re})$.

Для шероховатых труб в число параметров надо включить линейную характеристику неровностей стенки Δ (например, среднюю высоту выступа). Тогда к рассмотренным π-параметрам добавляется еще один Δ/d. Проводя аналогичные рассуждения, находим

$$\lambda = \lambda\,(\mathrm{Re},\ \Delta/d).$$

Экспериментальные данные четко подтверждают наличие такой связи.

Обратим внимание на то, что связь между $\Delta p/(\rho v^2)$ и его аргументами можно записать в критериальной форме

$$\mathrm{Eu} = f\,(l/d,\ \mathrm{Re})$$

или для шероховатых труб

$$\mathrm{Eu} = f_1\,(l/d,\ \Delta/d,\ \mathrm{Re}). \tag{5.96}$$

Параметры l/d и Δ/d обеспечивают геометрическое подобие потоков в трубах разных диаметров, длин и шероховатостей и имеют одинаковое значение для всех геометрически подобных труб. Из соотношения (5.96) следует, что число Эйлера является функцией числа Рейнольдса и для напорного (закрытого) потока не может служить определяющим критерием подобия. Иными словами, механическое подобие таких потоков обеспечивается геометрическим подобием и критерием Рейнольдса.

Пример 2. *Определение сопротивления трению продольно обтекаемой пластины.* Пластину длиной l обтекает безграничный поток вязкой несжимаемой жидкости, вектор скорости которого u_0 параллелен плоскости пластины. Вдоль направления u_0 направим ось x. Считая течение плоским, попытаемся найти зависимость для касательного напряжения τ в некоторой точке пластины, характеризуемой координатой x. Величина τ должна зависеть от этой координаты и не зависеть от полной длины l пластины. Давление вдоль пластины не изменяется, и, следовательно, к параметрам явления относятся x, u_0, ρ, τ, μ. Из этих пяти величин можно образовать только два π-параметра:

$$\tau/\rho u_0^2 \quad \text{и} \quad u_0 x\rho/\mu,$$

связь между которыми

$$\tau/(\rho u_0^2) = f\,(u_0 x\rho/\mu)$$

определит искомую зависимость

$$\tau = f\,(\mathrm{Re}_x)\,\rho u_0^2,$$

где $\mathrm{Re}_x = u_0 x\rho/\mu = u_0 x/\nu$.

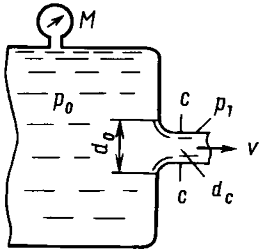


Рис. 5.11. Истечение жидкости под давлением через отверстие в стенке резервуара

Структура этой зависимости полностью согласуется с результатом приближенной теории пограничного слоя, согласно которой

$$\tau = \frac{\text{const}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rho u_0^2.$$

Пример. 3 *Истечение жидкости под давлением через отверстие в стенке резервуара.* Пусть несжимаемая жидкость вытекает из резервуара, в котором она находится под давлением p_0, в среду с давлением p_1 через круглое отверстие диаметром d_0 (рис. 5.11). Перепад давления $\Delta p = p_0 - p_1$ примем достаточно большим, чтобы можно было не учитывать силу тяжести. Наблюдения показывают, что из-за инерционности частиц жидкости, подходящих к отверстию изнутри резервуара, площадь сечения струи после выхода из отверстия меньше площади отверстия. Иными словами, происходит сжатие струи. Учтем далее, что размер отверстия d_0 может влиять на скорость истечения, поскольку через него определяется число Рейнольдса, характеризующее влияние сил вязкости. При этом определяющими параметрами являются d_0, v, ρ, Δp и μ. Два возможных π-параметра

$$\Delta p/(\rho v^2) \text{ и } v d_0 \rho/\mu$$

дают зависимость

$$2\Delta p/(\rho v^2) = f(\text{Re}),$$

где множитель 2 введен для получения формулы общепринятого вида.

Отсюда скорость истечения

$$v = \frac{1}{\sqrt{f(\text{Re})}} \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Если под скоростью v понимать среднюю скорость струи, то ее надо отнести к сжатому сечению $C - C$, где струйки почти параллельны. Тогда расход

$$Q = \frac{1}{\sqrt{f(\text{Re})}} \frac{\pi d_c^2}{4} \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Обозначая через ε коэффициент сжатия, т. е. отношение площади сжатого сечения к площади отверстия, и через ζ функцию $f(\text{Re})$, получим широко известную формулу гидравлики

$$Q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\zeta}} \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Обычно величины $\varphi = 1/\sqrt{\zeta}$ называют коэффициентом скорости, $\varepsilon\varphi = \mu_0$ — коэффициентом расхода. Тогда окончательно

$$Q = \mu_0 \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}},$$

где $\mu_0 = \mu_0(\text{Re})$.

6. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

6.1. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РЕАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

В прикладной гидромеханике одномерными обычно называют потоки, в которых гидродинамические величины (скорости, давления и др.) зависят только от одной геометрической координаты. Простейшим примером одномерного потока является течение в элементарной струйке (трубке тока). Из-за малой площади поперечного (живого — см. гл. 2) сечения такой струйки предполагают, что скорости и давления в нем распределены равномерно. Если вдоль оси струйки выбрать криволинейную координату s, то можно поставить задачу нахождения закона изменения скорости и давления по длине струйки, т. е. функций $p(s)$ и $u(s)$ (рис. 6.1). Такую задачу называют одномерной.

Реальные потоки конечных размеров, строго говоря, не могут быть одномерными, так как в вязких жидкостях из-за влияния граничных поверхностей всегда наблюдается неравномерное распределение скоростей в живых сечениях. Но некоторые реальные потоки можно свести к одномерной модели. Так, например, при течении вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе или канале между параллельными плоскостями имеет место неравномерное распределение скоростей, но оно иногда бывает несущественным с прикладной точки зрения, так как во многих технических задачах достаточно знать среднюю по сечению скорость и закон изменения давления вдоль трубы (канала). Среднюю скорость v можно определить, усредняя по сечению местные скорости u в соответствии с соотношением

$$v = \frac{1}{S}\int_S u\,dS, \tag{6.1}$$

где S — площадь живого сечения потока в трубе (канале).

Поскольку $\int_S u dS$ есть объемный расход жидкости Q, средняя скорость равна отношению расхода к площади живого сечения:

$$v = Q/S. \tag{6.2}$$

Заменив истинные, неравномерно распределенные по сечению скорости средней скоростью v и приняв давление p постоянным

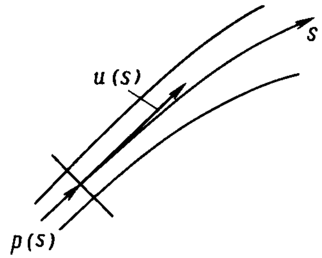


Рис.6.1. Одномерная модель потока

по живому сечению, приходим к одномерной модели реального потока, в которой все частицы в живом сечении имеют одну и ту же скорость v и одно и то же давление p. Для потока в цилиндрической трубе средняя скорость v будет постоянной по ее длине и модельный поток можно считать равномерным. Для такого потока одномерная задача сводится к отысканию закона распределения по длине давления $p(s)$.

Переход от реальных пространственных или двумерных течений к одномерной модели значительно упрощает гидродинамическую задачу и позволяет получить простые зависимости, удобные для технических расчетов. Однако этот переход можно обоснованно осуществить, лишь зная закономерности распределения скоростей и давлений в реальных потоках, сводимых к одномерным, поэтому далее значительное внимание будет уделено изучению таких закономерностей.

Если граничные поверхности образуют трубу или канал с изменяющимся по длине поперечным сечением, то поток является трехмерным или пространственным. Но если кривизна $1/R$ линий тока (или струек), а также образуемый ими угол β (рис. 6.2) малы, то такой поток приближенно можно свести к одномерной модели. Потоки, удовлетворяющие этим условиям, называют плавно изменяющимися. Из-за малых углов между линиями тока живые сечения слабо искривлены и приближенно могут считаться плоскими. Тогда, выбирая продольную геометрическую координату вдоль оси потока, проходящей через центры масс живых сечений, можно плавно изменяющийся поток рассматривать как одномерный.

В большинстве случаев для применения одномерной модели

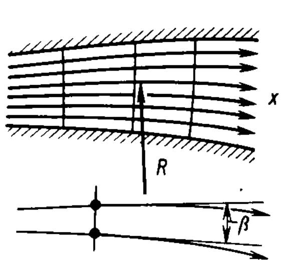


Рис. 6.2. Плавно изменяющийся поток

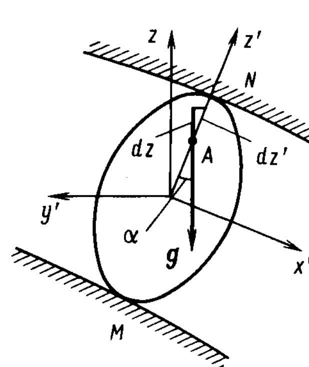


Рис. 6.3. Схема для обоснования гидростатического распределения давлений в живом сечении плавно изменяющегося потока

вполне достаточно, если условия плавной изменяемости выполняются лишь в отдельных сечениях или на коротких участках по длине потока.

Рассмотрим основные свойства плавноизменяющихся потоков и способы перехода к одномерной модели. Для этого выберем в живом сечении S местную систему координат $x'y'z'$, направив ось x' вдоль оси потока (рис. 6.3), а ось y' — горизонтально. Поскольку углы, образуемые линиями тока, малы, можно принять $u_{y'} \approx 0$; $u_{z'} \approx 0$. Тогда, не учитывая в уравнениях (5.9′) члены, зависящие от этих проекций скорости, получим

$$F_{x'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'} + f_{x'} = u_{x'}\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'};$$
$$F_{y'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'} = 0; \qquad (6.3)$$
$$F_{z'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} = 0,$$

где через $f_{x'}$ обозначена проекция на ось x' силы сопротивления, которая для ламинарного движения выражается формулой

$$f_{x'} = \nu\nabla^2 u_{x'},$$

а для турбулентного — включает также турбулентные напряжения.

Два последних уравнения полностью совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в пределах живого сечения плавноизменяющегося потока давление распределяется по гидростатическому закону. В частности, если F — сила тяжести, то для произвольной точки A, лежащей в живом сечении,

$$F_{y'} = 0; \quad F_{z'} = -g\cos\alpha = -g\,dz/dz',$$

где z — координата вертикальной оси.

С учетом этого последнее уравнение системы (6.3) примет вид

$$g\,dz/dz' + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} = 0.$$

Следовательно, в пределах живого сечения ($x' = \text{const}$)

$$z + p/(\rho g) = \text{const}. \qquad (6.4)$$

Таким образом, в пределах живого сечения плавноизменяющегося потока давление распределяется по гидростатическому закону. Этот результат позволяет распространить уравнение Бернулли (5.24) на поток конечных размеров, введя в него усредненные по сечению параметры.

6.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Представим установившийся поток вязкой несжимаемой жидкости в виде совокупности элементарных струек (струйная модель потока) (рис. 6.4), для каждой из которых справедливо уравнение Бернулли (5.24). Если все его члены умножить на

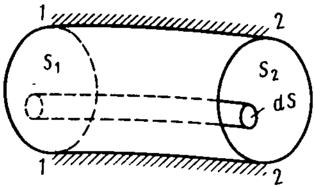


Рис. 6.4. Струйная модель потока

массовый расход $\rho g u dS$ элементарной струйки, который согласно уравнению неразрывности постоянен по ее длине, то трехчлен вида

$$\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right)\rho g u\, dS$$

будет выражать поток энергии через сечение струйки площадью dS *, а интеграл

$$\int_S \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right)\rho g u\, dS$$

— соответствующую величину для всего потока. Отнеся последнюю к весовому расходу потока $\rho g Q = \rho g v S$, получим среднюю для сечения площадью S удельную (т. е. отнесенную к единице веса) энергию потока.

Выполним эти операции над уравнением (5.24). Учитывая равенство (6.4), находим

$$\int_S \left(z + \frac{p}{\rho g}\right)\rho g u\, dS = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right)\int_S \rho g u\, dS = \rho g Q\left(z + \frac{p}{\rho g}\right).$$

Тогда уравнение Бернулли примет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2\rho g Q}\int_{S_1} \rho u^3\, dS = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2\rho Q g}\int_{S_2} \rho u^3\, dS + h_c, \quad (6.5)$$

где

$$h_c = \frac{1}{\rho g Q}\int_{S_2} h_c' \rho g u\, dS. \quad (6.6)$$

Чтобы перейти от местных скоростей к средней по сечению v, введем обозначение

$$\alpha = \int_S u^3\, dS/(v^3 S). \quad (6.7)$$

Интеграл вида

$$\int_S \frac{u^2}{2}\rho u\, dS = \frac{\rho}{2}\int_S u^3\, dS$$

представляет собой кинетическую энергию потока, проносимую за единицу времени через сечение площадью S (поток кинетической энергии) при неравномерном распределении скорости. Величину $(v^2/2)\,\rho v S$ можно рассматривать как поток кинетической

* Величину $p/(\rho g)$, равную, как известно из п. 5.3, работе сил давления, называют иногда удельной энергией давления и рассматривают как составную часть полной удельной энергии жидкости.

энергии через то же сечение при постоянной в нем скорости v. Поэтому безразмерный коэффициент α, определяемый формулой (6.7), выражает отношение истинного потока кинетической энергии, соответствующего неравномерному распределению скоростей в сечении, к потоку кинетической энергии, вычисленному по средней скорости v. Его называют коэффициентом кинетической энергии или коэффициентом Кориолиса. Очевидно, этот коэффициент зависит от формы эпюры скорости. Можно показать, что он всегда больше единицы и для развитого ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе равен 2, а для турбулентного около 1,1; однако при значительной неравномерности эпюры скорости, например в криволинейных каналах, может достигать больших значений.

Используя выражение (6.7), уравнение (6.5) приведем к виду

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c. \tag{6.8}$$

Это соотношение и является искомой формой уравнения Бернулли для плавноизменяющегося потока вязкой несжимаемой жидкости. Заметим, что выполнение условий плавной изменяемости необходимо лишь для выбранных расчетных сечений *1—1* и *2—2*, тогда как на участке между этими сечениями они могут нарушаться.

Согласно смыслу выполненных преобразований [см. (6.6)] член h_c формулы (6.8) выражает усредненную потерю удельной механической энергии между сечениями *1—1* и *2—2*. Способ вычисления его можно указать лишь после выяснения механизма действия сил сопротивления, чему будут посвящены следующие параграфы.

Уравнению (6.8) может быть дана геометрическая трактовка. Учитывая, что все его члены имеют линейную размерность, построим диаграмму (рис. 6.5). Если под величиной p понимать избыточное давление, то отношение $p/(\rho g)$ будет представлять собой пьезометрическую высоту, линия *П — П* называется пьезометрической линией. Линия *Е — Е* называется линией энергии, а плоскость *Н — Н* — напорной плоскостью. Для характеристики поведения этих линий в технических

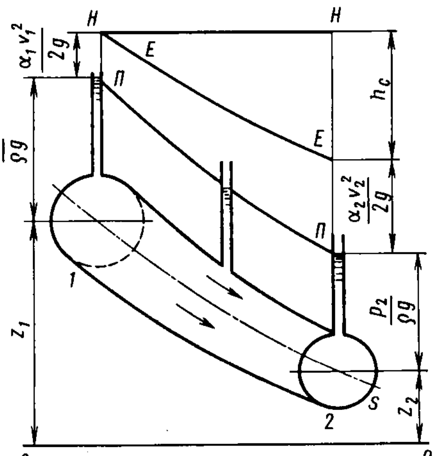


Рис. 6.5. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости

расчетах употребляют понятия пьезометрического $J_п$ и гидравлического $J_г$ уклонов, определяемых соотношениями:

$$J_п = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right); \quad J_г = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right),$$

где s — расстояние, отсчитываемое вдоль оси потока.

Очевидно, что $J_п = J_г$ для течения в цилиндрических трубах и равномерного течения в каналах, так как в этих случаях $v = \text{const}$. Следует подчеркнуть, что гидравлический уклон $J_г$ — существенно положительная величина, тогда как пьезометрический уклон $J_п$ может быть отрицательным (для расширяющегося потока).

Употребляется также следующая терминология:

$H_{гд} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ — гидродинамический напор; $H_п = z + \frac{p}{\rho g}$ — пьезометрический напор; $H_v = \frac{\alpha v^2}{2g}$ — скоростной напор или скоростная высота; h_c — потеря напора.

Здесь изложен упрощенный способ обобщения уравнения Бернулли для потока конечных размеров, обычно применяемый в курсах гидравлики. Более строгий прием такого обобщения дан Н. А. Картвелишвили [10].

6.3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для практического использования уравнения Бернулли необходимо установить способ определения потерь напора h_c, вызванных действием в потоке сил сопротивления. Механизм действия этих сил настолько сложен, что до настоящего времени для произвольного движения не удалось найти точного метода вычисления h_c; в технических расчетах чаще всего приходится пользоваться эмпирическими или полуэмпирическими зависимостями. Точное теоретическое решение задачи удалось получить только для простейших частных случаев.

Как показывают многочисленные эксперименты, механизм действия сил сопротивления существенно различен при разных граничных условиях и разных режимах движения жидкости. В этой главе рассмотрены основные закономерности сопротивлений, которые возникают в потоках, ограниченных твердыми стенками (внутренняя задача гидродинамики).

При течении жидкости (газа) в трубах, каналах, проточных частях машин и аппаратов поток претерпевает более или менее значительные деформации, вызывающие такое неравномерное распределение скоростей, которое приводит к появлению вязкостных напряжений в толще потока. Работа этих напряжений обусловливает диссипацию энергии. Кроме того, во многих случаях течение сопровождается турбулентным перемешиванием слоев

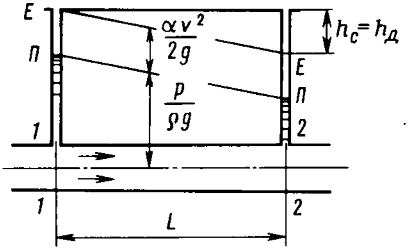


Рис. 6.6. Потери напора в равномерном потоке

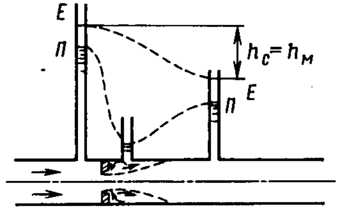


Рис. 6.7. Потери напора в местном сопротивлении

жидкости и отрывами потока * от стенок с образованием стационарных вихревых зон. Эти явления, в свою очередь, влияют на распределение и значения напряжений, а значит, и на потери энергии.

В теории внутренней задачи все внешние воздействия на поток жидкости, которые обусловливают потери ее механической энергии, называют гидравлическими сопротивлениями **. Как показал опыт прикладной гидромеханики, все гидравлические сопротивления удобно разделить на два класса или вида, сущность которых поясним на примерах.

Рассмотрим ламинарный установившийся поток жидкости в круглой гладкой горизонтальной трубе (рис. 6.6). Экспериментально получено, что несмотря на отсутствие каких-либо препятствий на пути потока, имеет место потеря напора, равная падению пьезометрической (или энергетической) линии на рассматриваемом участке. Если все поперечные сечения участка находятся в равных условиях, что имеет место при их достаточной удаленности от мест возмущений, то потери равномерно распределены по длине потока, что подтверждается прямолинейностью линии энергии, получаемой опытным путем. Такие потери назовем потерями по длине и обозначим их через $h_д$. В чистом виде они могут иметь место только в потоке с постоянной по его длине средней скоростью (т. е. в равномерном потоке, который может существовать лишь в прямой цилиндрической трубе или призматическом канале).

Гидравлическим сопротивлением здесь является тормозящее действие стенок трубы, обусловленное прилипанием к ним жидких частиц.

Потери другого вида характерны для резких изменений формы граничных поверхностей потока на коротком участке. Так, например, при течении жидкости через диафрагму (рис. 6.7) можно

* Под отрывом потока понимают резкое отклонение линий тока (струй) от граничной поверхности с образованием между оторвавшимися струями и стенкой зоны, заполненной крупными вихрями, или полости, заполненной парами жидкости. Более подробно явление отрыва описано в гл. 8.

** Этот термин, означающий *воздействие*, в технике переносят и на само устройство, порождающее это воздействие.

наблюдать достаточно резкое падение линии энергии на относительно коротком участке, потери на котором в несколько раз превышают потери в равномерном потоке на участке той же длины. В данном случае гидравлическим сопротивлением является не только тормозящее действие стенок, но и деформация потока пограничными поверхностями, сопровождающаяся изменением закона распределения скоростей и образованием зон, заполненных вихревыми массами жидкости. При этом, как правило, возрастает работа вязкостных напряжений и, следовательно, потери энергии (напора). Такие участки резких деформаций потока называют местными гидравлическими сопротивлениями, а вызванные ими потери — местными потерями энергии $h_м$.

Кроме конфигурации граничных поверхностей необходимо учитывать влияние режимов движения жидкости на величину и механизм потерь. Как известно из гл. 2 и 5, кинематические структуры ламинарного и турбулентного потоков различны; турбулентные пульсации порождают добавочные касательные напряжения, которые вызывают увеличение потерь энергии в турбулентных потоках по сравнению с ламинарными при сопоставимых условиях. Для оценки потерь важно знать условия перехода ламинарного течения в турбулентное. Этот вопрос рассмотрен в п. 6.6. Здесь укажем только на классический опыт О. Рейнольдса, который, наблюдая поведение подкрашенных струек жидкости в стеклянной трубке, установил существование критического значения числа $\mathrm{Re} = vd/\nu$, определяющего границу между ламинарным и турбулентным режимами. Если для круглых труб число Рейнольдса определять по формуле $\mathrm{Re} = vd/\nu$ (где v — средняя скорость потока; d — диаметр трубы), то, как показали опыты О. Рейнольдса и других исследователей, при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр} = 2300$ наблюдается устойчивый ламинарный режим, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ возможен переход к турбулентному.

Ниже будет показано, что характер закономерностей, определяющих потери энергии, существенно зависит от значения Re и изменяется при переходе через $\mathrm{Re}_{кр}$.

В реальных конструкциях участки равномерного движения жидкости могут чередоваться с местными сопротивлениями, число частных видов которых чрезвычайно велико. При расчете полных потерь напора широко применяется принцип сложения, согласно которому они равны сумме потерь на отдельных участках равномерного движения и на всех местных сопротивлениях:

$$h_с = \sum_{i=1}^{m} h_{дi} + \sum_{j=1}^{n} h_{мj}, \tag{6.9}$$

где $h_{дi}$ — потери по длине на i-м участке равномерного движения; $h_{мj}$ — местные потери на j-м местном сопротивлении.

При протекании жидкости через местное сопротивление в потоке возникают деформации эпюры скоростей, отрывы и вихревые зоны, которые могут распространяться как вверх, так и вниз по течению. В связи с этим если величины $h_{мj}$ вычисляют по формулам, установленным для изолированных местных сопротивлений, то применение принципа сложения потерь согласно выражению (6.9) будет правомерным лишь в том случае, когда местные сопротивления не влияют одно на другое, т. е. разделены участками движения со стабилизированным распределением скорости *. В противном случае два или более местных сопротивления рассматривают как одно сложное и для него устанавливают специальные расчетные зависимости.

Как указано выше, структура потока и механизм потерь в местных сопротивлениях и на участках равномерного движения жидкости существенно различны, а потому необходимо определить частные зависимости, справедливые для сопротивлений данного типа. Тем не менее, исходя из законов гидродинамики, можно установить структуру общих формул, выражающих потери в любом сопротивлении. В одних случаях из общих формул удается получить теоретические зависимости для конкретных видов сопротивлений, а в других — приходится, пользуясь опытными данными, конкретизировать эти формулы эмпирическими коэффициентами.

6.4. СТРУКТУРА ОБЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕРЬ НАПОРА **

Рассмотрим установившийся поток в трубе с местным сопротивлением, причем диаметры трубы перед сопротивлением и за ним могут быть различны; цилиндрические участки трубы для простоты будем считать горизонтальными. Выберем сечения *1—1* и *2—2*, нормальные к вектору средней скорости, и составим уравнение Бернулли, разрешив его относительно потерь:

$$h_c = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}. \qquad (6.10)$$

Использовать это уравнение для определения потерь можно лишь в случае, если заранее известны или определены из опыта давления и скорости в сечениях *1—1* и *2—2*. Но для расчета потери, как правило, требуется выразить через геометрические параметры пограничных поверхностей и минимально возможное число параметров потока. Для получения таких зависимостей используем уравнение количества движения (5.71), которое применим к жидкому телу, ограниченному контрольной поверхностью $S = S_1 + S_б + S_2$ (см. рис. 6.8), где $S_б$ — боковая поверхность (внутренняя поверхность трубы). Учитывая, что $p_n =$

* Стабилизированным называют такое распределение скорости в цилиндрической трубе или канале, которое не изменяется по длине потока.

** Дается обобщение методики вывода формул, предложенной авторами работы [4].

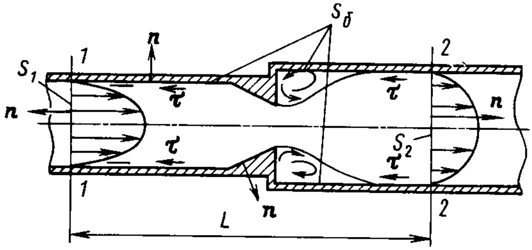


Рис. 6.8. Расчетная схема гидравлического сопротивления

$= -pn + \tau$, где n — внешняя для объема жидкости нормаль, p — давление, τ — касательное напряжение на стенке, получим

$$\int_S \rho u_n u \, dS = \int_W \rho F \, dW - \int_S pn \, dS + \int_S \tau \, dS.$$

Если F — сила тяжести, то проекция последнего уравнения на горизонтальную ось x имеет вид

$$\int_S \rho u_n u_x \, dS = -\int_S p \cos(n, x) \, dS + \int_S \tau \cos(\tau, x) \, dS.$$

Разобьем теперь каждый из поверхностных интегралов на интегралы по поверхностям S_1, $S_б$ и S_2. При этом учтем, что на поверхности $S_б$ $u_n = 0$; на S_1 $u_n = -u_1$, $u_x = u_1$, $p = p_1$, $\cos(n, x) = -1$, $\cos(\tau, x) = 0$; на S_2 $u_n = u_2$, $u_x = u_2$, $p = p_2$, $\cos(n, x) = 1$, $\cos(\tau, x) = 0$.

Тогда уравнение количества движения примет вид

$$\int_{S_2} \rho u_2^2 \, dS - \int_{S_1} \rho u_1^2 \, dS = p_1 S_1 - p_2 S_2 - \int_{S_б} p \cos(n, x) \, dS +$$

$$+ \int_{S_б} \tau \cos(\tau, x) \, dS. \tag{6.11}$$

Перейдем от местных скоростей u к средним по сечению v. Для этого обозначим

$$\alpha_{0i} = \frac{\int_{S_i} \rho u^2 \, dS}{\rho v_i^2 S_i}. \tag{6.12}$$

Нетрудно видеть, что безразмерная величина α_{0i} представляет собой отношение потока количества движения через сечение S_i, вычисленного с учетом неравномерного распределения скоростей, к потоку количества движения, вычисленного по средней скорости. Коэффициент α_0 называют коэффициентом количества движения или коэффициентом Буссинеска. Можно показать, что $1 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha$.

Теперь уравнение (6.11) можно записать в виде

$$\alpha_{02}\rho v_2^2 S_2 - \alpha_{01}\rho v_1^2 S_1 = p_1 S_1 - p_2 S_2 -$$
$$- \int\limits_{S_б} p\cos(n,\ x)\,dS + \int\limits_{S_б} \tau\cos(\tau,\ x)\,dS. \qquad (6.13)$$

Введем обозначения:

$$E = \frac{\rho}{2}\left(\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2\right);$$
$$K = \alpha_{02}\rho v_2^2 S_2 - \alpha_{01}\rho v_1^2 S_1;$$
$$T = \int\limits_{S} [p\cos(n,\ x) - \tau\cos(\tau,\ x)]\,dS.$$

Тогда уравнения (6.10) и (6.13) примут вид

$$h_c\rho g \equiv p_c = p_1 - p_2 + E;\ K = p_1 S_1 - p_2 S_2 - T..$$

Исключая из этой системы давление p_2, получаем

$$p_c = p_1\frac{S_2 - S_1}{S_2} + E + \frac{K + T}{S_2}.$$

Вводя в рассмотрение число Эйлера $p/(\rho v^2) = \mathrm{Eu}$, местный коэффициент трения $C_{f1} = 2\tau/(\rho v_1^2)$ и выполняя несложные алгебраические преобразования, приведем последнее уравнение к виду

$$p_c = \frac{\rho v_1^2}{2}\left[2\,\mathrm{Eu}_1\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + \alpha_1 - \alpha_2\frac{S_1^2}{S_2^2} + 2\frac{S_1}{S_2}\left(\alpha_{02}\frac{S_1}{S_2} - \alpha_{01}\right) +\right.$$
$$\left. + \int\limits_{\bar{S}_б} [2\,\mathrm{Eu}\cos(n,\ x) - C_{f1}\cos(\tau,\ x)]\,d\bar{S}_б\right], \qquad (6.14)$$

где $\mathrm{Eu}_1 = p_1/(\rho v_1^2)$ — число Эйлера для сечения *1—1*; $\mathrm{Eu} = p/(\rho v_1^2)$ — текущее значение числа Эйлера для точек боковой поверхности $S_б$; $\bar{S}_б = S_б/S_2$.

В дальнейшем для простоты будем полагать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$, что оправдано для турбулентного потока, стабилизированного в сечениях *1—1* и *2—2*. Тогда формула (6.14) примет вид

$$p_c = \frac{\rho v_1^2}{2}\left\{(2\,\mathrm{Eu}_1 + 1 - \bar{S}_1)(1 - \bar{S}_1) + \int\limits_{\bar{S}_б} [2\,\mathrm{Eu}\cos(n,\ x) -\right.$$
$$\left. - C_{f1}\cos(\tau,\ x)]\,d\bar{S}_б\right\}, \qquad (6.15)$$

где $\bar{S}_1 = S_1/S_2$.

Для дальнейшего упрощения формулы боковую поверхность разобьем на цилиндрическую часть $S_ц$ и криволинейную $S_к$ (между точками A и B) так, что $S_б = S_ц + S_к$ (рис. 6.9). Очевидно, для поверхности $S_ц$ $\cos(n, x) = 0$. Давление на поверхности $S_к$ представим в виде $p = p_1 + \Delta p$, где Δp — изменение давления в ее точках по сравнению с давлением p_1 в сечении *1—1*. Например, если бы жидкость была невязкой, то было бы $\Delta p = 0{,}5\rho\,(v_1^2 - v_{гр}^2)$, где $v_{гр}$ — скорость в точке поверхности $S_к$.

Теперь часть интеграла в формуле (6.15), зависящую от давления, можно представить в виде

$$J_p = \int\limits_{\bar{S}_б} 2\,\mathrm{Eu}\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_б = \frac{2}{\rho v_1^2}\int\limits_{\bar{S}_к}(p_1 + \Delta p)\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_к =$$

$$= 2\,\mathrm{Eu}_1\int\limits_{\bar{S}_к}\cos(n,\ x)\,dS_к + \frac{2}{\rho v_1^2}\int\limits_{\bar{S}_к}\Delta p\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_к,$$

где $\bar{S}_к = S_к/S_2$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\bar{S}_к}\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_к = \frac{1}{S_2}\int\limits_{S_к}\cos(n,\ x)\,dS_к$. Нетрудно видеть, что $\cos(n, x)\,dS_к$ есть проекция dS_x площадки $dS_к$ на плоскость, нормальную оси x, положительная или отрицательная в зависимости от того, какой угол (острый или тупой) образует нормаль $\boldsymbol{n}$ с осью x (см. рис. 6.9). Поэтому какова бы ни была поверхность $S_к'$ («бугор» между точками A и C на рис. 6.9), $\int\limits_{S_к'}\cos(n,\ x)\,dS_к' = 0$. Следовательно, в двух возможных случаях, показанных на рис. 6.10, получим

при $S_1 < S_2$ (расширение): $\int\limits_{\bar{S}_к}\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_к = -\frac{1}{S_2}(S_2 - S_1) = -(1 - \bar{S}_1)$;

при $S_1 > S_2$ (сужение): $\int\limits_{\bar{S}_к}\cos(n,\ x)\,dS_к = \frac{1}{S_2}(S_1 - S_2) = -(1 - \bar{S}_1)$.

Используя этот результат, находим

$$J_p = -2\,\mathrm{Eu}_1(1 - \bar{S}_1) + $$
$$+ 2\int\limits_{\bar{S}_к}\mathrm{Eu}_к\cos(n,\ x)\,d\bar{S}_к,$$

где $\mathrm{Eu}_к = \Delta p/(\rho v_1^2)$.

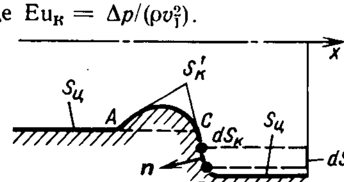


Рис. 6.9. Разбиение боковой поверхности на расчетные участки

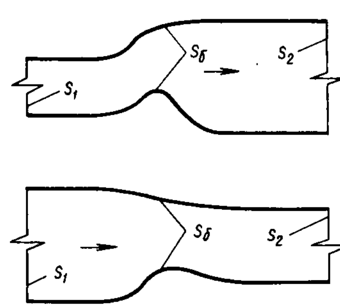


Рис. 6.10. Две типовые конфигурации местного сопротивления

Подставляя значение J_p в формулу (6.15), получаем

$$p_c = \frac{\rho v_1^2}{2}\left[(1-\bar S_1)^2 + 2\int_{\bar S_к} \mathrm{Eu}_к \cos(n,\ x)\, d\bar S_к - \right.$$
$$\left. - \int_{\bar S_б} C_{f1}\cos(\tau,\ x)\, d\bar S_б\right]. \tag{6.16}$$

Следует обратить внимание на то, что первый интеграл в формуле (6.16) распространен только на криволинейную часть боковой поверхности $S_к$, а второй — на всю поверхность $S_б$. Если ввести обозначение

$$\zeta_c = (1-\bar S_1)^2 + 2\int_{\bar S_к} \mathrm{Eu}_к \cos(n,\ x)\, d\bar S_к - \int_{\bar S_б} C_{f1}\cos(\tau,\ x)\, d\bar S_б, \tag{6.17}$$

то формула (6.16) примет вид

$$p_c = \zeta_c \rho v_1^2/2. \tag{6.18}$$

Безразмерная величина ζ_c называется коэффициентом гидравлического сопротивления, а формула (6.18) известна как формула Вейсбаха. Она была впервые получена экспериментальным путем. Заметим, что, слегка видоизменяя вывод, можно получить формулы, аналогичные выражениям (6.14), (6.16) и (6.18), но отнесенные к скоростному напору в сечении *2—2*, т. е. к величине $\rho v_2^2/2$.

Зависимость (6.17) является общим выражением для коэффициента произвольного гидравлического сопротивления на участке прямой трубы и, как будет показано далее, из нее можно вывести не только структуру расчетных формул для потерь напора, но и получить как частные случаи известные теоретические формулы для некоторых конкретных видов местных сопротивлений.

Придадим формуле (6.17) еще одну форму, удобную для обобщения результатов эксперимента. Для этого выясним, от каких параметров и как именно зависит коэффициент трения C_f. Учтем, что при любом режиме движения жидкости в трубе касательное напряжение τ_0 на стенке можно выразить известной формулой Ньютона, так как даже при турбулентном течении вблизи стенки скорости малы и образуется вязкий подслой, в котором течение преимущественно ламинарное, хотя и наблюдаются пульсации. Таким образом,

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{ст}.$$

Выбрав характерные скорость v и линейный размер L, представим эту формулу в безразмерном виде:

$$\frac{\tau_0}{\rho v^2/2} = C_f = \frac{\rho \nu}{\rho v^2/2}\,\frac{v}{L}\left.\frac{\partial(u/L)}{\partial(n/L)}\right|_{ст},$$

откуда

$$C_f = \frac{2}{vL/\nu} \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}}\right|_{\text{ст}},$$

где vL/ν — число Рейнольдса, составленное по характерным линейному размеру L и скорости v; $(2\partial\bar{u}/\partial\bar{n})_{\text{ст}} = A$ — безразмерный градиент скорости на стенке трубы.

Если для группы потоков выполнены условия геометрического и кинематического подобия, то в соответствии с изложенным в п. 5.11 величина A будет одинаковой для всей этой группы. Таким образом,

$$C_f = A/\mathrm{Re}, \tag{6.19}$$

т. е. местный коэффициент трения зависит от числа Рейнольдса и одинаков для всех динамически подобных потоков.

Подставляя выражение (6.19) в формулу (6.17) и вводя обозначения

$$\zeta_{\text{кв}} = (1 - \bar{S}_1)^2 + 2 \int\limits_{\bar{S}_\text{к}} \mathrm{Eu}_\text{к} \cos(n,\ x)\, d\bar{S};\ A_1 = \int\limits_{\bar{S}_\text{к}} A \cos(\tau,\ x)\ dS,$$

получаем зависимость

$$\zeta_\text{c} \doteq \zeta_{\text{кв}} + A_1/\mathrm{Re}. \tag{6.20}$$

Из изложенного следует, что параметр A_1 зависит главным образом от конфигурации граничных поверхностей, но в определенных условиях и от числа Re. Для геометрически подобных сопротивлений при одинаковых числах Re значения ζ_c будут одинаковы. При малых числах Re второй член правой части формулы (6.20), т. е. A_1/Re, играет определяющую роль в величине ζ_c, но при возрастании Re этот член становится малым, и, следовательно, число Re и вязкость перестают влиять на значение ζ_c; при $\mathrm{Re} \to \infty$ $\zeta_\text{c} \to \zeta_{\text{кв}}$. Величина $\zeta_{\text{кв}}$, как видно из формул, определяется характером распределения безразмерного давления по внутренней боковой поверхности местного сопротивления или местным числом Eu. Число Эйлера может зависеть от Re, однако с возрастанием последнего значения Eu стабилизируются и определяются только геометрическими параметрами сопротивления и граничными условиями. Поэтому при больших числах Re, когда силы вязкости практически не влияют на сопротивление, динамическое подобие, а следовательно, одинаковые значения ζ_c обеспечиваются только геометрическим подобием и одинаковыми граничными условиями. Верхней границей такого режима течения на участке сопротивления является значение числа Re, при котором в потоке вследствие больших скоростей возникает кавитация и происходит перестройка структуры течения, а значит, и распределения давления.

Таким образом, в общем случае коэффициент гидравлического сопротивления ζ_c зависит от пограничной геометрии и числа Рейнольдса:

$$\zeta_c = f(L_i, \mathrm{Re}),$$

где L_i — совокупность геометрических параметров, определяющих конфигурацию граничных поверхностей.

Рассмотрим конкретные типы гидравлических сопротивлений.

6.5. СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО ДЛИНЕ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ

Рассмотрим сопротивление цилиндрической трубы на стабилизированном участке течения (см. рис. 6.6). В этом случае $S_к = 0$, а $S_б = S_ц$ представляет собой цилиндрическую поверхность, для всех точек которой $\cos(n, x) = 0$. Кроме того, так как все точки поверхности $S_б$ находятся в равных условиях (поток стабилизирован), $\tau = \tau_0 = \mathrm{const}$, т. е. $C_f = \mathrm{const}$, $\cos(\tau, x) = -1$. Учитывая также, что $S_1 = S_2 = S_0$, т. е. $\overline{S}_1 = 1$, формулу (6.17) перепишем в виде

$$\zeta_c = C_f S_б / S_0.$$

Обозначим через χ периметр сечения S_0 и введем величину $R = S_0/\chi$, называемую гидравлическим радиусом. Тогда

$$\zeta_c = C_f \chi l / S_0 = C_f l / R, \tag{6.21}$$

где l — длина участка.

Теперь формула (6.18) примет вид

$$p_c = p_д = C_f \frac{l}{R} \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{или} \quad h_д = C_f \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g}. \tag{6.22}$$

Для круглых труб $R = d/4$, где d — диаметр трубы. Вводя обозначение $\lambda = 4C_f$ для этого случая, получим зависимость

$$h_д = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \tag{6.23}$$

определяющую потери напора по длине в круглых трубах и называемую формулой Вейсбаха — Дарси.

Из формулы (6.21) получается еще одно важное соотношение. Учитывая смысл коэффициентов ζ_c и C_f и умножив обе части выражения (6.21) на $\rho v_1^2/2$, находим

$$p_д = \tau_0 l / R \quad \text{или} \quad \tau_0 = \rho g R h_д / l. \tag{6.24}$$

Последняя формула является основной для равномерного движения жидкости и связывает силовую характеристику потока τ_0 с энергетической $h_д$. В дальнейшем она будет использована для получения других важных зависимостей.

Рассмотрим подробнее сущность величины λ в формуле (6.23). Она отличается от коэффициента трения C_f лишь постоянным множителем и называется гидравлическим коэффициентом трения. Зависит он, очевидно, от тех же параметров, что и C_f, т. е.

$$\lambda = f_д (\mathrm{Re},\ L_i). \tag{6.25}$$

Так как $C_f = A/\mathrm{Re}$ [см. формулу (6.19)],

$$\lambda = 4A/\mathrm{Re}.$$

Параметр A определяется профилем скорости у стенки и одинаков для кинематически подобных потоков, у которых безразмерные эпюры скоростей одинаковы. Однако, как будет ясно из дальнейшего, подобие эпюр скоростей в круглых трубах строго обосновывается и подтверждается опытом только для ламинарных течений. Для них

$$\lambda = \mathrm{const}/\mathrm{Re}, \tag{6.25'}$$

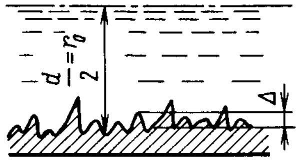
так как параметр A от Re не зависит и одинаков для всех круглых труб с гладкими стенками, геометрическое подобие которых всегда имеет место. Небольшая шероховатость стенок, как показывает опыт (см. ниже), не влияет на λ и закономерность (6.25) остается справедливой, несмотря на то что геометрическое подобие, строго говоря, нарушается. Но при значительных шероховатостях стенок величина λ должна зависеть от формы и расположения неровностей.

По результатам экспериментов коэффициент λ можно определить с помощью формулы (6.23), если измерить среднюю скорость v и падение напора $h_д$. В п. 6.4 даны указания о рациональном, теоретически обоснованном способе обработки таких опытных данных. Согласно выражению (6.25) следует найти эмпирическую зависимость λ от числа Re и какого-либо безразмерного параметра, определяющего геометрическое подобие потоков.

Для гладких круглых труб такой параметр не требуется, поскольку все круглые трубы геометрически подобны и для них экспериментальные точки на графике $\lambda = \lambda(\mathrm{Re})$ должны образовать единую кривую. Однако шероховатые трубы не являются геометрически подобными, поскольку требование геометрического подобия должно распространяться не только на форму поперечного сечения, но и на форму выступов неровностей стенок. Но тогда при строгом подходе практически невозможно найти две геометрически подобные трубы с естественной шероховатостью. Поэтому в качестве приближенного допущения принимают, что шероховатые трубы геометрически подобны, если отношение средней высоты Δ неровности к радиусу r_0 или диаметру d будет одинаковым (рис. 6.11). Тогда опытные данные следует обрабатывать в виде кривых

$$\lambda = \lambda(\mathrm{Re},\ \Delta/d). \tag{6.26}$$

Рис. 6.11. Характерные геометрические параметры потока в круглой трубе



Величину Δ/d (или Δ/r_0) называют относительной шероховатостью, а обратную величину d/Δ — относительной гладкостью.

И. Никурадзе (1933 г.) впервые обработал свои многочисленные опытные результаты указанным способом и построил универсальную зависимость (6.26) (рис. 6.12). Шероховатость в опытах Никурадзе создавалась искусственно путем наклеивания калиброванных песчинок на внутреннюю поверхность трубы. Такая шероховатость получалась равнозернистой, чем существенно отличалась от естественной шероховатости труб, образующейся в результате коррозии, отложений и т. п.

Рассмотрим подробно график Никурадзе. Логарифмические шкалы на осях координат выбраны для того, чтобы сделать его наиболее компактным. На поле графика можно отметить четыре характерные зоны.

1. Зона ламинарного режима, изображаемая прямой. Точки, относящиеся к опытам, проведенным при разной шероховатости, ложатся на одну прямую, уравнение которой

$$\lambda_1 = 64/\mathrm{Re}.$$

Следовательно, в пределах этой зоны λ зависит только от числа Re и не зависит от шероховатости стенок трубы. Границей

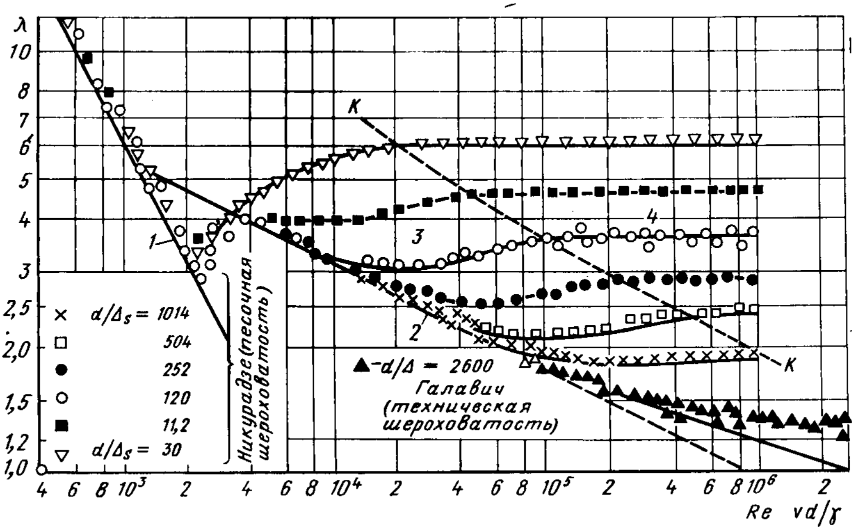


Рис. 6.12. Экспериментальная зависимость гидравлического коэффициента трения λ от числа Рейнольдса Re и относительной гладкости d/Δ_s при песочной шероховатости (график Никурадзе)

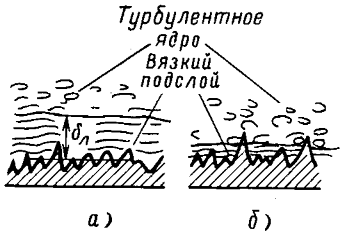


Рис. 6.13. Структура турбулентного потока вблизи шероховатой стенки при режимах:

а — гладкостенного течения; *б* — проявления шероховатости

зоны служит значение абсциссы $\lg 2300 = \lg \mathrm{Re}_{кр}$. Таким образом, данная закономерность имеет место при $\mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}_{кр}$, т. е. при ламинарном режиме течения в трубе. При этом согласно выражению (6.23) потери линейно зависят от скорости.

В диапазоне чисел $\mathrm{Re} = 2300 \dots 4000$ осуществляется переход от ламинарного режима течения к турбулентному. В потоке наблюдается неустойчивость, порождаемая периодическим возникновением очагов турбулентности и их исчезновением.

2. Зона гладкостенного течения, образуемая опытными точками, расположенными вдоль другой прямой. Здесь λ также не зависит от шероховатости:

$$\lambda_2 = \lambda_2 (\mathrm{Re}).$$

Границей зоны ориентировочно могут служить значения

$$4 \cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}'_{гр} = 26{,}9 \left(\frac{d}{\Delta_s}\right)^{1{,}143},$$

где индексом s отмечена равнозернистая шероховатость.

Структуру потока в пределах зоны гладкостенного течения можно представить схемой, приведенной на рис. 6.13, *а*. При турбулентном течении вблизи стенки сохраняется вязкий подслой, движение в котором преимущественно ламинарное. Толщина подслоя $\delta_л$ достаточна, чтобы покрыть все неровности стенки, благодаря чему турбулентное ядро потока движется как бы в гладкой трубе. Трубы, работающие в таком режиме, иногда называют гидравлически гладкими.

3. Зона доквадратичного сопротивления, которая ограничивается линией гладкостенного режима и штриховой линией *КК* (см. рис. 6.12), образованной точками, отделяющими горизонтальные участки кривых. Можно видеть, что в зоне *3* каждая кривая соответствует определенному значению относительной гладкости. Здесь имеет место наиболее общий случай:

$$\lambda_3 = \lambda_3 (\mathrm{Re},\ d/\Delta_s).$$

Границами зоны приближенно могут служить значения

$$\mathrm{Re}'_{гр} \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}''_{гр} = \left[217 + 382 \lg \left(\frac{d}{\Delta_s}\right)\right] \frac{d}{\Delta_s}.$$

4. Зона квадратичного сопротивления, образуемая горизонтальными участками кривых. Очевидно, здесь коэффициент λ не зависит от Re, т. е.

$$\lambda_4 = \lambda_4 (d/\Delta_s),$$

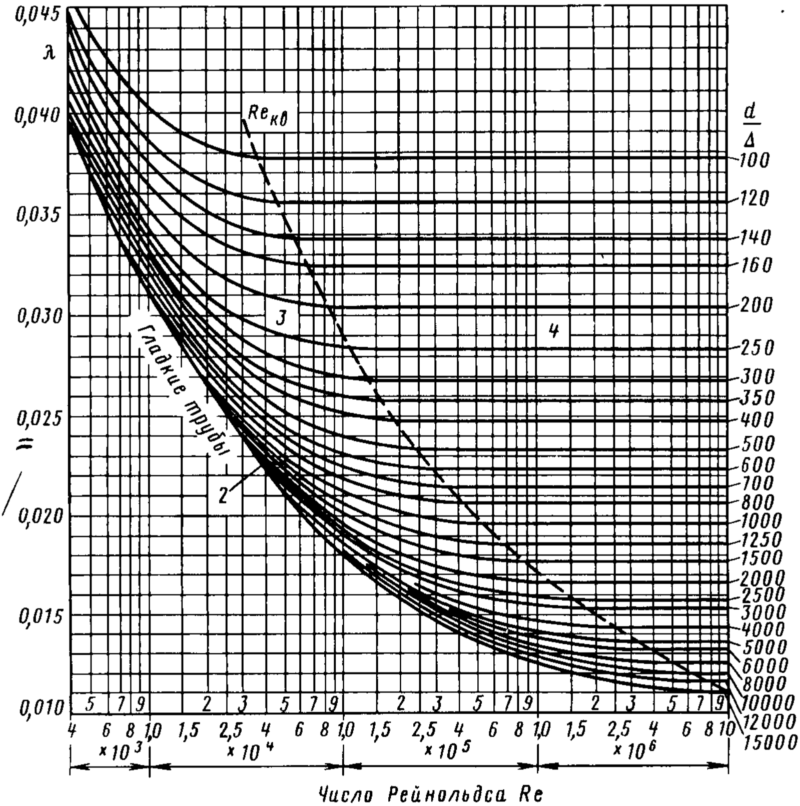


Рис. 6.14. Экспериментальные зависимости гидравлического коэффициента трения λ от числа Рейнольдса Re и относительной гладкости стенок для промышленных труб с неравномерной шероховатостью

и согласно выражению (6.23) потери пропорциональны квадрату скорости.

Эта зона имеет место при

$$\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{Re}''_{\text{гр}},$$

а структура течения в ней схематически представлена на рис. 6.13, *б*, согласно которому толщина вязкого подслоя весьма мала и выступы шероховатости непосредственно взаимодействуют с турбулентным потоком.

График Никурадзе дает общее представление о характере зависимости λ (Re, d/Δ_s) для труб с искусственной зернистой шероховатостью Δ_s. В результате многочисленных более поздних исследований течения в трубах с естественной неравномерной шероховатостью получены некоторые отличия в ходе экспериментальных кривых. На рис. 6.14 даны графики, построенные по результатам опытов с промышленными трубами, проведенных рядом советских исследователей, главным образом Г. А. Муриным во ВТИ. Можно видеть, что вид кривых на графиках Никурадзе и Мурина несколько различен, что объясняют неравномерностью шероховатости труб. При увеличении числа Re в соприкосновение с турбулентным ядром вступают вначале наиболее высокие выступы, а затем постепенно остальные. Этим, как считают, обусловлено плавное снижение ординат кривых в зоне *3*.

Перейдем к подробному описанию течений в пределах каждой из зон сопротивления. Основными вопросами, которые нас будут интересовать, являются закон распределения скоростей и закон сопротивления при разных режимах течения. Знание этих законов необходимо, в конечном счете, для того, чтобы обоснованно перейти к одномерной модели потока в трубах и на основе последней построить инженерные методы гидродинамических расчетов.

6.6. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОМУ ТЕЧЕНИЮ

Рассмотрим установившийся ламинарный поток в круглой цилиндрической трубе, выбрав цилиндрическую систему координат (рис. 6.15). Предполагая линии тока прямыми, параллельными оси трубы, получаем $u_r = u_\theta = 0$; $u_z \neq 0$. Тогда из уравнения неразрывности (2.25) находим $\partial u_z/\partial z = 0$, откуда $u_z = u_z(r, \theta)$. Поскольку это условие должно выполняться во всех точках потока, то и $\partial^2 u_z/\partial z^2 = 0$. Учитывая, что поток в трубе осесимметричен, заключаем, что все параметры не зависят от переменной θ, т. е. $\partial/\partial\theta = 0$ и $\partial^2/\partial\theta^2 = 0$. Кроме того, пренебрегаем действием массовых сил. Тогда уравнения Навье — Стокса (5.14) в цилиндрических координатах существенно упрощаются:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0; \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

Из первого уравнения следует, что давление по живому сечению трубы постоянно и зависит только от z (это является следствием пренебрежения влиянием силы тяжести). Последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz},$$

что равносильно форме

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}.$$

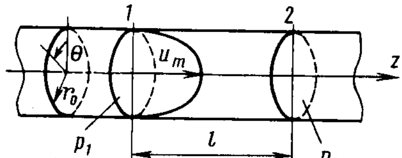


Рис. 6.15. Схема для расчета ламинарного течения в круглой трубе

Поскольку правая часть этого уравнения не зависит от r, его можно дважды проинтегрировать. При этом получим

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Так как скорость всюду должна иметь конечное значение, а при $r \to 0$ последняя формула дает $u \to \infty$, то физически реальный результат получим лишь при $C_1 = 0$. Для определения C_2 используем граничное условие на стенке трубы: $u(r_0) = 0$, где r_0 — радиус трубы. Следовательно,

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dr}r_0^2$$

и закон распределения скоростей имеет вид

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(r^2 - r_0^2). \qquad (6.27)$$

На оси трубы, т. е. при $r = 0$, скорость должна достигать максимального значения

$$u_m = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r_0^2. \qquad (6.28)$$

Разделив выражения (6.27) на (6.28), получим безразмерную форму закона распределения скоростей

$$u/u_m = 1 - r^2/r_0^2. \qquad (6.29)$$

Очевидно, пространственная эпюра скорости представляет собой параболоид вращения с основанием πr_0^2 и высотой u_m.

Расход жидкости несложно вычислить по зависимостям

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi u r dr = 2\pi u_m \int_0^{r_0} r\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)dr = \pi r_0^2 \frac{u_m}{2}. \qquad (6.30)$$

Поскольку со средней скоростью v расход связан формулой $Q = \pi r_0^2 v$, то $v = u_m/2$, т. е. при ламинарном режиме в круглой трубе максимальная скорость вдвое больше средней. Учитывая выражение (6.28), находим

$$v = -\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dz}. \qquad (6.31)$$

Если длина расчетного участка между сечениями с давлениями p_1 и p_2 равна l, то, интегрируя зависимость (6.31) по z, получим формулу Пуазейля

$$p_1 - p_2 = 8\,\mu l v/r_0^2, \qquad (6.32)$$

определяющую падение давления на участке l. Ей можно придать вид

$$p_1 - p_2 = 32\mu l v/d^2. \qquad (6.32')$$

Учитывая, что $(p_1 - p_2)/(\rho g) = h_д$ и $\mu = \nu\rho$, получаем

$$h_д = 32\nu l v/(g d^2). \tag{6.32''}$$

Записав эту формулу в виде

$$h_д = \frac{64}{vd/\nu}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

и сопоставляя с формулой Дарси — Вейсбаха (6.20), заключаем, что для рассматриваемого случая

$$\lambda = \frac{64}{vd/\nu} = \frac{64}{\mathrm{Re}};$$

этот результат полностью согласуется с опытными данными Никурадзе (см. рис. 6.12).

Полученный закон распределения скоростей [формула (6.29)] позволяет путем непосредственного вычисления по выражению (6.7) убедиться, что для данного случая $\alpha = 2$. Используя этот же закон, нетрудно установить, что ламинарный поток в круглой трубе является вихревым. Предоставляем читателю самостоятельно найти выражения для проекций вектора вихря или угловой скорости и показать, что вихревыми линиями являются концентрические окружности с центрами на оси трубы, плоскости которых ей нормальны.

Изложенное в этом параграфе является иллюстрацией того, как, зная закономерности неодномерного течения, можно вполне строго перейти к одномерной модели. Действительно, уравнения (6.8) вместе с (2.19), (6.22), (6.23) при $\alpha = 2$ полностью описывают стабилизированный одномерный ламинарный поток в круглых трубах. Однако такое течение может иметь место только на некотором расстоянии от входа в трубу.

Если вход в трубу из резервуара выполнен достаточно плавным, специально рассчитанной конфигурации, то в начальном сечении 1—1 устанавливается практически равномерное распределение скоростей (рис. 6.16). По мере движения жидкости тормозящее влияние стенок распространяется на все большую толщу потока. На некотором участке, называемом начальным или вход-

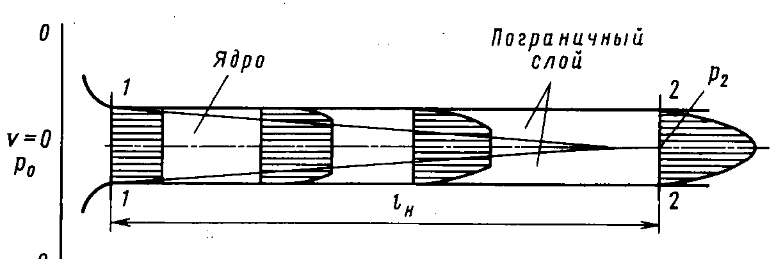


Рис. 6.16. Начальный участок ламинарного потока в трубе

ным, поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристенный пограничный слой, где скорости распределяются неравномерно. Сечение ядра вниз по течению убывает, а толщина пограничного слоя возрастает. В конце участка $l_н$ пограничный слой смыкается на оси трубы, и ниже по течению устанавливается параболическое распределение скоростей соответственно уравнению (6.29). Точнее говоря, это распределение скоростей достигается асимптотически, но с достаточной для практики точностью можно указать конечное расстояние $l_н$.

Потери напора на начальном участке строго не подчиняются формуле Пуазейля, ибо здесь не выполняется основная предпосылка о прямолинейности линий тока. Рассчитать эти потери можно методами непосредственного решения уравнений Навье — Стокса или методами теории пограничного слоя, излагаемой в гл. 8. Для ориентировочной оценки падения давления на начальном участке трубы можно в первом приближении принять, что потери на трение определяются формулой Пуазейля. Тогда уравнение Бернулли, составленное для сечений *0—0* и *2—2*, имеет вид

$$\frac{p_0}{\rho g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v^2}{2g}+\frac{32\nu l_н v}{gd^2}.$$

Так как $\alpha_2 = 2$,

$$\frac{p_0-p_2}{\rho g}=\frac{v^2}{2g}\left(2+\frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{l_н}{d}\right). \tag{6.33}$$

Как показывают опыты, первое слагаемое в скобке правой части уравнения (6.33) больше двух и, по данным Шиллера, колеблется от 2,16 до 2,45.

Более точные расчетные формулы можно вывести с помощью упомянутых выше методов. Такие формулы были получены Буссинеском, Шиллером и другими исследователями. Наилучшее совпадение с обстоятельными опытами Никурадзе дает решение С. М. Тарга [24], согласно которому длина начального участка

$$l_н = 0{,}04\mathrm{Re}\, d, \tag{6.34}$$

где $\mathrm{Re} = vd/\nu$.

Описанный в этом параграфе характер течения и соответствующие ему зависимости имеют место только при устойчивом ламинарном режиме, т. е. при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$. При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ возможно нарушение ламинарного характера течения и возникновение турбулентности. Механизм перехода от ламинарного течения к турбулентному достаточно сложен и, несмотря на многочисленные исследования, выяснен не полностью. Тем не менее можно дать хотя и схематичное, но достаточно близкое к реальной картине описание движения при околокритических числах Re. Так, при Re, немного меньших $\mathrm{Re}_{кр}$, в ламинарном потоке периодически появляются кратковременные очаги турбулентности, которые могут на отдельных участках заполнять все сечение потока, образуя

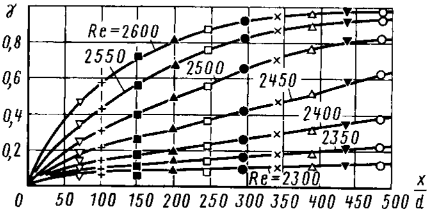


Рис. 6.17. Зависимость коэффициента перемежаемости γ от расстояния от входа в трубу при различных числах Re

«турбулентные пробки». Этот переходный процесс можно характеризовать долей Δt некоторого интервала времени T, в течение которого в данной точке потока существует турбулентный режим. Величину $\gamma = \Delta t/T$ называют коэффициентом перемежаемости. По мере возрастания числа Рейнольдса, а также при удалении от входа в трубу величина γ непрерывно возрастает.

На рис. 6.17 приведена полученная И. Ротта экспериментальная зависимость коэффициента перемежаемости от расстояния x, отсчитываемого от входа в трубу при разных числах Re. Ход кривых показывает, что в диапазоне переходных чисел Re = = 2300 ... 2600 полностью турбулентный режим устанавливается на тем большем расстоянии от входа, чем меньше число Рейнольдса.

При возрастании числа Re турбулентный режим в каждом сечении существует все более длительное время, и, наконец, поток становится стационарно турбулентным. Появление турбулентных очагов наступает тем раньше, чем больше возмущений испытывает поток при входе в трубу. Если вход сделать плавным и устранить другие источники возмущений, то ламинарный режим можно получить при больших числах Re. Так были получены ламинарные режимы при Re = 20 000 и даже при Re = 40 000. Однако такие «затянутые» ламинарные режимы оказывались неустойчивыми, т. е. внесение в поток даже очень малых возмущений приводило к турбулизации. Поэтому критическое значение числа Рейнольдса следует понимать как границу устойчивого ламинарного режима в том смысле, что при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ любые внешние возмущения, вносимые в поток, будут с течением времени затухать и поток сохранит ламинарный характер *. При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ в зависимости от условий опыта может существовать ламинарный или турбулентный режим. Для круглых труб $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$.

Переход от ламинарного течения к турбулентному сопровождается изменением закона сопротивления, что наглядно иллюстрируется графиком Никурадзе (см. рис. 6.12), а также изменением формы эпюры местных скоростей, причем для турбулентного потока речь идет о местных усредненных скоростях.

* Такое определение критического числа Рейнольдса соответствует встречающемуся в литературе термину «нижнее» критическое число Рейнольдса. «Верхним» критическим числом Re иногда называют то его значение, при котором устанавливается стабильный турбулентный режим.

В переходной области форма профиля скорости уже не сохраняется параболической, а зависит от коэффициента перемежаемости. Поскольку здесь может существовать как ламинарный, так и турбулентный режим, то одному и тому же числу Рейнольдса могут соответствовать разные профили скорости.

Математическое описание неустойчивых ламинарных течений и переходных процессов является достаточно сложным; некоторые дополнения к описанию качественной стороны этих явлений даны в гл. 9, но изложение количественных результатов выходит за рамки настоящего курса.

6.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ

При развитом турбулентном режиме течения турбулентные напряжения в точках, лежащих за пределами пристенного подслоя, могут намного превосходить вязкостные напряжения. Поэтому приближенный расчет турбулентного течения в трубе можно построить на двухслойной модели, предполагая, что в пределах вязкого подслоя течение ламинарное, а в центральной части потока (в турбулентном ядре) эпюра (профиль) усредненной скорости и закон сопротивления целиком определяются турбулентными напряжениями. Тогда, основываясь на одной из полуэмпирических теорий (например, на теории пути перемешивания Л. Прандтля), можно установить структуру расчетных зависимостей как для профиля скорости, так и для закона сопротивления.

Получаемые таким путем формулы не вполне удовлетворительны, так как хотя и соответствуют экспериментальным данным для турбулентного ядра течения, но не удовлетворяют некоторым естественным условиям (например, равенству нулю градиента скорости на оси трубы). Поэтому усилия многих исследователей были направлены на уточнение полуэмпирических теорий, в первую очередь путем учета молекулярной вязкости в турбулентном ядре. В этом направлении достигнуты определенные успехи. В частности, получены достаточно удобные и точные расчетные зависимости для коэффициентов сопротивления, применимые в широком диапазоне изменения параметров. Тем не менее не потеряли своего значения и основные результаты основоположников полуэмпирических теорий, поскольку ими были установлены фундаментальные закономерности течения в трубах. Одной из них является логарифмический закон аспределения скоростей турбулентного потока в круглой цилиндрической трубе, обоснование которого и рассмотрим ниже.

Полагаем, что в турбулентном ядре можно пренебречь вязкостными напряжениями и принять $\tau \approx \tau_т$.

Для турбулентного напряжения согласно формуле Л. Прандтля (5.30)

$$\tau_т = \rho l^2 (du/dy)^2.$$

В отличие от безнапорного потока вдоль плоской стенки, при течении в трубе напряжение τ не остается постоянным по живому сечению, а зависит от координаты y. Чтобы установить вид этой зависимости, применим основную формулу (6.24) равномерного движения к цилиндрическому элементу радиусом r, ограниченному сечениями $1—1$ и $2—2$ (рис. 6.18):

$$\tau = \rho g R J_{\text{г}} = \rho g\,(r/2)\,J_{\text{г}},$$

где $J_{\text{г}} = h_{\text{д}}/l$.

Напряжение на стенке

$$\tau_0 = \rho g\,(r_0/2)\,J_{\text{г}},$$

причем значение гидравлического уклона $J_{\text{г}}$ в обеих формулах одинаково. Заменяя r на $r_0 - y$, получаем

$$\tau/\tau_0 = r/r_0 \text{ или } \tau = \tau_0\,(1 - y/r_0). \tag{6.35}$$

Таким образом, касательное напряжение в равномерном потоке распределяется по линейному закону. Важно отметить, что этот вывод справедлив как для турбулентного, так и для ламинарного течений, ибо он вытекает из уравнения (6.24), которое справедливо для любого из этих режимов. Кроме того, из выражения (6.35) следует, что при $y/r_0 \ll 1$, т. е. вблизи стенки, можно считать $\tau \approx \tau_0 = \text{const}$. Это указывает на существование у стенки тонкого слоя, в котором имеет место почти линейный закон распределения скоростей (ибо $\tau_0 = \mu du/dy = \text{const}$ и $du/dy = \text{const}$). Такое распределение характерно для ламинарного безнапорного течения (течение Куэтта). Этим дополнительно обосновывается существование у стенки вязкого подслоя с ламинарным режимом течения. В действительности современные эксперименты обнаруживают наличие турбулентных пульсаций во всей толще потока вплоть до стенки. Однако при малых, исчисляемых долями миллиметра расстояниях от нее эти пульсации не оказывают заметного влияния на режим течения.

Заменив теперь в формуле Прандтля значение $\tau_{\text{т}}$ согласно выражению (6.35) и введя обозначение $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, получим

$$(1 - y/r_0)\,u_*^2 = l^2\,(du/dy)^2. \tag{6.35$'$}$$

Поскольку динамическая скорость u_* постоянна, последнее уравнение можно было бы проинтегрировать по y, если бы была известна функция $l\,(y)$. В п. 5.10 показано, что для простейшего случая безграничного потока вдоль плоской стенки достаточно точные результаты дает гипотеза Прандтля ($l = \varkappa y$). Однако для трубы она неприемлема, что подтверждается опытами Никурадзе (рис. 6.19). Можно видеть, что значение l достигает максимума на оси трубы. Были сделаны попытки найти $l\,(y)$ теоретически или дать удобную аппроксимирующую зависимость. Кривые, построенные по данным разных авторов, приведены на рис. 6.19. Вполне

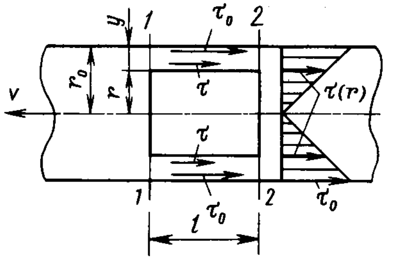


Рис. 6.18. Линейное распределение касательных напряжений для потока в цилиндрической трубе

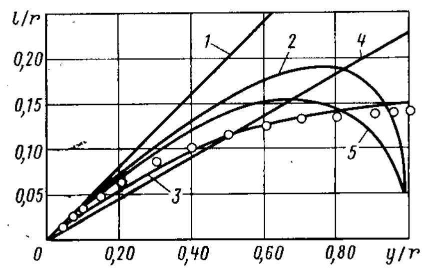


Рис. 6.19. Распределение длины пути перемешивания в поперечном сечении круглой трубы, по данным опытов и по формулам, полученным различными авторами:

1 — Л. Прандтлем; *2* — Т. Карманом; *3* — А. Д. Альтшулем; *4* — П. К. Конаковым; *5* — А. А. Саткевичем; ○ — значения l/r, полученные экспериментально Никурадзе ($Re = 3{,}2 \cdot 10^6$)

удовлетворительное совпадение с опытными данными дает формула Альтшуля (кривая *3* на рис. 6.19)

$$l = \varkappa_1 \, [2y/r_0 - (y/r_0)^2],$$

с помощью которой можно получить уравнение для профиля скоростей, также хорошо согласующееся с опытами. Однако приняв и более грубое приближение для $l\,(y)$, но дающее более удобную формулу для закона распределения скоростей, можно получить согласно с опытом, практически вполне удовлетворительное. В частности, оказывается приемлемой формула Саткевича

$$l = \varkappa y \sqrt{1 - y/r_0}, \tag{6.36}$$

хотя, как можно видеть из рис. 6.19, она дает значительное расхождение с опытными данными Никурадзе, особенно вблизи оси трубы. Причиной приемлемости этой формулы является то, что вблизи оси трубы градиенты скорости малы, а значит, согласно выражению (5.30) малы и турбулентные напряжения. Поэтому ошибка в значениях длины l пути перемешивания для этой области не влияет сколько-нибудь существенно на получаемый расчетным путем профиль скоростей.

Если принять для l формулу Саткевича, то из зависимости (6.35′) получаем уравнение

$$du/dy = u_*/\varkappa y, \tag{6.37}$$

которое в дифференциальной форме определяет закон распределения скоростей. Интегрируя его, находим

$$u = (u_*/\varkappa) \ln y + C, \tag{6.38}$$

т. е. логарифмический закон распределения скоростей, имеющий место и для потока вблизи плоской стенки (см. п. 5.5). Обратим внимание на недостатки этого закона применительно к течению в трубе. При $y \to 0$ $u \to -\infty$, что физически нереально. Следовательно, логарифмическая формула не может описывать распределение скоростей турбулентного потока в непосредственной близости от стенки. Этого можно было ожидать, так как вблизи стенки существует вязкий подслой, течение в котором характеризуется значительным влиянием сил вязкости, и, следовательно, пренебрежение последним, лежащее в основе предыдущего вывода, недопустимо.

Кроме того, согласно формуле (6.38) на оси трубы

$$du/dy\,|_{y=r_0} = u_*/(\varkappa r_0) \neq 0.$$

Между тем естественным условием на оси, подтверждаемым опытными данными, является

$$du/dy\,|_{y=r_0} = 0.$$

Несмотря на эти недостатки, результаты расчета по формуле (6.38) в основной части турбулентного ядра потока хорошо согласуются с опытными данными многих исследователей.

Для удобного сопоставления теории и опыта приведем выражение (6.38) к безразмерному виду. Вместо размерного расстояния y от стенки введем безразмерную переменную

$$x = u_* y/\nu,$$

структура которой обосновывается теорией размерности. Тогда согласно формуле (6.38)

$$u = \frac{u_*}{\varkappa} \ln\left(x \frac{\nu}{u_*}\right) + C \quad \text{или} \quad \frac{u}{u_*} = A \lg \frac{u_* y}{\nu} + B, \qquad (6.39)$$

где $A = \dfrac{2{,}3}{\varkappa}$; $B = \dfrac{2{,}3}{\varkappa} \lg \dfrac{\nu}{u_*} + \dfrac{C}{u_*}$.

Коэффициент A в этой формуле должен быть, очевидно, постоянным; это следует из основной гипотезы Л. Прандтля о длине пути перемешивания. Параметр B определяется условием на границе турбулентного ядра течения с вязким подслоем и, следовательно, должен зависеть от условий течения вблизи стенки. В частности, на него может влиять шероховатость, но для всех гладких стенок он должен быть одинаковым. Эти гипотетические соображения должны быть проверены опытом. В общем виде формулу (6.39) можно переписать в виде

$$u/u_* = f\,(u_* y/\nu,\ \alpha,\ \beta\ \ldots), \qquad (6.40)$$

где α, β ... — параметры, характеризующие условия на стенке (например форму и высоту выступов неровностей).

Для гладких труб является естественным попытаться найти единую зависимость u/u_* от $u_* y/\nu$. На рис. 6.20 представлены результаты многочисленных экспериментов, проведенных при различных Re, обработанные в виде зависимости

$$u/u_* = f\,(u_* y/\nu). \qquad (6.40')$$

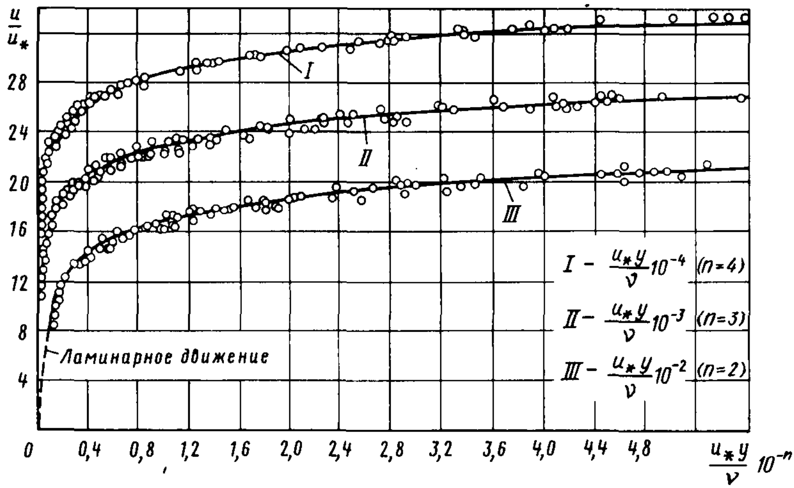


Рис. 6.20. Универсальная зависимость распределения скоростей при турбулентном течении в гладких трубах

Три кривые на рисунке соответствуют разным участкам эпюры скорости, для каждого из которых применен свой масштаб, показанный на чертеже. Можно видеть, что зависимость (6.40) действительно является универсальной для гладких труб.

Еще нагляднее универсальный вид этой зависимости представлен на рис. 6.21, где по оси абсцисс отложен $\lg (u_* y/\nu)$. В этих

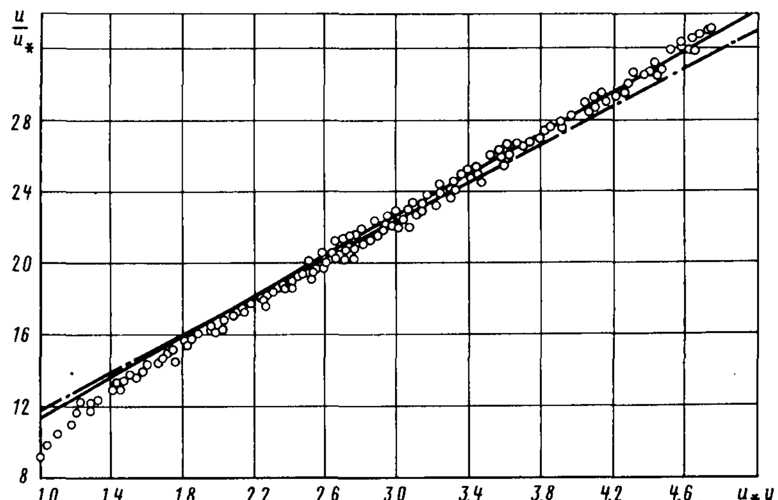


Рис. 6.21. Логарифмический закон распределения скоростей в гладких трубах ($Re = 4 \cdot 10^3 \ldots 32{,}4 \cdot 10^5$)

координатах уравнение (6.39) изображается прямой, по которой нетрудно определить параметры A и B. Согласно рекомендациям Никурадзе $A = 5{,}75$; $B = 5{,}5$. Следовательно, выражение (6.39) имеет вид

$$u/u_* = 5{,}75 \lg (u_* y/\nu) + 5{,}5. \quad (6.41)$$

Прямая, соответствующая этому уравнению, на рис. 6.21 нанесена сплошной линией. Можно видеть, что она неплохо аппроксимирует опытные точки всюду, за исключением зоны, близкой к стенке (зона малых x). Это расхождение вполне объяснимо, так как в рассматриваемой теории не учитывается увеличение влияния вязкостных напряжений по мере приближения к стенке.

Если толщину вязкого подслоя обозначить через $\delta_л$, то формула (6.41) будет применима при

$$x \geqslant u_* \delta_л/\nu.$$

Для определения $\delta_л$ учтем, что в вязком подслое

$$\tau_0 = \mu du/dy = \mu u_л/\delta_л,$$

где $u_л$ — скорость на границе вязкого подслоя.

Иначе

$$u_*^2 = \nu u_л/\delta_л \quad \text{или} \quad u_л/u_* = u_* \delta_л/\nu. \quad (6.42)$$

Из выражения (6.41) следует:

$$u_л/u_* = 5{,}75 \lg (u_* \delta_л/\nu) + 5{,}5. \quad (6.43)$$

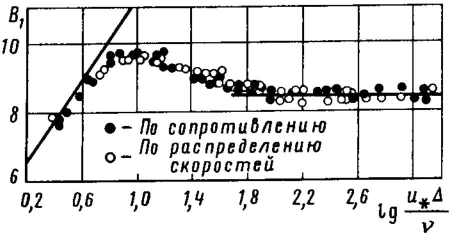
Решая совместно уравнения (6.42) и (6.43), находим $x_л = u_* \delta_л/\nu = 11{,}6$. Следует, однако, иметь в виду, что поскольку уравнение (6.41) не абсолютно точно воспроизводит расположение опытных точек, а вблизи стенки дает заметное расхождение с ними, то значения коэффициентов A и B могут несколько колебаться, а значит, и величина $x_л$ определяется лишь приблизительно.

Итак, получаем толщину вязкого подслоя

$$\delta_л = 11{,}6\nu/u_*. \quad (6.44)$$

До сих пор мы рассматривали только гладкие стенки. Но внутренняя поверхность реальных труб имеет ту или иную шероховатость поверхности. Можно ожидать, что установленные выше закономерности будут справедливы и в тех случаях, когда в шероховатых трубах толщина $\delta_л$ вязкого подслоя больше средней высоты Δ неровностей стенки. Тогда турбулентное ядро потока не будет испытывать непосредственного влияния неровностей выступов шероховатости и последние никак не повлияют на распределение скоростей. Трубы, работающие в таком режиме, называют гидравлически гладкими. При малых толщинах вязкого подслоя следует ожидать существенного влияния шероховатости

Рис. 6.22. Зависимость B_1 от $u_*\Delta/\nu$, по данным Никурадзе



на закон распределения скоростей. В частности, величина B в формуле (6.39), поскольку она должна определяться граничными условиями, уже не будет постоянной, а будет зависеть от шероховатости трубы.

Для проверки этих предположений и установления формы профиля скоростей в шероховатых трубах в формуле (6.39) умножим числитель и знаменатель величины $u_* y/\nu$ на Δ. Тогда

$$\frac{u}{u_*} = A\lg(y/\Delta) + A\lg(u_*\Delta/\nu) + B = A\lg\frac{y}{\Delta} + B_1. \quad (6.45)$$

На рис. 6.22 показаны значения $B_1 = A\lg(u_*\Delta/\nu) + B$ как функции параметра $u_*\Delta/\nu$, вычисленные по данным опытов Никурадзе двумя разными способами (напомним, что опыты Никурадзе производились с трубами, стенки которых оклеивались калиброванными песчинками и таким образом создавалась искусственная равнозернистая шероховатость). Можно видеть, что при $\lg(u_*\Delta/\nu) \leqslant 0{,}6$, т. е. при $u_*\Delta/\nu \leqslant 4$, функция $B_1(u_*\Delta/\nu)$ изображается наклонной прямой, а значит, $A = \text{const}$ ($\sim 5{,}75$); $B = \text{const}$ ($\sim 5{,}5$). Легко убедиться, обращаясь к формуле (6.45), что в этом случае $u/u_* = f(u_* y/\nu)$, т. е. профиль скорости не зависит от шероховатости. Это и есть режим гладкостенного или гидравлически гладкого течения. В диапазоне $0{,}6 \leqslant \lg(u_*\Delta/\nu) \leqslant 1{,}7$ имеет место промежуточный режим, при котором B и B_1 зависят от $u_*\Delta/\nu$, а профиль скорости — от шероховатости. При этом толщина вязкого подслоя оказывается лишь незначительно большей или даже меньшей, чем средняя высота выступов шероховатости Δ, и поэтому обнаруживается их влияние на турбулентное ядро. На графике Никурадзе (см. рис. 6.12) этому режиму соответствует доквадратичная зона сопротивления.

При $\lg(u_*\Delta/\nu) > 1{,}7$ величина B_1 не зависит от $u_*\Delta/\nu$ и согласно графику $B_1 = 8{,}5$. В этом случае профиль скорости не зависит от вязкости и в координатах u/u_* и $\lg y/\Delta$ изображается прямой (рис. 6.23). При таком режиме толщина вязкого подслоя становится настолько малой, что он практически не влияет на характеристики течения. Этот режим соответствует квадратичной зоне сопротивления на графике Никурадзе (см. рис. 6.12).

Можно заметить, что если $B_1 = \text{const}$, то при изменении шероховатости изменяется первое слагаемое в правой части формулы (6.45), и, следовательно, при данном режиме профили скоростей в трубах с одинаковыми значениями u_*, но разными шероховатостями, могут быть получены один из другого путем сдвига вдоль оси на величину, одинаковую для всех значений y.

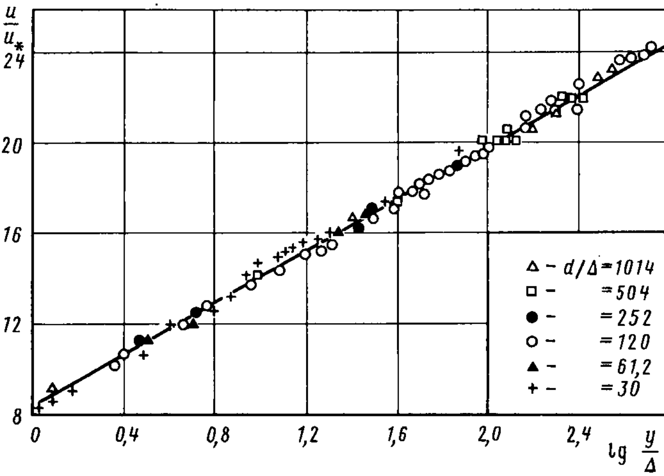


Рис. 6.23. Логарифмический закон распределения скоростей в шероховатых трубах при квадратичном законе сопротивления

Учитывая зависимость B_1 от $u_* \Delta/\nu$, можно утверждать, что в наиболее общем случае

$$u/u_* = A \lg (y/\Delta) + f (u_* \Delta/\nu), \tag{6.46}$$

что выражает универсальный закон распределения скоростей при турбулентном течении в шероховатых трубах.

Наряду с полуэмпирическим описанием распределения скоростей в трубах в практических расчетах и некоторых теоретических построениях используют более простые эмпирические формулы, наиболее распространенной из которых является степенная

$$u/u_m = (y/r_0)^n, \tag{6.47}$$

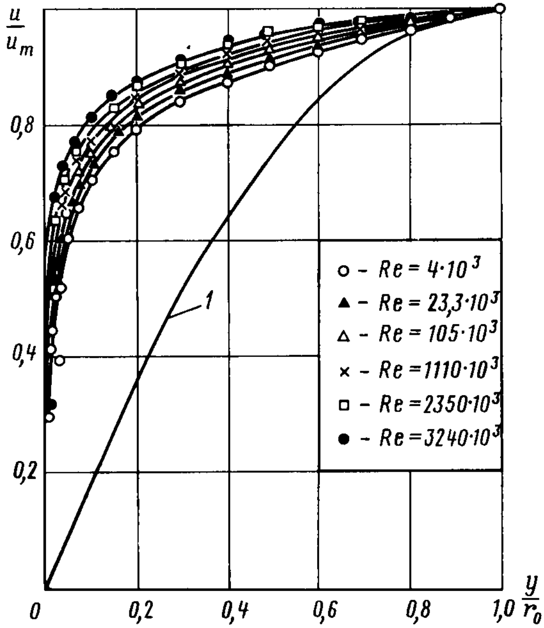
где u_m— значение скорости на оси трубы.

Показатель степени n в этой формуле не постоянен и убывает с возрастанием числа Рейнольдса. Так, при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^3$ он составляет 1/6, а при $\mathrm{Re} = 32{,}4 \cdot 10^5$ — 1/10. Среднее значение n, соответствующее гладкостенному режиму течения, равно 1/7. Для этого случая получил широкое применение «закон корня седьмой степени»:

$$u/u_m = (y/r_0)^{1/7}. \tag{6.47'}$$

Недостатком степенной формулы (6.47), как и всякой эмпирической зависимости, является ограниченный диапазон изменения параметров (в данном случае числа Рейнольдса), в котором она применима. Кроме того, она дает неверные значения градиентов скоростей на оси трубы и у стенки. Однако простота этой формулы и удовлетворительное соответствие опытным данным в большей

Рис. 6.24. Профили скоростей при ламинарном (*1*) и турбулентном течениях в трубах



части сечения трубы делает ее удобной для технических расчетов.

На рис. 6.24 приведены эмпирические кривые распределения скоростей турбулентного потока при разных числах Re, построенные по данным опытов Никурадзе, и для сравнения показана кривая, рассчитанная по формуле (6.29), соответствующей ламинарному режиму. Можно видеть, что профили скоростей для турбулентного потока более равномерные, чем для ламинарного. Это объясняется выравнивающим действием турбулентного перемешивания.

6.8. СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

Подобно тому, как для ламинарного режима, используя параболический закон распределения скоростей, можно установить закон сопротивления (формулу Пуазейля), так и для турбулентного течения, используя логарифмическую формулу, можно получить зависимости для гидравлического коэффициента трения. Сначала рассмотрим гидравлически гладкие трубы.

Из формулы (6.41), полагая $y = r_0$, находим выражение для максимальной скорости

$$u_m/u_* = 5{,}75 \lg (u_* r_0/\nu) + 5{,}5. \qquad (6.48)$$

Вычитая из этого равенства уравнение (6.41), получаем

$$(u_m - u)/u_* = -5{,}75y/r_0. \qquad (6.49)$$

Разность $(u_m - u)/u_*$, называемая недостатком или дефектом безразмерной скорости, является, таким образом, функцией только безразмерного расстояния от стенки y/r_0 и не зависит от вязкости.

Из выражения (6.49) можно вывести зависимость между средней v и максимальной u_m скоростями. При этом учтем, что

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} 2\pi r u\, dr.$$

Разрешая уравнение (6.49) относительно местной скорости u и внося ее выражение в последнее равенство, получаем

$$v = u_m + \frac{2u_*}{r_0^2}\int_0^{r_0} 2{,}5 \ln \frac{y}{r_0} r\, dr,$$

где десятичный логарифм заменен натуральным.

После вычисления интеграла находим

$$v = u_m - 3{,}75u_*.$$

В результате обработки экспериментальных данных Никурадзе было получено, что коэффициент 3,75 надо заменить на 4,03. При этом

$$(u_m - v)/u_* = 4{,}03. \qquad (6.50)$$

Таким образом, при изменении числа Рейнольдса разность максимальной и средней скоростей изменяется пропорционально динамической скорости u_*. Это означает, что в турбулентном потоке в отличие от ламинарного отношение средней скорости к максимальной не является постоянным выражением. Если в (6.50) заменим u_m по формуле (6.48), то получим

$$v/u_* = 5{,}75 \lg (u_* r_0/\nu) + 1{,}47. \qquad (6.51)$$

Чтобы перейти к коэффициенту сопротивления, учтем формулу (6.24) $\tau_0 = 0{,}5\rho g r_0 J_г$, где гидравлический уклон $J_г = (\lambda v^2)/(2gd)$. Отсюда следует

$$\tau_0/\rho = u_*^2 = (\lambda/8)\, v^2.$$

С помощью этого соотношения в формуле (6.51) можно исключить динамическую скорость u_*, введя вместо нее величины λ и v. После простых преобразований получим

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}03 \lg (\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}) - 1{,}01, \qquad (6.52)$$

где $\mathrm{Re} = vd/\nu$.

Таким образом, из логарифмического закона распределения скоростей при турбулентном гладкостенном течении в трубах

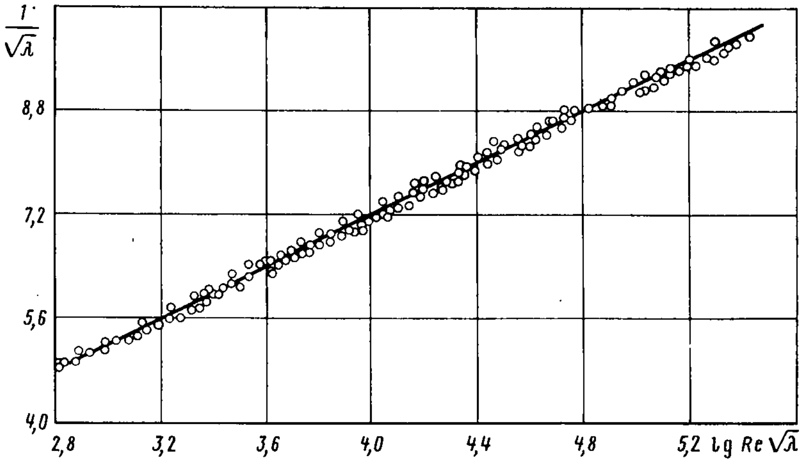


Рис. 6.25. Зависимость гидравлического коэффициента трения λ от числа Re для гладких труб [точки — опытные данные; прямая линия построена по формуле (6.53)]

получается логарифмическая зависимость для гидравлического коэффициента трения λ, согласно которой при данном режиме коэффициент λ однозначно определяется числом Re, что подтверждается многочисленными экспериментами. Это же следует и из графика Никурадзе (см. рис. 6.12). Кроме того, на рис. 6.25 приведены экспериментальные данные разных авторов; по оси абсцисс отложены значения $\lg(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})$, а по оси ординат $1/\sqrt{\lambda}$. Связь между этими величинами линейная и полностью подтверждает структуру формулы (6.52). Однако, согласно рекомендациям Никурадзе для наилучшего совпадения с опытом в ней следует несколько изменить коэффициенты, записав

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}0\lg(\mathrm{Re}/\sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \qquad (6.53)$$

В литературе ее называют формулой Никурадзе для гладких труб. Важным преимуществом этой формулы является ее теоретическая обоснованность, а практическим недостатком — неявное выражение λ в функции Re. В технических расчетах чаще используют другие полуэмпирические или эмпирические зависимости (табл. 3).

Рассмотрим режим квадратичного сопротивления в шероховатых трубах. Для вывода соответствующей формулы выполним преобразования, аналогичные предыдущим.

Полагая $y = r_0$, из формулы (6.45) получаем выражение для максимальной скорости

$$u_m/u_* = A\lg(r_0/\Delta) + B_1, \qquad (6.54)$$

3. Формулы для определения коэффициента λ

Зона сопротивления (см. рис. 6.12 и 6.14)	Режим течения	Границы зоны	Расчетная формула
1	Ламинарный	$\mathrm{Re} < 2300$	$\lambda = 64/\mathrm{Re}$
2	Турбулентный, гладкостенное течение	$4000 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \leqslant 20\frac{d}{\Delta}$	$\lambda = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ $(\mathrm{Re} < 10^5)$ (Блязиус) $\lambda = (1{,}8 \lg \mathrm{Re} - 1{,}5)^{-2}$ (Конаков)
3	Турбулентный, зона доквадратичного сопротивления	$20\frac{d}{\Delta} < \mathrm{Re} < < 500\frac{d}{\Delta}$	$\lambda = f\left(\mathrm{Re}, \frac{d}{\Delta}\right)$
4	Турбулентный, зона квадратичного сопротивления	$\mathrm{Re} > 500\frac{d}{\Delta}$	$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}$ (Шифринсон) $\lambda = \left(2 \lg \frac{r_0}{\Delta} + 1{,}74\right)^{-2}$ (Никурадзе)

Примечание. Для всех турбулентных режимов справедлива формула Альтшуля

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0{,}25}.$$

а вычитая это уравнение из выражения (6.45), находим дефект скорости

$$(u_m - u)/u_* = -A \lg (y/r_0),$$

где $A = 5{,}75$.

Вычисляем среднюю скорость

$$v = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} u \cdot 2\pi r\, dr = u_m - 3{,}75u_*$$

и в формуле (6.54) исключаем максимальную скорость u_m:

$$v/u_* = 5{,}75 \lg (r_0/\Delta) + B_1 - 3{,}75.$$

Так как $u^* = v\sqrt{\lambda/8}$ и для зоны квадратичного сопротивления $B_1 = 8{,}5$, получаем формулу

$$1/\sqrt{\lambda} = 2\lg(r_0/\Delta) + 1{,}74, \qquad (6.55)$$

в которой значения постоянных несколько исправлены для более точного совпадения результатов расчета с данными опытов.

Таким образом, полуэмпирическая теория позволяет установить структуру расчетных формул для гидравлического коэффициента трения λ в зоне гладкостенного течения [формула (6.53)] и в зоне квадратичного сопротивления [формула (6.55)]. При корректировке постоянных получаются зависимости, хорошо аппроксимирующие опытные данные.

Наряду с приведенными формулами для определения коэффициента λ разными исследователями получены иные полуэмпирические или эмпирические формулы, достаточно простые и точные. Так, в частности, А. Д. Альтшуль, рассматривая турбулентный поток в трубе как единое целое, т. е. не выделяя в нем вязкий подслой, и учитывая не только турбулентные, но и вязкостные напряжения, получил зависимости для распределения скоростей и закона сопротивления, справедливые для всех трех зон турбулентного режима. Приведенные выше формулы Прандтля — Никурадзе получаются из формул Альтшуля как частные случаи. Формула Альтшуля для коэффициента λ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2{,}04\lg\left(\frac{2{,}82}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{2{,}5d}\right).$$

Преимуществом ее является универсальность, однако для практического использования она не вполне удобна, так как λ выражено в неявном виде. Используя некоторые допущения, А. Д. Альтшуль получил приближенную формулу, дающую достаточно точные результаты во всех трех турбулентных зонах сопротивления:

$$\lambda = 0{,}11\ (\Delta/d + 68/\mathrm{Re})^{0{,}25}. \qquad (6.56)$$

Если трубы достаточно гладкие и $\Delta/d \ll 68/\mathrm{Re}$, то эта формула практически совпадает с эмпирической формулой Блязиуса для гладкостенного режима

$$\lambda = 0{,}316/\sqrt[4]{\mathrm{Re}}, \qquad (6.57)$$

а если трубы шероховатые и число Re достаточно велико, так что $\Delta/d \gg 68/\mathrm{Re}$, то — с формулой Шифринсона для квадратичной зоны

$$\lambda = 0{,}11\ (\Delta/d)^{0{,}25}. \qquad (6.58)$$

Понятия средней высоты неровностей Δ недостаточно для полного учета влияния шероховатой стенки на поток. Действительно, на распределение скоростей и сопротивление влияет не только средняя высота выступов, но и их форма, а также расположение на стенке. Это доказано опытами, проведенными рядом авторов. Так, попытка Г. Шлихтинга повторить опыты Никурадзе с равномерной зернистой шероховатостью, образованной калиброванным песком, дала результаты, расходящиеся с данными Никурадзе, что объясняется различием формы и расположения песчинок, использованных этими авторами. В практике пользуются поэтому эквивалентной шероховатостью Δ, под которой понимают такую высоту песчинок в опытах Никурадзе, которая создает сопротивление, равное действительному сопротивлению данного трубопровода. Экспериментальное значение Δ можно найти из формулы (6.55) Никурадзе, если подставить в нее значение λ, определенное из опытов, выполненных с конкретным трубопроводом. Следует иметь в виду, что отношение средней высоты выступов к эквивалентной шероховатости Δ колеблется от 0,1 до 10.

6.9. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

При течении вязкой жидкости через местные сопротивления, т. е. через места резкого изменения формы пограничных поверхностей труб и каналов, как, например, расширения, сужения, повороты, изломы и т. п., изменяется поле скоростей потока и чаще всего образуются зоны отрыва потока, заполненные крупными и мелкими вихрями (рис. 6.26—6.28). Крупные вихри интенсифицируют процесс диссипации энергии, благодаря чему потери в местных сопротивлениях могут намного превышать потери по длине на участке той же протяженности, что и местное сопротивление. Структура потока, размеры и интенсивность вихрей существенно зависят от режима течения, т. е. от числа Рейнольдса.

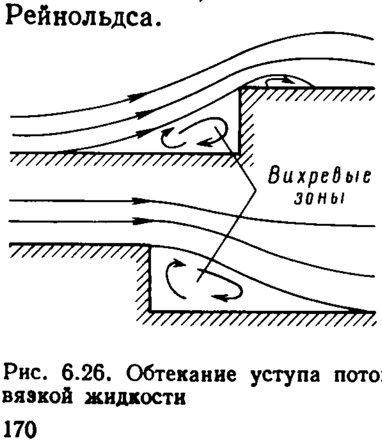


Рис. 6.26. Обтекание уступа потоком вязкой жидкости

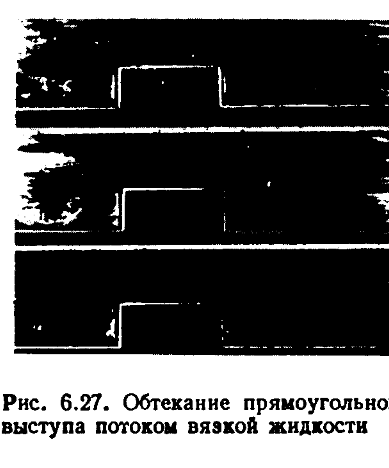


Рис. 6.27. Обтекание прямоугольного выступа потоком вязкой жидкости

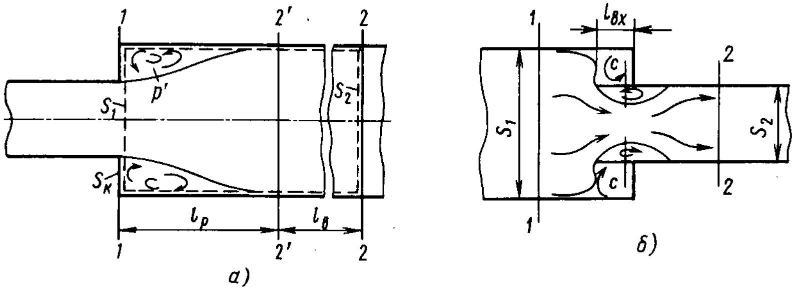


Рис. 6.28. Расчетная схема потока на участке.
а — резкого расширения трубы; *б* — резкого сужения трубы

Потери энергии (напора) в местных сопротивлениях определяются формулой (6.16), в которой коэффициент $\zeta_м$, выражаемый общей зависимостью (6.17), необходимо определять для каждого вида сопротивления. Теоретическое решение этой задачи сводится к нахождению законов распределения давления, т. е. числа $\mathrm{Eu}_к$ в формуле (6.16), и касательного напряжения (т. е. коэффициента трения C_{f1}) по боковой поверхности $S_б$ (см. рис. 6.8). Получить эти законы строго теоретически не удается даже для простейших конфигураций поверхности. Поэтому коэффициенты $\zeta_м$, как правило, определяют экспериментально. Но для нескольких простых случаев, используя опытные данные о распределении давления по поверхности $S_б$ и пренебрегая касательными напряжениями, удается получить расчетные формулы, вытекающие из уравнения Бернулли и закона количества движения. Имея общую зависимость (6.17), сделать это несложно. Рассмотрим два случая.

1. Внезапное осесимметричное расширение трубы (см. рис. 6.28, *а*).

Наблюдения показывают, что при выходе струи из узкой части трубы образуется отрыв потока от стенок и пространство между струей и стенками заполняется вихрями. На некотором расстоянии $l_р$ струя полностью расширяется, но может иметь в сечении *2′-2′* резко неравномерную эпюру скорости, что обусловлено нарушением осесимметричности (искривлением) потока на участке $l_р$. Эпюра скорости выравнивается на участке $l_в$, в конце которого (сечение *2-2*) устанавливается распределение скоростей, характерное для стабилизированного турбулентного потока (например, логарифмическое).

Поскольку изменение эпюры скорости сопровождается дополнительными потерями, в расчетный участок местного сопротивления l_0 включают участки $l_в$, полагая $l_0 = l_р + l_в$. Тогда для сечений *1-1* и *2-2* можно принять $\alpha_0 = 1$, $\alpha = 1$ и применить формулу (6.17). Поверхность $S_к$ в данном случае будет представлять собой плоское кольцо площадью $S_к = S_2 - S_1$. Давление на этой поверхности мало отличается от давления в сечении *1-1*, а следовательно, в формуле (6.17) можно положить $\Delta p = 0$, т. е. $\mathrm{Eu}_{\text{к}} = 0$. Пренебрегая, кроме того, касательными напряжениями, т. е. полагая $C_{f1} = 0$, из выражения (6.17) получаем

$$\zeta_{\text{с}} \equiv \zeta_{\text{вн. р}} = (1 - S_1/S_2)^2. \tag{6.59}$$

Следовательно, для внезапного расширения потока формула (6.16) принимает вид

$$p_{\text{вн. р}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{\rho v_1^2}{2} \text{ или } h_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \tag{6.60}$$

С учетом уравнения неразрывности $v_1 S_1 = v_2 S_2$ последнее выражение представим формулой

$$h_{\text{вн. р}} = (v_1 - v_2)^2/(2g), \tag{6.61}$$

известной в литературе, как формула Борда *.

В частном случае, когда $S_2 \gg S_1$, т. е. имеет место сопряжение трубы с большим резервуаром,

$$\zeta_{\text{вн. р}} \equiv \zeta_{\text{вых}} = 1 \text{ или } h \equiv h_{\text{вых}} = v_1^2/(2g). \tag{6.62}$$

2. Внезапное осесимметричное сужение трубы (рис. 6.28, *б*).

В данном случае применительно к обозначениям, показанным на рис. 6.9 и 6.10, $S_{\text{к}} = S_1 - S_2$. Согласно данным опытов [2, 10] во всей вихревой зоне, примыкающей к поверхности $S_{\text{к}}$ кольца, можно принять $p' = p_1 + \rho v_1^2/2$. Это равенство можно получить из уравнения Бернулли, если пренебречь потерями между сечением *1-1* и вихревой зоной, а также считать скорости в этой зоне малыми. Тогда $\Delta p = 0{,}5\rho v_1^2$ или $\mathrm{Eu}_{\text{к}} = 0{,}5$.

Учитывая, что на поверхности $S_{\text{к}}$ $\cos(n, x) = +1$ и, полагая $C_{f1} = 0$ (т. е. пренебрегая касательными напряжениями), из формулы (6.17) находим

$$\zeta_{\text{с}} \equiv \zeta_{\text{суж}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 - \frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right). \tag{6.63}$$

Тогда формула (6.16) для потерь на входе в трубу из более широкой примет вид

$$p_{\text{вх}} = \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)\frac{\rho v_1^2}{2}. \tag{6.64}$$

Используя уравнение неразрывности $v_1 S_1 = v_2 S_2$, потери можно отнести к скорости v_2, в результате чего получить формулу Идельчика:

$$p_{\text{вх}} = (1 - S_2/S_1)\,\rho v_2^2/2, \tag{6.64$'$}$$

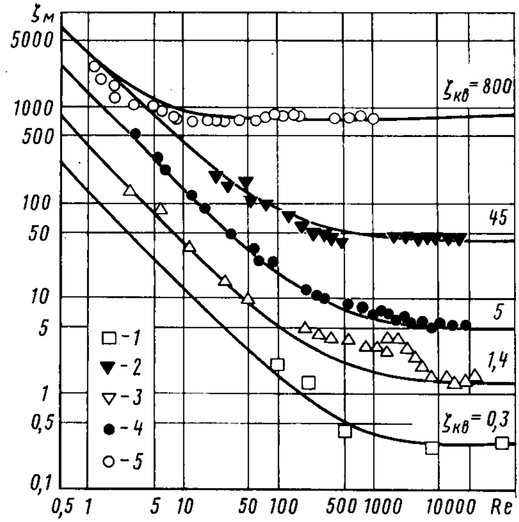
где $1 - S_2/S_1 = \zeta_{\text{суж 2}}$.

---

* Жан Шарль Борда (1733—1799) — французский физик, геодезист. Автор ряда исследований по гидродинамике, обобщенных в работе «Опыт по сопротивлению жидкостей». В 1766 г. вывел формулу для потерь при внезапном расширении, названную его именем.

Рис. 6.29. Зависимость коэффициентов гидравлических сопротивлений от числа Рейнольдса:

1 — для тройника; *2* — для шарового клапана; *3* — для угольника (90°); *4* — для разъемного клапана; *5* — для диафрагмы



Следует иметь в виду, что принятое при выводе допущение $Eu_к = 0{,}5$ оправдывается только при достаточной длине участка узкой трубы $l_{вх}$ (см. рис. 6.28, *б*) и при острой входной кромке. Более подробно эти вопросы освещены в работе [9].

Изложенное иллюстрирует общность формул (6.16), (6.17) и применимость их для произвольных местных сопротивлений на прямых участках труб. Однако, в виду сложности законов распределения давлений и касательных напряжений (т. е. величин $Eu_к$ и C_f) по внутренней поверхности $S_б$, в большинстве случаев приходится использовать результаты экспериментов. При этом удобной и теоретически обоснованной является зависимость (6.20), которая была использована А. Д. Альтшулем [1] для обобщения результатов многочисленных экспериментов.

На рис. 6.29 приведены данные опытов, полученные разными авторами и обработанные А. Д. Альтшулем, для коэффициентов $\zeta_м$ нескольких видов местных сопротивлений. Вид кривых $\zeta_м = f(Re)$ вполне удовлетворительно подтверждает структуру формулы (6.20), согласно которой при больших числах Re имеет место зона квадратичного сопротивления, для которой коэффициент $\zeta_м$ зависит только от конфигурации граничных поверхностей. Именно при этих условиях в рассмотренных случаях удается найти теоретические выражения для коэффициента сопротивления.

Следует, однако, иметь в виду, что при изменении числа Re в широком диапазоне может происходить перестройка структуры потока при неизменных формах пограничных поверхностей (например, изменяются размеры вихревых зон, появляются местные зоны кавитации и т. п.). При этом могут измениться значения

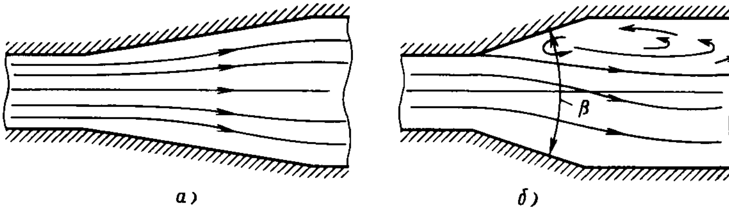


Рис. 6.30. Два вида течения в диффузоре

параметров $\zeta_{кв}$ и A в формуле (6.20), в силу чего вид кривых $\zeta_\mu = f(\mathrm{Re})$ окажется более сложным, чем показанный на рис. 6.29.

При сопоставлении теоретических зависимостей, например, (6.60) или (6.64) с экспериментальными следует принять во внимание, что в них не учитываются потери трения. Если же расчетный участок l_0, на котором происходит стабилизация потока, достаточно велик, то эти потери могут оказаться сопоставимыми с потерями на деформацию потока. Поэтому при постановке опыта следует из измеренных потерь вычесть потери по длине на эквивалентном участке. Это разумеется лишь приближенный способ учета потерь на трение, но он может дать улучшение совпадения теоретических и экспериментальных данных.

Из местных сопротивлений других видов рассмотрим лишь диффузоры, имеющие важное значение в машиностроительных приложениях гидромеханики.

Потери, обусловленные внезапным расширением трубы, могут быть значительными. Для их снижения переход от узкого сечения к широкому часто делают плавным, постепенным. Такие переходы называют диффузорами (рис. 6.30, *а*, *б*). Поскольку в диффузоре происходит постепенное уменьшение скорости, то, как следует из уравнения Бернулли, давление возрастает. Течения в диффузорах хотя и имеют сложный пространственный характер, но в ряде случаев их можно рассчитать теоретически (см. гл. 9). Для практических целей пользуются формулой

$$h_{диф} = \varphi_{диф} h_{вн.\,р} = \varphi_{диф} (v_1 - v_2)^2/(2g), \qquad (6.65)$$

т. е. потери $h_{диф}$ в диффузоре выражают в долях от потерь $h_{вн.\,р}$ при внезапном расширении. Коэффициент $\varphi_{диф}$, называемый коэффициентом полноты удара, зависит от нескольких параметров, основным из которых является угол раскрытия β (рис. 6.31). При малых углах β ($\beta < 4°$) коэффициент $\varphi_{диф}$ убывает с увеличением β и достигает минимального значения при $\beta = 4 \div 5°$ *. При дальнейшем увеличении β коэффициент $\varphi_{диф}$ возрастает,

* Эти значения являются ориентировочными. При изменении формы поперечного сечения диффузора, степени его расширения, формы образующих и числа Рейнольдса вид кривой $\varphi_{диф} = f(\beta)$ и ее положение на графике могут несколько изменяться.

достигая максимума (около 1,2) при $\beta = 60°$, а затем убывает до единицы. Следовательно, при $\beta = 40 \ldots 180°$ диффузор не только не снижает, но даже увеличивает потери по сравнению с потерями при внезапном расширении. Поэтому применять диффузоры целесообразно при $\beta < 40°$.

Указанный характер изменения коэффициента $\varphi_{диф}$ связан с изменением структуры течения в диффузорах при разных углах раскрытия. При малых углах β течение безотрывное и происходит плавное расширение потока (см. рис. 6.30, *а*); при некотором значении β поток отрывается от одной из стенок и образуется вихревая область (см. рис. 6.30, *б*), которая при дальнейшем увеличении угла β может распространиться на всю длину диффузора. При появлении отрывов и вихревых областей потери заметно возрастают, что проявляется в увеличении коэффициента $\varphi_{диф}$. Для снижения потерь в диффузорах применяют устройства, предотвращающие или затягивающие отрывы [9].

Более подробные сведения о потерях напора в местных сопротивлениях даны в работах [1, 9].

6.10. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Во многих случаях инженерной практики возникает задача об установлении зависимости между давлением (напором) в резервуаре и расходом или скоростью струи, вытекающей через отверстие в стенке резервуара или через короткую трубку специальной формы, называемую насадком. При этом если струя попадает в газовое пространство, то ее называют незатопленной, а если она вытекает в среду той же плотности и вязкости — затопленной. Структура последней рассмотрена в гл. 9, здесь остановимся только на указанной выше задаче, решаемой методами теории одномерных течений.

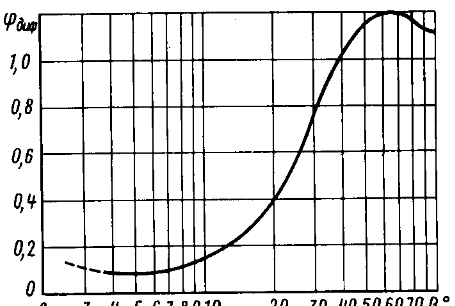


Рис. 6.31. Зависимость коэффициента полноты удара от угла раскрытия диффузора

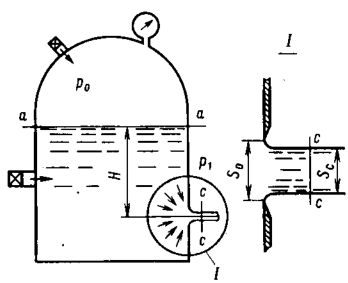


Рис. 6.32. Расчетная схема истечения жидкости через отверстие

Рассмотрим сначала истечение в атмосферу через отверстие с острой кромкой (рис. 6.32). Как и при входе в трубу, наблюдается сжатие струи за отверстием. Причиной этого является инерционность жидких частиц, двигающихся к отверстию из резервуара по радиальным направлениям. Они, стремясь по инерции сохранить направление движения, огибают кромки отверстия и образуют поверхность струи на участке сжатия. За сжатым сечением струя незначительно расширяется, а при достаточно большой скорости истечения может распадаться на отдельные капли. Если отверстие не круглое, а, например, квадратное или треугольное, то наблюдается явление инверсии струи, т. е. изменение формы ее поперечного сечения по длине. Например, струя, вытекающая из квадратного отверстия, приобретает на некотором расстоянии крестообразную форму, что объясняется действием поверхностного натяжения и инерции.

Для вывода формул истечения применим уравнение Бернулли к сечениям *а-а* (свободная поверхность жидкости в резервуаре) и *с-с* (сжатое сечение струи). Последнее выбирают на расстоянии от плоскости отверстия, приблизительно равном его диаметру. При этом будем считать скорость опускания уровня в резервуаре весьма малой, что справедливо при площади свободной поверхности, намного большей площади отверстия; эта скорость равна нулю, если имеет место приток жидкости, компенсирующей истечение. Тогда, при выборе плоскости сравнения, проходящей через центр отверстия, уравнение Бернулли имеет вид

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g},$$

где ζ_0 — коэффициент местного сопротивления, обусловленного входом жидкости в отверстие.

Решая это уравнение относительно скорости в сжатом сечении, находим

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)}.$$

Величину $\varphi_0 = 1/\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}$ называют коэффициентом скорости. Тогда

$$v_c = \varphi_0 \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)}.$$

Если будем рассматривать идеальную жидкость, для которой $\zeta_0 = 0$, и примем $\alpha_c = 1$, $p_0 = p_1$, то получим формулу Торричелли * $v_c = \sqrt{2gH}$.

---

* Эванджелиста Торричелли (1608—1647) — выдающийся итальянский физик и математик, изобретатель ртутного барометра. Установил пропорциональность скорости истечения корню квадратному из напора.

Расход определяется выражением

$$Q = S_c v_c = \varphi_0 S_c \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)}.$$

Вместо площади S_c сжатого сечения удобнее ввести в расчет площадь S_0 отверстия. Обозначим S_c/S_0 через ε — коэффициент сжатия струи. Тогда

$$Q = \varphi_0 \varepsilon S_0 \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)}.$$

Обычно пользуются еще одним коэффициентом: $\mu = \varphi_0 \varepsilon$, который называют коэффициентом расхода. Окончательно

$$Q = \mu S_0 \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)}. \qquad (6.66)$$

Величину $H_д = H + (p_0 - p_1)/(\rho g)$ называют действующим напором.

Так как всякий коэффициент местного сопротивления зависит от числа Рейнольдса, то и коэффициент расхода должен зависеть от этого параметра. Детальные исследования показывают, что на величину μ влияют также числа Фруда и Вебера, т. е. силы тяжести и поверхностного натяжения. Однако существует такой диапазон этих критериев, в котором влияние оказывает только число Рейнольдса. По данным А. Д. Альтшуля [1], это имеет место при

$$\mathrm{Fr} = 2H/d_0 > 10 \text{ и } \mathrm{We} = 2gH\rho d_0/\sigma > 250 \ldots 2500,$$

где d_0 — диаметр отверстия, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

От числа Рейнольдса зависит и коэффициент сжатия, что можно объяснить влиянием этого параметра на условия течения при подходе к отверстию.

На рис. 6.33 приведены зависимости μ (Re), φ (Re) и ε (Re) для круглого отверстия в тонкой стенке, построенные А. Д. Альтшулем [1] по результатам обработки опытов многих авторов. Число Рейнольдса вычислялось по формуле

$$\mathrm{Re} = \sqrt{2gH}\, d_0/\nu.$$

Параметры струи, вытекающей через отверстие, можно в определенных пределах изменять, если присоединять к нему короткие трубки (насадки) (рис. 6.34).

Рассмотрим действие внешнего цилиндрического насадка, пола-

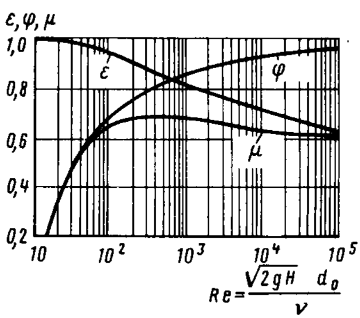


Рис. 6.33. Зависимости коэффициентов истечения от числа Re

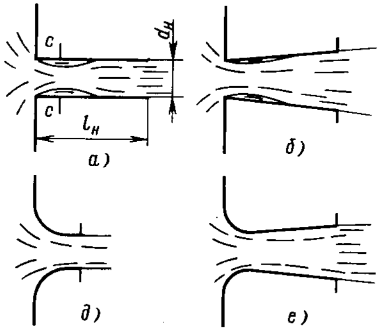


Рис. 6.34. Насадки:

а — внешний цилиндрический; *б* — конический расходящийся; *в* — конический сходящийся; *г* — внутренний цилиндрический; *д* — коноидальный; *е* — расширяющееся сопло

гая вначале для простоты, что $p_1 = p_0$ (рис. 6.34, *а*). При входе в него струя жидкости сжимается так же, как при истечении через отверстие, однако поскольку она ограничена боковой поверхностью насадка, то образуется кольцевая вихревая область между поверхностями струи и трубы. За сжатым сечением струя расширяется и на выходе заполняет все сечение насадка (длину насадка выбирают такой, чтобы в его пределах могло произойти полное расширение струи, поэтому на выходе из насадка сжатия нет). Поскольку скорость в сжатом сечении больше, чем в выходном, где давление равно внешнему, то в первом давление меньше, чем во втором. Следовательно, если давление на выходе атмосферное, то в сжатом сечении возникает вакуум.

Если сравнить истечение через отверстие (без насадка) с истечением через насадок, то будет ясно, что на участке потока от сечения *а—а* до сжатого (см. рис. 6.32) движение при наличии насадка происходит под большим напором, чем при отсутствии насадка. Поэтому скорость в сжатом сечении насадка будет больше, чем в сжатом сечении за отверстием при одинаковом напоре H. А поскольку степень сжатия струи внутри насадка и за отверстием практически одинакова, то при одинаковой площади отверстия и насадка расход через последний будет больше, чем через отверстие. Очевидно, этот выигрыш будет тем больше, чем глубже вакуум в сжатом сечении. Правда, при наличии насадка в потоке появляются дополнительные потери, которых нет в струе, вытекающей через отверстие. Это потери на расширение потока внутри насадка и потери на трение по его длине. Однако, как показывают расчеты и эксперимент, при длине насадка $l_н = (3 \ldots 4)\, d_н$ эти потери намного меньше, чем повышение действующего напора. Поэтому данный насадок увеличивает расход. Этот эффект возрастает, если применить конический расходящийся насадок (рис. 6.34, *б*), в котором должен быть обеспечен безотрывный режим течения. Сведения о насадках других форм приведены в работе [1].

Расчетные формулы для насадка получают так же, как для отверстия, и они имеют тот же вид:

$$v = \varphi \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)} .$$

$$Q = \mu S_н \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}\right)} ,$$

где $S_н$ — площадь выходного сечения насадка.

Коэффициент расхода для цилиндрического насадка, как и для отверстия, зависит от числа Рейнольдса, а также от относительной длины $l_н/d_н$.

6.11. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

Применяемые в технике трубопроводы можно условно разделить на две группы:

1) простые, которые представляют собой одну или несколько последовательно соединенных труб, не имеющих боковых ответвлений;

2) сложные, образующиеся в результате разветвлений, параллельных соединений, боковых отводов или замыканий в кольца труб разных длин и диаметров.

Схема простого трубопровода показана на рис. 6.35, *а*. Основными расчетными соотношениями для него являются уравнение Бернулли, уравнение неразрывности и формулы, определяющие потери напора по длине отдельных участков труб и в местных сопротивлениях. Рассмотрим на базе этих уравнений основные типовые задачи гидравлического расчета простого трубопровода. Выбрав плоскость сравнения *0-0* и расчетные сечения *1-1* и *2-2*,

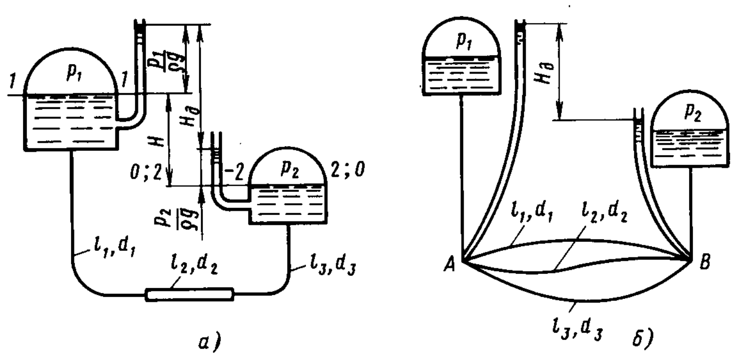


Рис. 6.35. Расчетные схемы трубопроводов:
а — простого; *б* — сложного

составим уравнение Бернулли, полагая скорости на свободных поверхностях в резервуарах равными нулю:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \sum_{i=1}^{m} h_{\text{д}i} + \sum_{j=1}^{n} h_{\text{м}j}, \tag{6.67}$$

где m — число участков труб постоянного диаметра, на каждом из которых потеря по длине составляет $h_{\text{д}i}$; n — число местных сопротивлений, на каждом из которых потеря равна $h_{\text{м}j}$.

Учитывая линейную размерность величины $p/(\rho g)$, введем понятие действующего напора

$$H_{\text{д}} = H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g},$$

геометрический смысл которого ясен из рис. 6.35, *а*.

Выразим потери по длине и в местных сопротивлениях:

$$h_{\text{д}i} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g}; \quad h_{\text{м}j} = \zeta_j \frac{v_j^2}{2g}.$$

Если диаметр d_k одного из участков принять за основной (расчетный), то, используя уравнение неразрывности, можно все потери выразить через скорость v_k на этом участке. Тогда

$$v_i = (S_k/S_i)\, v_k; \quad v_j = (S_k/S_j)\, v_k,$$

где S_i и S_j — площадь сечений i-го и j-го участков трубопровода.

Теперь уравнение (6.67) можно переписать в виде

$$H = \frac{v_k^2}{2g} S_k^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \zeta_i \frac{1}{S_j^2} \right).$$

Решая это уравнение относительно скорости v_k, получаем

$$v_k = \frac{1}{S_k \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{1}{S_j^2}}}, \tag{6.68}$$

а для расхода $Q = S_k v_k$

$$Q = \mu_{\text{т}} S_k \sqrt{2gH_{\text{д}}}. \tag{6.69}$$

Коэффициент

$$\mu_{\text{т}} = \frac{1}{S_k \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{1}{S_j^2}}} \tag{6.70}$$

называется коэффициентом расхода трубопровода.

В частном случае, если трубопровод на всех участках имеет один и тот же диаметр, то $S_i = S_j = S_k$, $\lambda_i = \text{const}$ и выражение (6.70) примет вид

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{d} + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j}}, \tag{6.71}$$

где $L = \sum_{i=1}^{m} l_i$ — полная длина трубопровода.

Формулой (6.69) удобно пользоваться в тех случаях, когда потери напора по длине сопоставимы с потерями в местных сопротивлениях для короткого трубопровода и, следовательно, необходимо учитывать те и другие. Но если участки постоянного диаметра имеют большую длину, то часто местные потери оказываются много меньшими, чем потери по длине (длинный трубопровод). В этих случаях первыми или пренебрегают или учитывают способом эквивалентной длины трубы, согласно которому местное сопротивление с потерей напора $h_{мj}$ заменяют в расчете участком трубы длиной $l_{эj}$, выбираемой так, чтобы потеря по длине на ней равнялась $h_{мj}$. Тогда из условия

$$\zeta_j \frac{v_j^2}{2g} = \lambda_j \frac{l_{эj}}{d_j} \frac{v_i^2}{2g}$$

находят эквивалентную длину

$$l_{эj} = d_j \zeta_j / \lambda_j. \tag{6.72}$$

Введение эквивалентных участков наиболее удобно, если трубопровод имеет постоянный на всей длине диаметр. В этом случае формула (6.68) приобретает вид

$$v = \sqrt{\frac{d}{\lambda \left(L + \sum_j l_{эj}\right)}} \sqrt{2gH_д}.$$

Обозначая $L + \sum_j l_{эj} = L_0$, назовем L_0 расчетной длиной трубопровода. Тогда получим формулы для скорости

$$v = \sqrt{\frac{d}{\lambda L_0}} \sqrt{2gH_д}$$

и для расхода

$$Q = S \sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} \sqrt{\frac{H_д}{L_0}}. \tag{6.73}$$

Величину

$$K = S\sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}} \qquad (6.74)$$

называют модулем расхода или расходной характеристикой. Для квадратичной зоны сопротивления она зависит только от характеристик трубопровода (его диаметра и шероховатости). Для промышленного сортамента труб значения K в квадратичной зоне сопротивления вычислены и табулированы. Их можно найти в справочниках по гидравлическим сопротивлениям.

Используя модуль расхода, представим расчетную формулу расхода в виде

$$Q = K\sqrt{H_д/L_0}. \qquad (6.75)$$

Хотя, в принципе, эта формула применима для всех зон сопротивления, но используется главным образом для турбулентных режимов, так как при ламинарном течении чаще всего удается получить более удобные расчетные зависимости.

Сложные трубопроводы имеют разветвления. Составим основные расчетные зависимости для параллельного включения нескольких труб между точками разветвления (рис. 6.35, *б*). Для каждой из ветвей значение напора в сечениях A и B одинаково. Следовательно, равны и потери напора между этими сечениями:

$$H_д = (Q_i^2/K_i^2)\,L_{0i}, \qquad (6.76)$$

но расходы Q_i различны, поскольку различны диаметры d_i и длины L_i ветвей. Суммарный расход в системе

$$Q = \sum_i Q_i = \sqrt{H_д}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\sqrt{L_{0i}}}. \qquad (6.77)$$

Система (6.76)—(6.77) содержит $(n+1)$ уравнение, из которых можно найти $(n+1)$ неизвестное из числа величин Q_i, d_i, L_{0i}, $H_д$.

6.12. СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ТВЕРДЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ)

Методами теории одномерных течений могут успешно решаться задачи о величине и направлении суммарных сил, с которыми установившиеся напорные потоки или свободные струи воздействуют на ограничивающие их твердые поверхности. Эти задачи являются хорошей иллюстрацией эффективности и методики применения уравнения количества движения.

Рассмотрим сначала напорный поток на участке какой-либо фасонной части трубопровода, например тройника (рис. 6.36).

Поскольку в каждой точке внутренней боковой поверхности фасонной части действуют гидродинамические давления, то элементарные силы давления, суммируясь, образуют результирующую силу, которую необходимо учитывать при проектировании трубопровода. Если попытаться определить распределение давления по указанной поверхности и, суммируя элементарные силы, вычислить результирующую, то это приведет к сложной и трудоемкой задаче, которая в общем случае может быть решена только приближенно. Применение же уравнения количества движения дает весьма простое и достаточно точное решение. Выделим расчетный объем жидкости, проведя контрольную поверхность S по сечениям *1-1*, *2-2*, *3-3* и внутренней поверхности трубопровода между ними, т. е. $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_б$. При составлении уравнения количества движения массы этого объема не будем учитывать касательные напряжения на поверхности трубы. Применяя общую векторную форму этого уравнения, получаем

$$\int\limits_{S_1} \boldsymbol{p}_n\, dS + \int\limits_{S_2} \boldsymbol{p}_n\, dS + \int\limits_{S_3} \boldsymbol{p}_n\, dS + \int\limits_{S_б} \boldsymbol{p}_n\, dS + \boldsymbol{G} =$$

$$= \int\limits_{S_1} \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS + \int\limits_{S_2} \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS + \int\limits_{S_3} \rho u_n \boldsymbol{u}\, dS,$$

где $\boldsymbol{G}$ — вес выделенного отсека.

Учтем, что на поверхности S_1 $u_n = -u$; на поверхностях S_2 и S_3 $u_n = u$, $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$, где p — гидродинамическое давление в точках соответствующих сечений; $\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали. Введем обозначения

$$\boldsymbol{P}_1 = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{p}_n\, dS = -\int\limits_{S_1} p\boldsymbol{n}\, dS; \quad \boldsymbol{P}_2 = -\int\limits_{S_2} p\boldsymbol{n}\, dS;$$

$$\boldsymbol{P}_3 = -\int\limits_{S_3} p\boldsymbol{n}\, dS; \quad \boldsymbol{R} = -\int\limits_{S_б} p\boldsymbol{n}\, dS.$$

Очевидно, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ есть силы давлений в соответствующих сечениях, а $\boldsymbol{R}$ — результирующая сила, действующая со стороны боковой поверхности трубы на рассматриваемый объем жидкости. Направления сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ известны, так как соответствующие им сечения плоские, а силы направлены противоположно внешним нормалям. Ясно также, что сила $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{R}$ является искомой, поскольку она выражает силовое воздействие жидкости на боковую поверхность трубы. Примем, что скорости в живых сечениях S_1, S_2 и S_3 распределены равномерно и равны соответствующим средним скоростям v_i. Тогда уравнение количества движения можно переписать в виде

$$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{G} - \boldsymbol{P} = \rho v_2 \boldsymbol{v}_2 S_2 + \rho v_3 \boldsymbol{v}_3 S_3 - \rho v_1 \boldsymbol{v}_1 S_1$$

или

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + G + \rho v_1 Q_1 - \rho Q_2 v_2 - \rho Q_3 v_3, \qquad (6.78)$$

где Q_1, Q_2 и Q_3 — объемные расходы через сечения S_1, S_2 и S_3.

Уравнение (6.78) служит для определения искомой силы P. Имея заданную конфигурацию фасонной части и выбрав направления координатных осей, спроектируем на них все члены этого уравнения и получим выражения для трех проекций искомой силы. Обычно распределение давлений в живых сечениях для таких задач принимают равномерным, благодаря чему вычислить силы P_1, P_2 ... просто. Если по условиям задачи известно давление только в одном сечении (например, p_1), то в других сечениях его можно найти с помощью уравнения Бернулли. Заметим, что в расчет следует принимать только избыточные или вакуумметрические давления.

Рассмотрим теперь силовое воздействие свободной струи на преграду. При этом ограничимся плоской задачей, так как пространственная задача не имеет простого решения.

Пусть плоская струя жидкости вытекает в газовое пространство из отверстия или сопла площадью S_0 со скоростью v_0 и встречает на своем пути преграду в виде криволинейной цилиндрической стенки (рис. 6.37). Струя делится этой стенкой на две неравные части и сходит с нее со скоростями v_1 и v_2, направления которых предполагают совпадающими с соответствующими касательными к стенке. Чтобы определить эти скорости, выделим вдоль поверхности струи элементарную струйку и запишем уравнение Бернулли для сечений *0-0* и *1-1*, не учитывая силы сопротивления и тяжести:

$$p_0 + \rho v_0^2/2 = p_1 + \rho v_1^2/2.$$

Для свободной струи давление на ее поверхности равно давлению в газовом пространстве, в которое она вытекает. Следовательно, $p_0 = p_1 = p_a$ и из уравнения Бернулли получаем $v_0 = v_1$. Также убеждаемся, что $v_0 = v_2 = v_1$, т. е. скорость не

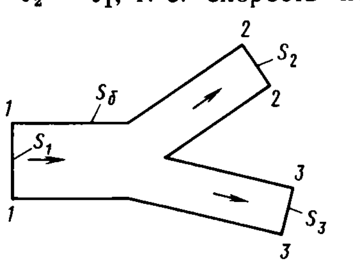


Рис. 6.36. Расчетная схема для определения силового воздействия потока на фасонную часть трубопровода

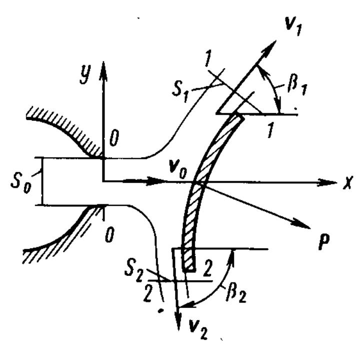


Рис. 6.37. Расчетная схема для определения силового воздействия свободной незатопленной струи на преграду

изменяется при растекании струи по преграде. Предполагаем, что в пределах сечений *0-0*, *1-1*, *2-2* распределение скоростей равномерное. Составим уравнение количества движения для отсека струи, ограниченного контрольной поверхностью, состоящей из сечения *0-0*, свободной поверхности струи, сечений *1-1* и *2-2* и смоченной поверхности стенки, пренебрегая, как и выше, силами трения и тяжести. Учитывая также, что избыточные давления в расчетных сечениях равны нулю, согласно уравнению (6.78) получим выражение для силы воздействия струи на преграду

$$\mathbf{P} = \rho Q_0 \mathbf{v}_0 - \rho Q_1 \mathbf{v}_1 - \rho Q_2 \mathbf{v}_2. \tag{6.79}$$

Выбрав оси координат, как показано на рис. 6.37, спроектируем на них все члены этого уравнения. Тогда получим

$$P_x = \rho Q_0 v_0 - \rho Q_1 v_0 \cos \beta_1 - \rho Q_2 v_0 \cos \beta_2;$$

$$P_y = -\rho Q_1 v_0 \sin \beta_1 - \rho Q_2 v_2 \sin \beta_2,$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 < 0$ — соответственно углы схода струи с преграды.

Если преграда симметрична, то $Q_1 = Q_2 = Q_0/2$ и $\beta_2 = -\beta_1$. Тогда

$$P_x = \rho Q_0 v_0 (1 - \cos \beta); \; P_y = 0. \tag{6.80}$$

Из выражения для P_x следует, что при $\beta = \pi/2$ сила воздействия струи на преграду равна $\rho Q_0 v_0$, но может быть увеличена, если $\beta > \pi/2$, так как тогда $\cos \beta < 0$. Максимального значения сила достигает при $\beta = \pi$ (рис. 6.38):

$$P_{x\,\max} = 2\rho Q_0 v_0. \tag{6.81}$$

Этот результат используют при проектировании ковшовых или активных гидравлических турбин, придавая ковшам рабочего колеса, воспринимающим нагрузку от струи, форму, схематически показанную на рис. 6.38.

Если преграда представляет собой плоскую стенку, наклоненную к направлению оси струи под углом α, то нетрудно получить формулу для полной силы воздействия на преграду. В этом случае заранее известно, что искомая сила направлена по нормали к стенке, так как по предположению силы трения пренебрежимо малы. Тогда, проектируя составляющие выражения (6.79) на направление нормали к плоской стенке (рис. 6.39), получим

$$P = \rho Q_0 v_0 \sin \alpha. \tag{6.82}$$

Проектируя слагаемые уравнения (6.79) на направление скорости $\mathbf{v}_1$, определим расходы в сечениях *1-1* и *2-2*:

$$\rho Q_0 v_0 \cos \alpha - \rho Q_1 v_0 + \rho Q_2 v_0 = 0$$

или

$$Q_0 \cos \alpha = Q_1 - Q_2.$$

Кроме того, очевидно, что

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Решая совместно два последних уравнения, находим закономерность деления расхода

$$Q_1 = Q_0\,(1 + \cos\alpha)/2;\ Q_2 = Q_0\,(1 + \cos\alpha)/2.$$

Следует иметь в виду, что полученные решения опираются на предположение о том, что углы наклона струи за преградой, от которых явно зависит сила, равны углам наклона преграды в точках схода. Но это условие обеспечивается лишь в тех случаях, когда размеры преграды достаточно велики по сравнению с поперечным размером струи в начальном сечении. Если же преграда мала (рис. 7.24 и 7.27), то углы наклона струи не определяются формой преграды и входят в уравнение количества движения в качестве неизвестных. В этом случае методы одномерной теории недостаточны для отыскания всех неизвестных. Для плоской задачи решение можно найти методами теории струй идеальной жидкости, основы которой изложены в гл. 7.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение уравнения момента количества движения для определения силового воздействия потока жидкости на стенки канала.

Пусть жидкость движется в криволинейном канале, который вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью (рис. 6.40). К отсеку жидкости в канале между сечениями S_1 и S_2 применим уравнение (5.75) моментов количества движения

$$\frac{dL}{dt} = \int\limits_S (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u})\,\rho u_n\, dS = \boldsymbol{M},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор относительно начала кординат; $\boldsymbol{u}$— абсолютная скорость жидких частиц; $\boldsymbol{M}$ — суммарный момент внешних сил.

Контрольная поверхность S состоит из сечений S_1, S_2 и боковой поверхности $S_б$.

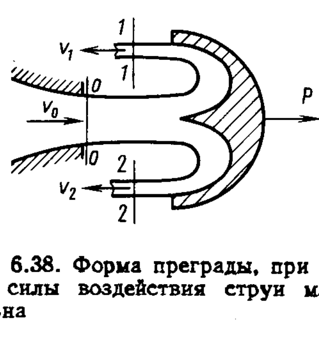


Рис. 6.38. Форма преграды, при которой силы воздействия струи максимальна

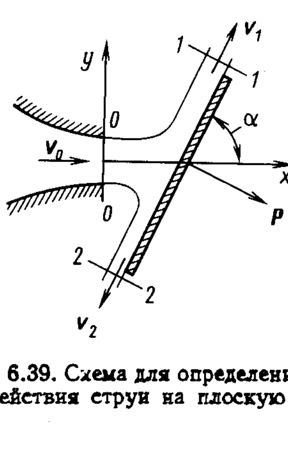
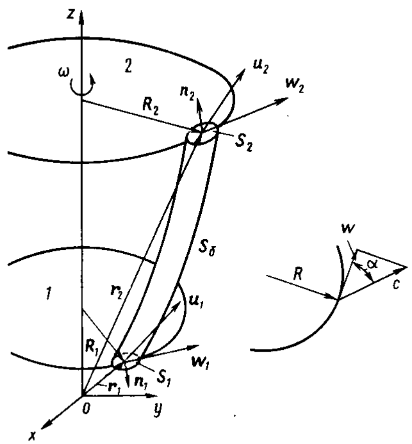


Рис. 6.39. Схема для определения силы воздействия струи на плоскую стенку

Рис. 6.40. Схема к выводу уравнения моментов для потока во вращающемся канале



На боковой поверхности $S_б$, очевидно, в силу непроницаемости стенок канала $u_n = 0$. Поэтому последнее уравнение примет вид

$$M = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}) \rho u_n \, dS + \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}) \rho u_n \, dS.$$

Найдем теперь проекцию этого уравнения на ось вращения Oz. Проекцию момента $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}$ на ось называют, как известно, моментом вектора $\boldsymbol{u}$ относительно оси, причем этот момент не зависит от положения точки на оси, относительно которой берется вектор $\boldsymbol{r}$. Поэтому

$$M_z = \int\limits_{S_1} (R \times \boldsymbol{u})_z \rho u_n \, dS + \int\limits_{S_2} (R \times \boldsymbol{u})_z \rho u_n \, dS,$$

где R — векторы, лежащие в плоскостях, нормальных к оси z.

С другой стороны, момент вектора $\boldsymbol{u}$ относительно оси есть момент его проекции на плоскость, нормальную к оси, относительно точки пересечения этой плоскости с осью. Поэтому предыдущее уравнение можно записать в виде

$$M_z = \int\limits_{S_1} Rc \cos\alpha \rho u_n \, dS + \int\limits_{S_2} Rc \cos\alpha \rho u_n \, dS,$$

где c — проекции абсолютной скорости u на плоскости 1 и 2, нормальные к оси z; α — углы, образуемые направлениями проекций c с касательной к окружности радиусом R (см. рис. 6.40).

Очевидно, произведения $c \cos\alpha = w$ представляют собой окружные скорости. Считая сечения канала S_1 и S_2 достаточно малыми, чтобы в пределах каждого из них можно было считать $c = \text{const}$, и учитывая, что $\int\limits_S u_n dS$ есть объемный расход, причем в сечении S_1 $u_n < 0$, получим уравнение

$$M_z = \rho Q (w_2 R_2 - w_1 R_1). \tag{6.83}$$

Величина M_z есть проекция на ось вращения суммарного момента всех внешних сил, действующих на выделенный отсек жидкости; следовательно, без учета массовых сил величина M_z равна моменту поверхностных сил, действующих со стороны жидкости на стенки канала.

Уравнение (6.83), полученное впервые Л. Эйлером, является основным уравнением лопастных турбомашин.

6.13. ОДНОМЕРНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Для неустановившегося движения несжимаемой жидкости было получено уравнение (5.23), которое связывает мгновенные значения параметров течения в двух точках линии тока. Это уравнение по форме отличается от уравнения Бернулли для установившегося движения наличием в правой части величины

$$h'_i = \frac{1}{g}\int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, ds,$$

называемой инерционным напором и отражающей нестационарный характер течения.

Уравнение (5.23) с равным основанием можно применять для линий тока ламинарного и осредненного турбулентного течений (см. п. 5.4), учитывая лишь различия в способах выражения члена h'_c. В дальнейшем будем использовать его только для неустановившихся течений, в которых форма линий тока не изменяется во времени. К таким течениям относится большинство потоков несжимаемой жидкости в трубах и каналах с жесткими (недеформируемыми) стенками. Для них уравнение (5.23) можно распространить на поток конечных размеров подобно тому, как это было сделано для установившегося движения. Выполним необходимые операции с инерционным напором h'_i, имея в виду, что усреднение остальных членов не отличается от аналогичного усреднения членов уравнения Бернулли для установившегося движения.

Поскольку линии тока не изменяются во времени, векторы ds и $\partial u/\partial t$ коллинеарны и их скалярное произведение в формуле (5.22) можно заменить произведением модулей. Тогда усредненное по живому сечению ω значение инерционного напора следует выразить соотношением

$$h_i = \frac{1}{\rho g Q}\int\limits_{\omega} h'_i \rho g u\, d\omega = \frac{1}{Q}\int\limits_{\omega} u\, d\omega \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, ds.$$

Ввиду несжимаемости жидкости и неизменности линий тока элементарный расход $dQ = u d\omega$ постоянен в данный момент по длине струйки и, следовательно, не зависит от переменной S. Поэтому в последнем выражении можно поменять порядок интегрирования, в результате чего получим

$$h_i = \frac{1}{gQ}\int\limits_{s_1}^{s_2} ds \int\limits_{\omega} u\frac{\partial u}{\partial t}\, d\omega = \frac{1}{gQ}\int\limits_{s_1}^{s_2} ds \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega} \frac{u^2}{2}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2gQ}\int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_0 v^2 \omega)\, ds = \frac{1}{2gQ}\int\limits_{s_1}^{s_2} 2\alpha_0 \omega v \frac{\partial v}{\partial t}\, ds, \qquad (6.84)$$

где α_0 — коэффициент количества движения, который будем считать не зависящим от времени; v — средняя по сечению ω скорость.

Учитывая, что расход $Q = v\omega$ зависит только от времени, но не зависит от координаты s, получаем

$$h_t = \frac{1}{gQ}\int_{s_1}^{s_2} \alpha_0 v\omega \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \alpha_0 \frac{\partial v}{\partial t} ds \tag{6.85}$$

или, так как $v = Q(t)/\omega(s)$,

$$h_t = \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \alpha_0 \frac{1}{\omega}\frac{dQ}{dt} ds = \frac{1}{g}\frac{dQ}{dt}\int_{s_1}^{s_2} \frac{\alpha_0}{\omega} ds. \tag{6.86}$$

Если рассматривать прямолинейную цилиндрическую трубу ($\omega = \mathrm{const}$) и принять $\alpha_0 = \mathrm{const}$, то

$$h_t = \alpha_0 \frac{1}{g}\frac{L}{\omega}\frac{dQ}{dt} = \alpha_0 \frac{L}{g}\frac{dv}{dt}, \tag{6.87}$$

где $L = s_2 - s_1$ — расстояние между выбранными сечениями.

Теперь можно записать уравнение одномерного неустановившегося движения для потока конечных размеров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c + h_t. \tag{6.88}$$

Несмотря на то, что уравнение (6.88) не является строгим и его вывод опирается на приближенные допущения, оно с успехом применяется в инженерных расчетах. Это уравнение называют уравнением Бернулли для неустановившегося движения.

Важно отметить, что инерционный напор — знакопеременная величина; он положителен для ускоренного движения ($dv/dt > 0$) и отрицателен для замедленного ($dv/dt < 0$). Хотя он наряду с членом h_c входит в правую часть уравнения, но не выражает потерь энергии, так как не связан с диссипативными силами.

Инерционный напор характеризует обратимые преобразования энергии, что наглядно иллюстрируется следующим примером. Пусть большой резервуар с постоянным уровнем (статический уровень *СУ*) соединен длинной трубой с цилиндром, за которым на трубе установлен затвор *З* (рис. 6.41). Эта система воспроизводит гидравлическую схему деривационной ГЭС. При установившемся движении по трубе вследствие потерь пьезометрическая линия *ПУ* и линия энергии *ЭУ* имеют положительный уклон и уровень в цилиндре устанавливается ниже уровня в резервуаре на величину потерь h_c. Если затвор внезапно закрыть, то из-за инерции массы воды в трубе начнется подъем уровня в ци-

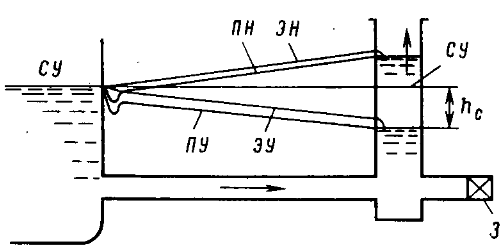


Рис. 6.41. Пьезометрические линии и линии энергии при неустановившемся и установившемся движении в цилиндрической трубе

линдре с переменной убывающей во времени скоростью. В некоторый момент уровень в цилиндре превысит статический уровень в резервуаре и, достигнув максимума, начнет опускаться, затем снова подниматься и т. д., совершая затухающие колебания. Для некоторого момента времени при подъеме уровня в цилиндре над уровнем в резервуаре можно зафиксировать положение пьезометрической линии *ПН* (при неустановившемся движении) и линии энергии *ЭН*, которые в этот момент будут иметь отрицательный уклон. При этом $h_i < 0$, так как $dv/dt < 0$. Следовательно, при неустановившемся замедленном движении в цилиндрической трубе давление вниз по течению может возрастать, что невозможно при установившемся движении. При последующем возвратном движении силы, обусловленные этим давлением, выполняют работу по увеличению кинетической энергии жидкости в трубе. Мерой этих обратимых преобразований энергии и является инерционный напор.

Потери напора h_c при неустановившемся движении также могут играть существенную роль. Приближенно их определяют по формулам того же вида, что и при установившемся движении, хотя некоторые исследования указывают на зависимость этих потерь от ускорений потока.

6.14. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В СЛУЧАЕ ПРЕНЕБРЕЖИМО МАЛОГО ВЛИЯНИЯ ИНЕРЦИИ. ВРЕМЯ НАПОЛНЕНИЯ И ОПОРОЖНЕНИЯ РЕЗЕРВУАРОВ

Если ускорения жидкости $\partial u/\partial t$ (или $\partial v/\partial t$) малы, то в некоторых случаях, например при медленном наполнении или опорожнении резервуаров, инерционным напором можно пренебречь. При этом уравнение (6.88) упрощается и принимает вид

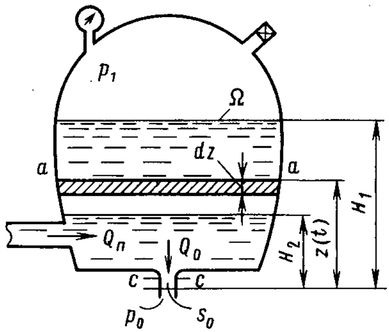
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c, \tag{6.89}$$

не отличающийся от уравнения Бернулли для установившегося движения. Однако в данном случае сохраняется зависимость параметров потока от времени, хотя явно время в уравнение (6.89) не входит. Это позволяет медленно изменяющиеся неустановившиеся течения рассматривать как последовательную смену стационарных состояний, для каждого из которых применимы соотношения установившегося движения.

Рассмотрим процесс наполнения (или опорожнения) резервуара, из которого жидкость вытекает через отверстие или сопло и наряду с этим имеет место постоянный приток $Q_п$, не равный расходу истечения Q_0 (рис. 6.42). Применяя уравнение (6.89) к сечениям *а-а* и *с-с* в произвольный момент времени и выражая потери h_c по формулам установившегося движения, получим формулу

$$Q_0 = \mu S_0 \sqrt{2g\left(z + \frac{p_1 - p_0}{\rho g}\right)}$$

Рис. 6.42. Схема к истечению жидкости под переменным напором



того же вида, что и для установившегося движения. Однако в ней напор z, а значит, и расход Q_0 переменны во времени.

Чтобы определить время изменения уровня жидкости в резервуаре, составим уравнение неразрывности, исходя из следующих соображений. Если за время dt уровень изменился на dz, то эти величины должны быть связаны уравнением баланса объемов жидкости

$$\Omega dz = (Q_п - Q_0)\, dt,$$

где Ω — площадь свободной поверхности (площадь зеркала) в резервуаре.

Отсюда

$$dt = \Omega dz/(Q_п - Q_0)$$

и время изменения положения уровня от H_1 до H_2 определится формулой

$$T = \int_{H_1}^{H_2} \Omega\, dz/(Q_п - Q_0).$$

Под знаком интеграла находятся две величины, зависящие от напора z: площадь зеркала $\Omega(z)$, определяемая формой резервуара, и расход Q_0, определяемый приведенной выше формулой. Вычислить интеграл в общем случае можно только численно, но для частных случаев решение можно получить в элементарных функциях.

Рассмотрим истечение из цилиндрического резервуара. Обозначим через H_0 напор над центром отверстия, при котором приток $Q_п$ равен расходу через отверстие площадью S_0:

$$Q_п = \mu S_0 \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{p_1 - p_0}{\rho g}\right)}.$$

Для цилиндрического резервуара $\Omega = \text{const}$. Примем также, что $\mu = \text{const}$ и $p_1 = p_0$. Тогда

$$T = \frac{\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{\sqrt{H_0} - \sqrt{z}},$$

где H_1 и H_2 — значения напоров, определяющих начальное и конечное положение уровня; T — время изменения уровня между ними.

Вычисляя интеграл, получаем

$$T = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_1} - \sqrt{H_0}}{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_0}} \right).$$

Если $H_2 \to H_0$, то $T \to \infty$, что означает асимптотическое приближение уровня в резервуаре к тому положению, при котором приток равен расходу и устанавливается стационарный режим. Если $H_0 = 0$, т. е. приток отсутствует, то приходим к более простой формуле для времени опорожнения резервура:

$$T_0 = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}).$$

При наличии на свободной поверхности постоянного избыточного давления $p_и = p_1 - p_0$ из тех же исходных уравнений получаем

$$T_1 = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1 + \frac{p_и}{\rho g}} - \sqrt{H_2 + \frac{p_и}{\rho g}} \right).$$

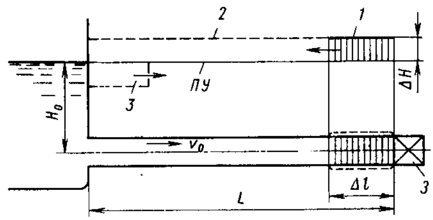
6.15. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ УСКОРЕНИЯХ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

При больших ускорениях потока жидкости в трубе, например при быстром закрытии или открытии затвора, влияние инерционного напора может оказаться превалирующим по сравнению с влиянием других членов уравнения (6.88). Более того, это уравнение может быть неприменимым. Действительно, если, например, затвор закрывается почти мгновенно, то $dv/dt \to -\infty$ и $h_i \to -\infty$. Поэтому для сохранения смысла уравнения (6.88) должно $p_2 \to \infty$, что противоречит опыту. Как показал теоретический анализ, подтвержденный практикой, причина этого парадокса состоит в приближенности допущения о несжимаемости жидкости. При больших ускорениях изменения давления могут быть настолько значительными, что становится необходимым учитывать упругость жидкости и стенок трубы.

Резкое изменение давления в трубе, вызванное большими локальными ускорениями жидкости, называют гидравлическим ударом.

Рассмотрим физическую картину возникновения гидравлического удара. Допустим, что в прямой цилиндрической трубе, в которую жидкость поступает из большого резервуара с постоянным уровнем (рис. 6.43), режим течения установившийся со скоростью v_0. Предположим, что в некоторый момент времени затвор *3* на конце трубы мгновенно закрывается. Тогда слои жидкости перед затвором мгновенно останавливаются и благодаря инерции массы жидкости в трубе подвергаются сжатию, а значит, давление в них резко повышается. Принимая во внимание упругость жидкости и стенок трубы, можно представить, что наряду с уплот-

Рис. 6.43. Возникновение гидравлического удара в трубопроводе



нением этих слоев произойдет растяжение стенок трубы и повышение в них напряжений. Тогда по истечении некоторого малого промежутка времени после закрытия затвора участок трубы Δl перед ним окажется в состоянии повышенного напряжения, а жидкость в пределах этого участка — под повышенным давлением. Это состояние передается в слои жидкости, расположенные выше по течению, в виде волны повышения давления, а в стенках трубы —в виде упругой волны напряжений.

При открытии затвора, который до этого был полностью или частично закрыт, вверх по течению распространяется волна понижения давления. Если же затвор расположен не в конце трубы, а в начале, то волна изменения давления будет распространяться вниз по течению.

Условимся о терминологии. Гидравлический удар, вызывающий повышение давления, называется положительным, а вызывающий понижение давления — отрицательным. Волна давления (положительная или отрицательная), распространяющаяся от затвора (или иного регулирующего устройства), называется прямой, а волна противоложного направления — обратной. Поверхность, отделяющая участок распространения ударной волны от участка невозмущенного движения, называется фронтом волны. Фронт любой волны гидравлического удара перемещается с конечной скоростью, называемой скоростью ударной волны. Время, в течение которого ударная волна проходит двойную длину трубы, называют фазой гидравлического удара.

Рассмотрим процесс распространения ударных волн при закрытии затвора в нижнем конце трубы. Если в установившемся режиме, который имел место до закрытия затвора, пренебречь потерями по длине и скоростным напором, то пьезометрическая линия будет иметь вид горизонтальной прямой *ПУ* (рис. 6.43). Тогда возникшее при гидравлическом ударе распределение давления вдоль трубы для некоторого момента изобразится линией *1*. С течением времени волна повышения давления, распространяясь вверх по трубе, охватит всю ее длину (линия *2*). Но во входном сечении трубы давление не может измениться, так как там оно определяется только напором H_0 над центром отверстия. Поэтому в момент прихода ко входному сечению волны повышения давления в нем должна возникнуть волна противоположного знака, т. е. волна понижения давления, которая компенсировала бы первичную волну. Такая волна возникает, поскольку часть уплотненной жидкости выталкивается из трубопровода в резервуар, благодаря чему понижается давление в верхнем конце трубы и это понижение распространяется вниз (линия 3). Появление распространяющейся вниз по трубе волны изменения давления называют отражением ударной волны от входного конца трубы. В момент, когда отраженная волна достигнет выходного конца с полностью закрытым затвором, произойдет новое отражение, но уже без перемены знака волны, т. е. отраженная волна будет иметь тот же знак, что и подошедшая.

Если затвор в момент прихода к нему отраженной волны закрыт не полностью, то отражение может произойти как с переменой, так и без перемены знака, причем может быть неполным, т. е. отраженная волна по абсолютной величине будет меньшей, чем подошедшая.

Дальнейший анализ целесообразнее вести, располагая аналитическим описанием явления, которое рассмотрено в следующем параграфе.

Заметим, что явления распространения ударных волн в трубе могут возникать не только при регулировании потока затвором, но также при нестационарных режимах работы различных регулирующих органов (например, при возвратно-поступательном движении поршня в цилиндре, к которому присоединен трубопровод). Такие волновые процессы обычно не называют гидравлическим ударом, хотя они имеют ту же физическую природу и их математическое описание основывается на уравнениях гидравлического удара.

6.16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Рассмотрим произвольный момент времени после начала процесса регулирования (рис. 6.44), когда в результате взаимодействия (наложения) нескольких ударных волн (прямых и обратных) в сечении, определяемом координатой s, образуется давление p. Очевидно, следует считать, что $p = p(s, t)$. Координату s будем отсчитывать вверх по течению от сечения у затвора, где $s = 0$.

Для получения динамического уравнения волнового процесса (в частности, гидравлического удара) составим уравнение Бернулли для сечений 0-0 и 1-1, введя координату $x = L - s$, где L — полная длина трубы. При этом допустим, что $H_0 = \text{const}$, $\alpha = 1 = \text{const}$. Тогда получим

$$H_0 = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h_c + \frac{1}{g}\int_0^x \frac{\partial v}{\partial t}\,dx.$$

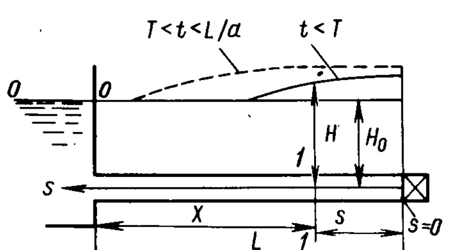


Рис. 6.44. Схема для вывода дифференциальных уравнений гидравлического удара

Принимая координату x за одну из независимых переменных и пренебрегая изменением плотности ρ по длине трубы, продифференцируем это уравнение по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h_c}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Введя обозначения $\partial z/\partial x = -\sin\alpha = -i$ — уклон оси трубы, $\partial h_c/\partial x = i_j$ — уклон трения, получим

$$\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + i_j - i + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \qquad (6.90)$$

Во многих задачах второй, третий и четвертый члены этого уравнения в совокупности мало влияют на результаты и уравнение используют в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \qquad (6.90')$$

Если ввести в рассмотрение пьезометрический напор $H = p/(\rho g) + z$, то уравнение (6.90) можно представить в виде

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + i_f + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

или с учетом того, что $x = L - s$,

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s} + i_f. \qquad (6.91)$$

Это уравнение содержит две неизвестные функции: $H(s, t)$ и $v(s, t)$; уклон трения, как упоминалось, в первом приближении можно определить по формулам установившегося режима. В результате расчетов и экспериментов получено, что влияние сил трения практически существенно только при достаточно больших длинах труб, и во многих случаях значением i_f можно пренебречь. Кроме того, при рассмотрении гидравлического удара в металлических трубах или в трубах из другого достаточно жесткого материала (например, из железобетона) можно не учитывать конвективный член $(v/g)(\partial v/\partial s)$. Действительно, изменение скорости по длине трубы $\partial v/\partial s$ может быть отлично от нуля только вследствие сжимаемости жидкости или деформируемости стенок. И та и другая невелики. Но локальное ускорение $\partial v/\partial t$ при гидравлическом ударе может быть сколь угодно большим, если изменение положения затвора производится достаточно быстро. Поэтому, как правило,

$$v\partial v/\partial s \ll \partial v/\partial t.$$

Приняв указанные приближенные допущения, получим упрощенную форму динамического уравнения гидравлического удара

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (6.92)$$

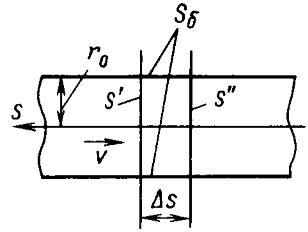


Рис. 6.45. Деформация жидкого элемента при гидравлическом ударе

Вторым уравнением, необходимым для определения функций H и v, служит дифференциальное уравнение неразрывности, которое выведем с учетом упругости жидкости и стенок трубы. Будем исходить из следующих предположений:

а) жидкость является упругой и при сжатии подчиняется закону Гука, выражаемому формулой $d\rho/\rho = dp/\mathscr{E}$, где dp — полное изменение давления за время dt; $\mathscr{E}$ — объемный модуль упругости;

б) труба тонкостенная и напряжение σ в ее стенке выражается формулой $\sigma = pD/(2\delta)$, известной из курса сопротивления материалов (здесь D — внутренний диаметр трубы, δ — толщина стенки трубы);

в) деформации материала стенки подчиняются закону Гука $dL_0/L_0 = dD/D = d\sigma/E$, где L_0 — периметр сечения трубы, E — модуль упругости материала стенки.

Выделим отсек жидкости в трубе длиной Δs (рис. 6.45) и запишем для него уравнение неразрывности в интегральной форме (2.11). При этом примем во внимание следующее:

в пределах выделенного отсека, ввиду его малости, величина $\partial p/\partial t$ постоянна в любой момент времени;

поверхность S_0 отсека состоит из трех частей: $S_0 = S' + S'' + S_б$ (где $S_б$ — боковая цилиндрическая поверхность; $S' = S'' = S$ — поперечное сечение трубы);

на площадке S' $u_n = -u$, на S'' $u_n = u$.

Тогда для рассматриваемого случая уравнение (2.11) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} S\,dx - \int\limits_{S'} \rho u\,dS + \int\limits_{S''} \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dS + \int\limits_{S_б} \rho u_n\,dS = 0.$$

Так как на боковой поверхности $u_n = \partial r_0/\partial t$ (где $r_0 = D/2$ — внутренний радиус трубы), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} S\,dx + dx \int\limits_{S} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dS + \rho \frac{\partial r_0}{\partial t} 2\pi r_0\,dx = 0.$$

Преобразуем входящий в последнее выражение интеграл, учитывая, что для одномерной модели в пределах живого сечения $\rho = \text{const}$:

$$\int\limits_{S} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dS = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{S} \rho u\,dS = \frac{\partial}{\partial x} \rho \int\limits_{S} u\,dS = \frac{\partial}{\partial x}(\rho Q) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v S) = \rho v \frac{\partial S}{\partial x} + \rho S \frac{\partial v}{\partial x} + v S \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

где Q — объемный расход; v — средняя скорость потока.

Учтем также, что

$$\frac{\partial r_0}{\partial t} 2\pi r_0 = \frac{\partial}{\partial t} (\pi r_0^2) = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Тогда уравнение неразрывности примет вид

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) S + \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x}\right) + \rho S \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

При движении жидкого элемента объемом Sdx его скорость $v = dx/dt$ и, следовательно, оба выражения в скобках представляют собой индивидуальные, т. е. полные производные от величин ρ и S. Поэтому последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Согласно предположению «а»

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\mathscr{E}} \frac{dp}{dt}.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\pi r_0^2} \frac{d(\pi r_0^2)}{dt} = \frac{2}{r_0} \frac{dr_0}{dt} = \frac{2}{D} \frac{dD}{dt}.$$

Согласно предположениям «б» и «в»

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = \frac{1}{E 2\delta} \left(D \frac{dp}{dt} + p \frac{dD}{dt}\right).$$

В последнем равенстве второй член в скобке мал по сравнению с первым. Пренебрегая им, получаем

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = \frac{D}{2E\delta} \frac{dp}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \frac{D}{E\delta} \frac{dp}{dt}.$$

Теперь уравнение неразрывности можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{\mathscr{E}} + \frac{D}{E\delta}\right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{6.93}$$

Введем обозначение

$$a = \frac{\sqrt{\mathscr{E}/\rho}}{\sqrt{1 + \mathscr{E} D/(E\delta)}}. \tag{6.94}$$

Числитель этого выражения, как известно из физики, представляет собой скорость звука в упругой среде с модулем упругости $\mathscr{E}$. Обозначив эту скорость через $a_{зв}$, запишем

$$a = \frac{a_{зв}}{\sqrt{1 + \mathscr{E} D/(E\delta)}}. \tag{6.94'}$$

Используя это обозначение и учитывая, что

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x},$$

уравнение (6.93) представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{6.95}$$

Если вместо давления p введем в формулу (6.95) пьезометрический напор $H=p/(\rho g)+z$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial t}+v\left(\frac{\partial H}{\partial x}+i\right)+\frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{6.95'}$$

Как правило, второй член этого выражения пренебрежимо мал по сравнению с двумя другими и потому можно пользоваться уравнением неразрывности в одной из форм

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{6.96}$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{6.96'}$$

При дальнейшем изложении теории гидравлического удара удобнее пользоваться координатной $s=L-x$ и соответственно уравнение (6.96′) представить в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{6.97}$$

Система уравнений (6.92) и (6.97) содержит две неизвестные функции $H(s, t)$ и $v(s, t)$, определение которых при заданных граничных условиях составляет основную задачу теории гидравлического удара. Из этих уравнений легко исключить одну из функций и получить уравнение второго порядка для другой. Так, дифференцируя выражение (6.92) по t, (6.97) по s и приравнивая смешанные вторые производные, находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0. \tag{6.98}$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}=0. \tag{6.99}$$

Уравнивая (6.98) и (6.99), называемые волновыми, можно проинтегрировать в общем виде, введя новые переменные $\xi=t-s/a$ и $\eta=t+s/a$. Тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}-\frac{2}{a^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}.$$

Подставив эти выражения вторых производных в формулу (6.99), получим

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \theta(\eta) \text{ и } H = \int \theta(\eta) \, d\eta + f(\xi),$$

где $\theta(\eta)$ и $f(\xi)$ — произвольные функции.

Введя обозначение

$$\varphi(\eta) = \int \theta(\eta) \, d\eta + C,$$

где C — произвольная постоянная, получим общее решение уравнения (6.99) в переменных ξ и η

$$H = \varphi(\eta) + f(\xi) + C$$

или в переменных s и t

$$H = f(t - s/a) + \varphi(t + s/a) + C.$$

Для определения постоянной C учтем, что при установившемся режиме пьезометрический напор постоянен по длине трубы (потерями пренебрегаем), а функции f и φ равны нулю, поскольку они выражают переменную часть напора, имеющую место при гидравлическом ударе. Поэтому $C = H_0$ и окончательно

$$H - H_0 = f(t - s/a) + \varphi(t + s/a).$$

Аналогично находим решение уравнения (6.98):

$$v - v_0 = F(t - s/a) + \Phi(t + s/a),$$

где v_0 — скорость при установившемся режиме.

Используя исходные уравнения (6.92) и (6.97), можно произвольные функции F и Φ выразить через функции f и φ.

Окончательно решения волновых уравнений гидравлического удара можно представить в виде

$$H - H_0 = f(t - s/a) + \varphi(t + s/a); \tag{6.100}$$

$$v - v_0 = -(g/a)\,[f(t - s/a) - \varphi(t + s/a)].$$

Первое из этих решений показывает, что функции f и φ представляют собой некоторые части ударного изменения напора $\Delta H = H - H_0$ при ударе, которое возникает в момент времени t в сечении с координатой s. Чтобы выяснить свойства и физический смысл этих функций, допустим, что в течение некоторого интервала времени одна из них (например, φ) равна нулю для всех значений s, т. е. на всей длине трубы. Физические условия, при которых это возможно, будут ясны из дальнейшего. При $\varphi = 0$

$$\Delta H = H - H_0 = f(t - s/a).$$

Из этого выражения следует, что $\Delta H = \text{const}$, т. е. изменение напора при ударе постоянно, если $t - s/a = \text{const}$, т. е. если s с течением времени возрастает со скоростью a.

Таким образом, параметр a представляет собой скорость распространения ударной волны, а функция f описывает волну, распространяющуюся вверх по трубе. Совершенно аналогично можно показать, что функция φ описывает волну изменения давления, распространяющуюся вниз по трубе с той же скоростью a. Следовательно, в общем случае изменение давления в трубе при гидравлическом ударе есть результат суммирования (суперпозиции) ударных волн двух видов: прямых и обратных, каждая из которых может быть положительной или отрицательной. Значения функций f и φ ниже будем называть ординатами ударных волн.

6.17. ПРЯМОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР, ФОРМУЛА Н. Е. ЖУКОВСКОГО *

Рассмотрим частный случай гидравлического удара, который возникает в трубе, если время закрытия затвора T меньше фазы удара $\theta = 2L/a$. Такой гидравлический удар называют прямым. С момента начала закрытия (или открытия) затвора в трубе возникает волна изменения давления, которая, распространяясь на всю длину L трубы, отражается от входного конца с переменой знака и в виде обратной волны достигает затвора к концу первой фазы $\theta = 2L/a$. Таким образом, прямой удар характерен тем, что в течение всего времени закрытия в сечении у затвора ($s = 0$, см. рис. 6.44) существует только одна прямая волна, описываемая функцией $f(t)$, тогда как $\varphi = 0$. Следовательно, для любого момента $t < \theta$ в сечении у затвора будут справедливы уравнения

$$H - H_0 = f(t); \quad v - v_0 = -(g/a) f(t).$$

---

* Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — великий русский ученый в области механики, основоположник современной гидроаэродинамики. С 1879 г.— профессор Московского высшего технического училища, а с 1886 г. — профессор Московского университета; с 1894 г. — член-корреспондент Петербургской академии наук. Н. Е. Жуковский выполнил ряд фундаментальных исследований по разнообразным разделам механики жидкости и газа. Им впервые выведены дифференциальные уравнения гидравлического удара в трубах с учетом упругости жидкости и стенок трубы, а также получены их общие решения. Использование этих решений позволило разрешить ряд практических задач, связанных с гидроударом в водопроводных трубах.

Из других выдающихся работ Н. Е. Жуковского получили всемирное признание и распространение видоизменение метода Кирхгофа для решения задач струйного обтекания тел, гидродинамическая теория фильтрации, решение задач гидродинамической теории смазки, теорема о подъемной силе и теория присоединенных вихрей, гидродинамическая теория гребного винта, теория решеток и ряд других исследований.

Работы Н. Е. Жуковского отличаются органичным сочетанием строгой теории, ясного физического толкования результатов и практических выводов.

Исключая отсюда $f(t)$, получаем

$$H - H_0 = (a/g)(v_0 - v). \tag{6.101}$$

Эта формула справедлива для любого момента $t < \theta$ при любом законе закрытия (открытия) затвора.

Если затвор закрывается за время $T \leqslant \theta$ и полностью, то для всех моментов $t \geqslant T$ скорость течения перед ним $v = 0$ и формула (6.101) приобретает вид

$$\Delta H = H - H_0 = av_0/g, \tag{6.102}$$

или после замены напора давлением

$$\Delta p = \rho a v_0. \tag{6.102'}$$

Эта зависимость известна как формула Жуковского для прямого удара.

Если же затвор закрывается не полностью, то формулой (6.101) можно воспользоваться, лишь зная закон изменения скорости $v(t)$.

Особые условия имеют место во входном сечении ($s = L$). Здесь напор, как указано выше, определяется уровнем свободной поверхности в резервуаре и внешним давлением на ней, т. е. в сечении $s = L$ всегда $H = H_0$. Поэтому согласно формуле (6.100)

$$-f(t - L/a) = \varphi(t + L/a). \tag{6.103}$$

Это равенство означает, что в сечении $s = L$ ордината φ обратной волны всегда равна по величине и противоположна по знаку ординате f прямой волны, т. е. формула (6.103) выражает описанное выше явление полного отражения ударной волны от входного сечения с переменой знака.

Можно показать, что обратная волна φ в каждом сечении повторяет с обратным знаком значения волны f, но с опозданием на $2(L - s)/a$, т. е. на тот отрезок времени, который необходим для прохождения волной участка трубы $2(L - s)$. Поэтому при распространении обратной (отраженной) волны вниз по трубе она гасит те повышения (или понижения) давления, которые были созданы прямой волной.

Пусть имело место полное мгновенное закрытие затвора. Тогда повышение напора согласно формуле (6.102) равно $av_0/g = \Delta H_п$ и ордината обратной волны, отраженной от входа, $\varphi = -av_0/g$.

В момент $t = \theta = 2L/a$ волна достигает сечения $s = 0$, где встречает полностью закрытый затвор. В этом сечении $v = 0$ и второе уравнение (6.100) для него принимает вид

$$f(t) = \varphi(t) + av_0/g.$$

Но поскольку $\varphi(t) = -av_0/g$, $f(t) = 0$. Волна $f(t)$ представляет собой сумму двух прямых волн: первой f_1, возникшей первоначально при закрытии затвора, и второй f_2, возникшей у затвора в результате отражения от него обратной волны φ.

Так как $f = f_1 + f_2 = 0$ и $f_1 = av_0/g$, то $f_2 = -av_0/g$ или $f_2 = \varphi$. Этот результат можно сформулировать в виде утверждения, что полностью закрытый затвор отражает ударную волну без перемены знака и без изменения ее ординаты.

Изменение напора вдоль трубопровода при полном мгновенном закрытии затвора можно проиллюстрировать серией графиков, представленных на рис. 6.46. График изменения давлений во времени для нескольких фиксированных сечений трубы дан на рис. 6.47. Представляем читателю самостоятельно прокомментировать эти графики, опираясь на приведенный выше анализ свойств ударных волн.

Если затвор закрывается (открывается) не мгновенно, что в реальных условиях всегда имеет место, то давление (напор) нарастает (убывает) также постепенно. При этом профиль образующейся первичной ударной волны (профилем волны называют график распределения напора или давления вдоль трубы в фиксированные моменты времени) зависит как от закона закрытия затвора, так и от закона истечения через него. Рассмотрим случай, когда затвор закрывается не мгновенно, но достигает полного закрытия за время $T < \theta$. Так как условие прямого удара соблюдено,

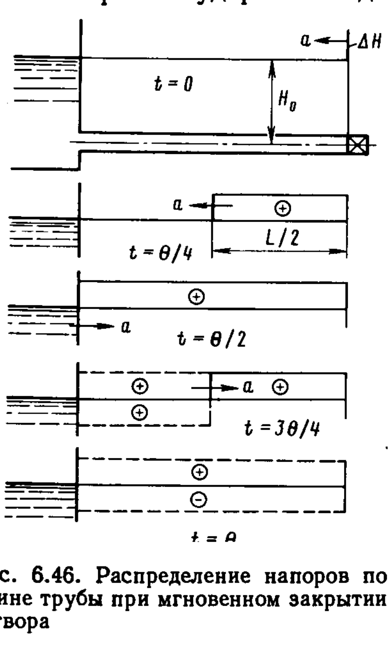


Рис. 6.46. Распределение напоров по длине трубы при мгновенном закрытии затвора

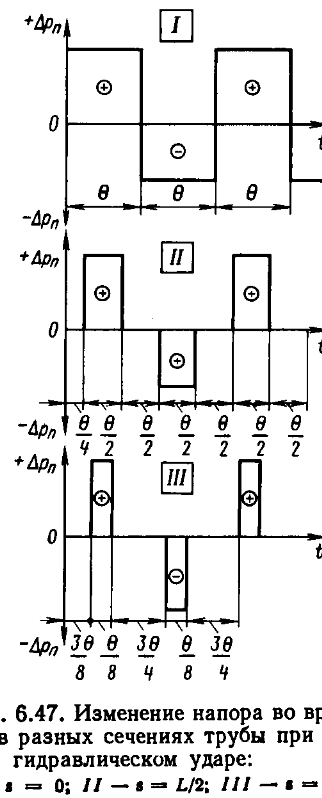


Рис. 6.47. Изменение напора во времени в разных сечениях трубы при прямом гидравлическом ударе:

$I - s = 0$; $II - s = L/2$; $III - s = 3L/4$

максимальное повышение ударного давления будет определяться формулой Жуковского (6.102), однако оно будет достигнуто только к концу процесса закрытия. В интервале времени $0 < t < T$ давление у затвора будет нарастать постепенно, а при $T \leqslant t \leqslant \theta$ останется постоянным, равным $\Delta p_{п} = \rho g \Delta H_{п}$ вплоть до подхода отраженной волны. Ординаты волны давления в некоторый момент $T < t < L/a$ показаны на рис. 6.44. Если время закрытия больше, чем фаза удара, т. е. $T > \theta$, то повышение давления при ударе не достигнет значения $\Delta p_{п}$ ни в одном сечении. Поэтому, увеличивая время закрытия (по сравнению с фазой θ), можно добиться значительного снижения давления. Процесс взаимодействия ударных волн в этом случае становится более сложным и требует детального рассмотрения.

6.18. НЕПРЯМОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР. ЦЕПНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Непрямым называют гидравлический удар, который возникает при закрытии или открытии затвора за время большее, чем фаза удара: $T > 2L/a$.

Выберем два произвольных сечения A и B трубы (рис. 6.48) и запишем решения (6.100) применительно к этим сечениям в произвольный момент времени t:

$$H_t^A - H_0 = f(t - s_A/a) + \varphi(t + s_A/a); \qquad (6.104')$$

$$v_t^A - v_0 = -(g/a)\,[f(t - s_A/a) - \varphi(t + s_A/a)], \qquad (6.104'')$$

где верхними индексами функций H и v отмечены сечения, а нижним — моменты времени, к которым относятся напор и скорость.

Если Δt — интервал времени, в течение которого ударная волна распространяется от сечения A до сечения B, т. е.

$$\Delta t = (s_B - s_A)/a,$$

то для момента $t + \Delta t = t + (s_B - s_A)/a$ для сечения B будут справедливы соотношения

$$H_{t+\Delta t}^B - H_0 = f(t + \Delta t - s_B/a) + \varphi(t + \Delta t + s_B/a); \qquad (6.105')$$

$$v_{t+\Delta t}^B - v_0 = -(g/a)\,[f(t + \Delta t - s_B/a) - \varphi(t + \Delta t + s_B/a)]. \qquad (6.105'')$$

Но поскольку

$$t + \Delta t - s_B/a = t + (s_B - s_A)/a - s_B/a = t - s_A/a,$$

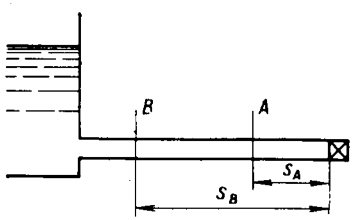


Рис. 6.48. Схема для вывода цепных уравнений гидравлического удара

находим

$$f(t + \Delta t - s_B/a) = f(t - s_A/a).$$

Вычитая уравнение (6.105′) из уравнения (6.104′) и (6.105″) из (6.104″) и учитывая последнее равенство, получим в сокращенных обозначениях

$$H_t^A - H_{t+\Delta t}^B = \varphi_t^A - \varphi_{t+\Delta t}^B;$$

$$v_t^A - v_{t+\Delta t}^B = (g/a)\,[\varphi_t^A - \varphi_{t+\Delta t}^B].$$

Исключая разность $\varphi_t^A - \varphi_{t+\Delta t}^B$, находим

$$H_t^A - H_{t+\Delta t}^B = (a/g)\left(v_t^B - v_{t+\Delta t}^B\right). \tag{6.106}$$

Аналогичное рассуждение для случая распространения обратной волны от сечения B к сечению A приводит к уравнению

$$H_t^B - H_{t+\Delta t}^A = -(a/g)\left(v_t^A - v_{t+\Delta t}^A\right). \tag{6.107}$$

Выражения (6.106) и (6.107), называемые сопряженными уравнениями гидравлического удара, применимы для любой пары сечений. Пользуясь этим, рассмотрим сечения $s = 0$ (вместо сечения A) и $s = L$ (вместо сечения B). В последнем, т. е. на входе в трубу, как известно, $H_t^L = H_{t+\Delta t}^L = H_0$. Кроме того, для этой пары сечений $\Delta t = L/a = \theta/2$. С учетом этого из выражения (6.106) получим

$$H_t - H_0 = (a/g)\left(v_t - v_{t+\theta/2}^L\right).$$

При записи второго сопряженного уравнения вместо момента t возьмем $t + \theta/2$. Тогда

$$H_0 - H_{t+\theta} = -(a/g)\left(v_{t+\theta/2}^L - v_{t+\theta}\right).$$

В двух последних формулах верхние индексы для сечения $s = 0$ опущены. Исключая скорость $v_{t+\theta/2}^L$, находим

$$H_t + H_{t+\theta} - 2H_0 = (a/g)\,(v_t - v_{t+\theta}). \tag{6.108}$$

Это уравнение связывает между собой параметры (скорости и напоры) в одном и том же сечении $s = 0$ для моментов времени, отличающихся на одну фазу.

Покажем, как это уравнение можно использовать для построения графика $H(t)$. Для этого выпишем уравнение (6.108) последовательно для моментов $t = 0$, $t = \theta$, $t = 2\theta$, ... Учитывая, что $H_{t=0} = H_0$, получим

$$\begin{aligned} &H_\theta - H_0 = (a/g)\,(v_0 - v_\theta);\\ &H_\theta + H_{2\theta} - 2H_0 = (a/g)\,(v_\theta - v_{2\theta});\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &H_{n\theta} + H_{(n+1)\theta} - 2H_0 = (a/g)\,[v_{n\theta} - v_{(n+1)\theta}]. \end{aligned} \tag{6.109}$$

Уравнения, образующие систему (6.109), называют цепными.

Предположим, что закон изменения скорости у затвора известен (задан или установлен из граничных условий). Тогда из первого уравнения системы (6.109) легко определить H_θ, т. е. напор в конце первой фазы. Подставив значение H_θ во второе уравнение и имея в виду, что правая часть известна для любого момента, найдем $H_{2\theta}$, которое подставим в третье уравнение, и т. д. В результате этих вычислений определим значения напора в конце каждой фазы и, следовательно, найдем закон $H(t)$ для всего интервала времени закрытия (открытия).

Однако в ряде практических расчетов задача оказывается сложнее. Дело в том, что скорость перед затвором не всегда можно определить независимо от напора или произвольно задать, так как в некоторых случаях она зависит от давления (напора) перед затвором. Например, если за затвором имеет место свободное истечение в газовое пространство, то скорость v будет пропорциональна $\sqrt{H}$, и, кроме того, будет зависеть от закона маневрирования затвором. Если за затвором расположена машина (например, гидравлическая турбина, насос), то скорость будет зависеть также от ее характеристик (частоты вращения, конструкции и др.). Поэтому дальнейший анализ и вывод расчетных зависимостей возможен лишь применительно к конкретному закону истечения через затвор.

Рассмотрим свободное истечение струи в атмосферу (рис. 6.49). При этом расход жидкости

$$Q = \mu\Omega\sqrt{2gH},$$

где μ — коэффициент расхода; Ω — площадь проходного сечения затвора; H — напор.

В процессе закрытия площадь Ω изменяется по некоторому закону $\Omega(t)$. Пусть Ω_m — максимальное значение Ω, а Q_m — значение расхода в трубопроводе при полном открытии (т. е. при Ω_m) и установившемся режиме, т. е. при напоре H_0. Тогда

$$Q_m = \mu\Omega_m\sqrt{2gH_0}.$$

Введем обозначения: $q = Q/Q_m$ — приведенный расход; $\alpha = \Omega/\Omega_m$ — относительное открытие; $\zeta = H/H_0$ — приведенный напор, который для краткости ниже называется просто напором.

Считая коэффициент расхода μ постоянным, получаем

$$q = \alpha\sqrt{\zeta}. \tag{6.110}$$

Обозначив далее через V скорость в трубе при расходе Q_m ($Q_m/S = V$), а через v_0 — скорость в трубе при установившемся режиме и произвольном начальном открытии затвора Ω_0 ($Q_0 = Sv_0$), получим

$$q_0 = Q_0/Q_m = v_0/V = \alpha_0 \text{ или } v_0 = \alpha_0 V,$$

где α_0 — относительное начальное открытие.

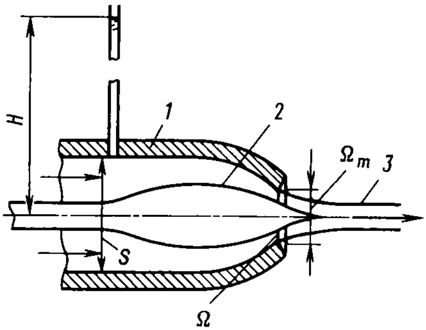


Рис. 6.49. Свободноструйное истечение через сопло с игольчатым затвором:

1 — сопло; *2* — игольчатый затвор; *3* — струя

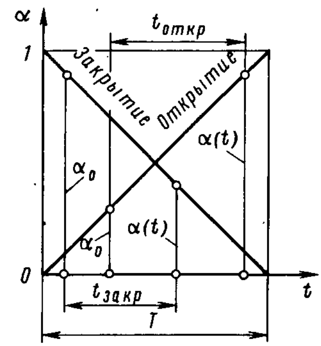


Рис. 6.50. Зависимость относительного открытия (закрытия) затвора от времени

В реальных условиях функция $\alpha(t)$ зависит от конструкции затвора и характеристик привода, осуществляющего открытие (закрытие) затвора. Но в некоторых случаях приближенно ее можно считать линейной (рис. 6.50) и выразить зависимостями:

для открытия затвора

$$\alpha = \alpha_0 + t/T; \tag{6.111}$$

для закрытия

$$\alpha = \alpha_0 - t/T, \tag{6.111'}$$

где T — время полного закрытия (открытия) от $\alpha = 1$ до $\alpha = 0$ (от 0 до 1).

Таким образом, значения α будут известны в любой момент времени.

Теперь приведем общее цепное уравнение к безразмерному виду

$$\frac{H_t}{H_0} + \frac{H_{t+\theta}}{H_0} - 2 = \frac{aV}{gH_0}\left(\frac{v_t}{V} - \frac{v_{t+\theta}}{V}\right).$$

Вводя обозначения $\rho = aV/(2gH_0)$, находим

$$\zeta_t + \zeta_{t+\theta} - 2 = 2\rho\left(\alpha_t \sqrt{\zeta_t} - \alpha_{t+\theta}\sqrt{\zeta_{t+\theta}}\right). \tag{6.112}$$

Если уравнение (6.112) применить последовательно к моментам времени $t = 0$, $t = \theta$, $t = 2\theta$, ..., с учетом того, что $\zeta_0 = 1$, получим следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned}
&\zeta_\theta - 1 = 2\rho\left(\alpha_0 - \alpha_\theta \sqrt{\zeta_\theta}\right);\\
&\zeta_\theta + \zeta_{2\theta} - 2 = 2\rho\left(\alpha_\theta\sqrt{\zeta_\theta} - \alpha_{2\theta}\sqrt{\zeta_{2\theta}}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\zeta_{n\theta} + \zeta_{(n+1)\theta} - 2 = 2\rho\left(\alpha_{n\theta}\sqrt{\zeta_{n\theta}} - \alpha_{(n+1)\theta}\sqrt{\zeta_{(n+1)\theta}}\right).
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Поскольку начальное открытие α_0 всегда задано, а величина ρ определяется только параметрами установившегося режима (V

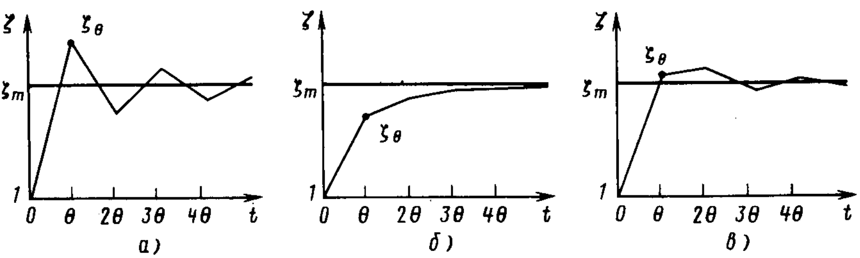


Рис. 6.51. Зависимости изменения напора при ударе перед затвором при линейном законе изменения относительного открытия

и H_0) и трубопровода (a), то в первом из уравнений (6.113) неизвестной является только ζ_θ, т. е. напор перед затвором в конце первой фазы. Решив это уравнение и найдя ζ_θ, подставим его во второе уравнение цепочки (6.113) и найдем $\zeta_{2\theta}$, затем перейдем к третьему уравнению и т. д. Таким образом, получим значения напоров ζ_θ в конце каждой из фаз. Если за время закрытия (или открытия) T проходит n фаз, то значение $\zeta_{n\theta}$ определит значение напора в конце процесса закрытия (открытия). Более подробный анализ показывает, что возможны три вида графиков $\zeta(t)$ (рис. 6.51). Согласно рис. 6.51, *а* максимальное повышение напора достигается в конце первой фазы. Это так называемый первофазный удар.

Расчетным уравнением для определения максимального напора в этом случае служит уравнение

$$\zeta_\theta - 1 = 2\rho\left(\alpha_0 - \alpha_\theta\sqrt{\zeta_\theta}\right),$$

где $\alpha_\theta = \alpha_0 \pm t/T$.

Согласно рис. 6.51, *б* напор перед затвором во время закрытия возрастает от фазы к фазе, стремясь к некоторому пределу ζ_m. Если на отрезке времени T укладывается $(n+1)$ фаза, то значения $\zeta_{n\theta}$ и $\zeta_{(n+1)\theta}$ мало отличаются друг от друга и можно принять $\zeta_{n\theta} \approx \zeta_{(n+1)\theta} \approx \zeta_m$. Тогда из последнего уравнения (6.113) получим

$$2(\zeta_m - 1) = 2\rho\sqrt{\zeta_m}\,[\alpha_{n\theta} - \alpha_{(n+1)\theta}],$$

где

$$\alpha_{n\theta} - \alpha_{(n+1)\theta} = \left(\alpha_0 - \frac{n\theta}{T}\right) - \left[\alpha_0 - \frac{(n+1)\theta}{T}\right] = \frac{\theta}{T}.$$

Величину ζ_m определяем из уравнения

$$\zeta_m - 1 = \rho\frac{\theta}{T}\sqrt{\zeta_m}.$$

Введя обозначения $\rho\theta/T = \sigma$, находим

$$\zeta_m = \frac{\sigma}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}\right) + 1.$$

В этой формуле знак «+» относится к закрытию, а знак «—» к открытию.

Согласно рис. 6.51, *в* максимальное значение ζ_{max} напора достигается в конце одной из промежуточных фаз. Обычно разница между ζ_{max} и ζ_m невелика, и можно принять $\zeta_{max} \approx \zeta_m$.

Общие решения уравнений Жуковского (6.100) и цепные уравнения (6.109) позволяют установить закон изменения напора не только в течение процесса закрытия, но и после остановки затвора, найти закон распределения давления по длине трубы, исследовать процесс отражения ударных волн и решить ряд других задач. При этом возможен приближенный учет влияния сил трения и тяжести.

7. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

7.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ. ПОСТАНОВКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В гл. 2 было дано определение потенциальных течений и выяснены их основные кинематические свойства. Рассмотрим этот класс течений более подробно и познакомимся с основными методами, позволяющими решать разнообразные гидродинамические задачи, в которых течения жидкостей могут считаться потенциальными.

Следует иметь в виду, что течений жидкости, строго отвечающих условиям потенциальности, в природе и технике не встречается. Представление о безвихревом характере движения является идеализацией, которая лишь с большей или меньшей степенью достоверности воспроизводит отдельные классы реальных течений. И тем не менее эта идеализация имеет важнейшее не только теоретическое, но и прикладное значение. Оно обусловлено тем, что во многих случаях завихренность жидкости или газа настолько мала, что ею можно пренебречь и, считая движение потенциальным, решать упрощенную таким образом задачу, для которой разработаны весьма эффективные методы. Так, например, при обтекании твердой поверхности потоком однородной вязкой несжимаемой жидкости влияние вязкости, которая в этом случае является единственной причиной вихреобразования, распространяется на относительно тонкий пристенный слой (так называемый пограничный слой), за пределами которого течение можно считать безвихревым. Поэтому первое представление о характере обтекания твердой поверхности при определенных условиях можно получить, считая поток безвихревым. Но встречается немало случаев, когда поток полностью завихрен и его ни в какой части нельзя считать потенциальным. Такие течения рассматриваются в гл. 8.

Для безвихревых течений (см. п. 2.8)

$$u_x = \partial\varphi/\partial x,\ u_y = \partial\varphi/\partial y,\ u_z = \partial\varphi/\partial z.$$

Подставляя эти соотношения в дифференциальное уравнение неразрывности

$$\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z = 0,$$

получаем

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \qquad (7.1)$$

В векторной форме эти преобразования записываются короче: так как для потенциальных потоков $\bar{u} = \operatorname{grad} \varphi$, подставляя это в уравнение неразрывности $\operatorname{div} u = 0$, находим

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0. \qquad (7.1')$$

Таким образом, потенциал φ скорости любого безвихревого потока несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению (7.1) Лапласа, т. е. является гармонической функцией. В связи с этим задачу определения поля скоростей, т. е. нахождения функций u_x, u_y и u_z для безвихревых течений, можно заменить задачей определения одной функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Для получения решения этого уравнения необходимо сформулировать граничные условия. Граничное условие на твердой непроницаемой стенке имеет вид (см. п. 5.6)

$$u_n \,|_{\text{ст}} = \partial\varphi/\partial n \,|_{\text{ст}} = 0, \qquad (7.2)$$

т. е. нормальная составляющая скорости (она же производная потенциала скорости по нормали) на твердой непроницаемой поверхности (стенке) равна нулю.

Нахождение решения уравнения (7.1) при граничном условии (7.2) называется задачей Неймана.

Если поток несжимаемой жидкости является плоским и потенциальным, то наряду с потенциалом φ он обладает функцией тока ψ, причем

$$u_x = \partial\psi/\partial y; \; u_y = -\partial\psi/\partial x.$$

Подставляя эти выражения в условие отсутствия вихрей (условие потенциальности)

$$\partial u_y/\partial x - \partial u_x/\partial y = 0,$$

убеждаемся, что в этом случае функция тока ψ, так же как и φ, является гармонической:

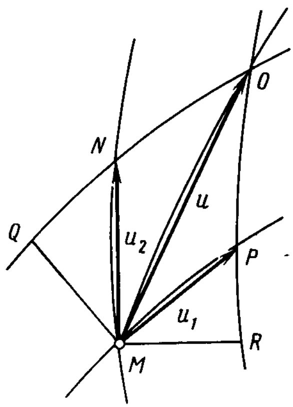
$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0.$$

В идеальной жидкости всякая твердая поверхность является поверхностью тока, и поэтому граничным условием для ψ на твердой стенке служит равенство $\psi_{\text{ст}} = \text{const}$. Таким образом, для функции тока приходим к задаче о решении уравнения $\nabla^2\psi = 0$ при граничном условии $\psi_{\text{ст}} = \text{const}$ (задача Дирихле), методы решения которой достаточно хорошо разработаны.

Поскольку уравнение Лапласа линейно, то сумма двух его частных решений φ_1 и φ_2 будет также решением этого уравнения. Если φ_1 и φ_2 суть потенциалы скорости некоторых течений, то сумма $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ является потенциалом некоторого третьего течения. Компоненты скорости последнего определяются формулами:

$$\begin{aligned} u_x &= \partial\varphi/\partial x = \partial\varphi_1/\partial x + \partial\varphi_2/\partial x = u_{x1} + u_{x2}; \\ u_y &= \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi_1/\partial y + \partial\varphi_2/\partial y = u_{y1} + u_{y2}; \\ u_z &= \partial\varphi/\partial z = \partial\varphi_1/\partial z + \partial\varphi_2/\partial z = u_{z1} + u_{z2}. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Рис. 7.1. Графическое сложение плоских потенциальных течений



Отсюда следует принцип суперпозиции (наложения) потенциальных потоков: *потенциальные потоки несжимаемой жидкости можно складывать; потенциалы скоростей и функции тока складываются при этом алгебраически, а векторы скоростей в соответствующих точках — геометрически.*

Принцип суперпозиции позволяет, суммируя простейшие течения, потенциалы скоростей для которых заранее известны, получать более сложные течения, которые приближенно воспроизводят реальные потоки в каналах, проточных частях машин и т. д. Особенно эффективен метод наложения для решения плоских задач.

Рассмотрим графический способ построения течений. Пусть известны линии тока двух складываемых плоских потоков (рис. 7.1). Если они нанесены на один чертеж, то образуется сетка, узлы (точки пересечения) которой при выполнении определенных условий являются точками линий тока результирующего течения. Чтобы выяснить эти условия, выберем две пары линий тока, образующие малый криволинейный параллелограмм $MNOP$; допустим, что они нанесены так, что стороны ячеек, которые примем прямыми, изображают в некотором масштабе соответствующие векторы скоростей. Проведем из точки M отрезки MQ и MR, перпендикулярные соответственно сторонам MP и MN. Тогда площадь параллелограмма можно выразить одним из двух равных произведений

$$MQ \cdot MP = MR \cdot MN.$$

Учитывая, что по условию построения $MP = u_1$ и $MN = u_2$, получаем соотношение

$$MQ \cdot u_1 = MR \cdot u_2,$$

которое выражает равенство расходов жидкости первого и второго потоков. При этом диагональ MO будет изображать в выбранном масштабе вектор результирующей скорости u, а плавная кривая, проведенная через точки M, O и последующие узлы сетки, — линию тока результирующего течения. Таким образом, для графического сложения двух плоских потоков следует провести их линии тока так, чтобы элементарные расходы между каждой парой соседних линий тока были одинаковы. Тогда результирующий поток получится описанным выше построением. Такой метод применим также и для осесимметричных течений.

7.2. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОТОКИ. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В п. 7.2—7.16 будут рассмотрены только установившиеся плоские потенциальные течения, для которых $u_z \equiv 0$. Как известно, для таких течений существуют функции φ и ψ, связанные соотношениями

$$u_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y;\ u_y = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x. \tag{7.4}$$

Уравнения (7.4) позволяют применить для описания плоских потенциальных течений несжимаемой жидкости аппарат теории функций комплексного переменного, с помощью которого успешно решаются многие частные задачи.

Будем рассматривать плоскость течения как плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ (рис. 7.2, *а*). Напомним другие формы этой переменной: тригонометрическую $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ [где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль числа z; $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ — его аргумент] и показательную $z = re^{i\theta}$.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что если две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ связаны соотношениями (7.4) (условиями Коши—Римана), то они являются соответственно действительной и мнимой частью некоторой функции комплексного переменного

$$w(z) = \varphi + i\psi,$$

которая обладает определенной конечной производной во всех точках области, где определены φ и ψ. Такая функция $w(z)$ называется аналитической. Таким образом, любой плоский потенциальный поток несжимаемой жидкости характеризуется аналитической функцией $w(z)$, называемой комплексным потенциалом *.

* Менее употребительный термин — характеристическая функция. Поскольку функции φ и ψ определены с точностью до постоянного слагаемого, то и функция w в общем случае включает такое слагаемое. Если его учет несущественен, эту постоянную будем опускать.

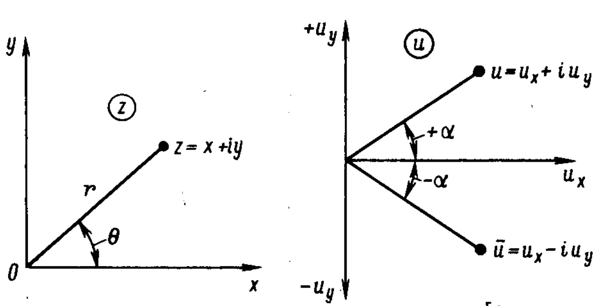


Рис. 7.2. Представление скорости в плоскости комплексной переменной

Очевидно также и обратное: любую аналитическую функцию $w(z)$ можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого плоского потенциального течения; отделив действительную и мнимую части этой функции, легко находим потенциал скоростей и функцию тока.

Выясним смысл производной dw/dz. При этом учтем, что производная функция комплексного переменного считается существующей лишь тогда, когда

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z) = dw/dz$$

не зависит от способа приближения Δz к нулю.

Можно поэтому в качестве Δz выбрать Δx и записать

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{w(z+\Delta z)-w(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,\ y)+i\psi(x+\Delta x,\ y)-\varphi(x,\ y)-i\psi(x,\ y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_x - iu_y.$$

Таким образом, производная комплексного потенциала по независимой переменной представляет собой комплексную переменную $\bar{u} = u_x - iu_y$, действительная часть которой равна проекции u_x скорости, а мнимая — взятой с обратным знаком проекции u_y; величину $\bar{u}$ назовем сопряженной скоростью. В комплексной плоскости u_x, u_y, называемой плоскостью годографа скорости, число $\bar{u}$ является, очевидно, сопряженным с числом $u = u_x + iu_y$, которое будем далее называть комплексной скоростью (рис. 7.2, *б*). Величины u и $\bar{u}$ можно представить в виде

$$u = u_x + iu_y = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |u|\,e^{i\alpha};$$

$$\bar{u} = u_x - iu_y = |u|(\cos\alpha - i\sin\alpha) = |u|\,e^{-i\alpha},$$

где $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ — модуль комплексной скорости; α — ее аргумент.

Очевидно, $|\bar{u}| = |u|$.

Выясним теперь свойства интеграла по произвольному замкнутому контуру L от сопряженной скорости:

$$\oint_L \bar{u}\,dz = \oint_L \frac{dw}{dz}\,dz = \oint_L dw = \oint_L (d\varphi + i\,d\psi).$$

Имеем

$$\mathrm{Re}\oint_L \bar{u}\,dz = \oint_L d\varphi = \oint_L \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = \oint_L u_x\,dx + u_y\,dy = \Gamma; \quad (7.5)$$

$$\mathrm{Im}\oint_L \bar{u}\,dz = \oint_L d\psi = Q, \quad (7.6)$$

где через Re и Im обозначены соответственно действительная и мнимая части комплексного числа.

Таким образом, действительная часть указанного интеграла равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, а мнимая — расходу жидкости через этот контур. Если суммарная интенсивность вихрей внутри контура равна нулю, то, согласно теореме Стокса, $\Gamma = 0$ и $\mathrm{Re} \oint \bar{u} dz = 0$. Расход Q через замкнутый контур будет отличен от нуля лишь в тех случаях, когда внутри контура есть источники или точки поглощения жидкости (стоки). При отсутствии источников и стоков $\mathrm{Im} \oint \bar{u}\, dz = 0$.

При наложении потенциальных течений их комплексные потенциалы складываются. Действительно,

$$w = \varphi + i\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + i(\psi_1 + \psi_2) =$$
$$= \varphi_1 + i\psi_1 + \varphi_2 + i\psi_2 = w_1 + w_2.$$

7.3. ПРОСТЕЙШИЕ ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Изучение плоских течений с помощью комплексного потенциала можно вести двояко. Во-первых, можно, задавшись конфигурацией линий тока или полем скоростей, определить вид функций φ, ψ, w, $\bar{u}$; во-вторых, можно, задавшись аналитической функцией w, выделить в ней действительную и мнимую части (т. е. φ и ψ), а также найти $\bar{u} = dw/dz$ и, следовательно, определить поле скоростей. Воспользуемся вторым способом для знакомства с простейшими частными видами плоских течений. Даваемые им apriori наименования оправдываются проводимым ниже анализом. Следует иметь в виду, что рассматриваемые далее простейшие течения, хотя и могут быть приближенно воспроизведены в опытах, но представляют лишь теоретический интерес, поскольку они служат теми элементами, из которых можно строить более сложные течения, воспроизводящие реальные физические и технические схемы.

1. Равномерный поток. Рассмотрим функцию $w = az$, где a — постоянное комплексное число. Поскольку $dw/dz = a$, то ясно, что величина a представляет собой сопряженную скорость, которая в данном случае постоянна во всей плоскости течения. Обозначив эту скорость через $\bar{u}_0$, находим

$$a = \bar{u}_0 = u_{0x} - iu_{0y} = |u_0| \mathrm{e}^{-i\alpha_0}.$$

Чтобы определить потенциал скорости φ и функцию тока ψ, запишем

$$w = \varphi + i\psi = (u_{0x} - iu_{0y})(x + iy) = u_{0x}x + u_{0y}y + i(u_{0x}y - u_{0y}x).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\varphi = u_{0x}x + u_{0y}y; \quad \psi = u_{0x}y - u_{0y}x. \tag{7.7}$$

Вдоль линий тока $\psi = \text{const}$, следовательно, их уравнение имеет вид

$$u_{0x}y - u_{0y}\,x = \text{const}.$$

Это есть уравнение семейства параллельных прямых, наклоненных к оси x под углом α_0, причем $\operatorname{tg}\alpha_0 = u_{0y}/u_{0x}$ (рис. 7.3, *а*). Легко убедиться, что эквипотенциали представляют собой другое семейство параллельных прямых, ортогональное к первому. В частном случае, когда $u_{0y} = 0$ $(\alpha_0 = 0)$, $w = u_{0x}z$, $\bar{u} = u_{0x}$, $\varphi = u_{0x}x$, $\psi = u_{0x}y$, получаем прямолинейный поток вдоль оси x. Если $\alpha_0 = \pi/2$, то этот поток направлен вдоль оси y и для него

$$w = -iu_{0y}z;\ \bar{u} = -iu_{0y};\ \varphi = u_{0y}y;\ \psi = -u_{0y}x. \tag{7.8}$$

2. **Источник (сток).** Пусть $w = A\ln z$, где A — постоянное действительное число. Его физический смысл можно установить, вычислив

$$\operatorname{Im}\oint_L \bar{u}\,dz = \operatorname{Im}\oint A\frac{d}{dz}\ln z\,dz = A\operatorname{Im}\oint_L \frac{dz}{z}.$$

Если контур интегрирования L охватывает точку $z = 0$, то $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Учитывая (7.6), получим $A\cdot 2\pi = Q$ или $A = Q/(2\pi)$. Эта величина определяет расход источника или стока, расположенного в начале координат, для которого

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln z. \tag{7.9}$$

Чтобы выделить действительную и мнимую части, представим z в виде показательной функции: $z = re^{i\theta}$. Тогда

$$w = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \varphi + i\psi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}; \tag{7.10}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{7.11}$$

Очевидно, линии тока ($\psi = \text{const}$ или $y/x = \text{const}$) представляют собой прямые, проходящие через начало координат, а эквипотенциали ($\varphi = \text{const}$ или $x^2 + y^2 = \text{const}$) — окружности с общим центром в начале координат (рис. 7.3, *б*).

Вычислим проекции скорости в полярных координатах:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r};\quad u_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial s_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0. \tag{7.12}$$

Следовательно, в поле источника (стока) скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от центра. Полагая, что скорость, направленная от центра к периферии (источник), поло-

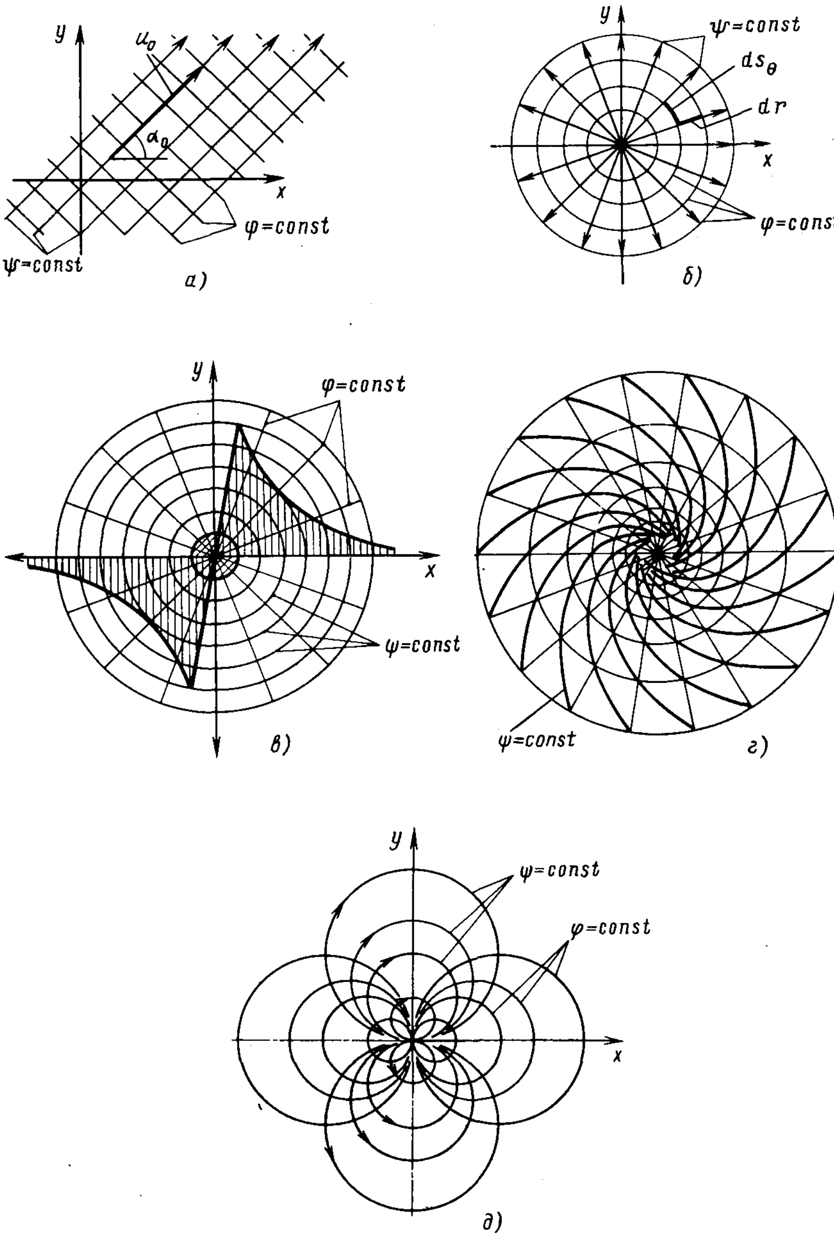


Рис. 7.3. Линии тока и эквипотенциали для поля:

а — равномерного потенциального потока; *б* — источника (стока); *в* — одиночного плоского вихря; *г* — вихреисточника (вихрестока); *д* — диполя жительна, получаем $Q > 0$. Тогда стоку будет соответствовать расход $Q < 0$. Обратим также внимание на то, что в точке $r = 0$ скорость обращается в бесконечность, т. е. центр источника является особой точкой.

Если источник (сток) расположен не в начале координат, а в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то для него

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0);\ \varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0}. \tag{7.13}$$

Нетрудно убедиться, что если в точках z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) расположены источники и стоки с расходами Q_i, то для результирующего течения

$$w = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} Q_i \ln(z - z_i).$$

3. Плоский вихрь. Пусть постоянная A в выражении комплексного потенциала $w = A\ln z$ будет чисто мнимой: $A = iB$ или $w = iB\ln z$. Вычислим

$$\operatorname{Re}\oint \bar{u}\,dz = \operatorname{Re}\oint_L iB\frac{dz}{z} = \operatorname{Re}\left(iB\oint_L\frac{dz}{z}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}(iB\cdot 2\pi i) = -2\pi B = \Gamma. \tag{7.14}$$

Следовательно, комплексный потенциал

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{7.15}$$

описывает некоторое течение с циркуляцией Γ.

Аналогично предыдущему находим

$$w = \varphi + i\psi = -\frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta),$$

откуда

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \tag{7.16}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7.17}$$

Следовательно, линии тока ($\psi = \text{const}$) в данном течении являются концентрическими окружностями с центром в начале координат ($x^2 + y^2 = \text{const}$), а эквипотенциали ($\varphi = \text{const}$) — прямыми, выходящими из той же точки (рис. 7.3, *в*). Такое течение создается прямолинейным вихревым шнуром (плоским вихрем). Существенно, что потенциальность данного течения нарушается в особой точке $r = 0$. Действительно, для любого контура, охватывающего начало координат согласно выражению (7.14), циркуляция Г равна одной и той же величине — $2\pi B$. Поэтому на основании теоремы Стокса можем заключить, что в начале координат расположен точечный вихрь, интенсивность которого равна указанному значению циркуляции. Во всех остальных точках плоскости течения движение безвихревое, хотя частицы имеют круговые траектории (линии тока). В этом нет противоречия, так как движение частиц по круговой траектории происходит без вращения, т. е. поступательно.

Составляющие скоростей в поле вихря имеют значения

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \; u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \tag{7.18}$$

т. е. скорость в произвольной точке направлена по касательной к окружности и обратно пропорциональна радиусу последней. Иначе, справедлив закон $ur = \text{const}$. Заметим, что знак u_θ совпадает со знаком Г. Поэтому, считая положительным направление скорости, показанное на рис. 7.3, *в*, принимаем $\Gamma > 0$ при движении в поле вихря против часовой стрелки.

Для вихря, расположенного в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, комплексный потенциал имеет вид

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_0) \tag{7.19}$$

и соответственно

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{7.20}$$

Если имеется система вихрей, расположенных в точках z_i, то в соответствии с принципом суперпозиции

$$w = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i \ln(z - z_i). \tag{7.21}$$

4. Вихреисточник (вихресток). Пользуясь принципом суперпозиции, образуем течение наложением источника и плоского вихря. Для результирующего течения

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi}\ln z, \tag{7.22}$$

или

$$\varphi + i\psi = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta),$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}(Q\ln r + \Gamma\theta); \; \psi = \frac{1}{2\pi}(Q\theta - \Gamma\ln r). \tag{7.23}$$

Уравнение линий тока представим в виде

$$Q\theta - \Gamma\ln r = -\Gamma\ln C, \text{ или } r = Ce^{\frac{Q}{\Gamma}\theta},$$

где C — постоянная.

Кривые, описываемые этим уравнением, представляют собой логарифмические спирали (рис. 7.3, *г*). Соответствующее течение называется течением от вихреисточника ($Q > 0$) или от вихрестока ($Q < 0$). Легко убедиться, что оно обладает особой точкой в начале координат.

Из рассмотренных зависимостей следует, что закон распределения скоростей для течения от источника, вихря и вихреисточника имеет вид

$$u = \mathrm{const}/r.$$

Выясним закон распределения давлений в поле этих течений. Если p_0 — давление в бесконечности, где $u = 0$, то согласно уравнению Бернулли в произвольной точке

$$p/\rho + u^2/2 = p_0/\rho,$$

откуда

$$p = p_0 - \frac{\rho u^2}{2} = p_0 - \frac{\rho C_0^2}{2r^2},$$

где $C_0 = \mathrm{const}$.

Поскольку в идеальной жидкости не может быть отрицательных давлений (напряжений растяжения), предельным значением давления является $p = 0$. Тогда из последней формулы следует, что рассматриваемые течения могут существовать лишь вне окружности радиусом

$$r_* = C_0 \sqrt{\rho/(2p_0)}.$$

В связи с этим полученные выше зависимости описывают течение вне ядра радиусом r_*. Течение в пределах ядра ($r < r_*$) можно представить соответственно общему характеру потока. Так, например, ядро вихря можно представить как массу жидкости, вращающуюся по закону твердого тела $u = \omega r$. Тогда получится поле скоростей, показанное на рис. 7.3, *в*.

Так как параметры C_0 и p_0 произвольны, r_* может иметь любое значение, в том числе и сколь угодно малое. Поэтому можно рассматривать точечные вихрь, источник или вихреисточник.

5. Диполь. Расположим источник в точке $z = -\varepsilon$ и сток того же расхода в точке $z = \varepsilon$. Тогда комплексный потенциал результирующего течения

$$w(z, \varepsilon) = \frac{|Q|}{2\pi} \ln(z + \varepsilon) - \frac{|Q|}{2\pi} \ln(z - \varepsilon).$$

Если сближать источник и сток ($\varepsilon \to 0$), то в пределе при $\varepsilon = 0$ сток поглотит источник [$w(z, 0) \equiv 0$], т. е. всякое течение будет отсутствовать. Однако если одновременно со сближением источника и стока увеличивать их расход, то результат будет иным. Действительно, пусть при $\varepsilon \to 0$ $2\varepsilon |Q| = M = \mathrm{const}$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} w(z, \varepsilon) = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(z+\varepsilon) - \ln(z-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z = \frac{M}{2\pi z},$$

т. е. получено течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = M/(2\pi z), \tag{7.24}$$

которое называется течением от диполя. Выясним его характер. Для этого представим выражение (7.24) в виде

$$\varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi}\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{M}{2\pi}\frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r};$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}. \tag{7.25}$$

Постоянную M в этих формулах называют моментом диполя, а ось x, на которой расположены исходные источник и сток, — осью диполя.

Уравнение линий тока получим из выражения (7.25):

$$x^2 + y^2 = Cy \text{ или } x^2 + (y - C/2)^2 = C^2/4.$$

Это семейство окружностей, касающихся вещественной оси в начале координат (рис. 7.3, *д*). Аналогичным способом нетрудно показать, что эквипотенциали образуют семейство окружностей, имеющих в качестве общей касательной в начале координат мнимую ось.

Вычислим компоненты скорости

$$u_x = \frac{M}{2\pi}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad u_y = -\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Из этих формул следует, что в первой четверти (рис. 7.3, *д*) во всех точках, где $y > x$ (левее биссектрисы координатного угла), будет $u_x > 0$ и $u_y < 0$, но в точках, где $y < x$ (правее биссектрисы), $u_x < 0$ и $u_y < 0$. Жидкость как бы вытекает из начала координат в сторону отрицательной оси x и, описав окружность, снова втекает в начало координат. Естественно, что реализовать в опыте точно такое движение невозможно, но это несколько абстрактное теоретическое течение играет важную роль в методах построения потоков, близких к действительным.

Диполь, так же как источник и вихрь, обладает особой точкой в начале координат, ибо

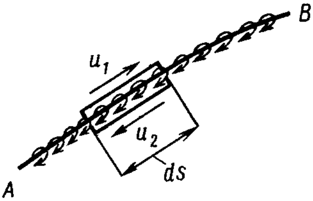
$$\frac{dw}{dz} = \bar{u} = -\frac{M}{2\pi z^2}. \tag{7.26}$$

Если диполь расположен в точке $z = z_0$, то

$$w = \frac{M}{2\pi(z - z_0)} \text{ и } \frac{dw}{dz} = \bar{u} = -\frac{M}{2\pi(z - z_0)^2}.$$

6. Непрерывное распределение особенностей. До сих пор рассматривалось только дискретное расположение источников,

Рис. 7.4. Схема вихревого слоя



вихрей, диполей, которые часто называют особенностями. Но при решении некоторых задач для потенциальных течений необходимо оперировать поверхностями или кривыми, на которых особенности расположены в каждой точке, т. е. распределены непрерывно.

Представим, что вдоль некоторой цилиндрической поверхности, след которой на плоскости чертежа изображается кривой AB (рис. 7.4), непрерывно расположены точечные вихри. Будем называть совокупность последних вихревым слоем. В теории идеальной жидкости вихревой слой может служить моделью существующих в реальных жидкостях поверхностей, при переходе через которые скорость течения изменяется очень резко. Такие поверхности называют поверхностями разрыва.

Нетрудно представить, что если в жидкости единственным источником движения является вихревой слой, то по одну его сторону движение направлено вправо (скорость u_1), а по другую — влево (скорость u_2). Выделив малым замкнутым контуром dl элемент вихревого слоя ds, найдем циркуляцию по этому контуру:

$$d\Gamma = |u_1|\,ds - |u_2|\,ds = (|u_1| - |u_2|)\,ds.$$

Величину

$$\gamma = d\Gamma/ds = |u_1| - |u_2|$$

можно назвать распределенной по длине циркуляцией вихревого слоя. Как видно из последней формулы, она равна разрыву скорости $\Delta u = |u_1| - |u_2|$.

Чтобы найти общее выражение комплексного потенциала для произвольного вихревого слоя, представим вихри, сосредоточенные на малом участке ds как один точечный вихрь с циркуляцией $d\Gamma$. Комплексный потенциал течения, создаваемого этим вихрем, согласно выражению (7.19), имеет вид

$$dw = -\frac{i\,d\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_s),$$

где z_s — координата точки, определяющей положение участка ds.

В соответствии с принципом суперпозиции величина

$$w = -\frac{i}{2\pi}\int_L \ln(z - z_s)\,d\Gamma$$

представляет собой комплексный потенциал течения, вызванного всеми вихрями, расположенными на дуге L. Иначе,

$$w = -\frac{i}{2\pi}\int_L \gamma\ln(z - z_s)\,ds. \tag{7.27}$$

Если, в частности, вихревой слой сосредоточен на прямолинейном отрезке $[-l, +l]$, то

$$w = -\frac{i}{2\pi}\int_{-l}^{+l}\gamma(\xi)\ln(z-\xi)\,d\xi, \qquad (7.28)$$

где ξ — координата точки на указанном отрезке.

Проекции скорости этого течения

$$u_x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l}\frac{\gamma(\xi)\,y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}; \qquad u_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l}\frac{(x-\xi)\,\gamma(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}. \qquad (7.29)$$

Для вычисления скоростей по этим формулам необходимо знать функцию $\gamma(\xi)$. Ее можно задать, и определить поле скоростей по заданной интенсивности вихревого слоя. Однако при решении технических задач можно составить уравнение, определяющее эту функцию (подробнее см. п. 7.15).

При непрерывном расположении источников и стоков вдоль некоторой кривой L обозначим через dQ их расход на участке кривой ds. Тогда рассуждения, аналогичные приведенным о вихревом слое, приводят к выражению для комплексного потенциала течения, вызванного слоем источников и стоков:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_{L} q(\xi)\ln(z-\xi)\,d\xi,$$

где $q = dQ/ds$ — распределенная плотность особенностей.

Аналогичные формулы можно получить для непрерывного распределения диполей.

7.4. БЕСЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ПОТОКОМ

Используя принцип суперпозиции, найдем результат наложения равномерного потока со скоростью u_0, направленной вдоль вещественной оси, на диполь с моментом M. Комплексный потенциал результирующего течения, потенциал скорости и функцию тока получаем из формул предыдущего параграфа:

$$W = W_{\text{равн}} + W_{\text{дип}} = u_0 z + \frac{M}{2\pi z};$$

$$\varphi = u_0 x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = r\cos\theta\left(u_0 + \frac{M}{2\pi r}\right);$$

$$\psi = u_0 y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = r\sin\theta\left(u_0 - \frac{M}{2\pi r}\right),$$

где $W_{\text{равн}}$ и $W_{\text{дип}}$ — комплексные потенциалы равномерного потока и диполя.

Конфигурация линий тока определяется уравнением $\varphi = C$ или

$$y\left(u_0 - \frac{M}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right) = C.$$

Выясним, какая линия тока соответствует значению $C = 0$. Уравнение этой линии распадается на два:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi u_0}.$$

Первое из них есть уравнение оси x, а второе — уравнение окружности радиусом

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_0}}.$$

Следовательно, линия тока $C = 0$ состоит из оси x и этой окружности. Чтобы представить общий характер течения, следует построить другие линии тока (рис. 7.5). Если принять во внимание, что в идеальной жидкости условие, определяющее любую линию тока ($u_n = 0$), совпадает с условием на твердой границе, то можно окружность радиусом r_0 (линию тока) заменить твердой поверхностью, причем течение от этой операции не нарушится. Тогда, не учитывая течение внутри окружности, получим ее обтекание (точнее — обтекание круглого цилиндра) потенциальным потоком с постоянной скоростью u_0 вдалеке от цилиндра (в бесконечности). Исключая из рассмотрения момент диполя $M = 2\pi u_0 r_0^2$, получаем окончательные выражения для функций W, φ и ψ потока, обтекающего круглый цилиндр:

$$W = u_0 (z + r_0^2/z); \tag{7.30}$$

$$\varphi = u_0 x \left(1 + \frac{r_0^2}{x^2+y^2}\right) = u_0 r \cos\theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right); \tag{7.31}$$

$$\psi = u_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2+y^2}\right) = u_0 r \sin\theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right). \tag{7.32}$$

Сопряженная скорость этого течения

$$\frac{dW}{dz} = \bar{u} = u_x - iu_y = u_0\left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right).$$

Составляющие скорости в полярных координатах

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_0 \cos\theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right); \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -u_0 \sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right). \tag{7.33}$$

На поверхности цилиндра $u_r|_{r=r_0} = 0$, $u_\theta|_{r=r_0} = -2u_0 \times$ $\times \sin\theta$. Здесь знак минус означает, что скорость u_θ направлена в сторону отрицательной оси s_θ, положительное направление которой определяется направлением отсчета координатного угла θ (рис. 7.6). Можно видеть, что на поверхности цилиндра существуют две критические точки K_1 ($\theta = \pi$) и K_2 ($\theta = 0$) (рис. 7.5

и 7.6), где скорость обращается в нуль, а при $\theta = \pm\pi/2$ она достигает максимального значения $|u_m| = 2u_0$. Из формул (7.33) следует, что при $r \to \infty$ скорость приближается к u_0, которую можно назвать скоростью невозмущенного потока или скоростью в бесконечности. Эпюра распределения скоростей на луче $\theta = +\pi/2$ показана на рис. 7.6.

Закон распределения давления по поверхности цилиндра можно найти, используя уравнение Бернулли. Пренебрегая действием массовых сил, запишем это уравнение для двух точек, одна из которых расположена вдалеке от цилиндра (в бесконечности), а вторая на его поверхности:

$$p_0 + \rho u_0^2/2 = p + \rho\,|u|^2/2.$$

Будем называть коэффициентом давления $\bar{p}$ разность давлений p и p_0, отнесенную к динамическому давлению $\rho u_0^2/2$:

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2/2}. \tag{7.34}$$

Принимая во внимание полученное выше выражение для скорости на поверхности цилиндра, из уравнения Бернулли получаем

$$\bar{p} = 1 - |u|^2/u_0^2 = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{7.35}$$

Зависимость $\bar{p}$ (θ) представляют в виде полярной диаграммы (рис. 7.7), при построении которой значения $\bar{p}$ откладывают от поверхности окружности по радиусу, внутрь нее, если $\bar{p} > 0$, и наружу, если $\bar{p} < 0$. Другим способом представления этой зависимости является координатная диаграмма (рис. 7.8) (по оси абсцисс отложены координатные углы $\beta = 180 - \theta$, отсчитываемые от критической точки K_1, по ходу часовой стрелки). На обеих диаграммах кроме теоретической зависимости $\bar{p}$ (θ) нанесены кривые распределения давления по поверхности цилиндра, полученные экспериментально.

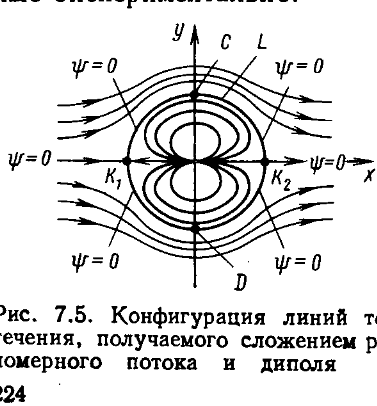


Рис. 7.5. Конфигурация линий тока течения, получаемого сложением равномерного потока и диполя

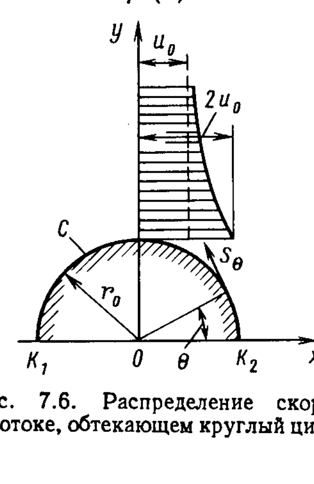


Рис. 7.6. Распределение скоростей в потоке, обтекающем круглый цилиндр

Можно видеть, что в лобовой части обтекаемого тела теоретическая и опытные кривые удовлетворительно согласуются, однако в тыльной части они резко расходятся. Это связано с различием полей скорости за тыльной стороной цилиндра. Если теоретическая конфигурация линий тока симметрична относительно осей x и y (см. рис. 7.6), то при обтекании цилиндра реальной (вязкой) жидкостью за тыльной стороной его поверхности образуется зона, заполненная оторвавшимися вихрями, наличие которых приводит к снижению давления ($\bar{p} < 0$). Физической причиной возникновения вихревой зоны является действие вязкости, которое проявляется в относительно тонком пограничном слое. Механизм этого явления будет рассмотрен в гл. 8 и 10.

Вычислим равнодействующую сил давления по поверхности цилиндра. Элементарная сила давления (рис. 7.9)

$$dP = -p\mathbf{n}dS = -p\mathbf{n}r_0 b d\theta,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней к поверхности цилиндра нормали; b — размер вдоль образующей цилиндра.

Проекция этой силы на оси

$$dP_x = -pr_0 b \cos\theta d\theta \text{ и}$$

$$dP_y = -pbr_0 \sin\theta\, d\theta,$$

а проекции результирующей

$$P_x = -br_0 \int_0^{2\pi} p\cos\theta\, d\theta \quad \text{и} \quad P_y = -br_0 \int_0^{2\pi} p\sin\theta\, d\theta.$$

Поскольку на поверхности цилиндра $p = p_0 + \bar{p}\rho u_0^2/2$,

$$P_x = -br_0 \int_0^{2\pi} \left[p_0 + (1 - 4\sin^2\theta)\frac{\rho u_0^2}{2}\right]\cos\theta\, d\theta.$$

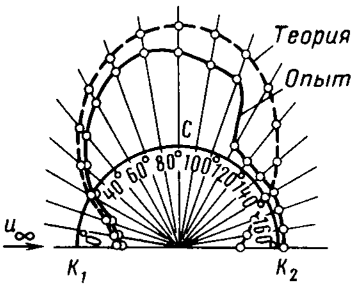


Рис. 7.7. Полярная диаграмма распределения давлений по поверхности круглого цилиндра

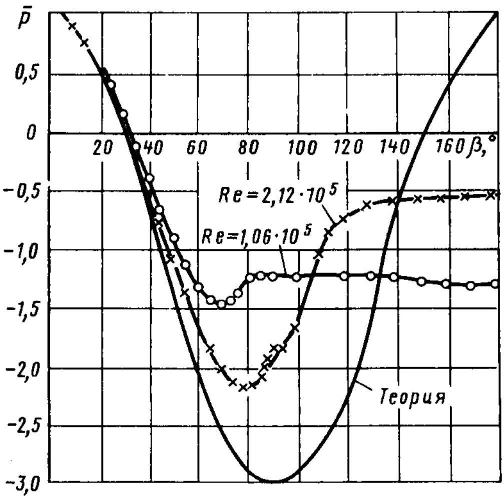


Рис. 7.8. Координатная диаграмма распределения давлений по поверхности обтекаемого цилиндра

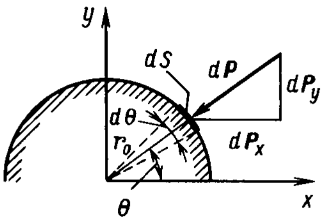


Рис. 7.9. Схема для вычисления силы давления, действующей на поверхность круглого цилиндра

Вычисляя интеграл, убеждаемся, что $P_x = 0$. Аналогичным путем находим, что $P_y = 0$. К этому результату можно также прийти, исходя из симметричности диаграммы распределения давлений по поверхности цилиндра (см. рис. 7.7).

Таким образом, при обтекании круглого цилиндра равномерным в бесконечности безвихревым потоком равнодействующая сил давления по поверхности цилиндра равна нулю. Этот результат известен в гидромеханике как парадокс Даламбера *, но он представляется парадоксальным лишь при сопоставлении с экспериментальными фактами, которые всегда обнаруживают наличие силы, воздействующей со стороны потока на любое обтекаемое тело. Однако с точки зрения теории идеальной жидкости этот результат является вполне логичным следствием той идеализации, которую мы допустили, исключив из рассмотрения силы вязкости, являющиеся причиной резко отличного от теоретического распределения скоростей вблизи поверхности цилиндра и связанного с ним распределения давлений. Кроме того, силы вязкости проявляются непосредственно в виде касательных напряжений на поверхности обтекаемого тела.

Но тогда уместно поставить вопрос: нельзя ли, оставаясь в рамках теории идеальной жидкости, внести в поток дискретные или распределенные вихри, создающие перераспределение скоростей давлений по поверхности обтекаемого тела, которое обусловило бы наличие не равной нулю силы воздействия потока на тело? В следующих параграфах будет показано, что таким способом действительно можно получить теоретические выражения для некоторых гидродинамических сил, существующих и в реальных условиях.

7.5. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

Наложим на бесциркуляционный поток, обтекающий круглый цилиндр, одиночный плоский вихрь с центром в начале координат и циркуляцией Г. Вращение вихря выберем по часовой стрелке (при таком направлении вращения вихря знак его комплексного потенциала в выражении (7.15) следует изменить на обратный, тогда через Г будет обозначаться абсолютное значе-

* Жан Лерон Даламбер (1717—1783) — выдающийся французский математик, механик и философ. Сформулировал один из фундаментальных принципов механики, выполнил исследования по гидромеханике.

ние циркуляции). В результате такого сложения снова получим поток, обтекающий круглый цилиндр. Действительно, в результате сложения прямолинейного потока и диполя образуется течение, имеющее одну из линий тока в виде окружности L, которую мы и приняли за след поверхности цилиндра (см. рис. 7.5). Но в прибавляемом дополнительно вихре все линии тока являются окружностями. Следовательно, среди них найдется и окружность L', совпадающая с L. Поскольку векторы скоростей в совпадающих точках окружностей L' и L коллинеарны, новая линия тока, получаемая в результате сложения, также будет окружностью того же радиуса; примем ее за след поверхности цилиндра. Очевидно, все другие линии тока в результате сложения изменят свою форму. Суммированием получим комплексный потенциал нового течения

$$W = W_{\text{равн}} + W_{\text{дип}} + W_{\text{вих}} = u_0\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z, \quad (7.36)$$

а также потенциал скорости и функцию тока

$$\varphi = u_0 r\cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = u_0 x\left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$(7.37)$$

$$\psi = u_0 r\sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = u_0 y\left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2}\right) + $$
$$+ \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2},$$

где $W_{\text{вих}}$ — комплексный потенциал вихря.

Сопряженная скорость

$$\bar{u} = u_0\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z},$$

а проекции скорости в полярных координатах

$$u_r = u_0\cos\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right); \qquad u_\theta = -u_0\sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (7.38)$$

На поверхности цилиндра при $r = r_0$

$$u_r|_{r=r_0} = 0 \quad \text{и} \quad u_\theta|_{r=r_0} = -2u_0\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (7.39)$$

Выясним наличие критических точек и их положение, для чего положим $u_\theta|_{r=r_0} = 0$. Тогда

$$\sin\theta_{\text{кр}} = -\frac{\Gamma}{4\pi u_0 r_0}. \quad (7.40)$$

Возможны три случая:

1. $\Gamma < 4\pi u_0 r_0$. Из выражения (7.40) следует, что $\theta_{\text{кр}}$ имеет два значения в третьей и четвертой четвертях, т. е. на поверхности цилиндра имеются две критические точки K_1 и K_2 (рис. 7.10, *а*).

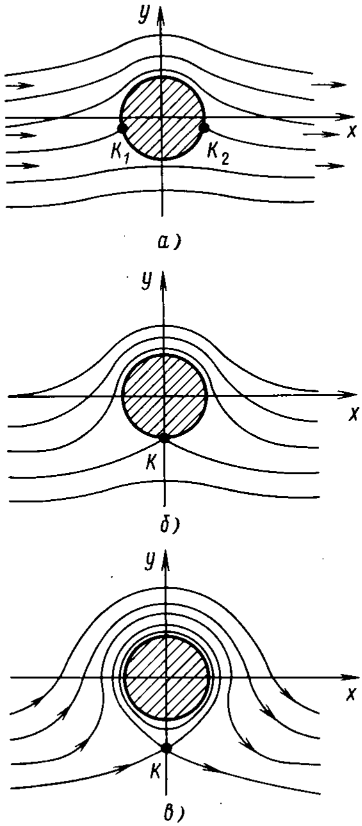


Рис. 7.10. Возможные конфигурации линий тока потенциального потока, обтекающего круглый цилиндр с циркуляцией

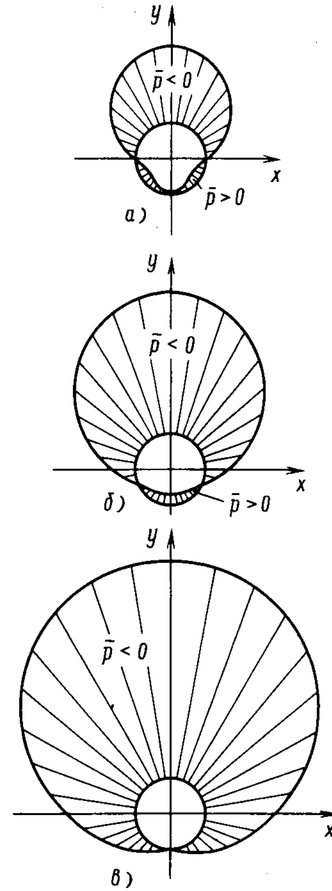


Рис. 7.11. Полярные диаграммы распределения давления по поверхности цилиндра при обтекании его потоком с различными значениями циркуляции: *а* — $\Gamma/(4\pi u_0 r_0) = 0{,}5$; *б* — $\Gamma/(4\pi u_0 r_0) = 1$; *в* — $\Gamma/(4\pi u_0 r_0) = 1{,}5$

2. $\Gamma = 4\pi u_0 r_0$. В этом случае $\sin\theta_{кр} = -1$ или $\theta_{кр} = 270°$. Следовательно, на поверхности цилиндра расположена одна критическая точка K (рис. 7.10, *б*).

3. $\Gamma > 4\pi u_0 r_0$. Поскольку $\sin\theta_{кр}$ не может быть больше единицы, для этого случая на поверхности цилиндра нет ни одной критической точки. Более подробный анализ показывает, что точка с нулевой скоростью расположена внутри потока на петлеобразной линии тока, ограничивающей замкнутую область вблизи поверхности цилиндра, в которой происходит циркуляционное течение (рис. 7.10, *в*).

Принимая во внимание выражение (7.39), для коэффициента давления получим

$$\bar{p} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi u_0 r_0}\right)^2 = 1 - 4\left(\sin\theta + \frac{\Gamma}{4\pi u_0 r_0}\right)^2.$$

Кривые $\bar{p} = f(\theta)$ (рис. 7.11) показывают, что эпюры давлений симметричны относительно оси y, а это свидетельствует о равенстве нулю проекции P_x силы давления на цилиндр. Однако эти эпюры несимметричны относительно оси x, следовательно, должна существовать не равная нулю проекция этой силы на ось y. Убедимся в этом:

$$P_y = -b\int_0^{2\pi} p r_0 \sin\theta \, d\theta =$$

$$= -b r_0 \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2}\left[1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi u_0 r_0}\right)^2\right]\right\} \sin\theta \, d\theta.$$

Вычислив интеграл, получим

$$P_y = b\rho u_0 \Gamma. \qquad (7.41)$$

Чтобы получить направление силы P_y, следует вектор скорости u_0 повернуть на угол $\pi/2$ в направлении, противоположном циркуляции. Эта сила называется подъемной или поперечной силой Жуковского. Она является результатом того перераспределения давлений по поверхности цилиндра, которое вызвано действием присоединенного к потенциальному потоку вихря. Определяемую формулой (7.41) поперечную силу можно получить и опытным путем, создав условия обтекания цилиндра, близкие к теоретическим. Этого можно достигнуть, если круглый цилиндр, обтекаемый потоком реальной жидкости, вращать вокруг своей оси. Тогда наблюдается картина обтекания, показанная на рис. 7.12, весьма сходная с теоретической (см. рис. 7.10), и возникает поперечная сила Жуковского (эффект Магнуса). Это позволяет предполагать, что не только для частного случая обтекания круглого цилиндра, но и для случаев обтекания тел других форм можно, внося в потенциальный поток некоторую систему вихрей, получать такие течения, которые близки к наблюдаемым и в которых действуют гидродинамические силы, совпадающие с измеряемыми в опытах.

Формула (7.41) дает частное выражение теоремы Жуковского о подъемной силе, доказательство которой в общем виде приведено дальше.

Выше были установлены комплексные потенциалы потоков, обтекающих круглый цилиндр вдоль вещественной оси. Найдем более общее выражение для циркуляционного обтекания вдоль произвольного направления под углом α к этой оси (рис. 7.13). Рассмотрим вначале бесциркуляционное обтекание вдоль мнимой оси. Его можно получить, если повернуть весь поток, изученный в п. 7.4, на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Такая операция математически будет реализована, если в выражении (7.30)

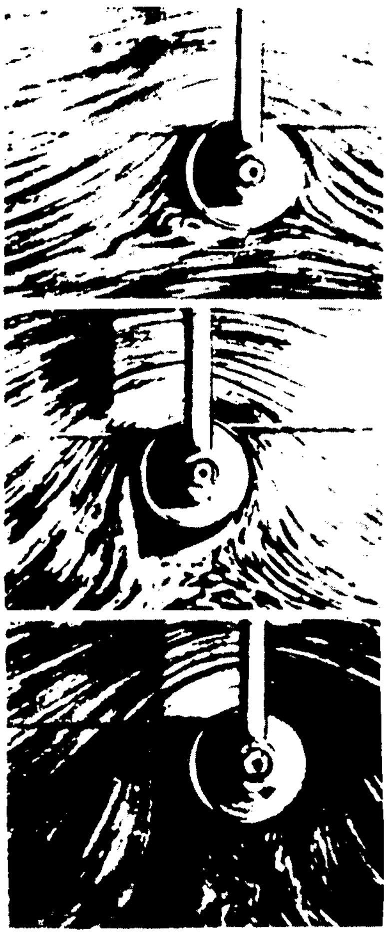


Рис. 7.12. Фотографии потока вязкой жидкости, обтекающего вращающийся цилиндр

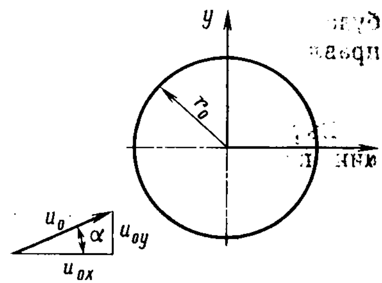


Рис. 7.13. Схема для определения комплексного потенциала потока, обтекающего круглый цилиндр под углом α к вещественной оси

и других заменить z новой переменной $z_1 = iz$. Действительно, умножение на мнимую единицу изменяет (увеличивает на угол $\pi/2$) только аргумент комплексного числа, не изменяя его модуля. Поэтому картина течения (см. рис. 7.5) в плоскости переменного z_1 окажется повернутой на угол $\pi/2$. Комплексный потенциал этого течения в плоскости z_1 будет иметь вид

$$W(z_1) = u_0\left(\frac{z_1}{i} + \frac{ir_0^2}{z_1}\right) = -iu_0\left(z_1 - \frac{r_0^2}{z_1}\right).$$

Вернемся к плоскости z и сложим три течения: обтекание цилиндра вдоль действительной оси со скоростью u_{0x}, обтекание цилиндра вдоль мнимой оси со скоростью u_{0y} и одиночный плоский вихрь с циркуляцией Г.

Поскольку все три течения имеют линию тока в виде окружности $r = r_0$, то и результирующий поток будет иметь такую линию тока. Его комплексный потенциал имеет вид

$$W(z) = u_{0x}\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) - iu_{0y}\left(z - \frac{r_0^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z =$$

$$= (u_{0x} - iu_{0y})\,z + (u_{0x} + iu_{0y})\frac{r_0^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

или

$$W(z) = \bar{u}_0 z + u_0 \frac{r_0^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \qquad (7.42)$$

Разумеется, поперечная сила при таком обтекании цилиндра будет той же, что и при течении вдоль вещественной оси, но направление ее будет ортогонально к направлению вектора:

$$u_0 = u_{0x} + iu_{0y} = |u_0| e^{i\alpha}.$$

Выражение (7.42) используется при решении задач об обтекании пластины.

7.6. ФОРМУЛЫ ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СИЛ ДАВЛЕНИЯ НА ОБТЕКАЕМОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЛО

При обтекании цилиндрического тела произвольного профиля плоским потенциальным потоком силовое воздействие потока на тело сводится в общем случае не только к силе Жуковского, но и к некоторому гидродинамическому моменту. Сила Жуковского при этом является результирующей элементарных сил давления, распределенных по поверхности тела, или главным вектором сил давления, а момент этой силы — главным моментом.

С. А. Чаплыгиным * были установлены общие формулы, позволяющие выразить оба эти вектора через комплексный потенциал течения.

Для вывода формул Чаплыгина рассмотрим обтекание цилиндра произвольного профиля потенциальным потоком в плоскости комплексного переменного z (рис. 7.14). Как уже известно (см. п. 7.4), главный вектор сил давления жидкости на единицу длины цилиндрического тела

$$\mathbf{P} = -\oint_L p\mathbf{n}\, ds$$

имеет проекции на оси координат

$$P_x = -\oint_L p \sin\theta\, ds; \qquad P_y = +\oint_L p\cos\theta\, ds,$$

где L — длина контура тела; ds — элемент длины контура.

Следует иметь в виду, что углы θ в формулах п. 7.4 и в последних формулах отличаются на $\pi/2$.

Введем в рассмотрение комплексное выражение главного вектора

$$P = P_x + iP_y$$

---

* Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942) — выдающийся советский гидроаэромеханик, академик, Герой Социалистического Труда. С 1921 г. научный руководитель ЦАГИ. Автор фундаментальных работ о течениях газа с околозвуковыми скоростями, о газовых струях, о силах, действующих на обтекаемые тела, по внутренней баллистике и другим разделам гидродинамики.

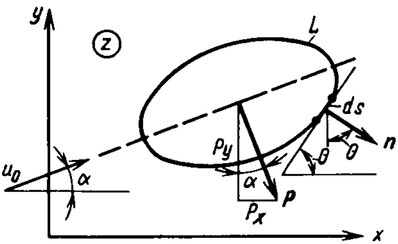


Рис. 7.14. Схема для вывода формул Чаплыгина

и сопряженное ему значение

$$\bar{P} = P_x - iP_y.$$

Для $\bar{P}$ получаем

$$\bar{P} = -\oint_L p(\sin\theta + i\cos\theta)\,ds =$$

$$= -i\oint_L p(\cos\theta - i\sin\theta)\,ds = -i\oint_L p e^{-i\theta}\,ds.$$

Вдоль контура

$$dz = ds e^{i\theta}; \qquad d\bar{z} = ds e^{-i\theta}; \qquad d\bar{z} = dz e^{-2\theta i}.$$

Следовательно,

$$\bar{P} = -i\oint_L p\,d\bar{z}.$$

Ввиду потенциальности потока $p + \rho|u|^2/2 = \text{const}$ — для всей области течения, включая контур L тела. Учитывая, что $\oint d\bar{z} = 0$, находим

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2}\oint_L |u|^2\,d\bar{z} = \frac{i\rho}{2}\oint |u|^2 e^{-2\theta i}\,dz.$$

Поскольку контур тела является линией тока, вдоль него $ds \parallel u$. Следовательно,

$$u = |u|e^{i\theta}; \qquad \bar{u} = |u|e^{-i\theta}; \qquad (\bar{u})^2 = |u|^2 e^{-2\theta i}; \qquad |u|^2 = (\bar{u})^2 e^{2\theta i}.$$

Тогда

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2}\oint_L (\bar{u})^2\,dz = \frac{i\rho}{2}\oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz. \tag{7.43}$$

Общее векторное выражение главного момента сил давления имеет вид

$$L_0 = \oint_L r \times dP = -\oint_L (r \times n)\,p\,ds,$$

где $r(x, y)$ — радиус-вектор точки, лежащей на контуре L.

Проекция главного момента на ось, нормальную к плоскости чертежа, получается по правилу проектирования векторного произведения

$$L_0 = -\oint_L (xn_y) - (yn_x)\,\rho\,ds.$$

Учитывая, что $n_x = \sin\theta$ и $n_y = -\cos\theta$, получаем

$$L_0 = \oint_L (x\cos\theta + y\sin\theta)\, p\, ds = \oint_L p\,(x\,dx + y\,dy).$$

Непосредственный проверкой убеждаемся, что $x\,dx + y\,dy = \operatorname{Re} z\, d\bar{z}$. Следовательно,

$$L_0 = \operatorname{Re} \oint_L pz\, d\bar{z}.$$

Используя уравнение Бернулли и снова заменяя $d\bar{z}$ на dz, находим

$$L_0 = -\operatorname{Re} \frac{\rho}{2} \oint_L (\bar{u})^2\, z\, dz$$

или

$$L_0 = -\operatorname{Re} \frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 z\, dz. \tag{7.44}$$

Формулы (7.43) и (7.44) являются искомыми формулами Чаплыгина, из которых следует, что силовые характеристики безвихревого потока, как и кинематические, можно выразить через комплексный потенциал.

Можно показать, что для определения величин $\overline{P}$ и L_0 не обязательно знать полное выражение комплексного потенциала, а достаточно иметь коэффициенты первых трех членов разложения функции $\bar{u} = dW/dz$ в ряд Лорана. Действительно, в теории функций комплексного переменного доказывается, что всякую функцию, аналитическую вне окружности некоторого радиуса r_0 с центром в начале координат, стремящуюся к конечному пределу в бесконечности, можно представить равномерно сходящимся рядом Лорана вида

$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots$$

Сопряженная скорость $\bar{u} = dW/dz$ удовлетворяет этим требованиям, поэтому, если C — окружность, охватывающая контур L обтекаемого тела и начало координат, то вне этой окружности

$$\bar{u} = \frac{dW}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots \tag{7.45}$$

Если $z \to \infty$, то $\bar{u} \to \bar{u}_0$ и, следовательно, $A_0 = \bar{u}_0$. Поскольку ряд (7.45) сходится равномерно, его можно проинтегрировать почленно, тогда

$$\oint_C \bar{u}\, dz = \oint_C A_0\, dz + \oint_C \frac{A_1}{z} dz + \oint_C \frac{A_2}{z^2}\, dz + \cdots$$

Все интегралы правой части последней формулы, кроме второго, равны нулю. Так как $\oint_C z^{-1}\, dz = 2\pi i$,

$$\oint_C \bar{u}\, dz = 2iA_1.$$

С другой стороны,

$$\oint_C \bar{u}\, dz = \oint_C \frac{dW}{dz}\, dz = \oint_C dW = \oint_C d\varphi + i\, d\psi = \oint_C d\varphi = \Gamma,$$

поскольку $\oint_C d\psi = Q$ — расход жидкости через контур равен нулю из-за отсутствия источников и стоков.

Таким образом,

$$A_1 = \Gamma/(2\pi i).$$

Через найденные коэффициенты A_0 и A_1 можно выразить комплексное значение главного вектора гидродинамических сил. Заметим, что поскольку между контуром L тела и окружностью C нет особых точек, то

$$\oint_L \bar{u}^2\, dz = \oint_C \bar{u}^2\, dz.$$

Согласно выражениям (7.43) и (7.45)

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_L \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots\right)^2 dz =$$

$$= \frac{i\rho}{2} \oint_L \left(A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2}{z^2} + \frac{2A_0A_2}{z^2} + \frac{2A_1A_2}{z^3} + \cdots\right) dz =$$

$$= \frac{i\rho}{2} \oint_L \frac{2A_0A_1}{z}\, dz = \frac{i\rho}{2} 2A_0A_1 2\pi i =$$

$$= -2\pi\rho\bar{u}_0 \frac{\Gamma}{2\pi i} = i\Gamma\rho\bar{u}_0 = i\rho\Gamma\,(u_{0x} - iu_{0y}). \tag{7.46}$$

Составляющие главного вектора сил давления

$$P_x = \rho\Gamma u_{0y}; \qquad P_y = -\rho\Gamma u_{0x}. \tag{7.47}$$

Модуль вектора этой силы

$$P = \rho\Gamma \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2} = \rho\Gamma\, |u_0|. \tag{7.48}$$

Таким образом, получено доказательство теоремы Жуковского о подъемной силе для обтекания цилиндра произвольного профиля равномерным в бесконечности потоком.

Этой теореме можно дать следующую формулировку: *при обтекании цилиндрического тела произвольного профиля плоским по-*

тенциальным потоком с циркуляцией на каждую единицу длины тела со стороны потока действует сила, равная произведению плотности жидкости, скорости потока в бесконечности и циркуляции по контуру, охватывающему тело.

Из формул (7.47) и (7.48) следует, что вектор силы $\boldsymbol{P}$ направлен нормально к вектору скорости $\boldsymbol{u}_0$ (см. рис. 7.14). Замечая, что в последнем выводе циркуляция взята положительной (соответственно вращению вихря против часовой стрелки), и принимая во внимание результат, полученный при циркуляционном обтекании круглого цилиндра, можно установить следующее правило: *для определения направления поперечной силы Жуковского следует вектор скорости потока в бесконечности повернуть на угол $\pi/2$ в направлении, противоположном циркуляции.* Так как поток всюду вне тела предполагается потенциальным, а вихри расположены только на поверхности тела или внутри него, то циркуляцию можно вычислять по любому контуру, охватывающему тело.

Теорема Жуковского, опубликованная им в 1906 г., сыграла важную роль в развитии теории крыла, которая явилась основой теории летательных аппаратов. Эта теорема получила также широкое применение в теории гребных винтов кораблей, теории лопастных гидравлических, паровых и газовых турбомашин. Ее значение определяется прежде всего тем, что она вскрывает физическую причину появления подъемной силы; такой причиной являются вихри, мерой интенсивности которых служит циркуляция скорости. При этом несущественна причина, порождающая эти вихри. В рамках теории идеальной жидкости, циркуляция может быть порождена только вихрями, которые мы считаем существующими в потоке, однако не можем указать источник их появления (по крайней мере для однородной несжимаемой жидкости). Такие вихри, определяющие подъемную силу, Жуковский называл присоединенными. В реальной жидкости циркуляция порождается действием сил трения, которые развиваются и проявляются в пограничном слое, образующемся у поверхности тела (см. гл. 8 и 9). Таким образом, присоединенные вихри Жуковского являются теоретическим эквивалентом системы вихрей, возникающих в пограничном слое реальной жидкости. Теорема Жуковского указывает на то, что целесообразно изменяя форму профиля обтекаемого цилиндрического тела, т. е. изменяя интенсивность вихрей в пограничном слое, можно соответственно изменять подъемную силу.

Однако сама по себе теорема Жуковского не решает вопроса о теоретическом определении подъемной силы. Действительно, без какого-либо дополнительного условия нельзя указать то значение циркуляции Г, которое нужно подставить в формулу (7.48), чтобы найти значение подъемной силы, совпадающее с действительным, получаемым при обтекании данного тела реальной жидкостью.

С. А. Чаплыгин совместно с Н. Е. Жуковским сформулировал постулат, устраняющий неопределенность величины циркуляции для цилиндров, имеющих крыловой профиль — скругленную носовую часть и заостренную заднюю кромку (подробнее см. п. 7.8).

Главный момент L_0 определяется по второй формуле Чаплыгина (7.44):

$$L_0 = -\mathrm{Re}\,\frac{\rho}{2}\oint\limits_L \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots\right)^2 z\,dz =$$

$$= -\mathrm{Re}\,\frac{\rho}{2}\oint\limits_L \left(A_0 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2}{z^2} + \frac{2A_0A_2}{z^2} + \cdots\right) z\,dz =$$

$$= -\mathrm{Re}\,\frac{\rho}{2}\,2\pi i\,(A_1^2 + 2A_0A_2);$$

$$L_0 = -2\pi\rho\,\mathrm{Re}\,(i\bar{u}_0A_2). \qquad (7.49)$$

Для получения конкретного значения момента L_0 необходимо знать коэффициент A_2, который можно получить или на основе представления поля течения системой особенностей (источников, диполей, вихрей) или применением метода конформных отображений.

7.7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Метод наложения потенциальных потоков, описанный в п. 7.1—7.5, имеет ограниченные возможности, так как заранее неизвестно, какие потоки надо сложить, чтобы получить требуемое течение, и, наоборот, неизвестно, какое течение получится, если сложить наперед выбранные потоки. В связи с этим задачу определения поля течения в заданных границах сложной конфигурации таким путем решить практически невозможно. Правда, используя суммирование непрерывно распределенных особенностей (источников, вихрей или диполей), можно свести задачу к интегральному уравнению. Это развитие метода наложения кратко изложено в п. 7.10.

Применение метода конформных отображений значительно расширяет возможности теоретического построения плоских потенциальных течений. Напомним кратко его математическую основу. Пусть $\zeta = f(z)$ — аналитическая функция, определенная в области D_z плоскости переменного z (рис. 7.15). Будем интерпретировать переменную ζ как комплексную координату точек плоскости ζ. Если z принимает все возможные значения в пределах области D_z, то соответствующие значения $\zeta = f(z)$ образуют в плоскости ζ некоторую область D_ζ, которая является отображением области D_z. Если, в частности, переменная z «пробегает» вдоль линии l_z, то соответствующие значения ζ образуют линию l_ζ. Областями D_z и D_ζ могут быть целые плоскости z и ζ, включающие бесконечно удаленную точку.

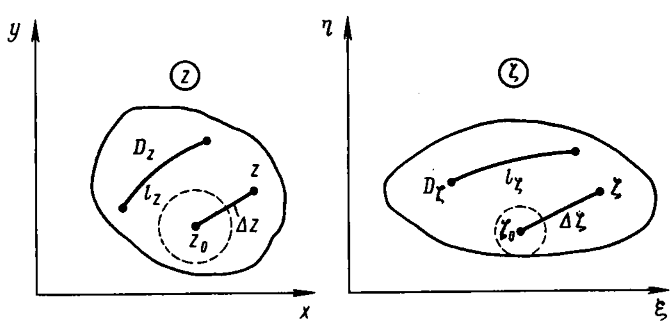


Рис. 7.15. Схема для пояснения метода конформных отображений

Если функция $f(z)$ однозначна, то каждой точке области D_z соответствует только одна точка области D_ζ и такое отображение называется однозначным, а если однозначна обратная функция $z = f_1(\zeta)$, то отображение называется однолистным. Однозначное однолистное отображение называют взаимно-однозначным. Взаимно-однозначное отображение, реализуемое аналитической функцией, называют конформным.

Чтобы установить основные свойства такого отображения, рассмотрим малую окрестность точки z_0, в которой $f'(z_0) \neq 0$. Введем обозначения: $z - z_0 = \Delta z$; $\zeta_0 = f(z_0)$; $\zeta - \zeta_0 = \Delta\zeta$; $|f'(z_0)| = m$; $\arg f'(z_0) = \theta_0$. Используя связь дифференциала и конечного приращения и ограничиваясь малыми первого порядка, получаем $d\zeta = f'(z_0)\,dz$, откуда $|\Delta\zeta| = m|\Delta z|$; $\arg \Delta\zeta = \arg \Delta z + \theta_0$.

Следовательно, всякий малый вектор $\Delta\zeta$ при отображении можно получить из соответствующего малого вектора Δz путем умножения длины последнего на некоторый коэффициент m (коэффициент растяжения) и поворота на угол θ_0. При этом коэффициентом растяжения служит модуль производной отображающей функции, а углом поворота — ее аргумент. Поскольку это справедливо для любого вектора Δz, выходящего из точки z_0, то все такие векторы будут при отображении растянуты или сжаты в одно и то же число раз. Иными словами, рассматриваемое отображение является преобразованием подобия в бесконечно малом. Так, например, окружность малого радиуса с центром в точке z_0 после отображения перейдет в окружность. Любая другая малая фигура перейдет в себе подобную. Однако это не значит, что останутся подобными и фигуры конечных размеров. Напротив, изменения их конфигураций могут быть весьма значительными.

Поскольку все малые отрезки, выходящие из данной точки z_0, поворачиваются на один и тот же угол θ_0, то, очевидно, углы между любой парой из их числа не изменяются по величине и направлению отсчета. Это свойство отображения называют сохраняемостью углов.

Для приведенных рассуждений существенно, что $f'(z_0) \neq 0$, так как если это условие нарушено, то выводы теряют силу.

Таким образом, конформное отображение обладает свойствами сохраняемости углов и постоянства растяжений в каждой точке, где $f'(z) \neq 0$.

Поскольку $d\zeta/dz = f'(z) = (dz/d\zeta)^{-1}$, последнее условие равносильно условию существования конечной производной от обратной функции.

Если область D_z рассматривать как область некоторого потенциального течения, то, осуществляя ее конформное отображение с помощью аналитической функции $\zeta = f(z)$, получим область D_ζ, которую можно рассматривать как область другого (отображенного) течения. При этом если комплексный потенциал в плоскости ζ известен — $w(\zeta)$, то, производя замену переменных

$$w_\zeta(\zeta) = w_\zeta[f(z)] = w_z(z),$$

получим комплексный потенциал в плоскости z, что достаточно для полного описания течения.

Следовательно, построение плоского потенциального потока методом конформного отображения сводится к нахождению аналитической функции, с помощью которой область течения с известным комплексным потенциалом отображается на область с заданными границами. Способы определения отображающих функций являются чисто математической проблемой и выходят за рамки курса гидромеханики, поэтому в приводимых ниже примерах использованы отображающие функции, известные из математики.

Установим связь между гидродинамическими величинами в в двух потоках, получаемых друг из друга конформным отображением. Согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\bar{u}_z = \frac{dw_z}{dz} = \frac{dw_\zeta}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \bar{u}_\zeta \frac{d\zeta}{dz} = \bar{u}_\zeta f'(z), \tag{7.50}$$

где $\bar{u}_z$ и $\bar{u}_\zeta$ — сопряженные скорости в плоскостях соответственно z и ζ.

Поскольку $d\zeta/dz = f'(z)$ представляет собой в общем случае комплексное число, из выражения (7.50) следует, что при конформном отображении скорости изменяются в каждой точке как по величине, так и по направлению. Действительно, согласно формуле (7.50)

$$|\bar{u}_z| = |\bar{u}_\zeta| \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \quad \text{и} \quad \arg \bar{u}_z = \arg \bar{u}_\zeta + \arg \frac{d\zeta}{dz}.$$

Если в какой-либо точке или части области течения $\arg(d\zeta/dz) = 0$, т. е. $d\zeta/dz$ является действительным числом, то $\arg \bar{u}_z = \arg \bar{u}_\zeta$, что означает одинаковую направленность векторов $\bar{u}_z$ и $\bar{u}_\zeta$ по отношению к их осям координат.

Связь между циркуляциями в плоскостях z и ζ можно представить в виде

$$\Gamma_z = \mathrm{Re}\oint\limits_{L_z} \bar{u}_z\,dz = \mathrm{Re}\oint\limits_{L_z} \frac{dw}{dz}\,dz = \mathrm{Re}\oint\limits_{L_z} \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\,dz \equiv \mathrm{Re}\oint\limits_{L_\zeta} \bar{u}_\zeta\,d\zeta = \Gamma_\zeta,$$

где индексы z и ζ указывают на то, что величина относится к плоскостям соответственно z и ζ.

Следовательно, при конформном отображении потоков циркуляция скорости не изменяется. Можно доказать, что при этом и расход жидкости через какой-либо замкнутый контур остается постоянным. Действительно,

$$Q_z = \mathrm{Im}\oint\limits_{L_z} \bar{u}_z\,dz = \mathrm{Im}\oint\limits_{L_z} \frac{dw}{dz}\,dz = \mathrm{Im}\oint\limits_{L_z} \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\,dz = \mathrm{Im}\oint\limits_{L_\zeta} \bar{u}_\zeta\,d\zeta = Q_\zeta.$$

Ниже рассмотрена сущность метода конформных отображений на примере задачи об обтекании пластины.

7.8. ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ ПЛОСКИМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ

Пусть требуется найти комплексный потенциал потока, обтекающего со скоростью в бесконечности $u_0 = u_{0x} + iu_{0y}$ плоскую пластину шириной $2a$ (рис. 7.16). Размер пластины и потока по нормали к плоскости чертежа принимаем равным единице. В соответствии с общей схемой метода конформных отображений во вспомогательной плоскости ζ рассмотрим течение, комплексный потенциал которого w_ζ известен и область которого можно конформно отобразить на плоскость z. Таким течением является поток, обтекающий круглый цилиндр радиусом a (рис. 7.16, *б*). Функция вида

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right), \tag{7.51}$$

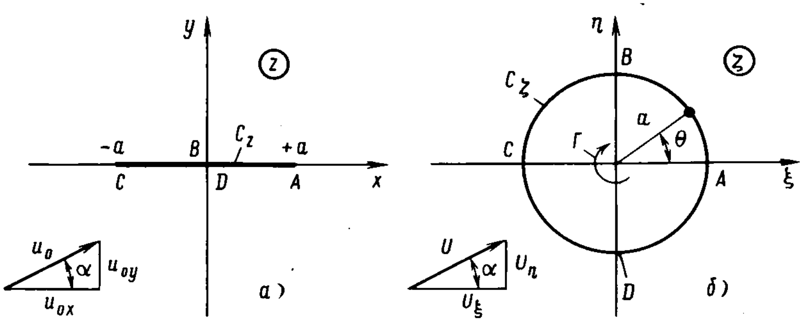


Рис. 7.16. Схема для решения задачи о циркуляционном обтекании пластины

называемая функцией Жуковского, является аналитической всюду, кроме точки $\zeta = 0$, и отображает область вне окружности радиусом $r = a$ на область вне прямолинейного отрезка (пластины) длиной $2a$, расположенного вдоль вещественной оси плоскости z. Чтобы убедиться в этом, учтем, что на окружности C_ζ (рис. 7.16, *б*) $\zeta = ae^{i\theta}$. Согласно выражению (7.51) в точках контура C_z, в который преобразуется окружность,

$$z = x + iy = \frac{a}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = a\cos\theta,$$

откуда

$$x = a\cos\theta; \quad y = 0.$$

При изменении θ от 0 до π величина x изменяется от a до $-a$, т. е. верхняя половина окружности переходит в верхнюю сторону пластины; нижней половине окружности ($\pi < \theta \leqslant 2\pi$) соответствует нижняя сторона пластины (рис. 7.16, *а*, *б*). Из формулы (7.51) следует, что бесконечно удаленная точка плоскости ζ переходит в бесконечно удаленную точку плоскости z. При этом отображение конформно вне круга $r = a$ и во всех точках окружности, кроме точек $\zeta = \pm a$, где конформность нарушается в силу того, что

$$\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\pm a} = \left.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2}\right)\right|_{\zeta=\pm a} = 0.$$

Пусть теперь круглый цилиндр в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ обтекается потоком с некоторой скоростью в бесконечности $U = U_\xi + iU_\eta$ и циркуляцией Γ. Комплексный потенциал такого потока известен и согласно выражению (7.42) имеет вид

$$w_\zeta = \bar{U}\zeta + U\frac{a^2}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\zeta. \tag{7.52}$$

Разрешая отображающую функцию относительно ζ, находим

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - a^2}, \tag{7.53}$$

причем знак «+» перед радикалом выбран из условия соответствия бесконечно удаленных точек. Заменяя в выражении (7.52) переменную ζ на z согласно формуле (7.53), получим выражение комплексного потенциала для плоскости z:

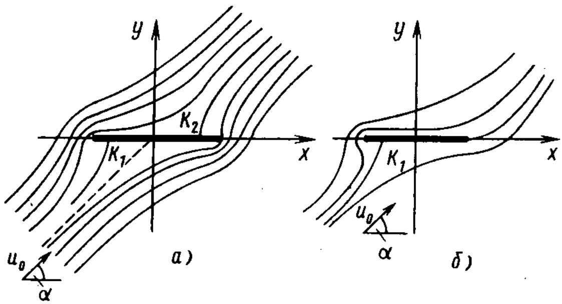
$$w_z = \bar{U}\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right) + U\frac{a^2}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right)$$

или после упрощений

$$w_z = 2U_\xi z - 2iU_\eta\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right).$$

Это выражение не может считаться окончательным, так как в него входит скорость U, не заданная в условии задачи и являю-

Рис. 7.17. Обтекание пластины потенциальным потоком:
a — $\Gamma = 0$; $б$ — $\Gamma = 2\pi u_{0y} a$



щаяся вспомогательной величиной. Для ее определения вычислим сопряженную скорость

$$\bar{u}_z = \frac{dw_z}{dz} = 2U_\xi - i2U_\eta \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \qquad (7.54)$$

значение которой на бесконечности задано: $\bar{u}_0 = u_{0x} - iu_{0y}$. Согласно выражению (7.54)

$$u_{0x} - iu_{0y} = \bar{u}_z |_{z=\infty} = 2U_\xi - i2U_\eta.$$

Следовательно, $2U_\xi = u_{0x}$, $2U_\eta = u_{0y}$. Теперь можно записать окончательные выражения искомого комплексного потенциала и сопряженной скорости:

$$w_z = u_{0x} z - iu_{0y} \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right); \qquad (7.55)$$

$$\bar{u}_z = u_{0x} - i \frac{2\pi u_{0y} z - \Gamma}{2\pi \sqrt{z^2 - a^2}}. \qquad (7.56)$$

Из выражения (7.56) следует, что распределение скоростей в потоке зависит от циркуляции Γ, и при произвольном ее значении в точках $z = \pm a$ скорость обращается в бесконечность, т. е. эти точки являются особыми. Полагая $\bar{u}_z = 0$, можно было бы убедиться, что на пластине имеются две критические точки, которые при $\Gamma = 0$ расположены симметрично относительно мнимой оси и имеют координаты $\pm a \cos \alpha$ (рис. 7.17, a).

Поскольку обтекание пластины циркуляционное, согласно теореме Жуковского на ней возникает поперечная сила, равная $\rho |u_0| \Gamma$. Величина циркуляции Γ здесь не определена и в рассматриваемой теоретической схеме может быть выбрана произвольно. Однако очевидно, что только одно значение циркуляции может дать истинное значение силы Жуковского, совпадающее с полученным экспериментально. С. А. Чаплыгиным и Н. Е. Жуковским сформулирован упоминавшийся выше постулат, позволяющий устранить неопределенность величины циркуляции, а значит, и подъемной силы. Они обратили внимание на то, что при обтекании тел с заостренной задней кромкой (в частности, при обтекании пластины), согласно теоретическому решению, в точке заострения скорость обращается в бесконечность, тогда как при реальном обтекании это физически невозможно. Устранить это несоответствие можно, выбрав определенное значение циркуляции.

Согласно постулату Жуковского—Чаплыгина, истинной должна быть та циркуляция, при которой скорость в точке заострения обтекаемого тела имеет конечное значение.

На примере плоской пластины покажем, как использовать этот постулат. Из формулы (7.56) следует, что в точке $z = +a$ (задняя заостренная кромка обтекаемого тела) скорость обращается в бесконечность при любом значении Г, кроме того, при котором одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель второго члена. Очевидно, этим значением циркуляции является

$$\Gamma = 2\pi u_{0y} a,$$

подставляя которое в выражение (7.56), найдем

$$\bar{u}_z = u_{0x} - i u_{0y} \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}. \qquad (7.57)$$

Теперь в точке $z = +a \bar{u}_z |_{z=a} = u_{0x}$, т. е. скорость имеет конечное значение. Заметим, что выбором указанного значения циркуляции не устраняется особая точка на передней кромке пластины, так как из выражения (7.57) имеем $\bar{u}_z |_{z=-a} = \infty$.

На рис. 7.17 показаны конфигурации линий тока при обтекании пластины без циркуляции и с циркуляцией, выбранной по постулату Жуковского—Чаплыгина. Можно видеть, что для последнего случая (рис. 7.17, *б*) характерен плавный сход линий тока с пластины и только одна критическая точка K_1; вторая в этом случае совмещается с точкой заострения.

Подъемную силу Жуковского, соответствующую выбранному значению циркуляции, представим в виде

$$P_п = \rho |u_0| \Gamma = \rho |u_0| \cdot 2\pi u_{0y} a$$

или, так как $u_{0y} = |u_0| \sin\alpha$, то

$$P_п = 2\pi \sin\alpha \cdot 2a \frac{\rho |u_0|^2}{2}.$$

Введем обозначения: $c_y = 2\pi \sin\alpha$; $S = 2a$. Тогда получим универсальную формулу ля гидродинамической силы

$$P_п = c_y S \frac{\rho |u_0|^2}{2}. \qquad (7.58)$$

Величину c_y называют коэффициентом подъемной силы, а S играет роль характерной площади обтекаемого тела.

Экспериментальная проверка теоретической формулы для коэффициента подъемной силы пластины $c_y = 2\pi \sin\alpha$ показала, что для достаточно тонких тел с заостренной задней кромкой (крыловых профилей), при обтекании которых обеспечен плавный сход

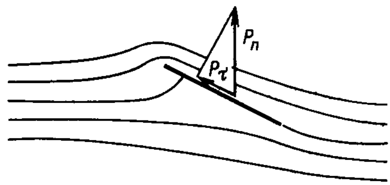


Рис. 7.18. Образование «подсасывающей» силы при обтекании пластины с циркуляцией

струй с этой кромки, указанная формула приближенно применима при малых углах атаки ($\alpha < 12°$).

Согласно теореме Жуковского сила $P_п$ нормальна к вектору скорости u_0, а значит, дает составляющую P_τ в плоскости пластины, направленную к передней кромке (рис. 7.18) и называемую «подсасывающей» силой. Этот результат представляется парадоксальным, поскольку все элементарные силы давления, результирующей которых является сила Жуковского, нормальны к поверхности пластины. Однако его можно объяснить, если представить, что пластина имеет конечную, хотя и малую толщину с плавно скругленным передним (лобовым) концом и заостренным задним. При обтекании такого тела скорости на лобовой части будут очень большими (в пределе для бесконечно тонкой пластины — бесконечно большими), а на остальной части поверхности — конечными. Соответственно, давления на лобовой части будут весьма малыми, а на остальной поверхности — конечными. Так как поверхность тела не является плоскостью, элементарные силы давления, нормальные к его поверхности, дадут составляющие в направлении оси x, сумма которых и образует «подсасывающую» силу P_τ. Уменьшая толщину тела до нуля, в пределе получим обтекание пластины.

В действительности в реальной жидкости обтекание заостренной передней кромки с огибанием ее по схеме, показанной на рис. 7.17, не имеет места. Вследствие влияния вязкости и градиента давления поток отрывается от твердой поверхности, образуются вихри, уносимые вниз по течению, и структура течения резко меняется. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. 8 после ознакомления с основами теории пограничного слоя.

В заключение заметим, что небольшое видоизменение задачи об обтекании пластины дает обтекание эллиптического цилиндра, подробно описанное в работе [9].

Определим главный момент L_0 сил давления, действующих на пластину. Согласно выражению (7.49) он определяется коэффициентом A_2 разложения сопряженной скорости $\bar{u}$ в ряд Лорана. Используя выражение (7.57), это разложение в данном случае можно представить в виде

$$\bar{u}_z = u_{0x} - iu_{0y}\left(1 - \frac{a}{z} + \frac{a^2}{2z^2} - \cdots\right).$$

Отсюда следует, что

$$A_0 = u_{0x} - iu_{0y}; \qquad A_1 = iu_{0y}a; \qquad A_2 = -iu_{0y}\frac{a^2}{2}.$$

Подставляя полученное выражение коэффициента A_2 в формулу (7.49), находим

$$L_0 = -2\pi\rho \operatorname{Re}\left[i\bar{u}_0\left(-iu_{0y}\frac{a^2}{2}\right)\right] = -\pi\rho a^2 u_{0y} \operatorname{Re}\bar{u}_0 = \pi\rho a^2 u_{0x} u_{0y}.$$

Зная подъемную силу [см. формулу (7.58)], ее направление и имея выражение для главного момента L_0, нетрудно найти линию действия силы $P_п$, определить точку пересечения этой линии с пластиной (центр давления) и полно исследовать силовое воздействие потока на пластину [14].

7.9. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Крыловыми обычно называют профили цилиндрических тел с закругленной передней и заостренной задней кромками. Такую форму или близкую к ней имеют крылья летательных аппаратов, лопасти гребных винтов и турбомашин, подводные крылья судов. Эта форма обеспечивает минимальное лобовое сопротивление и максимальную подъемную силу.

Рассмотрим принципиальную схему решения задачи обтекания произвольного крылового профиля, основанную на методе конформных отображений.

Пусть в плоскости z задан контур крылового профиля и комплексная скорость $u_0 = |u_0|e^{i\alpha}$ в бесконечности обтекающего его потока. Для нахождения комплексного потенциала w_z выберем в плоскости ζ вспомогательный поток, комплексный потенциал которого известен, например поток со скоростью в бесконечности $U = |U|e^{i\alpha}$, обтекающий круглый цилиндр радиусом a (рис. 7.19), Отобразим внешность цилиндра на внешность профиля с помощью аналитической функции $z = f(\zeta)$. Нахождение этой функции для заданного контура представляет собой самостоятельную и, как правило, сложную задачу, которая часто имеет лишь приближенное решение. Но допустим, что эта функция найдена.

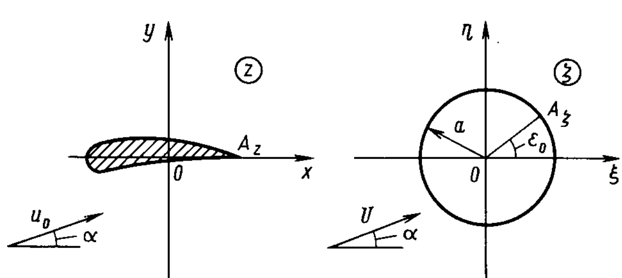


Рис. 7.19. Схема для построения потенциального плоского потока, обтекающего крыловой профиль заданной формы

Как уже известно,

$$w_\zeta = \overline{U}\zeta + U\frac{a^2}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\zeta. \qquad (7.59)$$

Если отображающую функцию $z = f(\zeta)$ можно разрешить относительно ζ, то, исключая эту переменную из выражения для w_ζ, найдем комплексный потенциал w_z. В противном случае рассматриваем переменную ζ как параметр и, следовательно, имеем параметрическое решение задачи. Однако необходимо еще найти постоянные U, a и Γ, которые должны быть выражены через заданные в условии задачи величины.

Скорость U можно найти, используя зависимость (7.50) между сопряженными скоростями в отображаемых потоках. Если определена обратная функция $\zeta = f_{-1}(z)$, то, дифференцируя выражение для w_z и полагая $z \to \infty$, получаем

$$\overline{u}_0 = \left.\frac{dw_z}{dz}\right|_{z=\infty} = \overline{U}\left.\frac{df_{-1}(z)}{dz}\right|_{z=\infty}.$$

Здесь $df_{-1}(z)/dz\,|_{z=\infty} = m_1$ — действительное число (см. п. 7.7) и, следовательно,

$$|\overline{u}_0| = |\overline{U}|\,m_1,$$

откуда определяется $|\overline{U}|$, а значит, и вектор U.

При параметрическом решении, дифференцируя выражение (7.59) и полагая $\zeta \to \infty$, находим

$$U = \left.\frac{dw_\zeta}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty} = \bar{u}_0\left.\frac{df}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}, \qquad (7.60)$$

где $df/d\zeta\,|_{\zeta=\infty} = 1/m_1$ — действительное число.

Таким образом, скорость U вспомогательного потока легко определить, если известна отображающая функция.

Радиус a окружности можно найти в процессе построения отображающей функции. Циркуляция Γ определяется на основе постулата Жуковского—Чаплыгина, причем для этого не обязательно знать конкретный вид отображающей функции. Рассмотрим окрестность точки заострения A_z профиля в плоскости z и соответствующей ей точки A_ζ в плоскости ζ (рис. 7.20). При отображении в этих точках нарушается конформность преобразования (сохраняемость углов), так как выходящие из точки A_ζ отрезки окруж-

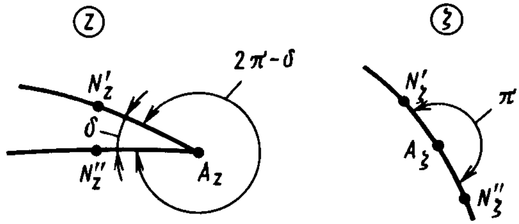


Рис. 7.20. Конформное отображение малой окрестности точки заострения крылового профиля и выбор циркуляции по постулату Жуковского — Чаплыгина

ности образуют угол π, а им соответствующие отрезки контура профиля $N_z'A_z$ и N_zA_z — угол $2\pi - \delta$.

Выделим вблизи точки A_ζ малую окрестность, внешнюю для круга радиусом a. Ее можно конформно отобразить на малую окрестность точки A_z с помощью функции

$$z - z_{A_z} = M(\zeta - \zeta_{A_\zeta})^{\frac{2\pi-\delta}{\pi}}, \tag{7.61}$$

где M — действительное число.

В самом деле, точке ζ_{A_ζ} согласно выражению (7.61) соответствует точка z_{A_z}. Кроме того, если использовать показательную форму комплексных чисел, то можно записать

$$z - z_{A_z} = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{и} \quad \zeta - \zeta_{A_\zeta} = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.61), получаем

$$r_1 = M r_2^{\frac{2\pi-\delta}{\pi}} \quad \text{и} \quad \theta_1 = \theta_2 \frac{2\pi - \delta}{\pi} + 2k\pi.$$

Отсюда следует, что если θ_2 изменяется на величину π, то θ_1 изменяется на величину $2\pi - \delta$, т. е. углу $N_\zeta' A_\zeta N_\zeta$ соответствует угол $N_z' A_z N_z$ (рис. 7.20). Таким образом, малая внешняя к окружности окрестность точки A_ζ отображается на малую внешнюю окрестность точки A_z. Связь между скоростями в точках A_ζ и A_z получаем из выражения (7.50):

$$\bar{u}_{A_\zeta} = \bar{u}_{A_z} \left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}}$$

или

$$\bar{u}_{A_\zeta} = \bar{u}_{A_z} M \frac{2\pi - \delta}{\pi} \left.(\zeta - \zeta_{A_\zeta})^{\frac{\pi-\delta}{\pi}}\right|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}}.$$

Согласно постулату Жуковского—Чаплыгина скорость u_{A_z} в точке заострения A_z конечна, а так как последний множитель равен нулю, то и вся правая часть последнего выражения равна нулю: $\bar{u}_{A_\zeta} = 0$. Следовательно, точка A_ζ, переходящая при отображении в точку заострения, является критической. Из этого условия можно найти циркуляцию Г. Поскольку

$$u_{A_\zeta} = \left.\frac{dw_\zeta}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}},$$

используя формулу (7.59) и учитывая выражение (7.60), получаем

$$\frac{\bar{u}_0}{m_1} - \frac{u_0}{m_1}\frac{a^2}{\zeta_{A_\zeta}^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta_{A_\zeta}} = 0.$$

Это уравнение служит для определения Г. Так как точка A_ζ лежит на окружности радиусом a, можно положить $\zeta_{A_\zeta} = ae^{i\varepsilon_0}$, где ε_0 — координатный угол точки A_ζ (см. рис. 7.19). Полагая

$$u_0 = |u_0| e^{i\alpha}, \qquad \bar{u}_0 = |u_0| e^{-i\alpha}$$

и подставляя эти выражения в последнее уравнение, находим

$$|u_0| (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} e^{-i2\varepsilon_0}) + \frac{i\Gamma m_1}{2\pi a} e^{-i\varepsilon_0} = 0.$$

После умножения на $e^{i\varepsilon_0}$ и деления на $|u_0|$ находим

$$e^{-i(\alpha-\varepsilon_0)} - e^{i(\alpha-\varepsilon_0)} + \frac{i\Gamma m_1}{2\pi a |u_0|} = 0$$

или

$$\Gamma = \frac{4\pi a |u_0|}{m_1} \frac{e^{i(\alpha-\varepsilon_0)} - e^{-i(\alpha-\varepsilon_0)}}{2i}.$$

Заменяя показательные функции тригонометрическими, получаем

$$\Gamma = \frac{4\pi a |u_0|}{m_1} \sin(\alpha - \varepsilon_0)$$

или, вводя обозначение $\alpha - \varepsilon_0 = \alpha_0$,

$$\Gamma = \frac{4\pi a |u_0|}{m_1} \sin \alpha_0. \qquad (7.62)$$

Таким образом, все постоянные преобразования найдены и задача может считаться принципиально решенной. Для доведения этого решения до практических зависимостей необходимо в каждом конкретном случае определить отображающую функцию $f(\zeta) = z$.

Заметим, что угол $\alpha_0 = 0$ при $\alpha = \varepsilon_0$. Так как при этом $\Gamma = 0$, угол $\alpha = \varepsilon_0$ называется углом бесциркуляционного обтекания.

Из изложенного следует, что если крыловой профиль обтекается потоком со скоростью в бесконечности, направленной под углом $\alpha = \varepsilon_0$ к вещественной оси, то обтекание будет бесциркуляционным, причем в точке заострения скорость имеет конечное значение. При этом положение профиля относительно вещественной оси будет вполне определенным, зависящим от угла ε_0.

7.10. МЕТОДЫ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

Группа методов, называемая методами особенностей, основана на замене заданного контура тела системой непрерывно распределенных вдоль него точечных особенностей (источников, стоков, диполей, вихрей). Широкое распространение получил метод распределенных вихрей или просто вихревой метод, в котором контур тела заменяется вихревым слоем (см. п. 7.2). Такая

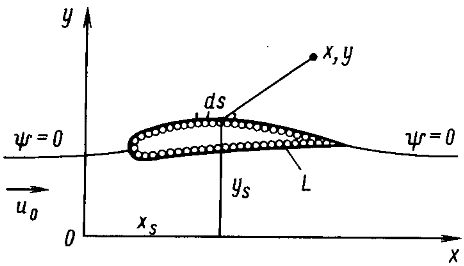


Рис. 7.21. Схема для решения задачи обтекания цилиндрического тела потенциальным потоком

замена имеет физические предпосылки, так как при обтекании тел реальной (вязкой) жидкостью на их поверхности образуется тонкий пограничный слой, в котором сосредоточена основная часть завихренного потока.

Рассмотрим общую схему решения задачи обтекания заданного цилиндрического тела потенциальным потоком (рис. 7.21). Представим, что контур тела покрыт непрерывно распределенными точечными вихрями. Выделим на контуре в окрестности точки (x_s, y_s) элементарный участок ds, на котором сосредоточены вихри, создающие в потоке циркуляцию $d\Gamma$. Ввиду малости отрезка рассматриваем эти вихри как один точечный вихрь с центром в точке (x_s, y_s). Тогда функцию тока течения, создаваемого этим вихрем, можно выразить формулой

$$d\psi_s(x,\ y) = \frac{d\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$$

или, вводя распределенную по длине циркуляцию $\gamma(s) = d\Gamma/ds$, формулой

$$d\psi_s(x,\ y) = \frac{\gamma(s)}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}\,ds,$$

где индексом s отмечены величины, зависящие от координат точки (x_s, y_s), лежащей на контуре.

Согласно принципу суперпозиции функция тока течения, созданного совокупностью всех элементарных вихрей, образующих вихревой слой,

$$\psi_s = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L \gamma(s)\ln\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}\,ds.$$

Поскольку контур тела обтекается со скоростью u_0 потоком, имеющим функцию тока $\psi_0 = u_0 y$, результирующее течение будет иметь функцию тока

$$\psi = \psi_0 + \psi_s = u_0 y + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L \gamma(s)\ln\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}\,ds. \quad (7.63)$$

Следует иметь в виду, что в формуле (7.63) точка с координатами x_s, y_s лежит в вихревом слое, т. е. на контуре, а точка с координатами x, y — где угодно в потоке. Формулой (7.63) определяется значение функции тока именно в этой точке; интегрирование по координате s (т. е. по x_s, y_s) распространяется на весь вихревой слой.

Учтем теперь, что при безотрывном обтекании контур тела должен быть линией тока, на которой, как известно, функция тока постоянна. Последняя без ограничения общности может быть принята равной нулю, поскольку функция тока определяется с точностью до аддитивной постоянной. Тогда получим уравнение линии тока, образующей контур тела (вихревого слоя):

$$u_0 y^0 + \frac{1}{2\pi} \oint_L \gamma(s) \ln \sqrt{(x^0 - x_s)^2 + (y^0 - y_s)^2}\, ds = 0, \quad (7.64)$$

где верхний индекс «0» означает, что точка (x^0, y^0) лежит на контуре L тела.

В уравнении (7.64) единственной известной функцией является распределенная циркуляция γ, зависящая от переменной интегрирования s. Поскольку она входит в уравнение под знаком интеграла, относительно нее уравнение является интегральным, из-за чего и весь метод иногда называют методом интегральных уравнений.

Если в результате решения уравнения (7.64) удается найти $\gamma(s)$, то по формуле (7.63) можно определить функцию тока в любой точке (x, y).

Необходимо отметить, что поскольку точки (x_s, y_s) и (x^0, y^0) принадлежат контуру L, а интегрирование распространяется на весь контур, то для каждой точки (x^0, y^0) существует одна точка (x_s, y_s), которая с ней совпадает. Тогда подынтегральное выражение в формуле (7.64) обращается в бесконечность и интеграл становится несобственным. Поэтому при вычислениях необходимо произвести выделение особенности.

Вместо функции тока ψ для составления интегрального уравнения можно использовать потенциал φ скорости; в этом случае условием на контуре обтекаемого тела будет $d\varphi/dn|_L = 0$. Можно также применить аппарат теории аналитических функций, в частности их представление криволинейными интегралами для получения интегральных уравнений, определяющих комплексный потенциал и сопряженную скорость. Этот метод применяется для расчетов гидродинамических решеток [4].

Методы особенностей применимы не только для плоских, но и для пространственных задач (см. п. 7.17).

7.11. ПЛОСКИЕ СТРУЙНЫЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ *

До сих пор рассматривались только непрерывные течения с твердыми границами. Но, как указывалось в п. 5.6, границами области течения могут служить также свободные поверх-

* П. 7.11 и 7.12 написаны Я. Р. Берманом.

ности, т. е. поверхности раздела жидкой и газовой сред. Естественными признаками свободных поверхностей являются постоянство давления и равенство нулю нормальной составляющей скорости вдоль них. Иными словами, свободная поверхность представляет собой поверхность тока с постоянным давлением. Течения, имеющие в качестве границ свободные поверхности, называют струйными.

Приведем примеры течений со свободными поверхностями.

1. Струи несжимаемой жидкости, вытекающие из резервуаров под давлением в газовую среду. Давление на поверхности струи постоянно и равно давлению газа. Такие струи иногда называют свободными незатопленными, в отличие от затопленных струй, образующихся при истечении жидкости в среду с теми же физическими свойствами.

2. Кавитационные течения, которые могут возникнуть при обтекании тел с большими скоростями (их еще называют течениями с отрывом струй или разрывными). О таких течениях уже было упомянуто в гл. 1.

3. Открытые или безнапорные потоки тяжелой жидкости, т. е. потоки в реках и открытых каналах. Свободные поверхности таких потоков являются поверхностями тока с давлением, равным атмосферному.

Для каждого из указанных классов струйных течений существует широкий круг задач, которые с достаточной степенью точности можно решать в рамках теории идеальной жидкости. Совокупность этих задач образует раздел гидродинамики, называемый теорией струй идеальной жидкости.

Первые задачи теории струй были поставлены и решены Г. Гельмгольцем (1868 г.), Г. Кирхгофом * и Н. Е. Жуковским (1890 г.), С. А. Чаплыгин распространил указанную теорию на дозвуковые течения сжимаемой жидкости (1903 г.).

В основе теории плоских струйных течений лежит допущение о потенциальности потока, границами которого служат твердые и свободные поверхности. В большинстве решенных задач жидкость предполагается несжимаемой и невесомой. Однако за последние годы получен ряд решений, учитывающих влияние силы тяжести, которое для некоторых течений (через пороги, водосливы и т. п.) оказывается весьма существенным. Для иных же струйных течений пренебрежение весомостью жидкости вполне допустимо. Ниже рассматриваются только такие задачи.

Математическую модель плоских струйных течений проиллюстрируем на двух типовых задачах.

---

* Густав Роберт Кирхгоф (1824—1887) — один из крупнейших физиков XIX в., член Берлинской академии наук, руководитель кафедры математической физики Берлинского университета. Известен как автор ряда фундаментальных работ в области электро- и гидродинамики. В частности, развил идеи Гельмгольца в области теории струйных течений.

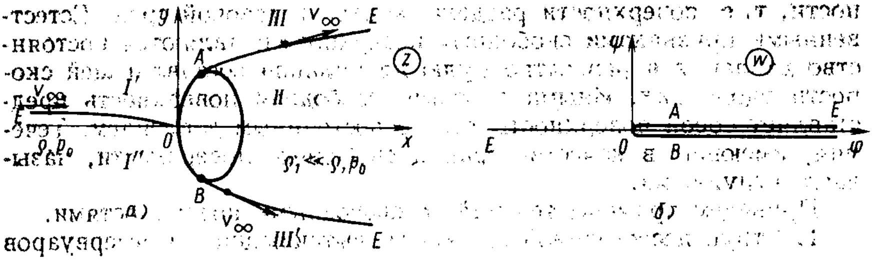


Рис. 7.22. Струйное обтекание тела:

а — схема течения в физической плоскости *z*; *б* — область комплексного потенциала *w*, соответствующая области течения

1. **Обтекание неподвижного тела установившимся поступательным потоком** (рис. 7.22) со скоростью вдалеке от тела v_∞* с образованием непосредственно за ним зоны неподвижной жидкости с плотностью, значительно меньшей, чем в набегающем потоке, и с постоянным давлением p_0. Некоторая линия тока EO, выходящая из бесконечности E (рис. 7.22, *а*), раздваивается в точке O встречи с телом на дуги OA и OB. Поскольку в точке разветвления O скорость течения не должна иметь разрыва по направлению, эта точка является критической — в ней скорость течения равна нулю. Дуги OA и OB идут вдоль контура тела соответственно до точек отрыва A и B, за которыми линии тока снова уходят в бесконечность E. Части линий тока AE и BE являются границами области II неподвижной жидкости и областей III и III' движущейся жидкости, называемых струями. На свободных границах AE и BE давление постоянно и равно давлению p_0 неподвижной жидкости в области II.

Тогда из уравнения Бернулли для идеальной невесомой жидкости

$$p + \rho v^2/2 = \text{const}$$

следует, что и модуль скорости v на свободных границах будет постоянен и равен v_∞, потому что AE и BE — линии тока, уходящие в бесконечность.

Из потенциальности течения следует существование комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$. Как было указано ранее в п. 7.2, функция w определяется с точностью до постоянного слагаемого $C = C_1 + iC_2$, которое можно подобрать так, чтобы w равнялось нулю в точке O. Тогда в этой точке $\varphi = 0$, а $\psi = 0$ не только в точке O, но и на всей разветвляющейся в ней линии тока. В областях I'

* В п. 7.11 и 7.12, а также на рисунках, к ним относящимся, модули скоростей обозначаются буквой v; для комплексной и сопряженной скоростей сохраняются прежние обозначения u и $\bar{u}$.

и I'' течения скорость равна нулю только в точке O. Значит, вдоль линии тока ($\psi = 0$) всюду, кроме точки O,

$$v = v_s = \partial\varphi/\partial s > 0,$$

где s — длина дуги указанной линии тока.

Отсюда следует, что потенциал скорости φ возрастает от $-\infty$ до 0, когда переменная s изменяется по дуге EO (от бесконечно удаленной точки E до критической точки O), затем φ возрастает от 0 до ∞ при следовании от O до бесконечно удаленной точки E по каждой из ветвей OAE и OBE. Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к заключению, что и на всякой другой линии тока ($\psi = \text{const} \neq 0$) потенциал φ скорости возрастает от $-\infty$ до ∞.

Как было показано в п. 7.2—7.9, расход жидкости, протекающий между какими-либо двумя линиями тока, равен разности значений функции тока ψ на этих линиях. При этом переход от одной линии тока к другой совершается в направлении, полученном при повороте вектора скорости какой-либо точки линии тока на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Тогда при движении в этом направлении вдоль любой эквипотенциальной линии $\varphi = \text{const}$ функция тока ψ возрастает от $-\infty$ до 0, а затем от 0 до ∞.

Каждой точке области течения в физической плоскости z (рис. 7.22, *б*) соответствует в плоскости w одна точка с координатами φ, ψ. В то же время каждой точке плоскости w, кроме точек действительной положительной полуоси, соответствует одна точка области течения в плоскости z. Каждой же точке полуоси $\psi = 0$, $\varphi > 0$ соответствуют в области течения плоскости z две точки: на OAE и на OBE, так как на обеих этих дугах $\psi = 0$, $0 \leqslant \varphi < \infty$.

Сделаем разрез вдоль действительной положительной полуоси плоскости w и будем считать, что верхнему краю разреза соответствует дуга OAE, а нижнему — дуга OBE. Тогда соответствие между областями изменения переменных z и w становится взаимно-однозначным. На рис. 7.22, *б* изображена область изменения переменной w, представляющая собой всю плоскость с разрезом вдоль полуоси $\psi = 0$, $0 \leqslant \varphi < \infty$, соответствующей границе течения в плоскости z.

При некоторых специальных формах границы AOB обтекаемой части тела (прямолинейная пластина, клин, дуга окружности и т. п.) удалось решить плоские задачи указанного типа, т. е. найти комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ как функцию комплексной переменной $z = x + iy$ в плоскости течения. Однако в большинстве случаев эту функцию проще находить в параметрическом виде: $w = f_1(t)$, $z_2 = f_2(t)$, где t — вспомогательная комплексная переменная. При этом удобней вместо функции $z = f_2(t)$ сначала найти $dw/dz = f_3(t)$, затем из равенств $w = f_1(t)$, $dw/dz = f_3(t)$ получить

$$dz = [f_1'(t)/f_3(t)]\, dt$$

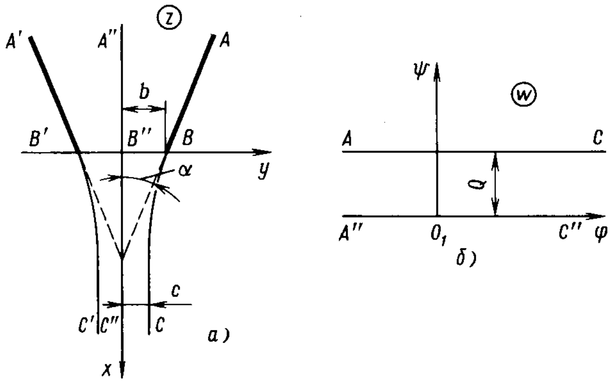


Рис. 7.23. Истечение жидкости из сосуда с плоскими стенками:

а — схема течения в физической плоскости *z*; *б* — область комплексного потенциала *w*, соответствующая области течения

и определить функцию $z = f_2(t)$ интегрированием. При решении многих задач теории струй целесообразно вводить так называемую переменную Жуковского

$$\ln\left(\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dz}\right) = F(t). \tag{7.65}$$

Тогда $dw/dz = v_\infty e^{F(t)}$ и функцию $z = f_2(t)$ можно найти так же, как и в предыдущем случае.

Заметим, что струйное течение рассматриваемого типа (с «мертвой зоной» позади тела) экспериментально не осуществимо, так как границы струй неустойчивы и за обтекаемым телом образуются вихри. Однако, как будет показано в п. 10.2, такое течение является предельным случаем наблюдаемого в практике суперкавитационного течения.

2. Истечение жидкости из сосуда, ограниченного симметричными прямолинейными стенками. Пусть стенки AB и $A'B'$ (рис. 7.23) наклонены под углом α к отрицательной полуоси абсцисс (при $\alpha = \pi/2$ получается частный случай истечения из отверстия BB' в плоской стенке). В силу симметрии течения относительно оси абсцисс можно ограничиться рассмотрением лишь правой половины потока, заменяя ось симметрии (она является линией тока) твердой стенкой.

Скорость течения в бесконечно удаленной точке A (наверху) равна нулю. Если расход жидкости в исходном течении обозначить через $2Q$, то $Q = v_\infty c$, где v_∞ — модуль скорости на бесконечности в точке C (внизу); c — полуширина струи на бесконечности. Принимая, что на линии тока $A''B''C''$ функция тока $\psi = 0$, на линии тока ABC имеем $\psi = Q$. На части BC этой линии тока, являющейся свободной границей струи, давление постоянно, и поэтому на основании уравнения Бернулли скорость имеет постоянный модуль v_∞.

Рассуждая так же, как и при исследовании струйных течений первого типа, можно убедиться в том, что на линиях тока $\psi = 0$ и $\psi = 0$ потенциал скорости φ возрастает от $\varphi = -\infty$ до $\varphi = \infty$ (принимаем, что $\varphi = 0$ в точке B). Тогда в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ рассматриваемой половине области течения будет соответствовать горизонтальная полоса шириной Q (рис. 7.23, *б*). После нахождения комплексного потенциала w как функции от z (непосредственно или в параметрическом виде) можно определить форму границы BC, а также коэффициент сжатия струи $\varepsilon = c/b$ (рис. 7.22, *а*).

В заключение заметим, что большинство струйных течений данного типа можно получить экспериментально, а результаты теоретического расчета коэффициента сжатия струи с достаточной степенью точности соответствуют опытным данным.

7.12. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ РЕЗЕРВУАРОВ, ЧЕРЕЗ КЛАПАН, ИЗ-ПОД ЗАТВОРА. ПЛАСТИНА В СВОБОДНОЙ СТРУЕ И В КАНАЛЕ

Приведем решение сдной из основных задач теории струй. Речь идет о модели истечения из резервуара с плоскими стенками. Изменяя конфигурацию стенок, можно получить несколько частных случаев, в том числе истечение через клапан.

Рассмотрим в комплексной плоскости z (рис. 7.24, *а*) симметричное струйное обтекание пластины потоком жидкости, который выходит из канала, ограниченного двумя параллельными стенками. Условно назовем это течение течением через клапан (рас-

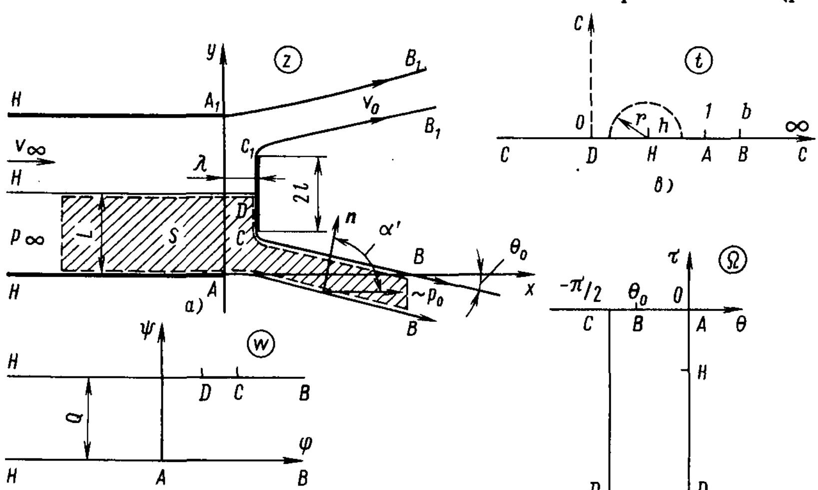


Рис. 7.24. Схема струйного течения через клапан (обтекание пластины потоком конечной ширины):

а — общая схема в физической плоскости течения z; *б* — область комплексного потенциала w; *в* — область параметрической переменной t; *г* — область переменной Ω

сматриваемая схема воспроизводит течение через клапан лишь при $l \geqslant L$, $\lambda \geqslant 0$). Набегающий поступательный поток имеет скорость v_∞ (скорость течения в бесконечно удаленной влево точке H), направленную параллельно стенкам канала, и давление p_∞. Стенки HA и HA_1 переходят в свободные границы AB и A_1B_1, на которых давление постоянно и равно p_0, поэтому на них скорость постоянна — v_0. Точка D пластины — критическая, в ней скорость течения $v = 0$. На свободных границах струй CB и C_1B_1, отрывающихся от пластины CDC_1, давление и скорость постоянны. Поскольку в бесконечности справа (точка B) скорость должна быть одной и той же при стремлении к B как по AB, так и по CB (величина v_0 и угол с осью абсцисс θ_0), приходим к выводу, что на свободных границах CB и C_1B_1 скорость и давление соответственно равны v_0 и p_0.

В силу симметрии течения ограничимся рассмотрением его нижней половины, заменяя ось симметрии твердой стенкой. При этом получим частный случай так называемого течения Мизеса. (в общем случае течения Мизеса пластина CD не перпендикулярна к стенке канала, а образует с ней тупой угол).

Начнем с общего решения задачи, т. е. займемся отысканием комплексного потенциала w и переменной $\Omega = i \ln\left(\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}\right)$ как функции параметрического комплексного переменного t, изменяющегося в верхней полуплоскости вспомогательной плоскости t. Так как функция $w = \varphi + i\psi$ определяется с точностью до постоянного слагаемого (см. п. 7.11), можно считать, что $\psi = 0$ на линии тока HAB. Тогда уравнением линии тока $HDCB$ будет $\psi = Q$, где $Q = v_\infty L$ — половина расхода жидкости, проходящей через клапан (здесь L — ширина канала).

Из изложенного следует, что области течения в плоскости z (рис. 7.24, *а*) соответствует горизонтальная полоса шириной Q в плоскости w (рис. 7.24, *б*). Отыскание функции $w = w(t)$ сводится к конформному отображению этой полосы на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости t (рис. 7.24, *в*). Рассматривая полосу как «двуугольник» с углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ при вершинах H и B, можно требуемое отображение осуществить с помощью формулы Кристоффеля—Шварца *

$$w = C' \int (t-h)^{-1}(t-b)^{-1}\,dt + C'' = C' \int \frac{dt}{(t-h)(t-b)} + C'', \quad (7.66)$$

где h и b — значения переменной t, соответствующие точкам H и B.

---

* Формула Кристоффеля—Шварца имеет вид

$$w = C' \int (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n-1} + C'''$$

и служит для конформного отображения на верхнюю полуплоскость переменной t внутренности многоугольника с внутренними углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$ в плоскости w. При этом его вершины переходят в точки вещественной оси с координатами a_1, a_2, ..., a_n.

Величины C' и C'' — комплексные постоянные числа. Если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка, то соответствующий множитель в формуле Кристоффеля—Шварца под знаком интеграла отсутствует.

Не учитывая постоянное слагаемое C'', не существенное для комплексного потенциала w, после интегрирования получаем

$$w = \frac{C'}{h-b}[\ln(t-h) - \ln(t-b)] = \frac{C'}{h-b}\ln\frac{t-h}{t-b}. \quad (7.67)$$

Для определения постоянной C' обойдем точку $t = h$ (рис. 7.24, *в*) по полуокружности достаточно малого радиуса $r = |t - h|$ (с центром в точке $t = h$) против часовой стрелки. При этом аргумент вектора, соответствующий комплексному числу $t - h$, изменится от 0 до π. Тогда первое слагаемое в квадратных скобках равенства (7.67) примет вид $\ln|t-h| + \pi i$, т. е. получит приращение πi. Второе же слагаемое $\ln|t - b|$ получит малое приращение, так как оно непрерывно в точке $t = h$. В результате приращение функции w после указанного перехода можно представить так:

$$\Delta w = \frac{C'}{h-b}\pi i + O(r), \quad (7.68)$$

где $0(r) \to 0$ при $r \to 0$.

С другой стороны, обходу точки $t = h$ соответствует переход точки плоскости w (рис. 7.24, *б*) с HA на HD, и, значит, приращение функции $w = w(t)$ должно мало отличаться от iQ:

$$\Delta w = iQ + 0(r). \quad (7.69)$$

Сопоставляя равенства (7.68) и (7.69), получаем $C'\pi/(h - b) = Q$, откуда $C' = Q(h - b)/\pi$.

Итак, окончательным выражением для $w = w(t)$ будет

$$w = \frac{Q}{\pi}\ln\frac{h-t}{b-t}. \quad (7.70)$$

Рассмотрим функцию $\Omega = i\ln\left(\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}\right)$. Так как $dw/dz = ve^{-i\theta}$ (где θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс), имеем

$$\Omega = i\ln\left(\frac{v}{v_0}e^{-i\theta}\right) = i\left(\ln\frac{v}{v_0} - i\theta\right), \quad (7.71)$$

т. е. $\Omega = \theta + i\tau$, где $\tau = \ln(v/v_0)$.

На участке HA линии тока $\psi = 0$, $\theta = 0$, $\Omega = i\tau$, причем $\ln(v_\infty/v_0) \leqslant \tau \leqslant 0$, так как $v = v_\infty$ в точке H и $v = v_0$ в точке A.

На дуге AB $v = v_0$, поэтому $\tau = 0$, $\Omega = \theta$, причем $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 0$, где $\theta_0 < 0$ — значение θ в бесконечно удаленной точке B (рис. 7.24, *а*). На дуге CB линии тока $\psi = 0$ также $v = v_0$ и, значит, $\tau = 0$, $\Omega = \theta$, причем $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, так как $\theta = -\pi/2$ в точке C. На вертикальном участке CD $\theta = -\pi/2$, $\Omega = -\pi/2 + i\tau$. При этом $-\infty < \tau \leqslant 0$, потому что $v = 0$ в точке D и $\tau = \ln(v/v_0) \to -\infty$ при неограниченном приближении к D. Наконец, $\theta = 0$ на горизонтальной стенке HD, поэтому на ней $\Omega = i\tau$, где $-\infty < \tau \leqslant \ln(v_\infty/v_0)$.

Из изложенного можно сделать вывод, что области течения в плоскости z соответствует вертикальная полуполоса шириной $\pi/2$ в плоскости переменной Ω (рис. 7.24, *г*). Эту полуполосу, рассматриваемую как «треугольник» с углами $\pi/2$, $\pi/2$ и 0 соответственно при вершинах A, C, D, можно с помощью формулы Кристоффеля—Шварца отобразить на верхнюю полуплоскость параметрической переменной t. Соответствие точек в плоскостях Ω и t показано на рис. 7.24, *в* и *г*. Так как вершине C соответствует бесконечно удаленная точка плоскости t, имеем

$$\Omega = M\int t^{-1}(t-1)^{-1/2}\,dt + N = M\int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} + N, \qquad (7.72)$$

где M и N — постоянные, подлежащие определению.

Интеграл выражения (7.72) легко вычислить с помощью подстановки $t = u^2 + 1$. В результате получим

$$\Omega = 2M \operatorname{arctg}\sqrt{t-1} + N. \qquad (7.73)$$

В точке A $(t = 1)$ $\theta = 0$, $\tau = 0$, поэтому согласно (7.73) $0 = 2M \operatorname{arctg} 0 + N$ и, значит, $N = 0$. В точке же C $\theta = -\pi/2$ и согласно формуле (7.73) $-\pi/2 = 2M \operatorname{arctg}\infty$, т. е. $2M = -1$. Подставляя найденные значения постоянных в (7.73), получаем

$$\Omega = -\operatorname{arctg}\sqrt{t-1}. \qquad (7.74)$$

В силу известного из теории функций комплексного переменного соотношения между арктангенсом и логарифмом имеем

$$\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} = \frac{1}{2i}\ln\frac{i-\sqrt{t-1}}{i+\sqrt{t-1}} = \frac{1}{2i}\ln\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}.$$

Таким образом,

$$\Omega = i\ln\left(\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}\right) = -\frac{1}{2i}\ln\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}},$$

откуда

$$\frac{dw}{dz} = v\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}}.$$

После простых алгебраических преобразований получаем

$$\frac{dw}{dz} = v_0\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}}. \qquad (7.75)$$

Итак, общее решение поставленной задачи выражается формулами (7.70) и (7.75), эквивалентными непосредственному соотношению между w и z. В эти формулы входят физические параметры Q и v_0 и математические параметры h и b, причем $0 < h < 1$, $1 < b < \infty$ (см. рис. 7.24, *в*).

Выясним физический смысл параметров h и b. Точке $t = h$ соответствует значение $dw/dz = v_\infty$ и согласно формуле (7.75)

$$v_\infty = v_0 \frac{\sqrt{h}}{1+\sqrt{1-h}}, \qquad \frac{v_0}{v_\infty} = \frac{1+\sqrt{1-h}}{\sqrt{h}}, \tag{7.76}$$

т. е. h определяет отношение скоростей течения на свободной границе и набегающего потока.

При $t = b$ $v = v_0$, $\tau = 0$, $\theta = \theta_0$ и, значит, $\Omega = \theta_0$, поэтому согласно (7.74)

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg}\sqrt{b-1}. \tag{7.77}$$

Таким образом, параметр b определяет угол наклона границы струи к оси абсцисс в бесконечности (рис. 7.24, *а*).

Для отыскания зависимости безразмерных величин l/L и λ/L (где l — ширина пластины CD, λ — абсцисса точки D, рис. 7.24, *а*) определим dz/dt из формул (7.70) и (7.75). Дифференцируя (7.70) по t, получаем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Q}{\pi}\left(\frac{1}{t-h} - \frac{1}{t-b}\right) = \frac{Q}{\pi}\frac{h-b}{(t-h)(t-b)}. \tag{7.78}$$

Разделив (7.78) на (7.75), находим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q(h-b)}{\pi v_0}\frac{1+\sqrt{1-t}}{(t-h)(t-b)\sqrt{t}}. \tag{7.79}$$

На участке CD, как видно из рис. 7.24, *в*, $-\infty < t \leqslant 0$ и вместо $\sqrt{t}$ следует писать $i\sqrt{-t}$, где $-t \geqslant 0$. Тогда равенство (7.79) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = i\frac{dy}{dt} = i\frac{Q(b-h)}{\pi v_0}\frac{1+\sqrt{1-t}}{(t-h)(t-b)\sqrt{-t}}.$$

Отсюда, в силу соответствия точек на рис. 7.24, *а* и *б*, имеем

$$l = y\Big|_{y_C}^{y_D} = \frac{Q(b-h)}{\pi v_0}\int_{-\infty}^{0}\frac{1+\sqrt{1-t}\,dt}{(t-h)(t-b)\sqrt{-t}},$$

или после замены переменной $\nu = -t$, $dt = -d\nu$

$$l = \frac{Q(b-h)}{\pi v_0}\left[\int_0^\infty \frac{d\nu}{(\nu+h)(\nu+b)\sqrt{\nu}} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+\nu}\,d\nu}{(\nu+h)(\nu+b)\sqrt{\nu}}\right].$$

В результате интегрирования получаем

$$l = \frac{Q}{\pi v_0}\left\{2\sqrt{\frac{b-1}{b}}\ln\left(b+\sqrt{b-1}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{1-h}{h}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(2h-1)\right] + \pi\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right\} \tag{7.80}$$

или

$$l = \frac{Q}{\pi v_0} F(h,\ b), \tag{7.81}$$

где через $F(h,\ b)$ обозначено выражение в фигурных скобках.

На отрезке AHD $0 \leqslant t \leqslant 1$, $dz = dx$.

Поэтому, интегрируя выражение (7.79) по указанному отрезку, находим

$$\lambda = x \Big|_0^{x_D} = \frac{Q(h-b)}{\pi v_0} \left[\int_1^0 \frac{dt}{(t-h)(t-b)\sqrt{t}} + \int_1^0 \frac{(1-t)\,dt}{(t-b)(t-h)\sqrt{t(1-t)}} \right],$$

причем входящие в эту формулу несобственные интегралы понимаются в смысле главного значения.

В результате интегрирования получаем

$$\lambda = \frac{Q}{\pi v_0} \left(\pi \sqrt{\frac{b-1}{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}+1} - \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{1-\sqrt{h}}{1+\sqrt{h}} \right). \tag{7.82}$$

Для компактности формулу (7.82) запишем в виде

$$\lambda = \frac{Q}{\pi v_0} f(h,\ b), \tag{7.83}$$

где $f(h,\ b)$ — выражение в круглых скобках в (7.82).

Используя равенство $Q = v_\infty L$ и формулу (7.76), получаем

$$L = \frac{Q}{v_0} \frac{1-\sqrt{1-h}}{\sqrt{h}}, \tag{7.84}$$

и тогда согласно выражению (7.81), (7.83) и (7.84)

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{h}}{1+\sqrt{1-h}} F(h,\ b); \tag{7.85}$$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{h}}{1+\sqrt{1-h}} f(h,\ b). \tag{7.86}$$

Для определения силы сопротивления X пластины CD (и сопротивления $2X$ клапана) применим теорему количества движения к массе жидкости, ограниченной контрольной поверхностью S (заштрихованная область на рис. 7.24, *а*). Вследствие стационарности течения проекция на ось абсцисс изменения количества движения этой массы жидкости в единицу времени равна $\rho Q v_0 \cos\theta_0 - \rho Q v_\infty$.

Найдем теперь проекцию R_x на ось абсцисс результирующей R сил давления, действующих на рассматриваемую массу. Она слагается из проекции силы давления на поперечное сечение в бесконечности слева, равной $p_\infty L$, проекции X_1 силы реакции, действующей со стороны пластины на жидкость, а также проекции результирующей силы давлений по сложному контуру CBA, равный

$\int\limits_{CBA} p_0 \cos\alpha'\, ds$. Так как силы давления жидкости на горизонтальные стенки HD и HA перпендикулярны к ним, проекции реакций этих стенок на ось абсцисс равны нулю. Таким образом, имеем

$$R_x = p_\infty L - X_1 + p_0 \int\limits_{CBA} \cos\alpha'\, ds,$$

где $X_1 = \int\limits_{CD} p\, dy = \int\limits_{y_G}^{y_D} p\, dy.$

Учитывая, что $\cos\alpha' = dy/ds$, получаем

$$p_0 \int\limits_{CBA} \cos\alpha'\, ds = p_0 \int\limits_{y_G}^{0} dy = -p_0 (L - l).$$

Искомое сопротивление пластины

$$X = \int\limits_{CD} (p - p_0)\, dy = \int\limits_{y_G}^{y_D} p\, dy - p_0 \int\limits_{y_G}^{y_D} dy = X_1 - p_0 l.$$

Теперь проекция R_x выразится так:

$$R_x = p_\infty L - X - p_0 l - p_0 (L - l) = (p_\infty - p_0) L - X.$$

Следовательно, уравнение количества движения можно записать в виде

$$\rho Q v_0 \cos\theta_0 - \rho Q v_\infty = (p_\infty - p_0) L - X,$$

откуда

$$X = (p_\infty - p_0) L - \rho Q (v_0 \cos\theta_0 - v_\infty).$$

Поскольку $Q = v_\infty L$ и $p_\infty - p_0 = \rho (v_0^2 - v_\infty^2)/2$, получаем

$$X = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v_\infty^2) L - \rho v_\infty L (v_0 \cos\theta_0 - v_\infty)$$

или

$$X = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L \left(\frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 2 \frac{v_0}{v_\infty} \cos\theta_0 + 1 \right). \tag{7.87}$$

В результате приходим к следующей формуле для коэффициента сопротивления $C_x = 2X/(\rho v_\infty^2 l)$ клапана CDC_1:

$$C_x = \frac{L}{l} \left(\frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 2 \frac{v_0}{v_\infty} \cos\theta_0 + 1 \right), \tag{7.88}$$

где L/l и v_0/v_∞ выражается через параметры h и b с помощью формул (7.85) и (7.76), а на основании выражения (7.77) $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{b}$.

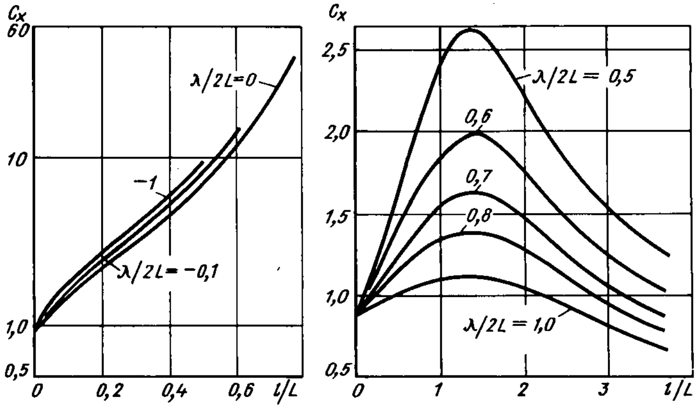


Рис. 7.25. Зависимости коэффициента сопротивления C_x клапана от геометрических параметров области течения

Формулы (7.88), (7.85), (7.86) позволяют построить графики зависимостей C_x, λ/L и l/L от h (при различных значениях b). Из них можно получить графики зависимости коэффициента сопротивления C_x от l/L при различных значениях $\lambda/(2L)$ (рис. 7.25).

Рассмотрим некоторые предельные случаи данной задачи. При $b \to \infty$ согласно выражению (7.77) $\theta_0 \to -\pi/2$ и, как видно из рис. 7.24, *а*, точка C физической плоскости сливается с бесконечно удаленной точкой B, т. е. вертикальная пластина CD становится бесконечно длинной (рис. 7.26, *а*). Если течение, показанное на рис. 7.26, *а*, продолжить симметрично вправо через CD, то получится истечение из отверстия в нижней стенке плоского канала с двусторонним притоком (рис. 7.26, *б*).

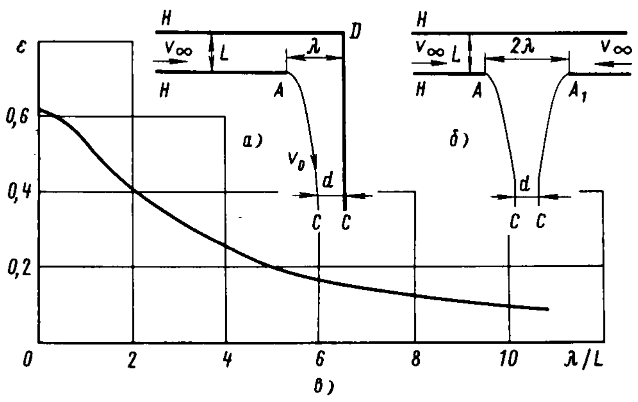


Рис. 7.26. Предельные случаи струйного обтекания пластины:

а — истечение из канала на плоскость; *б* — истечение с двусторонним притоком; *в* — зависимость коэффициента сжатия струи ε от относительной ширины отверстия

Переходя к пределу при $b \to \infty$ в выражении (7.82), находим

$$\lambda = \frac{Q}{\pi v_0}\left[\pi \lim_{b\to\infty}\sqrt{\frac{b-1}{b}} + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{h}}\ln\frac{1-\sqrt{h}}{1+\sqrt{h}}\right],$$

т. е.

$$\lambda = \frac{Q}{\pi v_0}\left(\pi + \frac{1}{\sqrt{h}}\ln\frac{1+\sqrt{h}}{1-\sqrt{h}}\right). \tag{7.89}$$

Обозначая через d ширину струи в бесконечности (см. рис. 7.26, *а*, *б*) и учитывая, что $Q = v_\infty L = v_0 d$, получаем $d = Q/v_0$. С помощью этого соотношения и формулы (7.89) коэффициент сжатия струи $\varepsilon = d/\lambda$ можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + \frac{1}{\sqrt{h}}\ln\frac{1+\sqrt{h}}{1-\sqrt{h}}}. \tag{7.90}$$

В то же время из соотношений (7.89) и (7.84)

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{\pi\sqrt{h} + \ln\frac{1+\sqrt{h}}{1-\sqrt{h}}}{\pi(1+\sqrt{1-h})}. \tag{7.91}$$

По формулам (7.90) и (7.91) построена зависимость ε от λ/L (рис. 7.26, *в*).

Теперь в общем решении (7.70), (7.75) исходной задачи перейдем к пределу при $h \to 1$. Это значит, что точка A сливается с точкой H (см. рис. 7.25, *а*), т. е. стенка канала HA перестает существовать, и нижней границей течения становится лишь свободная граница струи HB (рис. 7.27, *а*). Если же это течение симметрично продолжим вверх через стенку канала HD, то получим отрывное обтекание пластины свободной струей (рис. 7.27, *б*).

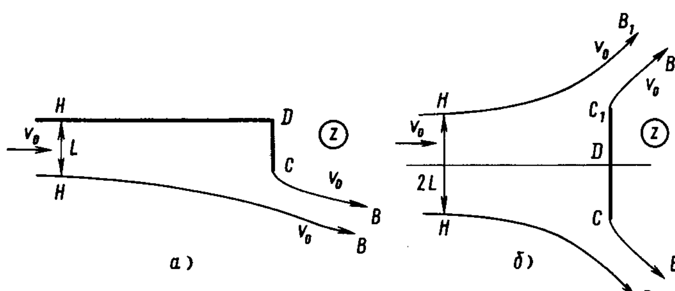


Рис. 7.27. Обтекание свободной струей конечной ширины:
а — **уступа;** *б* — **пластины**

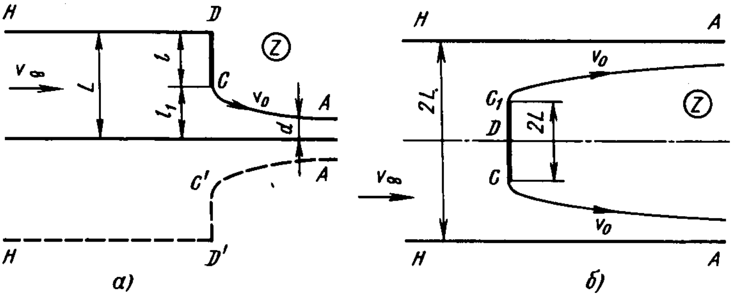


Рис. 7.28. Предельные случаи течений:
а — истечение из-под плоского затвора; б — обтекание пластины в канале

В данном предельном случае формулы (7.85) и (7.88), так как $v_0 = v_\infty$ [см. выражение (7.76)], переходят в следующие:

$$\frac{l}{L} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{b-1}{b}}\ln\left(\sqrt{b}+\sqrt{b-1}\right)+1-\frac{1}{\sqrt{b}}; \qquad (7.92)$$

$$C_x = \frac{2L}{l}(1-\cos\theta_0), \qquad (7.93)$$

где L — половина ширины свободной струи на бесконечности; угол θ_0 определяется по формуле (7.77).

Рассмотрим предельный случай течения Мизеса. Пусть нижняя стенка HA канала (рис. 7.24, *а*) бесконечно продолжается вправо, т. е. точка A сливается с бесконечно удаленной точкой B. Это имеет место при $b \to 1$ (рис. 7.24, *в*). Тогда получаем известное в гидравлике течение из-под прямоугольного затвора (рис. 7.28, *а*). Течение же через клапан перейдет в струйное симметричное обтекание пластины в канале с параллельными стенками (рис. 7.28, *б*), исследованное еще Н. Е. Жуковским. Если же течение из-под затвора симметрично продолжить вниз через стенку HA (штриховая линия на рис. 7.28, *а*), то приходим к истечению из прямоугольного сосуда через отверстие.

Формулу для длины пластины CD (см. рис. 7.28, *а*) получим из выражения (7.80), полагая $b = 1$:

$$l = \frac{Q}{\pi v_0}\left\{\sqrt{\frac{1-h}{h}}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin(2h-1)\right]+\pi\left(\frac{1}{\sqrt{h}}-1\right)\right\}. \qquad (7.94)$$

Выражение (7.84) для ширины L канала справедливо и в данном предельном случае, так как не содержит параметра b.

Выразим через единственный оставшийся математический параметр h коэффициент сжатия струи

$$\varepsilon = d/(L-l), \qquad (7.95)$$

где $d = Q/v_0$ — ширина струи в бесконечности справа (см. рис. 7.28, *а*).

Подставляя в правую часть формулы (7.95) выражение для d, а также выражения для L и l соответственно из формул (7.84) и (7.94), после простых алгебраических преобразований получаем

$$\varepsilon = \frac{2\pi\sqrt{h}}{\pi(\sqrt{1-h}+2\sqrt{h})+2\sqrt{1-h}\arcsin(2h-1)}. \tag{7.96}$$

Кроме того, согласно уравнениям (7.84) и (7.94)

$$\frac{l}{L} = \frac{\sqrt{1-h}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin(2h-1)\right]+1-\sqrt{h}}{1+\sqrt{1-h}}. \tag{7.97}$$

Зависимость коэффициента сжатия струи ε от $l_1/L = 1 - l/L$, построенная по формулам (7.96) и (7.97), приведена на рис. 7.29.

Формула для коэффициента сопротивления прямоугольного затвора (см. рис. 7.28, *а*) получается из выражения (7.88), если учесть, что при $b \to 1$ $\theta_0 \to 0$, тогда

$$C_x = \frac{L}{l}\left(\frac{v_0}{v_\infty}-1\right)^2, \tag{7.98}$$

где L/l выражается через параметр h по формуле (7.97), а v_0/v_∞ — по формуле (7.76).

Разумеется, выражением (7.98) определяется и коэффициент сопротивления пластины длиной $2l$ при ее симметричном струйном обтекании в канале шириной $2L$ (рис. 7.28, *б*).

Найдем коэффициент сопротивления пластины при ее обтекании с отрывом струй безграничным симметричным потоком (рис. 7.30). Другими словами, получим предельное значение коэффициента C_x для пластины в канале (рис. 7.28, *б*), когда последний бесконечно расширяется. В этом предельном случае должны совпадать по величине и направлению скорости течения бесконечно далеко слева и справа от пластины, т. е. $v_0 = v_\infty$. Тогда можно считать, что в плоскости течения z (см. рис. 7.24, *а*) бесконечно удаленная точка H сливается с бесконечно удаленной точкой A. Это осуществляется при $h \to 1$ (см. рис. 7.24, *а*, *в*). Для получения значения C_x при $h \to 1$ (т. е. при

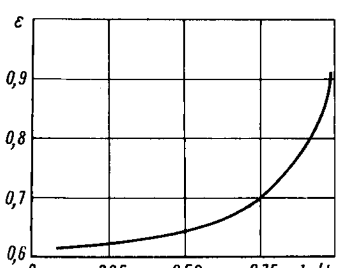


Рис. 7.29. Зависимость коэффициента сжатия струи, вытекающей из прямоугольного сосуда, от относительной ширины отверстия

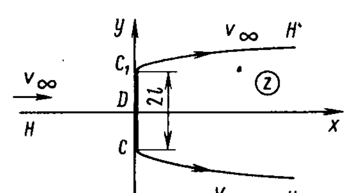


Рис. 7.30. Струйное обтекание пластины неограниченным потоком

$L/l \to \infty$, $v_0/v_\infty \to 1$) подставим выражения для L/l и v_0/v_∞ соответственно из (7.97) и (7.76) в формулу (7.98) и после простых преобразований получим

$$C_x = \frac{2\left(1+\sqrt{1-h}\right)^2}{h} \frac{1}{\left(1+\sqrt{h}\right)\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\arcsin(2h-1)}{\sqrt{1-h}}+1}. \qquad (7.99)$$

При $h \to 1$

$$C_x = \frac{2}{2\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\arcsin(2h-1)}{\sqrt{1-h}}+1}.$$

Имеющуюся здесь неопределенность вида 0/0 раскрываем по правилу Лопиталя. Опуская выкладки, приведем окончательный результат:

$$C_x = \frac{2\pi}{4+\pi} = 0{,}88.$$

Подставляя это значение C_x в выражение для сопротивления пластины в безграничном потоке $2X = C_x \rho v_\infty^2 l$, получаем

$$2X = \frac{\pi}{4+\pi} 2l\rho v_\infty^2.$$

Теоретическое значение коэффициента сопротивления пластины $C_x = 0{,}88$ с достаточной для практических целей точностью соответствует опытным данным в тех случаях, когда условия обтекания близки к принятым в теории струйных течений. Такие условия могут быть созданы, в частности, при суперкавитационных течениях (см. п. 7.2 и 7.10).

7.13. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Аналитические методы построения потенциальных течений при решении прикладных задач чаще всего требуют значительного объема вычислительной работы. Наряду с этим обеспечиваемая ими высокая точность не всегда необходима, и нередко достаточно той точности, которую могут дать ориентировочные расчеты по гидродинамическим сеткам, полученным графоаналитическими и экспериментальными методами. Результаты таких расчетов можно использовать, в частности, как первое приближение в итерационном процессе численных методов, выполняемых с применением ЭВМ.

Графический метод состоит из построения линий тока и эквипотенциалей, соответствующих заданным формам граничных поверхностей и кинематическим граничным условиям. Как известно, контуры твердых поверхностей должны быть линиями тока, а эк-

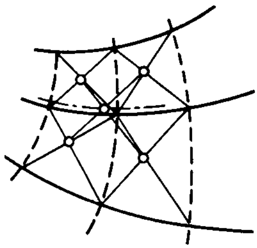


Рис. 7.31. Уточнение гидродинамической сетки построением сетки диагоналей

випотенциали должны пересекать их ортогонально всюду, кроме критических точек, в которых линии тока разветвляются. Как правило, критические точки лежат на твердых поверхностях; свободные линии тока выходят из этих точек нормально к поверхностям, а эквипотенциали — под углом 45°.

Для расчетов удобнее всего использовать изотермическую или квадратичную сетку, в которой ячейки представляют собой криволинейные квадраты, а приращения потенциала скорости $\Delta\varphi$ и функции тока $\Delta\psi$ на граничных линиях ячейки равны (см. п. 2.9).

Рассмотрим в качестве примера построение такой сетки в плоском канале на участке сужения (см. рис. 2.24). Изобразив на чертеже в выбранном масштабе граничные поверхности (контуры) канала, проводим ориентировочно несколько линий тока и эквипотенциалей, следя за тем, чтобы ячейки приближенно были криволинейными квадратами (их средние линии должны быть равными, а углы — прямыми). Затем сетку уточняем.

Один из способов уточнения сетки [23] основан на том соображении, что сетка, образованная диагоналями ячеек первого приближения, должна быть также ортогональной. Поэтому, построив первое приближение сетки, проводим диагонали каждой из ячеек. Они должны образовывать плавные кривые (рис. 7.31). Приняв точки пересечения диагоналей за вершины ячеек сетки, проводим новые диагонали, пересечение которых определит уточненное положение узлов сетки второго приближения.

Методы аналогий являются экспериментальными методами, основанными на идентичности уравнений, описывающих потенциальные плоские течения и некоторые другие физические явления. Из числа этих методов в первую очередь рассмотрим метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА). Он основан на том, что поля плоского безвихревого течения несжимаемой жидкости и электрического тока в плоском проводнике являются потенциальными с нулевой дивергенцией. Они описываются уравнением Лапласа. В табл. 4 приведены аналогичные величины (аналоги) и уравнения, которым удовлетворяют эти поля.

Если для сравниваемых потоков жидкости и электрического тока граничные условия одинаковы, то линии $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ и соответственно $\Phi = \text{const}$, $\Psi = \text{const}$ также одинаковы. Иными словами, одинаковыми будут сетки течения.

Рассмотрим, например, обтекание профиля безграничным потоком (рис. 7.32, *а*). Вдалеке от профиля линии тока и эквипотенциали приближенно являются взаимно ортогональными прямыми. Поэтому прямоугольник, стороны которого велики по сравнению

4. Аналогичные величины и уравнения для полей течения жидкости и электрического тока

Плоский безвихревой поток несжимаемой жидкости	Электрический ток в плоском проводнике
Потенциал скорости φ	Приведенный электрический потенциал $\Phi = -\sigma U$, где σ — удельная электрическая проводимость; U — электрический потенциал
Вектор скорости $\boldsymbol{u}$ (u_x, u_y): $\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$; $u_x = \partial\varphi/\partial x$; $u_y = \partial\varphi/\partial y$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$	Вектор плотности электрического тока $\boldsymbol{i}$ (i_x, i_y): $\boldsymbol{i} = -\sigma\,\mathrm{grad}\,U = \mathrm{grad}\,\Phi$; $i_x = \partial\Phi/\partial x$; $i_y = \partial\Phi/\partial y$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = 0$
Функция тока $\psi\,(x, y)$: $u_x = \partial\psi/\partial y$; $u_y = -\partial\psi/\partial x$	Функция электрического тока $\Psi\,(x, y)$: $i_x = \partial\Psi/\partial y$; $i_y = -\partial\Psi/\partial x$
Уравнения, определяющие функции φ и ψ: $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$; $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$	Уравнения, определяющие функции Φ и Ψ: $\partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 = 0$; $\partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2 = 0$
Условия на твердой границе $\partial\varphi/\partial n = 0$; $\psi = \mathrm{const}$	Условия на изолирующей границе $\partial\Phi/\partial n = 0$; $\Psi = \mathrm{const}$

с размерами профиля, может служить с достаточной точностью областью течения. При этом одна из его сторон должна быть параллельна вектору скорости в бесконечности. На рис. 7.32, *а* показаны граничные условия, которые реализуются на границах области и контуре профиля.

Если теперь вырезать из плоского проводника подобный прямоугольник с отверстием в нем, геометрически подобным контуру профиля, и подвести электрический ток через шины $Ш_1$ и $Ш_2$ (рис. 7.32, *б*), то получим электрическую модель, в которой будут реализованы те же граничные условия, что и в потоке жидкости. На полученной модели остается лишь экспериментально зафиксировать вид линий $\Phi = \mathrm{const}$ и $\Psi = \mathrm{const}$, чтобы получить ортогональную сетку, в которой эквипотенциалям потока жидкости будут соответствовать линии равного электрического потенциала. Такую аналогию называют аналогией *А*. В практике используют также аналогию Б, в которой эквипотенциалям $\varphi = \mathrm{const}$ соответствуют линии электрического тока $\Psi = \mathrm{const}$. Для получения этой аналогии следует обратить граничные условия: электропроводя-

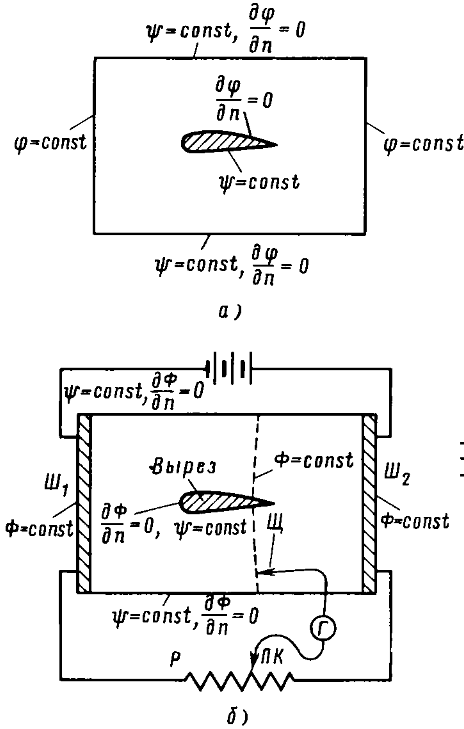


Рис. 7.32. Электрогидродинамическая аналогия (ЭГДА):

а — граничные условия для плоского потенциального потока несжимаемой жидкости; *б* — схема прибора, воспроизводящего аналогию А; *в* — схема прибора, воспроизводящего аналогию Б

щие шины $Ш_1$ и $Ш_2$ наложить, как показано на рис. 7.32, *в*, а обтекаемый профиль выполнить из массивного проводника. Тогда будут реализованы граничные условия, при которых соответственными будут линии $\varphi = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$, а также $\Phi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Сетка электрического тока получится обращенной по отношению к сетке потока жидкости.

На рис. 7.32, *б* показана принципиальная схема модели ЭГДА, выполненной по аналогии А. Можно видеть, что эта модель построена по схеме электрического моста, одной из ветвей которого служит плоский проводник, моделирующий область течения, а во вторую включен реохорд *Р*. В диагональ моста включен гальванометр *Г*, регистрирующий наличие в ней тока. Один конец диагонали представляет собой подвижный контакт *ПК* реохорда, а второй — тонкий щуп *Щ*, которым можно прикоснуться к любой точке области течения. Для нахождения какой-либо эквипотенциали (линии равного электрического потенциала) следует, зафиксировав контакт *ПК*, перемещать щуп по области течения до тех пор, пока гальванометр *Г* не покажет отсутствие тока в диагонали моста. Это будет означать, что электрические потенциалы на обоих концах диагонали равны. Затем, перемещая щуп, надо найти все точки, имеющие тот же потенциал. Соединяя эти точки плавной кривой, получаем эквипотенциаль. Затем, переместив контакт *ПК* в новое положение, также определяем эквипотенциаль с другим значением потенциала и т. д.

Для отыскания семейства линий тока, как указывалось выше, следует обратить граничные условия, выполнив модель по аналогии Б (рис. 7.32, *в*). Полученные тем же способом на этой модели эквипотенциали будут служить линиями тока для искомого течения. Практически работу удобнее начинать с аналогии Б.

Следует отметить, что метод ЭГДА является приближенным способом решения уравнения Лапласа на специальном аналоговом устройстве. Существуют и другие методы аналогий, например метод магнитогидродинамической аналогии, разработанный А. Н. Патрашевым [15] и метод ламинарной аналогии, в котором используется факт существования потенциала, для осредненного по толщине потока вязкой жидкости между параллельными поверхностями при весьма малых числах Рейнольдса (течение Хил—Шоу).

7.14. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Описанные выше одномерные и двумерные течения являются определенной идеализаций, которая практически применима для ряда технических актуальных задач. Но во многих случаях, когда течения даже приближенно нельзя рассматривать как одно- или двумерные, возникает необходимость решать более сложные задачи о пространственных или трехмерных течениях. Возможность их решения в значительной степени зависит от выбора системы координат. Часто оказываются удобными различные криволинейные ортогональные системы, например цилиндрическая и сферическая.

В п. 2.4 выведено уравнение неразрывности для произвольной ортогональной системы координат. Далее установим выражения для основных операторов в такой же системе.

Градиент скалярной функции grad φ, как известно, обладает тем свойством, что его проекция на любое направление s равна частной производной от потенциальной функции φ по этому направлению. Если s_i — координатное направление, то, поскольку $ds_i = H_i dq_i$ (см. п. 2.4), проекция градиента на это направление

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{s_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \qquad (7.100)$$

Дивергенция вектора div $\boldsymbol{a}$ по определению представляет собой предел отношения потока вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S, ограничивающую объем W к этому объему, при стягивании поверхности в точку:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \lim_{W\to 0}\frac{1}{W}\int_S a_n\,dS,$$

где a_n — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на нормаль к поверхности.

Применяя это определение к элементарному объему $\Delta W = \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 = H_1 \Delta q_1 H_2 \Delta q_2 H_3 \Delta q_3$, образованному криволинейными ортогональными поверхностями (см. рис. 2.7), можем записать

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{1}{\Delta W} \left[-a_1 \Delta S_1 + a_1 \Delta S_1 + \frac{\partial (a_1 \Delta S_1)}{\partial q} dq_1 + \cdots \right] =$$

$$= \frac{1}{H_1 \Delta q_1 H_2 \Delta q_2 H_3 \Delta q_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + \cdots \right],$$

где $\Delta S_1 = \Delta s_2 \Delta s_3 = H_2 \Delta q_2 H_3 \Delta q_3$, ... — площади граней элементарного объема ΔW.

После сокращения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \tag{7.101}$$

Вектор-вихрь в криволинейных координатах можно определить с помощью теоремы Стокса (см. п. 2.7)

$$\Omega_i \Delta S_i = \operatorname{rot}_{q_i} \boldsymbol{a} \Delta S_i = \oint_{L_i} a_s ds_i,$$

где Ω_i — проекция вихря Ω на координатное направление q_i; ΔS_i — площадь координатной площадки, нормальной этому направлению; L_i — контур, охватывающий площадку ΔS_i; a_s — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление касательной к контуру L_i; ds_i — элементы дуги контура L_i.

Контурный интеграл в правой части этой формулы вычислим приближенно и перейдем к пределу при $\Delta S_i \to 0$. Например, для $i = 1$:

$$\Omega_1 H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3 = a_2 \Delta s_2 + \left[a_3 \Delta s_3 + \frac{\partial (a_3 \Delta s_3)}{\partial q_2} \Delta q_2 \right] -$$

$$- \left[a_2 \Delta s_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 \Delta s_2) \Delta q_3 \right] - a_3 \Delta s_3 =$$

$$= \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} \Delta q_3 \Delta q_2 - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Сократив это равенство на $\Delta q_2 \Delta q_3$ и выписав по аналогии формулы для $i = 2, 3$, найдем

$$\Omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right];$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right]; \tag{7.102}$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right].$$

Оператор Лапласа (*лапласиан*) легко получить, используя формулу $\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$. С учетом выражения (7.100) и (7.101) находим

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (7.103)$$

Уравнение (7.1′) неразрывности в криволинейных координатах с учетом выражения (7.103) принимает вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right) = 0. \quad (7.103')$$

Для решения ряда задач о плоских течениях существенную роль играет функция тока. Естественно поэтому выяснить, нельзя ли и для пространственных течений ввести аналогичную функцию. В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. Однако существуют частные виды пространственных течений, для которых такая функция существует. В самом деле, допустим, что характер движения позволяет выбрать криволинейную систему координат (q_1, q_2, q_3), в которой одна из проекций скорости равна нулю. Пусть, например, $u_2 = 0$. Тогда уравнение неразрывности (2.23) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(u_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(u_3H_1H_2) = 0. \quad (7.104)$$

Это уравнение можно рассматривать как условие, необходимое и достаточное для существования функции ψ, определяемой равенствами

$$u_1H_2H_3 = -\partial\psi/\partial q_3;\quad u_3H_1H_2 = \partial\psi/\partial q_1,$$

выбор знаков в которых будет пояснен ниже.

Следовательно,

$$u_1 = -\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3};\qquad u_3 = \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}. \quad (7.105)$$

Функция $\psi(q_1, q_2)$ называется функцией тока для данного пространственного течения. Следует обратить внимание на то, что существование этой функции определяется не только характером течения, но и выбором системы координат. Так, если бы в рассмотренном случае координатные направления были выбраны так, чтобы все три проекции скорости были отличны от нуля, то обосновать существование функции тока оказалось бы невозможно.

В машиностроении особое значение имеет осесимметричное течение, которое наиболее удобно описывать в цилиндрической системе координат (см. рис. 2.8). Напомним, что если для этой системы $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$, то $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$.

Для осесимметричного течения все параметры не зависят от угла θ и функция тока определяется соотношениями

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{7.106}$$

а уравнение неразрывности согласно выражению (2.25) имеет вид

$$\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial (ru_z)}{\partial z} = 0. \tag{7.107}$$

Если $u_\theta = 0$, то вектор скорости лежит в плоскости $\theta = \mathrm{const}$ (меридианальная плоскость). Следовательно, линии тока являются плоскими кривыми, уравнение которых имеет вид

$$dr/u_r = dz/u_z \text{ или } u_z\,dr - u_r\,dz = 0.$$

Используя формулы (7.106), введем в это уравнение функцию тока:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz = d\psi = 0.$$

Следовательно, вдоль линии тока $d\psi = 0$ или $\psi(r, z) = \mathrm{const}$, что соответствует свойству функции тока плоского течения. Вычислим объемный расход жидкости через круговое сечение потока радиусом r, нормальное к оси z:

$$Q = \int_0^r u_z 2\pi r\,dr = 2\pi\int_0^r \frac{\partial\psi}{\partial r}dr = 2\pi\,[\psi(r,\ z) - \psi(0,\ z)].$$

Если примем $\psi(0,\ z) = 0$, что допустимо в силу произвольности начала отсчета для функции ψ, то получим

$$Q = 2\pi\psi(r,\ z). \tag{7.108}$$

Таким образом, функция тока для осесимметричного течения имеет тот же физический смысл, что и для плоского. Из формулы (7.108) следует, что знаки, выбранные для выражений (7.105), соответствуют одинаковым знакам величин Q и ψ.

Иногда осесимметричные течения удобно описывать в сферической системе координат (см. рис. 2.8), для которой

$$x = R\sin\beta\cos\theta;\ y = R\sin\beta\sin\theta;\ z = R\cos\beta.$$

Полагая $q_1 = R$, $q_2 = \beta$, $q_3 = \theta$, получаем $H_R = 1$, $H_\beta = R$, $H_\theta = R\sin\beta$.

Если ориентировать координатные направления так, чтобы для осесимметричного потока было $u_\theta = 0$, то уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial R}(u_R R^2\sin\beta) + \frac{\partial}{\partial\beta}(u_\beta R\sin\beta) = 0$$

определит существование функции тока $\psi(R, \beta)$, для которой

$$u_R = \frac{1}{R^2 \sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}; \quad u_\beta = -\frac{1}{R\sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial R}. \qquad (7.109)$$

Эта функция обладает теми же свойствами, что и функция $\psi(r, z)$.

7.15. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ

Осесимметричные каналы являются составной частью конструкций многих машин, аппаратов, сооружений. Прямая гидродинамическая задача состоит в определении скоростей и давлений потенциального потока в канале, форма которого дана. В общем случае ее можно решить только приближенно с использованием численных или графоаналитических методов. Обратная задача, рассматриваемая в этом параграфе, состоит в определении формы поверхности канала и некоторых гидродинамических параметров по заданному распределению вдоль оси одного из них. Она представляет практический интерес, так как позволяет найти форму канала, которая обеспечивает формирование потока с заданными гидродинамическими параметрами. Ниже изложен общий метод построения формы канала по заданному закону изменения скорости потока на его оси [14].

Предполагая течение осесимметричным, запишем уравнение Лапласа для потенциала скорости

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \qquad (7.110)$$

которое получается, если в уравнении (7.103′) положить $H_1 = H_3 = 1$; $H_2 = r$; $u_2 = u_\theta = 0$ или $\partial\varphi/\partial\theta = 0$. Можно доказать путем проверки [14], что решением уравнения (7.110), обращающимся на оси симметрии z в заданную функцию $\varphi_0(z)$, является функция

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0(z + ir\cos\omega)\, d\omega, \qquad (7.111)$$

где $\varphi_0(z + ir\cos\omega)$ — аналитическая функция комплексного переменного $t = z + ir\cos\omega$ — вспомогательная переменная.

Изучим свойства этого решения. При $r = 0$, очевидно, $\varphi(0, z) = \varphi_0(z)$, т. е. $\varphi_0(z)$ есть потенциал скорости на оси симметрии. Вычислим составляющие скорости:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0'(t)\cos d\omega; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0'(t)\, d\omega. \qquad (7.112)$$

В частности, на оси z при $r = 0$

$$u_r = \frac{i}{\pi} \varphi_0'(z) \int_0^\pi \cos\omega \, d\omega = 0 \text{ и } u_z = \varphi_0'(z).$$

Таким образом, $\varphi_0'(z)$ представляет собой скорость на оси z. Введем обозначение $\varphi_0'(z) = f_0(z)$ и будем считать функцию $f_0(z)$ заданной. Перепишем формулы (7.112) в виде

$$u_r = \frac{i}{\pi} \int_0^\pi f_0(t) \cos\omega \, d\omega; \quad u_z = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_0(t) \, d\omega. \tag{7.113}$$

Найдем с помощью выражения (7.106) функцию тока. Так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r u_z = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi f_0(t) \, d\omega,$$

получим

$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^r r \, dr \int_0^\pi f_0(z + ir\cos\omega) \, d\omega, \tag{7.114}$$

где принято $\psi(0, z) = 0$.

Полагая $\psi = \text{const}$, находим поверхности тока, любую из которых можно принять за поверхность стенок канала.

Формулы (7.111), (7.113), (7.114) представляют собой общее решение задачи о потенциальном течении через осесимметричный канал с поверхностью $\psi(r, z) = \text{const}$, на оси которого задано распределение скоростей $f_0(z) = u_z(z)$.

Рассмотрим пример использования этого решения. Пусть на оси искомого канала задано линейное распределение скоростей

$$u_z(0, z) = f_0(z) = a_0 + a_1 z,$$

где a_0 и a_1 — постоянные.

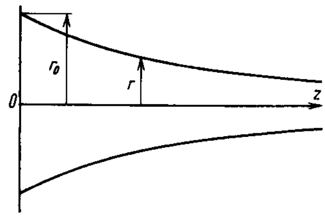
Тогда $f_0(t) = a_0 + a_1(z + ir\cos\omega)$ и согласно формулам (7.113) и (7.114):

$$u_r = \frac{i}{\pi} \int_0^\pi [a_0 + a_1(z + ir\cos\omega)] \cos\omega \, d\omega =$$

$$= -\frac{a_1 r}{\pi} \int_0^\pi \cos^2\omega \, d\omega = -a_1 r;$$

$$u_z = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [a_0 + a_1(z + ir\cos\omega)] \, d\omega = a_0 + a_1 z;$$

Рис. 7.33. Образующие осесимметричного канала, построенного по линейному распределению скорости на его оси



$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^r r\,dr \int_0^\pi [a_0 + a_1(z + ir\cos\omega)]\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^r (a_0 + a_1 z)\,\pi r\,dr = (a_0 + a_1 z)\frac{r^2}{2}.$$

Полагая $\psi = C = \mathrm{const}$, получаем уравнение семейства поверхностей тока

$$r = \sqrt{\frac{2C}{a_0 + a_1 z}}.$$

Нетрудно убедиться, что в данном случае поверхности тока, любую из которых можно принять за твердую стенку, представляют собой поверхности вращения. Если обозначить через r_0 значение r при $z = 0$, то последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Az/r_0}},$$

где $A = (a_1/a_0)\,r_0$.

Это уравнение описывает в безразмерной форме семейство поверхностей вращения с параметром A. Образующие этого семейства представлены на рис. 7.33.

Для более эффективного использования метода функцию $f_0(z)$ представляют в некоторых специальных формах, например в виде ряда [14].

Необходимо иметь в виду, что реальные течения в осесимметричных каналах, построенных по изложенному в этом параграфе методу, в действительности будут отличаться от расчетных вследствие образования пограничного слоя на стенках. Поэтому расчеты по теории потенциальных течений могут служить лишь первоначальной основой и должны дополняться расчетами пограничного слоя.

7.16. ПРОСТЕЙШИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

При изучении пространственного потенциального обтекания тел можно использовать принцип наложения элементарных течений. Рассмотрим основные из них.

1. Однородный прямолинейный (равномерный) поток с постоянной скоростью $u_0\,(u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$. В силу предположения о потенциальности

$$u_{0x} = \partial\varphi/\partial x;\quad u_{0y} = \partial\varphi/\partial y;\quad u_{0z} = \partial\varphi/\partial z.$$

Следовательно,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = u_{0x}\,dx + u_{0y}\,dy + u_{0z}\,dz$$

или после интегрирования

$$\varphi = u_{0x}x + u_{0y}y + u_{0z}z. \tag{7.115}$$

Уравнение эквипотенциальных поверхностей $\varphi = \mathrm{const}$ дает семейство параллельных плоскостей, и, следовательно, линиями тока являются параллельные прямые. В частном случае, если ось z совпадает по направлению с вектором скорости, то $u_{0x} = u_{0y} = 0$ и $\varphi = u_{0z}z$.

Такой поток можно рассматривать как осесимметричный, и если для его описания применить цилиндрическую систему координат, то согласно (7.106)

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0; \quad u_z = u_{0z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

откуда

$$\psi = u_{0z}r^2/2. \tag{7.116}$$

В сферической системе координат

$$u_R = u_{0z}\cos\beta = \frac{1}{R^2\sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}; \quad u_\beta = -u_{0z}\sin\beta = -\frac{1}{R\sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial R}.$$

Составляя полный дифференциал

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R}dR + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}d\beta = u_{0z}\left(R^2\sin\beta\cos\beta\,d\beta + R\sin^2\beta\,dR\right)$$

и интегрируя его, находим

$$\psi = \frac{1}{2}u_{0z}R^2\sin^2\beta. \tag{7.117}$$

2. **Источник (сток) в пространстве** создает поток, скорости которого в каждой точке направлены по нормалям к поверхности сферы. Расход такого потока

$$Q = 4\pi R^2 u_R$$

условимся считать положительным для источника и отрицательным для стока. Скорость потока

$$u = Q/(4\pi R^2)$$

обратно пропорциональна квадрату расстояния R от центра.

В сферической системе координат для источника (стока)

$$u_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R}; \quad u_\beta = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0; \quad u_\theta = \frac{1}{R\sin\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0.$$

Так как

$$\frac{d\varphi}{dR} = \frac{Q}{4\pi R^2}; \quad \varphi = -\frac{Q}{4\pi R}. \tag{7.118}$$

Для функции тока имеем

$$u_R = u = \frac{1}{R^2 \sin\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\beta}; \quad u_\beta = -\frac{1}{R\sin\beta} \frac{\partial\psi}{\partial R} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{Q}{4\pi} \sin\beta$$

и, следовательно,

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos\beta + \text{const}. \tag{7.119}$$

3. **Диполь** получается в результате предельного перехода, подобного тому, который был выполнен для плоского течения. Расположим на расстоянии Δs друг от друга источник и сток равных расходов. Тогда потенциал результирующего течения в некоторой точке M (рис. 7.34)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi R} - \frac{Q}{4\pi R_1},$$

где $R_1 = R + \Delta R$.

Неограниченно сближая центры источника и стока, будем одновременно увеличивать расход Q, подчинив его условию: при $\Delta s \to 0$: $Q\Delta s = m = \text{const}$. Тогда

$$\varphi = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{m}{4\pi} \frac{1/R - 1/R_1}{\Delta s} = -\frac{m}{4\pi} \frac{d}{ds}(1/R).$$

Вычисляя производную и учитывая, что $dR/ds = -\cos\beta$, получим потенциал скорости диполя

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi R^2} \cos\beta. \tag{7.120}$$

Величину m называют моментом диполя, а прямую, соединяющую центры исходных источника и стока, — его осью.

Составляющие скорости в сферической системе координат находим, дифференцируя выражение (7.120):

$$u_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{m}{2\pi R^3} \cos\beta; \quad u_\beta = \frac{1}{R} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{m}{4\pi R^3} \sin\beta.$$

Функцию тока получаем из системы уравнений

$$\frac{m\cos\beta}{2\pi R^3} = \frac{1}{R^2 \sin\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\beta}; \quad \frac{m\sin\beta}{4\pi R^3} = -\frac{1}{R\sin\beta} \frac{\partial\psi}{\partial R},$$

после интегрирования которой находим

$$\psi = \frac{m \sin^2\beta}{4\pi R}. \tag{7.121}$$

4. **Непрерывное распределение источников, стоков и диполей на поверхностях** можно получить, предположив, что имеется некоторая поверхность, в каждой точке которой помещен центр

источника, стока или диполя (рис. 7.35). Рассмотрим в начале непрерывное распределение источников и стоков. Пусть их суммарный расход с площадки ΔS равен ΔQ. Назовем поверхностной плотностью распределения мощности источников и стоков величину

$$q = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S},$$

которая, очевидно, является функцией координат. В произвольной точке N (x, y, z) пространства источники и стоки с площадки ΔS создают течение с потенциалом

$$\Delta\varphi = -\frac{Q}{4\pi R} = -\frac{q\,\Delta S}{4\pi R}.$$

Используя принцип суперпозиции, получим потенциал течения, созданного всеми источниками и стоками с поверхности S:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{q\,dS}{R}. \tag{7.122}$$

Этот потенциал называют потенциалом простого слоя.

Если источники и стоки непрерывно распределены вдоль некоторой кривой L, то вводя линейную плотность мощности источников

$$q_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l},$$

также получим результирующий потенциал в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_L \frac{q_l\,dl}{R}. \tag{7.123}$$

Потенциал простого слоя является решением уравнения Лапласа. При этом он конечен и непрерывен всюду в пространстве, а в точках поверхности S выражается несобственным интегралом, который понимается в смысле главного значения.

Рассмотрим теперь поверхность, покрытую непрерывно рас-

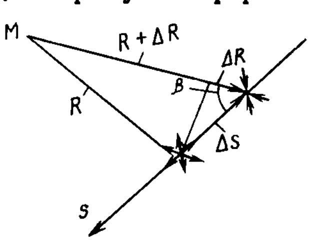


Рис. 7.34. Образование диполя в пространстве

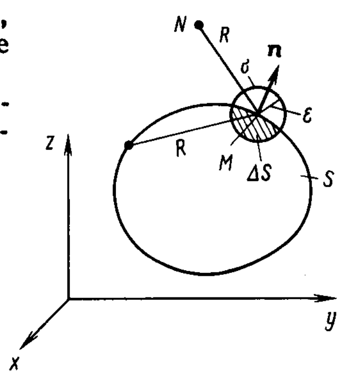


Рис. 7.35. Выделение особой точки на поверхности, покрытой источниками и стоками

пределенными диполями, ось которых совпадает с направлениями нормалей к поверхности. Обозначив через

$$\mu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

плотность распределения диполей, получим потенциал течения от диполей с площадки ΔS

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mu\cos\beta}{R^2}\Delta S$$

и потенциал течения, созданного всеми диполями с поверхности S,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\mu\cos\beta}{R^2}\,dS. \qquad (7.124)$$

Эту величину называют потенциалом двойного слоя. Он также является решением уравнения Лапласа с разрывом непрерывности на поверхности S.

Полученные потенциалы элементарных течений можно использовать для построения решений пространственных задач обтекания различных тел.

7.17. ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ

Для иллюстрации методов суперпозиции и особенностей рассмотрим обтекание сферы и тела произвольной формы.

1. Обтекание сферы можно получить, если сложить прямолинейный однородный поток и диполь. Оба течения являются осесимметричными, и потому функция тока результирующего течения в соответствии с формулами (7.117) и (7.121) имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2}u_0R^2\sin\beta - \frac{m\sin^2\beta}{4\pi R},$$

где знак минус означает ориентировку оси диполя в направлении, противоположном скорости однородного потока.

Уравнение нулевой поверхности тока

$$\frac{1}{2}\sin^2\beta\left(u_0R^2 - \frac{m}{2\pi R}\right) = 0$$

распадается на два уравнения

$$\sin\beta = 0 \text{ и } R^3 = m/(2\pi u_0),$$

из которых первое определяет прямолинейную ось, а второе — сферическую поверхность с центром на этой оси и радиусом

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi u_0}}.$$

Следовательно, для потока, обтекающего сферу, функция тока

$$\psi = \frac{1}{2} u_0 R^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right).$$

Теперь нетрудно получить выражение для потенциала скорости

$$\varphi = u_0 R \cos \beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_0^3}{R^3}\right)$$

и проекций скорости

$$u_R = \frac{\partial \varphi}{\partial R} = u_0 \cos \beta \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right);$$

$$u_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -u_0 \sin \beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_0^3}{R^3}\right).$$

На поверхности сферы при $R = R_0$

$$u_R = 0; \ u_\beta = -\frac{3}{2} u_0 \sin \beta = u_s.$$

Максимальная скорость

$$u_{s\,\max} = \frac{3}{2} u_0. \tag{7.125}$$

Давление p_s на поверхности, получаемое из уравнения Бернулли, распределяется по закону

$$\bar{p} = \frac{p_s - p_0}{\rho u_0^2/2} = 1 - \frac{u_s^2}{u_0^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \beta. \tag{7.126}$$

Из зависимости (7.125) следует, что максимальное значение отношения u_s/u_0 при обтекании сферы меньше, чем при обтекании цилиндра. Это объясняется меньшим стеснением потока, которое вносит сфера, имеющая конечный объем, по сравнению со стеснением, вносимым цилиндром, объем которого бесконечен.

В силу симметричности распределения давления по поверхности сферы [формула (7.126)] равнодействующая сил давления равна нулю, т. е. имеет место парадокс Даламбера.

Обтекание сферы реальным потоком вязкой жидкости существенно отличается от описанного теоретического, так как сфера является неудобообтекаемым телом и влияние вязкости и вихреобразования в этом потоке очень велико.

2. Обтекание тела произвольной формы можно получить методом особенностей, используя непрерывное распределение источников, стоков, диполей или вихрей. Рассмотрим общую схему решения задачи обтекания произвольного тела, для чего воспользуемся методом источников и стоков.

Представим, что на заданной поверхности S тела (см. рис. 7.35) непрерывно распределены источники и стоки. Они вызовут течение, потенциал которого определяется формулой (7.122). Если тело обтекается однородным потоком вдоль оси x, то потенциал результирующего течения

$$\varphi = u_0 x - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{q\,dS}{R}.$$

Так как поверхность тела непроницаема, это выражение будет соответствовать физическим условиям движения, если

$$u_n|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S = u_0\frac{\partial x}{\partial n}\bigg|_S - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\int_S \frac{q\,dS}{R}\right) = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(n,\ x)$, $\frac{\partial}{\partial n}(1/R) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial n} = -\frac{1}{R^2}\times$ $\times\cos(R,\ n)$ получаем

$$u_0\cos(n,\ x) + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{q\cos(R,\ n)\,dS}{R^2} = 0. \qquad (7.127)$$

Величина R представляет собой расстояние между двумя точками, лежащими на поверхности S, поэтому не исключено значение $R = 0$, при котором интеграл становится несобственным. Для его вычисления следует выделить особенность. С этой целью окружим особую точку M полусферой σ малого радиуса ε. По определению несобственного интеграла

$$\int_S = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S-\sigma} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\sigma.$$

Второй из этих интегралов распространен на поверхность малой полусферы, на которой $R = \varepsilon$, $\cos(R,\ n) = 1$ и $d\sigma = \varepsilon^2 d\tau$, где τ — телесный угол. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\sigma \frac{q\cos(R,\ h)}{R^2}\,d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\sigma \frac{q\cdot 1}{\varepsilon^2}\,d\sigma = 2\pi q,$$

где q — мощность источников в точке, к которой стягивается полусфера.

Первый интеграл в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ окажется распределенным на всю поверхность S с «выколотой» точкой, т. е. при его вычислении исключается значение $R = 0$. Теперь уравнение (7.127) можно записать в форме, не содержащей особенности:

$$u_0\cos(n,\ x) + 2\pi q + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{q\cos(R,\ n)}{R^2}\,dS = 0. \qquad (7.128)$$

Поскольку неизвестная функция q входит под знак интеграла, выражение (7.128) является интегральным уравнением и по существующей классификации относится к типу неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Его можно решать методом итераций или методом Фредгольма, который состоит в приближенной замене интеграла конечной суммой. При использовании первого метода быстро растут трудности вычисления последующих итераций, даже если нулевое приближение выбрано достаточно удачно. Остановимся кратко на общей схеме метода Фредгольма.

Разобьем поверхность S на m площадок ΔS_i достаточно малых, чтобы можно было принять

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{q\cos(R,\ n)}{R^2}\,dS \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} q_i \frac{\cos(R_{ij},\ n_i)}{R_{ij}^2}\,\Delta S_i,$$

где n_i — нормаль к поверхности S в центре площадки ΔS_i; R_{ij} — расстояние от центра площадки ΔS_i до центра площадки ΔS_j $(i \neq j)$.

Теперь уравнение (7.128) можно привести к виду

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} q_i \frac{\cos(R_{ij},\ n_i)}{R_{ij}^2}\,\Delta S_i + 2\pi q + u_0\cos(n_j,\ x) = 0,$$

причем q и n относится к любой точке поверхности S. Поэтому такое уравнение можно написать для любой j-й точки $[j = 1 \div (m-1)]$. Полученная таким образом система алгебраических уравнений имеет вид

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} q_i \frac{\cos(R_{ij},\ n_i)}{R_{ij}^2}\,\Delta S_i + 2\pi q_i + u_0\cos(n_j,\ x) = 0,$$

где $i \neq j$.

Эту систему можно решить на ЭВМ.

В заключение заметим, что применяются различные модификации метода особенностей (например, непрерывное распределение диполей или вихрей). Разработаны также методы, основанные на использовании специальных криволинейных систем координат [3, 14, 15, 23].

7.18. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ПОНЯТИЕ О ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАССАХ

В предыдущих параграфах этой главы рассмотрены случаи обтекания тел установившимся безвихревым потоком. Полученные результаты можно использовать для решения и обращенной задачи о движении тела с постоянной скоростью в безграничной покоящейся жидкости. Действительно, если требуется изучить закономерности движения тела в жидкости, то согласно принципу относительности Галилея—Ньютона можно всей системе тело—жидкость сообщить скорость, равную по величине и направленную противоположно скорости тела; при этом все силы и напряжения в жидкости останутся неизменными. Такое обращение задачи реализуется путем перехода от абсолютной системы координат к системе, связанной с движущимся телом. Изучить получившееся в этом случае обтекание неподвижного тела удобнее и проще. Однако прием обращения движения не облегчает задачи, если тело перемещается по криволинейной траектории или с переменной во времени скоростью, т. е. если движение жидкости в системе координат, связанной с телом, неустановившееся. В этом случае задача об обтекании тела жидкостью не будет более простой, чем задача о движении тела в жидкости; поэтому при неустановившихся движениях тела применяют методы, отличные от изученных выше.

Рассмотрим наиболее простой случай неустановившегося движения, когда тело перемещается прямолинейно без вращения со скоростью $v(t)$, переменной во времени; жидкость неограничена и вдали от тела покоится. Движение тела вызывает движение жидкости с некоторой скоростью $u^*(x, y, z, t)$. Обозначим через T кинетическую энергию массы жидкости, приведенной в движение перемещением тела. Ввиду переменности скорости v величина T, очевидно, будет изменяться во времени, т. е. $T = T(t)$. Согласно теореме о кинетической энергии ее изменение равно сумме работ, приложенных к системе внешних и внутренних сил. Единственной причиной движения жидкости является воздействие на нее движущегося тела. Обозначим через $\boldsymbol{R}$ силу этого воздействия и допустим, что движение происходит вдоль некоторой оси x. Работа силы $\boldsymbol{R}$ затрачивается на изменение кинетической энергии жидкости; поэтому, согласно теореме о кинетической энергии, за время dt перемещения тела на расстояние dx изменение энергии составляет

$$dT = \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{x} = R_x\,dx = R_x v\,dt,$$

откуда

$$R_x = \frac{dT}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dT}{dt}.$$

Со стороны жидкости на тело по третьему закону Ньютона будет действовать сила $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{R}$, проекция которой на направление движения является инерционным лобовым сопротивлением движению тела

$$P_x = -\frac{1}{v}\frac{dT}{dt}. \qquad (7.129)$$

Таким образом, инерционное сопротивление выражается через производную кинетической энергии жидкости по времени.

Для ее вычисления выделим в жидкости элементарный объем δW, движущийся со скоростью u^*. Его кинетическая энергия

$$\delta T = \frac{\rho (u^*)^2}{2}\delta W,$$

а кинетическая энергия всей массы жидкости

$$T = \int\limits_W \frac{\rho (u^*)^2}{2} \delta W,$$

где W — объем всего безграничного пространства за вычетом объема $W_т$ тела.

Учитывая, что скорость v тела зависит только от времени, последнюю формулу перепишем в виде

$$T = \frac{\rho v^2}{2} \int\limits_W \left(\frac{u^*}{v}\right)^2 dW. \qquad (7.130)$$

Введя обозначение

$$\lambda = \rho \int\limits_W \left(\frac{u^*}{v}\right) dW, \qquad (7.131)$$

обратим внимание на то, что эта величина имеет размерность массы. Ее называют присоединенной массой. Теперь кинетическую энергию вызванного движения жидкости выразим формулой

$$T = \lambda v^2/2, \qquad (7.132)$$

из которой можно сделать вывод, что присоединенную массу можно рассматривать как массу жидкости, обладающую при движении всех ее частиц со скоростью тела той же кинетической энергией, что и масса жидкости, приведенная в движение перемещением тела. Следовательно, присоединенная масса должна зависеть от формы тела.

Подставив выражение (7.132) кинетической энергии в формулу 7.129), получим

$$P_и = -\frac{1}{v}\left(\lambda v \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2}\frac{d\lambda}{dt}\right) = -\left(\lambda \frac{dv}{dt} + \frac{v}{2}\frac{d\lambda}{dt}\right). \qquad (7.133)$$

При движении тела в невязкой жидкости присоединенная масса λ не зависит от времени, так как всякое изменение скорости v тела вызывает пропорциональное изменение скорости u^* вызванного движения жидкости. При этом согласно (7.131) величина λ не изменяется. Следовательно, $d\lambda/dt = 0$ и зависимость (7.133) упрощается:

$$P_и = -\lambda dv/dt. \qquad (7.134)$$

Из формулы (7.134) можно сделать вывод, что тело при неустановившемся движении в идеальной жидкости испытывает силу сопротивления, равную произведению присоединенной массы на его ускорение. Эта сила инерционного происхождения исчезает при равномерном движении тела, когда $dv/dt = 0$. В этом случае справедлив известный уже нам парадокс Даламбера.

Заметим, что формулой (7.134) автоматически учитывается знак силы $P_и$: при $dv/dt > 0$, т. е. при ускорении движения тела, сила $P_x < 0$ играет роль сопротивления; при $dv/dt < 0$, т. е. при замедленном движении тела, сила $P_x > 0$ является тяговой.

Для практического использования формулы (7.134) необходимо иметь способ вычисления присоединенной массы, что, как видно из (7.132), равносильно вычислению кинетической энергии вызванного движения жидкости. Поэтому выведем общую формулу для T.

Предполагая вызванное движение потенциальным, обозначим через φ_* потенциал его скорости. Тогда

$$u^{*2} = u_x^{*2} + u_y^{*2} + u_z^{*2} = \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right)^2$$

и кинетическая энергия жидкости

$$T = \frac{\rho}{2} \int\limits_W \left[\left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right)^2\right] dW.$$

Поскольку W — безграничный объем, интеграл удобнее преобразовать в поверхностный с помощью теоремы Гаусса—Остроградского. Для этого преобразуем подынтегральное выражение с помощью тождеств типа

$$\left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial x_i}\right) - \varphi_* \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x_i^2} \quad (x_i = x,\ y,\ z),$$

сложив которые, получим

$$\left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right) - \varphi_*\left(\frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial z^2}\right).$$

Учитывая, что $\nabla^2 \varphi_* = 0$, найдем

$$T = \frac{\rho}{2} \int\limits_W \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right)\right] dW.$$

Если теперь величины

$$a_x = \varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}, \quad a_y = \varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial y}, \quad a_z = \varphi_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial z}$$

примем за проекции некоторого вектора $\boldsymbol{a}$, то последний можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = \varphi_* \operatorname{grad} \varphi_*,$$

и соответственно выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{\rho}{2} \int\limits_W \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dW.$$

Применив теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_S a_n\,dS = -\frac{\rho}{2}\int_S \varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\,dS,$$

где S — поверхности тела; $\partial\varphi_*/\partial n$ — производная φ_* по внутренней нормали к поверхности тела.

Так как W представляет собой неограниченную область, применение теоремы Гаусса—Остроградского правомерно лишь в случае, если функция под знаком поверхностного интеграла достаточно быстро стремится к нулю в бесконечности. Это требование удовлетворяется, ибо $\operatorname{grad}\varphi_* = u^*$ — есть скорость вызванного движения, равная нулю на бесконечности. Поэтому и $\varphi_*|_\infty = 0$, а тем более $\varphi_* \operatorname{grad}\varphi_*|_\infty = 0$.

Таким образом, получили кинетическую энергию жидкости в виде поверхностного интеграла:

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_S \varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\,dS. \tag{7.135}$$

Введя обозначение $\varphi_1 = \varphi_*/v$, запишем

$$T = -\frac{\rho v^2}{2}\int_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS, \tag{7.136}$$

откуда с учетом формулы (7.132) находим выражение для присоединенной массы

$$\lambda = -\rho\int_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS. \tag{7.137}$$

Функцию φ_1 называют единичным потенциалом. Формулы (7.136) и (7.137) оказываются достаточно удобными для практического вычисления кинетической энергии и присоединенной массы. Проиллюстрируем это конкретным примером.

Рассмотрим неустановившееся движение в жидкости круглого цилиндра нормально своей образующей. Так как течение является плоским, все расчеты ведем для слоя жидкости единичной толщины. В частности, кинетическую энергию жидкости выразим криволинейным интегралом

$$T = -\frac{\rho}{2}\oint_L \varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\,dl,$$

где L — контур нормального сечения цилиндра; n — направление нормали к нему.

Заметим, что ни в одну из результирующих зависимостей не входят производные по времени. Это означает, что время играет роль параметра, фиксирующего смену мгновенных картин движения тела. Воспользуемся этим для определения потенциала φ_*

скорости вызванного движения. Для некоторого фиксированного момента времени наложим на систему жидкость — тело поступательное движение со скоростью, равной и противоположной скорости тела, т. е. обратим движение. Потенциал скорости полученного таким образом обтекания цилиндра, равный $\varphi = \varphi_* - vx$ известен из п. 7.3. Следовательно,

$$\varphi_* = \varphi + vx.$$

Используя (7.31), получим

$$\varphi_* = vx - vx\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) = -vx\frac{r_0^2}{r^2} = -v\cos\theta\frac{r_0^2}{r},$$

где потенциал φ взят со знаком минус потому, что при движении тела вдоль оси $+x$ наложенный поток направлен в сторону оси $-x$.

На контуре цилиндра $r = r_0$ и

$$\varphi_*|_L = -vr_0\cos\theta.$$

Вычислим $\partial\varphi_*/\partial n$ на поверхности цилиндра. Поскольку вообще

$$\frac{\partial\varphi_*}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + v\frac{\partial x}{\partial n},$$

а на контуре цилиндра $\partial\varphi/\partial n = 0$ (условие непроницаемости обтекаемого тела), получим

$$\left.\frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\right|_L = v\left.\frac{\partial x}{\partial n}\right|_L.$$

Но на окружности L направления n и r совпадают, и так как $x = r\cos\theta$, то

$$\left.\frac{\partial x}{\partial n}\right|_L = \cos\theta.$$

Теперь получим

$$T = \frac{\rho}{2}\oint_L vr_0\cos\theta v\cos\theta\,dl = \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi} v^2r_0^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho}{2}\pi v^2r_0^2.$$

Следовательно, $\lambda = \rho\pi r_0^2$, т. е. присоединенная масса круглого цилиндра равна массе жидкости в его объеме. Инерционное сопротивление цилиндра

$$P_x = \lambda\left|\frac{dv}{dt}\right| = \rho\pi r_0^2\left|\frac{dv}{dt}\right|.$$

Выше рассмотрен только простейший случай неустановившегося движения тела в жидкости. В общем случае силовое воздействие идеальной жидкости на тело, движущееся в ней произвольно, сводится к главному вектору сил давления и главному моменту. Определение этих векторов составляет теорию неустановившегося тела в жидкости, основы которой изложены в работах [4, 15].

8. ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (НЕОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ)

8.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Выше было показано, что при безвихревом движении жидкости значительное упрощение решений гидродинамических задач достигается введением потенциала скорости. Но эта функция существует только при отсутствии вихрей и потому при изучении течений вязкой жидкости важно выяснить, может ли существовать ее безвихревое движение, а следовательно, и потенциал скорости. Напомним, что уравнения движения вязкой жидкости отличаются от уравнений движения идеальной жидкости только наличием члена вида $\nu\nabla^2 u$, учитывающего вязкость [сравните выражения (5.9) и (5.37)]. Допустим, что существует безвихревое (потенциальное) течение вязкой жидкости, т. е. $u = \mathrm{grad}\,\varphi$, причем в силу уравнения неразрывности $\nabla^2\varphi = 0$. Тогда $\nu\nabla^2 u = \nu\nabla^2\,\mathrm{grad}\,\varphi = \nu\,\mathrm{grad}\,\nabla^2\varphi = 0$, т. е. вязкий член в уравнения движения не входит и течение вязкой жидкости описывается теми же уравнениями, что и течение идеальной. Таким образом, предположение о возможности безвихревого течения вязкой жидкости не противоречит уравнениям движения и, казалось бы, что задачу можно свести к решению уравнения Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Но помимо уравнений движения должны удовлетворяться еще и граничные условия.

Для идеальной жидкости эти условия заключаются в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на твердой неподвижной стенке. Для вязкой жидкости, кроме того, равна нулю составляющая скорости, касательная к стенке, т. е.

$$u_n|_{\text{ст}} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{и} \quad u_s|_{\text{ст}} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.$$

Первое из этих условий вместе с уравнением Лапласа составляет классическую задачу Неймана, для которой доказана теорема существования и единственности. Иными словами, это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы существовало единственное решение $\varphi(x, y, z)$ уравнения $\nabla^2\varphi = 0$. Поэтому такое решение не удовлетворяет, вообще говоря, второму условию $u_s|_{\text{ст}} = 0$, тогда как для всякой реальной (вязкой) жидкости это условие обязательно выполняется. Следовательно, для течения таких жидкостей потенциал скорости не существует. Кроме того, силы вязкости не являются потенциальными, а потому, согласно изложенному в п. 5.8, течение вязкой жидкости вблизи твердых стенок должно быть вихревым. Тем не менее если в частном случае воспроизвести на твердой поверхности такое же граничное условие, как и для идеальной жидкости, то движение вязкой жидкости окажется безвихревым. Таким частным случаем является течение, вызванное вращением круглого цилиндра в безграничной вязкой жидкости (см. п. 8.4).

Существенным различием течения вязкой и идеальной жидкостей является также то, что в первой линии тока нельзя заменять твердыми поверхностями, как это можно делать для идеальной жидкости. Благодаря прилипанию частиц жидкости к твердой поверхности вблизи нее образуется область, называемая пограничным слоем, где осуществляется переход от нулевых значений скорости на поверхности к их значениям в невозмущенном потоке. В связи с этим замена свободной линии тока твердой поверхностью в вязкой жидкости ведет к резкому изменению кинематической структуры течения.

В этой главе рассмотрены только ламинарные течения. Они встречаются в разнообразных технических задачах. В частности, в зазорах и малых полостях машин, в особенности при течении таких вязких жидкостей, как масло, нефть, различные специальные жидкости для гидропередач, образуются устойчивые ламинарные течения, для описания которых надежной базой могут служить уравнения Навье—Стокса. Поэтому весьма актуален вопрос о методах решения этих уравнений при разнообразных граничных условиях.

Если границы области течения достаточно просты, то в некоторых случаях удается получить точные аналитические решения или решения в замкнутом виде. Примером может служить рассмотренное в п. 6.6 решение задачи о ламинарном течении в круглой цилиндрической трубе. Ниже приведены еще несколько подобных решений. Но все же число случаев, для которых удается получить точные решения, ограничено, и для встречающихся на практике задач чаще всего характерны сложные граничные условия, для которых не удается найти таких решений. Для этих случаев применяют приближенные методы, основанные на предположении о малой значимости тех или иных членов уравнений движения.

Особое место в числе задач, решаемых приближенными методами, занимают те, в которых можно разделить поле течения вязкой жидкости на две характерные области: пристенную, называемую пограничным слоем, в которой существенно проявление вязкости, и внешнюю, где влияние вязкости мало и поток можно приближенно считать потенциальным.

В настоящее время интенсивно развиваются численные методы, рассчитанные на использование ЦВМ. К сожалению, при больших числах Re применение этих методов связано с вычислительными и принципиальными трудностями из-за отсутствия устойчивых решений.

Для решения разнообразных задач о движении вязких жидкостей иногда удобно использовать специальные формы уравнений Навье—Стокса, например уравнение Гельмгольца, которое не содержит давления, а включает в себя только кинематические величины: вихрь Ω и скорость $\boldsymbol{u}$. Чтобы получить это уравнение, учтем следующее векторное тождество, справедливое для любого вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}.$$

Принимая $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{u}$ и учитывая, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv \Omega$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, находим

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = -\operatorname{rot} \Omega.$$

Теперь уравнение (5.17) движения вязкой жидкости перепишем в виде

$$\partial \boldsymbol{u}/\partial t + \Omega \times \boldsymbol{u} = -\operatorname{grad} E + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}. \tag{8.1}$$

Используем векторное тождество

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b},$$

полагая в нем $\boldsymbol{a} \equiv \Omega$, $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{u}$. Поскольку $\operatorname{div} \Omega = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$, получим

$$\operatorname{rot}(\Omega \times \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}\nabla)\Omega - (\Omega\nabla)\boldsymbol{u}.$$

Теперь применим операцию rot к обеим частям выражения (8.1). Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \text{ и } \operatorname{rot} \operatorname{grad} E = 0,$$

находим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\Omega - (\Omega\nabla)\boldsymbol{u} = -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Omega$$

или

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega\nabla)\boldsymbol{u} + \nu\nabla^2\Omega. \tag{8.2}$$

Это уравнение, носящее имя Гельмгольца, по существу является уравнением переноса вихря. Оно эквивалентно трем уравнениям в проекциях на оси координат. Одно из них (для оси z) имеет вид

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} =$$

$$= \Omega_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\nabla^2\Omega_z. \tag{8.3}$$

Особый интерес представляет плоское течение вязкой жидкости, для которого $u_z = 0$ и $\Omega_x \equiv \Omega_y = 0$. Используя функцию тока (см. п. 2.9), находим

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\nabla^2\psi. \tag{8.4}$$

Уравнение (8.3) для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \nu \nabla^2 \Omega_z. \tag{8.5}$$

Исключая отсюда Ω_z, с помощью выражения (8.4) получаем уравнение, определяющее функцию тока:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi = \nu\nabla^2\nabla^2\psi, \tag{8.6}$$

где $\nabla^2\nabla^2\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2\psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2\psi$.

Уравнения (8.4)—(8.6) оказываются эффективными при построении численных методов расчета плоских течений вязкой жидкости (см. п. 8.10).

8.2. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Пусть вязкая жидкость течет в канале, образованном двумя параллельными стенками, одна из которых движется в своей плоскости с постоянной скоростью u_0 (рис. 8.1). Размер канала по направлению нормали к плоскости чертежа (вдоль оси z) считаем достаточно большим, чтобы можно было не учитывать влияние стенок, параллельных плоскости xOy. Кроме того, допускаем, что движение вызвано не только перемещением одной из стенок канала, но и перепадом (или градиентом) давления по направлению оси x. Влиянием массовых сил пренебрегаем, а линии тока считаем прямыми, параллельными оси x.

Тогда исходные условия задачи выражаем в виде

$$\partial \boldsymbol{u}/\partial t = 0; \quad u_y = u_z = 0; \quad F_x = F_y = F_z = 0.$$

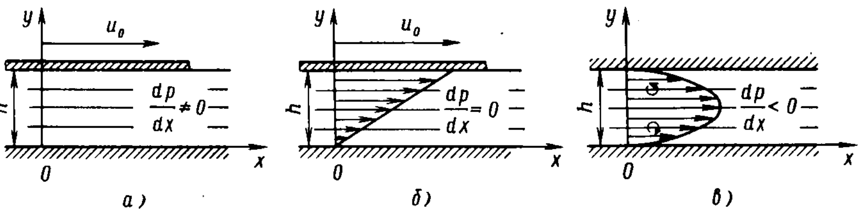


Рис. 8.1. Ламинарное течение между параллельными плоскостями:

а — схема течения; *б* — распределение скоростей при отсутствии градиента давления (течение Куэтта); *в* — распределение скоростей при неподвижных граничных плоскостях (течение в плоском канале)

Из уравнения неразрывности заключаем, что $\partial u_x/\partial x = 0$, а поскольку это будет выполнено во всех точках, то и $\partial^2 u_x/\partial x^2 = 0$. Из-за отсутствия движения вдоль оси z все производные по этой координате равны нулю и третье уравнение Навье—Стокса можно не писать. Таким образом, систему уравнений движения сводим к двум уравнениям

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Так как давление зависит только от x, а проекция u_x — только от y, можно перейти от частных производных к полным:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}.$$

Введем обозначения $\rho\nu = \mu$ и $dp/dx = p'$ и дважды проинтегрируем последнее уравнение. Получим

$$u = \frac{p'}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем граничные условия

$$u|_{y=0} = 0 \text{ и } u|_{y=h} = u_0.$$

Вычислив C_1 и C_2, получим закон распределения скоростей в плоском канале:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y(y-h) + u_0\frac{y}{h}, \tag{8.7}$$

где h — высота канала.

Градиент давления dp/dx может быть как отрицательным, так и положительным. В первом случае давление падает в направлении скорости u_0 пластины, а во втором — возрастает. Наличие положительного градиента давления может вызвать возвратные течения.

Уравнение (8.7) удобно представить в безразмерной форме

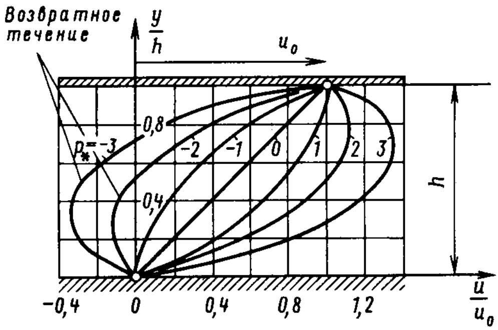
$$\frac{u}{u_0} = -\frac{h^2}{2\mu u_0}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) + \frac{y}{h},$$

которая графически изображается семейством кривых с одним параметром

$$p_* = -\frac{h^2}{2\mu u_0}\frac{dp}{dx}.$$

На рис. 8.2 приведены кривые распределения скоростей при нескольких значениях p_*. Можно видеть, что вблизи неподвижной стенки при $p_* < -1$ существуют возвратные течения, возникновение которых объясняется возрастанием давления вниз по течению (положительный градиент давления).

Рис. 8.2. Безразмерные профили скоростей для общего случая течения жидкости между параллельными стенками



Представляют интерес следующие частные случаи.

1. Отсутствие градиента давления ($p'=0$). Течение, называемое течением Куэтта, обусловлено только движением пластины. Согласно выражению (8.7) оно характеризуется линейным распределением скоростей

$$u = u_0 y/h$$

и постоянным значением касательного напряжения

$$\tau_0 = \mu du/dy = \mu u_0/h.$$

Удельный расход (расход через живое сечение $S = h \cdot 1$)

$$q = \int_0^h u\,dy = \frac{1}{2} u_0 h.$$

2. Течение между неподвижными пластинами ($u_0 = 0$, $p' \neq 0$). В этом случае из выражения (8.7) получаем параболическое распределение скоростей

$$u = \frac{p'}{2\mu} y (y - h) \tag{8.8}$$

с максимальной скоростью на оси (при $y = h/2$)

$$u_m = -\frac{h^2 p'}{8\mu}. \tag{8.9}$$

Зависимость (8.8) с учетом формулы (8.9) можно записать в виде

$$\frac{u}{u_m} = 4\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right). \tag{8.8'}$$

Нетрудно вычислить другие характеристики течения. Касательное напряжение

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(2y - h).$$

На стенках, т. е. при $y = 0$ и при $y = h$, оно принимает значения

$$\tau = \mp\frac{h}{2}\frac{dp}{dx},$$

а на оси при $y = h/2$ равно нулю. Как видно из этих формул, имеет место линейный закон распределения касательных напряжений по толщине слоя

$$\tau = \tau_0 (2y/h - 1).$$

Удельный расход жидкости

$$q = \int_0^h u\,dy = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h y(y-h)\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}.$$

Средняя скорость

$$v = \frac{q}{h} = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{8.10}$$

в полтора раза меньше максимальной:

$$v = 2/3u_m.$$

Из выражения (8.10) получаем формулу, определяющую потери давления в канале (длиной l):

$$p_1 - p_2 = 12\mu v l/h^2,$$

которую можно представить в виде

$$p_1 - p_2 = \frac{24\nu}{vh}\frac{1}{h}\rho\frac{v^2}{2}, \tag{8.11}$$

сходном с формулой Вейсбаха—Дарси для круглых труб. В данном случае гидравлический коэффициент трения также однозначно определяется числом $\mathrm{Re} = vh/\nu$: $\lambda_{\text{пл}} = 24/\mathrm{Re}$.

Определим вихревую составляющую движения. Поскольку в данном случае $u_y = u_z = 0$ и $u_x = u$, то

$$\omega_x = \omega_y = 0 \text{ и } \omega_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(2y - h).$$

Учитывая, что $dp/dx < 0$, получаем:

при $y < h/2$ $\omega_z < 0$, т. е. частицы вращаются по часовой стрелке;

при $y > h/2$ $\omega_z > 0$, т. е. частицы вращаются против часовой стрелки (рис. 8.1, *в*).

Таким образом, рассматриваемый поток является завихренным во всех точках, упорядоченные вихревые линии представляют собой прямые, нормальные плоскости течения.

Существенно, что решения, рассмотренные в этом параграфе, опираются на допущение о прямолинейности линий тока, выражаемое условием $u_y = 0$. Оно выполнятся достаточно точно лишь на некотором расстоянии от входа в плоский канал (трубу), где поток подчиняется выведенным зависимостям и является стабилизированным. Вблизи входа в канал существует начальный (разгонный) участок, подобный тому, какой был рассмотрен в гл. 6 применительно к круглым трубам.

8.3. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ О ЛАМИНАРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТРУБАХ. ТЕЧЕНИЕ В КОЛЬЦЕВОЙ ТРУБЕ

Практический интерес представляют течения не только в круглых трубах, но и в трубах с другими формами поперечных сечений. Если боковая поверхность трубы есть поверхность призмы или цилиндра, то естественно допустить существование ламинарного течения с линиями тока в виде прямых, параллельных образующим цилиндра. Опыт подтверждает существование таких течений. При этом область поперечного сечения трубы может быть двух- или многосвязной (рис. 8.3).

Выбрав ось z параллельно образующей боковой поверхности, в силу прямолинейности линий тока получим $u_x = u_y = 0$; $u_z = u$. Пренебрегая действием массовых сил, представим уравнения Навье—Стокса и неразрывности в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = u\frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что скорость u зависит только от координат x и y, а первые два уравнения свидетельствуют, что давление p есть функция только переменной z. Поэтому приведенная система сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz},$$

в котором левая часть не зависит от z, а правая зависит только от этой переменной. Следовательно, каждая из этих частей равна постоянной:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A_0 \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dz} = -\mu A_0.$$

Из второго уравнения находим линейный закон падения давления на участке трубы длиной l: $\Delta p = p_1 - p_2 = \mu A_0 l$, откуда $A_0 = \Delta p/(\mu l)$.

Следовательно, для отыскания скорости имеем уравнение Пуассона с постоянной правой частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \tag{8.12}$$

граничным условием для которого является равенство нулю скорости на стенке трубы.

Рассмотренные ранее течения в круглой трубе и плоском канале являются частными случаями, для которых решение уравнения (8.10) выражается в элементарных функциях. Получены решения и для некоторых других форм поперечного сечения (например, для прямоугольника, эллипса).

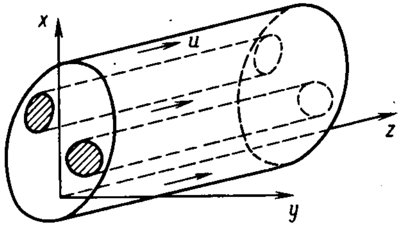


Рис. 8.3. Схема течения в цилиндрической трубе

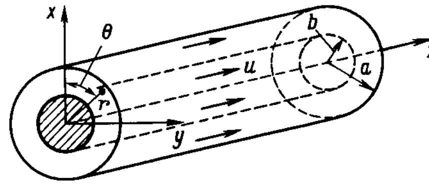


Рис. 8.4. Схема для решения задачи о ламинарном течении в кольцевой трубе

Рассмотрим практически важный случай течения в кольцевой трубе.

Ввиду осевой симметрии этого течения используем цилиндрическую систему координат, расположив ось z вдоль оси трубы (рис. 8.4). Используя выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричного течения, представим уравнение (8.12) и уравнение неразрывности (2.25) следующим образом:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=-\frac{\Delta p}{\mu l};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

откуда следует

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Интегрируя дважды это выражение, получаем

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\Delta p}{\mu l}\frac{r}{2}+\frac{C_1}{r};$$

$$u=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+C_1\ln r+C_2.$$

В общем случае рассматриваемое течение может быть обусловлено как перепадом давления Δp, так и осевым движением одного из цилиндров. Допустим, что внутренний цилиндр перемещается в направлении оси z со скоростью u_0. Такому движению соответствуют граничные условия $u=0$ при $r=a$, $u=u_0$ при $r=b$. Использовав их для определения постоянных C_1 и C_2, найдем

$$u=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[a^2-r^2-(a^2-b^2)\frac{\ln(a/r)}{\ln(a/b)}\right]+u_0\frac{\ln(a/r)}{\ln(a/b)}.$$

В частном случае, если перепада давления нет, то получим осесимметричное течение Куэтта с распределением скоростей

$$u=u_0\frac{\ln(a/r)}{\ln(a/b)}$$

и касательными напряжениями в слое жидкости

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{u_0}{r \ln (a/b)},$$

где $b \leqslant r \leqslant a$.

Из этой формулы следует, что если зазор между цилиндрами $\varepsilon = a - b$ мал, то касательные напряжения в слое жидкости могут быть весьма значительными.

При неподвижных цилиндрах ($u_0 = 0$) имеем течение в кольцевой трубе с распределением скоростей

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left[a^2 - r^2 - (a^2 - b^2) \frac{\ln (a/r)}{\ln (a/b)} \right].$$

Эта зависимость позволяет вычислить все другие характеристики течения. В частности, расход

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l}\left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln (a/b)} \right].$$

Разделив расход на площадь $\pi (a^2 - b^2)$ кольца, найдем выражение для средней скорости

$$v = \frac{\Delta p}{8\mu l}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln (a/b)} \right), \qquad (8.13)$$

которое позволяет вычислять падение давления в кольцевой трубе. Полагая, что $b \to 0$, получим в пределе течение в обычной круглой трубе, и выражение (8.11) перейдет в формулу (6.32) Пуазейля.

8.4. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ СООСНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Рассмотрим движение жидкости в кольцевом пространстве, возникающее вследствие вращения цилиндров с разной угловой скоростью (рис. 8.5). Допустим, что линии тока являются концентрическими окружностями и, следовательно, $u_r = 0$. Те-

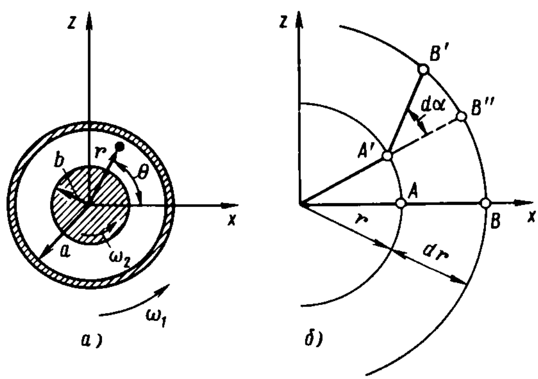


Рис. 8.5. Течение вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами:
а — общая схема; *б* — деформация сдвига в кольцевом слое жидкости

чение предполагаем плоским ($u_z = 0$), установившимся ($\partial u/\partial t = 0$), и влияние массовых сил не учитываем. При этих исходных условиях система уравнений движения (5.14) и (2.25) примет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{u^2}{r};$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2}\right) = \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta};$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Из последнего уравнения (уравнения неразрывности) следует, что скорость $u_\theta = u$ не зависит от координатного угла θ. Но и давление p не зависит от этой переменной в силу осевой симметрии течения. Кроме того, равны нулю все производные по z, так как в направлении этой оси нет движения. Таким образом, получаем систему

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{u^2}{r}; \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \tag{8.14}$$

Второе из этих уравнений содержит только одну искомую функцию u и может быть решено независимо от первого, которое выражает закон распределения давлений по радиусу.

Если ω_1 и ω_2 — угловые скорости внешнего и внутреннего цилиндров, то граничными условиями для скорости будут $u = \omega_1 a$ при $r = a$; $u = \omega_2 r$ при $r = b$.

Общее решение второго из уравнений (8.14) можно найти, если скорость выразить функцией вида $u = r^k$. Подставляя ее в уравнение, получаем

$$k(k-1)r^{k-2} + kr^{k-2} - r^{k-2} = 0 \text{ или } k^2 - 1 = 0, \text{ т. е. } k = \pm 1.$$

Следовательно, частными решениями будут функции $u_1 = r$ и $u_2 = r^{-1}$, а общим решением будет их линейная комбинация:

$$u = Ar + B/r. \tag{8.15}$$

Подставив в выражение (8.15) указанные выше граничные условия, найдем систему для определения постоянных A и B:

$$\omega_1 a = Aa + B/a; \quad \omega_2 b = Ab + B/b,$$

решая которую, получим

$$A = \frac{b^2\omega_2 - a^2\omega_1}{b^2 - a^2}; \quad B = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{8.16}$$

Таким образом, найден закон распределения скоростей в кольцевом пространстве. Практический интерес в данном случае представляют главным образом касательные напряжения и создаваемые ими сила и момент трения.

Чтобы найти выражение касательного напряжения, напомним, что, согласно формуле Ньютона, оно пропорционально угловой скорости сдвига (см. п. 5.1). Выделим цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$ тонкий слой жидкости, подверженный деформации сдвига вследствие неодинаковости угловых скоростей ω_1 и ω_2. Для определенности будем считать, что $\omega_1 > \omega_2$. Пусть в точке A (рис. 8.5, *б*) окружная скорость равна u; тогда угловая скорость будет u/r. В точке B угловая скорость равна $u/r + \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)dr$. Следовательно, за время dt частица, находившаяся в точке B, пройдет путь

$$(r + dr)\left[\frac{u}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)dr\right]dt = BB'.$$

Если бы угловые скорости ω_1 и ω_2 были одинаковы, то слой жидкости между цилиндрами не испытывал бы деформации сдвига и вращался вокруг общей оси цилиндров как твердое тело. При этом отрезок dr за время dt переместился бы в положение $A'B''$. Но из-за неодинаковости ω_1 и ω_2 он переместится в положение $A'B'$. Малый отрезок $B'B''$ и соответствующий ему угол $d\alpha$ характеризуют деформацию сдвига. Очевидно,

$$B''B' = (r + dr)\left[\frac{u}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)dr\right]dt -$$

$$- (r + dr)\frac{u}{r}dt \approx r\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)dr\,dt,$$

откуда

$$d\alpha \approx \operatorname{tg} d\alpha = r\frac{d}{dr}dt \text{ и}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right).$$

Касательное напряжение

$$\tau = \mu\frac{d\alpha}{dt} = \mu r\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = \mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right). \tag{8.17}$$

Получив общее для кругового движения выражение (8.17) касательного напряжения и вычислив по (8.15) du/dr и u/r, найдем

$$\tau = -\mu\frac{2B}{r^2} \text{ или } \tau = \mu\frac{2a^2b^2}{r^2}\frac{\omega_1 - \omega_2}{a^2 - b^2}. \tag{8.18}$$

Полагая $r = a$ и $r = b$, найдем значения касательных напряжений соответственно на внешнем и внутреннем цилиндрах. Вычислим далее момент силы трения. Поскольку, согласно выражению (8.18), τ не зависит от координатного угла θ, искомый момент выразим формулой

$$L_\mu = S\tau r = 2\pi r l\tau r,$$

где l — размер цилиндра вдоль образующей; S — боковая поверхность цилиндра.

Учитывая (8.18), получаем

$$L_\mu = 4\mu\pi l \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}(\omega_1 - \omega_2).$$

Как следует из этой формулы, момент трения не зависит от радиуса слоя r. Это означает, что для двух соосных цилиндрических поверхностей, ограничивающих слой жидкости, моменты сил вязкости, распределенных по этим поверхностям, равны по величине и противоположны по знаку. Иными словами, имеет место равновесие моментов сил вязкости.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть наружный цилиндр неподвижен ($\omega_1 = 0$) и зазор между цилиндрами $\delta = a - b$ — малая величина. Тогда, принимая приближенно

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (2b + \delta)\,\delta \approx 2b\delta,$$

получаем уравнение для момента сил трения

$$L_\mu = -2\mu\pi l\,(a^2/\delta)\,u \approx -2\mu\pi l\,(b^2/\delta)\,u, \tag{8.19}$$

где $u = \omega_2 b$ — окружная скорость цилиндра.

Сила трения, распределенная по поверхности цилиндра,

$$F_\mu = L_\mu/b = -\mu\,(2\pi bl/\delta)\,u. \tag{8.20}$$

Как следует из формул (8.19) и (8.20), момент и сила трения быстро растут с уменьшением зазора δ.

Формулы (8.19) и (8.20) первоначально использовались для расчетов трения в подшипниках скольжения, пока не была разработана более точная гидродинамическая теория смазки, учитывающая эксцентричность расположения вала в подшипнике. Основы этой теории будут рассмотрены ниже. Тем не менее формулы (8.19) и (8.20), предложенные Н. П. Петровым * в 1883 г., сохраняют свое значение и в наше время, поскольку во многих конструкциях машин используются вращение соосных цилиндров. Кроме того, эти формулы описывают предельный случай вращения вала в подшипнике при больших скоростях.

2. Рассмотрим вращение цилиндра в неограниченной жидкости, т. е. $\omega_1 = 0$ и $a \to \infty$.

Согласно (8.16) $A = 0$ и $B = b^2\omega_2$. Распределение скоростей согласно (8.15) описываются зависимостью

$$u = b^2\omega_2/r, \tag{8.21}$$

или подчиняется закону $ur = \text{const}$. На поверхности цилиндра $r = b$ и $u_{\text{пов}} = b\omega_2$. Этот закон распределения скоростей, как

* Николай Павлович Петров (1836—1920) — выдающийся русский инженер и ученый, почетный член Петербургской академии наук, выполнял ряд исследований по гидродинамике вязких жидкостей, вискозиметрии, создал основы гидродинамической теории смазки.

известно из п. 7.2, характерен для потенциального течения в поле одиночного плоского вихря идеальной жидкости. Следовательно, в рассматриваемом случае движения вязкой жидкости поле скоростей является потенциальным. При этом граничные условия для вязкой жидкости, состоящие в прилипании частиц жидкости к твердой поверхности, удовлетворяются и оказываются такими же, какие имели бы место в идеальной жидкости, если бы был создан чисто циркуляционный (круговой) поток вне цилиндра того же радиуса. Таким образом, рассматриваемое течение представляет собой тот исключительный случай, при котором течение вязкой жидкости является потенциальным. Для поддержания этого течения стационарным к вращающемуся цилиндру надо приложить постоянный вращающий момент, равный моменту сил трения, который легко вычислить по выведенным выше формулам.

Заметим в заключение, что циркуляция скорости по любой окружности радиусом r, концентричной с поверхностью вращающегося цилиндра, постоянна и согласно (8.21) равна

$$\Gamma = \int\limits_0^{2\pi} ur\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} b^2\omega_2\, d\theta = 2\pi b^2\omega_2^2 = 2\pi ur.$$

Поэтому закон (8.21) распределения скоростей можно записать в виде

$$u = \Gamma/(2\pi r).$$

При достаточно точном соблюдении условий, при которых были получены результаты, изложенные в этом параграфе, они вполне удовлетворительно подтверждаются экспериментом.

8.5. ДИФФУЗИЯ ВИХРЕЙ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В идеальной несжимаемой жидкости вихри не возникают и не уничтожаются (см. п. 5.8). В вязкой же жидкости имеет место явление, называемое диффузией вихрей и состоящее в распространении с течением времени зоны влияния одиночного вихря при одновременном уменьшении вектора угловой скорости и в пределе — в полном затухании завихренности.

Рассмотрим это явление на простейшем примере движения в поле прямолинейной одиночной вихревой нити (плоская задача), которая в начальный момент характеризуется циркуляцией Γ_0. Если бы эта нить существовала неопределенно долго при $t > 0$, то это поле скоростей сохранялось бы так же, как при вращении цилиндра в вязкой жидкости. Предположим, что в момент $t = 0$ действие нити исчезает. Возникает неустановившееся движение, которое мы и исследуем.

Таким образом, в момент $t = 0$ в безграничной массе жидкости существует поле скоростей

$$u_r = 0; \quad u_\theta = \Gamma/(2\pi r); \quad u_z = 0.$$

Эти соотношения являются начальными условиями для решения нестационарной задачи о диффузии вихря. При отсутствии влияния твердых границ или иных возмущений естественно считать, что все время движения $u_r = u_z = 0$, т. е. частицы перемещаются по круговым траекториям. Поэтому, пренебрегая влиянием массовых сил (считая, например, что вихревая нить вертикальна), движение можно описать уравнением Навье—Стокса (5.14) в цилиндрических координатах, которое в данном случае примет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u^2}{r}; \quad \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8.22}$$

Учитывая выражения (7.109) для компонент вектора вихря Ω в криволинейных координатах и то, что для цилиндрических координат $H_r = H_z = 1$, $H_\theta = r$, а в рассматриваемом случае $u_r = u_z = 0$, выразим вихрь формулой

$$\Omega = \frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r}.$$

Вычисляя

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2},$$

видим, что выражение в скобке левой части второго из уравнений (8.22) представляет собой величину $\partial\Omega/\partial r$. Следовательно,

$$\nu\partial\Omega/\partial r = \partial u/\partial t.$$

Умножим это уравнение на r, возьмем производную по r и результат разделим на r, получим

$$\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial (ur)}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r}\right],$$

откуда

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right). \tag{8.23}$$

Решение этого уравнения можно найти, воспользовавшись методом размерностей. Искомая функция Ω должна зависеть от параметров r, t, ν, но, кроме того, в нее должна входить циркуляция Γ_0, которой прямо пропорциональна величина вихря Ω. Поэтому решение можно искать в виде

$$\Omega = \Gamma_0 \Phi(r, t, \nu).$$

Согласно π-теореме (см. гл. 5), связь между $(n + 1)$ параметрами $(n + 1 = 5)$ можно представить в виде связи между $(n + 1 - k)$ безразмерными величинами, где k — число величин с независимыми размерностями. В данном случае $k = 2$, так как только r и t имеют независимые размерности. Образуя $n+1-$ $-k=3$ безразмерных параметра, получаем

$$\Omega t=\frac{\Gamma_0}{\nu}f\left(\frac{r^2}{\nu t},\ 1,\ 1\right).$$

Следовательно, искомое решение должно иметь вид

$$\Omega=\frac{\Gamma_0}{\nu t}f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функции, зависящей от одной безразмерной переменной $\xi=r^2/(\nu t)$. Для получения уравнения, определяющего эту функцию, подставим последнее выражение в формулу (8.23):

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)+4\,[f'(\xi)+\xi f''(\xi)]=0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$f(\xi)+4f'(\xi)+\xi\frac{d}{d\xi}[f(\xi)+4f'(\xi)]=0$$

и решим его относительно функции $g(\xi)=f(\xi)+4f'(\xi)$. Получим

$$\xi\,[f(\xi)+4f'(\xi)]=C.$$

Если считать, что вихрь Ω всюду конечен, то функция $f(\xi)$ также конечна и при $\xi=0$ получим $C=0$. Следовательно, функция $f(\xi)$ определяется из уравнения

$$f(\xi)+4\frac{df(\xi)}{d\xi}=0,$$

которое имеет общее решение

$$f(\xi)=Ae^{-\xi/4},$$

где A — постоянная.

Вихрь

$$\Omega=\frac{A\Gamma_0}{\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{8.24}$$

Постоянную A определим, воспользовавшись теоремой Стокса о равенстве циркуляции Γ и суммарной интенсивности вихрей J. Для области, ограниченной окружностью радиусом r,

$$2J=\int_0^r\Omega 2\pi r\,dr=\frac{2\pi A\Gamma_0}{\nu t}\int_0^r re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\,dr=4\pi A\Gamma_0\left(1-e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

Циркуляция скорости по той же окружности $\Gamma=2\pi ru$, и из формулы Стокса $\Gamma=2J$ получим

$$u=\frac{2A\Gamma_0}{r}\left(1-e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

В начальный момент $t=0$ $u=2A\Gamma_0/r$. Чтобы это распределение скоростей совпадало с заданным в условии $u=\Gamma_0/(2\pi r)$,

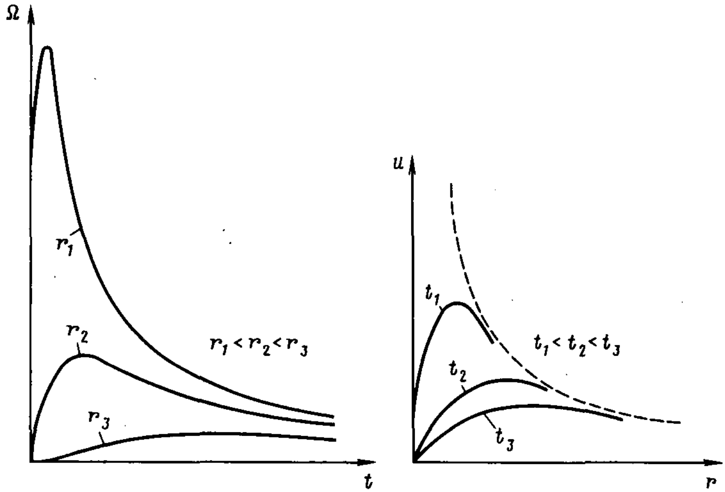


Рис. 8.6. Изменение завихренности и скорости жидкости в зависимости от расстояния r_i от центра вихря и времени t [штриховая линия соответствует идеальной жидкости $(\nu = 0)$]

должно быть $A = 1/(4\pi)$. Таким образом, окончательные зависимости имеют вид

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}; \quad (8.25) \qquad u = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \quad (8.26)$$

Наглядное представление о характере изменения вихря $\Omega(r, t)$ и поля скоростей $u(r, t)$ можно составить по кривым, изображающим зависимости (8.25) и (8.26) (рис. 8.6). Можно видеть, что для каждого фиксированного радиуса r_i величина вихря Ω_i вначале возрастает и, достигнув максимума, убывает, с течением времени стремясь к нулю. При этом чем больше радиус, тем меньше значение максимума Ω_i. Механизм этого движения состоит в том, что завихренность с циркуляцией Γ_0, имевшая место в начале координат в момент $t = 0$, распространяется с течением времени на все более обширную область, однако периферийных точек достигает тем меньшая завихренность, чем дальше точка расположена от начального вихря.

Уменьшение завихренности во времени является следствием диссипации механической энергии. Таким образом, можно констатировать, что всякая завихренность, возникшая во внутренних точках жидкости, имеет тенденцию к затуханию. Как будет ясно из дальнейшего, генерирование вихрей происходит главным образом вблизи твердых поверхностей, но в толщу потока они проникают ослабленными и лишь на ограниченные расстояния от стенок. Поэтому вне области пристенного пограничного слоя течение можно рассматривать как потенциальное.

8.6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА. ПЛОСКИЕ ПОЛЗУЩИЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассматриваемые ниже решения частных задач являются приближенными, однако степень их приближения к опытным данным вполне достаточна, и ими можно пользоваться в технических расчетах. Тем не менее следует подчеркнуть, что для уверенного использования приближенных решений необходимо, чтобы условия и допущения, при которых они получены, достаточно точно удовлетворялись в каждом конкретном случае.

Интуитивные соображения позволяют предположить, что при малых скоростях течения и значительной вязкости инерционные (конвективные) члены уравнений Навье—Стокса малы и ими можно пренебречь по сравнению с вязкостными. Это предположение можно обосновать, представив уравнения Навье—Стокса в безразмерном виде. Анализ таких безразмерных уравнений показывает, что вязкостные члены могут во много раз превосходить конвективные при малых числах Рейнольдса, т. е. при $\mathrm{Re} = vL/\nu \ll 1$ [22].

Течения при $\mathrm{Re} \ll 1$ называют ползущими. Они имеют место во многих конструктивных элементах машин, аппаратов и приборов, если поперечные размеры каналов малы, а вязкость жидкости велика. В этих случаях оказывается практически допустимым исходить из уравнений Навье—Стокса, не учитывая его конвективные члены:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t};$$
$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t}; \tag{8.27}$$
$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}.$$

Считая массовые силы постоянными, продифференцируем первое уравнение по x, второе по y, третье по z и сложим их. С учетом уравнения неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{8.28}$$

Таким образом, давление в ползущих течениях удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией. При неустановившемся движении время t, которое явно не входит в уравнение (8.28), играет роль параметра, а уравнение (8.28) определяет мгновенное поле давлений.

Уравнение, определяющее поле скоростей плоского течения, можно получить из выражения (8.5), не учитывая в нем конвективные члены:

$$\partial\Omega/\partial t = \nu\nabla^2\Omega. \tag{8.29}$$

При установившемся движении $\partial\Omega/\partial t = 0$ и вихрь Ω удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Omega = 0$, а функция тока согласно формуле (8.6) — бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0. \tag{8.30}$$

Оба эти уравнения могут служить для определения поля скоростей плоских ползущих течений.

8.7. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ

Трущиеся поверхности деталей машин и механизмов во многих случаях разделены тонким слоем вязкой жидкости или газа, в котором развивается давление, предотвращающее соприкосновение поверхностей. Закономерности движения такого тонкого вязкого слоя составляют содержание гидродинамической теории смазки, основы которой были заложены в трудах О. Рейнольдса, Н. П. Петрова, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина.

Одной из основных особенностей движения смазочного слоя является его малая толщина (она имеет порядок сотых, тысячных долей миллиметра) по сравнению с размерами граничных поверхностей. В частности, толщина слоя h весьма мала по сравнению с радиусом кривизны этих поверхностей. Это дает возможность, рассматривая течение в смазочном слое, считать граничные поверхности слабоискривленными и пользоваться декартовыми координатами вместо криволинейных.

Рассмотрим две слабоискривленные и приблизительно параллельные поверхности, слой жидкости между которыми движется как под действием градиента давления, так и вследствие их взаимного перемещения. Движение будем считать установившимся и действие массовых сил несущественным. Оси координат (рис. 8.7) выберем, расположив ось x на нижней поверхности и направив ее вдоль вектора скорости u_{1x} перемещения этой поверхности. Вторая поверхность может быть неподвижной или перемещаться вдоль оси x со скоростью u_{2x} и вдоль оси y со скоростью u_{2y}. Если во все время движения толщина слоя h остается малой, то отношение скоростей u_{2y}/u_{1x} также должно быть малым, поэтому $u_y \ll u_x$ для любой точки внутри слоя. Кроме того, скорость в направлении оси y вследствие малой толщины слоя изме-

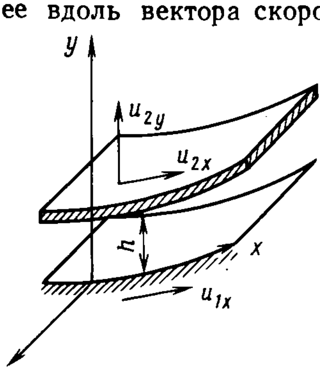


Рис. 8.7. Схема течения между непараллельными твердыми стенками

няется гораздо интенсивнее, чем вдоль оси x, т. е. для любой компоненты u_i:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} \gg \frac{\partial u_i}{\partial x} \sim \frac{\partial u_i}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}.$$

Следовательно, в уравнениях движения можно не учитывать не только инерционные члены, но и те вязкостные члены, которые содержат производные по x и z. При этом, однако, движение является пространственным и в уравнении неразрывности должны быть сохранены все три члена, поскольку в общем случае они имеют один порядок малости. Тогда, пренебрегая малыми членами, вместо системы (8.27) получим систему уравнений Рейнольдса для смазочного слоя

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}; \tag{8.31}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Ее можно использовать для решения разнообразных задач, связанных с движением смазочного слоя. Следует иметь в виду, что так как уравнения Рейнольдса получены путем отбрасывания инерционных и некоторых вязкостных членов, они менее полно описывают движение, чем, например, система (8.27) или бигармоническое уравнение (8.30).

Из системы (8.31) можно легко получить закон распределения скоростей по толщине слоя. Поскольку согласно второму уравнению давление не зависит от координаты y, то первое и третье уравнения можно проинтегрировать по этой координате:

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 y + C_2; \quad u_z = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4, \tag{8.32}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 в общем случае зависят от x и z; их можно определить из граничных условий на твердых поверхностях.

Рассмотрим частный случай течения в тонком слое. Пусть обе поверхности неподвижны и течение происходит только под действием перепада давления в слое переменной толщины $h(x, z)$. Тогда граничные условия будут иметь вид $u_x = u_z = 0$ при $y = 0$ и $u_x = u_z = 0$ при $y = h$. Подставляя их в выражения (8.32), получаем

$$C_2 = C_4 = 0; \quad C_1 = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad C_3 = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

и закон распределения скоростей

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - h); \quad u_z = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y (y - h). \tag{8.33}$$

Используя формулы (8.33), нетрудно получить уравнения для давления в слое. Для этого рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^h \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dy,$$

который в силу уравнения неразрывности равен нулю.

Учитывая, что

$$\int_0^h \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = u_y \Big|_0^h = 0,$$

получаем

$$J = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u_x dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h u_z dz = 0.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения (8.33) для u_x и u_z и выполняя интегрирование, находим искомое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0. \qquad (8.34)$$

Если $h = \mathrm{const}$, то это уравнение превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2 p = 0$.

В общем случае $h(x, z)$ является функцией, задаваемой в условии задачи. Кроме того, для получения определенного решения уравнения (8.34) должны быть заданы значения давления на границах области течения по поверхности xOy. Если одна из граничных поверхностей движется относительно другой, то можно получить более общее уравнение для давления, отличающееся от выражения (8.34) наличием правой части [22].

8.8. ПЛОСКИЙ КЛИНОВИДНЫЙ СМАЗОЧНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрим плоское движение жидкости между двумя непараллельными пластинами, нижняя из которых движется с постоянной скоростью u_0 в направлении отрицательной оси x (рис. 8.8), а верхняя неподвижна. Пространство слева и справа от неподвижной пластины будем считать заполненным вязкой жидкостью, находящейся под одинаковым давлением p_0. Тогда движение жидкости в клиновидном зазоре будет обусловлено только вовлекающим действием движущейся пластины.

Эта схема в простейшем виде воспроизводит движение смазочного слоя опорного подшипника скольжения, применяемого, например, в опорах гидрогенераторов и других машин. На примере этой задачи выясняются причины появления поддерживающей силы в подшипниках скольжения. При изложении решения используются в основном данные работы [24].

Распределение скоростей в смазочном слое описывается первой из формул (8.32), поскольку движение предполагается плоским и $u_z = 0$:

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2.$$

В данном случае давление зависит только от координаты x и потому вместо частной производной $\partial p/\partial x$ следует писать полную $\partial p/\partial x$.

Для формулировки граничных условий выразим из геометрических соображений зависимость $h(x)$. Согласно рис. 8.8 она имеет вид

$$h = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{l}x = h_0\left(1 + k\frac{x}{l}\right), \tag{8.35}$$

где $k = (h_1 - h_0)/h_0$ — геометрический параметр клиновидности слоя.

При этом граничными будут следующие условия: $u_x = -u_0$, $u_y = 0$ при $y = 0$; $u_x = 0$, $u_y = 0$ при $y = h$; $p = p_0$ при $x = 0$ и при $x = l$ (или при $h = h_0$ и $h = h_1$).

Определяя при этих граничных условиях постоянные C_1 и C_2, находим закон распределения продольной скорости

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h) - u_0\left(1 - \frac{y}{h}\right). \tag{8.36}$$

Для получения формулы, определяющей распределение давления $p(x)$ в слое, вычислим удельный расход, используя выражение (8.36) и учитывая, что основное движение происходит в сторону отрицательной оси x:

$$q = -\int_0^h u_x dy = \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{u_0 h}{2}. \tag{8.37}$$

Очевидно, существует такое сечение слоя с координатой x_* и толщиной h_*, для которого

$$q = \frac{u_0}{2}h_*.$$

Поэтому формулу (8.37) можно представить в виде

$$\frac{dp}{dx} = -6\mu u_0\frac{h - h_*}{h^3}. \tag{8.38}$$

Отсюда следует, что в сечении с координатой x_* (т. е. при $h = h_*$) давление достигает экстремума (максимума), так как $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{h=h_*} = 0$.

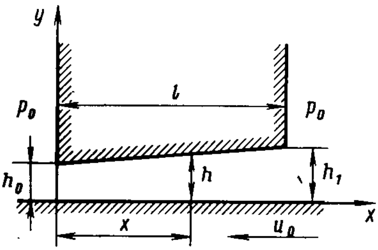


Рис. 8.8. Расчетная схема плоского клиновидного смазочного слоя

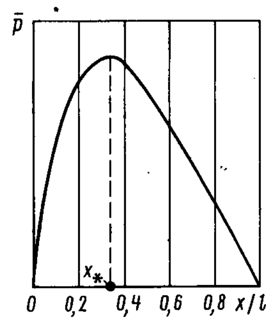


Рис. 8.9. Распределение давления по длине смазочного слоя

Для наиболее краткого интегрирования уравнения (8.38) учтем, что $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh}\frac{dh}{dx}$ и согласно выражению (8.35)

$$\frac{dp}{dx} = k\frac{h_0}{l}\frac{dp}{dh}.$$

Теперь уравнение (8.38) представим в виде

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu u_0 l}{kh_0}\left(\frac{1}{h^3} - \frac{h_*}{h^3}\right).$$

Интегрируя, получим

$$p = \frac{6\mu u_0 l}{kh_0}\left(\frac{1}{h} - \frac{h_*}{2h^2}\right) + C_0.$$

Для определения постоянных h_* и C_0 используем граничные условия для давления. После простых преобразований получим

$$h_* = 2h_0\frac{1+k}{2+k}; \quad C_0 = p_0 - \frac{2\mu u_0 l}{kh_0^2}\frac{1}{2+k}.$$

Теперь закон распределения давления по длине слоя выразим формулой

$$p = p_0 + \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2}\left[\frac{l}{l+kx} - \frac{1}{2+k} - \frac{1+k}{2+k}\frac{l^2}{(l+kxl)^2}\right]. \quad (8.39)$$

Распределение давления согласно этой зависимости показано на рис. 8.9 в безразмерных координатах в виде функции $\bar{p} = \frac{p - p_0}{6\mu u_0 l/(kh_0^2)} = f\left(\frac{x}{l}\right)$ для значения $k = 1{,}2$.

Нетрудно убедиться, что максимум давления достигается в точке x_*, где $x_*/l = (2+k)^{-1}$, что соответствует приведенному выше выражению h_*.

Вычислим теперь силы давления и трения, развивающиеся в слое. Первая из них, рассчитанная на единицу ширины потока,

$$P = \int_0^l (p - p_0)\,dx.$$

После вычисления интеграла с учетом формулы (8.39) получим

$$P = \frac{6\mu u_0 l^2}{k^2 h_0^2}\left[\ln(1+k) - \frac{2k}{2+k}\right]. \qquad (8.40)$$

Обратим внимание на то, что сила давления обратно пропорциональна квадрату малой величины h_0^2. Поэтому при увеличении нагрузки, прижимающей верхнюю пластину к нижней, и прочих постоянных параметрах уменьшается зазор h_0 и возрастает сила давления до значения, уравновешивающего нагрузку. Таким образом, смазочный слой не выдавливается и может выдерживать существенные нагрузки.

Как следует из (8.40), сила давления P зависит также от параметра k клиновидности слоя. Исследуя эту зависимость на экстремум, можно убедиться, что функция $P(k)$ имеет максимум при $k = 1{,}2$. Подставив это значение k в (8.40), получим

$$P_{\max} \approx 0{,}16\mu u_0 l^2/h_0^2.$$

При этом точка максимума давления определяется координатой $x_* = 0{,}31l$. Практический интерес представляет также координата точки приложения силы P (точки пересечения линии действия этой силы с осью x). Для нахождения этой координаты x_L приравняем момент равнодействующей $L = Px_L$ сумме моментов составляющих:

$$Px_L = \int_0^l (p - p_0)\, x\, dx.$$

Вычисляя интеграл и используя (8.40), после упрощений находим

$$x_L = \frac{6k + k^2 - 2(3+2k)\ln(1+k)}{2k\left[(2+k)\ln(1+k) - 2k\right]}.$$

При $k = 1{,}2$, когда $P = P_{\max}$, $x_L = 0{,}43l$. Следовательно, равнодействующая сила давления проходит несколько левее середины длины слоя, но правее точки максимума давления.

Для определения силы трения, действующей на подвижную пластину, вычислим касательное напряжение

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{du_x}{dy}\right)_{y=0}.$$

Используя закон (8.36) распределения скорости, получаем

$$\tau_0 = \mu\frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}.$$

Исключая в этом выражении h и p, с учетом выражений (8.36) и (8.39) после упрощений находим

$$\tau_0 = \mu\frac{u_0}{h_0}\left[\frac{4l}{l+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k}\frac{l^2}{(l+kx)^2}\right]. \qquad (8.41)$$

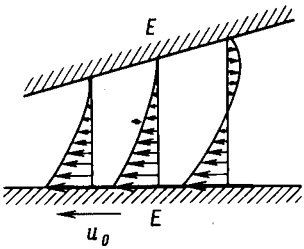


Рис. 8.10. Образование отрыва и возвратного течения в смазочном слое

Сила трения, рассчитанная на единицу ширины пластины, определяется формулой $F_\mu = \int_0^l \tau_0\,dx$ или после вычислений с учетом формулы (8.41)

$$F_\mu = \mu \frac{u_0 l}{h_0}\left[\frac{4}{k}\ln(1+k) - \frac{6}{2+k}\right]. \quad (8.42)$$

При $k = 1{,}2$, отвечающем максимальной силе давления,

$$F_\mu \approx 0{,}75\mu u_0 l/h_0.$$

Заметим, что если пластины параллельны ($k = 0$), то выражение в квадратной скобке в формуле (8.42) равно единице, т. е. получаем значение силы трения течения Куэтта, соответствующее линейному распределению скоростей. Следовательно, указанное выражение играет роль коэффициента, учитывающего изменение силы трения из-за непараллельности пластин.

Вернемся к распределению скоростей в смазочном слое. Из формулы (8.36) следует, что на участке $x > x_*$, где $dp/dx < 0$, возможно такое сочетание параметров, при котором $u_x > 0$. Это значит, что движение происходит в сторону, противоположную направлению скорости u_0, т. е. имеет место возвратное течение. Распределение скоростей в различных сечениях для этого случая показано на рис. 8.10. Образование возвратного течения сопровождается отклонением (отрывом) основного потока от твердой поверхности и объясняется действием обратного перепада давления. На участке от точки $x = l$ (см. рис. 8.8) до $x_* = l\,(2 + k)^{-1}$, где достигается максимум давления, жидкость движется в сторону нарастающего давления, преодолевая, кроме того, силу трения. В связи с этим перемещаться вместе с подвижной пластиной могут лишь частицы, обладающие достаточной кинетической энергией; частицы, расположенные ближе к неподвижной пластине, имеют малый запас кинетической энергии, под действием обратного перепада давления начинают двигаться в противоположную сторону и образуют возвратное течение. Граничным для зоны этого течения будет сечение отрыва (EE на рис. 8.10), в котором выполняется условие

$$\left.\frac{du_x}{dy}\right|_{y=h} = 0,$$

выражающее параллельность оси y и касательной к эпюре скорости. Используя выражение (8.36), это условие запишем в виде

$$\frac{u_0}{h_{\text{отр}}} + \frac{h_{\text{отр}}}{2\mu}\frac{dp}{dx} = 0,$$

а учитывая формулу (8.39), найдем

$$h_{\text{отр}} = \frac{3}{2} h_* \text{ или } x_{\text{отр}} = \frac{2k+1}{k(k+2)} l,$$

где $h_{\text{отр}}$ — толщина слоя в сечении отрыва.

Отсюда следует, что $x_{\text{отр}} \geqslant l$ при $k \leqslant 1$, т. е. при этих значениях k течение на всей длине пластины будет безотрывным. При $k = 1{,}2$ отрыв происходит в точке $x_{\text{отр}} = 0{,}89l$. При $k = 1$ значения силы давления и трения мало отличаются от их значений при $k = 1{,}2$.

Важнейшим результатом изложенного в этом параграфе решения является объяснение причины появления силы, предотвращающей выдавливание смазочного слоя и обеспечивающей жидкое трение между твердыми поверхностями. Важно также заметить, что сила давления на порядок больше, чем сила трения. Аналогичные свойства имеет смазочный слой в цилиндрическом подшипнике скольжения.

8.9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим движение тонкого смазочного слоя между двумя эксцентрично расположенными цилиндрами, один из которых (внутренний) вращается с постоянной угловой скоростью (рис. 8.11). Движение предполагаем плоским установившимся ламинарным изотермическим. Такая задача является простейшей из числа разнообразных задач, составляющих гидродинамическую теорию смазки подшипников скольжения. Ее можно решить на основе бигармонического уравнения, т. е. при учете всех вязкостных членов уравнений движения. Такое решение было дано Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным. Для простоты рассмотрим решение в приближении Зоммерфельда, которое основано на уравнениях Рейнольдса.

Толщина смазочного слоя в реальных подшипниках очень мала по сравнению с радиусом цапфы и потому при описании движения в смазочном слое можно пренебречь кривизной поверхности цапфы и подшипника, выбрав оси координат, как показано на рис. 8.11 и 8.12. Тогда граничные условия, а значит, и распределение скоростей в слое будут такими же, как и для случая плоского клиновидного слоя, рассмотренного в предыдущем параграфе. Применительно к схеме, показанной на рис. 8.12, скорости в слое описываются уравнением (8.36):

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + v\left(\frac{y}{h} - 1\right),$$

где v — окружная скорость поверхности цапфы.

Вычислим расход жидкости в слое так же, как это сделано в п. 8.8:

$$q = -\int_0^h u\,dy = \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{vh}{2}$$

и введем вместо расхода постоянную h_*, положив $q = vh_*/2$. Тогда

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu v}{h^3}(h_* - h). \qquad (8.43)$$

Очевидно, h_* имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае, т. е. представляет собой толщину слоя в том сечении, где $dp/dx = 0$.

Поскольку эксцентриситет $O_1O_2 = e$ (см. рис. 8.12) не может превышать зазор $\delta = R_2 - R_1 \ll R_1$, допустимо принять $R_1 + h \approx R_2 - e\cos\theta$, откуда $h = \delta - e\cos\theta$.

Введем обозначение $\delta/e = \alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$ и представим зависимость $h(\theta)$ в виде

$$h = e(\alpha - \cos\theta). \qquad (8.44)$$

Учитывая, что $x = R_1\theta$ и $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{R_1}\frac{dp}{d\theta}$, вместо выражения (8.43) получаем

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\mu v R_1\left[\frac{h_*}{h^3(\theta)} - \frac{1}{h^2(\theta)}\right] =$$

$$= 6\mu v R_1\left[\frac{h_*}{e^3(\alpha - \cos\theta)^3} - \frac{1}{e^2(\alpha - \cos\theta)^2}\right]. \qquad (8.45)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $\theta = 0$ до произвольного θ, находим

$$p(\theta) - p(0) = 6\mu v R_1\int_0^\theta\left[\frac{h_*}{h^3(\theta)} - \frac{1}{h^2(\theta)}\right]d\theta. \qquad (8.46)$$

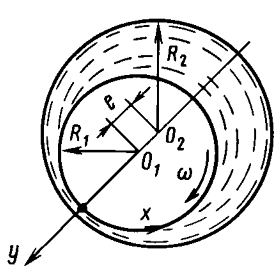


Рис. 8.11. Расчетная схема течения в смазочном слое цилиндрического подшипника скольжения

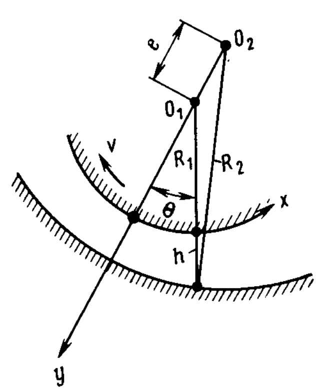


Рис. 8.12. Геометрические параметры смазочного слоя цилиндрического подшипника

Введем обозначение $p(0) = p_0$ и учтем, что ввиду однозначности функции $p(\theta)$ $p(2\pi) = p(0) = p_0$. Тогда из последнего равенства следует, что

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{h_*}{h^3(\theta)} - \frac{1}{h^2(\theta)} \right] d\theta = 0,$$

откуда

$$h_* = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3}} = e \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\alpha - \cos\theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\alpha - \cos\theta)^3}} = e \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}. \tag{8.47}$$

Теперь уравнение (8.45) перепишем в виде

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\mu v R_1}{e^2} \left[\frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1} \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^3} - \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^2} \right]. \tag{8.48}$$

После интегрирования вместо (8.46) получим

$$p(\theta) - p_0 = \frac{6\mu v R_1}{\delta^2} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1} \frac{\sin\theta}{\alpha - \cos\theta} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \cos\theta} \right). \tag{8.49}$$

Из формулы (8.49) следует, что знак разности $p(\theta) - p_0$ определяется знаком $\sin\theta$, т. е. $p(\theta) - p \geqslant 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $p(\theta) - p \leqslant 0$ при $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Распределение избыточного давления $p(\theta) - p_0$ по поверхности цилиндра показано в виде полярной диаграммы на рис. 8.13. Очевидно, такое распределение давлений должно создавать результирующую силу, не равную нулю. Эта сила направлена нормально линии центров (прямой, проходящей через центры O_2 и O_1). Действительно, из выражения (8.49) видно, что

$$p(\theta) - p_0 = -[p(2\pi - \theta) - p_0].$$

Следовательно, сумма проекций на линию центров всех элементарных сил давления $[p(\theta) - p_0]\,dx$ (рис. 8.14) равна нулю, а это и означает, что результирующая сила давления нормальна к линии центров. Значение этой силы, рассчитанное на единицу длины цапфы, определяется интегралом

$$P = \int_0^{2\pi} [p(\theta) - p_0] R_1 \sin\theta \, d\theta.$$

Подставив в последнюю формулу выражения $p(\theta) - p_0$ из зависимости (8.49) и вычислив интегралы, получим

$$P = \frac{\alpha^2}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{6\mu S v R_1}{\delta^2},$$

где $S = 2\pi R_1$ — площадь поверхности цапфы единичной длины.

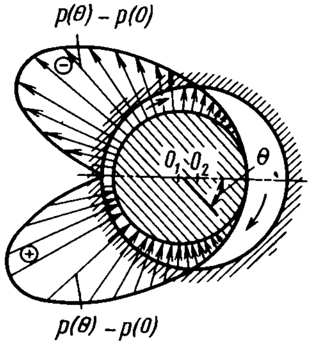


Рис. 8.13. Распределение давления по поверхности цапфы в цилиндрическом подшипнике

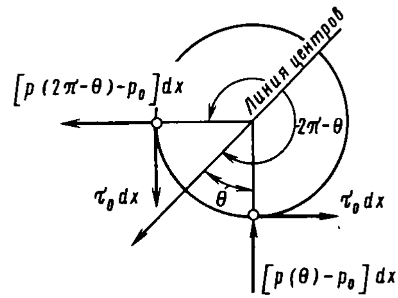


Рис. 8.14. Элементарные силы давления и трения, действующие на поверхность цапфы

Величина

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}$$

зависит только от параметра α и играет роль коэффициента силы P. Закономерность ее изменения показана на рис. 8.15. Часть кривой, нанесенная штриховой линией, согласно исследованию академика Л. С. Лейбензона * относится к тем значениям α, при которых образуются отрывы смазочного слоя и нарушается сплошность течения. Из хода кривой видно, что $\beta \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Неограниченное возрастание α означает уменьшение эксцентриситета, т. е. $e \to 0$.

Поскольку

$$\beta = \frac{P\delta^2}{6\mu S v R_1},$$

уменьшение β при постоянной окружной скорости цапфы означает уменьшение поддерживающей силы или несущей способности подшипника. При соосном расположении цапфы в подшипнике $P = 0$. Однако при значительном P малое значение β может быть следствием большой окружной скорости v. Поэтому увеличение v при прочих равных условиях ведет к увеличению поддерживающей силы.

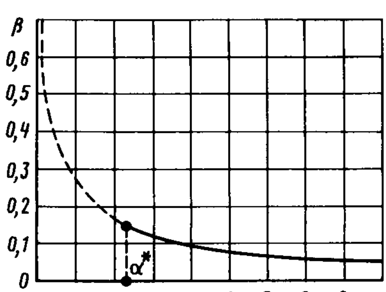


Рис. 8.15. Зависимость коэффициента поддерживающей силы от параметра α

* Леонид Самуилович Лейбензон (1879—1951) — академик, видный советский механик; автор ряда крупных работ по гидродинамике, теории упругости, геофизике.

Определим силу трения. Касательное напряжение вычислим уже известным способом:

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = \mu \frac{v}{h} - \frac{h}{2R_1}\frac{dp}{d\theta}.$$

Используя формулу (8.48), получим

$$\tau_0 = \frac{2\mu v\alpha}{\delta}\left[\frac{2}{\alpha - \cos\theta} - \frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{(2\alpha^2+1)(\alpha-\cos\theta)^2}\right].$$

Элементарные силы трения $\tau_0 dx$ на поверхности вала имеют направления, показанные на рис. 8.14. Сумма их проекций на направление линии центров равна нулю, т. е. результирующая сил трения нормальна этой линии.

Сила и момент трения определяются интегралами

$$F_\mu = \int\limits_0^{2\pi} \tau_0 R_1 d\theta \text{ и } L_\mu = \int\limits_0^{2\pi} \tau_0 R_1^2 d\theta.$$

После вычислений получим

$$F_\mu = \mu \frac{Sv}{\delta}\frac{2\alpha(\alpha^2+2)}{(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}; \tag{8.50}$$

$$L_\mu = \mu \frac{SvR_1}{\delta}\frac{2\alpha(\alpha^2+2)}{(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}. \tag{8.51}$$

Из этих формул следует, что сила и момент трения есть величины порядка δ^{-1}, тогда как сила давления P имеет порядок δ^{-2}. В связи с этим при определении суммарной поддерживающей силы силой трения можно пренебречь.

Введем условный коэффициент трения $f = F_\mu/P$. Используя выражения для F_μ и P, легко убедиться, что

$$f = \frac{\delta}{3R_1}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right).$$

Функция $f(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = \sqrt{2}$, т. е. существуют оптимальные условия работы подшипника. При этом

$$f_{\min} = \frac{\delta}{R_1}\frac{1}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}943\frac{\delta}{R_1}.$$

Очевидно, $\alpha = \sqrt{2}$ определяет то значение окружной скорости v цапфы, при котором коэффициент трения при данной нагрузке P будет минимальным. Заметим также, что при $\alpha \to \infty$ (уменьшение эксцентриситета) формула (8.50) переходит в формулу Н. П. Петрова (8.19) для соосного расположения цилиндров.

8.10. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Рассмотренные выше задачи о ламинарных установившихся течениях решались точными или приближенными аналитическими методами. Путем надлежащего использования граничных условий в этих задачах удавалось упростить уравнения движения и привести их к интегрируемому виду. Существует немало других задач, решения которых получены тем же путем и находят важные технические приложения. Однако современное развитие инженерной практики требует решения и более сложных задач, в которых приходится учитывать все члены уравнений Навье—Стокса, что не позволяет их решить в квадратурах. Широкие возможности открывает использование ЭВМ и применение численных методов решения. Последние основаны на замене (аппроксимации) дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях, которые решаются на ЭВМ как система алгебраических уравнений. Разработаны и успешно применены к различным гидродинамическим задачам несколько численных методов, причем в некоторых из них используются не только эйлеровы, но и лагранжевы переменные.

Рассмотрим общую схему применения численного метода сеток к расчету плоского неустановившегося течения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве исходных можно использовать как уравнения (5.10) Навье—Стокса в проекциях, так и их преобразованную форму [(8.4) и (8.5)] для плоских течений. Уравнения (8.4) и (8.5) обладают тем преимуществом, что не содержат давления и имеют две искомые функции ψ и Ω. Для построения численного метода уравнение (8.5) переноса вихря удобно использовать в консервативной или дивергентной форме

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{\partial(u_x\Omega)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y\Omega)}{\partial y}=\nu\nabla^2\Omega \qquad (8.52)$$

или

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\Omega)=\nu\nabla^2\Omega, \qquad (8.52')$$

в справедливости которой легко убедиться, учитывая, что $\operatorname{div}\Omega=0$. Далее приведем это уравнение к безразмерному виду, выбрав характерные масштабы: длины — L, времени — T, скорости — U и введя безразмерные параметры

$$\bar{u}_x=\frac{u_x}{U};\quad \bar{u}_y=\frac{u_y}{U};\quad \bar{x}=\frac{x}{L};\quad \bar{y}=\frac{y}{L};$$

$$\bar{\Omega}=\frac{\Omega L}{U};\quad \bar{t}=\frac{tU}{L};\quad \bar{\psi}=\frac{\psi}{UL}.$$

Тогда вместо системы (8.4) и (8.5) получим

$$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}\bar{\Omega}) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2\bar{\Omega}; \tag{8.53}$$

$$\bar{\Omega} = -\nabla^2\bar{\psi},$$

где $\mathrm{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса, составленное из характерных параметров задачи.

Обратим внимание на то, что в безразмерном уравнении (8.53) переноса вихря при больших числах Re конвективный член $\operatorname{div}(\bar{u}\bar{\Omega})$ может оказаться более существенным, чем член вязкой диффузии $\mathrm{Re}^{-1}\nabla^2\bar{\Omega}$, тогда как при малых числах Re значимость членов оказывается противоположной.

Уравнения (8.53) образуют замкнутую систему относительно функций Ω и ψ. В численном методе сеток эту систему записывают в конечно-разностной форме, заменяя производные их разностными аналогами по формулам численного дифференцирования. Для этого область течения покрывают сеткой со сторонами Δx и Δy по координатным направлениям. Расчетный интервал времени делят на отрезки Δt. Каждой узловой точке сетки приписывают пару индексов i, k, определяющих ее координаты: $x_i = i\Delta x$, $y_k = k\Delta y$. Момент времени t_n характеризуется временной координатой $n\Delta t$.

Для простоты записи ниже, до конца этого параграфа будем опускать черточку над обозначениями безразмерных переменных, но не будем их смешивать с размерными величинами, возвращение к которым оговорим особо.

Таким образом, значения искомых функций в пространственно-временной точке x_i, y_k, t_n будем обозначать

$$\Omega(x_i,\ y_k,\ t_n) = \Omega(i\Delta x,\ k\Delta y,\ n\Delta t) = \Omega_{ik}^n;$$

$$\psi(x_i,\ y_k,\ t_n) = \psi(i\Delta x,\ k\Delta y,\ n\Delta t) = \psi_{ik}^n.$$

Производные этих функций по координатам в соответствии с трехточечным вариантом численного дифференцирования заменим их центрально-разностными аналогами:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{ik} = \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta x}; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{ik} = \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta_y};$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{ik} = \frac{f_{i+1,k} + f_{i-1,k} - 2f_{i,k}}{\Delta x^2}; \tag{8.54}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,k+1} + f_{i,k-1} - 2f_{i,k}}{\Delta y^2},$$

где f — значения функций Ω или ψ.

Для выражения локального члена используем разности вперед по времени:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i,k}=\frac{f_{i,k}^{n+1}-f_{i,k}^{n}}{\Delta t}. \tag{8.55}$$

Теперь уравнения (8.53) заменим конечно-разностными аналогами:

$$\frac{\Omega_{i,k}^{n+1}-\Omega_{i,k}^{n}}{\Delta t}=\frac{(u_x\Omega)_{i+1,k}^{n}-(u_x\Omega)_{i-1,k}^{n}}{2\Delta x}+$$

$$+\frac{(u_y\Omega)_{i,k+1}^{n}-(u_y\Omega)_{i,k-1}^{n}}{2\Delta y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\Omega_{i+1,k}^{n}+\Omega_{i-1,k}^{n}-2\Omega_{ik}^{n}}{\Delta x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Omega_{i,k+1}^{n}+\Omega_{i,k-1}^{n}-2\Omega_{i,k}^{n}}{\Delta y^2}\right], \tag{8.56}$$

$$\frac{\psi_{i+1,k}^{n+1}+\psi_{i-1,k}^{n+1}-2\psi_{i,k}^{n+1}}{2\Delta x^2}+\frac{\psi_{i,k+1}^{n+1}+\psi_{i,k-1}^{n+1}-2\psi_{i,k}^{n+1}}{\Delta y^2}=-\Omega_{i,k}^{n+1}; \tag{8.57}$$

$$(u_x)_{i+1,k}^{n}=\frac{\psi_{i+1,k+1}^{n}-\psi_{i+1,k-1}^{n}}{2\Delta y};$$

$$(u_y)_{i,k+1}^{n}=-\frac{\psi_{i+1,k+1}^{n}-\psi_{i-1,k+1}^{n}}{2\Delta x}. \tag{8.58}$$

Прежде чем изложить общую схему расчета по уравнениям (8.56)—(8.58), остановимся на способах разностной аппроксимации начальных и граничных условий, которые решающим образом могут влиять на эффективность всего численного метода.

Начальные условия имеют значение и смысл только для неустановившихся течений. В качестве таких условий служат поля значений функций Ω и ψ во всей области течения, включая ее границы. Они могут явиться результатом предварительного решения стационарной задачи, одним из приближенных или численных методов, а также результатом экспериментального исследования. Значимость начальных условий различна для разных задач. Например, если нестационарный гидродинамический процесс в пределе при $t\to\infty$ должен перейти в установившийся, то точность задания начального условия мало влияет на конечный результат. Но для получения определенного решения должно быть обеспечено выполнение определенных критериев сходимости вычислительного процесса. Примером такого критерия может служить условие

$$\max\left|\Omega_{i,k}^{n+1}-\Omega_{i,k}^{n}\right|<\varepsilon,$$

где ε — задаваемая заранее величина (в практике расчетов $\varepsilon=10^{-3}\ \ldots\ 10^{-8}$ [18]).

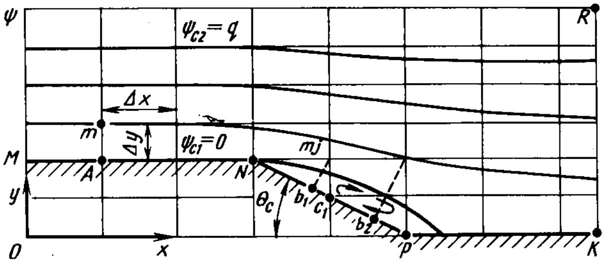


Рис. 8.16. Схема к численному методу решения уравнений Навье—Стокса

Граничные условия для внутренних и внешних плоских течений вязкой жидкости многообразны и удачные формы их выражения во многом обеспечивает точность вычислений. Конечно-разностная форма представления граничных условий зависит не только от структуры течения, но и от выбора сетки. Приведем примеры граничных условий.

А. Условие на стенке при расположении вдоль нее узлов расчетной сетки (рис. 8.16). Поскольку стенка является линией тока, на ней $\psi = \text{const}$. Можно, в частности, принять $\psi \equiv \psi_{c1} = 0$. Тогда на противоположной стенке должно быть $\psi_{c2} = q$, где q— удельный объемный расход потока.

Чтобы выразить значение вихря на стенке MN, например, в точке A, разложим функцию тока ψ в ряд Тейлора в окрестности этой точки, имеющей координаты x_i, y_{k_c}. Значение этой функции в точке $m\,(x_i,\ y_{k_c+1})$ будет

$$\psi_{i,\,k_c+1} = \psi_{i,\,k_c} + \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,\,k_c}\Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,k_c}\Delta y^2 + R_m, \quad (8.59)$$

где R_m — остаточный член ряда.

В этом разложении $\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,\,k_c} = u_{x i,\,k_c} = 0$ в силу прилипания жидкости к стенке. Кроме того, на стенке

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,k_c} = \frac{\partial}{\partial y}\left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right|_{i,\,k_c} = \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{i,\,k_c} \quad \text{и}$$

$$\Omega_c = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_c.$$

Так как всюду на стенке $u_y = 0$, то $\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_c = 0$ и $\Omega_c = \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_c$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,k_c} = -\,\Omega_c. \quad (8.60)$$

Разрешая (8.59) относительно $\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,k_c}$, вместо (8.60) получим

$$\Omega_c = 2\,\frac{\psi_{i,\,k_c} - \psi_{i,\,k_c+1}}{\Delta y^2},$$

а так как $\psi_{i,\,k_c} = \psi_{c_1} = 0$, то граничное условие для вихря на стенке примет вид

$$\Omega_c = -\frac{2\psi_{i,\,k_c+1}}{\Delta y^2}.$$

Таким образом, значение вихря на стенке Ω_c выражено через значение функции тока в ближайшей к стенке узловой точке сетки.

Б. Если прямая стенка проходит через узлы сетки по диагонали (NP на рис. 8.16), то граничное условие для вихря в точках стенки b_1, b_2, ..., не совпадающих с узлами сетки, можно вывести в виде

$$\Omega_{bj} = -2\,\frac{\psi_{mj} - \psi_{bj}}{\Delta n^2},$$

где $\Delta n^2 = (\Delta y \cos\theta_c)^2 = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Значения вихря в узлах сетки c_1, c_2, ..., лежащих на стенке, находят путем интерполяции между точками b_j.

В. Если в потоке существует ось симметрии, то естественным условием на этой линии будет

$$\Omega_0 = 0;\ \psi_0 = q/2 = \text{const}.$$

Г. Условие на входной границе потока может быть задано, например, в виде профиля скорости: $u_x = U(y)$. Тогда функцию тока можно найти из соотношения

$$\psi_{\text{вх},\,j} = \int_0^{y_i} U(y)\,dy.$$

Если есть основание полагать, что на входной границе и в ее окрестности $u_{y\,\text{вх}} = 0$, то значения вихря можно определить из соотношения

$$\Omega_{\text{вх}} = -\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{\text{вх}} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

В более сложных случаях течения на входной границе приходится задавать и вторую проекцию скорости.

Д. На выходной границе (KR на рис. 8.16) граничное условие зависит в общем случае как от конфигурации других границ области течения, так и от условий вниз по течению. Но в отдельных случаях те или другие условия практически не влияют. Например, если канал с плоскими параллельными стенками имеет достаточную протяженность, то при ламинарном течении можно на выходной границе задать профиль скорости, соответствующий точному решению уравнений Навье—Стокса (параболический профиль), и тем самым определить значение вихря и функции тока на этой границе.

Необходимо отметить, что выбор наиболее удачного способа задания граничных условий зависит не только от физических условий течения, но и от выбранной конечно-разностной схемы численного решения. Подробный обзор таких способов содержится в работе [18].

Рассмотрим теперь общую схему вычислений, основанную на уравнениях (8.56) и (8.57), условившись о следующих терминах. Узловые точки сетки будем называть внутренними узлами сеточной области, если все соседние узлы для них принадлежат области течения, включая ее границы. Если же хотя бы один из соседних узлов лежит за границей области течения, то данный узел будем называть граничным.

Полагая $n = 0$ (начальный момент времени t_0), из уравнения (8.56) находим $\Omega_{i,k}^{n+1} = \Omega_{i,k}^{1}$, так как значения всех остальных членов этого уравнения известны из начального условия. При этом пользуемся формулами (8.58), по которым вычисляем значения проекций скорости во всех узлах сетки для начального момента времени. Таким образом, определяем правую часть уравнения (8.57) для всех узловых точек сетки.

Запишем теперь уравнение (8.57) для всех расчетных узлов сетки. Получим, очевидно, столько уравнений, сколько есть неизвестных $\psi_{i,k}$. При этом значение функции ψ в любом граничном узле сетки принимаем равным ее значению в точке границы, ближайшей к данному граничному узлу. Иными словами, сносим в граничные узлы значения функции ψ из ближайших к ним точек границы области течения.

Полученную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\psi_{i,k}$ решаем одним из существующих методов. Часто применяют метод простой итерации, но, конечно, пригодны и другие приемы. Таким образом найдем поле значений функции для момента t_1, т. е. величины $\psi_{i,k}^{1}$. Далее по формулам (8.58), заменяя в них $n = 0$ на $n = 1$, определим значения проекций скорости u_x^1, u_y^1 для момента t_1. Теперь, обращаясь вновь к уравнению (8.56), заменим в нем все величины, относившиеся к моменту t_0, на величины, соответствующие моменту t_1. Тогда найдем уравнение для определения значения вихря в момент t_2, т. е. величины $\Omega_{i,k}^{2}$. Затем снова, используя систему (8.57), находим все $\psi_{i,k}^{2}$. Повторяя последовательность операций, получим численное описание неустановившегося течения через функции Ω и ψ. Одновременно находим поле скоростей.

Для описания поля давлений можно использовать исходные уравнения Навье—Стокса, которые в безразмерных переменных имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u_x;\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u_y,
\end{aligned}
\tag{8.61}
$$

где $P = p/(\rho U^2)$ — безразмерное давление.

Поскольку поле безразмерных скоростей u_x, u_y определено предыдущим расчетом, заменяя уравнения (8.61) их разностным аналогом, можно непосредственно вычислять значения P_{ij} в узлах сетки. Однако, как показал опыт расчетов ряда исследователей, такой путь решения задачи оказывается менее точным, чем другой, основанный на уравнении Пуассона для давления. Чтобы получить это уравнение, следует первое уравнение (8.61) продифференцировать по x, а второе — по y и сложить их. Тогда, учитывая уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

и выполнив надлежащую группировку членов левой части (8.61), получим уравнение Пуассона для давления:

$$\nabla^2 P=-2\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \tag{8.62}$$

или, вводя функцию тока, уравнение

$$\nabla^2 P=2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]. \tag{8.63}$$

Поскольку правая часть этого уравнения известна по результатам предыдущего расчета, то представив левую его часть разностным аналогом, можно применить один из известных методов численного решения. При этом следует иметь в виду, что граничные условия для давления будут иными, чем для функции тока. Так, на твердой границе задается $\partial P/\partial n|_{\text{ст}}$, где n — направление нормали к стенке (условие Неймана). В ряде случаев принимают $\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\text{ст}}=0$. На входных и выходных границах иногда можно с достаточным основанием принять $P = \text{const}$.

Здесь изложена лишь общая идея численного решения уравнений Навье—Стокса. При его реализации возникают частные вопросы, требующие более подробного рассмотрения. Одним из важнейших является вопрос об устойчивости и сходимости вычислительного процесса, который подробно изложен в работе [18].

8.11. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ. СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ И ЕГО ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

При обтекании вязкой жидкостью неподвижных твердых поверхностей распределение скоростей всегда неравномерное, так как помимо вытесняющего влияния на жидкость твердая поверхность оказывает еще тормозящее действие, являющееся следствием прилипания к ней жидких частиц. При малых числах Рейнольдса переход от нулевых скоростей на стенке к их конечным значениям может происходить постепенно так, что область тормозящего влияния стенки оказывается сравнимой со всей областью течения. Рассчитать такое течение можно, используя полные уравнения Навье—Стокса (или уравнения Рейнольдса, если поток турбулентный), решение которых является непростой задачей. Однако при больших числах Рейнольдса течение приобретает некоторые особенности, позволяющие эту задачу упростить. Так, по мере возрастания Re область вблизи стенки, где происходит интенсивное нарастание скоростей, становится все более узкой; в этой области сосредоточивается основное влияние вязкости: в ней локализуется интенсивное вихреобразование, а за ее пределами поток оказывается слабозавихренным и может приближенно считаться потенциальным.

Такая структура течения при больших числах Рейнольдса позволяет разбить всю область течения на две части:

а) пристенный пограничный слой (*ПС* на рис. 8.17), для которого характерны значительные градиенты скорости и интенсивное вихреобразование;

б) внешний поток (*ВП* на рис. 8.17), завихренность которого относительно мала, пренебрегая ею, поток можно считать потенциальным.

Поскольку проявление вязкости во внешнем потоке мало, неравномерность распределения скоростей в нем обусловлена, так же как и в идеальной жидкости, только вытесняющим действием обтекаемых тел. Чаще всего течение во внешнем потоке является турбулентным, так как числа Re велики. Однако в пограничном слое ввиду резкого падения скоростей при приближении к стенке

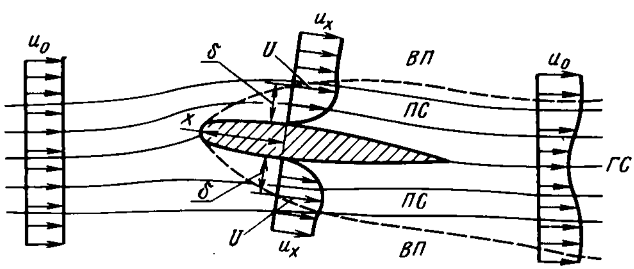


Рис. 8.17. Схема течения с образованием пристенного пограничного слоя (*ПС*) и гидродинамического следа (*ГС*)

режим течения может быть или ламинарным, или турбулентным. Поэтому различают ламинарный и турбулентный пограничные слои, методы расчета каждого из которых существенно различны. В этой главе рассмотрим только ламинарный пограничный слой, теория которого основана на упрощенных уравнениях Навье—Стокса. Чтобы подойти к обоснованию предпосылок, позволяющих произвести эти упрощения, рассмотрим типичные случаи образования пограничного слоя.

При обтекании тела практически безграничным потоком (внешняя задача) пограничный слой образуется, начиная от передней кромки (носика) тела. На рис. 8.17 штриховой линией показана условная граница пограничного слоя, т. е. такое расстояние от твердой поверхности, на котором скорость течения в пограничном слое отличается от скорости внешнего (потенциального) потока на заданную малую величину (например, на 1 %; 0,5 %). В пределах пограничного слоя скорости изменяются очень резко, поскольку толщина δ пограничного слоя в данном сечении невелика по сравнению с расстоянием x от точки его образования (см. рис. 8.17 и 8.19). Вниз по течению толщина пограничного слоя возрастает, однако, как показывает опыт, малость отношения δ/x сохраняется на всей длине обтекаемого тела [это справедливо, если не возникает отрывов (см. ниже)].

В данном случае, наряду с пристенным пограничным слоем, образуется пограничный слой другого типа — гидродинамический (или аэродинамический) след *ГС*. Это область за обтекаемым телом, где еще заметно сохраняется неравномерное распределение скоростей, вызванное тормозящим влиянием твердой поверхности. По мере удаления от тела вниз по течению благодаря действию сил вязкости скорости выравниваются и границы между гидродинамическим следом и внешним потоком расширяются.

При течении жидкости в канале, трубе или русле (внутренняя задача) пограничный слой образуется на начальном участке, где формируется эпюра скорости (см. рис. 6.16). Здесь у каждой из стенок возникает пограничный слой, толщина которого недостаточна для заполнения всего сечения канала; в центральной его части сохраняется равномерное распределение скоростей. Только в конце начального участка $l_{нач}$ благодаря увеличению толщины δ пограничного слоя он заполняет все сечение, и ниже по течению в потоке уже невозможно выделить пограничный слой.

Еще один тип пограничного слоя имеет место при истечении струи жидкости из сопла или отверстия в безграничную среду той же плотности и вязкости (рис. 8.18). На некотором участке $l_{нач}$, называемом начальным, сохраняется равномерное распределение скоростей, такое же, как на выходе из сопла. Благодаря действию сил вязкости все более широкая область захватывается струей и в окрестности ее оси образуется неравномерное распределение скоростей, характерное для струйного пограничного слоя. Если условиться считать его границей такое расстояние от оси, на кото-

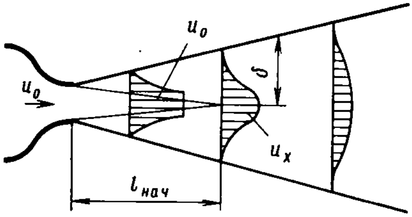


Рис. 8.18. Струйный пограничной слой (СПС)

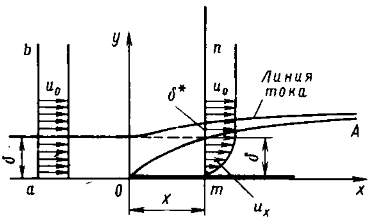


Рис. 8.19. Отклонение линий тока вблизи плоской пластины вследствие образования пограничного слоя

ром скорость близка к нулю (например, составляет 1 % от скорости на оси струи), то можно определить область струйного пограничного слоя.

Важно подчеркнуть, что приближение скорости в пограничном слое к скорости внешнего потока имеет асимптотический характер и, строго говоря, конечной толщины пограничного слоя не существует. Однако одной из основных специфических особенностей течения в пограничном слое является то, что уже на относительно малом расстоянии δ от твердой стенки разница этих скоростей столь невелика, что ею можно с достаточной точностью пренебречь. Но все же определяемая условно толщина δ пограничного слоя будет зависеть от той точности, которую назначаем для равенства скорости пограничного слоя и скорости внешнего потока на их общей границе. Поэтому в современной теории пограничного слоя чаще всего пользуются понятиями толщины вытеснения δ^* и толщины потери импульса δ^{**}, которые косвенным образом характеризуют поперечный размер пограничного слоя, но определяются более точно, чем толщина δ слоя. Для пояснения первого из этих понятий рассмотрим схему обтекания невозмущенным потоком вязкой жидкости плоской пластины, поставленной параллельно вектору скорости потока (рис. 8.19).

Пусть граница пограничного слоя OA определяется его толщиной δ, выбранной условно, как указано выше. Линии тока невозмущенного потока перед пластиной ($x < 0$) представляют собой параллельные пластине прямые, однако над пластиной ($x > 0$) они должны отклоняться. Действительно, поскольку в сечении mn, где толщина пограничного слоя δ, скорости u_x всюду меньше, чем скорость u_0 невозмущенного потока, расход жидкости через это сечение будет меньше, чем через сечение ab того же размера δ, но проведенное в невозмущенном потоке. Поэтому линия тока над пластиной, чтобы пропустить расход $u_0\delta$, должна отклониться на некоторую величину δ^*. Тогда уравнение баланса расходов для сечений ab и mn запишем в виде

$$u_0\delta = u_0\delta^* + \int_0^\delta u_x dy.$$

Здесь слагаемое $u_0\delta^*$ выражает расход через сечение высотой δ^*, в котором продольная (вдоль оси x) составляющая скорости практически равна u_0.

Так как $\delta = \int\limits_0^\delta dy$, из последнего уравнения можно определить толщину вытеснения

$$\delta^* = \frac{1}{u_0}\int\limits_0^\delta (u_0 - u_x)\,dy = \int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy. \qquad (8.64)$$

Из вывода этой формулы видно, что толщина вытеснения δ^* представляет собой отклонение линий тока вязкой жидкости от линий тока идеальной жидкости, которое вызвано тормозящим действием твердой поверхности (т. е. образованием пограничного слоя). Важно заметить, что величина δ^* практически не зависит от точности определения δ, так как начиная с некоторых значений расстояния от стенки $u_x \approx u_0$. Рассматривая асимптотический пограничный слой, что ближе к истинной картине течения, можно для верхнего предела интеграла (8.64) принять $\delta = \infty$. Поэтому иногда применяют следующую форму записи:

$$\delta^* = \int\limits_0^{\infty,\delta} \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy.$$

Если вместо асимптотического пограничного слоя принята модель слоя конечной толщины, то, как видно из выражения (8.64), связь между величинами δ и δ^* можно установить, если известно распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое.

Обратим внимание на то, что отклонение линий тока пограничным слоем обусловливает двумерный характер течения даже в простейшем случае обтекания бесконечно тонкой пластины. Поэтому при описании движения необходимо учитывать наличие в пограничном слое двух проекций скорости u_x и u_y (для плоской задачи).

Хотя понятие толщины вытеснения пояснено на частном примере обтекания пластины, оно сохраняет свой смысл и для обтекания других поверхностей.

8.12. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Плоское ламинарное течение описывается системой уравнений

$$\begin{gathered} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) = u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) = u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}; \qquad (8.65) \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \end{gathered}$$

Исключим прежде всего из рассмотрения массовые силы. Если из их числа действует только сила тяжести, то это можно сделать, представив давление p как сумму гидростатического и некоторого избыточного над ним давления:

$$p = (p_0 + \rho g h) + p_{и},$$

где h — расстояние, отсчитываемое по вертикали вниз от плоскости отсчета с давлением p_0 (рис. 8.20).

При произвольном направлении осей x и y

$$F_x = -g \sin\alpha = g\frac{\partial h}{\partial x}; \quad F_y = -g\cos\alpha = g\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Тогда

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{и}}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{и}}{\partial x};$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{и}}{\partial g}.$$

Поэтому в дальнейшем в уравнениях движения (8.65) не будем учитывать проекции массовых сил, подразумевая под давлением в тех случаях, когда это существенно, избыточное давление над гидростатическим. Но в большинстве случаев влиянием массовых сил при расчетах пограничного слоя можно пренебречь.

Дальнейшие упрощения уравнений (8.65) можно произвести, не учитывая малые члены. При этом основной исходной предпосылкой является допущение, что вязкостные и инерционные члены имеют один и тот же порядок малости. Если бы мы пренебрегли инерционными членами, то получили бы уравнения ползущего течения, пригодные только при малых числах Рейнольдса. Если же полностью отбросить вязкостные члены, то получим уравнения идеальной жидкости, решения которых не будут удовлетворять граничным условиям на твердых поверхностях (условиям прилипания). Поэтому, стремясь получить уравнения, справедливые для пограничного ламинарного слоя при больших числах Рейнольдса, необходимо в них учитывать как вязкостные, так и инерционные члены. Произведем оценку их порядка, принимая во внимание, что относительная толщина пограничного слоя δ/x является малой величиной и, следовательно, $u_y \ll u_x$. Введем следующие обозначения (рис. 8.21): u_x, u_y — проекции скорости; $U = u_x|_{y=\delta}$ — продольная составляющая скорости на границе пограничного слоя; l — характерный продольный размер (например, хорда обтекаемого профиля); δ — толщина пограничного слоя. Сразу можно опеределить порядок основных величин: $x \sim l$, $y \sim \delta$, $u_x \sim U$. Порядок производных, входящих в систему (8.65), определим, если учтем, что при изменении, например, про-

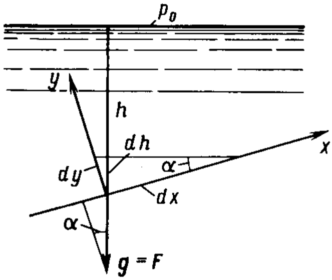


Рис. 8.20. Схема для исключения массовых сил из уравнения пограничного слоя

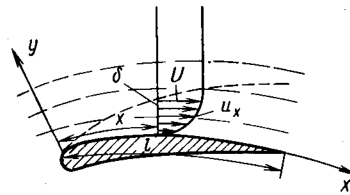


Рис. 8.21. Параметры пограничного слоя

екции u_x от 0 до U переменная y изменяется от 0 до δ. Поэтому производная $\partial u_x/\partial y$ будет иметь порядок U/δ. Короче,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U}{l}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta}; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{U}{l^2}; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2}.$$

Порядок проекции u_y определим из соотношения

$$u_y\big|_{y=\delta} = \int_0^\delta \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = -\int_0^\delta \frac{\partial u_x}{\partial x} dy \sim \frac{U}{l}\delta.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \sim \frac{U\delta}{l^2}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \sim \frac{U}{l};$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \sim \frac{U\delta}{l^3}; \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U}{l\delta}.$$

Из этих оценочных соотношений вытекает, что оба конвективных члена первого уравнения (8.65) имеют один и тот же порядок U^2/l, тогда как первый вязкостный член мал по сравнению со вторым, поскольку

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \sim \frac{\delta^2}{l^2}.$$

Учитывая предпосылку об одинаковом порядке вязкостных и инерционных членов, можно в первом уравнении системы (8.65) пренебречь только членом $\partial^2 u_x/\partial x^2$, после чего оно примет вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Заметим, что порядок вязкостных членов зависит от вязкости и составляет $\nu U/\delta^2$, а порядок инерционных членов есть U^2/l. На основании указанной предпосылки $\nu U/\delta^2 \sim U^2/l$ или $\nu/\delta^2 = CU/l$, где C — постоянная. Отсюда следует, что комбинация

$U\delta^2/l$ имеет порядок кинематического коэффициента вязкости ν. Кроме того,

$$\delta = \text{const}\sqrt{\nu l/U} \text{ или } \frac{\delta}{l} = \frac{\text{const}}{\sqrt{Ul/\nu}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Таким образом, исходная предпосылка о малости относительной толщины пограничного слоя δ/l будет выполняться тем точнее, чем больше число $\text{Re} = Ul/\nu$.

Оценивая порядок членов так же, как и для первого уравнения, убеждаемся, что оба инерционных члена второго уравнения системы (8.65) имеют порядок $U^2\delta/l^2$, а первым вязкостным членом можно пренебречь по сравнению со вторым. Принимая во внимание, что $\nu \sim U\delta^2/l$, находим $\nu\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U^2\delta}{l^2}$, т. е. остающийся вязкостный член того же порядка, что и инерционные. Следовательно, член $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ второго уравнения имеет порядок $U^2\delta/l^2$. Разность давлений на границе $p|_{y=\delta}$ и на стенке $p|_{y=0}$, очевидно, является максимальной для данного сечения слоя и имеет порядок

$$p|_{y=\delta} - p|_{y=0} = \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{\text{ср}}\delta \sim \frac{U^2\delta^2}{l},$$

где $(\partial p/\partial y)_{\text{ср}}$ — среднее по толщине δ значение $\partial p/\partial y$, т. е. является весьма малой величиной. Поэтому, как правило, в расчетах пограничного слоя пренебрегают изменением давления по его толщине, полагая $\partial p/\partial y \approx 0$. Отсюда следует, что $p = p(x)$. Этим исчерпывается результат, который можно получить из второго уравнения системы (8.65).

Для описания течения в плоском ламинарном пограничном слое располагаем системой уравнений

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \tag{8.66}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Эта система была предложена Л. Прандтлем в 1904 г. и является исходной для теории, получившей в наше время глубокое и всестороннее развитие. Система (8.66) является незамкнутой, поскольку содержит три неизвестных функции u_x, u_y, p. Кроме того, граничные условия, без которых нельзя получить определенного решения, содержат еще две заранее неизвестные величины:

$$u_x = u_y = 0 \text{ при } y = 0; \quad u_x = U \text{ при } y = \delta. \tag{8.67}$$

Так как внешний поток ($y \geqslant \delta$) предполагается безвихревым, для границы пограничного слоя можно применить уравнение Бернулли в виде

$$p + \rho \frac{u_{\text{гр}}^2}{2} = p + \frac{\rho}{2}(U^2 + u_{\text{гр}}^2) \approx p + \frac{\rho U^2}{2} = C.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}. \tag{8.68}$$

Теперь в системе (8.66) можно исключить давление, выразив его через функцию $U(x)$, которая, кроме того, входит в граничные условия (8.67):

$$\begin{gathered} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{8.69}$$

Дальнейшего уменьшения числа неизвестных можно достичь, если ввести в рассмотрение функцию тока, для которой

$$u_x = \partial\psi/\partial y; \quad u_y = \partial\psi/\partial x.$$

Уравнение неразрывности этой функцией удовлетворяется тождественно, а первое из уравнений системы (8.69) приводится к виду

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{8.70}$$

Граничными условиями для этого уравнения служат соотношения

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = U \text{ при } y = \delta. \tag{8.71}$$

В случае асимптотического пограничного слоя второе граничное условие имеет вид

$$\partial\psi/\partial y = U_\infty \text{ при } y \to \infty.$$

8.13. ОБЩАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА И СПОСОБЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Основной прикладной задачей расчета пограничного слоя является нахождение закона распределения скоростей в слое и касательных напряжений на твердой поверхности. Знание скоростей необходимо для решения вопросов теплопередачи, определения точки отрыва и решения прикладных (например, конструкторских) задач. Касательными напряжениями на стенке определяется сила трения, развивающаяся на ней. При отыскании закона распределения скоростей и касательных напряжений необходимо вычислить толщину δ пограничного слоя.

Можно сказать, что общая задача расчета пограничного слоя сводится к нахождению решения системы (8.69) или уравнения (8.70), удовлетворяющего граничным условиям соответственно (8.67) или (8.71).

Если найден закон распределения скоростей, то касательное напряжение на стенке определяют по формуле

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0}.$$

Сила сопротивления трения, развивающаяся на обтекаемом цилиндрическом теле (рис. 8.22), в расчете на единицу длины образующей равна

$$F_\mu = \int_0^{l_x} \tau_0 \cos\theta\, dx = \mu \int_0^{l_s} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0} ds.$$

Верхний предел интегрирования зависит от характера обтекания тела. Если ламинарный пограничный слой распространяется на всю поверхность, то l_x — продольный размер тела вдоль оси x; если имеет место отрыв, то l_x определяет точку отрыва; если в пределах поверхности имеет место переход к турбулентному режиму, то l_x определяют по зависимости для турбулентного слоя.

Таким образом, для вычисления силы трения достаточно знать значение $\partial u_x/\partial y$ на твердой стенке. Однако эту величину нельзя найти без решения общей задачи, сформулированной выше.

Остановимся прежде всего на способах определения продольной составляющей скорости $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя.

Для отыскания этой функции в первом приближении применяют следующий прием. Не учитывая наличие пограничного слоя, решают задачу о потенциальном обтекании данной твердой поверхности идеальной жидкостью. При этом получают значения скорости на поверхности, а так как толщина пограничного слоя мала, считают, что эти же значения скорость имеет и на его внешней границе. Затем решают систему (8.69) или уравнение (8.70). Простейшим случаем, для которого найдено точное решение уравнения (8.70) функции тока, является обтекание плоской полубесконечной пластины, поставленной по потоку (рис. 8.23). При этом можно допустить, что $U = u_0 = \text{const}$. Действительно, при обтекании бесконечно тонкой пластины идеальной жидкостью равномерный поток не испытывает никакого возмущения, поскольку отрезок любой линии тока можно заменить «телом» пластины.

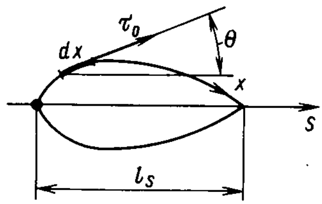


Рис. 8.22. Схема для определения силы сопротивления трения при обтекании тела

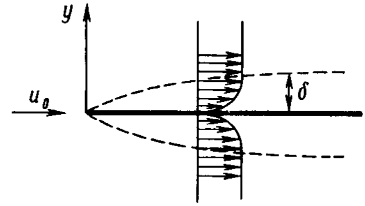


Рис. 8.23. Пограничный слой на полубесконечной пластине

В этом случае, так как $dU/dx = 0$, уравнение (8.70) можно упростить и записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{8.72}$$

при граничных условиях (8.71).

Заметим, что попытки найти точное решение для пластины конечной длины l не увенчались успехом из-за усложнения граничных условий, которые должны быть различными для $x < l$ и $x > l$.

Решение для полубесконечной пластины, найденное Г. Блязиусом в 1908 г., основано на введении безразмерных переменных и предположении, что профили продольной составляющей скорости u_x в различных сечениях x пограничного слоя афинно подобны между собой, т. е. могут быть совмещены друг с другом, если для переменных выбрать подходящие масштабы (решения, обладающие этим свойством, называют автомодельными). Такими масштабами являются: u_0 для u_x и δ для y. Закон распределения скорости ищут в виде

$$u_x/u_0 = f\,(y/\delta), \tag{8.73}$$

где вид функции f не зависит от x.

В рассматриваемой задаче нет характерного линейного размера, но из оценок, выполненных в п. 8.12, ясно, что $\delta \sim \sqrt{\nu x/u_0}$. Поэтому вместо безразмерной координаты y/δ можно ввести

$$\eta = y/\sqrt{\nu x/u_0},$$

т. е. находить $u_x = u_0 f\,(\eta)$. Учитывая, что $u_x = \partial\psi/\partial y$ и $u_y = -\partial\psi/\partial x$ и можно принять $\psi\,(x, 0) = 0$, получаем функцию тока

$$\psi = \int_0^y u_x dy = u_0\int_0^y f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/u_0}}\right)dy = u_0\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}\int_0^\eta f\,(\eta)\,d\eta =$$

$$= \sqrt{u_0\nu x}\,\varphi\,(\eta),$$

где $\varphi\,(\eta) = \int\limits^{\eta} f\,(\eta)\,d\eta$.

5. Значения φ, φ′, φ″, вычисленные Л. Хоуартом

η	φ	$\varphi' = \frac{u_x}{u_0}$	φ''	η	φ	$\varphi' = \frac{u_x}{u_0}$	φ''
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,8826	0,89269	0,02948
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,2	5,47926	0,99996	0,00013
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
4,4	2,69238	0,97587	0,03897	8,8	7,07923	1,00000	0,00000

Дифференцируя это выражение, находим все производные, входящие в (8.72):

$$u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_0\nu}{x}}\,[\eta\varphi'(\eta) - \varphi(\eta)];$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{u_0^2}{\nu x}\varphi'''(\eta); \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{u_0}{x}\eta\varphi''(\eta).$$

Подставляя эти выражения производных в формулу (8.72) и производя необходимые сокращения, приходим к уравнению для определения функции $\varphi(\eta)$:

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0. \tag{8.74}$$

Это обыкновенное нелинейное уравнение третьего порядка было проинтегрировано Г. Блязиусом с помощью степенных рядов при следующих граничных условиях: $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ при $\eta = 0$; $\varphi' = 1$ при $y = \infty$. Первое из этих условий выражает равенство нулю на поверхности пластины функции тока ψ и скорости u_x. При этом удовлетворяется и условие $u_y|_{y=0} = 0$. Второе из граничных условий означает, что $u_x \to u_0$ при $y \to \infty$. После Г. Блязиуса уравнение (8.74) было более точно проинтегрировано численными методами. В табл. 5 приведены значения φ, φ' и φ'', вычисленные Л. Хоуартом. С помощью этой таблицы легко найти касательное напряжение на пластине и рассчитать полную силу трения. Поскольку

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\sqrt{u_0^3}}{\sqrt{\nu x}} \varphi''(0),$$

где согласно табл. 5 $\varphi''(0) = 0{,}332$, получим формулу Блязиуса для касательного напряжения на пластине

$$\tau_0 = 0{,}332\rho \sqrt{\frac{\nu u_0^3}{x}}. \tag{8.75}$$

Обычно в расчетах вместо касательного напряжения используют коэффициент

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2/2},$$

для которого из выражения (8.75) для ламинарного пограничного слоя получается формула

$$c_\mu = \frac{0{,}664}{\sqrt{u_0 x/\nu}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{8.76}$$

Силу трения, развивающуюся на смоченном с двух сторон участке пластины длиной l, получим, интегрируя элементарные силы трения $\tau_0 dx$:

$$F_\mu = 2 \int_0^l \tau_0 \, dx = 2 \cdot 0{,}332\rho \sqrt{\nu u_0^3} \int_0^l x^{-1/2} \, dx = 1{,}328\rho \sqrt{\nu l u_0^3}.$$

Коэффициент силы трения, определяемый отношением

$$C_\mu = \frac{F_\mu}{S\rho u_0^2/2},$$

где $S = 2l \cdot 1$, выразим формулой

$$C_\mu = \frac{1{,}328}{\sqrt{u_0 l/\nu}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}}. \tag{8.77}$$

Экспериментальная проверка теории Блязиуса выполнена несколькими авторами и различными способами. На рис. 8.24 приведено сопоставление теоретической кривой Г. Блязиуса $u_x/u_0 = \varphi'(\eta)$ (сплошная линия) с весьма точными измерениями И. Никурадзе, проведенными при различных числах Рейнольдса. Можно констатировать практически полное совпадение теоретических и экспериментальных результатов. После обработки опытных значений коэффициентов трения, найденных И. Никурадзе двумя разными способами, получены формулы $C_\mu = 1{,}315/\sqrt{\mathrm{Re}_l}$ и $C_\mu = 1{,}319/\sqrt{\mathrm{Re}_l}$, что также подтверждает теорию.

Наряду с этим в изложенной теории есть детали, которые не согласуются с опытом. Так, из формулы (8.75) следует, что при

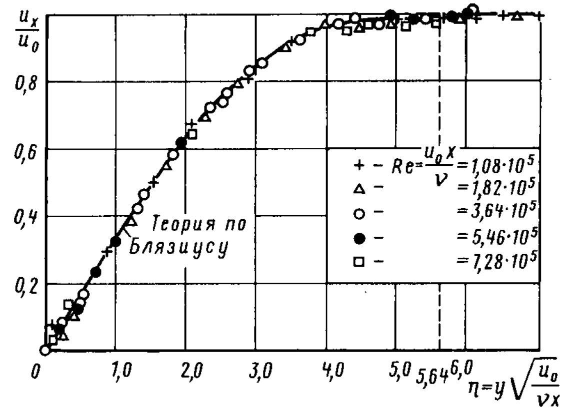


Рис. 8.24. Сопоставление рассчитанного по теории Блязиуса профиля скорости в пограничном слое на пластине с результатами опытов Никурадзе

приближении к переднему краю пластины ($x = 0$) касательное напряжение τ_0 стремится к бесконечности, тогда как при всех $x < 0$, очевидно, должно быть $\tau_0 = 0$. Следовательно, на переднем крае пластины функция $\tau_0(x)$ имеет разрыв. Такой результат теории связан с тем, что вблизи переднего края нарушается основная предпосылка $\partial u_x/\partial x \ll \partial u_x/\partial y$ и уравнения Прандтля к этой области течения неприменимы. Следует также иметь в виду, что теория относится к полубесконечной пластине, и в случае применения полученных зависимостей к пластине конечной длины получаются различные распределения скоростей за пластиной. Существенно подчеркнуть, что теория пограничного слоя применима лишь при больших числах Рейнольдса, а потому нельзя пользоваться формулой Блязиуса для коэффициента трения при их небольших значениях, исчисляемых десятками или несколькими сотнями. Для этих случаев Го-Юн-хуаем получена уточненная формула

$$c_\mu = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} + \frac{4{,}18}{\mathrm{Re}},$$

хорошо подтверждаемая опытом при $\mathrm{Re} > 10$.

Теоретическое решение Блязиуса позволяет вычислить величины, характеризующие толщину пограничного слоя. Если определить условно величину δ как толщину слоя, на границе которого скорость u_x отличается от u_0 не более чем на 1 %, то согласно табл. 5 $\eta = 5$ или

$$\delta = 5\sqrt{\nu x/u_0}.$$

Если точность совпадения u_x и u_0 повысить до 0,5 %, то коэффициент в этой формуле будет 5,4 и т. д. Для относительной толщины слоя получим зависимость

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{u_0 x/\nu}} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \tag{8.78}$$

которая показывает, что относительная толщина ламинарного слоя обратно пропорциональна корню квадратному из числа Рейнольдса. Эта величина может быть малой, очевидно, только при достаточно больших Re.

Толщину δ^* вытеснения можно вычислить по формуле

$$\delta^* = \int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy = \int\limits_0^\delta [1 - \varphi'(\eta)] \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} [\eta - \varphi(\eta)] \Big|_0^5 .$$

Используя данные табл. 5, получаем

$$\delta^* = 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} .$$

В дальнейшем нам придется пользоваться еще одной величиной, характеризующей толщину пограничного слоя, называемой толщиной потери импульса и определяемой уравнением

$$\delta^{**} = \int\limits_0^{\infty,\,\delta} \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy. \qquad (8.79)$$

Используя решение Г. Блязиуса и учитывая, что $U = u_0$, находим

$$\delta^{**} = 0{,}664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} . \qquad (8.80)$$

Выше рассмотрено решение уравнений ламинарного пограничного слоя для простейшего случая, когда $dU/dx = 0$, т. е. $dp/dx = 0$. В общем случае обтекания тел с продольным перепадом давления ($dp/dx \neq 0$) задача существенно усложняется. В инженерных расчетах преимущественное применение получили методы, основанные не на уравнениях Л. Прандтля, а на интегральных соотношениях, которые можно получить или специальными преобразованиями этих уравнений, или путем непосредственного применения к пограничному слою законов количества движения и сохранения энергии.

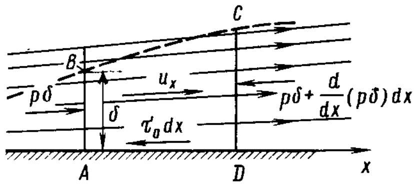
8.14. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим элементарный объем жидкости, выделенный в пограничном слое двумя нормальными к стенке сечениями AB и CD и участком его границы BC (рис. 8.25). Применим к массе жидкости в этом объеме уравнение количества движения, которое имеет вид (см. п. 5.9)

$$\int\limits_S \rho u_n \mathbf{u}\, dS = \mathbf{P}_{\text{пов}},$$

где $P_{\text{пов}}$ — главный вектор поверхностных сил [массовые силы исключены (см. п. 8.12)].

Рис. 8.25. Схема к выводу уравнения импульсов для пограничного слоя



При определении потока количества движения через контрольную поверхность $ABCD$ учтем, что на участке AB $u_n = -u_x$, на CD $u_n = u_x$, а на BC можно принять $u_x = U$. Тогда в проекции на ось x

$$\int\limits_{S_{ABCD}} \rho u_n u_x \, dS = -\int\limits_0^\delta \rho u_x^2 \, dy + \int\limits_0^\delta \rho u_x^2 \, dy + \frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^\delta \rho u_x^2 \, dy\right) dx + U \, dM_{BC},$$

где dM_{BC} — масса жидкости, проносимой в единицу времени через участок BC.

Так как движение установившееся и накопления массы в выделенном объеме $ABCD$ не происходит, масса жидкости, проходящая через сечение CD, может отличаться от массы жидкости, проходящей через сечение AB только за счет ее притока через границу BC. Следовательно,

$$dM_{BC} = -\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^\delta \rho u_x \, dy\right) dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_{ABCD}} \rho u_n u_x \, dy = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^\delta \rho u_x^2 \, dy\right) dx - U \frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^\delta \rho u_x \, dy\right) dx.$$

При определении проекции на ось x главного вектора сил давления примем, что в сечении AB давление равно p, и значит, сила давления равна $p\delta$. Тогда в сечении CD она будет

$$p\delta + \frac{d}{dx}(p\delta)\, dx = p\delta + p\frac{d\delta}{dx}\, dx + \delta \frac{dp}{dx}\, dx.$$

На участке BC давление примем средним между p и $p + (dp/dx)\, dx$. Тогда проекция на ось x силы давления, действующей на этом участке границы пограничного слоя, будет равна

$$\left(p + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx\right)\frac{d\delta}{dx} \approx p\frac{d\delta}{dx}dx.$$

Учтем также действующую на участке AD силу трения $\tau_0 dx$. Тогда проекция на ось x суммы всех поверхностных сил будет иметь вид

$$p\delta - \left(p\delta + p\frac{d\delta}{dx}dx + \delta\frac{dp}{dx}dx\right) + p\frac{d\delta}{dx}dx - \tau_0\, dx = -\delta\frac{dp}{dx}dx - \tau_0\, dx,$$

а уравнение количества движения

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x^2\,dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x\,dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0. \qquad (8.81)$$

Выражение (8.81) известно как интегральное соотношение Кармана или уравнение импульсов для плоского пограничного слоя.

Давление в соотношении (8.81) можно исключить, использовав уравнение Бернулли для внешней границы слоя. Тогда уравнение (8.81) примет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x^2\,dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x\,dy = \rho\delta U\frac{dU}{dx} - \tau_0. \qquad (8.82)$$

Некоторым недостатком полученных форм интегрального соотношения является наличие в них конечной толщины пограничного слоя δ, которую, как указывалось, определяют лишь условно. Чтобы получить форму, пригодную для асимптотического слоя, выполним следующие преобразования:

$$\tau_0 = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x^2\,dy + U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x\,dy + \rho U\frac{dU}{dx}\int_0^\delta dy =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(U\int_0^\delta \rho u_x\,dy\right) - \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho u_x\,dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho U\,dy -$$

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x^2\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x(U-u_x)\,dx + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho(U-u_x)\,dy.$$

Введя вместо интегралов величины δ^* и δ^{**} согласно формулам (8.64) и (8.79), приведем последнее уравнение к виду

$$\frac{d}{dx}(\rho U^2\delta^{**}) + \frac{dU}{dx}(\rho U\delta^*) = \tau_0.$$

Раскрыв производную произведения и разделив все члены на ρU^2, получим безразмерное уравнение импульсов

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{dU}{dx}\frac{\delta^{**}}{U}\left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \qquad (8.83)$$

Введя обозначения $H = \delta^*/\delta^{**}$ и $C_f = 2\tau_0/(\rho U^2)$, запишем это уравнение в форме

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{dU}{dx}\frac{\delta^{**}}{U}(2 + H) = \frac{C_f}{2}. \qquad (8.83')$$

Эти формы уравнения применимы как для слоя конечной толщины, так и для асимптотического слоя.

Наряду с уравнением импульсов существуют и другие интегральные соотношения для пограничного слоя. Так, акад. Л. С. Лейбензоном получено интегральное соотношение, выражающее баланс механической энергии в пограничном слое; проф. В.В. Голубевым дано обобщенное интегральное соотношение, из которого уравнения импульсов и энергии получаются как частные случаи. Дополнительные интегральные соотношения необходимы для построения уточненных методов расчета пограничного слоя.

Скорость внешнего потока $U(x)$, входящая в уравнение импульсов, при расчете пограничного слоя считается известной. Ее принимают равной той скорости, какую имел бы безвихревой поток идеальной жидкости в данной точке обтекаемой поверхности, если бы пограничного слоя не было. Поэтому расчету пограничного слоя должно предшествовать решение задачи обтекания данной поверхности безвихревым потоком. Но в некоторых случаях для упрощения задачи прибегают к аппроксимации скорости внешнего потока какой-либо простой функцией, например степенной.

В частном случае при обтекании пластины, поставленной вдоль потока, уравнение (8.83) существенно упрощается, так как $U = u_0 = \text{const}$ и $dU/dx = 0$. При этом

$$d\delta^{**}/dx = \tau_0/(\rho u_0^2). \qquad (8.84)$$

Сила трения, развивающаяся на обеих сторонах пластины длиной l, получится интегрированием выражения (8.84):

$$F_\mu = 2\int_0^l \tau_0\,dx = 2\int_0^\delta \rho u_0^2 \frac{d\delta^{**}}{dx}\,dx = 2\rho u_0^2 \delta_l^{**}, \qquad (8.85)$$

где δ_l^{**} — толщина потери импульса на конце пластины.

Это равенство можно рассматривать как уравнение изменения (потери, обусловленной силой трения) количества движения (импульса) $\rho u_0^2 \delta_l^{**}$, пропорционального величине δ^{**}. Этим объясняется термин «толщина потери импульса».

Заметим, что изложенный вывод уравнения (8.83) не содержит допущений о режиме движения в пограничном слое. Поэтому, понимая под u_x осредненное значение местной скорости, это уравнение можно применять для описания как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя.

8.15. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение импульсов, наряду с функцией $U(x)$, о способе определения которой было сказано, содержит неизвестные u_x, δ, τ_0 [форма (8.82)] или δ^*, δ^{**}, τ_0 [форма (8.83)]. Для ламинарного слоя касательное напряжение τ_0 определяется законом вязкого трения и потому из числа неизвестных исключается. Одна из двух оставшихся функций должна быть задана.

Рассмотрим вначале пограничный слой конечной толщины. Для него из двух функций $u_x(x, y)$ и $\delta(x)$ удобнее задать первую. Для этого, например, можно выбрать полином

$$\frac{u_x}{U} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 + a_4(x)y^4 + \ldots + a_n(x)y^n. \tag{8.86}$$

Число членов полинома определяется числом достоверных граничных условий, которые можно использовать для определения коэффициентов a_i. Такими являются следующие условия.

1. На твердой поверхности $u_x = 0$ при $y = 0$ (условие прилипания).

2. На внешней границе пограничного слоя

$$u_x = U \text{ при } y = \delta. \tag{8.87}$$

3. Примем, что на границе при $y = \delta$ профиль скорости практически касается нормали к стенке, т. е.

$$\partial u_x/\partial y = 0 \text{ при } y = \delta. \tag{8.88}$$

4. Это условие можно получить непосредственно из первого уравнения Прандтля, учтя, что при $y = 0$ $u_x = 0$ и $u_y = 0$. Следовательно, при $y = 0$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0. \tag{8.89}$$

Выражая dp/dx через $U(x)$, с помощью уравнения Бернулли находим граничное условие при $y = 0$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}. \tag{8.90}$$

5. Приведенные граничные условия позволяют аппроксимировать профиль скорости полиномом третьей степени, в результате чего можно получить приближенное решение задачи [22]. Если допустить, что на внешней границе не только первая, но и вторая производная скорости u_x по нормали к стенке обращается в нуль, т. е. использовать пятое граничное условие в виде

$$\partial^2 u_x/\partial y^2 = 0 \text{ при } y = \delta,$$

то можно профиль скорости аппроксимировать полиномом четвертой степени. Такую аппроксимацию применил К. Польгаузен, давший в 1921 г. практический метод расчета ламинарного пограничного слоя на основе интегрального соотношения.

Вводя в выражение (8.86) указанные пять условий и вычислив коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, получим закон распределения скорости

$$\varphi = \frac{u_x}{U} = 2\eta(1 - \eta^2) + \eta^4 + \frac{\lambda}{6}\eta[1 - \eta(3 - 3\eta + \eta^2)], \tag{8.91}$$

где

$$\eta = \frac{y}{\delta}; \quad \lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}. \tag{8.92}$$

Из формулы (8.91) следует, что профили скорости в пограничном слое при их аппроксимации полиномом зависят от одного параметра $\lambda(x)$, определяющего форму профиля в каждом сечении и получившего название формпараметра.

Обратим внимание на то, что формпараметр согласно выражению (8.92) можно определить соотношением

$$\lambda = -\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right|_{\eta=0}. \tag{8.93}$$

Поскольку полученные формулы для распределения скорости содержат толщину δ пограничного слоя, следующим этапом расчета должно быть определение функции $\delta(x)$. Так как $U(x)$ считается известной, эта задача эквивалентна задаче отыскания функции $\lambda(x)$. Подставим выражение скорости u_x через полином (8.91) в соотношения (8.64) и (8.79), определяющие соответственно толщину вытеснения δ^* и толщину потери импульса δ^{**}. После вычисления интегралов получим

$$\delta^*/\delta = 0{,}3000 - 0{,}008333\lambda;$$

$$\delta^{**}/\delta = 0{,}1175 - 0{,}001058\lambda - 0{,}0001102\lambda^2.$$

Кроме того, используя формулу (8.91), вычислим касательное напряжение на стенке

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{\rho U^2}\mu\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\nu}{U}\frac{12+\lambda}{6\delta}.$$

Подставив полученные выражения δ^*, δ^{**} и τ_0 в уравнение импульсов (8.83) и выполнив необходимые преобразования, можно получить уравнение для определения формпараметра

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}g(\lambda) + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\Big/\frac{dU}{dx}\right)h(\lambda), \tag{8.94}$$

где $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — функции, определяемые равенствами

$$g(\lambda) = \frac{7257{,}6 - 1336{,}32\lambda + 39{,}92\lambda^2 + 0{,}8\lambda^3}{213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2};$$

$$h(\lambda) = \frac{213{,}12\lambda - 1{,}92\lambda^2 - 0{,}2\lambda^3}{213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2}.$$

Уравнение (8.94) является обыкновенным нелинейным уравнением первого порядка относительно функции $\lambda(x)$. Его решение в общем случае можно получить только численно, причем это связано с некоторыми вычислительными трудностями, обусловленными наличием особых точек $U = 0$ и $U' = 0$. Кроме того, изложенный метод Польгаузена оказался недостаточно точным для пограничных слоев с замедленным движением внешнего потока ($dU/dx < 0$). Для этих случаев разработаны более точные способы. Однако метод Польгаузена сохраняет до настоящего времени принципиальное значение; в нем была впервые показана возможность аппроксимировать профили скорости однопараметрическим семейством кривых, что используется и в современных, более совершенных методах. Кроме того, при наличии ускоренного или равномерного движения внешнего потока ($dU/dx \geqslant 0$) метод Польгаузена может давать практически удовлетворительные результаты.

Рассмотрим, например, обтекание плоской пластины, для которого имеется точное решение Блязиуса (см. п. 8.14). Поскольку в этом случае $U = u_0 = \text{const}$, $\lambda = 0$ и согласно полученным выше формулам

$$\delta^* = 0{,}3\delta; \quad \delta^{**} = 0{,}1175\delta; \quad \frac{\tau_0}{\rho u_0^2} = 2\frac{\nu}{u_0\delta},$$

Уравнение (8.83), принимает вид

$$0{,}1175\frac{d\delta}{dx} = 2\frac{\nu}{u_0\delta}.$$

В результате интегрирования получаем

$$\delta = 5{,}83\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}; \quad \tau_0 = 0{,}343\sqrt{\frac{\mu\rho u_0^3}{x}}. \tag{8.95}$$

Учитывая условность понятия толщины пограничного слоя, можно считать, что эти формулы достаточно близки точному решению Блязиуса. Соответствующие формулы можно получить для коэффициента силы трения.

Рассмотрим один из методов, основанный на аппроксимации профилей скорости однопараметрическим семейством кривых [13]. Учитывая условность определения толщины δ пограничного слоя, введем вместо нее толщину δ^{**} потери импульса. Семейство профилей скорости определяем в виде

$$\frac{u_x}{U} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}},\ f\right), \tag{8.96}$$

где f — видоизмененный формпараметр; по предположению он может быть определен так же, как и формпараметр λ, соотношением вида (8.93), т. е.

$$f = -\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2}\right|_{\eta_1=0}, \quad \text{где } \eta_1 = y/\delta^{**}.$$

Используя выражения (8.96) и (8.90), находим

$$f = -\frac{\delta^{**2}}{U}\left.\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\frac{\delta^{**2}}{U}\left(-\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}\right) = \frac{\delta^{**2}}{\nu}\frac{dU}{dx}. \tag{8.97}$$

Чтобы получить уравнение для определения формпараметра, аналогичное (8.94), покажем, что отношение δ^*/δ^{**} является функцией только формпараметра.

Можем написать

$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}},\ f\right)\right]dy = \delta^{**}\int_0^\infty [1 - \varphi(\eta_1,\ f)]\,d\eta_1.$$

Поскольку последний интеграл зависит только от формпараметра f, то и отношение

$$\delta^*/\delta^{**} = H(f) \tag{8.98}$$

является функцией только формпараметра.

Учтем также следующие соотношения:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho U^2} \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\nu}{U\delta^{**}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}\bigg|_{\eta_1=0} = \frac{\nu}{U\delta^{**}} \zeta(f), \tag{8.99}$$

где $\zeta = \varphi'(\eta_1)\big|_{\eta_1=0}$.

Подставляя выражения (8.98) и (8.99) в уравнение импульсов (8.83), получаем

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U}\delta^{**}(2+H) = \frac{\nu}{U\delta^{**}}\zeta.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$U\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^{**2}U'}{\nu}\frac{1}{U'}\right) + 2\frac{U'\delta^{**2}}{\nu}(2+H) = 2\zeta.$$

Учитывая выражение (8.97) формпараметра, получаем

$$U\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{U'}\right) = F(f), \tag{8.100}$$

где $F(f) = 2\,[\zeta - f(2+H)]$.

Вычисляя производную в левой части формулы (8.100), после упрощений находим дифференциальное уравнение формпараметра

$$\frac{df}{dx} = F\frac{U'}{U} + f\frac{U''}{U'}. \tag{8.101}$$

Таким образом, получено уравнение, определяющее формпараметр при задании профиля скорости однопараметрическим семейством кривых.

Н. Е. Кочин * и Л. Г. Лойцянский разработали приближенный метод решения этого уравнения, основанный на использовании точного частного решения дифференциальных уравнений пограничного слоя, соответствующего распределению скорости во внешнем потоке по степенному закону $U = cx^m$. Потенциальное течение с таким распределением скоростей вдоль контура тела возникает при обтекании клина с углом раствора $\pi\beta$, где $\beta = 2m/(m+1)$.

В этом случае, как показано Фолкнером и Скэн, профиль скорости в пограничном слое можно представить однопараметрическим семейством

$$u_x/U = \Phi(\xi, \beta),$$

* Николай Евграфович Кочин (1901—1944) — советский математик и механик, академик. Автор крупных работ по гидроаэромеханике, математике и геофизике.

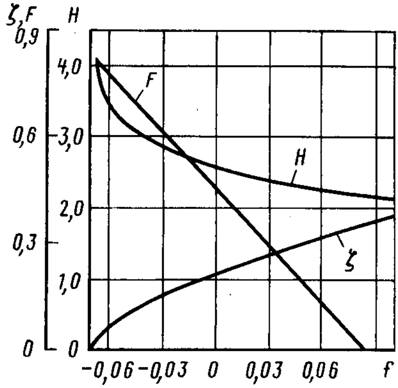


Рис. 8.26. Зависимости функций ζ, F и H от формпараметра f

где $\xi = y\sqrt{U/(\nu\beta)}$, причем функция $\Phi(\xi, \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^3\Phi}{d\xi^3} + \Phi\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \beta\left[\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right) - 1\right] \tag{8.102}$$

при граничных условиях $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$.

Н. Е. Кочин и Л. Г. Лойцянский показали, что формпараметр f, а значит, функции H, ζ и F [см. (8.98) и (8.99)] однозначно связаны с параметром β. Эти связи можно рассматривать как параметрическое задание функций $H(f)$, $\zeta(f)$ и $F(f)$. Путем численного интегрирования уравнения (8.102) при различных значениях β и использования указанных связей было получено табличное задание функций H, ζ, F (табл. 6). Графическое представление этих функций дано на рис. 8.26. Анализ кривых показывает, что график функции $F(f)$ весьма близок к прямой, соответствующей уравнению

$$F(f) = a - bf. \tag{8.103}$$

С учетом этого приближенного представления функции $F(f)$ уравнение (8.101) принимает вид

$$\frac{df}{dx} = a\frac{U'}{U} + \left(\frac{U''}{U'} - b\frac{U'}{U}\right)f. \tag{8.104}$$

Интеграл этого линейного уравнения можно получить в общем виде

$$f(x) = a\frac{U'}{U^b}\int U^{b-1}(x)\,dx + C\frac{U'}{U^b}.$$

6. Значения функций ζ, H, F

f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$	f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$
—0,0681	0,000	4,03	0,821	0,02	0,257	2,48	0,336
—0,06	0,064	3,35	0,772	0,03	0,274	2,43	0,283
—0,05	0,098	3,12	0,715	0,04	0,291	2,38	0,232
—0,04	0,130	2,96	0,658	0,05	0,307	2,34	0,180
—0,03	0,155	2,84	0,602	0,06	0,323	2,30	0,130
—0,02	0,178	2,74	0,548	0,07	0,338	2,26	0,078
—0,01	0,200	2,66	0,495	0,08	0,352	2,23	0,028
0,00	0,221	2,59	0,441	0,09	0,366	2,20	—0,023
0,01	0,240	2,53	0,388	0,10	0,380	2,18	—0,074

Если точка $x = 0$ совпадает с передней критической точкой обтекаемого тела, в которой скорость внешнего потока $U = 0$, то из условия конечности значения формпараметра f в этой точке получим $C = 0$ и решение будет иметь вид

$$f = a\frac{U'}{U^b}\int U^{b-1}(x)\,dx. \tag{8.105}$$

Поскольку из этого решения нельзя определить значение формпараметра в точке, где $U = 0$, то используют выражение (8.100) в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^{***}}{\nu}\right) = \frac{F}{U}.$$

В точке, где $U = 0$, для конечности производной необходимо, чтобы $F = 0$. Но из формулы (8.103) следует, что в этой точке

$$f\,|_{x=0} = a/b. \tag{8.106}$$

Таким образом, зная закон изменения скорости внешнего потока $U(x)$, по выражению (8.105) можно найти значение формпараметра для любого сечения пограничного слоя. Тогда толщину δ^{**} потери импульса определим по формуле

$$\delta^{**} = \sqrt{\nu f/U'}.$$

Найдя по табл. 6 значения функций H и ζ, можно вычислить

$$\delta^{*} = H(f)\,\delta^{**};\quad \tau_0 = \frac{\mu U}{\delta^{**}}\,\xi(f).$$

Таким образом определяют все параметры пограничного слоя.

На основе анализа кривой $F(f)$ Л. Г. Лойцянский рекомендует для расчетов следующие значения постоянных: $a = 0{,}45$; $b = 5{,}35$. Им отмечено, что использование других профилей скорости в пограничном слое мало влияет на почти линейную зависимость $F(f)$ и небольшие колебания в значениях постоянных a и b незначительно влияют на толщину потери импульса. Более всего различие в методах сказывается на определении касательного напряжения, особенно в области замедленного движения внешнего потока (диффузорная область течения).

Необходимо обратить внимание также на следующую особенность расчетов пограничного слоя. Функция $U(x)$ определяется методами теории потенциальных течений в предположении, что пограничный слой отсутствует, и затем значения этой функции переносятся на его внешнюю границу. Такой прием равносилен допущению, что ввиду малости толщины слоя он почти не изменяет потенциального потока, обтекающего данную поверхность. Но в ряде случаев такое предположение оказывается недостаточно точным. Образование пограничного слоя приводит к изменению закона для скорости потенциального потока, т. е. имеет место обратное влияние пограничного слоя. Оно должно учитываться в расчетах, особенно для течений в диффузорах, конфузорах, на начальных участках труб и каналов.

8.16. ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ И ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнения ламинарного пограничного слоя получены на основании допущения о малости его относительной толщины. Однако оно не оправдано, если возникает отрыв потока (см. гл. 6 и 7). Методы расчета, изложенные в п. 8.14, 8.15, можно использовать только для участков, расположенных выше точки отрыва.

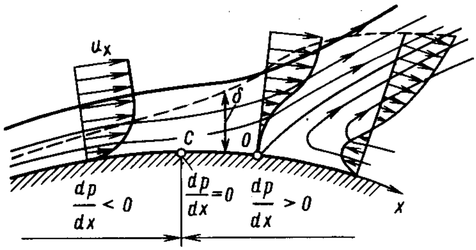
Для выяснения сущности явления отрыва напомним, что давление поперек слоя (вдоль оси y) практически не изменяется и, следовательно, изменение давления вдоль слоя (по направлению оси x) будет таким же, как и во внешнем (потенциальном) потоке. Давление может быть как убывающим по течению ($dp/dx < 0$), так и возрастающим ($dp/dx > 0$), причем расстояние x отсчитывается вдоль обтекаемой поверхности.

Рассмотрим в качестве примера потенциальное бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра (см. п. 7.4). Начиная от передней критической точки K_1 (см. рис. 7.6) давление убывает ($dp/dx < 0$), а скорость возрастает вплоть до точки C, за которой начинается обратное изменение давления и скорости. Жидкие частицы на участках пути вблизи границы K_1C испытывают ускорение, обусловленное падением давления в направлении движения, и их кинетическая энергия возрастает. В идеальной жидкости ускоренному движению ничто не препятствует, но в реальной — движение тормозится трением, развивающимся благодаря прилипанию частиц жидкости к твердой поверхности и образованию пограничного слоя. Все же благодаря падению давления в направлении движения ускорение частиц жидкости наблюдается, по крайней мере, до точки C.

На участке CK_2 $dp/dx > 0$ и частицы движутся в направлении возрастания давления. В идеальной жидкости это приводит лишь к убыванию кинетической энергии и восстановлению полного давления, достигаемого в точке K_2. В реальной жидкости часть кинетической энергии затрачивается на компенсацию работы сил трения, оказывающих тормозящее действие. В связи с этим частицы, двигавшиеся в пограничном слое и имевшие малый запас кинетической энергии, начиная с некоторого сечения, проходящего через точку O (рис. 8.27), не могут уже преодолевать совокупное действие обратного перепада давления и трения — они в этом сечении останавливаются, а частицы, двигающиеся по более удаленным от тела траекториям, отклоняются в сторону внешнего потока. Часть жидкости, расположенная ниже точки O, под действием положительного градиента давления получает возвратное движение. Это явление и называют отрывом пограничного слоя.

Появление зоны возвратного течения приводит к резкому отклонению линий тока от стенки и соответствующему утолщению пограничного слоя. Ориентируясь на изображенную на рис. 8.27

Рис. 8.27. Кинематическая картина течения вблизи точки отрыва



картину течения, можно сформулировать математическое условие, определяющее положение точки отрыва на стенке. Перед точкой отрыва профиль скорости всюду имеет выпуклость вправо, тогда как в зоне возвратного течения существует участок профиля с выпуклостью влево. Профиль скорости в граничном сечении, проходящем через точку O, которое будем называть сечением отрыва, должен иметь форму, при которой касательная к нему в точке, лежащей на стенке, перпендикулярна стенке. Это условие можно выразить в виде

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \text{ или } \tau_0/_{\text{отр}} = 0. \tag{8.107}$$

Если в результате расчета пограничного слоя установлено распределение скорости $u_x(x, y)$, то условие (8.107) может служить уравнением для определения координаты x_0 точки отрыва. Значение этой координаты необходимо, чтобы оправданно применять методы расчета пограничного слоя.

Итак, отрыв пограничного слоя обусловлен совокупным действием положительного градиента давления и вязкого пристенного трения. При отсутствии одного из этих факторов отрыва не происходит. Весьма наглядно это было продемонстрировано Г. Феттингером, результаты опытов которого показаны на рис. 8.28. Были исследованы и сопоставлены два течения вязкой жидкости, вблизи плоской стенки, поставленной нормально к потоку. В первом из них (рис. 8.28, *а*) вблизи критической точки поток свободно растекался в обе стороны. Несмотря на наличие положительного градиента давления, на участках линий тока перед критической точкой отрыва не возникало, поскольку здесь отсутствовало тормозящее влияние стенки. На участках линий тока за критической точкой движение происходило вдоль стенки, и, следовательно, имело место поверхностное трение. Однако и здесь поток не отрывался, так как был направлен в сторону уменьшения давления.

Во втором потоке нормально к обтекаемой стенке была установлена тонкая перегородка (рис. 8.28, *б*), которая создавала поверхностное трение на участке перед критической точкой. Поскольку здесь сохранялся, кроме того, положительный градиент давления, поток отрывался, и вблизи критической точки образовывались четко видимые на снимке зоны, заполненные крупными вихрями.

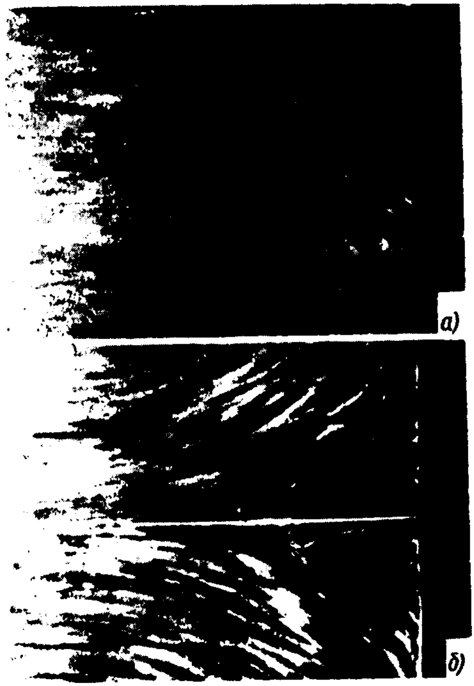


Рис. 8.28. Отрыв пограничного слоя вблизи критической точки:

а — натекание потока на стенку происходит без образования отрыва; *б* — при наличии перегородки, нормальной к стенке, возникает отрыв, вызванный трением о перегородку

Совокупное действие положительного градиента давления и поверхностного трения встречается при обтекании выпуклых цилиндрических тел, течениях в расширяющихся каналах (диффузорах), при обтекании разнообразных выступов, изгибов и изломов стенок. В этих случаях возникают отрывы пограничного слоя, приводящие к перестройке течения, которое становится резко отличным от течения идеальной жидкости вблизи тех же поверхностей. Рассмотрим некоторые характерные примеры течений с отрывами.

Обтекание тел с затупленной кормовой частью (неудобообтекаемых тел), как правило, сопровождается отрывами. Кинематическая структура потока зависит от числа Рейнольдса и, если движение возникло из состояния покоя, от времени с начала движения. На рис. 8.29 показаны снятые на кинопленку последовательные стадии развития пограничного слоя и формирования вихрей при обтекании кормовой части цилиндрического тела потоком воды, начинающим движение из состояния покоя. В начальный момент пограничный слой почти отсутствует, и течение близко по структуре к потенциальному. В дальнейшем происходит нарастание пограничного слоя, его утолщение и, наконец, отрыв (рис. 8.29, 4). Оторвавшийся пограничный слой свертывается в крупный вихрь, оттесняющий поток от поверхности тела.

Обтекание тел с заостренной кормовой и плавно скругленной передней частью (удобообтекаемых тел) может происходить практически безотрывно (рис. 8.30, *а*). Для этого необходимо, чтобы форма тела и его положение в потоке были такими, при которых положительные градиенты давления всюду остаются малыми и не вызывают отрыва. В этих случаях распределение давления по поверхности тела с хорошим приближением может быть описано

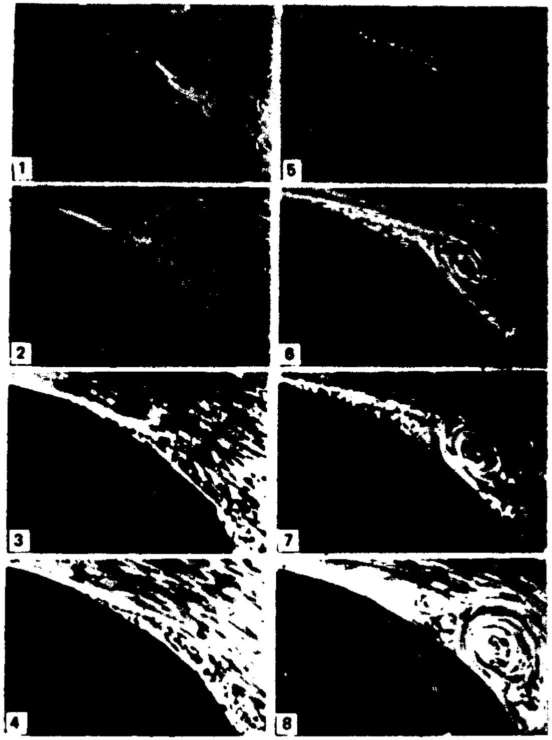


Рис. 8.29. Последовательные стадии формирования и отрыва пограничного слоя вблизи поверхности тела при возникновении течения из состояния покоя

теорией потенциального течения. При увеличении угла атаки положительные градиенты давления на подсасывающей (верхней) стороне тела возрастают и обусловливают отрыв, ведущий к образованию крупных вихрей за телом (рис. 8.30, *б*). В этих условиях тело становится неудобообтекаемым.

Заметим, что при обтекании тел отрыв может произойти только за точкой минимума давления, поскольку в этой точке изменяется знак градиента давления.

Течение в расширяющемся канале (диффузоре) при отсутствии отрывов сопровождается возрастанием давления и замедлением течения. Если угол раскрытия диффузора мал, то мал и положительный градиент давления. Он может оказаться недостаточным для появления отрыва на заданной длине диффузора, и течение вязкой жидкости в таком канале сохраняется безотрывным (см. рис. 6.30, *а*).

Опыты показывают, что безотрывные течения в плоских диффузорах ограниченной длины возможны при углах раскрытия, не превышающих 8 ... 10°. Появление отрыва (см. рис. 6.30, *б*) зависит не только от угла раскрытия, но и от ряда других параметров (например, от формы поперечного сечения диффузора,

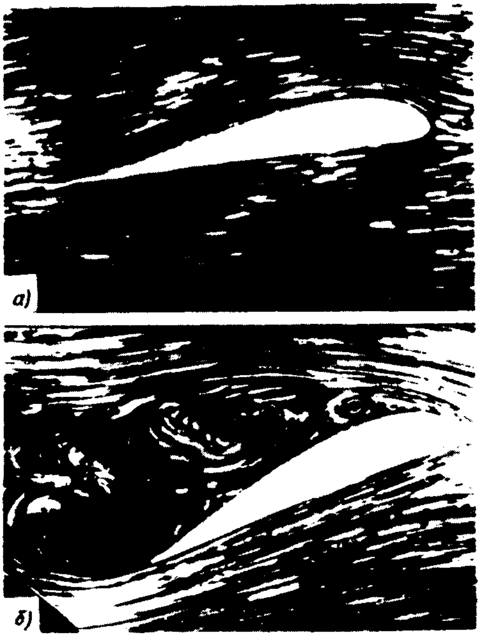


Рис. 8.30. Схемы обтекания крылового профиля:

а — без отрыва при малом угле атаки; *б* — с отрывом пограничного слоя и образованием крупных вихрей

от условий входа и др.); но основным фактором, определяющим отрыв потока, является градиент давления. Наблюдаемые в опытах разнообразные структуры потока в диффузорах обусловлены различными законами изменения градиента давления по длине диффузора и соответствующим положением точек отрыва.

Можно показать, что для диффузора, образованного двумя плоскими стенками, существует точное решение полных уравнений Навье—Стокса [12]. Из него следует, что безотрывное (чисто радиальное) течение в таком диффузоре может существовать только при числах Рейнольдса, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Re} < 6\,(\pi^2 - \alpha^2)/\alpha,$$

где α — угол раскрытия диффузора; $\mathrm{Re} = |q|/\nu$; q — расход плоского потока в диффузоре.

Этим условием ограничивается область относительно малых чисел Рейнольдса. Кроме того, решение относится к теоретическому случаю чисто плоского потока (отсутствие торцовых стенок). В реальных случаях чаще всего приходится учитывать наличие отрывов.

Поскольку отрыв потока в диффузоре ведет к резкому возрастанию его гидравлического сопротивления, целесообразно принимать меры для перемещения точки отрыва к выходному сечению. Совокупность способов искусственного перемещения точек отрыва называют управлением пограничным слоем.

Течения вблизи выступов, изгибов и изломов твердых стенок, как правило, сопровождаются отрывами. Только при весьма малых числах Рейнольдса, когда течение относится к классу ползущих, возможно почти безотрывное обтекание вязкой жидкостью таких препятствий. На рис. 6.26 показаны характерные конфигурации линий тока при обтекании уступа, а на рис. 6.27 — фотоснимок течения через прямоугольный выступ.

Рассмотрим способы расчетного определения положения точки отрыва ламинарного пограничного слоя.

Если пользоваться для расчета пограничного слоя методом Польгаузена, то, применяя формулу (8.91) и вычисляя $\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}$ согласно (8.107) для точки отрыва, получим $\lambda_{отр} = -12$ или

$$\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} = -12. \qquad (8.108)$$

Это уравнение может быть удовлетворено только при $dU/dx < < 0$, т. е. в области торможения потока, где $dp/dx > 0$. В результате сопоставления расчетных и экспериментальных данных получено, что условие (8.108) дает завышенные значения координаты точки отрыва. Поэтому не рекомендуется применять метод Польгаузена для диффузорных участков пограничного слоя. Более точное, но несколько заниженное значение координаты точки отрыва дает метод Кочина—Лойцянского. Используя данные табл. 6 и учитывая смысл функции $\zeta(f)$, можно установить, что условию (8.107) отвечает значение формпараметра $f_{отр} = = -0,0681$, или

$$\frac{\delta^{**2}}{\nu}\frac{dU}{dx} = -0,0681. \qquad (8.109)$$

Уравнения (8.108) и (8.109) можно решить относительно координаты точки отрыва, если известно $U(x)$ и в результате расчета пограничного слоя найдены $\delta(x)$ или $\delta^{**}(x)$. При этом, однако, интервал значений x, на котором определяются эти функции, должен включать и значение $x_{отр}$, определяющее точку отрыва. Но вблизи нее линии тока сильно отклоняются от поверхности тела, а пограничный слой настолько утолщается, что уже нельзя не учитывать его обратное влияние на внешний поток. Распределение давления но поверхности тела вблизи точки отрыва и за ней резко отличается от теоретического, и последнее становится непригодным для использования в расчете пограничного слоя. Поэтому при расчетах обтекания тел с отрывами применяют экспериментальные кривые распределения давления по поверхности тела, по ним устанавливают вид функции $U(x)$ и используют ее для определения параметров пограничного слоя.

8.17. НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

В п. 6.6 было дано понятие о начальном участке ламинарного течения в круглой трубе, описана в основных чертах структура потока и приведены приближенные зависимости для определения основных параметров этого участка. Остановимся на некоторых методах расчета начального участка в плоской и круглой трубах. Разработано несколько таких методов, причем основой одних является теория пограничного слоя, а других — приближенные уравнения движения.

Рассмотрим начальный участок плоской трубы (канала). Структура течения на нем качественно сходна со структурой течения на начальном участке круглой трубы, схема которого приведена на рис. 6.16. Обозначим через v скорость потока во входном сечении *I-I*, которая, очевидно, равна средней скорости, а через $2a$ — высоту канала. Для любого промежуточного сечения в пределах начального участка примем следующие допущения:

1) скорость U в пределах одного и того же сечения ядра течения постоянна; по мере удаления сечения от входа в трубу величина U возрастает от v при $x = 0$ до u_m при $x = l_{нач}$;

2) профиль скорости в пограничном слое может быть аппроксимирован параболической зависимостью вида

$$\frac{u_x}{U(x)} = \left(2 - \frac{y_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{\delta}, \tag{8.110}$$

где y_1 — расстояние от стенки;

3) ввиду равномерности распределения скоростей в ядре течения трение практически отсутствует, и для ядра справедливо уравнение Бернулли в виде

$$p + \rho\frac{U^2}{2} = \text{const},$$

причем давление в каждом сечении одинаково в ядре и пограничном слое.

Заметим, что в конце начального участка $x = l_{нач}$, $\delta = a$, $U = u_m = 3v/2$ и профиль скорости описывается зависимостью

$$\frac{u_x}{u_m} = \left(2 - \frac{y_1}{a}\right)\frac{y_1}{a}. \tag{8.111}$$

Учитывая обозначения и расположения осей координат, данные в п. 8.2, т. е. то, что $2a = h$, $y_1 = h - y$, нетрудно убедиться, что выражения (8.111) и (8.8′) совпадают. Иными словами, при $x = l_{нач}$ профиль скорости в пограничном слое совпадает с профилем стабилизированного потока.

Для расчета начального участка по методу акад. Л. С. Лейбензона запишем уравнение постоянства расхода для плоского потока

$$2av = 2U(a - \delta) + 2\int_0^\delta u_x\,dy_1.$$

Заменив u_x по формуле (8.110) и вычислив интеграл, получим

$$\frac{\delta}{a} = 3\left(1 - \frac{v}{U}\right). \tag{8.112}$$

Применим теперь теорему об изменении количества движения к массе жидкости внутри контрольной поверхности, образованной сечениями O-O, x-x и стенками трубы.

Без учета массовых сил общее уравнение количества движения

$$P_{\text{пов}} = \int_S \rho u_n u \, dS$$

в проекции на ось x имеет вид

$$2a(p_1 - p) - 2\int_0^x \tau_0 \, dx = 2\rho U^2 (a - \delta) + 2\rho \int_0^\delta u_x^2 \, dy_1 - 2a\rho v^2, \quad (8.113)$$

где p_1 и p — давления соответственно в начальном и расчетном сечениях; τ_0 — касательное напряжение на стенке.

Учтем следующие соотношения:

$$p_1 - p = \frac{\rho}{2}(U^2 - v^2);$$

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y_1}\right)_{y_1=0} = \rho\nu 2\frac{U}{\delta};$$

$$\int_0^x \tau_0 \, dx = 2\rho\nu \int_0^x \frac{U}{\delta} dx = \frac{2\rho\nu}{3a}\int_0^x \frac{U^2}{U - v} dx; \quad (8.114)$$

$$\int^\delta u_x^2 \, dy = \int_0^\delta U^2\left(2 - \frac{y_1}{\delta}\right)^2 \frac{y_1^2}{\delta^2} dy_1 = \frac{8}{15}U^2\delta;$$

$$a - \delta = a\left(3\frac{v}{U} - 2\right).$$

Заменив в уравнении (8.113) соответствующие члены их значениями по формулам (8.114), получим

$$a\rho(U^2 - v^2) - \frac{4}{3}\frac{\rho\nu}{a}\int_0^x \frac{U^2}{U - v} dx = 2\rho a(3vU - 2U^2) +$$

$$+ 2\rho\frac{8}{15}3a(U^2 - vU) - 2a\rho v^2.$$

Продифференцировав это уравнение по x и произведя необходимые упрощения, получим

$$\frac{dx}{a\,\mathrm{Re}} = \frac{3}{10}\left(9 - 16\frac{v}{U} + 7\frac{v^2}{U^2}\right)\frac{dU}{v},$$

а после интегрирования при граничном условии $U|_{x=0} = v$

$$\frac{x}{a\,\mathrm{Re}} = \frac{3}{10}\left(9\frac{U}{v} - 7\frac{v}{U} - 1{,}6\ln\frac{U}{v} - 2\right), \quad (8.115)$$

где $\mathrm{Re} = av/\nu$.

Полагая $x = l_{\text{нач}}$ и $U = 3v/2$, из последнего уравнения найдем длину начального участка

$$l_{\text{нач}} = 0{,}103a\,\mathrm{Re}. \tag{8.116}$$

Поскольку функция $U(x)$ определена уравнением (8.115), то, пользуясь уравнением Бернулли, можно найти распределение давления по длине начального участка:

$$p(x) = p_1 + \frac{\rho}{2}[v^2 - U^2(x)].$$

Подчеркнем, что хотя эта формула определяет давление в ядре течения, но для данного сечения оно будет таким же и в пограничном слое в силу известных свойств последнего.

В конце начального участка при $x = l_{\text{нач}}$, $U(l_{\text{нач}}) = 3v/2$ давление

$$p(l_{\text{нач}}) = p_1 - \frac{5}{8}\rho v^2.$$

Таким образом, перепад давления на длине начального участка

$$p_1 - p(l_{\text{нач}}) = \frac{5}{8}\rho v^2 \tag{8.117}$$

выражается в долях динамического давления ρv^2 и неявно зависит от вязкости жидкости. С другой стороны, используя формулу (8.116), можно получить выражение

$$p_1 - p(l_{\text{нач}}) = \frac{5}{8}\rho v \frac{l_{\text{нач}}\nu}{0{,}103a^2} = 6\,\frac{\mu l_{\text{нач}} v}{a^2}, \tag{8.118}$$

из которого следует диссипативный характер перепада давления $p_1 - p(l_{\text{нач}})$. Кажущееся противоречие формул (8.117) и (8.118) разъясняется, если учесть, что в ядре потока, где отсутствуют потери, перепад давления обусловливает только ускорение потока, т. е. работа сил давления расходуется только на увеличение кинетической энергии.

В пограничном слое в зависимости от положения линии тока вдоль нее может происходить или ускорение, или торможение течения, сопровождаемое диссипацией механической энергии. В связи с этим вдоль произвольной линии тока, проходящей хотя бы частично в пределах пограничного слоя, перепад $p_1 - p$ расходуется не только на изменение кинетической энергии, но и на преодоление сил трения. В частности, формулу (8.118) можно рассматривать как энергетическое уравнение для той линии тока, вдоль которой кинетическая энергия не изменяется и весь перепад давления расходуется на преодоление сил трения.

Сравнивая формулу (8.11) для потерь на стабилизированном участке плоской трубы с формулой (8.118) для потерь на начальном участке и учитывая, что $2a = h$, легко убедиться, что потери на начальном участке в 2 раза больше, чем на стабилизированном участке такой же длины.

Изложенный метод расчета начального участка плоской трубы можно полностью использовать для решения той же задачи применительно к круглой цилиндрической трубе. Не повторяя рассуждений и выкладок, которые принципиально не отличаются от изложенных выше, приведем результирующие зависимости.

Изменение скорости $U(x)$ ядра течения на начальном участке круглой цилиндрической трубы определяется уравнением

$$x/(r_0 \operatorname{Re}) = f(\chi), \tag{8.119}$$

где r_0 — радиус трубы; $\operatorname{Re} = vr_0/\nu$; $\chi = U/v - 1$;

$$f(\chi) = \frac{1}{4}\left[\frac{58}{15}\chi - \frac{22}{5}\ln(1+\chi) - \frac{17}{15}(4 + 2\chi - 2\chi^2)^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{5}\left(\frac{4-2\chi}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{37\sqrt{2}}{10}\left(\arcsin\frac{2\chi-1}{3} + \arcsin\frac{1}{3}\right) + \frac{26}{3}\right].$$

Распределение скорости в пограничном слое начального участка описывается формулой (8.110). Длина начального участка получается из выражения (8.119) при граничном условии $x = l_{\text{нач}}$, $U = 2v$. Иначе,

$$l_{\text{нач}} = r_0 \operatorname{Re} f(1) \ \text{ или } \ l_{\text{нач}} = 0{,}115 r_0 \operatorname{Re}. \tag{8.120}$$

Закон изменения давления вдоль начального участка определяется уравнением Бернулли, в которое следует ввести значения $U(x)$, определенные из формулы (8.119). Перепад давления на полной длине начального участка получим, полагая $U(l_{\text{нач}}) = 2v$, в виде

$$p_1 - p(l_{\text{нач}}) = \frac{3}{2}\rho v^2$$

или, используя формулу (8.120), в виде

$$p_1 - p(l_{\text{нач}}) = 13{,}04\frac{\mu l_{\text{нач}} v}{r_0^2}.$$

В результате экспериментальной проверки формулы (8.119) получено, что на небольших расстояниях от входа имеет место заметное расхождение между расчетными и опытными кривыми; это объясняется приближенностью расчета и в первую очередь недостаточно хорошей аппроксимацией профиля скорости в пограничном слое.

Более точные результаты расчета начальных участков, полученные рядом исследователей, связаны с более сложными выкладками и более трудоемкими вычислениями. Не останавливаясь на деталях, приведем некоторые конечные результаты.

Для начального участка в круглой трубе С. М. Тарг [24] разработал метод, основанный на приближенных уравнениях движения. Не прибегая к делению потока на ядро и пограничный слой, что избавляет от необходимости вводить приближенные

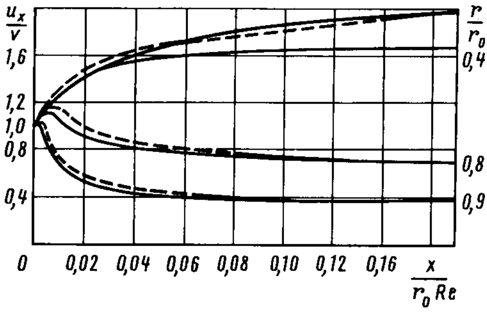


Рис. 8.31. Результаты измерения и теоретического расчета параметров начального участка ламинарного потока в круглой трубе:

——— — по теории Тарга;
– – – – из опытов Никурадзе

аппроксимации для профиля скорости и пользоваться неточным понятием толщины пограничного слоя, С. М. Тарг в уравнениях Навье—Стокса принял $u_r = 0$, член $u_x \partial u_x/\partial x$ заменил на $v \partial u_x/\partial x$ и не учитывал вязкостный член $\nu \partial^2 u_x/\partial x^2$.

В результате решения приближенных уравнений операционным методом получен закон распределения давления в виде

$$\frac{p_0 - p}{\rho v^2} = \frac{8}{\mathrm{Re}} \frac{x}{r_0} + \frac{1}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} e^{\frac{-\beta_k^2}{\mathrm{Re}} \frac{x}{r_0}},$$

где p_0 — давление в резервуаре (см. рис. 6.16); β_k — нули бесселевой функции, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} = \frac{1}{12}$.

Закон распределения скорости в пограничном слое выражается формулой

$$\frac{u_x}{v} = 2\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \left[1 - \frac{J_0\left(\beta_k \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\beta_k)}\right] e^{-\frac{\beta_k^2 x}{\mathrm{Re} r_0}},$$

где J_0 — бесселева функция нулевого порядка.

Скорости, вычисленные по этой формуле, с достаточной степенью точности соответствуют экспериментальным значениям (рис. 8.31). Для длины начального участка С. М. Тарг получил зависимость $l_{нач} = 0{,}16 r_0 \mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re} = v r_0/\nu$.

Аналогичный расчет для плоской трубы дает результат

$$l_{нач} = 0{,}18 a \,\mathrm{Re}.$$

Имея уточненные формулы длины начального участка, нетрудно внести уточнения и в формулы потерь давления. Сопоставление этих формул с приближенными формулами, данными в п. 6.6, показывает, что потери на начальном участке заметно превышают потери на стабилизированном участке, поэтому в некоторых случаях их уточненный учет является необходимым.

9. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

9.1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Переход ламинарного режима в турбулентный кратко описан в п. 6.6 для течения в круглых трубах. Он наблюдается и при течениях в каналах разной формы, конфузорах, диффузорах, в пограничном слое при обтекании тел, в свободных струях. Хотя переходные явления для каждого класса потоков имеют некоторую специфику, но в основе любого из них лежит потеря устойчивости ламинарного течения, которая наступает при достижении определенных значений гидродинамических параметров.

Если в ламинарном потоке малые возмущения затухают и не приводят к изменению его общей кинематической структуры, то поток является устойчивым. Если же малые возмущения с течением времени нарастают и приводят к появлению новой структуры течения (например, к незатухающей пульсации местной скорости), то поток неустойчив. Еще Рейнольдс высказал мысль, что появление турбулентности связано с потерей устойчивости это подтверждается результатами теоретических и экспериментальных исследований.

Как известно, переход ламинарного течения в турбулентное для круглых цилиндрических труб определяется критическим значением числа Рейнольдса. При этом под $\mathrm{Re}_{кр}$ понимают такое значение этого числа, для которого поток данного класса с числом Рейнольдса меньше $\mathrm{Re}_{кр}$, является заведомо ламинарным устойчивым, т. е. в нем затухают любые внешние малые возмущения. Таким образом, критическое число Рейнольдса определяет границу устойчивости ламинарных потоков, но не предопределяет фактического перехода к турбулентности, который может происходить при $\mathrm{Re}_{п} \gg \mathrm{Re}_{кр}$. Поэтому на величину $\mathrm{Re}_{кр}$ не должны влиять случайные возмущения, вносимые, например, шероховатостью стенок, если только последняя не приводит к изменению общей конфигурации потока. Опыт подтверждает независимость $\mathrm{Re}_{кр}$ от шероховатости стенок трубы. Но изменение общей конфигурации потока (например, его сужение, расширение или изгиб оси) существенно влияет на устойчивость течения, т. е. на значение $\mathrm{Re}_{кр}$, поскольку при этом изменяются общие условия устойчивости. Так, опытами многих исследователей

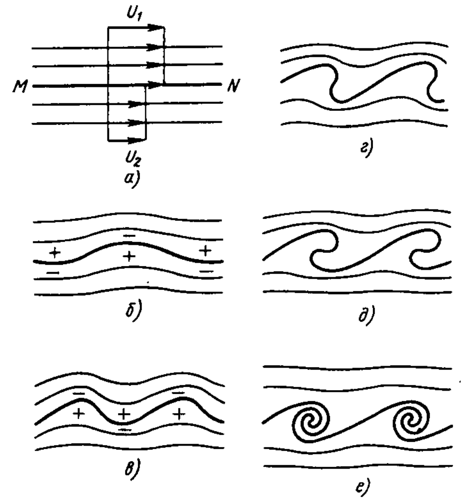


Рис. 9.1. Нарастание возмущений на поверхности раздела двух слоев идеальной жидкости и образование системы вихрей

установлено, что $Re_{кр}$ для сходящихся (конфузорных) потоков больше, чем для расходящихся (диффузорных), т. е. первые более устойчивы. Критическое число Рейнольдса зависит также от формы поперечного сечения трубы или канала.

Изменения граничных условий течения могут влиять на форму профиля скорости в поперечном сечении потока. Установлено, что профили скорости, имеющие точки перегиба (например, в зоне отрыва пограничного слоя), являются неустойчивыми и характеризуют тенденцию к возникновению турбулентности.

Так как число Рейнольдса пропорционально отношению инерционной силы к силе вязкости, нахождение условий, определяющих границы устойчивости, должно производиться с учетом вязких свойств жидкости. Однако первое представление о механизме возникновения неустойчивости в прямолинейном потоке можно получить с помощью схемы движения поверхности раздела двух слоев идеальной жидкости.

Пусть имеется два слоя невязкой жидкости, перемещающихся в одном направлении со скоростями u_1 и u_2 (рис. 9.1, *а*) и отделенных поверхностью раздела MN. Предположим, что в результате случайного возмущения эта поверхность принимает волнообразную форму (рис. 9.1, *б*). Тогда на гребнях образовавшихся волн линии тока сгущаются и в силу уравнения неразрывности скорости возрастают. Во впадинах, наоборот, скорости уменьшаются. Поэтому согласно уравнению Бернулли $p + \rho u^2/2 = \mathrm{const}$ на гребнях давление уменьшается (отмечено знаком минус), а во впадинах — возрастает (отмечено знаком плюс). Но, очевидно, такое движение не может быть устойчивым из-за образования разных по величине давлений по обе стороны поверхности раздела, поэтому последняя продолжает деформироваться (рис. 9.1, *в*, *г*, *д*) и под действием продольных скоростей свертывается в дискретные вихри (рис. 9.1, *е*).

Так как случайные возмущения деформируют поверхность раздела совершенно беспорядочно, в действительности образуется не правильный ряд, а беспорядочная совокупность больших и малых вихрей. Кроме того, в реальной жидкости проявляется действие вязкости, которая усложняет картину и обусловливает диффузию вихрей. Рассмотренная схема не объясняет возникновение турбулентности, а иллюстрирует условия, при которых может наступить потеря устойчивости движения жидкости.

Особый интерес представляет неустойчивость ламинарного течения в пограничном слое и возникновение в нем турбулентности. Значимость этого вопроса определяется тем, что во многих случаях встречаются смешанные пограничные слои с участками ламинарного и турбулентного режимов. Для расчета таких слоев необходимо располагать не только методами расчета каждого из них, но и способами определения размеров переходной зоны или, по крайней мере, положения точки перехода. Рассмотрим в общих чертах переходные явления в пограничном слое на плоской пластине.

Вблизи передней кромки пластины (см. рис. 8.19) пограничный слой ламинарный, так как даже при турбулентном внешнем потоке скорость и толщина пограничного слоя малы, а значит, мало число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\delta = u\delta/\nu$. Поскольку $\delta \sim \sqrt{x}$, режим течения можно характеризовать более условным числом $\mathrm{Re}_x = u_0x/\nu$. Как показывают результаты опытов, переход к турбулентному режиму на пластине наблюдается при

$$\mathrm{Re}_{x\text{п}} = (u_0x/\nu)_\text{п} = (3{,}5 \ldots 5)\,10^5,$$

причем эти значения практически не зависят от размерных величин u_0, x, ν. Поэтому при возрастании скорости u_0 внешнего потока точка (или зона) перехода приближается к переднему краю пластины. Положение точки перехода зависит, кроме того, от степени турбулентности обтекающего пластину потока. Количественной характеристикой степени турбулентности служит отношение $\sqrt{\overline{(u')^2}}/u$ (где u' — пульсация; $\overline{(u')^2}$ — усредненное значение квадрата пульсации; u — осредненная скорость). В результате экспериментальных исследований получено, что если принять меры для максимально возможного снижения степени турбулентности потока, то можно достичь значений $\mathrm{Re}_{x\,\text{кр}} = 3\cdot10^6$.

Переход ламинарного пограничного слоя на пластине в турбулентный сопровождается изменением законов нарастания толщины пограничного слоя и распределения продольных скоростей. На рис. 9.2 показана экспериментальная зависимость безразмерной толщины пограничного слоя $\delta\sqrt{u_0}/\sqrt{\nu x}$ от числа $\mathrm{Re}_x = u_0x/\nu$. Можно видеть, что при $\mathrm{Re}_x < 3{,}2\cdot10^5$ безразмерная толщина слоя постоянна и приблизительно равна пяти. При больших Re_x она заметно возрастает по почти линейному закону. С этим изменением закона нарастания толщины пограничного слоя связано изменение закона распределения скорости (рис. 9.3). С увеличением числа Re_x происходит трансформация ламинарного профиля в турбулентный и градиент скорости у стенки возрастает.

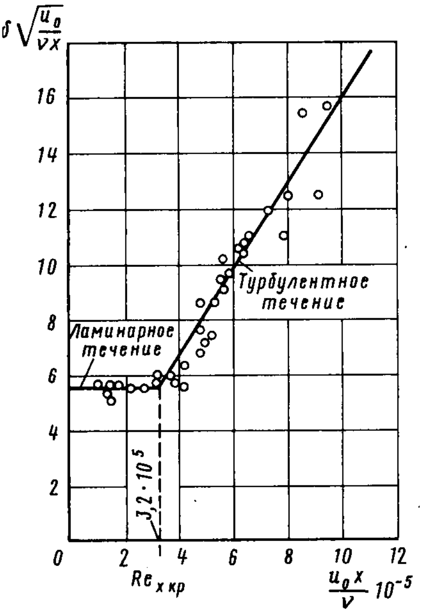


Рис. 9.2. Зависимость безразмерной толщины пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине от числа Рейнольдса

Одним из важнейших факторов, влияющих на величину $Re_{кр}$, а значит, и на положение точки перехода, является градиент давления. Как известно, при обтекании тел он может быть как положительным, так и отрицательным. В области отрицательных градиентов, т. е. в области ускоряющегося или конфузорного течения, пограничный слой чаще всего остается ламинарным, тогда как в области положительных градиентов (или диффузорного течения) обычно происходит переход к турбулентному режиму. При этом точка перехода располагается ниже точки минимума давлений, поэтому в первом приближении положение точки перехода на удобообтекаемых телах при отсутствии отрывов пограничного слоя можно определять по положению точки минимума давлений. Поскольку последнее зависит от формы профиля тела, можно в определенных пределах управлять положением точки перехода, изменяя надлежащим образом форму профиля. Это используется для снижения сопротивления трения тонких крыловых профилей. Дело в том, что трение, определяемое касательными напряжениями, в ламинарном слое гораздо меньше, чем в турбулентном. Выполняя профиль таким, чтобы его сечение с наибольшей толщиной, при-

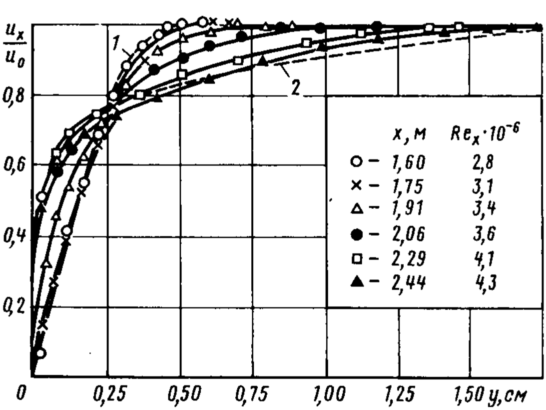


Рис. 9.3. Изменения профиля скоростей в пограничном слое на продольно обтекаемой пластине при переходе от ламинарного режима к турбулетному:

1 — теоретическая кривая для ламинарного слоя; 2 — степенная кривая (показатель степени 1/7) для турбулентного слоя

близительно или точно совпадающее с сечением минимума давления, располагалось по возможности близко к задней кромке профиля, можно увеличить или «затянуть» участок ламинарного пограничного слоя и уменьшить участок турбулентного. При этом общее сопротивление трению уменьшится. Такие профили называют ламинаризованными.

Из других факторов, влияющих на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, следует указать кривизну и шероховатость обтекаемой поверхности.

На основе опытных исследований можно считать, что на выпуклых поверхностях при $\delta^*/R < 0{,}0026$ (R — радиус кривизны поверхности) возникает неустойчивость такого же типа, как и на пластине, а влиянием кривизны можно пренебречь. На вогнутой поверхности пограничный слой ведет себя так же, как и на пластине при $\delta^*/R < 0{,}00013$. При бóльших значениях относительной толщины вытеснения пограничный слой становится неустойчивым.

Шероховатость и волнистость поверхности влияют на переход главным образом благодаря возмущениям, вносимым ими в поток. Отдельный элемент шероховатости (выступ) может влиять на положение точки перехода. По мере увеличения высоты выступа область или точка перехода перемещается вверх по течению и может достичь сечения, в котором расположен выступ.

Течение в переходной области пограничного слоя аналогично течению в переходной области в трубах. Так, наблюдалось, что турбулентность возникает в ограниченных зонах в виде локальных турбулентных пятен, за пределами которых поток сохраняет ламинарную структуру. Турбулентные пятна распространяются вниз по течению и приводят к перемежаемости, аналогичной той, которая имеет место на переходных режимах в трубах. Наряду с этим на переходных участках происходит обмен жидкими объемами между внешним потоком и пограничным слоем через его внешнюю границу, что обусловливает другой тип перемежаемости.

Неустойчивость движения жидкости может проявляться не только в переходе от ламинарного режима к турбулентному, но и в резком изменении макроскопической структуры потока. Например, при движении вязкой жидкости между соосными вращающимися цилиндрами линиями тока могут служить плоские кривые в виде концентрических окружностей (см. п. 8.4). Но при определенных условиях такой характер течения может нарушиться, и в зазоре между цилиндрами возникнут крупные кольцевые вихри с осями, параллельными окружной скорости. Сечения таких вихрей плоскостью, проходящей через ось вращения, показаны на рис. 9.4.

Неустойчивость движения возникает также и в других случаях пространственных течений. Например, на вогнутых неподвижных поверхностях может образовываться система вихрей,

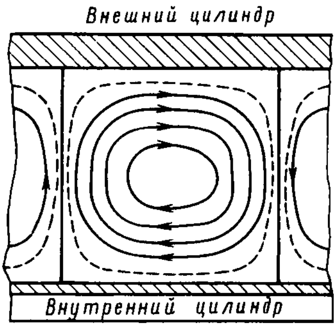


Рис. 9.4. Система кольцевых вихрей в зазоре между соосными цилиндрами, вращающимися с разной угловой скоростью (вихри Тейлора)

сходная с той, которая образуется между вращающимися цилиндрами.

В настоящее время теоретически на основе метода малых возмущений, а также нелинейной теории решены задачи устойчивости для ряда частных случаев.

9.2. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ (ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ)

Этот вид турбулентного течения (см. рис. 8.1) можно описать теми же методами полуэмпирической теории, которые использовались для турбулентного течения в круглой цилиндрической трубе. Принимая во внимание структуру движения вблизи бесконечной плоской стенки (см. п. 5.5), но учитывая, что в данном случае имеет место продольный перепад давления, первое и второе уравнения Рейнольдса запишем в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u_x'u_y'})=0; \qquad (9.1)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u_y'u_y'})=0,$$

где p и u_x — усредненные значения давления и скорости.

Из второго уравнения следует, что величина $p_0=p+\rho\,(\overline{u_y'})^2$ зависит только от x. Поскольку значение $(\overline{u_y'})^2$ на стенке равно нулю, а в потоке всегда положительно, можно заключить, что давление на стенке всегда больше, чем во внутренних точках потока.

Перепишем первое уравнение системы (9.1) в виде

$$\partial p/\partial x=\partial\tau/\partial y, \qquad (9.2)$$

где $\tau=\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u_x'u_y'}=\tau_\mu+\tau_\nu$.

Ввиду бесконечной длины канала величина $\rho\,(\overline{u_y'})^2$ не может зависеть от x. Поэтому вместо p в выражение (9.2) введем p_0, в результате чего получим уравнение

$$\partial\tau/\partial y=\partial p_0/\partial x,$$

проинтегрировав которое по y (так как p_0 от этой переменной не зависит), найдем

$$\tau = \frac{\partial p_0}{\partial x} y + C.$$

Обозначив касательное напряжение на стенке через τ_0, определим $C = \tau_0$. Из условия симметрии напряжение τ на оси потока (при $y = h/2$) равно нулю, а значит,

$$\partial p_0/\partial x = -2\tau_0/h.$$

Следовательно, закон распределения касательных напряжений по сечению канала можно записать в виде

$$\tau = \tau_0 (1-2y/h),$$

который аналогичен соответствующему закону для круглых труб (см. п. 6.7).

Дальнейший вывод закона распределения скоростей и закона сопротивления, основанный на полуэмпирической теории переноса количества движения, не отличается от такого же вывода для круглых труб, изложенного в гл. 6. Приведем только результирующие зависимости с небольшими комментариями.

В области турбулентного ядра течения справедлив логарифмический закон (6.39):

$$\frac{u}{u_*} = A \lg \frac{yu_*}{\nu} + B,$$

в котором для случая гладких стенок канала постоянные A и B выбираются из условия более точного соответствия опытным данным.

На рис. 9.5 приведены экспериментальные данные, обобщающие результаты опытов не только для плоских каналов, но и для круглых труб и турбулентного пограничного слоя на пластине. Можно видеть, что универсальный закон

$$u/u_* = f(yu_*/\nu)$$

одинаково справедлив для этих классов течений. Логарифмическая зависимость (6.39) при значениях $A = 5{,}75$; $B = 5{,}1$ показана прямой b. Кривая a соответствует зависимости

$$u/u_* = yu_*/\nu \quad \text{или} \quad \tau_0 = \mu u/y,$$

т. е. линейному распределению скоростей, характерному для вязкого подслоя. Ход этих кривых показывает, что двухслойная модель турбулентного потока в трубах, плоских каналах и пограничном слое лишь приближенно описывает истинную структуру течения. Можно считать, что при $yu_*/\nu < 5$ линейный закон для скорости подтверждается достаточно хорошо. При значениях

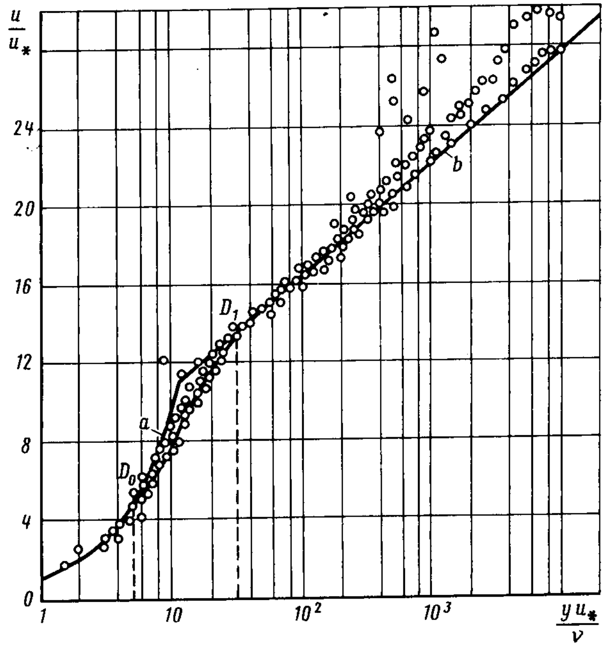


Рис. 9.5. Универсальный профиль безразмерной скорости в пограничном слое на пластине, в плоской и круглой трубах:
a — $u/u_* = yu_*/\nu$; b — $u/u_* = 5{,}75 \lg (yu_*/\nu) + 5{,}1$

$500 > yu_*/\nu > 30$ удовлетворительно подтверждается логарифмический закон (6.39), причем небольшими вариациями величин A и B можно добиться его наилучшего совпадения с опытными данными на этом участке изменения yu_*/ν.

В диапазоне $5 < yu_*/\nu < 30$, т. е. между точками D_0 и D_1 на рис. 9.5, имеет место заметное отклонение опытных точек от каждого из приведенных выше законов. Это указывает на то, что здесь ощутимо влияние как молекулярной, так и турбулентной вязкостей, и полное напряжение должно выражаться формулой (9.2). Поэтому ряд авторов предприняли попытки улучшить теорию учетом не только турбулентных, но и вязкостных напряжений. Было достигнуто несколько лучшее совпадение теоретических и экспериментальных результатов, однако при этом усложняются расчетные зависимости.

Кроме недостаточно точного соответствия опытным данным в пристенной зоне логарифмический закон (6.39) имеет еще один недостаток: он не удовлетворяет естественным условиям на оси симметрии течения. Эти недостатки теории, основанной на двухслойной модели течения, заставили исследователей искать другие пути решения проблемы. Так, А. Д. Альтшуль, принимая для коэффициента турбулентной вязкости выражение $\varepsilon = \alpha u_* y$

(где α — постоянная) и учитывая также молекулярную вязкость, пришел к дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dy}=\frac{u_*^2}{\nu\left(1+\frac{\alpha u_* y}{\nu}\right)},$$

которое дает конечное значение градиента скорости на стенке и не требует деления потока на вязкий подслой и турбулентное ядро. Полученные на основе этого уравнения приближенные расчетные зависимости для закона распределения скорости и гидравлического коэффициента трения применительно к круглым трубам с достаточной для практических целей точностью соответствуют опытным данным.

9.3. СТРУКТУРА И УРАВНЕНИЯ ПРИСТЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

По результатам современных экспериментальных исследований можно составить следующее приближенное представление о кинематической структуре течения в пристенном турбулентном пограничном слое.

В непосредственной близости к стенке существует вязкий подслой, в котором молекулярная вязкость существенно превосходит турбулентную и потому $\tau_\mu \gg \sigma_т$. Толщина вязкого подслоя составляет 0,001 ... 0,01 толщины всего турбулентного слоя. Далее следует зона логарифмического профиля, которая вместе с вязким подслоем и переходной областью образует пристенную область. В этой области, составляющей около 20 % толщины пограничного слоя, накапливается главная часть его пульсационной энергии. Это означает, что в пристенном пограничном слое турбулентность генерируется главным образом вблизи стенки в области гораздо более узкой, чем вся толщина пограничного слоя. Закономерности, описывающие течение в пристеночной области, часто называют «законом стенки».

Между пристеночной областью и внешней границей пограничного слоя располагается внешняя область, которая характеризуется относительно небольшой генерацией турбулентных пульсаций и в которой распределение скоростей несколько отклоняется от логарифмического закона.

Между внешней областью и внешним безвихревым потоком лежит еще одна область, получившая название надслоя. Для нее характерны явления нестационарности и перемежаемости, обусловленной периодическим проникновением в надслой малотурбулизованных масс из внешнего потока и восстановлением степени турбулентности, присущей пограничному слою.

Таким образом, структура турбулентного пограничного слоя значительно сложнее структуры ламинарного слоя.

Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя можно получить из уравнений Рейнольдса, оценив значения их членов подобно тому, как это было сделано при выводе уравнений (8.66) ламинарного слоя. Если при этом пренебречь нормальными турбулентными напряжениями, то для плоского установившегося пограничного слоя получим

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{u_x' u_y'});$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Считая, что для внешнего потока справедливо уравнение Бернулли в виде $p + 0{,}5\rho U^2 = \text{const}$ и, используя обозначения

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} - \rho \overline{u_x' u_y'} = \tau_\mu + \tau_т,$$

перепишем последние уравнения в виде

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \qquad (9.3)$$

Эти уравнения можно использовать для построения методов расчета турбулентного пограничного слоя. Но значительная группа методов основывается на интегральных соотношениях, важнейшим из которых является уравнение импульсов (8.81) [или (8.83)].

9.4. РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

Предположим, что на гладкой пластине длиной l турбулентный пограничный слой образуется на всей ее длине, начиная от переднего края. Иными словами, ламинарный участок пограничного слоя вблизи переднего края пластины будем считать пренебрежимо малым.

В данном случае для внешнего потока имеем условия $U = u_0 = \text{const}$ и $U' = 0$. Поэтому уравнение импульсов приобретает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2}. \qquad (9.4)$$

Заметим, что если считать, что пограничный турбулентный слой начинается от переднего края пластины, то формула (8.85), определяющая силу сопротивления трения, остается справедливой с той, однако, разницей, что величина δ_l^{**} определяется приводимыми ниже соотношениями турбулентного слоя.

В уравнении (9.4) содержатся две неизвестные функции: $\delta^{**}(x)$ и $\tau_0(x)$. Недостающее уравнение можно получить, например, установив на основе экспериментов связь между касательным напряжением τ_0 и толщиной δ^{**} потери импульса. Такую связь обычно называют законом сопротивления. На основе многочисленных опытов, проведенных при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = u_0 l/\nu$), получена степенная зависимость

$$\frac{\tau_0}{\rho u_0^2} = 0{,}00655\left(\frac{u_0\delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/6}, \tag{9.5}$$

на основании которой уравнение (9.4) можно записать в виде

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = 0{,}00655\left(\frac{u_0\delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/6}.$$

После интегрирования получим

$$\frac{6}{7}(\delta^{**})^{7/6} = 0{,}00655\left(\frac{u_0}{\nu}\right)^{-\frac{1}{6}} x + C. \tag{9.5'}$$

Соответственно граничному условию на переднем крае пластины $\delta^{**} = 0$ при $x = 0$ находим $C = 0$, и последнее уравнение приводим к виду

$$\frac{\delta^{**}}{x} = 0{,}0153\left(\frac{u_0 x}{\nu}\right)^{-1/7} \quad \text{или} \quad \frac{\delta^{**}}{x} = 0{,}0153\,\mathrm{Re}_x^{-1/7}. \tag{9.6}$$

Таким образом, толщина потери импульса в турбулентном пограничном слое, а значит, и другие условные толщины возрастают пропорционально расстоянию от переднего края в степени 6/7, тогда как для ламинарного слоя они пропорциональны корню квадратному из этого расстояния. Следовательно, толщина турбулентного пограничного слоя увеличивается быстрее, чем толщина ламинарного слоя.

Согласно выражениям (9.5) и (9.6) местный коэффициент трения

$$c_\text{т} = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2/2} = 0{,}0263\,\mathrm{Re}_x^{-1/7}.$$

При этом касательное напряжение

$$\tau_0 = 0{,}01315\rho\left(\frac{x}{\nu}\right)^{-1/7} u_0^{13/7}, \tag{9.7}$$

полное сопротивление трения пластины

$$F_\text{т} = 2\int_0^l \tau_0\,dx = 0{,}0307\rho\nu^{1/7}u_0^{13/7}l^{6/7}$$

и коэффициент сопротивления трения пластины, смоченной с двух сторон,

$$C_\text{т} = \frac{F_\mu}{\rho\,(u_0^2/2)\,S} = 0{,}0307\,\mathrm{Re}^{-1/7}, \tag{9.8}$$

где $\mathrm{Re} = ul/\nu$ и $S = 2l\cdot 1$.

Формула (9.8) хорошо подтверждается экспериментальными данными для больших чисел Рейнольдса, когда ламинарный участок пограничного слоя пренебрежимо мал.

Приведенное решение показывает, что при обтекании пластины сопротивление трения можно определить, используя всего одну эмпирическую связь между функциями δ^{**} и τ_0. Можно было бы показать, что использованная форма этой связи соответствует степенному распределению скоростей в пограничном слое:

$$u_x/u_0 = (y/\delta)^m,$$

при $m = 1/11$.

Более точная аппроксимация профиля скорости дается логарифмической зависимостью. Ее использование требует более сложных выкладок и приближенных вычислений. Выполнив их, Г. Шлихтинг получил для коэффициента сопротивления интерполяционную формулу

$$C_\text{т} = 0{,}455/(\lg \mathrm{Re})^{2.58}, \tag{9.9}$$

которая хорошо соответствует опытам в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. Результаты вычислений по формулам (9.8) и (9.9) близки друг к другу.

Сравним сопротивление трения гладкой пластины при ламинарном и турбулентном режимах пограничного слоя. Если бы ламинарный и турбулентный пограничные слои существовали при одном и том же числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^6$, то согласно формулам (8.77) и (9.8) получили бы

$$C_{\mu_0} = 1{,}328\,\mathrm{Re}^{-1/2} = 1{,}328\cdot 10^{-3} = 0{,}001328;$$

$$C_{\text{т}0} = 0{,}0307\,\mathrm{Re}^{-1/7} = 0{,}0307\cdot 10^{-6/7} = 0{,}0426.$$

Следовательно, при турбулентном режиме коэффициент сопротивления приблизительно в 3 раза больше, чем при ламинарном; поэтому способами, описанными в [15, 28] стремятся сохранить ламинарный режим пограничного слоя на поверхности обтекаемых тел и предотвратить или затянуть его переход в турбулентный.

Если ламинарный участок пограничного слоя на пластине не может считаться пренебрежимо малым, то необходимо учитывать создаваемое им сопротивление, а началом турбулентного слоя считать точку перехода. В этом случае в формуле (9.5′) можно допустить, что в точке перехода значения толщины δ^{**} потери импульса для ламинарного и турбулентного участков равны: $\delta_\text{л}^{**} = \delta_\text{т}^{**} = \delta_\text{п}^{**}$, где $\delta_\text{п}^{**}$ — толщина потери импульса в точке перехода. Согласно формуле (8.80)

$$\delta_\text{п}^{**} = 0{,}664\sqrt{\nu x_\text{п}/u_0}\,, \tag{9.10}$$

где $x_\text{п}$ определяется по числу Рейнольдса, отвечающему точке перехода: $\mathrm{Re}_\text{п} = u_0 x_\text{п}/\nu$, которое должно быть известным.

С другой стороны, из выражения (9.5′) получаем

$$\delta_\text{п}^{**7/6} = 0{,}00765\,(u_0/\nu)^{-1/6}\,x_\text{п} + C.$$

Исключая постоянную C, находим

$$\delta^{**7/6} - \delta_{\text{п}}^{**7/6} = 0{,}00765\,(u/\nu)^{-1/6}\,(x - x_{\text{п}}). \qquad (9.11)$$

По этой формуле можно вычислить значение δ^{**} в любой точке турбулентного участка, поскольку $\delta_{\text{п}}^{**}$ известно из выражения (9.10). Полную силу трения найдем суммированием сопротивлений на ламинарном и турбулентном участках:

$$F_\tau = 2\rho u_0^2\,\delta_{\text{п}}^{**} + 2\rho u_0^2\,(\delta_l^{**} - \delta_{\text{п}}^{**}) \text{ или } F_\tau = 2\rho u_0^2 \delta_l^{**},$$

где δ_l определяется по выражению (9.11) при $x = l$.

Изложенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на пластине построен на эмпирической зависимости, полученной в опытах с гладкими пластинами. В практических условиях течение вдоль пластины (поверхности крыла, лопасти, корпуса) чаще всего не является гидравлически гладким. Как и течение в трубе, любое течение в турбулентном пограничном слое на шероховатой поверхности можно отнести к одному из трех режимов: гидравлически гладкому, при котором высота выступов поверхности не влияет на сопротивление; переходному или режиму неполного проявления шероховатости, при котором на коэффициент сопротивления влияют как число Рейнольдса, так и шероховатость; режиму полного проявления шероховатости или квадратичному, при котором коэффициент сопротивления зависит только от шероховатости.

Аналогом относительной шероховатости трубы Δ/r_0 в пограничном слое является величина Δ/δ или Δ/δ^{**}. Однако между этими аналогами есть существенная разница. Для трубы при постоянном Δ относительная шероховатость остается постоянной, тогда как в пограничном слое величина Δ/δ (или Δ/δ^{**}) уменьшается вниз по течению вследствие возрастания δ. В связи с этим режимы течения на отдельных участках пограничного слоя могут быть неодинаковыми. Если, например, принять, что турбулентный пограничный слой образуется от переднего края пластины, то на передней части последней, где δ мало, отношение Δ/δ будет велико и может иметь место режим полного проявления шероховатости. По мере удаления от переднего края величина Δ/δ уменьшается и может быть достигнут режим неполного проявления шероховатости, а затем и гидравлически гладкий. Границы между участками с разными режимами определяются значениями безразмерного параметра $u_*\Delta/\nu$ так же, как для течения в шероховатых трубах.

Для определения сопротивления шероховатых пластин можно использовать эмпирический метод, примененный выше к гладким пластинам. Для этого следует установить эмпирическую связь между местным коэффициентом трения и параметрами, от которых он зависит.

Для режима полного проявления шероховатости установлен закон сопротивления

$$\frac{\tau}{\rho u_0^2} = 0{,}0031 \left(\frac{\delta^{**}}{\Delta}\right)^{-1/6}. \tag{9.12}$$

Подставляя это выражение в уравнение импульсов (9.3) и интегрируя при граничном условии δ^{**} при $x = 0$, получаем

$$\delta^{**} = 0{,}008x\,(x/\Delta)^{-1/7}. \tag{9.13}$$

Исключая в формуле (9.12) толщину потери импульса, с помощью зависимости (9.13) после простых вычислений находим формулу для местного коэффициента сопротивления трения

$$c_{\text{т. ш}} = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2/2} = 0{,}0139\left(\frac{x}{\Delta}\right)^{-1/7}. \tag{9.14}$$

Коэффициент полного сопротивления трения шероховатой пластины

$$C_{\text{т. ш}} = \frac{2\int\limits_0^l \tau_0\,dx}{2l\rho u_0^2/2} = 0{,}0162\left(\frac{l}{\Delta}\right)^{-1/7}. \tag{9.15}$$

В переходном режиме коэффициент сопротивления трения зависит не только от шероховатости, но и от числа Рейнольдса. Л. Прандтль и Г. Шлихтинг, исходя из логарифмического закона скоростей и допущения об аналогии между течением в трубе и в турбулентном пограничном слое, выполнили расчеты коэффициента сопротивления трения во всех трех режимах течения. На рис. 9.6 результаты этих расчетов представлены в виде номограммы. Два семейства кривых создают удобство в пользовании номограммой при выполнении вариантных расчетов. Штриховой линией обозначена граница квадратичной области. Номограмма построена на основе предположения, что турбулентный слой начинается от переднего края пластины.

Существенный интерес представляет вопрос о допустимой величине выступа профиля неровности поверхности. Допустимой называют такую высоту выступа, при которой шероховатость еще влияет на сопротивление. Иными словами, допустимая высота выступа определяет границу между гидравлически гладким и переходным режимами течения в пограничном слое. С практической точки зрения допустимую высоту выступа важно знать, чтобы сформулировать требования к качеству обработки поверхностей.

Исследования течения в трубах (см. п. 6.7) приводят к выводу, что граница гидравлически гладкого режима определяется неравенством

$$u_*\Delta/\nu < 4.$$

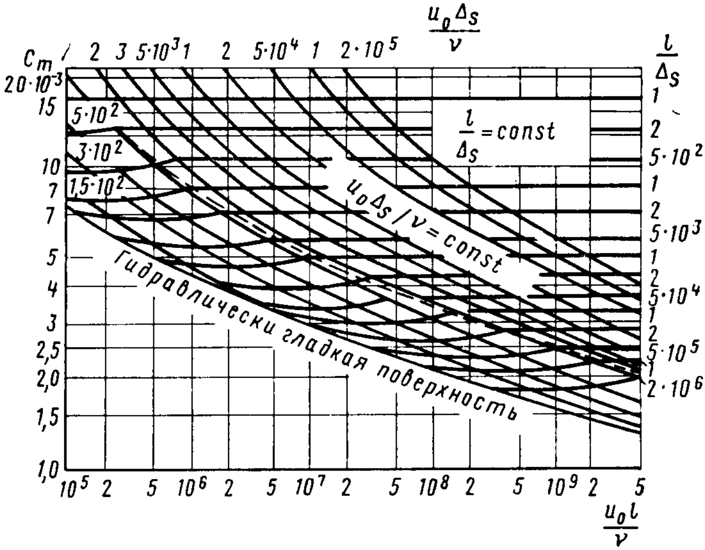


Рис. 9.6. Номограмма для определения коэффициента сопротивления трения в турбулентном пограничном слое на пластине

Этим критерием можно воспользоваться и для пограничного слоя на шероховатой пластине. Однако практически удобнее выразить допустимую высоту выступа неровности поверхности в виде отношения $(\Delta/l)_{\text{доп}}$. Для этого можно воспользоваться номограммой (рис. 9.6), из которой видно, что для любого заданного $\mathrm{Re} = u_0 l/\nu$ допустимая высота выступа определяется той кривой l/Δ, которая сходит с кривой гидравлически гладкого режима при этом числе Рейнольдса. Можно убедиться, что различным числам Рейнольдса приближенно соответствуют следующие значения:

$\mathrm{Re} = u_0 l/\nu$	10^5	10^6	10^8	10^9
$(\Delta/l)_{\text{доп}}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}

Эти данные позволяют заключить, что

$$\mathrm{Re}\,(\Delta/l)_{\text{доп}} = u_0\Delta_{\text{доп}}/\nu = 100.$$

Этой формулой можно с известным запасом пользоваться для определения $\Delta_{\text{доп}}$.

Заметим в заключение, что выше речь шла только о равномернозернистой или эквивалентной ей шероховатости поверхности. Вопрос о влиянии местных неровностей (например, заклепок), а также неравномерно распределенных выступов на сопротивление обтекаемых поверхностей требует специального рассмотрения.

9.5. РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Наличие градиента давления во внешнем потоке, а значит, и в пограничном слое, значительно усложняет задачу расчета последнего. Но ввиду практической значимости вопроса он привлекает внимание многих исследователей, и в настоящее время разработаны разнообразные методы решения, опирающиеся на приближенные допущения и эмпирические зависимости. В последние годы получили развитие численные методы решения дифференциальных уравнений (9.3), которые дополняются выражениями турбулентных напряжений согласно одной из полуэмпирических теорий. Для приведения полученной таким путем системы уравнений к виду, удобному для численного решения, используют безразмерные переменные. При этом в некоторых методах применяют специальные преобразования координат для создания более равномерного распределения параметров потока по толщине; в принятых переменных формулируют граничные условия и систему решают на ЭВМ одним из конечно-разностных методов (например, методом сеток или прямых).

Численные методы позволяют найти все параметры течения в пограничном слое и получить его достаточно полное описание. Однако эти методы трудоемки и требуют значительных затрат времени. Краткую характеристику этой группы методов можно найти в работе [27], а подробное изложение — в специальной литературе.

Другая группа методов основывается на интегральных соотношениях пограничного слоя и в первую очередь на зависимости (8.83). Для ее интегрирования необходимо иметь дополнительные связи между параметрами, например, вида $H\,(\delta^{**})$ и $C_f\,(\delta^{**})$, которые устанавливают, пользуясь полуэмпирической теорией турбулентности.

Рассмотрим общую схему расчета, основанного на аппроксимации профиля касательных напряжений, идея которого принадлежит К. К. Федяевскому [27].

Примем следующие зависимости для касательных напряжений:

в вязком подслое $\tau = \mu\, \partial u/\partial y$;

в турбулентном слое $\tau = \rho l^2\, (\partial u/\partial y)^2$.

Используя обозначения $\tau_0 = \mu\, (\partial u/\partial y)_{y=0}$, $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, $\eta = y/\delta$, получаем

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_*\delta}{\nu}\int_0^{\eta}\frac{\tau}{\tau_0}\,d\eta; \tag{9.16}$$

$$\frac{U-u}{u_*} = \int_{\eta}^{1}\frac{\delta}{l}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/2} d\eta. \tag{9.17}$$

Величина $\psi = (U - u)/u_*$ носит название «дефекта» скорости.

Если теперь установить каким-либо способом вид зависимости $\tau/\tau_0 = f_\tau(\eta)$ и $l(\eta)$, то по формулам (9.16) и (9.17) можно построить безразмерные профили скорости в вязком подслое и в турбулентной области соответственно. В рассматриваемом методе для функции $f_\tau(\eta)$ принимается аппроксимация полиномом

$$f_\tau(\eta) = \tau/\tau_0 = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \dots, \tag{9.18}$$

степень которого зависит от числа граничных условий, используемых для определения коэффициентов b_i. Примем следующие вполне достоверные условия.

На стенке ($\eta = 0$), очевидно, $f_\tau(0) = 1$. Кроме того, из уравнений (8.83) при $\eta = 0$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} f_\tau(\eta) = \frac{\delta}{\tau_0}\frac{dp}{dx}.$$

На границе пограничного слоя ($\eta = 1$) $f_\tau(1) = 0$.

Вводя обозначение

$$\Phi = \frac{\delta}{\tau_0}\frac{dp}{dx} = -\frac{\delta\rho}{\tau_0}U\frac{dU}{dx} = -\frac{\delta U}{u_*^2}\frac{dU}{dx}, \tag{9.19}$$

и подставляя указанные граничные условия в формулу (9.18), после определения коэффициентов b_0, b_1, ... находим

$$f_\tau(\eta) = 1 + \Phi\eta - (1 + \Phi)\eta^2. \tag{9.20}$$

Для закона распределения длины пути перемешивания следует принять одну из эмпирических или полуэмпирических зависимостей. Расчеты показывают, что для внешней задачи и для течений в плоских каналах подходит формула Прандтля—Никурадзе

$$l/\delta = 0{,}14 - 0{,}08(1 - \eta)^2 - 0{,}06(1 - \eta)^4, \tag{9.21}$$

полученная по результатам экспериментов, проведенных на гладких трубах.

Подставляя выражение (9.20) в зависимость (9.16), вычисляя интеграл и ограничиваясь членами порядка не выше η^2, получаем закон распределения скорости в вязком подслое:

$$\frac{u}{u_*} = \mathrm{Re}_\tau(\eta + 0{,}5\Phi\eta^2), \tag{9.22}$$

где $\mathrm{Re}_\tau = u_*\delta/\nu$.

Отсюда следует, что профиль скорости в вязком подслое зависит в общем случае от одного параметра Φ, а значит, от градиента давления и только при $\partial p/\partial x = 0$ является линейным.

Безразмерный профиль скорости в турбулентной части пограничного слоя можно построить, подставив выражения (9.20) и (9.21) в формулу (9.17) и вычислив интеграл. В общем случае это можно сделать только численно. Однако ясно, что безразмерный профиль дефекта скорости ψ будет зависеть от одного параметра Φ. При этих расчетах необходимо знать толщину $\delta_л$ вязкого подслоя. Ее можно найти исходя из допущения, что на границе вязкого подслоя с турбулентным течением местное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_л = u_л\delta_л/\nu$ достигает некоторого критического значения α^2. Согласно выражению (9.22) на этой границе справедливо соотношение

$$\frac{u_л\delta_л}{\nu} = \mathrm{Re}_л = \mathrm{Re}_\tau^2(\eta_л^2 + 0{,}5\Phi\eta_л^3) = \alpha^2, \qquad (9.23)$$

где $\eta_л = \delta_л/\delta$.

Сравнение расчетов с экспериментальными данными показало, что $\alpha \approx 10$. Поскольку $\eta_л \ll 1$, можно пренебречь членом, содержащим $\eta_л^3$, в результате чего получается зависимость, определяющая толщину вязкого подслоя:

$$\mathrm{Re}_\tau\eta_л = \alpha \text{ или } u_*\delta_л/\nu = \alpha. \qquad (9.24)$$

Связь между толщиной пограничного слоя δ и напряжением на стенке τ_0 устанавливают исходя из условия, что на границе вязкого подслоя ($y = \delta_л$) скорости потока, вычисленные по формулам (9.17) и (9.22), должны быть одинаковыми:

$$\frac{U}{u_*} = \mathrm{Re}_\tau\,\eta_л(1 + 0{,}5\Phi\eta_л) + \psi(\Phi,\ \eta_л). \qquad (9.25)$$

Эта зависимость называется законом сопротивления. Если использовать выражение (9.23), то можно исключить Re_τ и представить закон сопротивления в виде

$$\frac{U}{u_*} = \alpha\sqrt{1 + 0{,}5\Phi\eta_л} + \psi(\Phi,\ \eta_л). \qquad (9.25')$$

Вычислив интегралы в правой части формул (9.16) и (9.17), можно определить интегральные характеристики пограничного слоя

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1\left(1 - \frac{u}{U}\right)d\eta = \frac{u_*}{U}J_1;$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)d\eta = \frac{u_*}{U}J_1 - \left(\frac{u_*}{U}\right)^2 J_2; \qquad (9.26)$$

где $J_1 = \int_0^1 \psi\,d\eta$; $J_2 = \int_0^1 \psi^2\,d\eta$.

При вычислении интегралов J_1 и J_2 на участке от $\eta = 0$ до $\eta = \eta_л$ используют формулу (9.22), а на участке от $\eta_л$ до 1 — (9.17). Теперь параметр $H = \delta^*/\delta^{**}$ выразим зависимостью

$$H = \left[1 - \frac{u_*}{U}\frac{J_2}{J_1}\right]^{-1}. \qquad (9.27)$$

Число Рейнольдса Re^{**} представим в форме

$$\mathrm{Re}^{**}=\frac{\delta^{**}U}{\nu}=\frac{\delta^{**}}{\delta}\frac{u_*\delta}{\nu}\frac{U}{u_*}$$

и используем формулы (9.23) и (9.26) для Re_τ и δ^{**}/δ. Получим связь между Re^{**} и толщиной вязкого подслоя:

$$\mathrm{Re}^{**}=\alpha\left(J_1-\frac{u_*}{U}J_2\right)\left(\eta_л^2+0{,}5\Phi\eta_л^3\right)^{-1/2}. \qquad (9.28)$$

Если теперь задать ряд произвольных значений $\eta_л$, то для каждого фиксированного Φ можно вычислить: u_*/U по формуле (9.25′) и затем $C_f=C_\tau=2\,(u_*/U)^2$; H — по (9.27); δ^*/δ и δ^{**}/δ — по (9.26), а по (9.28) — соответствующее число Re^{**}.

Следовательно, эти параметры могут быть выражены как функции числа Re^{**} и формпараметра Φ. Но расчеты показали, что вместо последнего удобнее использовать формпараметр Бури— Лойцянского

$$f=-\frac{2\delta^{**}}{C_{\tau 0}\delta U^2}\frac{dp}{dx}=-\Phi\frac{\delta^{**}}{\delta}\frac{C_\tau}{C_{\tau 0}}, \qquad (9.29)$$

где $C_{\tau 0}$ — коэффициент сопротивления трения при $\Phi=0$.

С учетом выражения (9.26) формулу можно записать в виде

$$fC_{\tau 0}=-2\Phi\left(\frac{u_*}{U}\right)^3\left(J_1-\frac{u_*}{U}J_2\right). \qquad (9.29')$$

Анализ результатов расчетов показывает, что интегралы J_1 и J_2 при $\lg\mathrm{Re}^{**}>3\ \ldots\ 3{,}5$ являются функциями только формпараметра Φ. Учитывая выражение (9.25), заключаем, что вместо переменных Re^{**} и Φ, можно использовать Re^{**} и f, т. е. найти $C_\tau/C_{\tau 0}\,(f\,\mathrm{Re}^{**})$ и $H\,(f,\ \mathrm{Re}^{**})$. Эти зависимости рассчитаны на ЭВМ, изображены графически и для них найдены интерполяционные формулы [27].

Теперь расчет пограничного слоя можно выполнить по следующей схеме. Так как скорость внешнего потока является заданной (или заранее рассчитанной величиной), то, внося в интегральное соотношение импульсов (8.83′) найденные зависимости для C_τ и H, можно это уравнение рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно толщины потери импульса δ^{**}. Интегрирование выполняют одним из численных методов. После нахождения $\delta^{**}(x)$ по указанным выше зависимостям определяют остальные параметры пограничного слоя (C_τ, H и др.). Координату точки отрыва находят из условия $C_\tau=0$. Расчеты выполняют на ЭВМ с использованием стандартных программ интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

9.6. ЗАТОПЛЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

В некоторых технических задачах (например, при проектировании устройств струйной гидропневмоавтоматики) приходится рассчитывать параметры турбулентных затопленных

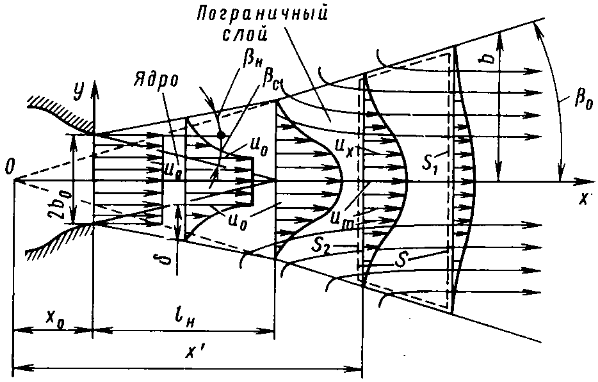


Рис. 9.7. Схема свободной турбулентной струи

струй, образующихся при истечениях жидкости из отверстий и сопл в среду тех же физических свойств, что и струя. Режим течения в таких струях может быть ламинарным, однако наибольшее практическое значение имеют турбулентные струи, основы теории которых рассмотрены в настоящем параграфе.

Дадим прежде всего качественное описание структуры затопленной свободной, т. е. не стесненной стенками, турбулентной струи, вытекающей из плоского или круглого сопла (рис. 9.7). Если сопло надлежащим образом профилировано, то распределение скоростей в его выходном сечении будет равномерным. По мере продвижения струи происходит ее торможение окружающей жидкостью и наряду с этим вовлечение последней в движение. Поэтому на некотором расстоянии $l_н$ поперечное сечение ядра течения с равномерным распределением скоростей уменьшается до нуля, а вокруг него образуется струйный пограничный слой, в котором скорость асимптотически изменяется от значения u_0 до нуля при удалении от оси струи. Участок длиной $l_н$, состоящий из ядра и струйного пограничного слоя, называют начальным участком свободной струи. За сечением $x = l_н$ лежит относительно небольшой переходный участок.

Обычно используют упрощенную схему, полагая длину переходного участка равной нулю и считая, что в сечении $x = l_н$ начинается основной участок, целиком состоящий из струйного пограничного слоя, в котором скорость изменяется от u_m на оси до нуля на достаточном удалении от нее. Осевая скорость u_m на основном участке убывает от значения u_0 до нуля на бесконечности. На рис. 9.8 приведены профили скоростей для плоской струи, вытекающей из прямоугольного отверстия размером $0{,}03 \times \times 0{,}65$ м; каждая кривая на рисунке соответствует фиксированному расстоянию x от выходного отверстия. Можно видеть, что ядро с равномерным распределением скоростей исчезает уже на расстоянии 0,2 м. На рис. 9.9 показан профиль скоростей на основном участке, построенный в безразмерных переменных $u_x/u_m = f(y/y_{0,5})$, где $y_{0,5}$ — расстояние от оси, на котором скорость равна половине максимальной.

Характерной особенностью, установленной теоретическим анализом и многочисленными опытами, является приближенная прямолинейность границы равномерного ядра турбулентной струи и ее внешней границы, проведенной как геометрическое место точек, в которых скорость составляет заданную (малую) часть скорости на оси (например, $u = 0{,}01u_m$). Углы наклона внешних границ к оси струи на начальном и основном участках несколько различаются. Проведя внешние границы основного участка и продолжив их внутрь сопла до пересечения, получаем характерную для данной струи точку O, называемую полюсом (см. рис. 9.7).

Линии тока в области струйного течения имеют вид, показанный на рис. 9.7. Их наклон к оси струи очень мал, а значит, мала и поперечная составляющая u_y скорости.

Приведенная схема движения качественно воспроизводит структуру течения плоской струи, вытекающей из широкого щелевого отверстия, или течения в меридиональной плоскости круглой струи.

Экспериментальные данные, а также данные теоретического анализа позволяют заключить, что по мере удаления от выходного сечения сопла распределение скоростей и другие параметры все меньше зависят от условий истечения, а безразмерный профиль скорости приобретает универсальный характер. Поэтому с известным приближением, если нас интересует главным образом основной участок, можно реальную струю заменить струей-источником, т. е. бесконечно тонкой струей, вытекающей в направлении оси x из полюса O. Теоретическое описание струи-источника значительно проще, чем описание струи конечной толщины.

Наряду с расчетом параметров струй, распространяющихся в покоящейся среде, приходится определять параметры струй в потоках, а также двух или нескольких взаимодействующих струй. Существенное практическое значение имеют полуограни-

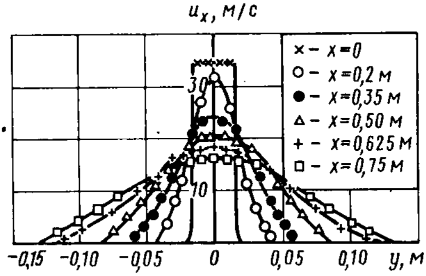


Рис. 9.8. Профили скоростей плоской турбулентной струи

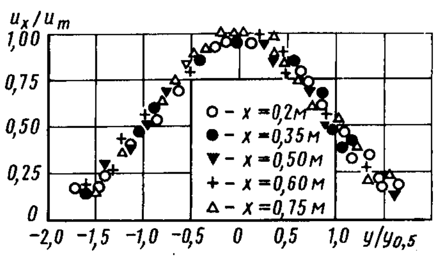


Рис. 9.9. Безразмерный профиль скорости на основном участке плоской турбулентной струи

ченные и ограниченные струи, с которыми приходится иметь дело при исследованиях потерь в местных сопротивлениях, при проектировании струйных элементов систем гидропневмоавтоматики, при расчетах проточных частей машин, аппаратов и т. п.

Рассмотрим закономерности и методы расчета некоторых простейших струйных течений.

Плоская свободная струя образуется при истечении из прямоугольного отверстия или сопла в достаточно большую емкость, стенки которой не влияют на параметры течения. Если пренебречь действием массовых сил, то в области такой струи давление, как показывает опыт, всюду можно считать постоянным (т. е. струя является изобарической). Поэтому уравнение количества движения, записанное для массы жидкости, ограниченной контрольной поверхностью S (штриховая линия на рис. 9.7), в проекции на ось x будет иметь вид

$$\int\limits_{S_1} \rho u_{x1}^2\, dS = \int\limits_{S_2} \rho u_{x2}^2\, dS.$$

Это равенство выражает постоянство потока количества движения через любое поперечное сечение (обозначено индексами 1 и 2) свободной струи:

$$J = \int\limits_{S} \rho u_x^2\, dS = \mathrm{const}. \tag{9.30}$$

Значение постоянной легко определяется для начального сечения

$$J = \rho u_0^2 \cdot 2b_0 l_0,$$

где $2b_0$ — высота выходного отверстия; l_0 — размер отверстия по нормали к плоскости течения.

Если ширину b струи определять с условной точностью, как указано выше, то

$$J = 2l_0 \int\limits_0^b \rho u_x^2\, dy = 2\rho u_0^2 b_0 l_0.$$

Вводя безразмерные величины u_x/u_0 и y/b, находим

$$\frac{b}{b_0} \int\limits_0^1 \left(\frac{u_x}{u_0}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right) = 1.$$

Для отношения u_m/u_0 из этого уравнения получим

$$\frac{b}{b_0}\,\frac{u_m^2}{u_0^2} \int\limits_0^1 \left(\frac{u_x}{u_m}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right) = 1. \tag{9.31}$$

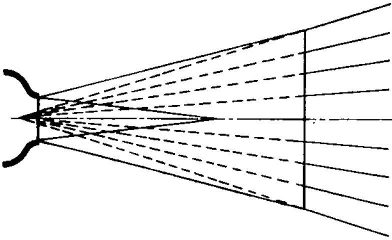


Рис. 9.10. Линии равных значений безразмерной скорости на основном участке затопленной струи

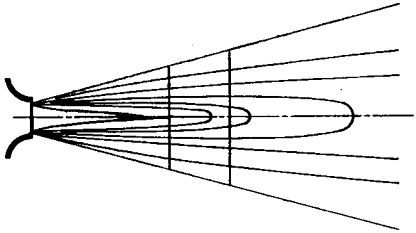


Рис. 9.11. Линии равных скоростей (изотахи) затопленной струи

Из рис. 9.9 следует, что безразмерный профиль скорости в пределах основного участка можно представить универсальной зависимостью

$$u_x/u_m = f\,(y/b), \tag{9.32}$$

т. е. задача определения профиля продольной составляющей скорости на основном участке свободной струи является автомодельной.

Следовательно, интеграл, входящий в (9.31), равен некоторому числу, которое можно найти, если установлен закон (9.32) распределения скоростей. Равенство (9.31) можно записать как соотношение для определения скорости на оси струи

$$u_m = \mathrm{const}/\sqrt{b}\,. \tag{9.33}$$

Если начало координат расположить в полюсе струи (см. рис. 9.7), то $b=\mathrm{const}\,x'$ и вместо выражения (9.33) можно записать

$$u_m = \mathrm{const}/\sqrt{x}\,. \tag{9.34}$$

Таким образом, свободная плоская турбулентная струя неограниченно расширяется вниз по течению, а ее осевая скорость убывает обратно пропорционально корню квадратному из расстояния от полюса.

Из формулы (9.32) следует, что для основного участка линиями равных безразмерных скоростей $u_x/u_m = \mathrm{const}$ будут линии, для которых $y/b = \mathrm{const}$. Поскольку $b = \mathrm{const}\cdot x'$, это эквивалентно условию $y/x' = \mathrm{const}$. Иными словами, линии $u_x/u_m = \mathrm{const}$ образуют пучок прямых, проходящих через полюс струи (рис. 9.10). Линии $u = \mathrm{const}$ (изотахи) образуют факел (рис. 9.11).

Описанная кинематическая схема течения, хотя и является приближенной, но достаточно удовлетворительно подтверждается опытами.

Значения констант в формулах (9.33) и (9.34) определяются значением интеграла, входящего в уравнение (9.31). Для его вычисления необходимо найти форму профиля скорости в струйном пограничном слое. Эта задача имеет несколько полуэмпириче-

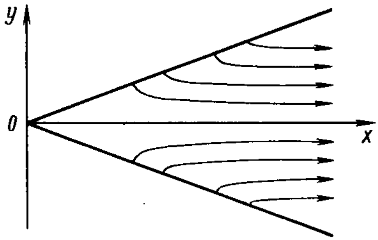


Рис. 9.12. Схема плоского турбулентного источника

ских решений, которые различаются как исходными предпосылками, так и формой результирующих зависимостей, но в большинстве своем удовлетворительно согласуются с результатами опытов.

Ниже приведено решение задачи о течении из плоского турбулентного источника (рис. 9.12), которое получено Гертлером на основе так называемой «новой теории свободной турбулентности Л. Прандтля». В силу сказанного выше это течение приближенно воспроизводит поток в области основного участка турбулентной струи. Начальная же часть источника между полюсом O и концом переходного участка должна быть исключена и заменена начальным и переходным участками струи, течение в которых требует специального рассмотрения.

Течение в области турбулентного плоского источника обладает всеми свойствами пограничного слоя и потому описывается уравнениями (9.3). Поскольку в струе $dp/dx = 0$, то и $U\,dU/dx = 0$. При этом уравнения (9.3) приобретают вид

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \qquad (9.35)$$

В струйном пограничном слое $\tau_\mu \ll \tau_т$ и потому в выражении (9.35) принимаем $\tau = \tau_т$. Преобразуем первое из этих уравнений. Если к его левой части прибавим величину $u_x\,\partial u_y/\partial y + u_x\,\partial u_x/\partial x$, которая в силу уравнения неразрывности равна нулю, то после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial x} u_x^2 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau}{\rho}. \qquad (9.36)$$

Согласно «новой теории Прандтля» примем, что кинематический коэффициент ε турбулентной вязкости в формуле Буссинеска $\tau = \rho\varepsilon\,\partial u_x/\partial y$ постоянен в пределах поперечного сечения струи. Приближенность этого допущения почти очевидна, так как вблизи границы струи (при больших y) более естественно считать $\varepsilon \to 0$. Тем не менее результаты, получаемые при допущении о независимости ε от y, оказываются вполне удовлетворительными. Принятая гипотеза и условия размерности позволяют заключить, что коэффициент ε турбулентной вязкости можно выразить формулой

$$\varepsilon = \varkappa b u_m, \qquad (9.37)$$

где $\varkappa = \text{const}$.

Действительно, пусть ε не зависит от y, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Размерность ε можно получить только путем умножения некоторой характерной длины на характерную скорость. Выберем в качестве этих величин ширину струи $b(x)$ и осевую скорость $u_m(x)$; тогда формула (9.31) будет удовлетворять условию размерности и сформулированной гипотезе. Учтем, кроме того, что $b = kx$ и $u_m = nx^{-1/2}$, где k и n — постоянные. Тогда

$$\varepsilon = \varkappa kn\sqrt{x}.$$

Принимая во внимание, что опытные данные достаточно точно подтверждают структуру формулы (9.32), будем искать профиль продольной составляющей скорости в виде

$$u_x/u_m = F'(\sigma y/x),$$

где σ — постоянная; F' — функция одной переменной $\xi = \sigma y/x$, подлежащая определению, причем штрих означает дифференцирование по этой переменной.

Имея выражение для продольной составляющей скорости

$$u_x = (n/\sqrt{x})\,F'(\xi)$$

и учитывая, что течение плоское, введем функцию тока ψ, для которой

$$u_x = \partial\psi/\partial y \quad \text{и} \quad u_y = -\partial\psi/\partial x.$$

Находим

$$\psi = \int u_x\,dy + g(x) = u_m\int F'(\xi)\,dy + g(x) =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{x}}\,\frac{x}{\sigma}\,F(\xi) + g(x) = \frac{n}{\sigma}\sqrt{x}\,F(\xi) + g(x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция.

Граничные условия на оси струи-источника можно задать в виде $\xi = 0$ ($y = 0$); $u_x = u_m$; $\psi = 0$. Следовательно, $F'(0) = 1$ и $n\sigma^{-1}\sqrt{x}F(0) + g(x) = 0$. Если выберем $g(x) = 0$, то получим $F(0) = 0$. Таким образом,

$$u_x = \frac{n}{\sqrt{x}}F'(\xi);\quad \psi = \frac{n}{\sigma}\sqrt{x}\,F(\xi); \tag{9.38}$$

$$u_y = \frac{n}{\sigma\sqrt{x}}\,[\xi F'(\xi) - F/2].$$

Вычислим теперь члены уравнения (9.36):

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{n}{\sqrt{x}}F'\,\frac{n}{\sigma\sqrt{x}}\left(\xi F' - \frac{F}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{n^2}{x^2}\left(2\xi F'F'' - \frac{FF''}{2} + \frac{(F')^2}{2}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_x^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{n^2}{x}(F')^2\right] = -\frac{n^2}{x^2}[2\xi F'F'' + (F')^2];$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{n}{\sqrt{x}}F''\,\frac{\sigma}{x};\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\,\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \varkappa k\sigma^2\,\frac{n^2}{x^2}F'''.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9.36) и производя упрощения, получаем уравнение для определения функции F:

$$FF'' + (F')^2 + 2\varkappa k\sigma^2 F''' = 0,$$

которое можно представить также в виде

$$\frac{d}{d\xi}(FF' + 2\varkappa k\sigma^2 F'') = 0.$$

Отсюда следует, что

$$FF' + 2\varkappa k\sigma^2 F'' = C_1.$$

Постоянную C_1 определяем из условия на оси струи, т. е. при $y = 0$:

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\sigma}{x} F''(0) = 0.$$

Следовательно, $C_1 = 0$. Для удобства интегрирования уравнения

$$FF' + 2\varkappa k\sigma^2 F'' = 0$$

учтем, что можно произвольно выбрать неопределенную пока постоянную σ. Допустим, что

$$\sigma = 1/(2\sqrt{\varkappa k}),$$

в результате чего получим уравнение

$$2FF' + F'' = 0,$$

интегрируя которое находим

$$F^2 + F' = C_2.$$

Из граничных условий $\xi = 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ определяем $C_2 = 1$ и, следовательно,

$$F^2 + F' = 1.$$

В результате интегрирования этого уравнения при известных уже граничных условиях приходим к функциям

$$F = \operatorname{th}\xi \quad \text{и} \quad F' = 1 - \operatorname{th}^2\xi. \tag{9.39}$$

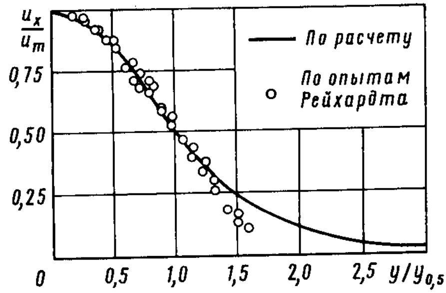
Согласно выражению (9.38) получаем распределение скоростей в поле струи-источника:

$$u_x = u_m\,(1 - \operatorname{th}^2\xi); \tag{9.40}$$

$$\sigma u_y = u_m\,(\xi - \xi\operatorname{th}^2\xi - 0{,}5\operatorname{th}\xi).$$

На основании опытных данных Рейхардта Гёртлер определил, что $\sigma = 7{,}67$. На рис. 9.13 дано сопоставление профиля скорости, вычисленного по уравнениям (9.40), с опытными данными Рейхардта. Можно видеть, что в основной части профиля теория Гертлера дает неплохое совпадение с опытными данными, однако

Рис. 9.13. Сопоставление теоретического и экспериментального профилей скорости для основного участка плоской затопленной струи



на границах струи в области малых скоростей теоретические скорости заметно больше опытных. Это расхождение можно объяснить приближенностью принятой в теории гипотезы о постоянстве коэффициента ε в пределах поперечного сечения струи.

Наличие поперечной составляющей скорости на внешней границе струи приводит к подсасыванию (инжекции) жидкости в поле течения струи, благодаря чему ее расход возрастает вниз по течению.

Наряду с решением (9.42) существуют другие зависимости для описания поля скоростей плоской турбулентной струи. Весьма удобная формула для продольной составляющей скорости получается, если ее профиль аппроксимировать полиномом

$$u_x = a_0(x) + a_1(x)\,y + a_2(x)\,y^2 + a_3(x)\,y^3.$$

Коэффициенты a_i можно найти из граничных условий:

при $y = 0$ $\quad u_x = u_m, \quad \partial u_x/\partial y = 0;$

при $y = b$ $\quad u_x = 0, \quad \partial u_x/\partial y = 0.$

Тогда закон распределения скорости примет вид

$$u_x = u_m\,(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3), \qquad (9.41)$$

где $\eta = y/b$.

Хорошую согласованность с опытными данными дает также формула

$$u_x = u_m\,(1 - \eta^{1,5})^2, \qquad (9.42)$$

полученная Шлихтингом для распределения скорости в турбулентном следе за обтекаемым телом, но применимая и для струйного пограничного слоя.

Для начального участка плоской струи распределение скорости вне ядра течения, т. е. в струйном пограничном слое, можно получить и на основе уравнений (9.35). Для практических расчетов можно воспользоваться зависимостью Шлихтинга в форме

$$u_x/u_0 = f(\eta_н),$$

где

$$\eta_н = \frac{y - y_я}{\delta}; \quad f(\eta_н) = (1 - \eta_н^{3/2})^2,$$

причем $y_я$ представляет собой ординату границы ядра с равномерным распределением скорости (см. рис. 9.7), а δ — толщина пограничного слоя: $\delta = y_{гр} - y_я$ (здесь $y_{гр}$ — ордината границы струи).

Использование полуэмпирических теорий, в том числе новой теории Прандтля, примененной выше для плоской струи, позволяет получить решение также и для осесимметричной струи-источника. Приведем основные данные о турбулентных плоских и осесимметричных струях, необходимых для их практического расчета (подробное изложение см. в работах [5, 25]). Все данные относятся к равномерному распределению скоростей на срезе сопла. Структура приводимых зависимостей обосновывается теорией, а значения постоянных определены на основе многочисленных опытов.

Плоская струя (см. рис. 9.7). Для определения скорости на оси струи в пределах основного участка служит равенство (9.31), которое можно переписать в виде

$$u_m = \frac{u_0\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{\int\limits_0^1 f^2(\eta)\,d\eta}}.$$

Поскольку $b = \operatorname{tg}\beta_0 \cdot x'$ (где β_0 — угол наклона внешней границы струи к оси x),

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{x'\operatorname{tg}\beta_0}\sqrt{\int\limits_0^1 f^2(\eta)\,d\eta}}.$$

Если для функции $f(\eta)$ использовать формулу (9.41), то

$$\int\limits_0^1 f^2(\eta)\,d\eta = 0{,}37.$$

Согласно опытным данным, полученным Фертманом, $\operatorname{tg}\beta_0 = 0{,}22$. Тогда расчетная формула будет иметь вид

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{3{,}5\sqrt{b_0}}{\sqrt{x'}} = \frac{3{,}5\sqrt{b_0}}{\sqrt{x+x_0}} = 3{,}5\,(\bar{x}')^{-1/2}.$$

Для определения длины начального участка используем выражение (9.30), приравняв значения J в переходном сечении его значению на срезе сопла:

$$\rho u_0^2 b_0 = \rho b_п u_0^2 \int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{u_0^2}\, d\left(\frac{y}{b_п}\right)$$

или

$$b_н = \frac{b_0}{\int\limits_0^1 f^2(\eta)\,d\eta} = \frac{b_0}{0{,}37} = 2{,}7b_0.$$

Теоретическое, подтверждаемое опытами, рассмотрение пограничного слоя в пределах начального участка показывает, что толщина δ этого слоя увеличивается пропорционально расстоянию от среза сопла, т. е. $\delta = c_н x$, где для плоских и осесимметричных струй $c_н = 0{,}27$ (см. рис. 9.7). Следовательно, для конца начального участка, где $b_п = \delta_п = c_н x_н$ (индекс «п» означает, что параметры относятся к переходному сечению),

$$x_п = 2{,}7b_0/0{,}27 = 10b_0.$$

Зная $x_п$ и $b_п$, можно вычислить угол $\beta_н$ расширения внешней границы на начальном участке и угол $\beta_с$ сужения ядра:

$$\operatorname{tg}\beta_н = (b_п - b_0)/x_п = 0{,}17;\ \operatorname{tg}\beta_с = b_0/x_п = 0{,}1.$$

Установим закономерность изменения расхода плоской струи. Для начального участка

$$Q(x) = 2\left(u_0 y_я + \int\limits_{y_я}^{b} u_x\,dy\right) = 2u_0\left(y_я + \int\limits_{y_я}^{b} f(\eta_н)\,dy\right),$$

где $\eta_н = (y - y_я)/\delta$.

Поскольку $d\eta = dy/\delta$,

$$Q(x) = 2u_0\left[y_я + \delta\int\limits_0^1 (\eta_н)\,d\eta_н\right].$$

Если использовать для функции $f(\eta_н)$ зависимость (9.41), то можно получить

$$\int\limits_0^1 f(\eta_н)\,d\eta_н = 0{,}5.$$

Учитывая, что $y_я = b_0 - x\operatorname{tg}\beta_с$, $\delta = xc_н$, находим

$$Q(x) = 2u_0\,[b_0 - x(\operatorname{tg}\beta_с - 0{,}5c_н)].$$

Принимая $\operatorname{tg}\beta_с = 0{,}1$; $c_н = 0{,}27$ и разделив $Q(x)$ на расход в выходном сечении сопла $Q_0 = 2u_0 b_0$, получим безразмерную форму последней зависимости

$$Q(x)/Q_0 = 1 + 0{,}035\bar{x}, \tag{9.43}$$

где $\bar{x} = x/b_0$.

Расход на основном участке струи

$$Q(x) = 2\int_0^b u_x\,dy = 2\delta u_m \int_0^1 f(\eta)\,d\eta = u_m\delta,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{Q(x)}{Q_0} = \frac{u_m\delta}{2u_0b_0} = \frac{3{,}5\sqrt{\bar{b}_0}\,x'\operatorname{tg}b_0}{2\sqrt{x'}\;b_0} = 0{,}385\sqrt{\frac{x'}{b_0}}. \qquad (9.44)$$

В переходном сечении формулы (9.43) и (9.44) должны давать один и тот же результат. Следовательно,

$$1 + 0{,}035\bar{x}_{\text{п}} = 0{,}385\sqrt{\bar{x}_{\text{п}} + \bar{x}_0}.$$

Так как $\bar{x}_{\text{п}} = 10$, то из последнего соотношения найдем полюсное расстояние $\bar{x}_0 = 2{,}3$.

Таким образом определяют все геометрические параметры плоской затопленной струи.

Осесимметричная (круглая) струя. Ее расчет можно выполнить по аналогичной схеме. Основные результаты такого расчета следующие.

Закон изменения осевой скорости

$$u_m/u_0 = 10{,}7/\bar{x}';$$

толщина пограничного слоя в переходном сечении

$$b_{\text{п}} = 2{,}42b_0;$$

длина начального участка, определяемая координатой $x_{\text{п}}$,

$$x_{\text{п}} = 8{,}95b_0.$$

Характерные углы

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{н}} = 0{,}158;\ \operatorname{tg}\beta_{\text{о}} = 0{,}112;$$

безразмерный расход на начальном участке

$$Q(x)/Q_0 = 1 + 0{,}046\bar{x} + 0{,}004\bar{x}^2,$$

на основном участке

$$Q(x)/Q_0 = 0{,}155\bar{x}';$$

полюсное расстояние

$$\bar{x}_0 = 2{,}06.$$

Следует иметь в виду, что параметры турбулентной струи существенно зависят от равномерности распределения скоростей на срезе сопла, а также от степени турбулентности потока. Приведенные выше значения этих параметров относятся к малой турбулентности при равномерном распределении скорости u_0.

10. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ. КАВИТАЦИЯ

10.1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛО, ОБТЕКАЕМОЕ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

При обтекании потоком вязкой жидкости твердой поверхности в каждой точке последней развиваются напряжения $\boldsymbol{p}_n$. При этом главный вектор поверхностных сил гидродинамического воздействия на тело

$$\boldsymbol{P} = \int_S \boldsymbol{p}_n \, dS. \tag{10.1}$$

Напряжение $\boldsymbol{p}_n$ поверхностной силы, действующей со стороны жидкости на тело, можно представить в виде (см. п. 3.1)

$$\boldsymbol{p}_n = p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\tau}_s,$$

где $\boldsymbol{n}$— единичный вектор нормали, наружной для объема жидкости (рис. 10.1).

Следовательно, силу $\boldsymbol{P}$ можно выразить формулой

$$\boldsymbol{P} = \int_S p\boldsymbol{n} \, dS + \int_S \boldsymbol{\tau}_s \, dS = \boldsymbol{P}_\text{p} + \boldsymbol{P}_\tau, \tag{10.2}$$

где $\boldsymbol{P}_\text{p}$ — результирующая сила давления; $\boldsymbol{P}_\tau$ — результирующая сила поверхностного трения.

Относительно произвольно выбранного центра приведенная сила $\boldsymbol{P}$ образует главный момент

$$\boldsymbol{M} = \int_S (\boldsymbol{p}_n \times \boldsymbol{r}_s) \, dS = \int_S p (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_s) \, dS + \int_S (\boldsymbol{\tau}_s \times \boldsymbol{r}_s) \, dS, \tag{10.3}$$

где $\boldsymbol{r}_s$— радиус-вектор.

Из формул (10.2) и (10.3) следует, что для вычисления главного вектора и главного момента сил, действующих на обтекаемое тело, надо определить законы распределения по его поверхности гидродинамического давления p и касательного напряжения τ_s, т. е. решить

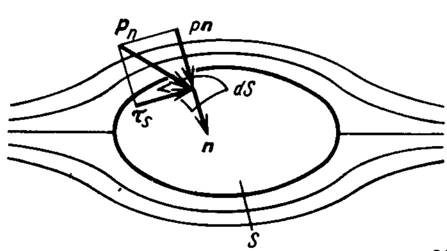


Рис. 10.1. Схема для определения силы воздействия потока на обтекаемое тело

общую задачу гидродинамики. Вычисления можно упростить, если изучить составляющие вектора $\boldsymbol{P}$.

Пусть $\boldsymbol{v}_0$ — вектор скорости равномерного потока, обтекающего тело. Направим ось x по направлению скорости $\boldsymbol{v}_0$ и разложим вектор $\boldsymbol{P}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_x + \boldsymbol{P}_y + \boldsymbol{P}_z.$$

Очевидно, P_x есть сила, стремящаяся сдвинуть тело по направлению течения; ее называют гидродинамическим сопротивлением. Силы P_y и P_z являются поперечными силами, смещающими тело в направлениях, нормальных к вектору $\boldsymbol{v}_0$. Если тело обладает симметрией или является цилиндром, то, выбрав ось y в плоскости симметрии, получим, очевидно, $P_z = 0$. Ограничимся в дальнейшем этими случаями, причем вектор $\boldsymbol{v}_0$ направим горизонтально, а ось y — вертикально вверх. Из выражения (10.2) получим

$$P_y = \int_S p\cos(n,\ y)\,dS + \int_S \tau_s \cos(\tau,\ y)\,dS,$$

откуда следует, что поперечная сила P_y зависит не только от нормальных, но и от касательных напряжений на поверхности тела. Последние чаще всего играют незначительную роль в определении этой силы и ими пренебрегают. Если бы течение отсутствовало (покоящаяся жидкость), то при наличии силы тяжести воздействие жидкости на тело свелось бы (см. гл. 4) к архимедовой подъемной силе $P_{\text{А}}$. С другой стороны невесомая идеальная жидкость, как известно из гл. 7, создает на обтекаемом теле подъемную силу $P_{\text{п}}$ Жуковского. Поэтому следует считать, что в общем случае

$$P_y = P_{\text{А}} + P_{\text{п}}.$$

Каждую из этих составляющих можно вычислить методами, изложенными соответственно в гл. 4 и 7. Если тело обтекается неустановившимся потоком, то может возникнуть еще поперечная составляющая силы инерционного сопротивления.

Рассмотрим силу гидродинамического сопротивления P_x. Из выражения (10.2) получим

$$P_x = \int_S p\cos(n,\ x)\,dS + \int_S \tau_s \cos(\tau,\ x)\,dS. \tag{10.4}$$

Оба слагаемых в этой формуле могут быть по величине сопоставимы друг с другом. Первое из них

$$R_{\text{д}} = \int_S p\cos(n,\ x)\,dS \tag{10.5}$$

зависит, как видно, от распределения давления по поверхности тела и потому называется сопротивлением давления. Второе слагаемое $R_{\text{тр}} = \int_S \tau_s \cos(\tau,\ x)\,dS$ определяется распределением касательных напряжений и называется сопротивлением трения. Каждую из этих сил можно разложить на более частные составляющие. Рассмотрим вначале сопротивление давления.

При обтекании круглого цилиндра потенциальным потоком благодаря симметричному распределению давлений по поверхности цилиндра результирующая этих сил равна нулю (парадокс Даламбера). Следовательно, для этого случая $R_д = 0$. Можно доказать, что во всех случаях безотрывного обтекания цилиндрических тел потенциальным потоком сопротивление давления равно нулю. Однако при отрывном обтекании, когда за телом образуется «мертвая зона» или суперкавитационная каверна (см. п. 10.2), теория потенциальных течений дает не равное нулю значение силы сопротивления давления. Так, в п. 7.12 было доказано, что при струйном обтекании пластины, поставленной нормально к потоку (см. рис. 7.30), коэффициент лобового сопротивления, являющегося в данном случае сопротивлением давления, равен 0,88. Это подтверждается опытом только в тех случаях, когда за обтекаемым телом действительно образуется зона, заполненная парами или газом, в которой давление приблизительно постоянно, как это предусмотрено теорией. Но в большинстве случаев за обтекаемым телом образуется так называемый гидродинамический след, представляющий собой область, заполненную крупными вихрями, которые, взаимодействуя и диффундируя, постепенно сливаются и теряют индивидуальность. На достаточном расстоянии от тела (дальний след) образуется непрерывное распределение дефекта скоростей в потоке, близкое к распределению скоростей в струйном пограничном слое. Наличие вихрей в гидродинамическом следе приводит к понижению давления на тыльной части поверхности тела и соответствующему увеличению сопротивления давления, которое часто называют также вихревым сопротивлением.

Экспериментальное значение коэффициента сопротивления пластины, поставленной нормально к потоку, может достигать значений $C_x = 2$. Следует, однако, иметь в виду, что структура течения в ближнем следе, а значит, и давление на тыльной стороне обтекаемого тела существенно зависят от числа Рейнольдса. По рис. 10.2 можно проследить характер изменения структуры потока за сферой при изменении Re от 9,15 до 133, а по рис. 10.7 — за цилиндром при Re = 0,25 ... 57,7. Но возможны и другие конфигурации потока. Они в значительной степени определяются также формой и положением обтекаемого тела. Так, например, при обтекании цилиндрических тел крылового профиля при малом угле атаки (см. рис. 8.30, *а*) возможно практически безотрывное течение, при котором форма линий тока для вязкой жидкости близка к форме этих линий для идеальной жидкости. Но при возрастании угла атаки увеличиваются положительные градиенты давлений на выпуклой части поверхности профиля и это в итоге приводит к отрыву пограничного слоя, который быстро сверты-

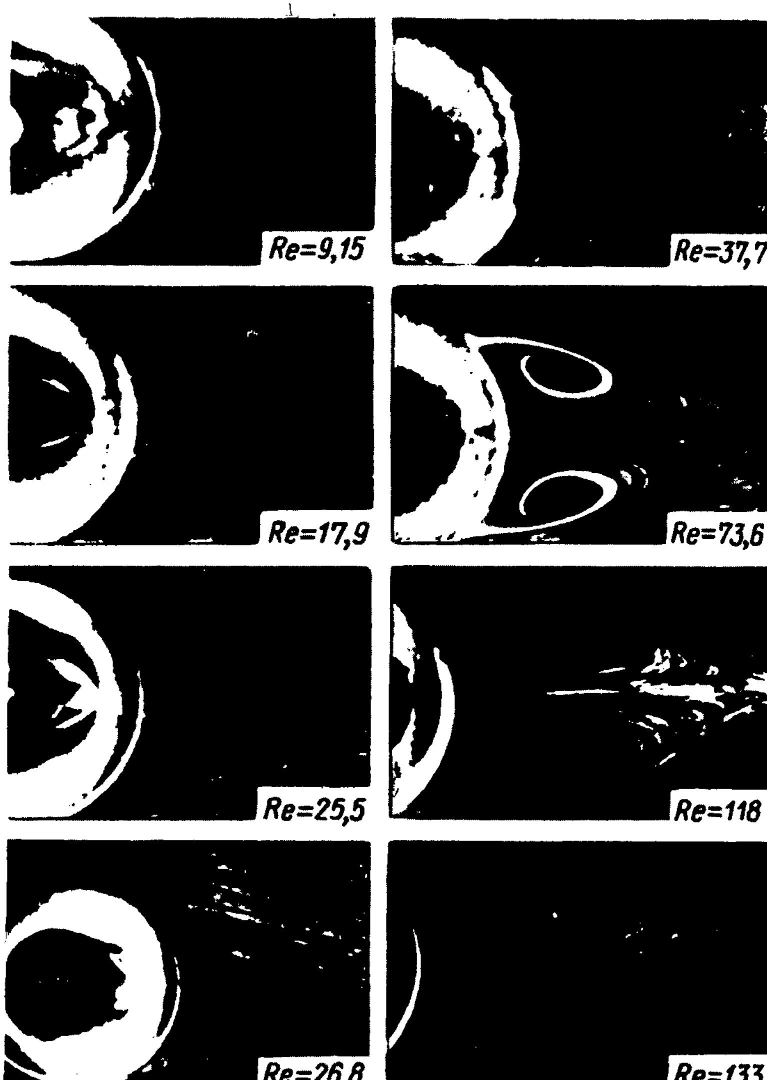


Рис. 10.2. Изменение структур потока за сферой при изменении числа Рейнольдса $Re = u_0 D/\nu$ (где u_0 — скорость потока в бесконечности; D — диаметр сферы)

вается в отдельные вихри, образующие гидродинамический след (см. рис. 8.30, *б*).

Таким образом, цилиндр крылового профиля в зависимости от его положения в потоке может быть удобо- или неудобообтекаемым телом. В первом случае его сопротивление давления мало и сила лобового сопротивления почти полностью определяется вторым слагаемым в формуле (10.4), т. е. сопротивлением трения. Во втором случае, наоборот, сопротивление давления велико, а трение в большинстве случаев пренебрежимо мало. Применяя уравнение количества движения, можно показать, что сопротивление давления тем меньше, чем меньше ширина гидродинамического следа (вихревой зоны за телом). Поэтому удобообтекаемыми могут быть только такие тела, которые имеют заостренную или тонкую заднюю кромку. Для них при безотрывном обтекании теоретическая ширина следа равна нулю.

Поскольку сопротивление давления определяется только распределением давления по поверхности тела, естественно попытаться в рамках теории идеальной жидкости построить такую схему течения, которая давала бы теоретическое распределение, близкое к действительному. Схема безотрывного обтекания круглого цилиндра потенциальным потоком, рассмотренная в гл. 7, дает удовлетворительный результат только для лобовой части поверхности цилиндра, а на тыльной ее стороне теоретическое и опытное распределения давлений резко расходятся, причем теория приводит к парадоксу Даламбера. Схема отрывного обтекания (Кирхгофа), как отмечено выше, дает более точный результат по распределению скорости, однако расчетное сопротивление при этом почти в 2 раза меньше действительного. Хорошая согласованность теоретических и экспериментальных результатов получается при использовании схемы так называемой «вихревой дорожки» Кармана, согласно которой за обтекаемым телом образуется полоса, заполненная дискретными вихрями, расположенными в шахматном порядке (рис. 10.3). При определенном соотношении расстояний между вихрями эта «дорожка» является устойчивой и с помощью уравнения импульсов можно найти теоретическое значение вихревого сопротивления.

На рис. 10.4 показана теоретическая конфигурация линий тока для такой вихревой дорожки, а на рис. 10.5 — фотография такого же течения, полученная в опытах при обтекании круглого цилиндра с числом $\mathrm{Re} = v_0 d/\nu = 250$, где d — диаметр цилиндра. При этом режиме течение становится нестационарным, с верхней и нижней кромки обтекаемого тела попеременно срываются крупные вихри, которые, перемещаясь по течению, образуют «вихревую дорожку». Коэффициенты сопротивления, полученные теоретически с использованием схемы «вихревой дорожки» за круглым цилиндром и пластиной с достаточной степенью точности совпадают с результатами опытов (погрешность для цилиндра составляет 1,1 %, для пластины 9,4 %).

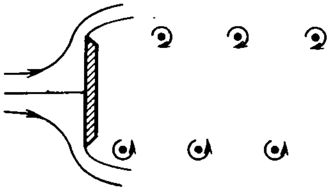


Рис. 10.3. Схема «вихревой дорожки» Кармана

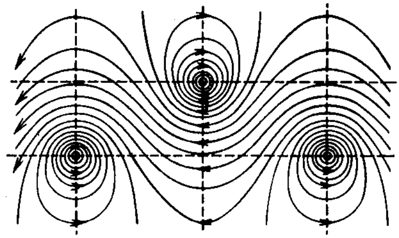


Рис. 10.4. Теоретическая конфигурация линий тока в «вихревой дорожке»

Однако структура потока типа «вихревой дорожки» существует в относительно узком диапазоне чисел Re. При увеличении Re картина течения в следе изменяется. Тем не менее дальнейшее развитие теории идеальной жидкости и применение вычислительной техники позволили достаточно надежно рассчитывать не только сопротивление давления при обтекании простейших цилиндрических тел, но решать гораздо более трудные задачи (например, нестационарные обтекания крыловых поверхностей сложных конфигураций [2]).

Сочетание же методов теории идеальной жидкости с теорией пограничного слоя привело к появлению нового и уже глубоко разработанного раздела гидродинамики, посвященного отрывному обтеканию тел [6].

Сила $R_{тр}$ сопротивления трения полностью определяется касательными напряжениями на поверхности тела, которые можно рассчитать методами теории пограничного слоя (см. гл. 8 и 9). При этом для отрывного обтекания профилей умеренной относи-

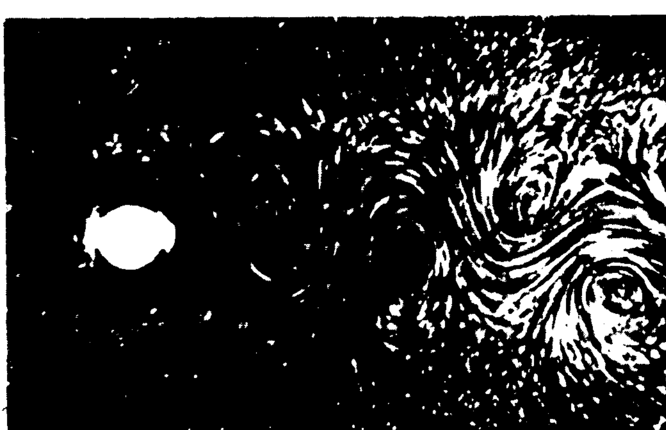


Рис. 10.5. Фотография течения в «вихревой дорожке» (фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости)

тельной толщины теоретически можно найти не только сопротивление трения, но и полное (профильное) сопротивление [6]. Для тел произвольной формы достаточно точное определение полного сопротивления и его слагаемых нередко оказывается невозможным и приходится использовать экспериментальные данные. При этом каждую гидродинамическую силу характеризуют своим безразмерным коэффициентом.

Приведем формулу (10.4) к безразмерному виду. Для этого выберем характерную скорость v (например, скорость невозмущенного потока v_0) и характерную площадь S_0 и запишем выражение (10.4) в виде

$$P_x = \frac{\rho v^2}{2} S_0 \left[2 \int\limits_{\bar{S}} \mathrm{Eu} \cos(n, x)\, d\bar{S} + \int\limits_{\bar{S}} c_f \cos(\tau, x)\, d\bar{S} \right], \qquad (10.6)$$

где $\mathrm{Eu} = p/(\rho v^2)$, $c_f = 2\tau_s/(\rho v^2)$, $\bar{S} = S/S_0$.

Обозначим выражение в квадратной скобке через C_x. Эту величину называют коэффициентом лобового сопротивления, а формулу для силы P_x записывают в виде

$$P_x = C_x S_0 \rho v^2/2. \qquad (10.7)$$

При экспериментальном определении сопротивления тел в качестве характерной площади S_0 выбирают обычно площадь миделевого сечения, т. е. площадь проекции поверхности тела S на плоскость, нормальную вектору скорости v_0.

Безразмерный коэффициент C_x характеризует суммарное сопротивление и зависит от формы обтекаемого тела и числа Рейнольдса, причем в результате экспериментальных исследований получено, что эта зависимость имеет весьма сложный характер.

Как было показано в п. 6.4, местный коэффициент трения можно выразить формулой (6.19). Введя обозначения

$$A_1 = 2 \int\limits_{\bar{S}} \mathrm{Eu} \cos(n, x)\, d\bar{S} \quad \text{и} \quad A_2 = \int\limits_{\bar{S}} A \cos(\tau, x)\, d\bar{S},$$

для коэффициента лобового сопротивления получим

$$C_x = A_1 + A_2/\mathrm{Re}. \qquad (10.8)$$

Очевидно, параметр A_1 определяется законом распределения давления на поверхности тела, а параметр A_2 — законом распределения касательных напряжений. И тот и другой законы зависят от числа Re, поскольку с его изменением изменяется характер течения в пограничном слое. Поэтому зависимость C_x (Re) в широком диапазоне изменения Re оказывается достаточно сложной.

На рис. 10.6 приведены кривые C_x (Re) для круглого цилиндра и шара. При малых числах Re картина обтекания цилиндра, т. е. конфигурация линий тока близка к картине обтекания идеальной жидкостью (рис. 10.7), поэтому и распределение давления по поверхности цилиндра близко к рассмотренному в гл. 7.4. При этом, очевидно, должно быть $A_1 \approx 0$ и $C_x \approx A_2/\mathrm{Re}$. Кривая

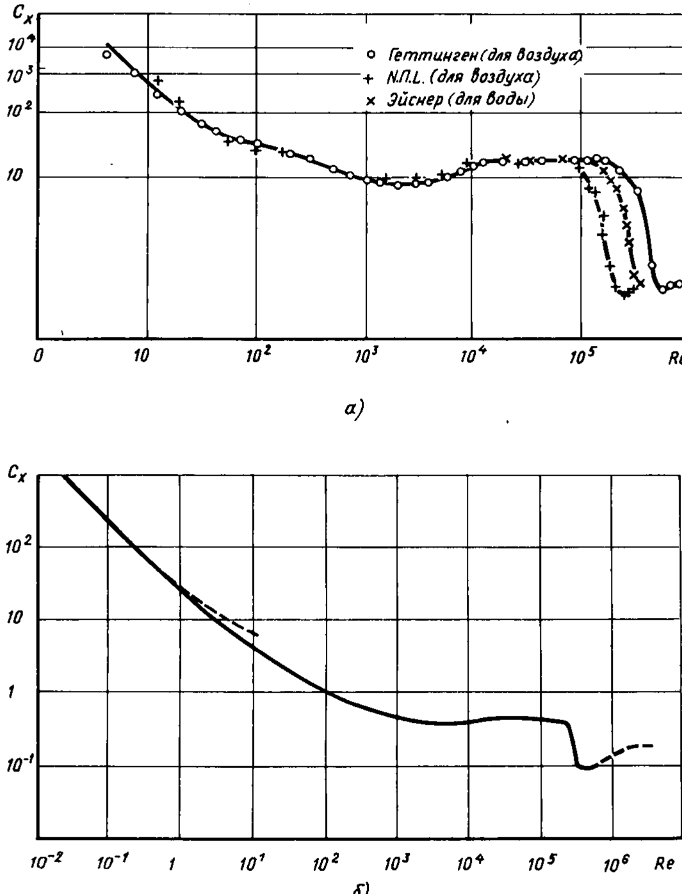


Рис. 10.6. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса:

а — для круглого цилиндра; *б* — для шара; — — — — решение А. Озина

C_x (Re) для шара достаточно хорошо соответствует этой формуле при $\mathrm{Re} < 1$ (см. рис. 10.6, *б*), а для цилиндра это соответствие сохраняется вплоть до $\mathrm{Re} = 40$. Считая, что при $\mathrm{Re} < 1$ влияние инерционных членов в уравнениях Навье — Стокса пренебрежимо мало, Стокс решил теоретически задачу обтекания шара и получил выражение $C_x = 24/\mathrm{Re}$. Озин учел часть инерционных членов и получил зависимость

$$C_x = 24/\mathrm{Re} + 4{,}5.$$

Обе формулы, как показывает сопоставление с результатами опытов, применимы только при $\mathrm{Re} < 1$, причем первая из них дает уменьшенное, а вторая — увеличенное значение C_x.

При возрастании числа Re характер зависимости C_x (Re) меняется; для шара в диапазоне $Re = 10^3 \ldots 3{,}5 \cdot 10^5$, а для цилиндра в диапазоне $Re = 10^4 \ldots 10^5$ значения C_x остаются приблизительно постоянными; при дальнейшем увеличении Re коэффициент C_x сначала резко уменьшается, а затем постепенно возрастает. Этот скачок называют кризисом сопротивления. Причина его заключается в следующем. При докризисном обтекании ламинарный пограничный слой отрывается в некоторой точке, положение которой не изменяется в широком диапазоне чисел Re. При этом турбулизация потока происходит вне тела в оторвавшемся лами-

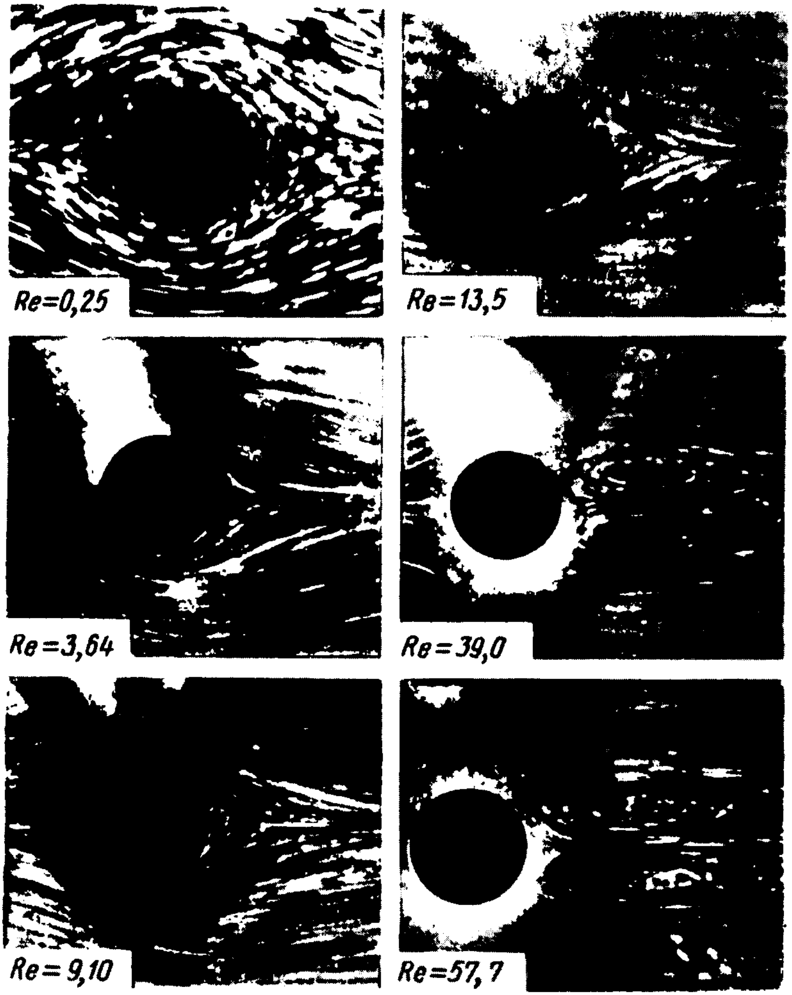


Рис. 10.7. Линии тока течения вблизи круглого цилиндра при разных числах Re

нарном слое. По мере возрастания числа Re точка перехода смещается вверх по течению, достигает поверхности тела и, наконец, точки отрыва ламинарного слоя; весь оторвавшийся слой становится турбулентным. Но точка отрыва турбулентного слоя должна располагаться ниже по течению, чем точка отрыва ламинарного слоя, так как турбулентный слой за отрывом в силу перемешивания более интенсивно увлекает массы жидкости из области возвратного течения. Поэтому происходит резкое смещение точки отрыва вниз по течению, картина обтекания приближается к безотрывной, ширина ближнего следа (вихревой области за телом) уменьшается и резко падает сопротивление давления. Искусственная турбулизация потока (например, путем установки местных препятствий вблизи лобовой части обтекаемого тела) приводит к более раннему наступлению кризиса сопротивления.

В заключение отметим, что при изучении обтекания цилиндрических тел нельзя значения сил, полученных для плоской задачи, распространять на все тело путем простого их умножения на размер цилиндра вдоль образующей. Дело в том, что при обтекании цилиндров конечной длины возникают так называемые «концевые эффекты», которые заключаются в образовании вблизи концов цилиндра вторичных течений, создающих за цилиндром особую систему вихрей, которая может заметно влиять на силы, действующие на тело. Такая система вихрей (вихревая пелена) изменяет направление поперечной силы Жуковского, что приводит к появлению индуктивного сопротивления. Эти вопросы изучаются в теории крыла.

10.2. КАВИТАЦИЯ

Под кавитацией подразумевают возникновение и рост пузырьков пара или растворенного в жидкости газа, вызванные понижением давления при постоянной температуре (см. п. 1.6). Рост возникшего пузырька сопровождается испарением жидкости внутрь него (паровая кавитация) или диффузией газа (газовая кавитация). Но, как правило, имеют место оба процесса и кавитация является парогазовой. Кавитационные пузырьки возникают в тех точках потока жидкости, где давление падает до некоторого малого значения $p_{кр}$, которое близко к давлению насыщенного пара при данной температуре, но зависит от ряда факторов: степени насыщения жидкости растворенным газом, наличия примесей и твердых частиц, состояния обтекаемой поверхности. Формы проявления и развития кавитации многообразны и пока не существует их четкой классификации и общепринятых терминов. В отечественной литературе различают две основные стадии кавитации: начальную и развитую.

Начальная стадия кавитации характеризуется возникновением и ростом пузырьков, из-за чего ее можно назвать еще пузырьковой кавитацией. При нормальных условиях в жидкости всегда есть мельчайшие пузырьки газа диаметром порядка 10^{-6} мм. Если при движении они попадают в область низких давлений, то размер их увеличивается, а при переносе их в зоны повышенного давления пузырьки могут сжиматься или схлопываться. При интенсивном росте пузырьков они могут сливаться друг с другом, образуя каверны, формы которых зависят от формы твердых границ потока и его гидродинамических параметров. Образование каверн конечных размеров, заполненных парами и выделившимся газом, характерно для развитой кавитации. При этом если каверна замыкается на поверхности обтекаемого тела, то кавитацию называют частичной, а если каверна охватывает некоторую область за телом — суперкавитацией.

Существует и другой подход к классификации кавитационных явлений. Так, различают кавитацию: перемещающуюся, присоединенную, вихревую, вибрационную.

Под перемещающейся кавитацией понимают образование и перемещение в потоке отдельных пузырьков и каверн, которые могут расширяться или схлопываться. Такие переносимые пузырьки и каверны могут образоваться или на поверхности тела в точках минимального давления или в ядрах движущихся вихрей.

Термином присоединенная кавитация обозначают явление образования каверн, примыкающих к поверхности тела, т. е. развитую кавитацию.

При вихревой кавитации пузырьки и каверны образуются вдоль осей вихревых шнуров, какие, например, сходят с концов лопастей гребных винтов и лопастных гидромашин.

Вибрационная кавитация имеет место вблизи вибрирующих твердых поверхностей, если амплитуда пульсаций достигает некоторого порогового значения. При этом одни и те же частицы жидкости могут многократно проходить через зону кавитации.

Основным параметром и критерием подобия кавитационных явлений является число кавитации

$$\varkappa = (p_\infty - p_{\text{к}})/(0{,}5\rho u_\infty^2),$$

где p_∞ и u_∞ — давление и скорость потока в бесконечности; $p_{\text{к}}$ — давление в каверне.

Очевидно, число $\varkappa$ представляет собой число Эйлера, составленное по перепаду давления $p_\infty - p_{\text{к}}$. Значение числа $\varkappa$, при котором начинается кавитация на данной обтекаемой поверхности, называется критическим — $\varkappa_{\text{кр}}$. Оно зависит как от формы тела, которой определяется закон распределения давлений по его поверхности, так и от свойств жидкости (вязкости, поверхностного натяжения, газонасыщения). Так как рост газовых пузырей начинается при вполне определенном давлении $p_{\text{кр}}$, значению $\varkappa_{\text{кр}}$ должно соответствовать именно это давление. Можно считать, что $p_{\text{кр}} = p_{\text{н}}$, т. е. $p_{\text{кр}}$ равно давлению $p_{\text{н}}$ насыщенных паров. Это давление достигается в той точке обтекаемой поверхности, где скорость имеет максимальное значение u_m. Для определения той скорости на бесконечности $u_{\infty к}$, которая соответствует возникновению кавитации, запишем известное выражение для коэффициента давления в точке, в которой $u = u_m$, а $p = p_{\min} = p_н$:

$$\bar{p}_{\min} = \frac{p_н - p_\infty}{\rho u_{\infty к}^2/2},$$

откуда

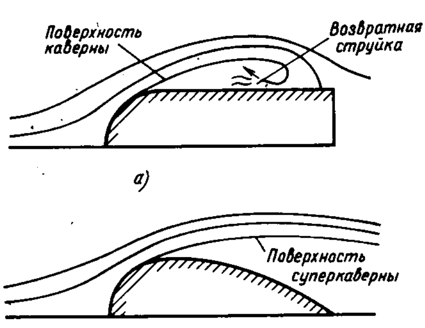
$$u_{\infty к} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{p_н - p_\infty}{\bar{p}_{\min}}}.$$

Учитывая, что в этой точке $\bar{p}_{\min} < 0$, заключаем, что скорость $u_{\infty к}$ будет тем большей, чем больше p_∞. Поэтому при заданной скорости $u_{\infty к}$ кавитацию можно предотвратить, увеличивая p_∞. Если давление p_∞ создается погружением под свободную поверхность и $p_\infty = p_0 + \rho g h$ (где p_0 — давление на свободной поверхности; h — глубина погружения), то предотвращения кавитации можно достигнуть увеличением h.

При возникновении кавитация пренебрежимо мало влияет на структуру потока, однако при ее развитии это влияние становится все более существенным и в стадии развитой кавитации поток приобретает совершенно новые формы. Каверны конечных размеров, заполненные смесью пара и выделившихся газов, могут занимать в потоке значительное место, а их поверхности служат жидкими границами течения.

Различают каверны двух основных видов: присоединенные, т. е. начинающиеся и замыкающиеся на поверхности тела (частичная кавитация) и суперкаверны, которые замыкаются в потоке за телом (суперкавитация) (рис. 10.8).

Свободная поверхность присоединенной каверны вогнута в сторону тела, а в зоне присоединения образуется возвратная струйка, направленная внутрь каверны. Однако такая струйка не может быть стационарной, так как она за короткое время заполняет каверну. Высокоскоростная съемка показывает, что присоединенные каверны чаще всего являются нестационарными и изменяются циклически, проходя фазы образования и роста, заполнения и отрыва. Но если форма тела такова, что вблизи точки присоединения свободная поверхность каверны подходит к телу по касательной, то возвратной струйки не образуется и каверна является стационарной.



а)

б)

Рис. 10.8. Схемы течений при развитой кавитации:

а — присоединенная каверна; *б* — суперкаверна

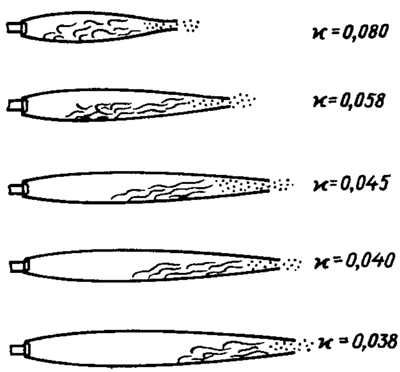


Рис. 10.9. Схемы вентилируемых суперкаверн

Суперкавитация возникает при уменьшении параметра $\varkappa$. В пределе, если каверна не замыкается, а простирается в бесконечность, то давление в ней должно равняться давлению p_∞ в бесконечности, а значит, такой каверне соответствует значение $\varkappa = 0$.

Суперкаверны образуются вследствие роста присоединенной каверны; вытеснения жидкости из области гидродинамического следа и дополнение этой области парами и газами; искусственного вдува воздуха или газа в область низкого давления в следе. Наблюдения показывают, что поверхность суперкаверны пульсирует, ее длина периодически изменяется, а в концевой части образуется возвратная струйка, которая быстро дробится на капли и испаряется. Тем не менее осредненные во времени размеры суперкаверны можно считать постоянными. На рис. 10.9 [11] приведены схемы вентилируемых суперкаверн за диском, соответствующие различным числам кавитации.

Теоретическое описание течений с суперкавернами основывается на методах теории струй идеальной жидкости, основы которой изложены в п. 7.11 и 7.12. Возможность применить эту теорию основывается на том, что на поверхности суперкаверны сохраняется постоянное давление и ее можно рассматривать как свободную поверхность. Схема струйного обтекания пластины, приведенная на рис. 7.30 (схема Кирхгофа), по существу воспроизводит плоскую суперкаверну с числом кавитации $\varkappa = 0$. Но каверны, отвечающие значениям $\varkappa > 0$, имеют конечные размеры, и потому исследователи искали другие расчетные схемы, воспроизводящие суперкаверны конечных размеров.

Трудность состоит в том, что на поверхности каверны скорость, как и давление, должна оставаться постоянной, но в точке соединения двух ветвей линии тока, воспроизводящих поверхность каверны (точка замыкания), скорость должна обратиться в нуль. Чтобы устранить это противоречие, Д. Рябушинский предложил схематизировать конечную каверну за плоской пластиной с помощью двух параллельных пластин и граничных свободных линий тока (рис. 10.10, *а*). В этой схеме, как видно, концевая часть каверны заменена пластиной, вдоль которой происходит убывание скорости от значения v_0 на ее концах до нуля в критической точке K. Хотя данная схема не соответствует реальному течению в концевой части каверны, но весьма точно воспроизводит течение в ее передней части. На ее основе получено точное решение задачи

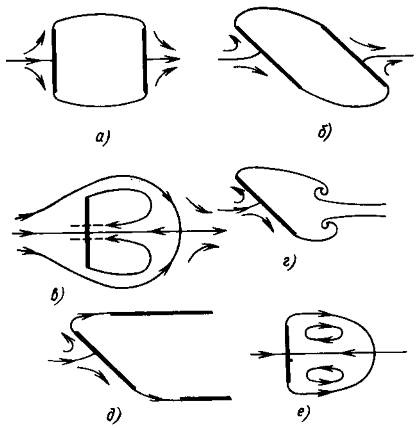


Рис. 10.10. Расчетные схемы суперкавитационного обтекания пластины

о суперкавитационном обтекании пластины, которое дает хорошие результаты всюду, кроме концевой части каверны.

Впоследствии схема Рябушинского была обобщена для других случаев рядом авторов. В частности, М. И. Гуревичем рассмотрена задача о кавитационном обтекании наклонной пластины (рис. 10.10, *б*). Д. А. Эфросом и независимо другими авторами предложена одна из наиболее удачных схем суперкаверны с возвратной струйкой (рис. 10.10, *в*). По этой схеме в концевой части каверны образуется возвратная струйка, которая при описании течения с помощью функций комплексного переменного, уходит на второй лист римановой поверхности. Поэтому условие постоянства размеров каверны не нарушается. Эта схема для плоской пластины дает результаты, близкие к результатам, полученным по схеме Рябушинского. Было предложено и несколько других схем. На рис. 10.10, *г*, *д*, *е* приведены схемы Тулина, Жуковского — Рошко, Лаврентьева. Каждая из них позволяет решить задачу обтекания и, в частности, найти коэффициент лобового сопротивления обтекаемого тела как функцию числа кавитации $\varkappa$. Для этого коэффициента по схемам нескольких авторов для пластины, нормальной к потоку, получена формула

$$C_x = \frac{2\pi}{\pi + 4}(1 + \varkappa)\left[1 + \frac{\varkappa^2}{8(\pi + 4)} - \frac{\varkappa^3}{8(\pi + 4)} + \cdots\right].$$

При $\varkappa = 0$ получаем формулу Кирхгофа

$$C_x = 2\pi/(\pi + 4).$$

Теория струй идеальной жидкости позволяет также решать задачи кавитационного обтекания тел с образованием присоединенных каверн.

Следует отметить, что все теоретические схемы дают хорошее согласование с результатами экспериментальных исследований при малых числах кавитации. Их общим недостатком является неточное воспроизведение течения в концевой части каверны.

Суперкавитационные режимы течения, в частности обтекания лопастей гидромашины, имеют существенное практическое значение в связи с применением высокооборотных гидромашин, корабельных винтов и развитием судов на подводных крыльях. В некоторых случаях, когда избежать возникновения кавитации не удается, целесообразно достигнуть суперкавитационных режимов, при которых вредные воздействия на твердые поверхности минимальны, а течение наиболее устойчиво.

Рассмотрим влияние кавитации на гидродинамические параметры потока и ограничивающие его поверхности. При возникновении кавитации влияние ее на поток, как указывалось выше, пренебрежимо мало. По мере развития кавитационной зоны, что происходит при понижении давления в потоке, размеры ее возрастают главным образом за счет перемещения границы вниз по течению и незначительного расширения против потока. Расширение зоны кавитации изменяет конфигурацию линий тока и в определенной мере поле скоростей. Особенно существенным это влияние становится на стадии образования присоединенных каверн и суперкаверн.

В этих случаях происходит обтекание каверн так, как если бы их поверхности были твердыми. Поверхности каверн становятся границами области течения.

Появление зон кавитации вблизи обтекаемых твердых поверхностей существенно влияет на поверхностное трение. Поскольку кавитация возникает, как правило, при больших скоростях, течение в пограничном слое является турбулентным. При возникновении кавитации очень мелкие пузырьки могут образовываться в пределах вязкого подслоя и не выходить за его пределы. В этой стадии кавитация на трение существенно не влияет. По мере роста пузырьков и образования небольших каверн они взаимодействуют с турбулентным ядром потока и оказывают на трение примерно такое же влияние, как и возрастание шероховатости. Если течение в пограничном слое ламинарное, то появление кавитации способствует его турбулизации. Образование присоединенных каверн сильно изменяет течение в пограничном слое, и на участке примыкания каверны напряжение трения практически исчезает, так как поток полностью отрывается от стенки. В целом суммарное сопротивление трения (но не полное сопротивление) уменьшается. На полное (профильное) же сопротивление кавитация оказывает существенное влияние несколькими способами.

При возникновении кавитации благодаря образованию мелких пузырьков усиливаются местные возмущения в потоке и ламинарный пограничный слой может перейти в турбулентный. При этом точка отрыва перемещается вниз по течению, изменяется вся картина обтекания и соответственно сопротивление давления. При развитии кавитации и образовании присоединенных каверн линии тока основного течения смещаются и деформируются так, как если бы изменилась форма тела; изменяется распределение давления, а значит, и сопротивление тела. Если же образуется суперкаверна, в которой давление практически равно давлению насыщенных паров, то сопротивление давления становится основ-

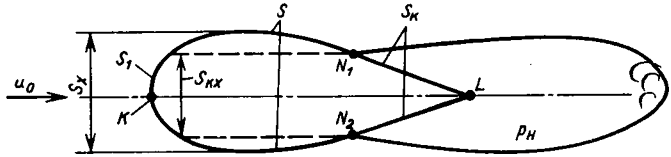


Рис. 10.11. Схема для расчета сопротивления давления при суперкавитационном обтекании тела

ной частью профильного сопротивления, а его коэффициент можно выразить через число кавитации. Рассмотрим схему суперкавитационного обтекания крылового профиля (рис. 10.11).

Пусть N_1 и N_2 — точки отрыва потока от поверхности тела. Разобьем поверхность тела S на два участка: $S_1 \equiv S_{N_1KN_2}$ и $S_к \equiv S_{N_1LN_2}$; смысл этих обозначений ясен из рисунка. Силу сопротивления давления, выраженную формулой (10.5), представим в виде

$$R_д = \int\limits_S p\cos(n,\ x)\,dS = \int\limits_{S_1} p\cos(n,\ x)\,dS + \int\limits_{S_к} p\cos(n,\ x)\,dS = \int\limits_{S_1} (p - p_\infty)\cos(n,\ x)\,dS + \int\limits_{S_к} p\cos(n,\ y)\,dS + \int\limits_{S_1} p_\infty\cos(n,\ x)\,dS.$$

Учитывая, что на поверхности $S_к$, граничащей с каверной, $p = p_н = \text{const}$, а также

$$\int\limits_{S_1}\cos(n,\ x)\,dS = -\int\limits_{S_к}\cos(n,\ x)\,dS,$$

получаем

$$R_д = \int\limits_{S_1}(p - p_\infty)\cos(n,\ x)\,dS + \int\limits_{S_к}(p_н - p_\infty)\cos(n,\ x)\,dS.$$

Теперь учтем, что на поверхности S_1 $dS_x = \cos(n,\ x)\,dS$, а на поверхности $S_к$ $dS_x = -\cos(n,\ x)\,dS$ (где dS_x — элементарная площадка проекции поверхности тела на плоскость, нормальную скорости u_0). Тогда получим

$$R_д = \int\limits_{S_x}(p - p_\infty)\,dS_x + \int\limits_{S_{кx}}(p_\infty - p_н)\,dS_x.$$

Коэффициент силы лобового сопротивления $C_x = 2R_д/(\rho u_0^2 S_x)$ теперь выразим формулой

$$C_x = \frac{1}{S_x}\int\limits_{S_x} c_p\,dS_x + \varkappa\frac{S_{кx}}{S_x},$$

где S_x — площадь проекции поверхности S тела на плоскость, нормальную скорости u_0; $S_{кx}$ — проекция на ту же плоскость той части поверхности тела, которая граничит с каверной.

Из этой формулы следует, что при наличии суперкаверны коэффициент лобового сопротивления возрастает пропорционально числу кавитации $\varkappa$.

Кавитация влияет и на подъемную силу. На рис. 10.12 приведены экспериментальные зависимости коэффициента подъемной силы от числа кавитации для крылового профиля (автор — Кермин, см. [11]). При углах атаки $\alpha > 2°$ после возникновения кавитации (штриховая линия) уменьшение числа $\varkappa$ приводит сначала к возрастанию коэффициента подъемной силы, а затем к его резкому уменьшению. Этот эффект связан, по-видимому, с тем, что возникновение кавитации приводит к расширению области низкого давления на верхней поверхности профиля и соответствующему увеличению подъемной силы. Однако при дальнейшем уменьшении числа кавитации происходит перестройка потока, которая ведет к ее падению.

Кавитация может оказывать разрушающее воздействие на материалы поверхностей, вблизи которых она возникает. При этом длительное воздействие кавитации может привести к разрушению материала практически любой твердости. Хотя механизм разрушающего действия кавитации не вполне выяснен, но есть достаточно оснований считать, что основной причиной разрушения является механическое воздействие жидкости на твердые стенки. Установлено, что наиболее опасной с точки зрения разрушающего действия является пузырьковая стадия кавитации, при которой парогазовые пузырьки образуются в зоне минимальных давлений и схлопываются, попадая в зону повышенного давления. Разработаны две основные схемы механизма кавитационного разрушения.

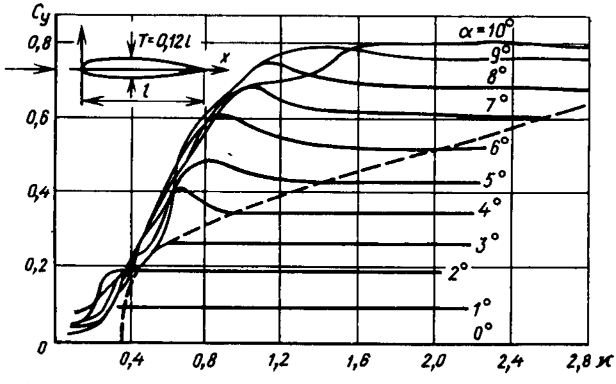


Рис. 10.12. Влияние числа кавитации на коэффициент подъемной силы крылового профиля

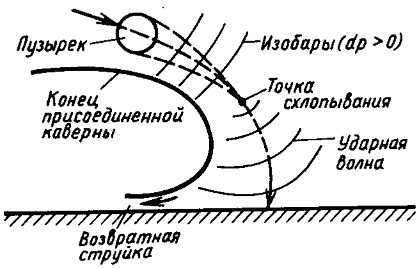


Рис. 10.13. Схема схлопывания кавитационного пузырька и возникновения ударной волны, разрушающей стенку

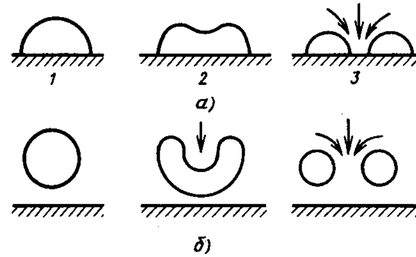


Рис. 10.14. Схема схлопывания кавитационного пузырька с образованием микроструек

Согласно первой схеме [11] в концевой части присоединенной каверны происходит торможение перемещающихся каверн (пузырьков) и они схлопываются (рис. 10.13). Возникающее при этом местное повышение давления составляет величину порядка $1/r$, где r — радиус пузырька. Такое резкое повышение давления порождает ударную волну, которая, распространяясь, достигает твердой поверхности и оказывает на нее ударное воздействие, приводящее к разрушению материала.

Вторая схема (рис. 10.14) допускает образование струек жидкости, которые возникают при схлопывании пузырьков и оказывают на твердые поверхности непосредственное силовое воздействие, приводящее к микроразрушению. На рис. 10.14 показаны разные стадии (*1*, *2*, *3*) деформации пузырьков и образования разрушающих струек при расположении пузырька на стенке (рис. 10.14, *а*) и вблизи нее (рис. 10.14, *б*).

Описанный механизм кавитационного разрушения материалов является весьма схематичным и дает лишь первое представление о причинах кавитационной эрозии. Есть достаточно оснований полагать, что в этом процессе участвует еще несколько факторов. В их числе химическая коррозия, электрохимические эффекты, проявляющиеся в появлении значительных электрических потенциалов в кавитационной зоне, а также значительные местные повышения температуры и свечение. Влияет также степень насыщения жидкости газом.

11. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

11.1. НЕКОТОРЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

При движении газов с малыми скоростями (менее 70 м/с) присущее им свойство сжимаемости (см. гл. 1) проявляется слабо, и во многих случаях с достаточной для практических целей точностью движущийся газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Однако при больших скоростях, сравнимых со скоростью звука и тем более превышающих ее, влияние сжимаемости может быть настолько существенным, что законы движения несжимаемой жидкости оказываются неприменимыми. Изменение плотности газа чаще всего сопровождается изменением температуры или теплообменом. В связи с этим для описания его движения наряду с уравнениями механики необходимо использовать уравнения термодинамики и соответствующие методы их анализа. В этом параграфе приведем лишь те термодинамические соотношения, которые необходимы для изложения основных законов одномерных газовых течений. Строгое обоснование этих соотношений читатель может найти в курсе термодинамики.

Кроме того, ограничимся рассмотрением одномерных течений идеального газа, подчиняющегося уравнению состояния (1.16), которое можно записать в виде

$$p/\rho = RT, \tag{11.1}$$

где R — газовая постоянная, зависящая только от рода газа [для воздуха $R = 287,15$ Дж/(кг·К)]; T — абсолютная температура по шкале Кельвина.

Это уравнение подтверждается опытным путем тем лучше, чем выше температура и меньше давление. Заметные отклонения свойств реальных газов от свойств совершенных газов наблюдаются при низких температурах и высоких давлениях (вблизи точки сжижения), а также при высоких температурах, когда происходит диссоциация молекул.

Важнейшее значение в газовой динамике имеют энергетические характеристики газов. Движущийся газ, рассматриваемый как термодинамическая система, обладает внешней и внутренней энергией. Первая представляет собой сумму кинетической энергии направленного движения частиц газа и потенциальной энергии, обусловленной полем массовых сил. Внутренняя энергия газа является суммой кинетической и потенциальной энергий всех составляющих его частиц (см. гл. 1 и 5).

Запас внутренней энергии зависит только от состояния термодинамической системы (газа). Изменение ее полностью определяется начальным и конечным состояниями, но не зависит от характера процесса изменения, поэтому внутреннюю энергию можно рассматривать как один из параметров состояния газа, наряду с давлением, плотностью и температурой. Изменение внутренней энергии выражают через количество работы и теплоты, которыми термодинамическая система обменивается с окружающей средой. Этот обмен подчиняется первому началу термодинамики, согласно которому *изменение энергии термодинамической системы равно сумме подведенной к системе теплоты и работы, выполненной над ней окружающей средой.*

Этот закон для единицы массы газа можно выразить уравнением

$$d\,(U + u^2/2 + h) = dq + dl', \tag{11.2}$$

где U — внутренняя энергия; u — скорость газа; h — удельная потенциальная энергия поля массовых сил; dq — количество теплоты, подведенной извне; dl' — удельная работа окружающей среды.

Первое начало термодинамики является термодинамической формой общего закона сохранения энергии (см. п. 5.10). При движениях газов потенциальная энергия h только в редких случаях имеет практическое значение, а потому в дальнейшем не учитывается. Вместо работы dl' введем работу $dl = -dl'$, которую газ совершает против внешних поверхностных сил. Тогда вместо выражения (11.2) можно записать

$$d\,(U + u^2/2) = dq - dl. \tag{11.3}$$

Работа, выполненная газом, обусловлена его давлением. В гл. 5 было показано, что на элементарном перемещении работа сил давления несжимаемой жидкости выражается дифференциалом $d\,(p/\rho)$. Повторяя рассуждения применительно к газу, придем к этому же выражению с той лишь разницей, что здесь плотность — переменная величина. Таким образом,

$$dl = d\,(p/\rho) = d\,(pv),$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем.

Теперь уравнение (11.3) запишем в виде

$$dq = dU + d\,(u^2/2) + d\,(pv). \tag{11.4}$$

В термодинамике сумму двух полных дифференциалов dU и $d\,(pv)$ представляют как дифференциал некоторой функции i, называемой энтальпией или тепловой функцией. Таким образом, эта функция определяется соотношением

$$di = dU + d\,(pv)$$

или

$$i = U + pv = U + p/\rho, \qquad (11.5)$$

где несущественная постоянная интегрирования опущена. Уравнению (11.4) можно придать форму

$$dq = di + du^2/2.$$

В частном случае адиабатного, т. е. теплоизолированного движения газа $dq = 0$ и, следовательно,

$$d\,(i + u^2/2) = 0;\; i + u^2/2 = \text{const}. \qquad (11.6)$$

Уравнение (11.6), полученное из общего закона сохранения энергии, справедливо и для течения вязкого газа при отсутствии теплообмена с внешней средой.

Рассмотрим квазистатические процессы, т. е. процессы, происходящие настолько медленно, что их можно рассматривать как последовательную смену равновесных состояний газовой среды. Для таких процессов можно принять, что $d\,(u^2/2) = 0$, а механическая работа представляет собой работу расширения газа, выражаемую формулой $dl = pdv$. Следовательно, вместо выражения (11.4) будем иметь

$$dq = dU + pdv. \qquad (11.7)$$

Поскольку $d\,(pv) = pdv + vdp$, используя тепловую функцию, первое начало термодинамики можно выразить уравнением

$$dq = di - vdp. \qquad (11.8)$$

Понятия внутренней энергии и энтальпии тесно связаны с понятием теплоемкости газа. Если в произвольном термодинамическом процессе количество теплоты, подведенное к 1 кг газа, составляет Δq, а соответствующее изменение температуры ΔT, то величину

$$c = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta T} = \frac{\partial q}{\partial T}$$

называют удельной теплоемкостью. В частном случае изохорного процесса (происходящего при постоянном объеме) $dv = 0$. Тогда согласно формуле (11.7) $dU = dq$ и

$$c_v = \partial U/\partial T\,|_v, \qquad (11.9)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Для изобарного процесса ($p = \text{const}$) из выражения (11.8) получим $di = dq$. Следовательно,

$$c_p = \partial i/\partial T\,|_p \qquad (11.10)$$

представляет собой удельную теплоемкость при постоянном давлении.

Если принять в данном диапазоне изменения температуры удельные теплоемкости c_v и c_p не зависящими от температуры, то для внутренней энергии и энтальпии получим конечные соотношения

$$U = c_v T, \; i = c_p T,$$

из которых видно, что внутренняя энергия U и энтальпия i являются функциями только абсолютной температуры. Это с достаточной степенью точности подтверждается опытами с газами, следующими уравнению Клапейрона — Менделеева. Рассматривая изменение состояния совершенного газа при постоянном давлении и учитывая, что при этом $dU = c_v dT$, а согласно уравнению состояния $pdv = pd\,(RT/p) = RdT$, из уравнений (11.7) и (11.8) получим

$$c_p dT = c_v dT + RdT$$

или формулу Майера

$$c_p - c_v = R. \tag{11.11}$$

В дальнейшем будем рассматривать только адиабатные течения совершенных газов. Для этого случая $dq = 0$ и уравнение (11.7)

$$dU + pdv = 0$$

может быть проинтегрировано. Используя уравнение состояния, запишем выражение (11.7) в виде

$$c_v dT + RTdv/v = 0.$$

Интегрируя, находим

$$c_v \ln T + R \ln v = \text{const}. \tag{11.12}$$

Введем параметр $k = c_p/c_v$, называемый показателем адиабаты. Согласно выражению (11.11)

$$c_p = \frac{k}{k-1} R; \; c_v = \frac{1}{k-1} R.$$

Обозначив индексом «0» некоторые фиксированные значения термодинамических параметров, запишем уравнение (11.12), исключив из него величину c_v:

$$\frac{1}{k-1} \ln T + \ln v = \frac{1}{k-1} \ln T_0 + \ln v_0,$$

отсюда

$$v^{k-1} T = v_0^{k-1} T_0. \tag{11.13}$$

Используя уравнение состояния, получим уравнение адиабатного процесса

$$pv^k = p_0 v_0^k \text{ или } \frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}. \tag{11.14}$$

Из формул (11.13) и (11.14) вытекают соотношения

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{11.15}$$

Адиабатный процесс для машиностроительных приложений газовой динамики представляет особый интерес в связи с тем, что при течении газов с достаточно большими скоростями через относительно короткие проточные части машин теплообмен между газовыми частицами не успевает осуществиться в заметной степени, поэтому в первом приближении газодинамические расчеты могут строиться на основе предположения об адиабатности процесса.

Поскольку при изучении газовых течений всегда имеем дело с превращением тепловой энергии или с теплообменом, то важно иметь параметр или функцию, однозначно определяющие наличие этих процессов. Такой функцией может служить величина s, определяемая дифференциальным соотношением

$$ds = dq/T \tag{11.16}$$

и называемая энтропией. Из определения энтропии следует, что если к термодинамической системе теплота подводится ($dq > 0$), то энтропия возрастает ($ds > 0$), при отводе теплоты энтропия убывает. Очевидно, для теплоизолированного процесса, каким является адиабатный процесс идеального газа, $ds = 0$ или $s = \text{const}$, благодаря чему этот процесс называют изоэнтропическим. При движении газа с трением общее изменение количества теплоты газовых частиц слагается из количества теплоты dq_l, подводимой извне, и полученной превращением механической энергии в тепловую благодаря трению dq_r:

$$dq = dq_l + dq_r.$$

Поэтому даже при отсутствии теплообмена с внешней средой, когда $dq_l = 0$, при течении с трением энтропия возрастает, так как $dq_r > 0$. Поскольку диссипация представляет собой необратимый процесс преобразования механической энергии, то для теплоизолированных процессов возрастание энтропии служит признаком их необратимости. Заметим, что помимо трения существуют и другие причины необратимых преобразований механической энергии (см. п. 10.6).

Второе начало термодинамики устанавливает, что при отсутствии теплообмена с внешней средой энтропия термодинамической системы является неубывающей функцией ($ds \geqslant 0$). Удобное аналитическое выражение энтропии можно получить, используя формулу (11.8):

$$dq = di - dp/\rho.$$

Подставляя это выражение в зависимость (11.16), получаем

$$Tds = di - dp/\rho.$$

Учитывая, что $di = c_p dT$, $dp/\rho = d\ (p/\rho) - pd\ (1/\rho) = RdT - pd\ (1/\rho)$, находим

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{1}{T}[R\,dT - pd(1/\rho)]$$

или

$$ds = (c_p - R)\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{R}{k-1}\frac{dT}{T} + R\rho d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Это дифференциальное соотношение можно записать в форме

$$ds = R\left[\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T} + \frac{d\,(1/\rho)}{(1/\rho)}\right],$$

которая допускает интегрирование. В результате получим

$$s = R\ln\left(\frac{T^{\frac{1}{k-1}}}{\rho}\right) + C. \qquad (11.17)$$

Из формулы (11.17) следует, что энтропия с точностью до постоянной полностью определяется двумя параметрами состояния T и ρ, а значит, и сама является параметром состояния. Ее можно выразить и через другие параметры. Так, используя уравнение Клапейрона, получим следующее выражение энтропии:

$$s = \frac{R}{k-1}\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right) + \text{const}, \qquad (11.18)$$

из которого также следует постоянство энтропии для адиабатного течения идеального газа.

11.2. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГАЗЕ

Уравнение Бернулли (см. п. 5.7) для адиабатного течения идеального газа

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const}$$

широко используется в газовой динамике в нескольких формах. Одну из них получим, заменив в нем отношение p/ρ по уравнению состояния на RT:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1}RT = \text{const}. \qquad (11.19)$$

Из этого выражения следует, что при увеличении скорости газового потока (его ускорении) температура уменьшается, а при торможении увеличивается. Такой характер изменения температуры обусловлен теплоизолированностью процесса.

Учитывая выражение энтальпии

$$i = c_p T = \frac{k}{k-1} RT,$$

представим уравнение (11.19) в форме

$$i + u^2/2 = \text{const},$$

совпадающим с уравнением сохранения энергии (11.6).

Заметим, что если бы мы рассматривали теплоизолированное движение газа с трением, то и в этом случае уравнение (11.19) Бернулли оказалось бы справедливым. Действительно, хотя на преодоление сил трения была бы израсходована часть механической энергии, но она преобразовалась бы в теплоту, что привело бы к увеличению внутренней энергии U, поэтому сумма $i + u^2/2$ осталась бы неизменной.

Для получения иных употребительных в газовой динамике форм уравнения Бернулли определим скорость распространения в газе малых механических возмущений. Для этого рассмотрим покоящийся газ, заполняющий цилиндрическую трубу с площадью S поперечного сечения справа от поршня (рис. 11.1). Параметры покоящегося газа обозначим p_0 и ρ_0. Если поршню сообщить внезапное малое перемещение со скоростью u_1, это приведет к уплотнению газа перед ним, повышению давления на $\Delta p = p_1 - p_0$ и плотности на $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$. Возмущение распространится в газе с некоторой скоростью a и по истечении времени охватит область x, а за время dt распространится еще на расстояние $dx = adt$. Частицы газа в зоне уплотнения приобретут скорость u_1 поршня. Чтобы найти скорость a распространения возмущения, используем законы сохранения массы и изменения количества движения.

В момент $t + \Delta t$ в объеме, ограниченном сечениями *1* и *2*, масса составит $\rho_1 S dx = \rho_1 S a dt$. Эта масса должна равняться сумме первоначальной массы этого объема $\rho_0 S dx = \rho_0 S a dt$ и привнесенной в него массы $\rho_1 u_1 dt S$, т. е.

$$\rho_1 a = \rho_1 u_1 + \rho_0 a. \qquad (11.20)$$

Уравнение изменения количества движения выделенного отсека жидкости имеет вид

$$\rho_1 S a dt u_1 = p_1 S dt - p_0 S dt,$$

откуда

$$\rho_1 a u_1 = p_1 - p_0. \qquad (11.21)$$

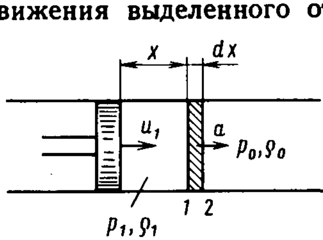


Рис. 11.1. Схема для определения скорости распространения малых возмущений

Исключая из уравнений (11.20) и (11.21) скорость u_1, получаем

$$a^2 = (p_1 - p_0)/(\rho_1 - \rho_0).$$

Если изменение Δp давления и соответствующее изменение $\Delta\rho$ плотности малы, то, переходя к бесконечно малым, можно записать

$$a^2 = dp/d\rho \text{ или } a = \sqrt{dp/d\rho}. \qquad (11.22)$$

Из физики известно, что акустические (звуковые) волны представляют собой последовательные малые сжатия и разрежения упругой среды, поэтому полученная формула выражает скорость распространения звука в газе. Заметим, что все рассуждения, из которых она выведена, справедливы и для любой другой упругой среды. Поэтому формула (11.22) выражает скорость звука в таких средах. В частности, если среда при малых сжатиях подчиняется закону Гука (см. гл. 1)

$$d\rho/\rho = dp/\mathscr{E} \text{ или } dp/d\rho = \mathscr{E}/\rho,$$

то формула (11.22) для нее примет вид

$$a = \sqrt{\mathscr{E}/\rho}.$$

В частности, это выражение пригодно для капельных жидкостей. При распространении малых возмущений в газе сжатие или разрежение происходят настолько быстро, что теплообмен между частицами не успевает осуществляться и процесс протекает адиабатически, т. е. связь между плотностью и давлением выражается уравнением адиабаты

$$p/\rho^k = C.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем $dp = k\rho^{k-1}d\rho C$ или

$$dp/d\rho = kp/\rho.$$

Следовательно, для газов скорость звука или скорость распространения малых возмущений

$$a = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kRT}. \qquad (11.23)$$

Из формулы (11.23) можно сделать вывод, что скорость звука в газе зависит только от его молекулярной структуры и температуры и не зависит от условий движения.

Теперь запишем уравнение Бернулли (11.19) в форме

$$u^2/2 + a^2/(k-1) = \text{const}, \qquad (11.24)$$

из которой следует, что при возрастании скорости адиабатного течения газа скорость звука в нем уменьшается, а при убывании — увеличивается. Разумеется, эта зависимость скорости звука от скорости газа есть лишь результат изменения температуры газа при изменении скорости течения. Следует также подчеркнуть, что в левой части уравнения (11.24) скорость звука a относится к той же точке (или сечению) газового потока, где имеет место скорость u течения, т. е. она представляет собой местную скорость звука.

11.3. ПАРАМЕТРЫ ТОРМОЖЕНИЯ И КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ. ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Как известно, в потоке газа или жидкости могут существовать точки или области, скорость в которых равна нулю, например, критические точки на поверхности обтекаемого тела или большая емкость, из которой происходит истечение через малое отверстие или сопло. Предполагая течение адиабатным, применим уравнение (11.24) к произвольной точке, в которой скорость течения равна u, и к точке, в которой скорость $u = 0$. Последнюю будем далее называть точкой торможения и все относящиеся к ней параметры отмечать индексом «0». Тогда получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} \tag{11.25}$$

или

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{kRT_0}{k-1}. \tag{11.26}$$

Здесь a_0 и T_0 — соответственно скорость звука и температура в точке торможения. Им соответствуют некоторые давление p_0 и плотность ρ_0. Величины a_0, T_0, ρ_0, p_0, называемые параметрами торможения, являются константами данного газового потока. Но не обязательно им приписывать смысл параметров газа в некоторой точке торможения, ибо таковой в данном потоке может и не быть. Параметры торможения можно понимать как расчетные параметры, которые мы получили бы, если бы данный поток полностью затормозили без необратимых преобразований механической энергии. Особую роль играет температура торможения T_0, поскольку, как это следует из уравнения (11.26), она определяет полную энергию данного газового потока.

Так как скорость звука уменьшается с увеличением скорости течения, то, в частности, эти скорости могут оказаться равными. Пусть это имеет место в некоторой точке или сечении потока. Обозначим общее значение этих скоростей через a_*, найдем эту величину с помощью выражения (11.25). Для указанной точки

$$\frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1},$$

откуда

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \tag{11.27}$$

Величина a_* называется критической скоростью и, очевидно, представляет собой скорость течения, равную местной скорости звука. Потоки газа со скоростями, меньшими a_*, называют дозвуковыми, а потоки, для которых $u > a_*$, — сверхзвуковыми или сверхкритическими. Как убедимся далее, эти два класса газовых потоков имеют резко различные свойства.

Из формулы (11.27) следует, что поскольку всегда $k > 1$, то $a_* < a_0$, т. е. критическая скорость всегда меньше скорости звука в полностью заторможенном газе. Наряду с этим критическая скорость является константой данного газового потока, поскольку определяется только температурой торможения:

$$a_* = \sqrt{kRT_0}\sqrt{\frac{2}{k+1}}. \tag{11.28}$$

Критической скорости соответствуют критические параметры $T_* = 2T_0/(k+1)$, p_*, ρ_*, которые, как и параметры торможения, постоянны для всего потока.

В газовой динамике широко применяют безразмерное представление расчетных формул. В частности, пользуются безразмерными скоростями

$$\mathrm{M} = u/a \text{ и } \lambda = u/a_*,$$

первая из которых называется числом Маха, а вторая — приведенной скоростью или коэффициентом скорости.

Покажем, что отношение любого параметра газового потока к соответствующему параметру торможения определяется только числом Маха. Из выражения (11.25) имеем

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2}\frac{u^2}{a^2}$$

или

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{1/2}. \tag{11.29}$$

Учитывая формулу (11.23), получаем

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2. \tag{11.30}$$

Используя зависимости (11.15), находим

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{11.31}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{11.32}$$

Соотношения (11.29)—(11.32) (изоэнтропические формулы) широко используются в газодинамических расчетах. Значения функций $a_0/a = f(\mathrm{M})$, $T_0/T = f_2(\mathrm{M})$ и др. табулированы для наиболее часто встречающихся значений М. Поскольку каждому значению М отвечает вполне определенное значение λ, отношения a_0/a, T_0/T могут быть выражены как функции приведенной скорости.

Учитывая, что $a_0 = a_* \sqrt{(k+1)/2}$, представим выражение (11.25) в виде

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = a_*^2 \frac{k+1}{2(k-1)}. \tag{11.33}$$

Разделив обе части этого уравнения на a^2 и умножив на $k-1$, получим

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \frac{a_*^2}{a^2} \frac{k+1}{2} = \frac{u^2}{a^2} \frac{a_*^2}{u^2} \frac{k+1}{2}$$

или

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\lambda^2}{1-(k-1)\lambda^2/(k+1)}. \tag{11.34}$$

Исключая с помощью этого соотношения число M в формулах (11.29) и (11.32), находим изоэнтропические формулы в виде

$$\frac{a}{a_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/2}; \tag{11.35}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2; \tag{11.36}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{11.37}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{11.38}$$

Учитывая, что параметры торможения постоянны для всех точек данного потока газа, из формул (11.29)—(11.38) нетрудно получить отношения параметров для двух (индексы 1 и 2) произвольных точек данного потока:

$$\begin{gathered}
\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+2}\lambda_2^2}\right)^{1/2}; \\
\frac{T_1}{T_2} = \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} = \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}; \\
\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \\
\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.
\end{gathered} \tag{11.39}$$

Изоэнтропические формулы позволяют оценить ошибку, которая допускается при вычислении параметров газа (например, давления и плотности) по формулам для несжимаемой жидкости. Чтобы выполнить эту оценку, разложим в ряд правые части выражений (11.31) и (11.32):

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{2}M^2 + \ldots;$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1 + \frac{k}{k-1}\frac{k-1}{2}M^2 +$$

$$+ \frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{2}M^2\right)^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{k}{2}M^2 + \frac{k}{8}M^4 + \ldots$$

Тогда

$$\varepsilon_\rho = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{M^2}{2} + \ldots; \tag{11.40}$$

$$\varepsilon_p = \frac{p_0 - p}{p} = \frac{kM^2}{2}\left(1 + \frac{k}{4}M^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{k}{2}\frac{u^2}{kp/\rho}\left(1 + \frac{k}{4}M^2 + \ldots\right)$$

или

$$\varepsilon_p = \frac{p_0 - p}{\rho u^2/2} = 1 + \frac{k}{4}M^2 + \ldots \tag{11.41}$$

Для несжимаемой жидкости $a = \sqrt{dp/d\rho} = \infty$ и $M = 0$. Из формул (11.40) и (11.41) для этого случая получаем $\rho = \rho_0$ и $p + \rho u^2/2 = p_0$.

Для сжимаемой среды (газа) погрешность при использовании последних формул растет при увеличении числа M. Если в уравнениях (11.40) и (11.41) ограничить ряды только членами, содержащими M^2, то, например, при $M = 0{,}2$ получим $\varepsilon_\rho = 0{,}02$ и $\varepsilon_p = 1{,}01$, т. е. погрешность определения плотности составляет 2 %, а давления 1 %. Заметим, что значение $M = 0{,}2$ при нормальных условиях [$a = 340$ м/с; $T = (273 + 15)$ K] соответствует скорости $u = 68$ м/с.

11.4. ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА ПРИ ТЕЧЕНИИ ПО ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Выше предполагалось, что в одномерном потоке газа все его параметры — скорость, давление, температура, плотность — постоянны в пределах рассматриваемого сечения. Такое приближенное представление не только оказывается достаточным для установления основных качественных закономерностей, но позволяет в ряде случаев выполнить технические расчеты с удовлетворительной точностью.

Рассмотрим закономерности изменения указанных газовых параметров вдоль оси потока, не учитывая ее кривизну и приняв ее за координатную ось x.

Уравнение неразрывности для одномерного потока в трубе переменного сечения можно записать в конечной (гидравлической) форме

$$\rho u S = \text{const}$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dS}{S}=0, \tag{11.42}$$

которая получается, если первую формулу прологарифмировать, а затем продифференцировать. Следует подчеркнуть, что дифференциалы в выражении (11.42) берутся по переменной x, т. е. вдоль оси потока. Чтобы установить связь между изменением живого сечения и изменениями других параметров, используем также уравнение Бернулли

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{const},$$

дифференцируя которое, найдем

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{\rho\,dp-p\,d\rho}{\rho^2}=0$$

или

$$u\,du+\frac{k}{k-1}\frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{dp}{d\rho}-\frac{p}{\rho}\right)=0.$$

Поскольку $a^2=kp/\rho=dp/d\rho$, то это уравнение можно записать в виде

$$u\,du+a^2\frac{d\rho}{\rho}=0,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{u^2}{a^2}\frac{du}{u}=-\mathrm{M}^2\frac{du}{u}. \tag{11.43}$$

Подставляя выражение для относительного изменения плотности в уравнение неразрывности, получаем уравнение Гюгонио

$$\frac{du}{u}=\frac{1}{\mathrm{M}^2-1}\frac{dS}{S}, \tag{11.44}$$

которое позволяет установить характер изменения скорости вдоль трубы переменного сечения. Прежде чем выполнять этот анализ, найдем аналогичные соотношения для плотности и давления. Из формул (11.43) и (11.44) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{M}^2}{1-\mathrm{M}^2}\frac{dS}{S}, \tag{11.45}$$

а используя уравнение адиабаты $p = C\rho^k$, найдем

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{kM^2}{1-M^2}\frac{dS}{S}. \qquad (11.46)$$

Из уравнений (11.44)—(11.46) можно сделать следующие выводы.

1. Дозвуковой поток газа ($M < 1$) в расширяющейся трубе ($dS > 0$) замедляется ($du < 0$), а в сужающейся ($dS < 0$) ускоряется ($du > 0$). Таким образом, поведение дозвукового потока газа качественно аналогично поведению потока несжимаемой жидкости.

2. Сверхзвуковой поток газа ($M > 1$) ускоряется ($du > 0$) в расширяющейся трубе и замедляется ($du < 0$) в сужающейся.

3. Изменения плотности и давления обратны изменению скорости; плотность и давление дозвукового потока в расширяющейся трубе возрастают, а в сужающейся — убывают. Для сверхзвукового потока имеет место противоположная закономерность.

4. При $M = 1$, т. е. при достижении критических параметров, во всех сечениях, где $dS \neq 0$, наступает разрывное ($du/dx = \infty$) или скачкообразное изменение параметров газа.

Как показано ниже, скачкообразный переход через критическое состояние физически возможен только в сверхзвуковом потоке, который при таком переходе преобразуется в дозвуковой. Поскольку при этом плотность газа скачкообразно возрастает, этот переход получил название прямого скачка уплотнения. Аналогичный переход дозвукового потока в сверхзвуковой должен был бы иметь характер скачка разрежения, однако его существование противоречит второму закону термодинамики и потому невозможно (см. п. 11.6).

Важное практическое значение имеют условия непрерывного перехода через критическое состояние. Необходимым условием для непрерывного перехода через критическое состояние (через звуковую скорость) является наличие в трубе экстремального сечения, в котором $dS = 0$. Тогда при $M = 1$ в этом сечении du/dx может иметь конечное значение, т. е. переход дозвукового потока в сверхзвуковой может быть осуществлен только в трубе с минимальным сечением (рис. 11.2, *а*). В такой трубе, получившей название сопла Лаваля, дозвуковой поток ускоряется в сужающейся части (конфузоре) и, если минимальное (критическое) сечение надлежащим образом рассчитано, то в нем достигается звуковая скорость, а в расширяющейся части происходит дальнейшее ускорение уже сверхзвукового потока.

Очевидно, такое преобразование дозвукового потока в сверхзвуковой невозможно в трубе с максимальным сечением (рис. 11.2, *б*), так как дозвуковой поток, поступающий в расширяющуюся часть (диффузор), тормозится в ней и в экстремальном сечении имеет не только не звуковую, но даже меньшую, чем на входе, скорость. В сужающейся части поток снова ускоряется,

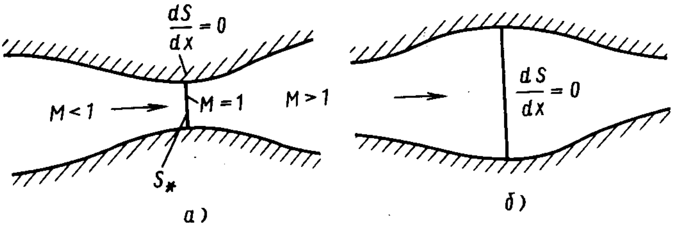


Рис. 11.2. Изменение параметров газа при течении по каналу переменного сечения:

а — канал с экстремальным сечением, в котором возможен переход от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям; *б* — канал с экстремальным сечением, в котором такой переход невозможен

однако звуковая скорость может быть достигнута только в выходном сечении.

Представляет также интерес торможение газовых потоков. Из выводов 1 и 2 следует, что дозвуковой поток можно затормозить расширяющейся трубой (диффузором), а для сверхзвукового потока эту роль выполнит сужающаяся труба. Опыт показывает, что в последнем случае поток газа неустойчив и в нем легко возникает система косых и прямых скачков уплотнения, в которых и происходит торможение. Скачки уплотнения представляют собой поверхности, при переходе через которые происходит разрывное (скачкообразное) изменение параметров газового потока. Поскольку, как мы увидим ниже, скачки уплотнения сопровождаются потерями энергии, возникает вопрос о таком профилировании трубы, которое обеспечило бы системы скачков с минимальными потерями. Функцию устройства, осуществляющего торможение сверхзвукового потока и преобразование его в дозвуковой, может выполнить труба той же конфигурации, что и сопло Лаваля, которая, однако, в данном случае является сверхзвуковым диффузором.

11.5. ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ РЕЗЕРВУАРА ЧЕРЕЗ СУЖАЮЩЕЕСЯ СОПЛО. ФОРМУЛА СЕН-ВЕНАНА-ВАНЦЕЛЯ

Рассмотрим истечение газа из резервуара через сужающееся сопло (рис. 11.3). Размеры резервуара будем считать настолько большими по сравнению с размером отверстия, что скорость жидкости в резервуаре можно считать равной нулю. Если конфигурация сопла выбрана надлежащим образом, то распределение скоростей на срезе сопла будет практически равномерным. Обозначим через ρ_0, p_0, T_0 значения параметров газа внутри резервуара; они, очевидно, будут являться параметрами торможения. Давление во внешней среде и на срезе сопла обозначим через p_1, параметры газа в сечении *1-1* через u_1, ρ_1, T_1, площадь выходного отверстия сопла через S.

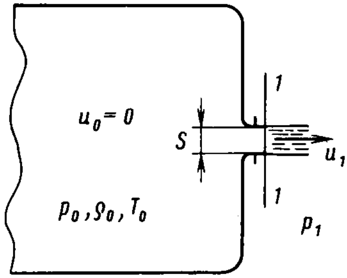


Рис. 11.3. Схема для вывода формул истечения газа через сужающееся сопло

Решим уравнение Бернулли

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0},$$

относительно скорости истечения u_1:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)}$$

или

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}\sqrt{1 - \frac{p_1}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho_1}}.$$

Предполагая истечение адиабатным, используем соотношение

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{1}{k}}.$$

Тогда получим

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}\sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \tag{11.47}$$

или, с учетом выражений (11.23) и (11.27),

$$u_1 = a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} =$$

$$= a_*\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Последние формулы являются видоизменениями формулы Сен-Венана — Ванцеля * для скорости истечения газа.

Определим массовый расход газа через сопло

$$Q_м = \rho_1 u_1 S = \rho_0 S\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/k}\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Для краткости введем обозначение $\varepsilon = p_1/p_0$ и перепишем эту формулу в виде

$$Q_м = S\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_0\rho_0}\,f(\varepsilon), \tag{11.48}$$

где $f(\varepsilon) = \varepsilon^{1/k}\sqrt{1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}}$.

* Адемар Жан-Клод Барре де Сен-Венан (1797—1886) — выдающийся французский ученый в области механики и инженер, член Парижской академии наук. Работы Сен-Венана по гидромеханике посвящены сопротивлениям течению в трубах и каналах, гравитационным волнам, установившемуся и неустановившемуся движениям в открытых руслах, истечениям газов, общим уравнениям вязкой жидкости.

Очевидно, при постоянных ρ_0 и p_0 массовый расход изменяется так же, как функция $f(\varepsilon)$. Эта функция обращается в нуль при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, а следовательно, имеет экстремум между этими точками. Найдем значение ε_*, называемое критическим, при котором $f'(\varepsilon) = 0$.

После обычных преобразований получим

$$\varepsilon_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (11.49)$$

В частном случае, при $k = 1,4$ $\varepsilon_* = 0,528$. Нетрудно убедиться, что найденная экстремальная точка есть точка максимума. Поэтому максимальное или критическое значение массового расхода

$$Q_м^* = S \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\, \sqrt{p_0\rho_0}. \qquad (11.50)$$

Удобно ввести в рассмотрение приведенный расход q, понимая под ним отношение произвольного расхода к его критическому значению $Q_м^*$. Из формул (11.48) и (11.50) находим

$$q = \sqrt{\frac{2}{k-1}}\, \sqrt{\frac{k+1}{2}^{\frac{k+1}{k-1}}}\, \varepsilon^{1/k} \sqrt{1-\varepsilon^{\frac{k-1}{k}}} = Af(\varepsilon), \qquad (11.51)$$

где $A = \text{const}$.

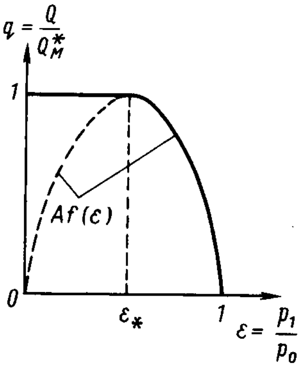
Используя формулу (11.38), выразим приведенный расход через приведенную скорость:

$$q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (11.52)$$

Зависимость $q(\varepsilon)$ приведенного расхода от отношения давлений $\varepsilon = p_1/p_0$ будет, очевидно, качественно такой же, как и зависимость $f(\varepsilon)$ (рис. 11.4). Однако на участке $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ эта зависимость физически не реальна, так как она дает уменьшение расхода при уменьшении внешнего давления p_1. Действительно, опыт показывает, что реальная зависимость $q(\varepsilon)$ приблизительно следует теоретической только в диапазоне $\varepsilon_* \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, а при $\varepsilon < \varepsilon_*$ массовый расход остается постоянным, равным $Q_м^*$ ($q = 1$).

На рис. 11.4 физически реальная кривая $q(\varepsilon)$ показана сплошной линией. Чтобы выяснить причину такого характера этой кривой, установим, какая скорость истечения газа достигается на срезе сопла при максимальном расходе. Подставляя выражение для ε_* из формулы (11.49) в правую часть уравнения (11.47), находим $u_1 = a_*$, т. е. скорость истечения при максимальном расходе равна звуковой. Этим и обусловлен указанный выше характер зависимости $q(\varepsilon)$. При уменьшении давления p_1 в диапазоне $\varepsilon_* < \varepsilon < 1$ расход, естественно, возрастает. При этом всякое малое изменение внешнего давления, распространяясь со звуковой

Рис. 11.4. Зависимость приведенного расхода газа через сопло от отношения давлений



скоростью, проникает внутрь сопла и обусловливает соответствующее изменение перепада давлений, под действием которого движутся частицы газа. По достижении значения $u_1 = a_*$ на срезе сопла образуется так называемый звуковой барьер, через который не могут проникнуть изменения внешнего давления, так как частицы газа летят с той же скоростью, с какой вверх по течению распространяется малая волна понижения давления. В связи с этим при $\varepsilon < \varepsilon_*$ давление на срезе сопла остается постоянным, равным критическому давлению p_*, чем и обусловливается постоянство массового расхода. Из изложенного следует, что с помощью сужающегося сопла нельзя достичь сверхзвуковой скорости истечения никаким изменением внешнего давления, но этого можно достичь применением сопла Лаваля.

Описанный теоретический характер изменения расхода достаточно хорошо подтверждается опытным путем при равномерном распределении скоростей на срезе. Последнее может быть обеспечено плавным очертанием профиля сопла, рассчитанным по специальным формулам [8].

Истечение газа через отверстие с острыми кромками заметно отличается от истечения через сопло и требует специального рассмотрения.

11.6. ПРЯМОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

Поверхности разрыва, называемые скачками уплотнения, могут быть плоскими или криволинейными и по-разному ориентированными к направлению вектора скорости. Скачок простейшей формы, при которой поверхность разрыва представляет собой плоскость, нормальную к скорости потока, называется прямым скачком уплотнения. Рассмотрим его основные свойства.

Пусть в цилиндрической трубе существует поток с параметрами u_1, p_1, ρ_1, T_1 и в результате его торможения образовался скачок, за которым параметры потока u_2, p_2, ρ_2, T_2 (рис. 11.5). Строго говоря, скачок не является поверхностью, а имеет некоторую протяженность в направлении вектора скорости, т. е. занимает некоторый объем. Однако эта протяженность весьма мала (порядок длины свободного пробега молекул) и в газодинамических расчетах принимается равной нулю. Выделим двумя плоскостями *1-1* и *2-2* отсек газа, включающий поверхность разрыва, или иначе, фронт скачка *С-С*. Пренебрегая действием массовых сил и предполагая распределение параметров газа по сечению трубы равномерным, запишем уравнение количества движения в проекции на ось трубы для выделенного отсека:

$$(p_1 - p_2) S = \rho_2 u_2^2 S - \rho_1 u_1^2 S,$$

где S — площадь поперечного сечения трубы.

После сокращения получим

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2. \tag{11.53}$$

Из п. 11.2 известно, что для теплоизолированного течения идеального газа уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии. Поэтому, предполагая, что скачок происходит без теплообмена с внешней средой (через стенки трубы), можно применить это уравнение к выбранным сечениям *1-1* и *2-2* потока:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{11.54}$$

Третьим уравнением, описывающим скачок, будет уравнение неразрывности, которое с учетом условия $S = \mathrm{const}$ имеет вид

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{11.55}$$

Преобразуя эту систему уравнений, можно получить различные формы соотношений, описывающих скачок. Установим прежде всего связь давления и плотности перед скачком с их значениями за ним. Для этого представим выражение (11.53) с учетом уравнения (11.55) в виде

$$\rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = p_1 - p_2$$

и, перемножив левую и правую части этого уравнения с соответствующими частями тождества

$$\frac{u_2 + u_1}{\rho_1 u_1} = \frac{u_2}{\rho_1 u_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1},$$

получим

$$u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Используя уравнение Бернулли (11.54), исключим разность квадратов скоростей:

$$\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Это соотношение, содержащее только плотности и давления, путем элементарных преобразований приводится к виду

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 (k+1) - \rho_1 (k-1)}{\rho_1 (k+1) - \rho_2 (k-1)} \tag{11.56}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\,\rho_2/\rho_1 - (k-1)}{k+1-(k-1)\,\rho_2/\rho_1}. \tag{11.57}$$

Уравнение (11.56) называется ударной адиабатой или диабатой Гюгонио. Сопоставим зависимость $p_2/p_1 = f(\rho_2/\rho_1)$ для ударной адиабаты с аналогичной зависимостью $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k$ для идеальной адиабаты.

Первая выражает изменение параметров газа при переходе через скачок, вторая отвечает изоэнтропному непрерывному изменению давления и плотности. На графиках (рис. 11.6) нанесены кривые идеальной адиабаты и ударной адиабаты по уравнению (11.57). Различие этих кривых состоит прежде всего в том, что по идеальной адиабате отношение ρ_2/ρ_1 может возрастать безгранично при увеличении p_2/p_1. Согласно ударной адиабате при увеличении p_2/p_1 отношение ρ_2/ρ_1 асимптотически приближается к пределу, равному $(k+1)/(k-1)$. Это значит, что как бы ни возрастало давление при переходе через скачок, уплотнение газа не может превосходить этого предела (для воздуха равного шести).

Используя выражение (11.18) энтропии, составим разность ее значений за скачком и перед ним:

$$s_2 - s_1 = \frac{k}{k-1}\left[\ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^k}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{\rho_1^k}\right)\right] = \frac{k}{k-1}\ln\left(\frac{p_2/\rho_2^k}{p_1/\rho_1^k}\right).$$

Отсюда следует, что при изменении параметров газа по идеальной адиабате $p_2/\rho_2^k = p_1/\rho_1^k$ энтропия остается постоянной ($s_2 - s_1 = 0$), тогда как при переходе через скачок согласно ударной адиабате она возрастает ($s_2 - s_1 > 0$), поскольку $p_2/p_1 > \rho_2^k/\rho_1^k$. Таким образом, переход через скачок уплотнения не является изоэнтропным процессом и сопровождается необратимыми преобразованиями механической энергии в тепловую (потерями).

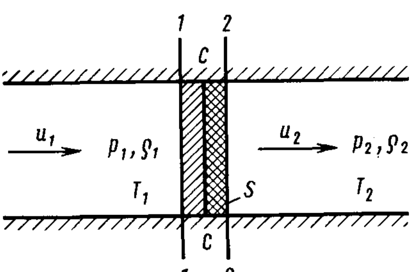


Рис. 11.5. Расчетная схема прямого скачка уплотнения

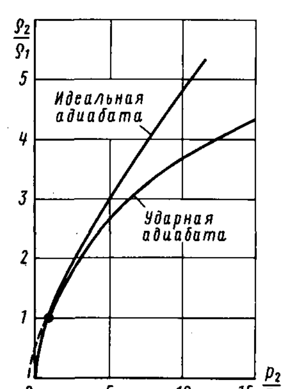


Рис. 11.6. Сравнение идеальной и ударной адиабат

Поскольку вывод и итоговое уравнение формально справедливы не только при $\rho_2/\rho_1 > 1$, но и при $0 < \rho_2/\rho_1 < 1$, т. е. при образовании скачка разрежения, то в последнем случае должно было бы быть $s_2 - s_1 < 0$, т. е. энтропия должна убывать. Но это противоречит второму началу термодинамики, следовательно, образование скачков разрежения невозможно. Это доказывается также и анализом механизма образования в газах волн уплотнения и волн разрежения.

Установим связь между скоростями газового потока перед скачком и за ним. Из уравнения Бернулли (11.33) выразим

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k}a_*^2 - \frac{k-1}{2k}u_1^2; \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k}a_*^2 - \frac{k-1}{k}u_2^2$$

и подставим в уравнение количества движения (11.53), которое запишем в виде

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}.$$

Получаем

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{u_2}\left(\frac{k+1}{2k}a_*^2 - \frac{k-1}{2k}u_2^2\right) - \frac{1}{u_1}\left(\frac{k+1}{2k}a_*^2 - \frac{k-1}{2k}u_1^2\right).$$

Это уравнение, содержащее только скорости газа и постоянные, путем дальнейших преобразований приводится к виду $u_1 u_2 = a_*^2$ или $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Поскольку $u_1 > u_2$, то $u_1 > a_*$ и $u_2 < a_*$. Таким образом, скачок уплотнения может образоваться только в сверхзвуковом потоке газа, причем течение за скачком является дозвуковым. Поэтому можно сделать вывод, что прямой скачок уплотнения является формой перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому. При этом переходе температура торможения и критическая скорость газа остаются неизменными. Действительно, для потока перед скачком справедливо равенство

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{kRT_{01}}{k-1},$$

а для потока за скачком — аналогичное ему

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{kRT_{02}}{k-1},$$

где T_{01} и T_{02} — соответствующие температуры торможения.

Но в силу справедливости уравнения Бернулли левые части последних соотношений равны, а значит, равны и правые, т. е. $T_{01} = T_{02}$. Неизменность температуры торможения при переходе через скачок объясняется тем, что часть механической энергии преобразующаяся в тепловую (потери), не рассеивается благодаря теплоизолированности процесса, и полная удельная энергия, определяемая величиной T_0, остается неизменной. Очевидно также, что величины

$$a_0 = \sqrt{kRT_0}; \; a_* = a_0\sqrt{2/(k+1)}; \; i_0 = c_p T_0$$

остаются неизменными. Из уравнения Клайперона следует, что

$$p_{01}/p_{02} = \rho_{01}/\rho_{02}.$$

Другие параметры газа: давление, плотность, температура, — при переходе через скачок изменяются на конечные величины. Не останавливаясь на подробностях алгебраических выводов, приведем результирующие формулы, по которым определяются эти изменения:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2k}{k+1}\left(M_1^2 - 1\right) = \frac{2k}{k+1}\,\frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - (k-1)\lambda_1^2/(k+1)};$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{M_1^2 - 1}{1 + (k-1)M_1^2/2} = \lambda_1^2 - 1;$$

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\,\frac{(M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2)}{M_1^2} = \frac{k-1}{k+1}\,\frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)}.$$

Потерю механической энергии в прямом скачке уплотнения можно характеризовать отношением полного давления p_{02} за скачком к полному давлению p_{01} перед ним. Формулы, определяющие это отношение, имеют вид

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(kM_1^2 - \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}} =$$

$$= \lambda_1^2 \left\{\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_1^2}}\right\}^{\frac{1}{k-1}}.$$

В специальных руководствах по газовой динамике можно найти таблицы и графики, облегчающие расчеты по приведенным выше формулам.

11.7. УСКОРЕНИЕ И ТОРМОЖЕНИЕ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

При создании разнообразных машин и аппаратов приходится встречаться с необходимостью ускорить газовый поток от нулевых или малых скоростей до сверхзвуковых. Из п. 11.4 известно, что этого можно достигнуть с помощью сопла Лаваля, принципиальная схема которого показана на рис. 11.2, *а*. Здесь мы рассмотрим несколько более подробно режимы работы этого сопла и его элементарный расчет на основе одномерной теории.

Пусть в сопло указанной конфигурации поступает дозвуковой поток газа. Согласно уравнению Гюгонио в сужающейся (конфузорной) части скорость газа будет возрастать, а давление и плотность падать. Если в минимальном сечении (горле) скорость не достигнет критической, то в расширяющейся (диффузорной) части дозвуковой поток газа будет тормозиться, давление и плотность — возрастать и на выходе установится значение $M < 1$. Такой режим течения установится, если давление на выходе из сопла (противодавление) больше, чем некоторое граничное $p_{1\text{гр}}$, при котором в горле сопла устанавливаются критические параметры течения. Если теперь противодавление будет уменьшаться, то так как весь поток дозвуковой, возмущения в виде малых понижений давления будут распространяться вверх по течению, скорость потока во всех сечениях будет возрастать и при значении противодавления $p_{1\text{гр}}$ в горле будет достигнута звуковая (критическая) скорость a_* и соответствующие ей значения p_*, ρ_*, T_*. При этом режиме в диффузорной части происходит торможение потока от значения $M = 1$ в горле до некоторого $M_1 < 1$ — на срезе сопла. Если же противодавление далее уменьшится до значения $p_1' < p_{1\text{гр}}$, то уменьшится давление и во всей диффузорной части. Но в горле давление не может сделаться меньшим, чем p_*, по причинам, которые мы выяснили, изучая истечение через сужающееся сопло. Поэтому на некотором участке диффузорной части, начиная от горла, поток получит возможность расширения и там установится сверхзвуковое течение. Однако если давление p_1 на срезе недостаточно мало, то вблизи выхода поток будет все еще дозвуковым. Сопряжение сверхзвукового потока за горлом с дозвуковым вблизи выхода происходит в виде скачка уплотнения, который мы будем приближенно считать прямым. При дальнейшем понижении противодавления скачок уплотнения будет перемещаться внутри сопла к его выходному сечению и при некотором расчетном давлении $p_{1\text{расч}}$ расположится за срезом сопла. При этом значении противодавления на срезе устанавливается скорость, соответствующая расчетному значению числа $M_{1\text{расч}} > 1$. При дальнейшем понижении противодавления поток будет на некотором участке вне сопла продолжать расширяться, а переход к дозвуковому режиму и полному торможению будет осуществляться через сложную систему косых скачков уплотнения.

Элементарный расчет сопла Лаваля заключается в определении его основных размеров по заданному расходу, параметрам торможения и значению скорости на срезе сопла.

Площадь горла можно найти из условия, что в нем устанавливается критический режим. Следовательно, согласно выражению (11.50)

$$S_{\text{горла}} = S_* = \frac{Q_м^*}{\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\sqrt{p_0\rho_0}}, \tag{11.58}$$

где в качестве $Q_м^*$ взят заданный массовый расход.

Выходное сечение сопла S_1 можно определить из уравнения неразрывности

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_* a_* S_*.$$

Выражая отношение плотностей ρ_1/ρ_* по соответствующей формуле (11.39), где следует принять $\rho_2 = \rho_*$ и $\lambda_2 = 1$, получаем

$$S_1 = S_* \frac{\rho_* a_*}{\rho_1 u_1} = \frac{S_*\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda_1\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \tag{11.59}$$

Поскольку λ_1 задано по условию задачи, а S_* определено по выражению (11.58), то по формуле (11.59) несложно найти S_1. Промежуточные значения площадей поперечных сечений сопла можно найти по той же формуле (11.59), если задаться законом изменения по его длине приведенной скорости $\lambda(x)$ или давления $\varepsilon(x)$. Но если необходимо с помощью сопла Лаваля обеспечить только заданное значение средней скорости, а равномерность распределения скоростей в сечении несущественна, то иногда выполняют расширяющуюся часть конической с углом раствора, не превышающим 12°. Для получения равномерного поля скоростей на выходе из сопла его очертания должны быть рассчитаны методами теории двумерных течений.

Получение сверхзвуковых скоростей в сопле Лаваля является только одним из возможных способов ускорения газового потока. Л. А. Вулисом обоснованы также методы получения сверхзвуковых скоростей в цилиндрических каналах путем изменения расхода вдоль течения и путем подвода или отвода тепла. Основы этих методов изложены в работах [8, 16].

Задача торможения газовых потоков встречается во многих случаях инженерной практики. С гидродинамической точки зрения эта задача заключается в преобразовании кинетической энергии в потенциальную.

Как вытекает из уравнения Гюгонио, торможение дозвукового потока должно осуществляться в расширяющемся канале (диффузоре), подобно тому как происходит торможение несжимаемой жидкости (см. п. 6.9). Основным вопросом проектирования дозвукового диффузора является определение величины потерь.

Эти потери определяются вихревой структурой вязкого газа в диффузоре и, в частности, наличием отрывов пограничного слоя от боковых стенок. Поэтому расчет таких потерь основывается на теории пограничного слоя с учетом сжимаемости газа (см. [8]).

Сверхзвуковые потоки тормозятся, как известно, в сужающихся каналах. Поэтому для непрерывного торможения сверхзвукового потока может быть использован канал той же конфигурации, что и сопло Лаваля, называемый в этом случае сверхзвуковым диффузором. Действительно, в сужающемся канале скорость сверхзвукового потока уменьшается, и если горло надлежащим образом рассчитано, то в нем устанавливается критическая скорость. Тогда в расширяющейся части происходит дальнейшее торможение дозвукового потока. Такой диффузор называется идеальным, однако он представляет собой только принципиальную теоретическую схему, реализовать которую на практике не удается. Трудность состоит в том, что сверхзвуковой поток в сужающемся канале является неустойчивым и под влиянием даже малых возмущений насыщается скачками уплотнений. В зависимости от формы сужающейся части система прямых и косых скачков может быть более или менее сложной, но во всех случаях является источником особых, так называемых волновых потерь энергии. Поэтому возникает задача управления системой скачков с целью сведения потерь к минимуму. Этого удается добиться приданием стенкам сужения особой формы, при которой в горле устанавливается скорость, близкая к критической. Таким образом, суммарные потери в сверхзвуковом диффузоре включают в себя помимо потерь вязкостного происхождения также волновые потери, связанные с образованием скачков уплотнения. Достаточно подробное изложение современных результатов исследования газовых диффузоров можно найти в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М.: Наука, 1970. 216 с.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Викторов Г. В. Гидродинамическая теория решеток: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1969. 368 с.
4. Войткунский Я. И., Фаддеев Ю. И., Федяевский К. К. Гидромеханика: Учебник. Л.: Судостроение, 1982. 455 с.
5. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 400 с.
6. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
7. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
8. Дейч М. Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974. 589 с.
9. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 384 с.
10. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах. Гидрометеоиздат, 1973. 279 с.
11. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: Учебник. В 2-х ч. М.: Физматгиз, 1963.
13. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.
14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. пособие. 3-е изд. М.: Наука, 1970. 904 с.
15. Патрашев А. Н., Кивако Л. А., Гожий С. И. Прикладная гидромеханика. М.: Воениздат, 1970. 684 с.
16. Повх И. Л. Техническая гидромеханика: Учеб. пособие. М.: Машиностроение, 1976. 502 с.
17. Рождественский В. В. Кавитация. Л.: Судостроение, 1977.
18. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. Самойлович Г. С. Гидроаэромеханика. М.: Машиностроение, 1980. 280 с.
20. Седов Л. И. Методы теории размерности и подобия в механике. М.: Наука, 1970. 440 с.
21. Седов Л. И. Механика сплошной среды: Учебник. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
22. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости: Учебник. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 519 с.
23. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
24. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. 420 с.
25. Теория турбулентных струй/Под ред. Г. И. Абрамовича. М.: Наука, 1984. 715 с.
26. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М.: Наука, 1964. 814 с.
27. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. 256 с.
28. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналогии 24, 266

Баротропность 64

Вихреисточник 218
Вихри Тейлора 364
Вихрь плоский 217
Высота вакуумметрическая 67
— приведенная 67
— пьезометрическая 67
Вязкость 14

Газ идеальный 23, 407
— совершенный 13
Гипотеза обобщенная Ньютона 79
— сплошности 10
Гипотезы о турбулентных напряжениях 93
Главный вектор сил поверхностных 111
— — — давления 71
График гидравлического коэффициента трения ВТИ 151
— — — — Никурадзе 149

Давление абсолютное 66
— вакуумметрическое 67
— весовое 66
— внешнее 66
— избыточное 66
Движение безвихревое 50
— вихревое 42
— неустановившееся 27
— относительное 106
— плавноизменяющееся 134
— потенциальное 50
— установившееся 27
Диполь 219
Диффузия вихрей 301
Диффузоры 174

Жидкость вязкая 14, 21, 22
— идеальная 21, 101
Закон корня седьмой степени 164
— распределения давлений гидростатический 65
Закон сопротивления 165, 376

Интеграл Бернулли 101
— Лагранжа 104
Интенсивность вихревой трубки 43
Истечение из-под затвора 263
— из резервуара 175, 191
Источник 217

Каверна кавитационная 399
Кавитация 19, 398
— развитая 399
Квадратичность сопротивления 150
Коэффициент вязкости динамический 15
— — кинематический 16
— давления 224
— кинетической энергии 136
— количества движения 142
— потерь на внезапное расширение 172
— объемного теплового расширения 14
— поверхностного натяжения 18
— полноты удара 174
— потерь по длине 147
— расхода насадка, отверстия 177, 178
— — трубопровода 180
— сжатия струи 177, 261
— сжимаемости 13
— сопротивления клапана 260
— — местного 145, 172
— — пластинки 264
— трения 143
— — гидравлический 147, 149
— турбулентной вязкости 93
Критерии подобия 122

Линия вихревая 43
— жидкая 11
— пьезометрическая 137
— тока 31
— энергии 137

Масса присоединенная 284
Метод аналогии ламинарной 268
— — электрогидродинамической 267

— Кочина — Лойцянского расчета пограничного слоя 345
— Польгаузена расчета пограничного слоя 342
— Тарга расчета начального участка 357
— размерностей 126
— численного решения уравнений Навье—Стокса 318
Модель одномерная 133
Модуль упругости жидкости 13

Напор гидродинамический 138
— инерционный 188
— пьезометрический 138
— скоростной 138
Напряжение вязкостное 15
— касательное 56
— нормальное 56
— поверхностных сил 57
— турбулентное 92
Насадки 178
Начальный участок течения в трубе 154, 353
Неустойчивость ламинарных течений 155, 359

Обтекание круглого цилиндра бесциркуляционное 222
— — — с циркуляцией 226
— крылового профиля 244
— пластинки 239
Объем жидкий 11, 25
Одномерное течение газа 407
— — вязкой жидкости 133
Отрыв пограничного слоя 348

Парадокс гидростатический 72
— Даламбера 226
Параметры газа критические 415
— торможения газа 415
Переменная Жуковского 253
Плотность распределения массовых сил 57
— среды 12
Поверхность контрольная 110
— свободная 66
— эквипотенциальная 51
Подобие геометрическое 118
— динамическое 118
— кинематическое 118
Постулат Жуковского—Чаплыгина 241
Потенциал комплексный 212
— массовых сил 63
— скорости 50
Потери напора (энергии) 137
Поток дозвуковой 416
— количества движения 111
— сверхзвуковой 416
Принцип сложения потерь 140
— суперпозиции потенциальных течений 210
Профиль скорости в трубе универсальный 160
— — — — логарифмический 162
— — — — параболический 153
Пульсация скорости 28
Путь перемешивания 159

Равновесие жидкости абсолютное 63
— — относительное 63, 69
Расход массовый 33
— объемный 33

Сетка гидродинамическая 54
Сечение живое 133
— сжатое 177
Сжатие струи 177
Сила архимедова 77
— внутреннего трения (вязкости) 15
— подсасывающая 243
— подъемная Жуковского 234
— трения в смазочном слое 312
— — в пограничном слое 334
Скачок уплотнения прямой 424
Слой вихревой 221
— пограничный ламинарный 225
— — пристенный 225
— — струйный 327, 378
— — турбулентный 367
Скорость волны гидравлического удара 197
— динамическая 158
— звука 413
— комплексная 213
— линейной деформации 44
— малых возмущений 412
— мгновенная 28
— сопряженная 213
— угловая 41
— угловой деформации 41
— усредненная местная 28
Соотношение интегральное пограничного слоя 338
Сопло Лаваля 420
Сопротивление гидравлическое 138
— инерционное 283
Сток 217
Струи затопленные турбулентные 377
Суперкавитация 399

Тело давления 77
Теорема Жуковского о подъемной силе 231
— Коши — Гельмгольца 38
— Томсона 107
Теплоемкость удельная 409
Течение в слое переменной толщины 306
— вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами 297
— газа адиабатное 412

— — изэнтропическое 415
— — одномерное 407
— ламинарное в круглой трубе 164
— — между параллельными плоскостями 291
— Куэтта ламинарное 293
— ползущее 307
— разрывное 249
— стабилизированное 141
— турбулентное между параллельными плоскостями 364
Течения безвихревые осесимметричные 273
— — плоские 52
— — пространственные 269
Толщина вытеснения 328
— пограничного слоя 327
— потери импульса 338
Трубка вихревая 43
— тока 33

Удар гидравлический 192
— — прямой 200
— — непрямой 203
Уклон гидравлический 138
— пьезометрический 138
Уравнение Бернулли потока вязкой жидкости 137
— — струйки вязкой жидкости 86
— количества движения 109
— момента количества движения 109
— сплошности 33
— энергии 112
— Громеки—Ламба 84
— Навье—Стокса 82
— Прандтля ламинарного пограничного слоя 331
Уравнения Рейнольдса смазочного слоя 306
— — турбулентного течения 89
— цепные гидравлического удара 204
— Эйлера идеальной жидкости 99
— — покоящейся жидкости 63
Ускорение жидкой частицы полное 30
— локальное 30
— конвективное 30
Условия граничные для вязкой жидкости 86
— — — идеальной жидкости 100
— начальные 85

Формула Чаплыгина для главного вектора 231
— — — — момента 231
Функция давления 64
— тока плоского течения 54
— — осесимметричного течения 272

Центр давления 79
Циркуляция скорости 47

Число Вебера 132
— Маха 416
— Рейнольдса 122
— — критическое 150
— Струхаля 122
— Фруда 122
— Эйлера 122

Шероховатость абсолютная 148
— относительная 149
— равнозернистая 149
Энергия внутренняя 113
— кинетическая 113
— удельная 88, 113
Энтальпия 408
Энтропия 411

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 3
Предисловие к первому изданию 4
Введение 6

1. **Основные физические свойства жидкостей и газов** 8

1.1. Отличительные особенности жидкого и газообразного состояний вещества 8
1.2. Гипотеза сплошности среды 10
1.3. Плотность сплошной среды. Объемные свойства жидкостей и газов 12
1.4. Вязкость жидкостей и газов 14
1.5. Явления на границах жидкостей с газами и твердыми телами 17
1.6. Испарение и кипение жидкостей. Кавитация 19
1.7. Модели жидкой среды и методы гидромеханики 21

2. **Кинематика жидкости** 25

2.1. Два метода описания движения жидкости 25
2.2. Линии и трубки тока. Расход жидкости 30
2.3. Уравнение неразрывности (сплошности) 33
2.4. Уравнение неразрывности в криволинейных ортогональных системах координат 37
2.5. Общий характер движения жидкой частицы. Теорема Коши-Гельмгольца 38
2.6. Вихревые линии и трубки. Теорема Гельмгольца. Образование вихрей 43
2.7. Циркуляция скорости и теорема Стокса 47
2.8. Безвихревое или потенциальное движение 50
2.9. Плоские потоки несжимаемой жидкости. Функция тока и гидродинамическая сетка 52

3. **Напряженное состояние жидкости** 56

3.1. Силы, действующие в жидкостях 56
3.2. Свойства напряжений поверхностных сил 58
3.3. Уравнения движения жидкости в напряжениях . . . 60

4. **Гидростатика** 63

4.1. Уравнения Эйлера для покоящейся жидкости и их интегрирование 63
4.2. Основная формула гидростатики. Закон Паскаля. Понятие о напоре 65
4.3. Относительный покой жидкости 68
4.4. Силы давления жидкости на твердые поверхности. . 71

5. Общие уравнения и теоремы динамики жидкости 79
5.1. Обобщенная гипотеза Ньютона о связи между напряжениями и скоростями деформаций 79
5.2. Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса)* 82
5.3. Уравнение Бернулли для струйки вязкой несжимаемой жидкости 86
5.4. Уравнения Рейнольдса* для развитого турбулентного движения несжимаемой жидкости 89
5.5. Некоторые гипотезы о турбулентных напряжениях 93
5.6. Модель идеальной жидкости. Уравнения движения Л. Эйлера 99
5.7. Интегралы уравнений Эйлера. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости 101
5.8. Динамические свойства вихрей 107
5.9. Уравнения количества движения и момента количества движения 109
5.10. Общее уравнение энергии 112
5.11. Подобие гидромеханических процессов 117
5.12. Метод размерностей 126

6. Одномерные течения вязкой жидкости 133
6.1. Одномерная модель реальных потоков 133
6.2. Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости 135
6.3. Гидравлические сопротивления 138
6.4. Структура общих формул для вычисления потерь напора 141
6.5. Сопротивление по длине. Гидравлический коэффициент трения 147
6.6. Ламинарное течение в круглых трубах и переход к турбулентному течению 152
6.7. Распределение скоростей при турбулентном течении в трубах 157
6.8. Сопротивление движению жидкости в трубах при турбулентном режиме 165
6.9. Местные гидравлические сопротивления 170
6.10. Истечение жидкости через отверстия и насадки . . . 175
6.11. Гидравлический расчет трубопроводных систем 179
6.12. Силовое воздействие установившегося потока несжимаемой жидкости на твердые поверхности (одномерные задачи) 182
6.13. Одномерное неустановившееся движение несжимаемой жидкости 188
6.14. Неустановившееся движение в случае пренебрежимо малого влияния инерции. Время наполнения и опорожнения резервуаров 190
6.15. Неустановившееся движение при больших ускорениях. Гидравлический удар в трубах 192
6.16. Дифференциальные уравнения гидравлического удара в цилиндрических трубах 194
6.17. Прямой гидравлический удар. Формула Н. Е. Жуковского 200
6.18. Непрямой гидравлический удар. Цепные уравнения 203

7. Потенциальные течения несжимаемой жидкости 209
7.1. Общие свойства потенциальных течений. Постановка гидродинамической задачи 209

7.2. Плоские потенциальные потоки. Применение функций комплексного переменного 212
7.3. Простейшие плоские потенциальные течения 214
7.4. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра прямолинейным потоком 222
7.5. Обтекание круглого цилиндра с циркуляцией 226
7.6. Формулы Чаплыгина для главного вектора и главного момента сил давления на обтекаемое цилиндрическое тело 231
7.7. Применение метода конформных отображений для построения плоских потенциальных течений 236
7.8. Циркуляционное обтекание пластины плоским потенциальным потоком 239
7.9. Постановка общей задачи об обтекании крылового профиля 244
7.10. Методы особенностей для решения плоских задач потенциального обтекания тел 247
7.11. Плоские струйные безвихревые течения. Физические предпосылки и теоретические схемы 249
7.12. Истечение жидкости из резервуаров, через клапан, из-под затвора. Пластина в свободной струе и в канале 254
7.13. Приближенные методы построения плоских потенциальных течений 265
7.14. Пространственные безвихревые течения. Применение криволинейных координат 269
7.15. Потенциальные течения в осесимметричных каналах 273
7.16. Простейшие пространственные безвихревые течения 275
7.17. Примеры пространственного обтекания тел установившимся потенциальным потоком 279
7.18. Неустановившееся движение тела в невязкой жидкости. Понятие о присоединенных массах 282

8. Ламинарные течения вязкой несжимаемой жидкости (неодномерные задачи) 288
8.1. Общие свойства течений вязкой жидкости 288
8.2. Установившееся ламинарное течение между параллельными плоскостями 291
8.3. Постановка общей задачи о ламинарном установившемся течении в цилиндрических и призматических трубах. Течение в кольцевой трубе 295
8.4. Ламинарное течение между соосными вращающимися цилиндрами 297
8.5. Диффузия вихрей в вязкой жидкости 301
8.6. Приближенные уравнения для малых чисел Рейнольдса. Плоские ползущие течения 305
8.7. Течение вязкой жидкости в тонком слое переменной толщины. Уравнения Рейнольдса для смазочного слоя 306
8.8. Плоский клиновидный смазочный слой 308
8.9. Основы теории цилиндрического подшипника скольжения 313
8.10. Численные методы решения уравнений Навье—Стокса 318
8.11. Ламинарный пограничный слой. Структура течения и его основные параметры 325
8.12. Уравнения движения в плоском ламинарном пограничном слое 328
8.13. Общая задача расчета и способы решений уравнений ламинарного пограничного слоя 332
8.14. Интегральные соотношения для пограничного слоя 338
8.15. Методы решения интегрального соотношения для ламинарного пограничного слоя 341

8.16. Влияние градиента давления и отрыв пограничного слоя 348
8.17. Начальный участок ламинарного течения в трубах 353

9. Турбулентные течения несжимаемой жидкости 359
9.1. Неустойчивость ламинарных течений и возникновение турбулентности 359
9.2. Турбулентное течение между параллельными плоскостями (течение в плоской трубе) 364
9.3. Структура и уравнения пристенного турбулентного пограничного слоя 367
9.4. Расчет турбулентного пограничного слоя на пластине 368
9.5. Расчет турбулентного пограничного слоя с градиентом давления 374
9.6. Затопленные турбулентные струи 377

10. Обтекание тел. Кавитация 389
10.1. Силы, действующие на тело, обтекаемое потоком вязкой жидкости 389
10.2. Кавитация 398

11. Одномерные течения идеального газа 407
11.1. Некоторые термодинамические соотношения 407
11.2. Различные формы уравнения Бернулли. Скорость распространения малых возмущений в газе 412
11.3. Параметры торможения и критическая скорость. Изоэнтропические формулы 415
11.4. Изменение параметров газа при течении по трубе переменного сечения 418
11.5. Истечение газа из резервуара через сужающееся сопло. Формула Сен-Венана—Ванцеля 421
11.6. Прямой скачок уплотнения 424
11.7. Ускорение и торможение газовых потоков 428

Список литературы 432

Предметный указатель 433

Учебник

Борис Тихонович Емцев

ТЕХНИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Редактор *И. Н. Якунина*
Художественный редактор *И. К. Капралова*
Технический редактор *Т. И. Андреева*
Корректоры: *Т. В. Багдасарян, Н. Г. Богомолова*

ИБ № 4839

Сдано в набор 13.05.86. Подписано в печать 03.09.86. Т-15363. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,5. Усл. кр.-отт. 27,5. Уч.-изд. л. 29,49. Тираж 11 000 экз. Заказ 135. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение», 107076, Москва, Стромынский пер., 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.