

В. А. ВЕНИКОВ
Г. В. ВЕНИКОВ

ТЕОРИЯ подобия и моделирования

(применительно
к задачам
электроэнергетики)

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Кибернетика электрических
систем»



МОСКВА
ВЫСШАЯ ШКОЛА
1984

ББК 31.27 : 32.816

В 29

УДК 621.311

Рецензент — проф. В. М. Чебан
(зав. кафедрой «Электрические системы»
Новосибирского электротехнического института)

Веников В. А., Веников Г. В.

В29 Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики): Учебник для вузов по спец. «Кибернетика электр. систем». — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1984. — 439 с., ил.

В пер.: 1 р. 50 к.

Книга содержит общую характеристику физических, аналоговых, цифровых методов подобия, различных методов моделирования и способов планирования эксперимента. В ней приведены основные теоремы и дополнительные положения указанных методов, показаны возможности их широкого практического применения, описана постановка различного рода исследований как в натуре, так и в условиях лаборатории и их обобщения.

По сравнению со вторым изданием (1976 г.) в третьем введены новые примеры, показывающие применение разрабатываемых методов планирования эксперимента, и др.

В 2302040000—121
001(01)—84 112—84

ББК 31.27 : 32.816

6П2 : 6Ф0.1

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание настоящей книги предназначается в качестве учебника для студентов специальности «Кибернетика электрических систем» (0304). Им могут пользоваться студенты, обучающиеся по специальностям «Электрические системы и сети», «Электроснабжение» (0302, 0303), других электроэнергетических специальностей, включая системы и электрооборудование автономных технических средств (авиационных, судовых, автотракторных и т. п. электрических и электроэнергетических систем). На всех этих специальностях имеются обязательные или факультативные дисциплины либо разделы дисциплины, посвященные подобию, моделированию, теории эксперимента.

При подготовке настоящего издания к печати учтены многочисленные замечания и пожелания лекторов соответствующих дисциплин, читавших в разных вузах. Переработка предыдущих изданий книги проведена Г. В. Вениковым на основе опыта преподавания в Институте повышения квалификации инженерно-технических кадров. Таким образом, настоящее издание предназначено как для студентов вузов, так и для инженеров, повышающих квалификацию. Авторы надеются, что книга будет полезна аспирантам, научным работникам и инженерам промышленных предприятий.

Поскольку книга применяется или как учебник, или как учебное пособие при различном числе часов, отводимых на данную дисциплину, то отдельные ее части построены так, чтобы можно было прорабатывать их независимо. Так, введение, гл. 1, 2 дают основные представления о подобии, выборочно дополняемые материалами гл. 5 и 6. Добавление гл. 3 и 4 дает полный курс теории подобия с элементами теории планирования эксперимента. Глава 7 дает основные, краткие представления о некоторых в известной степени новых приемах использования теории подобия и способах моделирования. Такое изложение, как показывает опыт, облегчает проработку отдельных тем и дает возможность пользоваться книгой при проведении студентами или слушателями-инженерами самостоятельных научно-исследовательских и научных работ.

Это обстоятельство очень важно, так как современные условия работы в вузе предусматривают широкое развитие активности в научно-исследовательской деятельности студентов: самостоятельное изучение некоторых, формально выходящих за рамки программ, вопросов и творческое решение отдельных задач, а также ознакомление с проблемами смежных областей знаний. Уделяя теперь таким задачам гораздо большее внимание, чем это делалось ранее в регламентированных традиционных дисциплинах, приходится несколько отходить от обычного изложения, расширяя рамки учебника разделами, обеспечивающими самостоятельное изучение, и особенно важными при повышении квалификации.

Полное содержание книги является обязательным минимумом при сдаче кандидатских экзаменов по электроэнергетическому научному профилю.

Список литературы предназначен только для углубленного изучения слушателями отдельных вопросов и не исчерпывает не только обширных публикаций по данной тематике, но даже и той, которой пользовались авторы при написании книги. Помещенный в приложении исторический обзор, так же как и список литературы, не претендует на полноту, характеризуя только наиболее существенные этапы развития проблемы.

В настоящем издании, отражающем курсы лекций, прочитанных авторами в 1976—1983 гг., было особо акцентировано внимание читателя на возможности творческого применения и развития теории подобия, которая для современного инженера-исследователя особенно важна тем, что, являясь основой моделирования и натурного эксперимента, указывает пути обработки результатов опытов и расчетов.

Авторы понимают, что изложение материала и в третьем издании имеет недостатки. Поэтому они убедительно просят сообщать о них по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

Теория подобия и моделирования является самостоятельной дисциплиной или большим разделом научной дисциплины «Кибернетика электрических систем», с которой тесно связаны проблемы, рассматриваемые в книге.

Кибернетика — наука о целеустремленном оптимальном управлении развивающимися и саморазвивающимися большими системами, применительно к энергетике изучающая закономерности оптимального управления ее развитием и функционированием. В сложной большой системе энергетики отдельные элементы и подсистемы, взаимодействуя между собой, создают глубокие внутренние связи. Эти связи не позволяют расчленять систему на независимые составляющие и при определении ее характеристик не дают возможности изменять влияющие факторы по одному, применяя привычный метод наложения (суперпозиции). Энергетическая (более узко — электроэнергетическая) или электрическая система, рассматриваемая в целом, обладает новыми качествами, не свойственными отдельным ее подсистемам и элементам; она требует при решении задач планирования, проектирования и управления применения специальных кибернетических методов и приемов.

Всем процессам, происходящим в электроэнергетических, как и любых сложных системах, свойственны общие признаки:

- наличие цели и оптимизации, отраженной в алгоритме управления;
- отыскание тех или иных условий оптимальности;
- управление на основе приема информации и ее обработки;
- корректировка управления в соответствии с действием обратных связей;
- учет взаимодействия данной системы с внешней средой, в ряде случаев рассматриваемой как источник случайных помех.

Огромна роль формализации задач, математических методов и вычислительной техники; однако это не означает, что только они и составляют содержание кибернетики. Не меньшее значение имеет проникновение в физику происходящих в сложной системе процессов. Их многообразие требует обобщенного подхода. Эксперимент, становящийся все более сложным, требует специальных приемов постановки и обобщения результатов. Отсюда становятся необходимыми модели и моделирование в самом широком понимании как основы интерпретации полученных фактов — базы для количественного описания.

Моделирование, таким образом, оказывается важнейшей составляющей кибернетики электрических систем, которая распадается на несколько разделов, связанных между собой, но имеющих определенные особенности. К этим разделам относятся следующие:

1. Теория подобия и моделирования физических, экономических и других явлений. Она показывает, как в каждом явлении найти наиболее общие черты, как планировать и ставить эксперименты и как обрабатывать данные любого эксперимента (физического, математического, мысленного). К этому же разделу относится конструирование различных моделей, служащих основой изучения сложных систем.

2. Основы применения вычислительных математических машин для исследования развития и эксплуатации электрических систем. В этом разделе рассматривается методика исследования электрических систем с помощью установок математического моделирования и цифровых вычислительных машин (ЦВМ), которые после разработки алгоритмов, программ и их апробации (сопоставлением с экспериментальными данными или специальными тестами) становятся математическими цифровыми моделями.

3. Теория информации о режимах систем. Сюда входят исследование и разработка способов получения от системы сведений относительно ее работы в нормальном режиме при различных малых отклонениях. Для управления и регулирования системы надо иметь определенные сведения о происходящих в ней отклонениях, с тем чтобы соответствующие регулирующие устройства могли надлежащим образом реагировать на «дыхание системы». Этот же раздел изучает характеристики процессов во время аварий и те показатели, согласно которым могут обеспечиваться оптимальные условия работы существующей системы и ее развития при необходимом качестве энергии и достаточной надежности работы системы.

4. Теория режимов автоматически управляемой сложной системы. Здесь изучаются различные методы управления системой, включая кибернетические. Не касаясь вопросов конструкции тех или иных регулирующих и управляющих устройств, внимание сосредоточивается на изучении таких методов использования информации, при которых обеспечивались бы самонастройка и самоуправление управляющих установок.

Данная книга посвящена вопросам первого раздела. Изложению ее придан достаточно высокий уровень методологической общности, позволяющей использовать материал в различных областях техники. Электроэнергетическая направленность главным образом сказалась в подборе иллюстративных примеров. При этом авторы учитывали ряд обстоятельств, обуславливающих необходимость рассмотрения не только чисто электротехнических проблем электроэнергетики, но и задач, специфичных для таких различных сфер интересов инженера-электрика, как механика, экономика, обработка информации и принятие решений, создание материально-технической базы экспериментальных исследований и т. д.; к числу такого рода обстоятельств относятся следующие:

А. Проблематика электроэнергетических систем в ее практической постановке имеет явно выраженный комплексный характер, что в общем случае приводит к необходимости такого сопряженного многоаспектного рассмотрения объекта исследования — электроэнергетичес-

кой системы, при котором равную значимость приобретают различные научно-технические и производственно-управленческие проблемы. Соответственно и иллюстрация возможностей использования методов теории подобия и моделирования при решении этих в достаточной мере разнородных проблем представляется логически обоснованной.

Б. Собственно научно-техническая проблематика электроэнергетических систем включает в себя широкий спектр задач не только электротехнического характера, но и задач, связанных с исследованием механических, тепловых, геофизических и других процессов, а также с исследованием процессов управления агрегатами и комплексами электроэнергетического оборудования с помощью управляющих ЦВМ в автоматических либо автоматизированных (с участием человека-оператора) режимах. Иллюстрация возможностей использования методов теории подобия и моделирования при решении такого рода задач представляется необходимой.

В. Научно-технический прогресс обусловил повышение уровня электрификации, а соответственно и усложнение систем электроснабжения различного рода транспортных средств (в авиации, морском флоте и т. д.) и иного рода объектов (например, научно-исследовательских станций), обеспечение электроэнергией которых осуществляется автономно от общепромышленных средств производства, передачи и распределения электроэнергии (автономно от объединенных систем «большой энергетики»). Возможности применения методов теории подобия и моделирования для таких (нередко именуемых автономными) электроэнергетических систем входят в содержание дисциплины и частично рассматриваются в настоящей книге.

Г. Одним из характерных результатов современных исследований электроэнергетических систем является накопление больших объемов экспериментальных данных, полученных в результате модельных экспериментов и (или) натурных испытаний. Демонстрация возможностей использования методов теории подобия для рациональной организации экспериментов и систематизации (упорядочения) такого рода данных также, хотя и кратко, но затронута в отдельных разделах данной книги.

Д. Проведение экспериментальных исследований сложных электроэнергетических систем в лабораторных условиях требует построения соответствующих технических средств исследования моделей. Вопросы методологии построения технических (динамических) моделей сложных систем также отражены в книге, хотя и в несколько сокращенной по сравнению с предыдущими изданиями форме. Вопросы динамического моделирования, равно как и многие другие из перечисленных выше (Б, В, Г), изложенные в связи с ограниченным объемом настоящего издания кратко, могут быть самостоятельно проработаны в соответствии с литературой, указанной по главам.

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование. Метод моделирования представляет собой метод исследования свойств определенного объекта посредством изучения свойств другого объекта, более удобного для решения задач исследования и находящегося в определенном соответствии с первым объектом. В общетеоретическом смысле моделирование означает отображение или воспроизведение определенных сторон действительности для изучения интересующих исследователя объективных закономерностей; соответственно и метод моделирования — это метод опосредованного познания объективной реальности, которая проявляется в виде взаимосвязанной совокупности свойств объекта исследования, отражающей различные аспекты его взаимодействия с внешней средой, существования и развития. При решении практических задач в общем случае под *моделированием* понимается изучение моделируемого объекта (оригинала), базирующееся на взаимоднозначном соответствии определенной части свойств оригинала и замещающего его при исследовании объекта (модели) и включающее в себя построение модели, изучение ее и перенос полученных сведений на моделируемый объект-оригинал.

Оригинал. В теории моделирования под *оригиналом* понимается объект, определенные свойства (аспекты) которого подлежат изучению методом моделирования. В общем случае понятие оригинала может иметь достаточно широкую интерпретацию, охватывающую как реально существующие, так и проектируемые объекты (системы, подсистемы, элементы), явления, режимы и процессы, происходящие в них.

Для однозначной интерпретации применяемых терминов будем понимать под *системой* совокупность компонентов (составных частей), которая рассматривается как единое целое и организована для решения определенных функциональных задач (достижения целей функционирования) так, что два любых ее компонента взаимосвязаны некоторым системообразующим отношением; в системе могут быть выделены *подсистемы* — относительно самостоятельные части системы, функционально связанные между собой, и *элементы* — компоненты системы, принимаемые в данной постановке задачи как неделимые на более мелкие составляющие.

В практических задачах понятия системы, подсистемы и элемента в значительной мере условны, точно так же как условны понятия простой и сложной системы. Эти понятия фактически отражают соотношения между объектом и целями исследования, которые определяются главным образом позицией исследователя (постановкой задачи исследования).

Под *явлением* будем понимать совокупность процессов, сопутствующих работе (функционированию или поведению) системы и проявляющихся в виде изменений состояний или режимов этой системы; соответственно *режим* — это состояние системы, определяющееся множеством различных процессов и зависящее от собственных параметров системы и параметров возмущающих воздействий. Различают установившиеся и переходные режимы системы: под *установившимся режимом* понимается такое состояние системы, при котором параметры режима постоянны или незначительно изменяются около некоторого среднего значения; под *переходным режимом* — такое состояние системы, при котором происходят непрерывные последовательные изменения параметров режима, обусловленные изменением начальных условий или появлением возмущающих воздействий и приводящие к отклонениям режима от его установившегося значения.

Изменения данного состояния или режима системы, происходящие и во времени, и в пространстве, характеризуются некоторыми показателями, которые называются *текущими переменными* или *обобщенными координатами*. При этом под *процессом* понимается закономерное последовательное изменение относительно самостоятельной группы параметров режима, называемой *параметрами процесса*. Совокупность процессов реализуется в системе, состоящей из элементов и характеризуемой *параметрами системы* (параметрами элементов системы и параметрами связей между ними).

При исследовании механических явлений параметрами процессов являются силы, скорости, ускорения, а параметрами системы — массы тел, коэффициенты трения, вязкости жидкостей и т. п. Для электрической системы параметрами процессов — это мощности, токи, напряжения и т. д., а параметрами системы — сопротивление, проводимости, коэффициенты трансформации и т. п.; в более общем случае под параметрами системы могут пониматься показатели, количественно определяющиеся физическими свойствами элементов системы, схемой их соединения и рядом допущений, на основании которых данный процесс выделяется из явления или режима и рассматривается как относительно самостоятельный.

Системы, в которых параметры постоянны на всем интервале времени существования изучаемого процесса или изменяются независимо от его протекания, называются соответственно *линейными системами* или *системами с переменными параметрами*. Системы, у которых хотя бы один параметр изменяется в функции одного или нескольких других параметров, называются *нелинейными системами*.

Для математического описания процесса необходимо ввести систему координат, в которой записывается система уравнений, связывающих между собой параметры процесса и системы. Формы записи уравнений процесса могут быть различными в зависимости от вида системы, поставленной задачи и выбранной системы координат.

Наглядной физической интерпретацией математического описания процесса являются *схемы замещения*, которые обычно выделяют только соответствующий

аспект явления или отражают какие-либо частные соотношения и взаимодействия, существенные для изучаемого процесса. Если, например, протяженная линия электропередачи замещается цепочечной схемой, то в ней правильно отражается распределение тока и напряжения вдоль линии; однако распространение фронта волн напряжений и токов может быть отражено в такой схеме только условно.

Модель. Под моделью обычно понимается вспомогательный объект, находящийся в определенном соответствии с изучаемым объектом-оригиналом и более удобный для решения задач конкретного исследования. Отражая отдельные особенности поведения объекта-оригинала, модель имеет некоторые идентичные черты с оригиналом и служит для получения такой информации о нем, которую затруднительно либо невозможно получить путем непосредственного исследования оригинала.

Интуитивные представления о модели чаще всего ассоциируются с техническими средствами, применяемыми для построения соответствующего «эквивалента» объекта исследования, в том или ином смысле адекватного ему, но практически более удобного для решения поставленных задач.

Однако понятие модели принципиально существенно шире: функции модели может выполнять не только специально созданная экспериментальная установка, но и наблюдаемое явление, и символическое (знаковое) описание оригинала (текстовое описание, математическое уравнение, чертеж, схема и т. п.), и мысленный образ и т. д. Поэтому в общем случае *модель* — это явление, техническое устройство, знаковое образование или иной условный образ, которые находятся в определенном соответствии (сходстве) с изучаемым объектом-оригиналом и способны замещать оригинал в процессе исследования, давая о нем необходимую информацию.

Следует подчеркнуть, что не существует моделей вообще*: модель всегда находится в определенном соотношении с конкретным изучаемым объектом, явлением, процессом; нельзя называть моделью экспериментальную установку или математическое выражение, для которых отсутствует адекватная (реальная или потенциальная) физическая реализация.

Первое условие существования модели — возможность отображения некоторой объективно реальной либо потенциально реализуемой (поведение проектируемого объекта, характеристики прогнозируемого физического явления и т. п.) ситуации; второе условие — наличие определенных правил установления взаимодостоверного соответствия между моделью и оригиналом; третье условие — большая простота и наглядность модели при отображении с необходимой полнотой и достоверностью той определенной части свойств оригинала (всегда бесконечно многообразного в своих проявлениях), которая существенна именно в данном исследовании и при данной постановке задачи.

* В обиходе понятие «модель» может иметь различное содержание: это и характеристика хорошего качества изделия («модельные туфли»), и оценка высоких нравственных и житейских показателей (у англичан — *model husband* — идеальный муж), и образец при изготовлении деталей, например отливки их из металла, и т. д. Столь же широко, а соответственно и столь же неопределенно понятием «модель» пользуются иногда и в научной терминологии, не всегда вкладывая в это понятие его действительный смысл.

Первоначально, в процессе создания, модель выполняет преимущественно отображающие функции — отражает определенную часть свойств оригинала. Далее, при проведении исследований, модель преимущественно реализует функции, имеющие в некотором смысле прогностический характер — функции «предсказания» по результатам моделирования особенностей поведения оригинала в ситуациях иных, нежели те, на основании которых строилась модель. При этом сведения, полученные посредством моделирования, объективно представляют собой сведения о свойствах самой модели, которая теперь уже является самостоятельным объектом исследования. Эти сведения далее должны быть «перенесены» на оригинал с целью предсказания его свойств или характеристик на основе определенных правил перехода

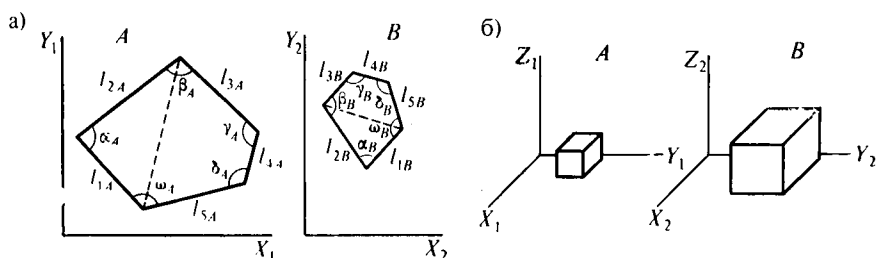


Рис. 1.1

от параметров, характеризующих модель, к параметрам, характеризующим оригинал, т. е. правил установления взаимоднозначного соответствия между оригиналом и моделью. При разработке таких правил и способов их реализации понятия оригинала и модели рассматриваются в органическом единстве; это и обуславливает необходимость конкретизации понятия модели в соотнесении с адекватной физической реализацией — оригиналом.

Подобие. Понятие *подобие* первоначально заимствовано из геометрии. Содержание понятия *геометрического подобия* в простейшем случае состоит в следующем: треугольники (а также многоугольники с одинаковым числом сторон) подобны, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны (рис. 1.1, а), т. е. если

$$\left. \begin{aligned} l_{1A} / l_{1B} = l_{2A} / l_{2B} = l_{3A} / l_{3B} = l_{4A} / l_{4B} = l_{5A} / l_{5B} = m_l; \\ \alpha_A / \alpha_B = \beta_A / \beta_B = \gamma_A / \gamma_B = \delta_A / \delta_B = \omega_A / \omega_B = m_\mu = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.1a)$$

Подобие, таким образом, означает существование определенных масштабных соотношений вида (1.1a) для параметров сходственных элементов (длин сторон, углов) сопоставляемых объектов — многоугольников, которые определяют правила перехода от параметров одного из объектов к сходственным параметрам другого; масштабные коэффициенты (масштабы) m_l и m_μ , характеризующие пропорциональ-

ность сходственных параметров, могут быть также названы коэффициентами подобия.

Условия подобия вида (1.1а) можно сформулировать иначе, если ввести в рассмотрение систему прямоугольных координат X, Y : при геометрическом подобии все координаты x_{iA}, y_{iA} первого многоугольника пропорциональны соответствующим координатам x_{iB}, y_{iB} второго многоугольника, т. е. выполняются соотношения

$$x_{iA} / x_{iB} = m_x; y_{iA} / y_{iB} = m_y; m_x = m_y, \quad (1.16)$$

где x_i и y_i — координаты любой точки, находящейся на отрезках прямых, определяющих контуры соответствующего (A или B) многоугольника; m_x и m_y — масштабы.

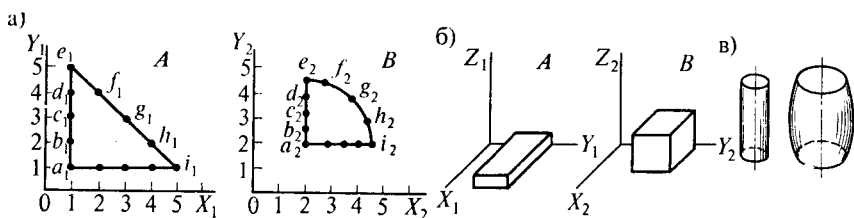


Рис. 1.2

Геометрическое подобие может существовать не только в двумерном пространстве (на плоскости), но и в пространствах большей размерности. Для трехмерного пространства, например, в прямоугольных декартовых координатах (оси X, Y, Z попарно перпендикулярны друг другу) геометрическое подобие двух объектов (материальных систем) означает, что все пространственные координаты первого объекта пропорциональны сходственным пространственным координатам второго объекта (рис. 1.1, б), т. е. выполняются соотношения

$$x_{iA} / x_{iB} = m_x; y_{iA} / y_{iB} = m_y; z_{iA} / z_{iB} = m_z; m_x = m_y = m_z, \quad (1.1в)$$

где x_{iA} и x_{iB} , y_{iA} и y_{iB} , z_{iA} и z_{iB} — координаты сходственных точек сопоставляемых объектов.

Дальнейшим развитием и обобщением понятия геометрического подобия является понятие *аффинного подобия*, при котором допускается неравенство масштабов по отдельным координатным осям X, Y и Z . В этом случае геометрические фигуры или пространственные объекты как бы деформируются: круг превращается в эллипс, параллелепипед с неравными ребрами — в куб и т. п. (рис. 1.2). Для сходственных точек x_{iA} и x_{iB} , y_{iA} и y_{iB} , z_{iA} и z_{iB} трехмерного координатного пространства в прямоугольных декартовых координатах при аффинном подобии будут справедливы соотношения

$$x_{iA} / x_{iB} = m_x; y_{iA} / y_{iB} = m_y; z_{iA} / z_{iB} = m_z; m_x \neq m_y \neq m_z. \quad (1.1г)$$

При этом возникает необходимость введения специальных преобразующих (обычно нелинейных) функций, устанавливающих законо-

мерности аффинного преобразования на плоскости или в пространстве.

Пример 1.1. Установить условия аффинного подобия геометрических фигур, представленных на рис. 1.2, а, полагая, что отрезки линий $e_1 - i_1$ являются нелинейно сходственными линиям $e_2 - i_2$; точки e_1, f_1, g_1, h_1, i_1 соответствуют точкам e_2, f_2, g_2, h_2, i_2 .

Уравнения для контуров $e_1 - i_1$ и $e_2 - i_2$ имеют вид:

$$x_1 + y_1 = 6; x_2^2 + y_2^2 = 24.$$

Вводя некоторые масштабные соотношения (преобразующие функции) $F_x = x_1/X_1$ и $F_y = y_1/Y_1$, вид которых пока неизвестен, для уравнения контура $e_1 - i_1$, преобразованного из области A в область B , можно записать

$$X_1 F_x + Y_1 F_y = 6,$$

где X_1 и Y_1 — преобразованные в область B значения x_1 и y_1 в области A .

Приближая посредством тождественных алгебраических преобразований форму записи полученного уравнения для $e_1 - i_1$ к форме записи уравнения для $e_2 - i_2$

$$[(2X_1/\sqrt{x_1}) F_x]^2 + [(2Y_1/\sqrt{y_1}) F_y]^2 = 24,$$

функции нелинейного преобразования, обеспечивающие аффинное подобие сопоставляемых геометрических фигур, можно представить следующим образом:

$$F_x = 2/\sqrt{x_1}; F_y = 2/\sqrt{y_1}.$$

Таким образом, координаты точек рассматриваемых фигур связаны соотношениями

$$x_2 = \psi_x x_1 = 2\sqrt{x_1}; y_2 = \psi_y y_1 = 2\sqrt{y_1},$$

где $\psi_x = F(x_1, y_1) = F_x$; $\psi_y = F(x_2, y_2) = F_y$ — нелинейные преобразующие функции.

Аналогично можно установить аффинное подобие и для иных «непохожих» фигур (рис. 1.2, б, в).

Понятие *подобия физических процессов (объектов)* является развитием понятия аффинного подобия. Любой конкретный физический процесс ϕ_0 характеризуется определенной функциональной зависимостью F между некоторой совокупностью параметров $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$. Эта функциональная зависимость $\phi_0 = F(P_1, \dots, P_j, \dots, P_n)$ может быть отображена графически в соответствующем n -мерном координатном пространстве $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$, в котором участвующие в процессе ϕ_0 параметры $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$ соотношены с соответствующими координатными осями $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ (в частном случае, когда одним из участвующих в процессе параметров P_j является время t , ось координат $x_j = t$). Аналогично в том же координатном пространстве может быть отображен процесс $\Phi_0 = F(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n)$, характеризующийся сходственными с ϕ_0 параметрами. Если при этом все сходственные параметры (пространственные координаты) пропорциональны, т. е. если

$$P_1/R_1 = m_1, \dots, P_j/R_j = m_j, \dots, P_n/R_n = m_n, \quad (1.2a)$$

то процессы ϕ_0 и Φ_0 подобны.

Однако не все масштабные коэффициенты $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$ физического процесса могут принимать независимые значения вследствие того, что взаимозависимы определенные значения параметров, характе-

ризующих конкретный физический процесс (при произвольном выборе, например, сопротивления некоторого активного элемента и напряжения на нем ток, проходящий через этот элемент, и мощность, потребляемая им, имеют определенные значения). Это предопределяет возможность введения некоторых обобщенных характеристик подобных процессов, являющихся функциями групп зависимых и независимых параметров, — к р и т е р и е в п о д о б и я; в отличие от масштабных коэффициентов, в общем случае численно различных для определенных групп сопоставляемых подобных процессов, критерии подобия принимают одинаковые значения для всех подобных процессов в сходственных точках обобщенного пространства параметров $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$.

Простейшим примером подобных физических процессов, у которых масштабные коэффициенты принимают различные значения для попарно подобных процессов, а критерии подобия численно одинаковы для всех подобных процессов, могут служить зависимости $i(t)$, представленные на рис. 1.3 (см. § 1.3).

Пропорциональность параметров — частный случай подобия физических процессов. В общем случае процессы будут подобны, если существует не к о т о р о е с о о т в е т с т в и е сходственных величин сопоставляемых систем: положений точек, геометрических размеров, параметров систем и параметров процессов. Поэтому и понятия сходственных точек и сходственных величин, известные из геометрии, значительно сложнее в теории подобия физических явлений: *сходственными точками* пространства, времени и параметров процесса будут такие величины, при которых их значениям в одной системе т а к и л и и н а ч е соответствуют значения в другой системе.

Соответствие между сходственными величинами может устанавливаться и при переменных масштабах (например, зависящих от какого-либо параметра процесса) — это будут особые виды подобия: нелинейное, функциональное и т. д.

В связи с этим в общем случае под *подобием* понимается такое взаимоднозначное соответствие между сопоставляемыми объектами (процессами), при котором функции или правила перехода от параметров, характеризующих в том или ином смысле один из объектов, к параметрам, в том же смысле характеризующим другой объект, известны, а математические описания (если они имеются или потенциально могут быть получены) допускают их преобразование к тождественному виду.

Виды подобия. Дифференциация видов подобия осуществляется главным образом по двум основным признакам: по степени соответствия параметров оригинала и модели (абсолютное подобие и неабсолютное или практическое подобие, которое может быть полным, неполным и приближенным) и по адекватности физической природы подобных явлений (математическое подобие и физическое подобие, которое может быть механическим, тепловым, электрическим и т. п.); возможны также и иные варианты дифференциации видов подобия.

Абсолютное подобие характеризуется тем, что в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства параметры P_j процессов и элементов в одной системе находятся в определенном соответствии со сходственными параметрами R_j в другой системе, т. е.

$$P_j/R_j = m_j, j=1, 2, \dots, n=1, n, \quad (1.2)$$

причем возможно $m_j = \text{const}$, $m_j = \text{var}$, $m_j = f(P_{j-r}, P_{j+k}, \dots)$ и т. д.

Таким образом, оригинал и модель будут абсолютно подобны, если существует полное соответствие геометрических размеров сопоставляемых систем и изменяющихся во времени и в пространстве величин, т. е. процессов, протекающих в этих системах.

При абсолютном подобии оригинал и модель должны быть структурно и физически идентичны; различны лишь значения параметров, характеризующих как собственно элементы, так и связи между ними. Сопоставляемые процессы описываются одинаковыми функциональными зависимостями, пропорционально различающимися значениями аргументов: на модели процесс воспроизводится без каких-либо искажений по отношению к процессу в оригинале и отличается от него лишь масштабом.

Следует подчеркнуть, что если из абсолютного физического подобия процессов следует идентичность описывающих их математических соотношений, то обратное утверждение в общем случае неверно: идентичность форм записи математических уравнений еще не означает подобия процессов, поскольку характер протекания процесса определяется не только видом функциональной зависимости между участвующими в нем параметрами, но и соотношениями их конкретных значений.

Абсолютное подобие, требующее, по сути дела, тождества явлений, на практике представляет собой в значительной мере абстрактное понятие: свойственное абсолютному подобию тождество явлений в пространстве и во времени, получаемое после изменения масштаба, реализуется только в геометрических построениях и отдельных видах математического подобия.

Реально исследователь, как правило, не имеет возможности оперировать со сходными во всех деталях явлениями при решении конкретных задач. Поэтому при применении теории подобия для решения технических задач возникает необходимость введения понятия *практического подобия*; различают полное, неполное и приближенное практическое подобие.

*Полное подобие** — это подобие протекания во времени и в пространстве только тех процессов, которые существенны для данного исследования и с достаточной полнотой характеризуют изучаемое явление применительно к конкретной постановке задачи исследования.

При полном подобии исследуемых процессов должно быть обеспечено некоторое соответствие сходственных величин, значительно влияющих на протекание этих процессов (положения точек, геометрических размеров, параметров систем и параметров процессов); если существенные с точки зрения поставленной задачи процессы полностью подобны, то можно считать, что обеспечено полное подобие соответствующих явлений.

Например, можно считать, что электромеханические явления в синхронных генераторах полностью подобны, если все процессы изменений во времени токов, напряжений, вращающих моментов и изменений во времени и в пространстве распределений магнитных и электрических полей отличаются только масштабами. При этом тепловые процессы могут быть неподобными, так как они не влияют на подобие исследуемых электромеханических явлений.

* Слово «практическое» здесь и далее опускается.

Неполное подобие — это подобие протекания процессов только во времени или только в пространстве.

Приближенное подобие характеризуется существованием упрощающих допущений, приводящих к различию процессов, принимаемых в качестве подобных, т. е. к таким искажениям одного из этих процессов, которые полагаются допустимыми на основании предварительных оценок, полученных при дополнительных исследованиях; *приближенное подобие может быть как полным, так и неполным.*

Например, при неполном подобии электромеханические процессы в синхронных генераторах подобны во времени, но пространственного подобия полей в генераторах при этом может не быть. Это не искажает подобия переходных и установившихся режимов в электрической системе.

Пример приближенного подобия — подобие генераторов, устанавливаемое на основании упрощенных уравнений, которые не учитывают апериодическую составляющую тока статора и периодическую составляющую тока ротора.

С точки зрения адекватности физической природы подобных явлений различают два основных вида подобия — физическое и математическое.

Физическое подобие достигается при одинаковой физической природе подобных явлений, оно может быть полным, неполным и приближенным.

В общем случае при физическом подобии механическим процессам в изучаемой системе ставятся в соответствие механические процессы в подобных ей системах, электрическим процессам — электрические и т. д.

Иногда выделяют частные виды физического подобия: *кинематическое подобие*, при котором существует подобие скоростей и ускорений твердых тел, жидкостей или газов; *материальное подобие*, предполагающее подобие масс отдельных элементов системы; *динамическое подобие*, при котором подобны силы, вызывающие подобные движения.

Системы тел, подобные кинематически, материально и динамически, называются *механически подобными*. При наличии подобия температур и тепловых потоков применяется понятие *теплового подобия*. Аналогично можно ввести понятия *гидродинамического и аэродинамического подобия*.

Электрическое подобие существует при подобии электрических и магнитных полей, напряжений, токов и мощностей соответственных элементов сопоставляемых электрических систем. Электрически подобные системы, имеющие элементы, взаимно перемещающиеся в подобные интервалы времени на подобные расстояния, называются *электродинамически подобными*. Аналогично можно ввести понятия подобия электронно-ионных процессов, процессов электромагнитного излучения и т. д.

В перечисленных видах подобия предполагается, что физическая природа материальных объектов или веществ, участвующих в процессе, не изменяется. Однако подобие может устанавливаться и в более сложных случаях физико-химических превращений — *физико-химическое подобие*.

Подобие может быть установлено не только для тех физических явлений, которые подчиняются детерминированным законам, но и для физических явлений, подчиняющихся статистическим закономерностям, — *статистическое подобие*.

Математическое подобие требует соответствия сходственных параметров сравниваемых процессов различной физической природы; математическое подобие может быть полным, неполным, приближенным.

Так, например, математически подобными будут следующие два уравнения, описывающие физически разнородные процессы:

— уравнение переходного процесса в электрической цепи, образованной последовательным соединением элементов с активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , которая включается на напряжение u , изменяющееся во времени t по синусоидальному закону с угловой скоростью ω :

$$Ld^2 q/dt^2 + Rdq/dt + q/C = u \sin \omega t,$$

где q — заряд на конденсаторе с емкостью C ; —

— уравнение процесса вынужденных механических колебаний в вязкой среде закрепленного на пружине жесткостью c груза массой M , на который действуют возмущающая сила $F \sin \omega t$ и пропорциональная скорости движения груза v сила сопротивления вязкой среды $F_c = -kv$:

$$Md^2 l/dt^2 + kdl/dt + cl = F \sin \omega t,$$

где l — расстояние, на которое перемещается груз.

Сходственными параметрами в данном случае будут M и L , k и R , c и C , u и F , а электрический колебательный контур при определенных условиях может служить аналоговой моделью объекта-оригинала (колеблющегося на пружине груза): наблюдаемый при эксперименте процесс в колебательном контуре будет одновременно являться и решением дифференциального уравнения, описывающего движение груза.

По мере развития представлений об особенностях функционирования и закономерностях развития сложных систем различных категорий понятие подобия приобретает все более широкое содержание, охватывая объекты, явления и процессы, по обычным представлениям не подобные. В связи с этим вводится понятие *особых видов подобия*, к которым относятся *квазиподобие*, основанное на использовании переменных масштабных коэффициентов; *эквивалентное подобие*, устанавливающее подобие явлений, описанных не одинаковыми, а только в том или ином смысле эквивалентными уравнениями (эквивалентность может достигаться и искусственно путем нелинейно подобных преобразований); *функциональное подобие*, выявляемое с точки зрения выполнения составляемыми объектами сходственных функций при соответствующих воздействиях; *кибернетическое подобие*, требующее подобной реакции подобных объектов на изменения внешней среды и подобной структуры управления посредством существенных для изучаемого явления обратных связей; *интегральное* и другие виды подобия.

Появление особых видов подобия тесно связано с развитием методологии моделирования и как научного понятия, и как прикладного средства исследования. При этом методы теории подобия начинают применяться не только для организации эксперимента, обработки и интерпретации его результатов, но и для повышения эффективности решения расчетно-вычислительных задач и задач управления.

Теория подобия. В общем случае *теория подобия* — это теория, дающая возможность установить наличие подобия или позволяющая разработать способы получения его. Соотношения между моделью и оригиналом, выявляемые теорией подобия, могут быть различными: в виде простых масштабных соотношений, показывающих, во сколько раз тот или иной элемент модели больше либо меньше соответствующего элемента оригинала (например, при геометрическом подобии); в виде сложных функциональных зависимостей групп параметров сопоставляемых объектов (например, критерии подобия, при определен-

ных условиях численно одинаковые для всех подобных процессов). В ряде случаев такие зависимости могут и не иметь представлений в явной математической форме (например, при проверке действия лекарственного препарата, предназначенного для человека, на животных: последние в этом случае являются моделью оригинала, способной замещать его в данной конкретной постановке задачи исследования).

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ КАК ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Задачи теории подобия как основы научно-технического эксперимента. В задачи теории подобия входит широкий спектр проблем, связанных как с вопросами реализации технических средств моделирования, так и с вопросами обработки и интерпретации экспериментальной информации: установление условий подобия; установление условий распространения результатов единичного расчетно-аналитического или физического эксперимента, выполненного при данных параметрах, на результаты других (не проводившихся) экспериментов; установление условий, при которых возможны обобщения экспериментальных и расчетных данных; определение технических характеристик моделирующих средств и т. д.

Необходимость постановки и решения проблемы обобщения конкретных расчетно-экспериментальных результатов, полученных при определенных значениях параметров конкретного процесса, на группу подобных ему процессов обусловлена следующим. Единичный эксперимент дает вполне определенный результат, который в ряде случаев удовлетворяет инженера при решении частной задачи. Однако при этом единичный эксперимент определяет поведение объекта именно в «единичных» условиях. В итоге кажущийся на первый взгляд достаточным результат (который нередко достигается в процессе длительной и кропотливой работы по организации и обеспечению расчетно-экспериментальных исследований, анализа и интерпретации полученных данных) фактически имеет небольшую практическую ценность.

Единичный результат не расширяет представлений исследователя не только с научной, но и с чисто прагматической точки зрения обеспечения технико-экономической эффективности и информационной ценности выполненных исследований: он не указывает, что же будет происходить при изменениях параметров исследуемой системы или параметров ее режима. Необходимо провести большой объем исследований, чтобы выявить влияние различных факторов и их изменений, которые могут происходить в разнообразных сочетаниях, причем заранее неизвестно, как и в какой последовательности надо изменять эти факторы и какие их сочетания эквивалентны.

Теория подобия в сочетании с теорией планирования эксперимента дает исчерпывающий ответ на эти актуальнейшие для инженера вопросы. Нужно ли применение теории подобия и планирования эксперимента, или, как будем далее обобщенно называть, теории эксперимента, в таких часто встречающихся практических случаях, когда инженеру следует только проверить какой-либо образец, машину или

установку на соответствие заданным ему техническим требованиям, т. е. сказать «да—нет», «годится—не годится». Казалось бы, в этом случае не требуется теории эксперимента и тем более вытекающей из этой теории критериальной обработки результатов.

Однако это далеко не так. История техники показывает много примеров, когда именно решение частных, казалось бы, сугубо практических вопросов, приводило не только к ошибочным, но даже и к катастрофическим последствиям. Так, например, освоение известных самолетов типа «Каравелла», оборудование которых было испытано согласно принятым «инженерным нормативам», сопровождалось авариями при полетах над Средиземным морем. Выяснилось потом, что испытания не предусматривали тех сочетаний ряда условий (атмосферных и др.), которые были именно в этом регионе. Другой пример: мощные гидрогенераторы, испытанные в полном соответствии с существующими нормативными требованиями, получали тяжелые повреждения в условиях ресинхронизации и резонансов, когда сочетание ряда влияющих факторов оказывалось отличным от нормативных.

Тезис о том, что, вообще говоря, если не все, то во всяком случае большинство испытаний, расчетов должны ставиться и обрабатываться с учетом теории эксперимента, указывающей, как и их проводить, и распространяющей их результаты на широкий класс явлений, можно было бы иллюстрировать еще многими примерами. Но, видимо, из сказанного ясно, что именно теория эксперимента должна служить тем *руководящим направлением, согласно которому должны ставиться физические или расчетные эксперименты*. Разумеется, это возможно только в том случае, если инженер владеет теорией эксперимента в той же мере, в какой он владеет основами своей специальности.

Во всяком инженерном или даже шире — во всяком научном исследовании — задача ставится следующим образом. Имеется некоторый объект изучения, в котором происходят интересующие исследователя явления. Каждое явление состоит из множества процессов, которые в зависимости от поставленной задачи можно с той или иной степенью приближения выделить для самостоятельного изучения, хотя, вообще говоря, они связаны между собой. Однако с полным правом из изучаемого объекта всегда можно выделить практически независимые процессы. Например, в дальней линии электропередачи инженер с полным основанием выделяет процессы, связанные с распространением электромагнитных волн в пространстве вдоль проводов, и тепловые процессы, связанные с нагреванием этих проводов. Делать совместные эксперименты (физические или расчетные) для одновременного изучения этих процессов было бы не только практически бессмысленно, но с инженерной точки зрения и неграмотно.

При проведении любого исследования предварительные знания об изучаемом объекте могут быть двух видов:

1) неполные знания, когда заранее известно только, в чем заключается интересующий процесс, какой параметр процесса или функция нескольких параметров (целевая функция) являются объектом исследования. Точно, или

чаще предположительно, при этом устанавливается, от каких других параметров процесса и системы зависит интересующий параметр или целевая функция. Это предположение, по-существу, означает, что исследователь уже каким-то путем получил некоторые знания о механизме изучаемого процесса. Эти знания в рассматриваемом случае находятся, однако, не на таком уровне, чтобы их можно было представить с необходимой исследователю полнотой с помощью каких-либо физических уравнений (дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных), описывающих математически с достаточной степенью достоверности исследуемый процесс;

2) полные знания, когда исследуемый процесс описан математически с помощью уравнений.

Исходным при описании физического процесса является *дифференциальное уравнение*, отражающее главные, т. е. интересующие исследователя и информационные свойства объектов через свойства выявляемых этими уравнениями процессов. Успех составления таких уравнений, правильное и вместе с тем достаточно простое отражение в них главных свойств реального процесса почти полностью зависят от знаний и способностей исследователя.

Успех дальнейшего изучения процесса с помощью полученного дифференциального уравнения, т. е. успех проведения математического эксперимента, зависит, во-первых, от четкости и глубины понимания существа применяемой методики и, во-вторых, от умения учитывать логические, качественные предпосылки и допущения, входящие в виде связей между параметрами системы, процесса и их производными. Для того чтобы выяснить и глубоко понять эти связи, опять-таки необходимо рассмотрение не единичного уравнения, а *класса уравнений* данного типа.

Результаты любого конкретного эксперимента отражают индивидуальные особенности данного явления и не позволяют определить, какие из этих особенностей наиболее существенны для явления в целом и как их изменение отразится на его развитии.

Строго говоря, каждое конкретное явление и каждый конкретный процесс являются самостоятельными объектами изучения. Это приводит к органическим недостаткам, казалось бы, простых и ясных методов исследования, что, в свою очередь, вызывает затруднения, которые не всегда ощущаются практиками, но проявляются в том, что существенно тормозят создание новых процессов и новых аппаратов. Очевидно, было бы важно дополнить экспериментальные физические и математические исследования научно обоснованным методом обобщения единичного исследования.

Чтобы получить обобщенный подход и реализовать его (реализация производится теориями подобия и планирования эксперимента, т. е. теорией эксперимента), следует вспомнить, что и при установлении влияющих факторов без использования дифференциальных уравнений, и при составлении этих уравнений исследователь ориентируется на общие законы природы, которым придается форма, отвечающая специфическим особенностям исследуемого процесса.

Рассматривая эти процессы с точки зрения фундаментальных законов физики, естественно приходится отвлекаться от многих конкретных черт, присущих явлению и входящим в него процессам. Об-

щие законы физики являются результатом широкого обобщения опытных данных. Приложение их к изучаемым процессам позволяет получить наиболее общие связи между существенными параметрами процесса. Именно по этой причине в дифференциальном уравнении, записанном в общем виде, не имеется каких-либо конкретных сведений об отдельных величинах, в него входящих. Параметры процесса и системы, входящие в состав уравнений, могут принимать различные значения, каждое из которых отвечает какому-то единичному процессу. Отсюда следует, что отдельное дифференциальное уравнение (или их система) является математической моделью класса процессов. Под *классом* в данном случае понимается вся совокупность процессов, характеризующихся их одинаковым внутренним механизмом. Соответственно этому при интегрировании любого дифференциального уравнения получается бесчисленное множество различных решений, удовлетворяющих этому уравнению. Чтобы получить из этого множества возможных решений одно частное, соответствующее определенному конкретному процессу, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном (общем) дифференциальном уравнении. Для этого надо знать все конкретные особенности данного процесса, выделяющие его из всего класса однородных процессов. Дифференциальное уравнение или его решение в совокупности с дополнительными условиями, называемыми *условиями однозначности*, определяют единичный процесс. Условия однозначности отражают особенности конкретного процесса, которые не зависят от механизма процесса, общего для всего класса процессов, и задаются в связи с условиями конкретной задачи.

Конкретный процесс характеризуется индивидуальными признаками, выделяющими его из класса процессов, и происходит в системе, обладающей определенными физическими свойствами; поэтому для описания его необходимо знать все параметры системы (ее физические, материальные характеристики), существенные для рассмотрения. Конкретный процесс существует и развивается во времени и в пространстве. Для определения состояния системы в некоторый момент времени необходимо знать ее состояние в предшествующий момент, принимаемый за начальный, поэтому условия однозначности должны включать в себя временные и пространственные характеристики системы в начальный момент времени (в ряде случаев может изучаться развитие процесса или только во времени, или только в пространстве).

Изучаемая система всегда в той или иной мере взаимодействует с окружающей средой. Часто это взаимодействие и является причиной возникновения исследуемого процесса или особенностей его протекания, поэтому, для того чтобы характеризовать полностью изучаемый процесс, необходимо знать условия на тех границах, где система соприкасается со средой — *г р а н и ч н ы е у с л о в и я*. Переход от класса явлений к единичному явлению осуществляется присоединением к дифференциальному уравнению условий однозначности. Тем самым из бесчисленного множества явлений данного класса, например распространения энергии в линии электропередачи, выделяется одно

конкретное явление, из которого, в свою очередь, выделяются конкретные процессы. Распространить результаты единичного опыта на все процессы класса невозможно, так как внутри любого класса имеются процессы, весьма не схожие. Поэтому вводится понятие *г р у п п ы* *я в л е н и й* (более узкое понятие, чем понятие класса, но более широкое, чем понятие единичного явления).

Основные положения теории подобия. Основные положения теории подобия (теоремы подобия и дополнительные положения к ним) определяют свойства подобных объектов исследования (систем, процессов, явлений) и указывают требования, при удовлетворении которых один из объектов может рассматриваться как модель (оригинал) по отношению к остальным.

Основной характеристикой подобных объектов являются критерии подобия, с помощью которых устанавливаются закономерности взаимодиагностического соответствия модели и оригинала. В наиболее широко распространенном случае *критерии подобия* — это идентичные по форме алгебраической записи и равные численно для подобных объектов безразмерные степенные комплексы (произведения или отношения) определенных групп параметров, характеризующих эти объекты. Критерии подобия могут быть установлены и в тех случаях, когда математическое описание объекта исследования известно и когда такое описание отсутствует.

В тех случаях, когда известны математические о п и с а н и я группы (двух или более) сопоставляемых качественно одинаковых процессов одной и той же физической природы и эти описания могут быть преобразованы к практически тождественному виду, рассматриваемые процессы считаются заведомо подобными в соответствии с определениями § 1.1. Такие процессы должны иметь одинаковые критерии подобия, устанавливаемые непосредственно из математического описания путем его приведения к безразмерному виду.

В общем случае одинаковые критерии подобия существуют для любых процессов, в отношении которых можно утверждать, что они подобны в том или ином смысле — абсолютно или практически (полно, неполно, приближенно), физически или математически и т. д. (см. § 1.1). Принципиально здесь именно то обстоятельство, что на сопоставляемые процессы заранее налагается требование их подобия, т. е. формулируется необходимое условие подобия; способ обеспечения подобия (достаточное условие подобия) при этом не оговаривается.

Предположим (для простоты рассуждений), что группа рассматриваемых заведомо подобных физических процессов $\varphi(x)$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$A_n \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi(x)}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 \varphi(x) = \sum_{i=n}^{i=0} A_i \frac{d^i \varphi(x)}{dx^i} = 0, \quad (1.3)$$

решение которого (общий интеграл) имеет вид

$$\varphi(x) = B_1 e^{\lambda_1(x)} + B_2 e^{\lambda_2(x)} + \dots + B_n e^{\lambda_n(x)} = \sum_{j=1}^n B_j e^{\lambda_j(x)}. \quad (1.4)$$

Пусть, для конкретности, рассматривается процесс $u_C(t)$ изменения во времени t напряжения u_C на конденсаторе C в цепи, образованной последовательным соединением конденсатора C с активным элементом с сопротивлением R , которая включается на постоянное напряжение E (при нулевых начальных условиях). При различных значениях R , C и E процессы $u_C(t)$ заведомо будут иметь качественно одинаковый характер, что позволяет рассматривать их как группу подобных процессов. Переходный процесс $u_C(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$RC du_C / dt + u_C - E = 0, \quad (1.3a)$$

решение которого имеет вид

$$u_C = E(1 - e^{-t/RC}). \quad (1.4a)$$

Все члены любого уравнения, описывающего какой-либо физический процесс, всегда имеют одинаковую размерность (правило Фурье), поэтому уравнение (1.3a) можно привести к безразмерному виду, т. е. представить в виде суммы безразмерных членов, если его разделить на один из членов, например на u_C :

$$(RC/u_C) (du_C / dt) + 1 - (E/u_C) = 0$$

или, обозначая $\pi'_1 = (RC/u_C) (du_C / dt)$ и $\pi'_2 = E/u_C$,

$$\pi'_1 + 1 - \pi'_2 = 0. \quad (1.5a)$$

При рассмотрении подобных процессов $u_{1C}(t)$ и $u_{2C}(t)$ соотношения пропорциональности вида (1.2) должны быть справедливы и для «точечных» значений параметров, и для их малых отклонений Δ от этих значений:

$$m_u = u_{1C}/u_{2C} = \Delta u_{1C}/\Delta u_{2C}; m_t = t_1/t_2 = \Delta t_1/\Delta t_2. \quad (1.2b)$$

С учетом (1.2b) можно представить π'_1 и π'_2 в виде

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= (RC/u_C) (u_C / t) = RC/t = R^1 C^1 t^{-1} u_C^0 E^0; \\ \pi_2 &= E/u_C = E^1 u_C^{-1} R^0 C^0 t^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6a)$$

Выражения для π_1 и π_2 , имеющие вид безразмерных степенных комплексов параметров, характеризующих рассматриваемый процесс, называются критериями подобия; критерии подобия численно одинаковы для сходственных точек подобных процессов.

Аналогично, приведем к безразмерному виду (1.3) путем деления, например на первый член:

$$1 + \pi'_1 + \dots + \pi'_{n-1} = 1 + \sum_{j=1}^n \pi'_j = 0. \quad (1.5)$$

Преобразования, аналогичные (1.6a), выполненные с учетом (1.2b), позволяют получить для (1.5) систему критериев подобия вида

$$\pi_j = c_i P_1^{\alpha_j} \dots P_m^{\omega_j}, \quad j = \overline{1, (n-1)}, \quad (1.6)$$

где $P_1, \dots, P_m$ — параметры рассматриваемого процесса ($P_i = x$); $c_j, \alpha_j, \dots, \omega_j$ — безразмерные числа, принимающие некоторые действительные (в том числе и нулевые) значения.

Критерии подобия, как и ранее, имеют вид безразмерных степенных комплексов параметров, характеризующих процесс $\varphi(x)$. При определении выражений для критериев подобия символы дифференцирования опускаются; аналогично можно опустить и символы интегрирования, так как выражения (1.2б) справедливы также и для больших отклонений любого параметра. Способ определения критериев подобия по известному математическому описанию процесса путем приведения его к безразмерному виду, при котором символы дифференцирования и интегрирования в выражениях для критериев подобия опускаются, называется *правилом интегральных аналогов*.

Для рассматриваемых подобных процессов существует, вообще говоря, две системы критериев подобия: первая — получаемая из дифференциального уравнения (1.3) или (1.3а); вторая — из решения (общего интеграла) дифференциального уравнения (1.4) или (1.4а). Однако обе эти системы критериев подобия, как легко убедиться, например, из (1.3а) и (1.4а), идентичны, т. е. имеют одинаковый физический смысл; противоположный результат означал бы, что перемена порядка операций при определении критериев подобия приводит к физически различным результатам, а это противоречит содержанию понятия подобия физических процессов.

Таким образом, интеграл дифференциального уравнения можно представить в виде функции критериев подобия. При этом, однако, констатируется только факт возможности получения такой функциональной зависимости; вид связей критериев, т. е. выражение интеграла в общем случае, не устанавливается.

Критерии подобия подобных процессов можно получить и в том случае, когда неизвестны математические описания процессов. Доказательство этого положения как математической теоремы для частных и общего случаев было дано рядом ученых (см. ниже). Практическое его содержание состоит в том, что любую функциональную зависимость, полученную из эксперимента или расчета и имеющую в размерных физических величинах (параметрах) $P_1, \dots, P_j, \dots, P_m$ вид

$$F(P_1, \dots, P_j, \dots, P_m) = 0 \quad (1.7)$$

или для рассмотренного выше примера (1.3а)

$$F(u_C, t, R, C, E) = 0, \quad (1.7a)$$

можно представить как

$$F_{\pi}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-k}) = 0 \quad (1.8)$$

или

$$F_{\pi}(\pi_1 = RC/t, \pi_2 = E/u_C) = 0, \quad (1.8a)$$

где $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-k}$ — критерии подобия.

Для определения критериев подобия в данном случае применяется *метод анализа размерностей* физических величин P_j , определяющих

характер рассматриваемого процесса. Возможность установления критериев подобия в тех случаях, когда вид аналитической функциональной зависимости между параметрами $P_1, \dots, P_m$ неизвестен, создает предпосылки для представления данных экспериментального исследования определенного физического процесса в обобщенной форме и, таким образом, для распространения результатов единичного эксперимента на группу или класс подобных процессов.

В связи с этим необходимо еще раз подчеркнуть следующее: для обеспечения максимальной эффективности (в широком смысле слова) любых экспериментальных исследований эти исследования необходимо организовать так, чтобы можно было определить критерии подобия и представить полученные результаты критериальной функциональной зависимостью вида (1.8). Такой подход позволяет при ограниченном числе экспериментов дать оценку хода процесса или поведения системы при разнообразных сочетаниях параметров, их характеризующих, и, следовательно, получить ответы на те дополнительные вопросы, которые обычно возникают уже после окончания экспериментально-исследовательских и испытательных работ.

Рассмотренные положения, однако, относятся к случаю заведомо подобных процессов, т. е. определяются необходимыми условиями существования подобия. В связи с этим возникает естественный вопрос относительно того, как распознать подобие или специально обеспечить его при построении модели, т. е. вопрос об условиях, не только необходимых, но и достаточных для существования подобия. Такие условия включают в себя наряду с требованием равенства критериев подобия сопоставляемых процессов также и определенные дополнительные требования к условиям однозначности — требования подобия начальных и граничных условий сопоставляемых процессов (а при соблюдении геометрического подобия — и подобия геометрических характеристик соответствующих пространственных областей).

Изложенные выше положения относительно необходимых и достаточных условий подобия обычно систематизируются в виде первой, второй и третьей теорем* о подобии; первые две теоремы определяют необходимые, третья — необходимые и достаточные условия подобия.

Первая теорема подобия. В основной современной формулировке, учитывающей возможность существования различных видов подобия (см. § 1.1), первая теорема имеет следующий вид: *явления, подобные в том или ином смысле (полно, приближенно, физически, математически и т. д.), имеют определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, численно одинаковые для подобных явлений*. Первая теорема подобия называется также теоремой Ньютона или Ньютона-Бертрана.

* Высказываются соображения, что только вторая теорема подобия может рассматриваться как теорема в том смысле, в каком это понятие употребляется в математике, а первая и третья теоремы являются правилами выявления и обеспечения подобия. В данном изложении сохраняется наиболее распространенная терминология — введенное еще И. Ньютоном название первой теоремы и предложенное М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом название третьей теоремы.

Вторая теорема подобия. В основной формулировке эта теорема, чаще встречающаяся под названием π -теоремы, имеет следующий вид: *всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.*

Вторая теорема устанавливает возможность представления интеграла дифференциального уравнения физического процесса не как функции параметров процесса и системы, в которой протекают эти процессы, а как функции соответствующим образом построенных некоторых безразмерных величин — критериев подобия. Если исходное дифференциальное уравнение проинтегрировано, то функциональные связи между критериями подобия будут однозначно определены в соответствии с теми допущениями, которые были приняты при составлении и интегрировании данного уравнения. Если же дифференциальное уравнение отсутствовало или не интегрировалось, то вид функциональных связей между критериями подобия не будет выявлен.

Вторая теорема основывается на исследованиях Букингема, Федермана и Эренфест-Афанасьевой. Возможность представления интеграла как функции от критериев подобия, найденных из дифференциального уравнения, была строго доказана для частного случая Букингемом. В более общем виде это положение как математическая теорема было доказано Федерманом. Эренфест-Афанасьева привела доказательство в общем виде, показав условия, при которых интеграл можно представить как функцию критериев подобия. Одновременно было показано, что из соотношений, указывающих на однородность уравнения, связывающего физические величины (одинаковая размерность всех членов уравнения), и из возможности получения безразмерных соотношений после деления этого уравнения на любой из его членов следует важный вывод о существовании определенных соотношений между размерностями физических параметров. Эренфест-Афанасьевой было показано, что критерии подобия можно найти при отсутствии дифференциального уравнения процесса на основе анализа размерностей физических величин, участвующих в этом процессе. Эта возможность была сформулирована и строго доказана в виде теоремы, названной π -теоремой, поскольку упомянутые выше безразмерные параметры (критерии подобия) обозначались буквой π .

Третья теорема подобия. В наиболее распространенной формулировке третья теорема имеет следующий вид: *необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений.* Третья теорема подобия именуется также обратной теоремой подобия или теоремой Кирпичева—Гухмана.

Дополнительные положения теории подобия. Эти положения, предложенные авторами, распространяют три основные теоремы подобия на системы сложные, системы с нелинейными или переменными параметрами, анизотропные системы (с различными свойствами по различным координатам) и системы, заданные вероятностно-статистическими характеристиками; этими же положениями охватываются геометрически неподобные системы, а также системы, для которых понятие подобия интерпретируется шире, чем постоянство масштабных коэффициентов в сходственных точках пространства параметров в сходственные моменты времени.

В общем случае дополнительные положения теории подобия формулируются следующим образом:

— *подобие сложных геометрически подобных и изотропных систем с детерминированно определенными линейными или постоянными параметрами, образованных несколькими соответственно подобными по отдельности подсистемами, обеспечивается, если выполняется дополнительное условие подобия всех сходственных элементов, являющихся общими для этих подсистем;*

— *условия подобия сложных геометрически подобных и изотропных систем с детерминированно определенными линейными и постоянными параметрами могут быть распространены на сложные системы с нелинейными или переменными параметрами, заданными детерминированно, если выполняется дополнительное условие совпадения относительных характеристик сходственных параметров, являющихся нелинейными или переменными;*

— *условия подобия детерминированно определенных геометрически подобных изотропных сложных систем могут быть распространены на анизотропные геометрически подобные сложные системы, заданные детерминированно, если выполняется дополнительное условие обеспечения одинаковой относительной анизотропии в сопоставляемых системах;*

— *условия подобия детерминированно определенных геометрически подобных анизотропных сложных систем с переменными или нелинейными параметрами могут быть распространены на геометрически неподобные сложные системы с детерминированно определенными параметрами, если выполняется дополнительное условие обеспечения такого нелинейного подобия пространства параметров, при котором существуют подобные изменения параметров процесса в сходственных точках этого пространства;*

— *условия подобия сложных геометрически неподобных анизотропных систем с детерминированно определенными нелинейными или переменными параметрами могут быть распространены на системы с вероятностно (статистически) определенными параметрами, если выполняются дополнительные условия совпадения плотностей вероятностей сходственных параметров и пропорциональности их статистических моментов, степени масштабных коэффициентов при которых совпадают с порядками соответствующих моментов.*

§ 1.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Первая теорема подобия. Первая теорема подобия утверждает, что для явлений (объектов, процессов), подобных в том или ином смысле, существуют одинаковые критерии подобия — идентичные по форме алгебраической записи и равные численно безразмерные степенные комплексы (произведения или отношения) определенных групп физических факторов, характеризующих эти явления. Формулируя необходимые условия существования подобия (одинаковые критерии подобия у подобных явлений), первая теорема, однако, не указывает способы установления подобия и способы его реализации при построении моделей.

Первая теорема встречается в литературе также и в иных формулировках:

— у подобных явлений индикаторы подобия равны единице или критерии подобия численно одинаковы: при этом подчеркивается, что равенство критериев подобия налагает определенные требования на соответствующие масштабные коэффициенты — требование равенства единице степенных комплексов масштабных коэффициентов, образованных по определенным правилам (индикаторов подобия);

— подобные явления описываются буквенно одинаковыми уравнениями, которые условно или безусловно инвариантны по отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин; при этом акцент делается преимущественно на том, что математические описания подобных процессов (если они имеются или потенциально могут быть получены) допускают приведение их к тождественному виду;

— необходимым условием подобия двух систем является равенство соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из параметров процесса и системы; внимание здесь обращается на то, что первая теорема выявляет только необходимые свойства подобных систем, имеющих одинаковые критерии подобия, которые иногда рассматриваются как некоторая средняя мера отношения интенсивностей двух физических эффектов, существенных для данного процесса;

— необходимым условием подобия двух систем является равенство соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из обобщенных координат и параметров этих систем: здесь подчеркивается, что в отличие от достаточных условий подобия, которые накладывают определенные ограничения на параметры систем, обуславливая этим их подобие, необходимые условия позволяют установить связь между обобщенными координатами и параметрами систем, если из каких-либо дополнительных соображений установлено, что эти системы подобны.

Определение критериев подобия по уравнениям исследуемых процессов. При определении критериев подобия выполняется ряд преобразований исходных уравнений с использованием правила Фурье, в соответствии с которым все члены уравнения, описывающего физический процесс, должны иметь одинаковую размерность (т. е. являться размерно-однородными). Возможны два случая математического описания физического процесса:

— все члены уравнения — однородные функции параметров, определяющих протекание этого процесса, и их производных; при этом все члены уравнения имеют общий множитель, который может быть вынесен за знак функциональной зависимости;

— часть членов уравнения — неоднородные функции параметров, не допускающие вынос за знак функции общего множителя (например, функции вида $\sin(\omega t + \varphi)$, $\exp(-t/\tau)$ и т. п.).

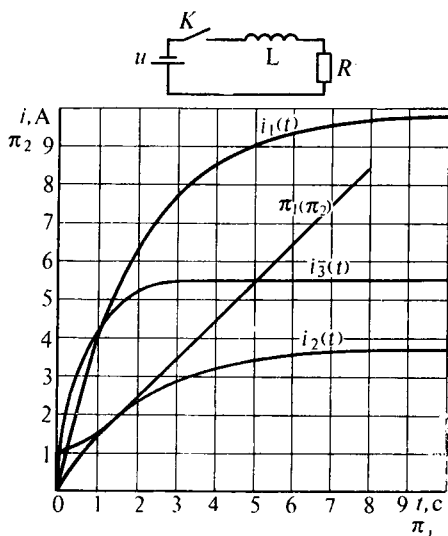


Рис. 1.3

Определение критериев подобия процессов, описываемых уравнениями, содержащими только однородные функции. Рассмотрим необходимые для определения критериев подобия преобразования, сопровождая изложение примером преобразования уравнения переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с активным сопротивлением R и индуктивностью L , которая включается на постоянное напряжение u (рис. 1.3).

Пусть имеются уравнения двух подобных процессов φ_0 и Φ_0 , являющихся функциями параметров $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$ и $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n$ соответственно, т. е. в общем случае

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_i + \dots + \varphi_m = \sum_{i=1}^m \varphi_i = 0; \quad (1.9)$$

$$\Phi_1 + \dots + \Phi_i + \dots + \Phi_m = \sum_{i=1}^m \Phi_i = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\varphi_i = f_i(P_1, \dots, P_n); \Phi_i = f_i(R_1, \dots, R_n) \quad (1.11)$$

— члены уравнений для φ_0 и Φ_0 ; $i = 1, 2, \dots; m = \overline{1, m}$.

Для рассматриваемого примера уравнения двух переходных процессов — это дифференциальные уравнения вида

$$i_1 R_1 + L_1 di_1/dt_1 - u_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0; \quad (1.9a)$$

$$i_2 R_2 + I_2 \frac{di_2}{dt_2} - u_2 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \sum_{i=1}^3 \Phi_i = 0, \quad (1.10a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= i_1 R_1 = f_1(i_1, t_1, R_1, L_1, u_1); \\ \varphi_2 &= L_1 di_1/dt_1 = f_2(i_1, t_1, R_1, L_1, u_1); \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_3 &= u_2 = f_3(i_2, t_2, R_2, L_2, u_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.11a)$$

Сопоставляемые процессы φ_0 и Φ_0 подобны, поэтому между их сходственными параметрами должны существовать соотношения пропорциональности вида (1.2):

$$P_1 = m_1 R_1, \dots, P_i = m_i R_i, \dots, P_n = m_n R_n \quad (1.12)$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= m_R R_2; L_1 = m_L L_2; v_1 = m_u u_2; \\ i_1 &= m_i i_2; t_1 = m_t t_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.12a)$$

где $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$ или m_R, m_L, m_u, m_i и m_t — масштабные коэффициенты (масштабы).

В соответствии с первой теоремой подобия для подобных процессов Φ_0 и Φ_0 , все члены уравнений которых являются однородными функциями, должны существовать одинаковые критерии подобия; их можно найти, если привести исходные уравнения к безразмерному виду.

Приведем исходные уравнения (1.9) и (1.10), все члены которых имеют одинаковую размерность, к безразмерному виду путем деления на какой-либо, например m -й член (φ_m и Φ_m):

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_m} + \dots + \frac{\varphi_i}{\varphi_m} + \dots + \frac{\varphi_{m-1}}{\varphi_m} + 1 = \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i}{\varphi_m} = 0; \quad (1.13)$$

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_m} + \dots + \frac{\Phi_i}{\Phi_m} + \dots + \frac{\Phi_{m-1}}{\Phi_m} + 1 = \sum_{i=1}^m \frac{\Phi_i}{\Phi_m} = 0; \quad (1.14)$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{\varphi_3}{\varphi_1} = \frac{i_1 R_1}{i_1 R_1} + \frac{L_1 di_1}{i_1 R_1 dt_1} - \frac{u_1}{i_1 R_1} = 0; \quad (1.13a)$$

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_1} + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} + \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{i_2 R_2}{i_2 R_2} + \frac{L_2 di_2}{i_2 R_2 dt_2} - \frac{u_2}{i_2 R_2} = 0. \quad (1.14a)$$

Вследствие однородности (1.9) и (1.10) в выражениях для φ_i и Φ_i должны существовать некоторые общие множители, которые можно вынести за знак функции.

В математическом анализе функция $f(x_1, \dots, x_n)$ от n аргументов, определенная в области D , называется однородной функцией k -й степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель M она приобретает тот же множитель M в k -й степени, т. е. если тождественно выполняется равенство

$$f(Mx_1, \dots, Mx_n) = M^k f(x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, у физического уравнения, образованного суммой однородных функций, должен существовать общий для всех членов уравнения множитель M , который можно вынести за знак суммы; операции интегрирования и дифференцирования не препятствуют выносу общего множителя M за знак суммы.

Общий множитель для i -го члена φ_i исходного уравнения (1.9) — некоторая комбинация масштабных коэффициентов $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$, т. е. в соответствии с (1.11) и (1.12)

$$\varphi_i = f_i(P_1, \dots, P_j, \dots, P_n) = f_i(m_1 R_1, \dots, m_j R_j, \dots, m_n R_n) = M_i f_i(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n) = M_i \Phi_i; \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= i_1 R_1 = m_i i_2 m_R R_2 = m_i m_R i_2 R_2 = M_1 \Phi_1; \\ \varphi_2 &= L_1 \frac{di_1}{dt_1} = m_L L_2 \frac{dm_i i_2}{dm_t t_2} = \frac{m_L m_i}{m_t} L_2 \frac{di_2}{dt_2} = M_2 \Phi_2; \\ \varphi_3 &= u_1 = m_u u_2 = M_3 \Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.15a)$$

Подстановка (1.15) в (1.14) дает

$$\frac{M_1}{M_m} \frac{\Phi_1}{\Phi_m} + \dots + \frac{M_i}{M_m} \frac{\Phi_i}{\Phi_m} + \dots + \frac{M_{m-1}}{M_m} \frac{\Phi_{m-1}}{\Phi_m} + 1 = 0; \quad (1.16)$$

$$1 + \frac{m_L m_i}{m_i m_R m_t} \frac{L_2}{i_2 R_2} \frac{di_2}{dt_2} - \frac{m_u}{m_i m_R} \frac{u_2}{i_2 R_2} = 0. \quad (1.16a)$$

Поскольку уравнение (1.16) представляет собой сумму однородных функций, должен существовать общий для всех его членов множитель M_m :

$$M_1 = \dots = M_i = \dots = M_{m-1} = M_m \quad (1.17)$$

характер масштабных преобразований, записав, например, для φ_2 , φ_1 и π_1 соответственно

$$\varphi_2^* = L_1 \frac{i_1}{t_1}; \quad \varphi_1^* = i_1 R_1; \quad \pi_1 = \frac{\varphi_2^*}{\varphi_1^*} = \frac{L_1 i_1}{i_1 R_1 t_1} = \frac{L_1}{R_1 t_1},$$

где φ_1^* и φ_2^* — аналоги φ_1 и φ_2 .

Точно такой же результат может быть получен, если воспользоваться масштабными соотношениями вида (1.18а), заменив в соответствии с (1.12а) масштабные коэффициенты отношениями сходственных параметров; например,

$$\frac{m_L}{m_R m_t} = \frac{L_1/L_2}{(R_1/R_2)(t_1/t_2)} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{L_2}{R_2 t_2} = \pi_1.$$

В общем случае соотношения пропорциональности вида (1.12) справедливы на любых (и малых, и больших) интервалах изменения сопоставляемых функциональных зависимостей, описывающих рассматриваемые процессы

$$\frac{d^n(m_x x)}{d(m_y y)^n} = \frac{m_x}{m_y^n} \frac{d^n x}{dy^n} \quad \text{и} \quad \int m_x x d(m_y y) = m_x m_y \int x dy.$$

Поэтому если в членах исходных уравнений (1.9) и (1.10) содержатся символы дифференцирования и интегрирования, то при рассмотрении условий пропорциональности можно опустить эти символы (поскольку они не имеют размерности и не влияют на условия пропорциональности), заменив соответствующие члены уравнений φ_j их аналогами φ_j^* , которые называются интегральными, т. е. $d^n x/dy^n$ заменить на x/y^n и $\int x dy$ заменить на xy .

Аналогично, интегральным аналогом $\text{rot } H$ является выражение H/l (где l — характерный геометрический размер), поскольку, обозначая символом $[a]$ размерность физической величины a , можно записать

$$[\text{rot } H] = \left[\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint H dl}{s} \right] = \left[\frac{Hl}{s} \right] = \left[\frac{Hl}{l^2} \right] = \left[\frac{H}{l} \right].$$

Интегральным аналогом символа $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ при условии соблюдения геометрического подобия будет величина $1/l$, где l — характерный геометрический размер, x , y и z — пространственные координаты; интегральным аналогом символа $\text{grad } l$ — $1/l$; символ $\text{div grad } l$ может быть заменен на $1/l^2$ и т. д.

Опуская в (1.20) для простоты записи индексы (1), (2), ..., (s), можно окончательно с учетом (1.18) записать, что для подобных процессов

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1/\varphi_m &= \pi_1 = \text{idem}; \dots; \varphi_i/\varphi_m = \pi_i = \text{idem}; \dots; \varphi_{m-1}/\varphi_m = \\ &= \pi_{m-1} = \text{idem}; \\ \varphi_1^*/\varphi_m^* &= \pi_1 = \text{idem}; \dots; \varphi_i^*/\varphi_m^* = \pi_i = \text{idem}; \dots; \varphi_{m-1}^*/\varphi_m^* = \\ &= \pi_{m-1} = \text{idem}; \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

$$M_1/M_m = I_{\pi_1} = 1; \dots; M_i/M_m = I_{\pi_i} = 1; \dots; M_{m-1}/M_m = I_{\pi_{m-1}} = 1, \quad (1.22)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — члены исходного уравнения вида (1.9); $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ — интегральные аналоги $\varphi_1, \dots, \varphi_m$; $M_1, \dots, M_m$ — комбинации (произведения или отношения) масштабных коэффициентов.

Применительно к данному примеру

$$L/tR = \pi_1 = \text{idem}; u/iR = \pi_2 = \text{idem}; \quad (1.21a)$$

$$m_L/m_R m_i = I_{\pi_1} = 1; m_u/m_i m_R = I_{\pi_2} = 1. \quad (1.22a)$$

Выражения (1.21) для критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_{m-1}$, иногда называемые инвариантами подобия, имеют вид безразмерных степенных комплексов параметров $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$

$$\pi_i = P_1^{z_1} \dots P_j^{z_j} \dots P_n^{z_n} = \text{idem}, \quad (1.23)$$

где $z_1, \dots, z_j, \dots, z_n$ — действительные числа, принимающие целые либо дробные, положительные либо отрицательные или нулевые значения.

Для рассматриваемого примера

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= L/(tR) = L^1 R^{-1} t^{-1} = L^1 R^{-1} t^{-1} i^0 u^0 = \text{idem}; \\ \pi_2 &= u/(iR) = u^1 i^{-1} R^{-1} = L^0 R^{-1} i^0 i^{-1} u^1 = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23a)$$

Число K_J критериев подобия, найденных на основе приведения к безразмерному виду уравнения процесса, содержащего только однородные функции, на единицу меньше числа m членов в этом уравнении, т. е. $K_J = m - 1$.

Точки координатного пространства $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, служащего для отображения процессов $\varphi^{(1)} = \Phi_0 = F(R_1, \dots, R_n)$, $\varphi^{(2)} = \varphi_0 = F(P_1, \dots, P_n)$, $\varphi^{(3)} = \Psi_0 = F(Q_1, \dots, Q_n)$ и т. д., в которых критерии подобия численно равны для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ (или $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(3)}$ и т. п.), называются *сходственными точками*: только в этих точках пропорциональны все сходственные параметры сопоставляемых подобных процессов. При этом масштабные коэффициенты сходственных параметров подобных процессов подчиняются условиям (1.22); подобные процессы с иными масштабными соотношениями сходственных параметров не могут существовать. Выражения вида (1.22), при которых соблюдаются соотношения (1.21), иногда называются *индикаторами подобия*.

Для выявления сходственных точек рассмотрим процессы $i_1(t_1)$, $i_2(t_2)$, $i_3(t_3)$, полагая соответственно $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $L_1 = 20 \text{ Гн}$, $u_1 = 100 \text{ В}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $L_2 = 40 \text{ Гн}$, $u_2 = 75 \text{ В}$; $R_3 = 90 \text{ Ом}$, $L_3 = 60 \text{ Гн}$, $u_3 = 500 \text{ В}$.

Значения i_1 , i_2 и i_3 в любые конкретные моменты времени могут быть вычислены в соответствии с уравнением

$$i = \frac{u}{R} (1 - e^{-(R/L)t}), \quad (1.24)$$

являющимся решением дифференциальных уравнений вида (1.9a) и (1.10a).

Результаты вычислений представлены ниже:

t , с...	0,33	0,50	0,67	1,00	1,33	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	∞
i_1 , А...	1,52	2,21	2,84	3,93	4,86	5,28	6,32	7,13	7,77	8,11	10,0
i_2 , А...	0,57	0,83	1,06	1,47	1,82	1,98	2,37	2,67	2,91	3,04	3,75
i_3 , А...	2,15	2,93	3,51	4,32	4,81	4,97	5,28	5,42	5,49	5,52	5,55

Зависимости $i(t)$ приведены на рис. 1.3.

Для процессов $i_1(t_1)$ и $i_2(t_2)$ в моменты времени $t_1 = 0,33 \text{ с}$ и $t_2 = 0,33 \text{ с}$, например, критерии подобия принимают значения:

$$\pi_1^{(1)} = \frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{20}{10 \cdot 0,33} = 6,06; \pi_1^{(1)} = \frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{100}{1,52 \cdot 10} = 6,57;$$

$$\pi_1^{(2)} = \frac{L_2}{R_2 t_2} = \frac{40}{20 \cdot 0,33} = 6,06; \pi_2^{(2)} = \frac{u_2}{i_2 R_2} = \frac{75}{0,57 \cdot 20} = 6,57.$$

При этом соответствующие степенные комплексы масштабных коэффициентов равны единице:

$$m_R = R_1/R_2 = 10/20 = 0,5; m_L = L_1/L_2 = 20/40 = 0,5;$$

$$m_u = u_1/u_2 = 100/75 = 1,33; m_i = i_1/i_2 = 1,52/0,57 = 2,67;$$

$$m_t = t_1/t_2 = 0,33/0,33 = 1,0;$$

$$I_{\pi_1} = \frac{m_L}{m_R m_t} = \frac{0,5}{0,5 \cdot 1,0} = 1; I_{\pi_2} = \frac{m_u}{m_i m_R} = \frac{1,33}{2,67 \cdot 0,5} = 1.$$

Таким образом, точки с координатами ($i_1 = 1,53$ А, $t_1 = 0,33$ с) и ($i_2 = 0,57$ А, $t_2 = 0,33$ с) являются сходственными точками подобных процессов $i_1(t_1)$ и $i_2(t_2)$; в этих точках координатного пространства $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = (R, L, u, i, t)$ сходственные параметры сопоставляемых процессов пропорциональны.

Аналогично

— для $t_1 = t_2 = 0,5$ с:

$$\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(2)} = 4,0; \pi_2^{(1)} = \pi_2^{(2)} = 4,52; I_{\pi_1} = 1; I_{\pi_2} = 1;$$

и, следовательно, сходственными являются точки с координатами ($i_1 = 2,21$ А, $t_1 = 0,5$ с) и ($i_2 = 0,83$ А, $t_2 = 0,5$ с);

— для $t_1 = t_2 = 1,0$ с:]

$$\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(2)} = 2,0; \pi_2^{(1)} = \pi_2^{(2)} = 2,54; I_{\pi_1} = 1; I_{\pi_2} = 1$$

и, следовательно, сходственными являются точки с координатами ($i_1 = 3,93$ А, $t_1 = 1,0$ с) и ($i_2 = 1,47$ А, $t_2 = 1,0$ с).

Для сопоставляемых процессов $i_1(t_1)$ и $i_3(t_3)$ рассчитанные значения критериев подобия представлены ниже:

$t,$	с...	0,33	0,50	0,67	1,00	1,33	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00
$\pi_1^{(1)}$	...	6,06	4,00	2,98	2,00	1,50	1,33	1,00	0,80	0,67	0,50
$\pi_1^{(3)}$	...	2,02	1,33	0,99	0,67	0,50	0,44	0,33	0,27	0,22	0,17
$\pi_2^{(1)}$	...	6,57	4,52	3,51	2,54	2,06	1,89	1,58	1,40	1,29	1,16
$\pi_2^{(3)}$	...	2,56	1,89	1,58	1,29	1,16	1,12	1,05	1,02	1,01	1,00

Из приведенных данных видно, что в этом случае равенство критериев подобия π_1 и π_2 достигается в другие моменты времени: например, при $t_1 = 1,0$ с и $t_3 = 0,33$ с; $t_1 = 1,5$ с и $t_3 = 0,5$ с; $t_1 = 2,0$ с и $t_3 = 0,67$ с. Именно в этих точках координатного пространства пропорциональны все сходственные параметры и равны единице степенные комплексы масштабных коэффициентов I_{π_1} и I_{π_2} .

При произвольном выборе значений R_1 и R_2 , L_1 и L_2 , u_1 и u_2 ($m_R = 1/9$, $m_L = 1/3$, $m_u = 1/5$) значения i_1 и i_3 , t_1 и t_3 , определяющие координаты сходственных точек, не могут выбираться произвольно; необходимо, чтобы

$$m_t = \frac{m_L}{m_R} = \frac{1,9}{3 \cdot 1} = 3, \text{ поскольку } I_{\pi_1} = \frac{m_L}{m_R m_t} = 1,$$

$$m_i = \frac{m_u}{m_R} = \frac{1,9}{5 \cdot 1} = \frac{1,9}{5} = 1,8, \text{ поскольку } I_{\pi_2} = \frac{m_u}{m_i m_R} = 1,$$

и, следовательно, сходственными точками будут

$$t_3 = t_1/m_t = 0,33 \text{ и } l_3 = l_1/m_t = 1,47 \text{ для } t_1 = 1,0 \text{ и } l_1 = 3,93;$$

$$t_3 = 0,50 \text{ и } l_3 = 2,93 \text{ для } t_1 = 1,5 \text{ и } l_1 = 5,28;$$

$$t_3 = 0,67 \text{ и } l_3 = 3,51 \text{ для } t_1 = 2,0 \text{ и } l_1 = 6,32.$$

Определение критериев подобия процессов, описываемых уравнениями, содержащими неоднородные функции. Если часть членов уравнения, описывающего рассматриваемый процесс, — неоднородные функции, то масштабный коэффициент нельзя вынести за знак функции и, следовательно, преобразования, аналогичные (1.15)—(1.18), невозможны. В этих случаях у подобных процессов должны быть равны аргументы неоднородных функций.

В соответствии с правилом Фурье уравнения, описывающие физические процессы, остаются однородными и в том случае, если их члены содержат как однородные, так и неоднородные функции, так как при этом аргументы неоднородных функций являются отвлеченными числами, т. е. не имеют размерности.

Тождественность уравнений

$$t_1 = \frac{u_1}{R_1} (1 - e^{-(R_1/L_1) t_1}); \quad t_2 = \frac{u_2}{R_2} (1 - e^{-(R_2/L_2) t_2}) \quad (1.24a)$$

возможна, если

$$\exp [(-R_1/L_1) t_1] = \exp [(-R_2/L_2) t_2],$$

т. е. если

$$\frac{R_1}{L_1} t_1 = \frac{m_R R_2}{m_L L_2} m_t t_2 = \frac{m_R m_t}{m_L} \frac{R_2 t_2}{L_2} = I \pi_1 \frac{R_2 t_2}{L_2} = \frac{R_2 t_2}{L_2}.$$

Другими словами, необходимо, потребовав равенства показателей степеней экспоненциальных (неоднородных) функций, принять этот показатель степени в качестве критерия подобия, т. е.

$$\pi'_1 = R_1 t_1 / L_1 = R_2 t_2 / L_2.$$

После преобразования уравнений для $i_1(t)$ и $i_2(t)$ к безразмерному виду критериями подобия сопоставляемых процессов будут

$$\pi'_1 = Rt/L, \quad \pi_2 = u/(iR)$$

или, если принять $\pi_1 = (\pi'_1)^{-1}$, то, как и ранее,

$$\pi_1 = L/(Rt) \text{ и } \pi_2 = u/(iR),$$

что и следовало ожидать, поскольку рассматриваются различные формы математического описания одного и того же физического процесса.

Аналогично, если рассматриваются процессы, уравнения которых содержат неоднородные функции вида $\sin \omega_1 t_1$ и $\sin \omega_2 t_2$, то тождественность математических описаний будет достигнута при условии, что

$$\begin{aligned} \sin \omega_1 t_1 &= \sin (m_\omega \omega_2 m_t t_2) = \sin (m_\omega m_t \omega_2 t_2) = \sin (I \pi_2 \omega_2 t_2) = \\ &= \sin \omega_2 t_2, \text{ если } I \pi_2 = m_\omega m_t = 1, \end{aligned}$$

т. е. необходимо ввести дополнительный критерий подобия $\pi_{\text{доп}} = \omega t$.

Преобразование критериев подобия и критериальное описание подобных процессов. Важным практическим свойством критериев подобия является возможность их преобразования: *критерии подобия процесса, представленные в какой-либо форме записи, могут быть преобразованы в критерии подобия иной формы записи посредством перемножения или деления их, возведения в степень или умножения на любой постоянный коэффициент k.*

Если, например, совокупность критериев подобия $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \dots, \pi_{k+j}, \dots, \pi_m$ полностью описывает некоторый физический процесс, то и совокупность критериев подобия $\pi'_1 = k\pi_1, \pi'_2 = \pi_2^{-1}, \dots, \pi'_k = \pi_k \pi_{k+j}, \dots, \pi'_{k+j} = \pi_{k+j}/\pi_m, \dots, \pi'_m = (\pi_m)^k$ также будет полностью характеризовать этот процесс, поскольку при $\pi_1 = \text{idem}, \pi_2 = \text{idem}, \dots, \pi_k = \text{idem}, \dots, \pi_{k+j} = \text{idem}, \dots, \pi_m = \text{idem}$

$$\pi'_1 = k\pi_1 = \text{idem}, \pi'_2 = 1/\pi_2 = \pi_2^{-1} = \text{idem}, \dots,$$

$$\pi'_k = \pi_k \pi_{k+j} = \text{idem}, \dots, \pi'_{k+j} = \pi_{k+j}/\pi_m = \text{idem} \dots,$$

$$\pi'_m = (\pi_m)^k = \text{idem}.$$

Критерии подобия $\pi_1, \dots, \pi_m$ можно рассматривать как обобщенные вторичные переменные определенного класса процессов, отражающие специфику группового взаимодействия физических факторов. Этими переменными исследуемые процессы могут быть описаны так же полно, как и первичными размерными физическими факторами. Однако при переходе к критериальному описанию сокращается число переменных, что обеспечивает более высокий уровень общности (универсальности) результатов исследования: критериальное описание едино для всех подобных процессов, что позволяет распространить на класс подобных процессов количественные результаты, полученные при исследовании одного из таких процессов.

Зависимость $\pi_1 = f(\pi_2)$, представленная на рис. 1.3, едина для процессов $i_1(t_1), i_2(t_2), i_3(t_3)$ и других подобных процессов $i(t)$ с иными значениями R, L, u . При этом число переменных сокращается с пяти для зависимостей $i(t)$ вида $F(R, L, u, i, t)$ до двух для зависимости $\pi_1 = f(\pi_2)$, которая может быть построена по значениям критериев подобия любого из этих процессов. В данном случае критериальное описание $\pi_1 = f(\pi_2)$ может быть также представлено и в аналитической форме после выполнения соответствующих алгебраических преобразований в (1.24) с учетом (1.21a):

$$1/\pi_2 = (1 - e^{-1/\pi_1}) \text{ или } \pi_2(1 - \exp \pi_1^{-1}) = 1.$$

Методика определения критериев подобия способом интегральных аналогов. Для определения из уравнения процесса, содержащего n членов, критериев подобия способом интегральных аналогов необходимо разделить все члены уравнения на какой-либо из них, опустить символы связи между членами уравнения, символы дифференцирования и интегрирования, а также неоднородные функции; к полученным в результате этих операций $n - 1$ основным критериям подобия необходимо присовокупить a дополнительных критериев — аргументов неоднородных функций, входящих в члены уравнения.

Общее число критериев подобия, найденных способом интегральных аналогов,

$$K_J = (n - 1) + a.$$

Число возможных форм записи $n - 1$ основных критериев, получаемых приведением уравнения к безразмерному виду, равно числу членов уравнения

$$F_J = n.$$

Рассмотрим методику определения критериев подобия способом интегральных аналогов на примере переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , которая включается на напряжение u , меняющееся во времени по синусоидальному закону с угловой скоростью ω ; уравнение исследуемого процесса имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + iR = u \sin \omega t. \quad (1.25)$$

I. Записать исходное уравнение в виде $\varphi_0 = \sum_1^m \varphi_i = 0$:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + iR - u \sin \omega t = 0.$$

II. Опустить символы связи « $+$ », « $-$ » и « $=$ » между членами уравнения:

$$\varphi_1 = L \frac{di}{dt}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{C} \int idt; \quad \varphi_3 = iR; \quad \varphi_4 = u \sin \omega t.$$

III. Исключить из выражений для $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ неоднородные функции, приняв в качестве дополнительных критериев подобия аргументы этих функций:

$$\varphi_4 = u \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t \rightarrow \pi_{\text{доп}} = \omega t; \quad \varphi_4^* = u.$$

IV. Опустить в выражениях для $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ символы дифференцирования и интегрирования, символы grad, div и т. д., заменяя $d^n x / dy^n$ на x / y^n , $\int x dy$ на xy , а также (при условии соблюдения геометрического подобия) grad l на l/l , rot H на H/l , $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ на $1/l^2$, div grad l на $1/l^2$ и т. д.:

$$\varphi_1 = L \frac{di}{dt} \rightarrow \varphi_1^* = L \frac{i}{t}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{C} \int idt \rightarrow \varphi_2^* = \frac{1}{C} it.$$

V. Заменить члены уравнения φ_i, φ_j , преобразованные на этапах III и IV, их аналогами φ_i^*, φ_j^* и записать выражения для $\varphi_1, \dots, \varphi_1^*, \dots, \varphi_j^*, \dots, \varphi_m$:

$$\varphi_1^* = Li/t; \quad \varphi_2^* = it/C; \quad \varphi_3 = iR; \quad \varphi_4^* = u.$$

VI. Разделить $\varphi_1, \dots, \varphi_i^*, \varphi_j^*, \dots, \varphi_m$ на какой-либо один из них и записать выражения для основных критериев подобия в одной из возможных форм записи:

$$\pi_1 = \frac{\varphi_1^*}{\varphi_4^*} = \frac{Li}{ut}; \quad \pi_2 = \frac{\varphi_2^*}{\varphi_4^*} = \frac{it}{uC}; \quad \pi_3 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4^*} = \frac{iR}{u}.$$

VII. Дополнить полученную систему основных критериев подобия критериями подобия, полученными на этапе III:

$$\pi_1 = \frac{Li}{ut}; \quad \pi_2 = \frac{it}{uC}; \quad \pi_3 = \frac{iR}{u}; \quad \pi_4 = \pi_{\text{доп}} = \omega t. \quad (1.26a)$$

VIII. Преобразовать (в случае необходимости) полученные выражения для критериев подобия в иную (более удобную по условиям конкретной задачи) форму записи посредством их перемножения, деления, возведения в степень, умножения на постоянный коэффициент, например

$$\left. \begin{aligned} \pi'_1 &= \pi_1 = \frac{Li}{ut}; \quad \pi'_2 = \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{iRuC}{uit} = \frac{RC}{t}; \\ \pi'_3 &= \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{Li u C}{ut it} = \frac{LC}{t^2}; \quad \pi'_4 = \pi_4 = \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.26b)$$

или

$$\pi''_1 = \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{L}{Rt}; \quad \pi''_2 = \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{RC}{t}; \quad \pi''_3 = \pi_3^{-1} = \frac{u}{iR}; \quad \pi''_4 = \pi_4 = \omega t. \quad (1.26b)$$

IX. На основании полученных выражений для критериев подобия записать масштабные соотношения $I_{\pi_1}, \dots, I_{\pi_{m-1}}$, воспользовавшись «симметричностью» их форм записи

$$\begin{aligned} \pi_1 = \frac{Li}{ut} \rightarrow I_{\pi_1} = \frac{m_L m_i}{m_u m_t} = 1; \quad \pi_2 = \frac{it}{uC} \rightarrow I_{\pi_2} = \frac{m_t m_t}{m_u m_C} = 1; \\ \pi_3 = \frac{iR}{u} \rightarrow I_{\pi_3} = \frac{m_i m_R}{m_u} = 1; \quad \pi_4 = \omega t \rightarrow I_{\pi_4} = m_\omega m_t = 1. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Определить критерии подобия для случая, когда имеются два тела массой M_1 и M_2 , движения которых подобны и описываются однородными уравнениями:

$$f_1 - M_1 \frac{d^2 l_1}{dt_1^2} = 0; \quad f_2 - M_2 \frac{d^2 l_2}{dt_2^2} = 0. \quad (1.27)$$

По аналогии с (1.9) — (1.23) разделив первое уравнение движения на f_1 , а второе — соответственно на f_2 , получим

$$1 - \frac{M_1}{f_1} \frac{d^2 l_1}{dt_1^2} = 0; \quad 1 - \frac{M_2}{f_2} \frac{d^2 l_2}{dt_2^2} = 0. \quad (1.27a)$$

Поскольку явления подобны, их параметры связаны соотношениями

$$M_1 = m_M M_2; \quad f_1 = m_f f_2; \quad l_1 = m_l l_2; \quad t_1 = m_t t_2.$$

Подставив эти соотношения в первое уравнение (1.27a), запишем

$$1 - \frac{m_M m_l}{m_f m_t^2} \frac{M_2}{f_2} \frac{d^2 l_2}{dt_2^2} = 0.$$

Поскольку уравнение движения первого тела однородное, то

$$m_M m_l / m_f m_t^2 = 1.$$

Заменяя масштабы отношениями сходственных параметров, получим

$$\frac{M_1 l_1 / (M_2 l_2)}{(f_1 / f_2) (t_1^2 / t_2^2)} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{M_1 l_1}{f_1 t_1^2} = \frac{M_2 l_2}{f_2 t_2^2}.$$

Обобщим полученный результат на s подобных систем:

$$\frac{M_1 l_1}{f_1 t_1^2} = \frac{M_2 l_2}{f_2 t_2^2} = \dots = \frac{M_s l_s}{f_s t_s^2}.$$

Соотношение $Ml/(ft^2)$, одинаковое для всех подобных систем, является основным критерием механического подобия:

$$\pi = Ml/(ft^2) = \text{idem.} \quad (1.28)$$

С учетом приведенного выше правила интегральных аналогов этот же результат можно получить непосредственно из (1.27) после замены d^2/dt^2 на $1/t^2$:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} \rightarrow \frac{l}{t^2} \text{ и } \frac{M_1}{f_1} \frac{d^2 l_1}{dt_1^2} \rightarrow \frac{M_1}{f_1} \frac{l_1}{t_1^2} \rightarrow \pi = \frac{Ml}{ft^2} = \text{idem.}$$

Пример 1.3. Определить критерии подобия для процесса вынужденных механических колебаний в вязкой среде закрепленного на пружине с жесткостью c груза массой M , на который действует возмущающая сила $F \sin \omega t$; при перемещении груза на расстояние l появляется сила сопротивления вязкой среды F_c , пропорциональная скорости v ($F_c = -kv$).

Дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$M \frac{d^2 l}{dt^2} + k \frac{dl}{dt} + cl = F \sin \omega t. \quad (1.29)$$

В соответствии со способом интегральных аналогов

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\varphi_2^*}{\varphi_1^*} = \frac{klt^2}{Mtl} = \frac{kt}{M}; \quad \pi_2 = \frac{\varphi_3}{\varphi_1^*} = \frac{clt^2}{Ml} = \frac{ct^2}{M}; \\ \pi_3 &= \frac{\varphi_4^*}{\varphi_1^*} = \frac{Fl^2}{Ml}; \quad \pi_4 = \pi_{\text{доп}} = \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Пример 1.4. Определить критерии подобия переходного процесса распространения волны напряжения по длинной линии при включении ее на постоянное напряжение. Рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$CL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + CR \frac{\partial u}{\partial t} + LG \frac{\partial u}{\partial t} + RG u = \frac{\partial^2 u}{\partial l^2}, \quad (1.31)$$

где C , L , R и G — соответственно емкость, индуктивность, сопротивление и проводимость на единицу длины линии; u — напряжение вдоль линии; t — время; l — длина.

В соответствии со способом интегральных аналогов

$$\begin{aligned} \pi'_1 &= \frac{\varphi_1^*}{\varphi_2^*} = \frac{CLut}{l^2 CRu} = \frac{L}{Rt}; \quad \pi'_2 = \frac{\varphi_3^*}{\varphi_2^*} = \frac{LGut}{lCRu} = \frac{LG}{CR}; \\ \pi'_3 &= \frac{\varphi_4}{\varphi_2^*} = \frac{RGut}{CRu} = \frac{G}{C}t; \quad \pi'_4 = \frac{\varphi_5^*}{\varphi_2^*} = \frac{ut}{l^2 CRu} = \frac{t}{l^2 CR} \end{aligned}$$

или окончательно

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= (\pi'_1)^{-1} = \frac{R}{L}t; \quad \pi_2 = (\pi'_2)^{-1} = CR/(LG); \\ \pi_3 &= \sqrt{\pi'_3 : \pi'_4} = l \sqrt{RG}, \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

поскольку $\pi'_3 = f(\pi'_1, \pi'_2)$ и $\pi'_4 = f(\pi'_3, \pi_3)$;

$$\pi'_3 = \frac{Gt}{C} = \frac{\pi'_2}{\pi'_1} = \frac{LGRt}{CRL} = \frac{Gt}{C};$$

$$\pi'_4 = \frac{t}{l^2 CR} \equiv \frac{\pi'_3}{\pi'_3} = \frac{Gt}{Cl^2 RG} = \frac{t}{l^2 CR}.$$

Пример 1.5. Определить критерии подобия электрической цепи с взаимной индукцией M_{12} , которая состоит из двух неподвижных относительно друг друга контуров, образованных последовательно соединенными элементами с активным сопротивлением R и индуктивностью L , причем второй контур короткозамкнут, а первый включен на постоянное напряжение u_1 . Известно, что процесс в такой цепи описывается системой уравнений

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}; \quad 0 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (1.33)$$

В соответствии со способом интегральных аналогов, приводя исходные уравнения к безразмерному виду путем деления на $i_1 R_1$ и $i_2 R_2$ соответственно, можно записать

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{u}{i_1 R_1} = \frac{i_{1\infty}}{i_1}; \quad \pi_2 = \frac{L_1}{R_1 t} = \frac{T_{L1}}{t}; \\ \pi_3 &= \frac{M_{12}}{R_1 t} \frac{i_2}{i_1} = \frac{T_{M1}}{t} \frac{i_2}{i_1}; \\ \pi_4 &= \frac{L_2}{R_2 t} = \frac{T_{L2}}{t}; \quad \pi_5 = \frac{M_{12}}{R_2 t} \frac{i_1}{i_2} = \frac{T_{M2}}{t} \frac{i_1}{i_2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

где $T_{L1} = L_1/R_1$, $T_{M1} = M_{12}/R_1$ и $T_{L2} = L_2/R_2$, $T_{M2} = M_{12}/R_2$ — индуктивные постоянные времени и постоянные времени взаимной индукции контуров 1 и 2 соответственно.

§ 1.4. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Вторая теорема подобия. Эта теорема, для которой в дальнейшем будет применяться более часто встречающееся название π -теоремы, утверждает, что полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т. е. зависимостью, связывающей безразмерные величины, определенным образом полученные из участвующих в процессе параметров. Так же как и первая, вторая теорема подобия основывается на предположении, что факт подобия между процессами известен, и устанавливает число критериев подобия и существование однозначной зависимости между ними. При этом выражения для критериев подобия могут быть получены, если известен состав параметров (факторов), участвующих в рассматриваемом процессе, но неизвестно его математическое описание. Теорема эта, однако, также как и первая, не указывает способов выявления подобия между сопоставляемыми процессами и способов реализации подобия при построении моделей.

Проводимый далее анализ и рассматриваемые примеры показывают возможность π -теоремы. Она позволяет заменять переменные, сократив их число с m размерных величин до $m - k$ безразмерных величин, и тем самым записывать уравнения процессов в критериальной форме. При этом упрощается обработка

аналитических и экспериментальных исследований, так как связи между безразмерными π -критериями подобия, как правило, выявляются проще, чем связи между обычными именованными величинами.

Методика определения критериев подобия на основе анализа размерностей. Анализ размерностей факторов, участвующих в исследуемом процессе, позволяет получить выражения для критериев подобия в наиболее общем случае, когда математическое описание этого процесса неизвестно. Прежде чем приступить к изложению методики, кратко сформулируем необходимые исходные положения.

1. Различают полные и неполные уравнения, описывающие исследуемый процесс.

Полное физическое уравнение

$$f(P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_i, \dots, P_m) = 0$$

учитывает все связи между входящими в него величинами $P_1, \dots, P_m$ и справедливо при изменении системы единиц измерения этих величин.

Неполное уравнение

$$f(P_1, P_2, P_3, K_1, \dots, K_j, \dots, K_n) = 0,$$

отражает только некоторые частные зависимости между переменными (P_1, P_2, P_3), справедливые в том случае, если переменные ($P_4, \dots, P_m$), определенные при конкретных условиях, далее полагаются постоянными применительно к некоторым частным случаям (коэффициентами $K_1, \dots, K_j, \dots, K_n$; $K_j = \text{const}$, $j = \overline{1, n}$). Неполное уравнение становится полным, если рассматривать коэффициенты K_j как величины, имеющие размерность и изменяющиеся при изменении системы единиц измерения, т. е. если раскрыть функциональные связи вида

$$K_j = f_j(P_4, \dots, P_i, \dots, P_m), \quad j = \overline{1, n}.$$

Например, уравнение переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с сопротивлением R и индуктивностью L , которая включается на постоянное напряжение u , может быть полным

$$i = \frac{u}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

или неполным

$$i = \frac{u}{R} (1 - e^{-t/T_L}),$$

где $T_L = L/R = \text{const}$ — постоянная времени цепи RL .

Напомним, что π -теорема справедлива в общем виде только для процессов, которые отражаются полными функциональными зависимостями или уравнениями, представленными в определенной системе единиц измерения; в противном случае соответствующие коэффициенты следует рассматривать как некоторые дополнительные условия, соблюдение которых обязательно.

2. *Единицей измерения* $[P]$ физической величины P является условно выбранная физическая величина p , имеющая тот же физический смысл, что и величина P . Измерение любой физической величины P сводится к сравнению ее с некоторой одноименной величиной p , при-

нятой за единицу, результат которого представляет собой отвлеченное число $\{P\}$ — отношение рассматриваемой величины к единице ее измерения: $P = \{P\} [p]$, например $10 \text{ А} = \{10\} [1 \text{ А}]$, где $[\]$ — символ размерности; $\{ \}$ — символ абсолютного численного значения (при дальнейшем изложении для простоты записи опускается).

3. *Системой единиц измерения* называется совокупность определенным образом установленных единиц измерения, которая включает в себя основные (или первичные) и производные (или вторичные) единицы измерения.

В настоящее время в качестве государственного стандарта СССР принят ГОСТ 8.417—81 «Единицы физических величин», основу которого составляет Международная система единиц СИ.

4. *Основными единицами измерения $a, b, \dots, q$ в данной системе единиц называются независимо установленные единицы измерения для нескольких произвольно выбранных разнородных физических величин.*

В системе СИ в качестве основных единиц измерения приняты единицы измерения следующих величин:

- длины l (размерность L , наименование «метр», обозначение «м»);
- массы m (размерность M , наименование «килограмм», обозначение «кг»);
- времени t (размерность T , наименование «секунда», обозначение «с»);
- силы электрического тока i (размерность I , наименование «ампер», обозначение «А»);
- термодинамической температуры Θ (размерность Θ , наименование «кельвин», обозначение «К»);
- количества вещества n (размерность N , наименование «моль», обозначение «моль»);
- силы света j (размерность J , наименование «кандела», обозначение «кд»).

5. *Производными единицами измерения* называются единицы, устанавливаемые посредством основных единиц измерения данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между рассматриваемыми физическими величинами и величинами, единицы измерения которых приняты в качестве основных.

Примерами производных единиц измерения могут служить:

- скорость v при равномерном прямолинейном движении на пути (длине) l : $v = l/t$ и, следовательно, $[v] = [l]/[t] = [L]^1 [T]^{-1}$;
- равномерное ускорение a при прямолинейном движении: $a = v/t$ и, следовательно, $[a] = [v]/[t] = [L]^1 [T]^{-2}$;
- сила F , являющаяся произведением массы тела m на сообщаемое ему этой силой ускорение a : $F = ma$ и, следовательно, $[F] = [m][a] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}$;
- работа A для случая, когда направление действующей (постоянной) силы F совпадает с направлением перемещения тела на длину l : $A = Fl$ и, следовательно $[A] = [F][l] = [M]^1 [L]^2 [T]^{-2}$.

6. *Формулой размерности (или просто размерностью) какой-либо физической величины P называется соотношение, определяющее связь между единицей измерения этой величины $[p]$ и основными единицами $[a], [b], \dots, [g]$ данной системы единиц измерения:*

$$[P] = [p] = [a]^\alpha [b]^\beta \dots [g]^\xi,$$

где $\alpha, \beta, \dots, \xi$ — действительные числа, принимающие целые либо дробные, положительные либо отрицательные или нулевые значения.

В общем случае размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степени размерностей основных единиц измерения. Размерность силы F , например, в СИ имеет вид $[F] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}$, или $[F] = [L^1 M^1 T^{-2}]$.

7. Различают физические величины однородные, одноименные и безразмерные.

Однородными физическими величинами называются величины, имеющие одинаковые размерности и одинаковый физический смысл, т. е. отличающиеся лишь значениями.

Одноименными физическими величинами называются величины, имеющие одинаковую размерность, но различный физический смысл.

Безразмерными величинами называются величины, значения которых не зависят от выбора системы единиц; отношение двух однородных величин называется *симплексом*.

Примерами однородных физических величин могут служить координаты точек тела и его линейные размеры; примерами одноименных величин — коэффициент диффузии и кинематическая вязкость, индуктивность и взаимоиндукция; примерами безразмерных величин — отношение двух одноименных или однородных величин.

8. Различают независимые параметры (параметры с независимыми размерностями) и зависимые параметры (параметры с зависимыми размерностями).

Группой независимых параметров называется такая группа параметров, в которой размерность ни одного из параметров не может быть образована из размерностей других параметров, принадлежащих той же группе.

Например, из двух групп параметров (l, m, v) и (l, t, v) параметры группы (l, m, v) являются независимыми, поскольку

$$[l] = [L], [m] = [M] \text{ и } [v] = [L^1 T^{-1}] \neq \psi([l], [m]),$$

а параметры группы (l, t, v) являются зависимыми, поскольку

$$[l] = [L], [t] = [T], \text{ но } [v] = [L^1 T^{-1}] = \psi([l], [t]).$$

Аналогично, являются независимыми параметры группы (m, v, a) , поскольку $[m] = [M]$, $[v] = [L^1 T^{-1}]$ и $[a] \neq \psi([m], [v])$, и являются зависимыми параметры группы (m, a, F) , так как $[m] = [M]$, $[a] = [L^1 T^{-2}]$, но $[F] = \psi([m], [a])$.

Существование независимых и зависимых параметров среди совокупности параметров, описывающих рассматриваемый процесс, является объективным отражением того обстоятельства, что в любом конкретном физическом процессе не все характеризующие его величины можно выбрать произвольно; например, произвольно выбрав величины для измерения тока и напряжения, уже нельзя произвольно выбрать величины, измеряющие сопротивление и мощность.

9. *Признаком независимости параметров* $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ является существование хотя бы одного отличного от нуля определителя порядка k , который образуется из элементов матрицы, составленной из показателей степеней при основных единицах измерения в формулах размерностей этих параметров.

Например, если

$$[P_1] = [L^{\lambda_1} M^{\mu_1} T^{\tau_1}], [P_2] = [L^{\lambda_2} M^{\mu_2} T^{\tau_2}], [P_3] = [L^{\lambda_3} M^{\mu_3} T^{\tau_3}],$$

то для независимости группы параметров P_1 , P_2 и P_3 необходимо неравенство нулю определителя

$$D_* = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \tau_3 \end{vmatrix}, \quad .$$

поскольку $[L]^{\lambda_i}$, $[M]^{\mu_i}$, $[T]^{\tau_i}$, $i = 1, 2, 3$ и $[P_1]$, $[P_2]$ и $[P_3]$ будут единственным образом связаны друг с другом (а следовательно, и размерность любого параметра не может быть получена как функция размерностей остальных параметров) только в том случае, когда будет иметь единственное решение система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\lg [P_1] = \lambda_1 \lg [L] + \mu_1 \lg [M] + \tau_1 \lg [T];$$

$$\lg [P_2] = \lambda_2 \lg [L] + \mu_2 \lg [M] + \tau_2 \lg [T];$$

$$\lg [P_3] = \lambda_3 \lg [L] + \mu_3 \lg [M] + \tau_3 \lg [T],$$

в которой $\lambda_1 - \lambda_3$, $\mu_1 - \mu_3$, $\tau_1 - \tau_3$ рассматриваются как коэффициенты при неизвестных $[L]$, $[M]$, $[T]$.

10. Для физического процесса, полностью характеризуемого m размерными параметрами $P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_s, \dots, P_m$, среди которых k параметров $P_1, \dots, P_k$ являются независимыми, существует $m - k$ критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$. Число k равно рангу матрицы, образованной показателями степеней при основных единицах измерения $P_1, \dots, P_m$,

Если, например, основными единицами измерения являются L, M, T, I , то для критерия подобия π_s , который по определению имеет вид безразмерного степенного комплекса размерных параметров

$$\pi_s = P_1^{z_1} \dots P_i^{z_i} \dots P_m^{z_m}$$

(часть из действительных чисел z_i принимает нулевые значения), в соответствии с формулами размерностей для P_i ($i = \overline{1, m}$) можно записать, учитывая безразмерность π_s ($[\pi_s] = 1$):

$$[L^{\lambda_1} M^{\mu_1} T^{\tau_1} I^{j_1}]^{z_1} \times \dots \times [L^{\lambda_m} M^{\mu_m} T^{\tau_m} I^{j_m}]^{z_m}.$$

В этом случае число различающихся между собой критериев подобия $s = m - k$, поскольку после логарифмирования последнего соотношения и группировки в отдельные уравнения однородных членов — показателей степеней при одноименных единицах измерений L, M, T и I можно записать соответственно

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_m z_m = 0; \mu_1 z_1 + \dots + \mu_m z_m = 0;$$

$$\tau_1 z_1 + \dots + \tau_m z_m = 0; j_1 z_1 + \dots + j_m z_m = 0.$$

Система из четырех уравнений с m неизвестными имеет $(m - k)$ независимых решений, единственным образом связывающих $[L]$, $[M]$, $[T]$, $[I]$ и $[P_1]$, $[P_2]$, ..., $[P_m]$, где k — ранг матрицы, составленной из коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ при неизвестных $z_1, \dots, z_m$.

Рассмотрим методику определения критериев подобия путем анализа размерностей участвующих в процессе факторов, общие основания которой приведены в § 1.5. Проиллюстрируем изложение примером определения критериев подобия переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , которая включа-

ется на напряжение u , меняющееся во времени по синусоидальному закону с угловой скоростью ω .

Методика определения критериев подобия включает в себя шесть этапов:

I. Выявление параметров $P_1, \dots, P_i, \dots, P_m$, характеризующих рассматриваемый процесс. Соотношение, отражающее существенные связи между параметрами процесса и элементов системы, в которой этот процесс протекает, представляется полной функциональной зависимостью вида

$$f(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m) = 0$$

или для примера ($m = 7$)

$$f(i, t, R, L, C, u, \omega) = 0.$$

В общем случае задача выявления параметров $P_1, \dots, P_m$, характеризующих исследуемый процесс, решается на основании анализа физического существа этого процесса и специфики постановки задачи исследования с привлечением всей априорной информации, а также, при необходимости, методов факторного планирования эксперимента (отсеивающих экспериментов).

В каждом конкретном случае методика выявления искомых параметров в значительной мере индивидуальна, однако полученный результат всегда представляет собой некоторую первичную описательную модель процесса, в которой уже разделены факторы — параметры и связи, — существенные и несущественные в данной постановке задачи. От правильности построения этой модели (содержательного описания объекта исследования) решающим образом зависит корректность получаемых далее результатов.

II. Составление полной матрицы размерностей $||A||$ для параметров $P_1, \dots, P_m$. Для составления полной матрицы размерностей первоначально записываются размерности всех параметров $P_1, \dots, P_m$ в выбранной системе основных единиц измерения $[a, b, \dots, q]$ (для примера — в системе единиц СИ $[L, M, T, I]$):

$$\begin{array}{ll} [P_1] = [a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots q^{\xi_1}]; & [i] = [L^0 M^0 T^0 I^1]; \\ \dots & [u] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]; \\ [P_i] = [a^{\alpha_i} b^{\beta_i} \dots q^{\xi_i}]; & [R] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}]; \\ \dots & \text{или } [L] = [L^2 M^1 T^{-2} I^{-2}]; \\ [P_s] = [a^{\alpha_s} b^{\beta_s} \dots q^{\xi_s}]; & [C] = [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]; \\ \dots & [t] = [L^0 M^0 T^1 I^0]; \\ [P_m] = [a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \dots q^{\xi_m}]; & [\omega] = [L^0 M^0 T^{-1} I^0]. \end{array}$$

Количество строк полной матрицы размерностей $||A||$ соответствует общему числу параметров m , а количество столбцов — числу основных единиц измерения q ; строки матрицы образуются показателями степеней при основных единицах измерения параметров $P_1, \dots, P_m$ — значениями $\alpha_i, \beta_i, \dots, \xi_i$ ($i = \overline{1, m}$).

Полная матрица размерностей $||A||$ размером $m \times q$ (в примере размером 7×4 , так как $m = 7, q = 4$) имеет вид

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i & \beta_i & \dots & \xi_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_s & \beta_s & \dots & \xi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m & \beta_m & \dots & \xi_m \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow [P_1] \\ \\ \rightarrow [P_i] \\ \\ \rightarrow [P_s] \\ \\ \rightarrow [P_m] \end{array} \quad \text{или} \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow [i] \\ \rightarrow [u] \\ \rightarrow [R] \\ \rightarrow [L] \\ \rightarrow [C] \\ \rightarrow [t] \\ \rightarrow [\omega] \end{array}$$

где «→» — символ соответствия.

III. Определение числа независимых параметров и числа критериев подобия. Число k независимых параметров равно рангу k полной матрицы размерностей $\|A\|$, а число критериев подобия K_π — разности между общим числом параметров m и числом независимых параметров k .

Ранг матрицы $\|A\|$ — это наибольший порядок отличного от нуля определителя, который составлен из элементов строк $\alpha_i, \beta_i, \dots, \xi_i$ ($i = 1, m$) данной матрицы (с сохранением порядка их следования); определитель — это квадратная матрица, в которой количество строк равно числу столбцов.

Очевидно, что число k независимых параметров не может превышать числа q основных единиц измерения и, следовательно, всегда ранг матрицы размерностей $\|A\|$ не больше q ($k \leq q$). В связи с этим при определении числа k возможны следующие варианты.

А. Существует хотя бы один определитель порядка $k = q$ среди всех возможных определителей порядка q , которые могут быть образованы из элементов матрицы $\|A\|$; общее число N_q определителей порядка q равно числу сочетаний из m по q (в примере $m = 7, q = 4$):

$$N_q = C_m^q = \frac{m!}{q!(m-q)!}, \quad \text{или} \quad N_q = C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35.$$

Если в процессе анализа на неравенство нулю определителей порядка q найдется хотя бы один определитель, отличный от нуля, то ранг матрицы размерностей $\|A\|$ и соответственно число независимых параметров $k = q$. Однако в данном примере все $N_q = 35$ определителей четвертого порядка равны нулю.

Б. Все N_q определителей q -го порядка равны нулю (что и имеет место в примере). В этом случае ранг матрицы $\|A\|$ будет $k < q$, и необходимо проанализировать на неравенство нулю все определители порядка $q - 1$, которые могут быть составлены из элементов частичных матриц $\|B_i\|$. Частичные матрицы $\|B_i\|$ формируются из полной матрицы $\|A\|$ таким образом, что каждая имеет $m_1 = q - 1$ строк и q столбцов. Полное число N_B возможных частичных матриц $\|B_i\|$ равно числу сочетаний из m строк матрицы $\|A\|$ по m_1 строк матрицы $\|B_i\|$; число N_{q-1} анализируемых определителей порядка $q - 1$ для каждой из частичных матриц $\|B_i\|$ равно числу сочетаний из q столбцов по $m_1 = q - 1$ строк:

$$N_B = C_m^{q-1} = \frac{m!}{(q-1)!(m-q+1)!}; \quad N_{q-1} = C_q^{q-1} = q.$$

Если для какой-либо частичной матрицы $||B_i^*||$ существует хотя бы один определитель порядка $q - 1$, отличный от нуля, то ранг полной матрицы размерностей $||A||$ и соответственно число независимых параметров $k = q - 1$. В рассматриваемом примере среди определителей третьего порядка ($q - 1 = 3$), составленных из столбцов частичных матриц $||B_i||$ размером 3×4 , имеются определители, не равные нулю. Например, у частичной матрицы $||B_i^*||$, составленной из второй, третьей и пятой строк полной матрицы $||A||$

$$||B_i^*|| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow [u] \\ \rightarrow [R] \\ \rightarrow [C] \end{matrix}$$

два из четырех возможных определителей третьего порядка не равны нулю и, следовательно, ранг полной матрицы $||A||$ равен трем, а поэтому число независимых параметров $k = 3$, число критериев подобия $K_{\pi} = m - k = 7 - 3 = 4$.

В. Если все определители порядка $q - 1$ равны нулю, то необходимо продолжить анализ определителей порядка $q - 2$, образовав для этого соответствующие частичные матрицы $||C_j||$ и т. д.

Методику определения числа независимых параметров можно несколько упростить, если для сокращения числа определителей, проверяемых на равенство нулю, выполнить предварительный анализ размерностей параметров $P_1, \dots, P_m$.

Размерности независимых параметров не могут быть представлены как комбинации из формул размерностей остальных параметров. Поэтому если удастся выявить такие *параметры, размерности которых являются функцией размерностей* (произведением, отношением и т.п.) *других параметров*, то эти параметры *могут не учитываться при определении ранга матрицы $||A||$* : анализу подлежит уже сокращенная матрица размерностей $||A'||$, ранг которой и будет искомым числом k .

В примере группа параметров (i, R, u) включает в себя зависимые параметры, поскольку

$$\begin{aligned} [u] &= [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}] = \psi([i], [R]) = \\ &= [L^0 M^0 T^0 I^1] \times [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}] = [i] \times [R], \end{aligned}$$

и, следовательно, при определении ранга матрицы $||A||$ одна из строк, соответствующая либо $[u]$, либо $[i]$, либо $[R]$, может быть исключена из состава $||A||$; аналогично имеют зависимые размерности параметры, входящие в состав группы (ω, t) и группы (R, C, t) и т. д.

В общем случае *признаком зависимости параметров является пропорциональность соответствующих строк матрицы $||A||$ либо возможность представления какой-либо из ее строк в виде линейной комбинации других строк*; в примере пропорциональны две последние строки, а первая строка является разностью второй и третьей строк, что и соответствует группам зависимых параметров (ω, t) и (i, u, R) .

С учетом сказанного в большинстве практических случаев целесообразна следующая последовательность действий:

1. При наличии в матрице $||A||$ одинаковых строк исключить их из состава матрицы $||A||$, оставив в $||A||$ только одну такую строку (в примере одинаковые строки отсутствуют).

2. При наличии в матрице $||A||$ таких групп строк, в которых либо обе строки данной группы пропорциональны между собой, либо одна из строк является суммой (разностью) или иной линейной комбинацией остальных (двух или более) строк данной группы, исключить из состава матрицы $||A||$ одну из строк соответствующей группы.

В рассматриваемом примере пропорциональны шестая и седьмая строки, шестая строка является суммой третьей и пятой строк, первая строка — разностью второй и третьей; это позволяет при определении ранга полной матрицы размерностей $||A||$ исключить из состава $||A||$, например, седьмую, шестую и первую строки (либо седьмую, пятую и вторую и т.п.).

3. При наличии в полученной после сокращений матрице $||A'||$ таких групп столбцов, в которых либо оба столбца данной группы пропорциональны, либо один из столбцов является линейной комбинацией остальных столбцов данной группы, исключить из состава $||A'||$ один из столбцов соответствующей группы.

В примере после выполнения операций по исключению указанных строк первый и второй столбцы пропорциональны либо первый столбец можно рассматривать как линейную комбинацию (разность) четвертого и третьего столбцов, что позволяет исключить первый столбец из состава $||A'||$.

Применительно к примеру последовательность перечисленных операций может быть представлена следующим образом:

$$||A|| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow [i] \\ \rightarrow [u] \\ \rightarrow [R] \\ \rightarrow [L] \\ \rightarrow [C] \\ \rightarrow [t] \\ \rightarrow [\omega] \end{array} \rightarrow \left\| \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right\| = ||A'||;$$

$$||A'|| = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cccc} * & 1 & -3 & -1 \\ * & 1 & -3 & -2 \\ * & 1 & -2 & -2 \\ * & -1 & 4 & 2 \end{array} \right\| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{array} \right\| = ||A^*||.$$

Разумеется, из состава $||A||$ могли бы быть исключены и другие строки и столбцы, при этом матрица $||A^*||$ имела бы иной вид.

4. В сокращенной матрице $||A^*||$ произвольно выбрать определитель второго порядка D_2 , отличный от нуля. Далее образовать определители третьего порядка D_3 , присоединяя к D_2 всеми возможными способами соседние строки по горизонтали и столбцы по вертикали; максимальное число определителей третьего порядка D_3 равно четырем:

$$D'_3 = D_2 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}, \quad D''_3 = \begin{matrix} \text{---} \\ D_2, \end{matrix} \quad D'''_3 = \begin{matrix} D_2, \\ \text{---} \end{matrix}, \quad D''''_3 = \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} D_2.$$

Полученные определители $D'_3 - D''_3$ анализируются на неравенство нулю. При этом возможны следующие случаи:

— все полученные определители третьего порядка $D'_3 - D''_3$ равны нулю; это означает, что искомый ранг $||A||$ равен двум;

— среди полученных определителей третьего порядка имеется хотя бы один определитель, отличный от нуля, и дальнейшее повышение порядка определителя невозможно; это означает, что искомый ранг $||A||$ равен трем;

— среди полученных определителей третьего порядка имеется по крайней мере один определитель, отличный от нуля, и дальнейшее повышение порядка D_3 возможно аналогичным способом: в этом случае необходимо проанализировать на неравенство нулю все получаемые на основании D_3 определители четвертого порядка $D'_4 - D''_4$; если эти определители равны нулю, то искомый ранг $||A||$ равен трем, в противном случае повышение порядка определителей и анализ их на неравенство нулю повторяются необходимое число раз, а рангом $||A||$ будет являться порядок k того определителя D_k , который предшествует равным нулю определителям D_{k+1} порядка $k + 1$.

В частности, если в качестве D_2 выбрать определитель, образованный пересечением второго и третьего столбцов со второй и четвертой строкой, то из двух D_3 , полученных путем «окаймления», $D'_3 \neq 0$, а $D''_3 = 0$, и поскольку дальнейшее повышение порядка определителя невозможно, то искомый ранг $||A||$ равен трем ($k = 3$):

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad D'_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad D''_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Полученный результат соответствует группе (u, R, C) независимых параметров.

IV. Определение конкретного состава группы независимых параметров $P_1, \dots, P_k$ и числа форм записи критериев подобия F_{π} . В состав группы из k независимых параметров входят такие параметры, для частичной матрицы размерностей которых размером $k \times q$ существует хотя бы один определитель порядка k , составленный из элементов этой матрицы и отличный от нуля. В данном примере такую группу образуют параметры u, R, C , которым соответствует частичная матрица размерностей $||B_i^*||$ (см. п. III Б).

При образовании состава группы независимых параметров целесообразно воспользоваться промежуточными результатами, получаемыми

ми при определении ранга матрицы $||A||$: любой из определителей порядка k , отличный от нуля, позволяет «автоматически» найти одну из таких групп, если образующие его элементы соотносить с соответствующими им параметрами (в примере определитель D_3'' «автоматически» позволяет выявить группу независимых параметров u, R, C). Однако при использовании указанных промежуточных результатов выявляют-ся не все, а лишь некоторые группы независимых параметров.

В общем случае для определения всех групп независимых параметров необходимо получить и проанализировать все возможные комбинации из m параметров по k , общее число которых

$$C_m^k = \frac{m!}{k! (m-k)!}.$$

Процедура их получения включает в себя последовательность из семи операций:

1. Составить из всех m параметров квадратную матрицу S (размером $m \times m$) с одинаковыми строками:

$$S = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \end{vmatrix}.$$

2. Преобразовать матрицу S в матрицу S' размером $m \times (m-1)$ путем вычеркивания параметров $P_1, \dots, P_m$, стоящих на побочной диагонали матрицы S :

$$S' = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \end{vmatrix}.$$

Строки матрицы S' дают все сочетания из m параметров по $m-1$.

3. Если $k = m-1$, то следует выписать комбинации параметров из соответствующих строк матрицы S' .

4. Если $k < m-1$, то каждую строку матрицы S' превратить в квадратную матрицу Q [размером $(m-1) \times (m-1)$] путем повторения взятой строки $m-1$ раз. Например, матрицу Q_1 — путем повторения $m-1$ раз первой строки матрицы S' . Общее количество матриц Q , полученных из строк матрицы S' , равно m ;

$$Q_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \end{vmatrix};$$

.....

$$Q_m = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \end{vmatrix}.$$

5. Преобразовать каждую из матриц $Q_1, \dots, Q_m$ соответственно в матрицы $Q'_1, \dots, Q'_m$ [размером $(m-1) \times (m-2)$] путем вычеркивания параметров, стоящих на побочных диагоналях матриц $Q_1, \dots, Q_m$. Например, Q'_1 получается из Q_1 путем вычеркивания стоящих на побочной диагонали параметров $P_1, \dots, P_{m-1}$:

$$Q'_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$Q'_m = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{m-2} & P_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_2 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \\ P_3 & \dots & P_{m-2} & P_{m-1} & P_m \end{vmatrix}.$$

Общее число строк всех m матриц $Q'_1, \dots, Q'_m$

$$C_\Sigma = m \times (m-1).$$

Строки матриц $Q'_1, \dots, Q'_m$ образуют все сочетания из m элементов по $m-2$, если в каждой из матриц $Q'_2, \dots, Q'_m$ исключить те строки, которые встречаются в предыдущих матрицах Q' . Общее число строк, которое нужно исключить,

$$C_\Sigma - C_m^{m-2} = m \times (m-1) - \frac{m!}{(m-2)! (m-m+2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

6. Если $k = m-2$, то следует выписать комбинации параметров, записанных в оставшихся строках матриц $Q'_1, \dots, Q'_m$.

7. Если $k < m-2$, то необходимо продолжить составление матриц типа Q из оставшихся строк матриц Q' , вычеркнуть элементы их, стоящие на побочных диагоналях, и т. д.

Аналогичные операции проводятся до тех пор, пока после преобразования не будут получены матрицы типа Q' размером $(k+1) \times k$. После исключения повторяющихся строк выписать искомые комбинации k параметров.

Общее число возможных форм записи критериев подобия F_π равно:

— числу отличных от нуля определителей порядка q , если ранг полной матрицы размерностей $||A||$ равен $k = q$;

— числу комбинаций из m параметров по k , у которых ранг частичной матрицы размером $k \times q$ составляет k , если ранг полной матрицы размерностей $||A||$ равен $k < q$.

В данном примере имеется 35 частичных матриц ($C_3^4 = 35$) размером 3×4 , каждая из которых соответствует комбинации трех параметров.

Из них 22 матрицы имеют ранг, равный трем, т. е. существуют 22 комбинации независимых параметров и, следовательно, для четырех критериев подобия ($K_{\pi} = 4$) возможны 22 формы записи ($F_{\pi} = 22$); для остальных комбинаций ранг частичных матриц меньше трех, поскольку все определители третьего порядка, составленные из столбцов любой матрицы, равны нулю (например, комбинация параметров i, u, R).

V. Определение выражений для критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$ в какой-либо форме записи. Для определения выражений критериев подобия в исходной зависимости

$$f(P_1, \dots, P_m) = 0$$

параметры $P_1, \dots, P_m$ перегруппировываются и эта зависимость представляется в виде

$$f(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k; P_{k+1}, \dots, P_s, \dots, P_m) = 0,$$

где $P_1, \dots, P_i, \dots, P_k$ — независимые параметры в какой-либо из комбинаций; $P_{k+1}, \dots, P_s, \dots, P_m$ — остальные параметры с зависимыми размерностями.

Для группы независимых параметров u, R, C примера

$$f(u, R, C; i, L, t, \omega) = 0.$$

Исходные формулы для определения выражений критериев подобия, общее число которых $K_{\pi} = m - k$ (в примере $K_{\pi} = 4$), имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_k^{z_1}}; & \pi_1 &= \frac{i}{u^{x_1} R^{y_1} C^{z_1}}; \\ &\dots & & \\ \pi_i &= \frac{P_s}{P_1^{x_i} \dots P_k^{z_i}}; & \text{или} \quad \pi &= \frac{L}{u^{x_2} R^{y_2} C^{z_2}}; \\ &\dots & & \\ \pi_{m-k} &= \frac{P_m}{P_1^{x_{m-k}} \dots P_k^{z_{m-k}}} & \pi_3 &= \frac{t}{u^{x_3} R^{y_3} C^{z_3}}; \\ & & \pi_4 &= \frac{\omega}{u^{x_4} R^{y_4} C^{z_4}}. \end{aligned}$$

Для определения конкретного вида выражений критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$ необходимо найти значения показателей степеней $x_1, \dots, x_{m-k}$ и $z_1, \dots, z_{m-k}$ при независимых параметрах $P_1, \dots, P_k$ (в примере $x_1 - x_4, z_1 - z_4$ при параметрах u, R, C).

Учитывая, что критерии подобия — безразмерные величины, и, следовательно, размерности числителей и знаменателей в выражениях для критериев подобия должны быть равны, можно записать для π_s :

$$[P_s] = [P_1]^{x_i} \dots [P_k]^{z_i}$$

или

$$[a^{\alpha_s} b^{\beta_s} \dots q^{\xi_s}] = [a^{\alpha_i} b^{\beta_i} \dots q^{\xi_i}]^{x_i} \dots [a^{\alpha_k} b^{\beta_k} \dots q^{\xi_k}]^{z_i}.$$

Эти соотношения для π_1 примут вид

$$[i] = [u]^{x_1} [R]^{y_1} [C]^{z_1}$$

или

$$[L^0 M^0 T^0 I^1] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]^{x_1} [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}]^{y_1} \times [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]^{z_1}.$$

Приравнивание показателей степеней при одноименных единицах измерения $a, b, \dots, q$ в левой части выражения для π_s и в правой его части, записанной в виде произведения формул размерностей независимых параметров, дает систему из q уравнений с $k=q$ неизвестными $x_i, \dots, z_i$ при $a, b, \dots, q$ соответственно

$$\alpha_s = \alpha_1 x_i + \dots + \alpha_k z_i;$$

$$\beta_s = \beta_1 x_i + \dots + \beta_k z_i;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi_s = \xi_1 x_i + \dots + \xi_k z_i.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$x_i = D_1/D, \dots, z_i = D_k/D,$$

где D — определитель системы, образованный коэффициентами при неизвестных $x_i, \dots, z_i$ в правых частях уравнений системы; $D_1, \dots, D_k$ — определители, образованные из D заменой соответствующего столбца 1, $\dots, k$ при искомой неизвестной $x_i, \dots, z_i$ столбцом, составленным из свободных членов, записанных в левых частях уравнений системы.

Применительно к примеру система уравнений при L, M, T и I имеет вид:

$$0 = 2x_1 + 2y_1 - 2z_1; \quad 0 = x_1 + y_1 - z_1;$$

$$0 = -3x_1 - 3y_1 + 4z_1; \quad 1 = -x_1 - 2y_1 + 2z_1.$$

Учитывая тождественность первого и второго уравнений и рассматривая систему из трех последних уравнений с тремя неизвестными x_1, y_1, z_1 , можно записать:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $D = 1, D_1 = 1, D_2 = -1, D_3 = 0$, значения искомых неизвестных: $x_1 = 1, y_1 = -1, z_1 = 0$.

В относительно несложных случаях, к которым относится данный пример, искомые неизвестные могут быть также найдены и непосредственно из исходной системы уравнений: суммирование первого и последнего уравнений дает $x_1 = 1$, суммирование первых трех уравнений дает $z_1 = 0$, после чего из первого уравнения $y_1 = -1$.

Аналогично (любым из рассмотренных двух способов) определяются остальные неизвестные примера:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0;$$

$$y_1 = -1; \quad y_2 = 2; \quad y_3 = 1; \quad y_4 = -1;$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = 1; \quad z_4 = -1.$$

В общем случае искомые неизвестные $x_1 - x_k, \dots, z_1 - z_k$ могут быть найдены из выражений

$$x_1 = \frac{D_{1, k+1}}{D}, \dots, x_s = \frac{D_{t, s}}{D}, \dots, x_{m-k} = \frac{D_{m-k, m}}{D} \text{ и т. д.,}$$

где D — определитель, образованный из матрицы размерностей независимых параметров $P_1, \dots, P_k$; $D_{i, s}$ — определитель, полученный из D заменой i -й строки на строку, соответствующую формуле размерностей s -го параметра.

При этом необходимо выполнить определенную последовательность операций:

1. Составить матрицу размерностей $\|D_k^*\|$ группы независимых параметров $P_1, \dots, P_k$ размером $k \times q$ ($k \leq q$).

2. Образовать матрицу $\|D_{i, s}^*\|$. Для этого строка, соответствующая искомой неизвестной (например x_i), заменяется строкой, соответствующей размерности параметра, находящегося в числителе выражения для π_s (в данном случае P_s).

3. Из столбцов матрицы $\|D_k^*\|$ составить любой отличный от нуля определитель D_k порядка k ($k \leq q$); из тех же столбцов формируется определитель $D_{i, s}$.

4. Вычислить искомую неизвестную $x_i = D_{i, s}/D$. Процесс определения показателей степеней в выражениях для критериев подобия может быть формализован на основе рассмотренных операций и полученный алгоритм запрограммирован для автоматизации расчетов с помощью ЦВМ.

Один из возможных вариантов структурной схемы программы представлен на рис 1.4. В качестве исходных данных используется полная матрица размерностей $\|A\|$ размером $m \times q$. Счет начинается с вычисления определителей q -го порядка (D^q). Практически достаточной является программа, составленная для $q = 6$ и $m = 15$.

После определения значений $x_1, \dots, x_{m-k}, \dots, z_1, \dots, z_{m-k}$ выражения для критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$ записываются как отношения каждого из параметров $P_{k+1}, \dots, P_m$ к произведениям независимых параметров $P_1, \dots, P_k$ в соответствующих степенях $x_1, \dots, x_{m-k}, \dots, z_1, \dots, z_{m-k}$; полученные выражения для критериев подобия при необходимости могут быть преобразованы к более удобному формам записи путем перемножения, деления и т. п.

Применительно к примеру окончательные выражения для критериев подобия в форме записи, соответствующей независимым переменным u, R, C , будут иметь вид

$$\pi_1 = \frac{i}{uR^{-1}}; \quad \pi_2 = \frac{L}{R^2 C}; \quad \pi_3 = \frac{t}{RC}; \quad \pi_4 = \frac{\omega}{R^{-1} C^{-1}}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \pi_1' &= \pi_1^{-1} = \frac{u}{iR}; & \pi_2' &= \pi_2 \pi_3^{-1} = \frac{L}{Rt}; \\ \pi_3' &= \pi_3^{-1} = \frac{RC}{t}; & \pi_4' &= \pi_3 \pi_4 = \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Аналогично можно определить выражения для критериев подобия и в любой другой форме записи, соответствующей иному составу группы независимых параметров $P_1, \dots, P_k$.

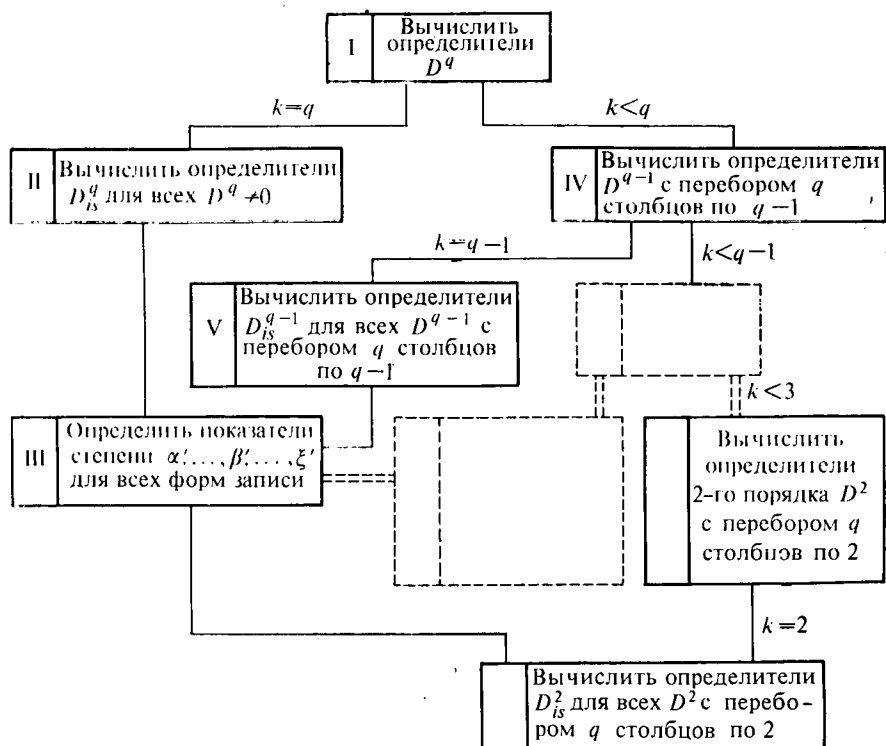


Рис. 1.4

В примере возможна еще 21 форма записи ($F_\pi = 22$) критериев подобия; например;

— при независимых параметрах u, R, L

$$\pi_1 = \frac{t}{uR^{-1}}; \quad \pi_2 = \frac{C}{R^{-2}L}; \quad \pi_3 = \frac{t}{R^{-1}L}; \quad \pi_4 = \frac{\omega}{RL^{-1}};$$

— при независимых параметрах i, C, t

$$\pi_1 = \frac{u}{iC^{-1}t}; \quad \pi_2 = \frac{R}{C^{-1}t}; \quad \pi_3 = \frac{L}{C^{-1}t^2}; \quad \pi_4 = \frac{\omega}{t^{-1}};$$

— при независимых параметрах i, L, ω

$$\pi_1 = \frac{u}{iL\omega}; \quad \pi_2 = \frac{R}{L\omega}; \quad \pi_3 = \frac{C}{L^{-1}\omega^{-2}}; \quad \pi_4 = \frac{t}{\omega^{-1}}.$$

VI. Представление описания исследуемого процесса в виде критериального уравнения. Исследуемый процесс представляется функциональной зависимостью между найденными критериями подобия

$$\psi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t, \dots, \pi_{m-k}) = 0.$$

Учитывая, что один из критериев подобия (определяемый) обязательно является функцией остальных (определяющих или независимых) критериев подобия и, следовательно, автоматически выполняется при соблюдении независимых критериев подобия, можно окончательно записать критериальное уравнение в виде

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_{m-k}),$$

уменьшив таким образом число величин, определяющих характер исследуемого процесса, с m до $(m - k - 1)$.

В данном примере $m = 7$, $m - k - 1 = 3$, а критериальное уравнение имеет вид

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4),$$

где для группы независимых параметров u, R, C будет $\pi_1 = i/(uR^{-1})$.

Пример 1.6. Определить критерии подобия переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с сопротивлением R и индуктивностью L , которая включается на постоянное напряжение u .

Рассматриваемый процесс характеризуется параметрами i, u, R, L, t ($m = 5$), формулы размерностей которых в СИ ($q = 4$) имеют вид

$$[i] = [L^0 M^0 T^0 I^1]; [u] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}];$$

$$[R] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}]; [L] = [L^2 M^1 T^{-2} I^{-2}]; [t] = [L^0 M^0 T^1 I^0].$$

Составим матрицу размерностей

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из пяти строк данной матрицы можно составить пять определителей четвертого порядка, так как $C_5^4 = 5$. Но все они оказываются равными нулю. Отсюда следует, что число независимых между собой единиц измерения, а значит, и параметров меньше четырех, т. е. $k < 4$. Для определения числа k необходимо последовательно проанализировать на равенство нулю определители, порядок которых меньше q , начиная с $(q-1)$ -го. В соответствии с этим рассмотрим в начале определители третьего порядка. Всего можно составить 40 таких определителей (число сочетаний из пяти строк по три, умноженное на число сочетаний из четырех столбцов по три: $C_5^3 \cdot C_4^3 = 40$). Можно сократить число анализируемых определителей третьего порядка, исключив из рассмотрения определители, содержащие одновременно размерности $[i]$, $[u]$, $[R]$, а также $[R]$, $[L]$, $[t]$. Подобных определителей будет восемь. Легко проверить, что среди остальных 32 определителей есть определители, не равные нулю. Например, из четырех определителей, которые могут быть составлены из четырех столбцов второй, третьей и четвертой строк матрицы, два определителя не равны нулю. Поскольку существуют определители третьего порядка, не равные нулю, то из пяти параметров можно выбрать три независимых, т. е. $k = 3$; исследуемый процесс характеризуется двумя критериями подобия ($m - k = 2$), которые могут быть найдены посредством соответствующих операций.

Общее число комбинаций из пяти параметров по три равно 10, но две из них — комбинации зависимых параметров (i, u, R и R, L, t). Таким образом, можно иметь восемь комбинаций* независимых параметров, что соответствует восьми

* Следует заметить, что поскольку $q = 4$, то каждая из этих комбинаций дает по четыре определителя, два из которых не равны нулю. Это, собственно, и позволяет считать участвующие параметры независимыми. Таким образом, из сорока определителей третьего порядка лишь 16 не равны нулю.

формам записи двух критериев подобия. Одна из этих форм записи при выборе в качестве независимых величин l , R и t имеет вид

$$\pi_1 = u / (lR), \pi_2 = L / (Rt). \quad (1.36)$$

Пример 1.7. Определить критерии подобия для процесса вынужденных механических колебаний в вязкой среде: груз массой M_J колеблется под действием возмущающей силы $F_B = F \sin \omega t$ на пружине жесткостью c ; при перемещении груза на расстояние l в вязкой среде появляется сила сопротивления F_c , пропорциональная скорости v ($F_c = -kv$).

Участвующих величин будет семь ($m = 7$), а функциональная зависимость, подлежащая исследованию, имеет вид

$$\varphi(M_J, \omega, F, l, k, c, t) = 0.$$

Выберем три ($k = 3$) независимых параметра M_J , ω , F применительно к системе основных единиц измерений LMT ($q = k = 3$). Тогда

$$\begin{aligned} [M_J] &= [M] [L]^0 [T]^0; & [l] &= [M]^0 [L] [T]^0; \\ [\omega] &= [M]^0 [L]^0 [T]^{-1}; & [k] &= [M] [L]^0 [T]^{-1}; \\ [F] &= [M] [L] [T]^{-2}; & [c] &= [M] [L]^0 [T]^{-2}; \\ & & [t] &= [M]^0 [L]^0 [T]. \end{aligned}$$

Проверим правильность сделанного выбора независимых параметров, составив матрицу размерностей

$$D_{1-3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

т. е. значение $k = 3$ выбрано правильно и величины M_J , ω , F действительно независимы.

Нахождение критериев подобия заключается в определении значений показателей степеней $\alpha'_s, \dots, \gamma'_s, \dots, \xi'_s$ в выражениях для критериев подобия вида:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{[l]}{[M_J]^{\alpha'_l} [\omega]^{\beta'_l} [F]^{\xi'_l}}; & \pi_2 &= \frac{[k]}{[M_J]^{\alpha'_k} [\omega]^{\beta'_k} [F]^{\xi'_k}}; \\ \pi_3 &= \frac{[c]}{[M_J]^{\alpha'_c} [\omega]^{\beta'_c} [F]^{\xi'_c}}; & \pi_4 &= \frac{[t]}{[M_J]^{\alpha'_t} [\omega]^{\beta'_t} [F]^{\xi'_t}}. \end{aligned}$$

Определить значения $\alpha'_s, \beta'_s, \xi'_s$ можно двумя путями:

1. В простых случаях, к которым относится рассматриваемый пример, удобен путь, не требующий операций с определителями. Выражая все величины, входящие в критерии подобия, через основные единицы измерения, найдем из простейших уравнений показатели степеней $\alpha', \dots, \xi'$.

Приравнявая показатели степеней при одноименных основных единицах измерения в числителе и знаменателе, получим

$$\pi_1 = \frac{[L]}{\{[M]^{\alpha'_l} [T]^{-\beta'_l} [M]^{\xi'_l} [L]^{\xi'_l} [T]^{-2\xi'_l}\}};$$

$$1 = \xi'_l \text{ при } [L];$$

$$0 = \alpha'_l + 1; \quad \alpha'_l = -1 \text{ при } [M];$$

$$0 = -\beta'_l - 2; \quad \beta'_l = -2 \text{ при } [T].$$

Аналогично

$$\pi_2 = [M] [T]^{-1} / \{ [M]^{\alpha'_k} [T]^{-\beta'_k} [M]^{\xi'_k} [L]^{\xi'_k} [T]^{-2\xi'_k} \}$$

и далее, приравнявая показатели при $[L]$, имеем $\xi'_k = 0$; следовательно,

$$\alpha'_k + \xi'_k = 1; \alpha'_k = 1 \text{ и } -\beta'_k - 2\xi'_k = -1; \beta'_k = 1.$$

Точно так же для π_3 и π_4 соответственно

$$\xi'_c = 0, -\beta'_c - 2\xi'_c = -2; \beta'_c = 2; \alpha'_c + \xi'_c = 1; \alpha'_c = 1;$$

$$\xi'_t = 0; \alpha'_t + \xi'_t = 0; \alpha'_t = 0; -\beta'_t - 2\xi'_t = 1; \beta'_t = -1;$$

2. В общем случае необходимо составить определитель D порядка k из размерностей параметров, участвующих в процессе, выявив группы независимых параметров. Найти определители D_{js} , а затем определить

$$\alpha'_s = D_{1s}/D; \dots; \xi'_s = D_{ks}/D.$$

После проведения указанных операций найдем значения (для группы независимых параметров M_J, ω, F):

$$\alpha'_l = -1; \beta'_l = -2; \xi'_l = 1;$$

$$\alpha'_k = 1; \beta'_k = 1; \xi'_k = 0;$$

$$\alpha'_c = 1; \beta'_c = 2; \xi'_c = 0;$$

$$\alpha'_t = 0; \beta'_t = -1; \xi'_t = 0.$$

Таким образом, при одинаковых независимых параметрах и первый, и второй путь приводят к совершенно одинаковым выражениям для критериев подобия:

$$\pi_1 = M_J l \omega^2 / F; \pi_2 = k / (M_J \omega); \pi_3 = c / (M_J \omega^2); \pi_4 = \omega t.$$

Полученные критерии можно преобразовать по форме записи; например:

$$(\pi^{-1}) \pi_4^2 = \frac{\omega^2 l^2 F}{M_J l \omega^2} = \frac{Fl^2}{M_J l} = \pi'_1; \pi_2 \pi_4 = \frac{k \omega t}{M_J \omega} = \frac{kt}{M_J} = \pi'_2;$$

$$\pi_3 \pi_4^2 = \frac{c \omega^2 l^2}{M_J \omega^2} = \frac{cl^2}{M_J} = \pi'_3; \pi'_4 = \pi_4 = \omega t.$$

Если решается частная задач определения критериев подобия процессов с большим количеством участвующих величин, второй путь оказывается более целесообразным, так как позволяет осуществить формализацию, составить программы и применить ЦВМ.

Пример 1.8. Определить критерии экономического подобия линий электропередач. Удельные (приведенные) расчетные затраты линии электропередачи $З$ являются функцией следующих величин: суммы отчислений на ремонт и амортизацию сети в относительных единицах и нормативного коэффициента эффективности ($p_{л}$); стоимости 1 км линии ($K_{л}$); максимального значения передаваемой мощности ($P_{\max}$); номинального напряжения линии (u); активного сопротивления 1 км линии (r); времени наибольших потерь мощности (τ); стоимости потеряннго 1 кВт·ч (μ); коэффициента мощности ($\cos \varphi$); срока окупаемости (T).

Функциональная зависимость, характеризующая объект исследования, имеет вид

$$f(З, p_{л}, K_{л}, P_{\max}, u, r, \tau, \mu, \cos \varphi, T) = 0.$$

Запишем формулы размерностей и полную матрицу размерностей $\|A\|$, участвующих в исследовании параметров, используя систему СИ и учитывая,

что при рассмотрении экономических задач необходимо ввести дополнительную единицу измерения — рубль с размерностью $[R]$:

$$[3] = [L^{-3} M^{-1} T^2 I^0 R^1];$$

$$[K_{\text{л}}] = [L^{-1} M^0 T^0 I^0 R^1];$$

$$[T] = [L^0 M^0 T^1 I^0 R^0];$$

$$[\tau] = [L^0 M^0 T^1 I^0 R^0];$$

$$[u] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1} R^0];$$

$$[P_{\text{max}}] = [L^2 M^1 T^{-3} I^0 R^0];$$

$$[r] = [L^1 M^1 T^{-3} I^{-2} R^0];$$

$$[\mu] = [L^{-2} M^{-1} T^2 I^0 R^1];$$

$$[p_{\text{л}}] = [L^0 M^0 T^0 I^0 R^0];$$

$$[\cos \varphi] = [L^0 M^0 T^0 I^0 R^0]$$

или

$$\|A\| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Анализ матрицы $\|A\|$ показывает, что ее ранг равен числу основных единиц измерения ($k = q = 5$) и, следовательно, число независимых параметров равно пяти, число критериев подобия $K_{\text{л}} = 5$. В форме записи, соответствующей группе независимых параметров ($K_{\text{л}}, T, r, \mu, u$), пять критериев экономического подобия запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= 3/(K_{\text{л}}^{1/2} T^{1/2} r^{1/2} \mu^{1/2} u^{-1}); \\ \pi_2 &= P_{\text{max}}/(K_{\text{л}}^{1/2} T^{-1/2} r^{-1/2} \mu^{-1/2} u^1); \\ \pi_3 &= \tau/T; \pi_4 = \cos \varphi; \pi_5 = p_{\text{л}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

а критериальное уравнение будет иметь вид

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5).$$

Из полученных соотношений следует, что линии электропередач экономически подобны, если у них соответственно одинаковы критерии π_2, π_3, π_4 и π_5 . В этом случае результаты технико-экономического анализа, полученные для одной линии, можно распространить на все другие линии, экономически подобные первой.

В данном примере следует обратить особое внимание на то, что исходная функциональная зависимость являлась неполной и что специфика объекта исследования потребовала введения дополнительной (к СИ) единицы измерения.

§ 1.5. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ

Получение критериев подобия методом анализа размерностей на основании описания физического процесса. В общем случае зависимость, учитывающая все связи между параметрами процесса и элементов системы, в которой этот процесс протекает, может быть записана в виде

$$f(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k, \dots, P_s, \dots, P_m) = 0, \quad (1.39)$$

где $P_1, \dots, P_m$ — параметры, характеризующие исследуемый процесс.

Уравнение (1.39) — полное, а следовательно, и однородное, поэтому все входящие в него параметры можно выразить в относительных единицах, т. е. в долях от некоторых выбранных величин $P_{01}, \dots, P_{0m}$, имеющих соответственно те же размерности, что и $P_1, \dots, P_m$. Тогда (1.39) можно записать следующим образом:

$$f\left(\frac{P_1}{P_{01}}, \dots, \frac{P_i}{P_{0i}}, \dots, \frac{P_k}{P_{0k}}, \frac{P_{k+1}}{P_{0k+1}}, \dots, \frac{P_s}{P_{0s}}, \dots, \frac{P_m}{P_{0m}}\right) = 0. \quad (1.40)$$

Пусть в выбранной системе единиц имеется $k = q$ основных единиц измерения. Обозначая их через $a, b, \dots, q$, запишем выражения единиц измерения всех участвующих величин, т. е. их формулы размерностей:

где $\alpha, \beta, \dots, \xi$ — действительные числа.

Дальнейшие рассуждения проведем применительно к случаю, когда $k = q$. Поскольку k единиц измерения являются независимыми, то остальные $m - k$ единиц измерения будут являться их функциями

Для определения вида этих функций прологарифмируем первые k уравнений системы (1.41), в результате чего получим систему k линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

60

[illegible]

[illegible]

— определитель k -го порядка, составленный из коэффициентов системы (1.43); $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{k1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{k2}; A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{kk}$ — адьюнкты элементов определителя D (первый индекс соответствует номеру строки, второй — номеру столбца).

$$\begin{aligned}
[p_{0k+1}] = & [p_{01}^{\alpha_{k+1}}] \frac{A_{11}}{D} \dots [p_{0k}^{\alpha_{k+1}}] \frac{A_{k1}}{D} [p_{01}^{\beta_{k+1}}] \frac{A_{12}}{D} \dots \\
& \dots [p_{0k}^{\beta_{k+1}}] \frac{A_{k2}}{D} \dots [p_{01}^{\xi_{k+1}}] \frac{A_{1k}}{D} \dots [p_{0k}^{\xi_{k+1}}] \frac{A_{kk}}{D} .
\end{aligned} \quad (1.44)$$

$$[p_{0s}] = [p_{01}]^{D_{1s}/D} \dots [p_{0i}]^{D_{is}/D} \dots [p_{0h}]^{D_{hs}/D} \quad (1.45a)$$

$$[P_{0s}] = [P_{01}]^{D_{1s}/D} \dots [P_{0i}]^{D_{is}/D} \dots [P_{0k}]^{D_{ks}/D}, \quad (1.456)$$

$$\alpha'_s = D_{1s}/D; \dots; \gamma'_s = D_{ls}/D; \dots; \xi'_s = D_{ks}/D.$$

Если среди m участвующих в уравнении (1.40) величин $P_{01}, \dots, P_{0m}$ имеется k независимых ($P_{01}, \dots, P_{0i}, \dots, P_{0k}$), выбираемых произвольно, то остальные $m - k$ величин ($P_{0k+1}, \dots, P_{0s}, \dots, P_{0m}$) являются произведениями выбранных независимых величин в соответствующих степенях $\alpha'_s, \dots, \xi'_s$, где $s = k + 1, \dots, m$ т. е.

$$P_{0s} = P_{01}^{y_1} \dots P_{0i}^{y_i} \dots P_{0k}^{y_k}, \quad (1.45в)$$

где $y_i = D_{is}/D$.

В соответствии с (1.45 в) уравнение (1.40) примет вид

$$f \left(\frac{P_1}{P_{01}}, \dots, \frac{P_i}{P_{0i}}, \dots, \frac{P_k}{P_{0k}}, \frac{P_{k+1}}{P_{01}^{x_1} \dots P_{0i}^{x_i} \dots P_{0k}^{x_k}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{P_s}{P_{01}^{y_1} \dots P_{0i}^{y_i} \dots P_{0k}^{y_k}}, \dots, \frac{P_m}{P_{01}^{z_1} \dots P_{0i}^{z_i} \dots P_{0k}^{z_k}} \right) = 0, \quad (1.40а)$$

Поскольку k величин P_0 независимы, то их можно выбрать произвольно и принять, например, $P_{01} = P_1, P_{02} = P_2, \dots, P_{0k} = P_k$. Полагая далее $x_1 = \alpha'_{k+1}, \dots, x_k = \xi'_{k+1}, y_1 = \alpha_s, \dots, y_k = \xi'_s, z_1 = \alpha_m, \dots, z_k = \xi'_m$; получим

$$f \left(1, 1, \dots, 1, \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_i^{x_i} \dots P_k^{x_k}}, \dots, \frac{P_s}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i} \dots P_k^{y_k}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_i^{z_i} \dots P_k^{z_k}} \right) = 0. \quad (1.40б)$$

Напомним, что единицы измерения числителей и знаменателей всех отношений

$$\frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_i^{x_i} \dots P_k^{x_k}}, \dots, \frac{P_s}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i} \dots P_k^{y_k}}, \dots, \frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_i^{z_i} \dots P_k^{z_k}},$$

равны, что следует из системы (1.41) и последующих выкладок. Таким образом, каждое из этих отношений есть отношение между числами и поэтому является отвлеченным числом. Следовательно, исходное уравнение можно представить в виде

$$f \left(1, 1, \dots, 1, \frac{\{P_{k+1}\}}{\{P_1\}^{x_1} \dots \{P_k\}^{x_k}}, \dots, \frac{\{P_m\}}{\{P_1\}^{z_1} \dots \{P_k\}^{z_k}} \right) = 0, \quad (1.46)$$

или

$$f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \dots, \pi_{m-k}) = 0. \quad (1.47)$$

где

$$\pi_1 = \frac{\{P_{k+1}\}}{\{P_1\}^{x_1} \dots \{P_k\}^{x_k}}; \dots; \pi_s = \frac{\{P_s\}}{\{P_1\}^{y_1} \dots \{P_k\}^{y_k}}; \dots \\ \dots; \pi_{m-k} = \frac{\{P_m\}}{\{P_1\}^{z_1} \dots \{P_k\}^{z_k}}. \quad \{ (1.48а*) \}$$

* На практике соотношения (1.48а) записываются без скобок, т. е. в виде отношений между символами параметров; подразумеваются, однако, при этом отношения чисел. Такая форма записи и будет использоваться в дальнейшем.

$$\pi_1 = \frac{P_{k+1}}{P_1^{\alpha'_{k+1}} P_2^{\beta'_{k+1}} \dots P_k^{\xi'_{k+1}}}; \dots;$$

$$\pi_s = \frac{P_s}{P_1^{\alpha'_s} P_2^{\beta'_s} \dots P_k^{\xi'_s}}; \dots; \pi_{m-k} = \frac{P_m}{P_1^{\alpha'_m} P_2^{\beta'_m} \dots P_k^{\xi'_m}}. \quad (1.48)$$

Итак, любое уравнение физического процесса можно представить как функцию $m - k$ безразмерных соотношений π .

Единицы измерения числителей и знаменателей в выражениях $\pi_1, \dots, \pi_s, \dots, \pi_{m-k}$ равны, поэтому

$$[P_s] = [P_1]^{\alpha'_s} [P_2]^{\beta'_s} \dots [P_k]^{\xi'_s}.$$

Подставляя в записанное равенство основные единицы измерений, получим

$$a^{\alpha_s} b^{\beta_s} \dots q^{\xi_s} = (a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots q^{\xi_1})^{\alpha'_s} \dots (a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots q^{\xi_2})^{\beta'_s} \dots (a^{\alpha_k} b^{\beta_k} \dots q^{\xi_k})^{\xi'_s},$$

откуда следует, что

$$\alpha_s = \alpha_1 \alpha'_s + \alpha_2 \beta'_s + \alpha_k \xi'_s;$$

$$\beta_s = \beta_1 \alpha'_s + \beta_2 \beta'_s + \beta_k \xi'_s;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi_s = \xi_1 \alpha'_s + \xi_2 \beta'_s + \xi_k \xi'_s.$$

Полученные k соотношений дают связь между известными показателями размерности основных единиц измерения ($\alpha_1, \dots, \xi_s$) и искомыми показателями ($\alpha'_s, \dots, \xi'_s$).

Покажем, что полученные соотношения π являются критериями подобия. Рассмотрим два подобных процесса, описываемых полными уравнениями с m параметрами. Обозначим параметры первого процесса символом P , а второго — R и запишем уравнения этих процессов в форме (1.46)

$$f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_k^{x_k}}, \dots, \frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_k^{z_k}}\right) = 0; \quad (1.46a)$$

$$f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{R_{k+1}}{R_1^{x_1} \dots R_k^{x_k}}, \dots, \frac{R_m}{R_1^{z_1} \dots R_k^{z_k}}\right) = 0. \quad (1.46b)$$

При наличии подобия между параметрами первого и второго процессов должна существовать следующая связь:

$$R_1 = m_1 P_1, \dots, R_m = m_m P_m,$$

где $m_1, \dots, m_m$ — масштабы сходственных параметров.

Подставим (1.49) в (1.46a):

$$f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{m_{k+1} P_{k+1}}{(m_1 P_1)^{x_1} \dots (m_k P_k)^{x_k}}, \dots, \frac{m_m P_m}{(m_1 P_1)^{z_1} \dots (m_k P_k)^{z_k}}\right) = 0. \quad (1.50)$$

Умножение параметров на постоянные коэффициенты, какими являются масштабы, можно рассматривать как изменение единиц измерения этих параметров в соответствующее число раз. В самом деле,

$$m_1 P_1 = m_1 \{P_1\} [p_1] = \{P_1\} [m_1 p_1];$$

$$m_m P_m = m_m \{P_m\} [p_m] = \{P_m\} [m_m p_m].$$

С учетом этого уравнение (1.50) примет вид

$$f \left(1, 1, \dots, \frac{\{P_{k+1}\} [m_{k+1} p_{k+1}]}{\{P_1\}^{x_1} [m_1 p_1]^{x_1} \dots \{P_k\}^{x_k} [m_k p_k]^{x_k}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{\{P_m\} [m_m p_m]}{\{P_1\}^{z_1} [m_1 p_1]^{z_1} \dots \{P_k\}^{z_k} [m_k p_k]^{z_k}} \right) = 0. \quad (1.50a)$$

Поскольку единицы измерений в числителях и знаменателях отношений, входящих под знак функции, одинаковы, то

$$[m_{k+1} p_{k+1}] = [m_1 p_1]^{x_1} \dots [m_k p_k]^{x_k};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[m_m p_m] = [m_1 p_1]^{z_1} \dots [m_k p_k]^{z_k}$$

или

$$\left. \begin{aligned} m_{k+1} [p_{k+1}] &= m_1^{x_1} \dots m_k^{x_k} [p_1]^{x_1} \dots [p_k]^{x_k}; \\ \dots \dots \dots \\ m_m [p_m] &= m_1^{z_1} \dots m_k^{z_k} [p_1]^{z_1} \dots [p_k]^{z_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Так как согласно (1.41) и (1.45a) $[p_{k+1}] = [p_1]^{x_1} \dots [p_k]^{x_k}$ и т.д., то равенства 1.51) справедливы, если

$$m_{k+1} = m_1^{x_1} \dots m_k^{x_k}; \dots; m_m = m_1^{z_1} \dots m_k^{z_k} \quad (1.51a)$$

или

$$\frac{m_{k+1}}{m_1^{x_1} \dots m_k^{x_k}} = 1; \dots; \frac{m_m}{m_1^{z_1} \dots m_k^{z_k}} = 1. \quad (1.51b)$$

Из (1.51a) и (1.51b) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{k+1}}{R_1^{x_1} \dots R_k^{x_k}} \dots \frac{m_{k+1} P_{k+1}}{m_1^{x_1} \dots m_k^{x_k} P_1^{x_1} \dots P_k^{x_k}} &= \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_k^{x_k}} = \pi_1; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{R_m}{R_1^{z_1} \dots R_k^{z_k}} &= \frac{m_m P_m}{m_1^{z_1} \dots m_k^{z_k} P_1^{z_1} \dots P_k^{z_k}} = \frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_k^{z_k}} = \pi_{m-k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Итак, соотношения π , полученные в результате приведения уравнений двух подобных процессов к безразмерному виду, оказались равными. Следовательно, согласно первой теореме эти соотношения являются критериями подобия. Полученные результаты можно распространить на любое число подобных процессов.

Критериальное уравнение. Проведенный анализ показывает, что физический процесс математически отражается функцией $m - k$ безразмерных соотношений — критериев подобия π . Всякое уравнение, дающее связь между m уча-

ствующими величинами, представленное в критериальной форме, будучи разрешено относительно какого-либо критерия подобия (например, π_1), позволяет выразить его как функцию $m - k - 1$ критериев подобия:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-k}). \quad (1.53)$$

Значения критериев π являются одинаковыми для любого числа подобных процессов, протекающих в разных системах, сходственные параметры которых пропорциональны*. Соотношение (1.53) называется *критериальным уравнением*. Оно показывает, что один из $m - k$ критериев подобия является функцией остальных $m - k - 1$ критериев. Таким образом, число величин, определяющих характер процесса при критериальной форме записи, уменьшается на $k + 1$. Независимых критериев оказывается $m - k - 1$. В данном случае это $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-k}$. Зависимый критерий π_1 при соблюдении независимых критериев выполняется а в т о м а т и ч е с к и, что непосредственно следует из (1.53).

Связь критериев подобия, найденных на основе π -теоремы и полученных из анализа уравнений. Согласно первой теореме критериями подобия процессов могут быть безразмерные отношения членов уравнения; при этом число критериев подобия на единицу меньше числа членов уравнения. Это положение не противоречит выводам второй теоремы о наличии лишь $m - k$ критериев, из которых $m - k - 1$ являются независимыми. Действительно, если рассматривать какой-либо критерий подобия, полученный как отношение членов уравнения (1.9), например φ_j/φ_n , то это отношение может быть в общем случае функцией всех участвующих в уравнении параметров $P_1, \dots, P_m$:

$$\varphi_j/\varphi_n = F(P_1, \dots, P_m).$$

Однако функцию $F(P_1, \dots, P_m)$ можно представить как функцию $m - k$ критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$:

$$\varphi_j/\varphi_n = F(\pi_1, \dots, \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \dots, \pi_{m-k}) = \pi_j.$$

Таким образом, критерии подобия, полученные непосредственно из полного уравнения (функционального описания) процесса, совпадают с критериями, полученными на основе π -теоремы.

Пример 1.9. Определить критерии подобия переходного процесса распространения волны напряжения по длинной линии при включении ее на постоянное напряжение. Рассматриваемый процесс характеризуется функциональной зависимостью

$$f(t, l, u, R, G, L, C) = 0,$$

где t — время; l — длина; u — напряжение вдоль линии; C, L, R и G — соответственно емкость, индуктивность, сопротивление и проводимость на единицу длины.

Запишем исходную функциональную зависимость в виде

$$f(t/t_0, l/l_0, u/u_0, R/R_0, G/G_0, L/L_0, C/C_0) = 0.$$

Не все величины, в долях от которых желательно выразить семь участвующих в уравнении параметров ($m = 7$), можно выбрать произвольно. Чтобы выяснить, какие параметры можно выбрать, выпишем формулы размерности всех параметров в системе единиц СИ с учетом того, что R, G, L, C — погонные, т. е. отнесенные к 1 км линии:

$$[C] = [L^{-3} M^{-1} T^4 I^2] = [C_0]; [L] = [L^1 M^1 T^{-2} I^{-2}] = [L_0];$$

$$[G] = [L^{-3} M^{-1} T^3 I^2] = [G_0]; [R] = [L^1 M^1 T^{-3} I^{-2}] = [R_0];$$

$$[u] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}] = [u_0]; [l] = [L^1 M^0 T^0 I^0] = [l_0];$$

$$[t] = [L^0 M^0 T^1 I^0] = [t_0].$$

* Напомним, что пропорциональность параметров — это частный случай подобия. Вообще говоря, необходимо только некоторое, так или иначе определенное соответствие между параметрами подобных (в широком смысле) систем.

Прологарифмировав формулы размерностей, получим систему линейных уравнений, где коэффициентами являются показатели степеней основных единиц:

$$\ln [C_0] = -3 \ln [L] - 1 \ln [M] + 4 \ln [T] + 2 \ln [I];$$

$$\ln [L_0] = 1 \ln [L] + 1 \ln [M] - 2 \ln [T] - 2 \ln [I];$$

$$\ln [G_0] = -3 \ln [L] - 1 \ln [M] + 3 \ln [T] + 2 \ln [I];$$

$$\ln [R_0] = 1 \ln [L] + 1 \ln [M] - 3 \ln [T] - 2 \ln [I];$$

$$\ln [u_0] = 2 \ln [L] + 1 \ln [M] - 3 \ln [T] - 1 \ln [I];$$

$$\ln [I_0] = 1 \ln [L] + 0 \cdot \ln [M] + 0 \cdot \ln [T] + 0 \cdot \ln [I];$$

$$\ln [T_0] = 0 \cdot \ln [L] + 0 \cdot \ln [M] + 1 \ln [T] + 0 \cdot \ln [I].$$

Матрица коэффициентов уравнений системы — матрица размерностей — имеет вид

$$||A|| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Чтобы выявить количество независимых единиц измерения, а значит, и параметров, нужно найти хотя бы один определитель порядка q , $q = 1$ и т. д., составленный из строк матрицы размерностей, значение которого будет отлично от нуля. Из семи строк матрицы может быть составлено 35 определителей четвертого порядка ($q = 4$):

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35.$$

Однако можно упростить задачу, если учесть, что отыскиваемые формулы размерностей обладают определенным свойством: они не могут быть представлены как комбинации из формул размерностей остальных величин. Это позволяет сократить число определителей, проверяемых на неравенство нулю. Так, формула размерностей для $[L_0]$ является произведением формул размерностей $[R_0]$ и $[I_0]$; формула размерностей для $[C_0]$ есть произведение $[G_0]$ и $[I_0]$, а $[G_0]$ обратно пропорционально $[R_0]$ и $[I_0]^2$. Вспоминая одно из свойств определителей, согласно которому они обращаются в нуль, если одна из строк является линейной комбинацией других строк, замечаем, что нет смысла рассматривать те определители четвертого порядка, в которые входят вместе размерности $[L_0]$, $[R_0]$ и $[I_0]$ либо $[C_0]$, $[G_0]$, $[I_0]$ и $[R_0]$, $[G_0]$, $[I_0]$. Так, например, определитель, составленный из второй, четвертой, пятой и седьмой строк матрицы размерностей, равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку вторая строка является линейной комбинацией четвертой и седьмой строк.

Число определителей четвертого порядка, три строки которых содержат размерности трех параметров, связанных между собой, равно 12, так как каждые эти три параметра можно комбинировать с оставшимися четырьмя. Кроме того, можно найти еще шесть определителей, равных нулю, четвертая строка которых является комбинацией трех остальных (например, $[R] = [L] [G] [C]^{-1}$). Итого будем иметь 18 определителей, равных нулю. Остальные 17 комбинаций, дающие определители четвертого порядка, не равные нулю, являются независимыми.

Приведенные рассуждения позволяют, не вычисляя все определители, прийти к выводу, что независимыми единицами измерения будут, например, $[u_0]$, $[R_0]$, $[l_0]$ и $[t_0]$, поскольку определитель, составленный из четвертой, пятой, шестой и седьмой строк матрицы размерностей, не равен нулю:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Однако данная комбинация независимых единиц, как было показано, не является единственной. Легко убедиться, что $[u_0]$, $[R_0]$, $[G_0]$, $[L_0]$ или $[u_0]$, $[L_0]$, $[l_0]$, $[t_0]$ и т. д. также являются независимыми. Абсолютно неважно, какую из 17 независимых комбинаций принять за основу для последующих рассуждений, поэтому в дальнейшем будем рассматривать, например, комбинацию из $[u_0]$, $[R_0]$, $[l_0]$ и $[t_0]$.

Таким образом, число независимых единиц измерения параметров $k = q = 4$; теперь можно переписать аргументы в иной последовательности — вначале записав отношения четырех независимых величин, а затем трех зависимых:

$$f(u/u_0, R/R_0, l/l_0, t/t_0, L/L_0, C/C_0, G/G_0) = 0.$$

Выразим оставшиеся $m - k$ единиц, т. е. $[L_0]$, $[C_0]$ и $[G_0]$, через независимые $[u_0]$, $[R_0]$, $[l_0]$ и $[t_0]$, используя для этого выражение (1.46):

$$[L_0] = [u_0]^{x_1} [R_0]^{x_2} [l_0]^{x_3} [t_0]^{x_4};$$

$$[C_0] = [u_0]^{y_1} [R_0]^{y_2} [l_0]^{y_3} [t_0]^{y_4};$$

$$[G_0] = [u_0]^{z_1} [R_0]^{z_2} [l_0]^{z_3} [t_0]^{z_4}.$$

Определим неизвестные показатели степени x , y и z как отношение определителя $D_{i,s}$ к определителю $D = +1$. Так, $y_2 = D_{2,6}/D$ является отношением определителя $D_{2,6}$, полученного из D заменой второй его строки на строку, составленную из показателей степени y основных единиц в формуле размерностей шестой единицы измерений $[C_0]$:

$$D_{2,6} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ и } y_2 = -1.$$

Аналогично определим остальные показатели:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1,$$

$$y_1 = 0, y_2 = -1, y_3 = -2, y_4 = 1,$$

$$z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = -2, z_4 = 0,$$

т. е.

$$[L_0] = [u_0]^0 [R_0]^1 [l_0]^0 [t_0]^1;$$

$$[C_0] = [u_0]^0 [R_0]^{-1} [l_0]^{-2} [t_0]^1;$$

$$[G_0] = [u_0]^0 [R_0]^{-1} [l_0]^{-2} [t_0]^0.$$

Такие же результаты можно было бы получить сразу, не производя вычислений определителей, а используя перемножение (деление) формул размерности. Однако этот прием удастся применить лишь для относительно простых случаев, когда связь формул размерностей очевидна.

Поскольку связь между единицами измерения идентична связи между величинами, то

$$L_0 = R_0 t_0; C_0 = R_0^{-1} l_0^{-2} t_0; G_0 = R_0^{-1} l_0^{-2}.$$

Так как u_0, R_0, l_0, t_0 независимы, то можно выбрать их размеры произвольным, в частности: $u_0=u, R_0=R, l_0=l, t_0=t$. Записывая рассматриваемую функциональную зависимость в виде

$$f\left(1, 1, 1, 1, \frac{L}{Rt}, \frac{C}{R^{-1}l^{-2}t}, \frac{G}{R^{-1}l^{-2}}\right)=0,$$

получим три критерия подобия ($m-k=3$):

$$\pi_1 = \frac{L}{Rt}; \pi_2 = \frac{C}{R^{-1}l^{-2}t}; \pi_3 = \frac{G}{R^{-1}l^{-2}}.$$

Форма записи критериев может изменяться в зависимости от принятой комбинации независимых величин. Так, если взять комбинацию $[u_0], [R_0], [G_0], [L_0]$, то получается следующая форма записи трех критериев:

$$\pi_1 = \frac{C}{R^{-1}GL}; \pi_2 = \frac{l}{R^{-1/2}G^{-1/2}}; \pi_3 = \frac{t}{R^{-1}L}.$$

Всего в данном примере в соответствии с 17 комбинациями независимых величин можно получить 17 форм записи трех критериев подобия.

§ 1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЕДИНИЦ *

Идея этого способа заключается в том, чтобы для каждого изучаемого явления построить свою систему измерений, например для синхронной машины время отсчитывать не в секундах, а в долях от синхронной скорости, и т.д. Можно при изучении колебаний ввести, например, вместо t величину $\tau = t\sqrt{F/M_J}$, записав уравнение движения в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 l}{d\tau^2} + \frac{k}{\sqrt{M_J F}} \frac{dl}{d\tau} + \frac{c}{F} = \sin \omega' \tau, \quad \text{где } \omega' = \omega \sqrt{\frac{M_J}{F}}.$$

Возможность применения этого способа определения критериев подобия вытекает из следующего утверждения, которое является следствием основных теорем подобия: если параметры, характеризующие одно явление (P'_1), выражены в долях от некоторых определенным образом выбранных базисных величин (P'_{16}), а для второго явления сходственные параметры (P'_2) выражены в долях от базисных (P'_{26}) величин, выбранных таким же образом, то при равенстве относительных значений сходственных параметров ($P_* = P'_1/P'_{16} = P'_2/P'_{26}$) первое и второе явления могут быть подобны.

Рассмотрим основания для такого утверждения и вытекающие из него условия определения критериев подобия.

Пусть имеется явление, которое описывается в общем виде уравнением

$$f(P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_s, \dots, P_m) = 0. \quad (1.39a)$$

* В некоторых работах хорошо известные преобразования такого рода начали называть «нормализацией уравнений», преобразованные параметры процесса (τ вместо t и т.д.) — «естественными координатами», исследование уравнений, записанных в системе относительных единиц, — «фракционным анализом» и т.д., пытаясь этим новым термином придать какой-то особый смысл. Однако все свойства этих в ряде случаев весьма удобных и полезных преобразований обусловлены только свойствами системы относительных единиц.

Пример 1.10. Пользуясь системой относительных единиц, определить критерии подобия переходного процесса $i(t)$ в цепи, образованной последовательным соединением элементов с сопротивлением R и индуктивностью L , которая включается на постоянное напряжение u .

Функциональные зависимости, характеризующие процессы в двух таких цепях, имеют вид

$$f(i_1, t_1, R_1, L_1, u_1) = 0; f(i_2, t_2, R_2, L_2, u_2) = 0.$$

Как известно из примера 1.6, из пяти параметров, характеризующих данный процесс, лишь три являются независимыми. Выберем из восьми возможных комбинаций независимых параметров одну, например i, R и t . Соответствующие этим параметрам базисные величины ($i_{1б}, R_{1б}, t_{1б}$) можно выбрать произвольно. Тогда базисные величины $u_{1б}$ и $L_{1б}$ определяются из равенств:

$$u_{1б} = i_{1б} R_{1б}; \quad L_{1б} = R_{1б} t_{1б}.$$

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} i_1/i_{1б} &= i_2/i_{2б}, \text{ или } i_* = \text{idem}; \\ R_1/R_{1б} &= R_2/R_{2б}, \text{ или } R_* = \text{idem}; \\ t_1/t_{1б} &= t_2/t_{2б}, \text{ или } t_* = \text{idem}; \\ u_1/u_{1б} &= u_2/u_{2б}, \text{ или } u_* = \text{idem}; \\ L_1/L_{1б} &= L_2/L_{2б}, \text{ или } L_* = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (1.55a)$$

Покажем, при каком дополнительном к (1.55a) условию, наложенном на выбор базисных величин $i_{2б}, R_{2б}, t_{2б}, u_{2б}, L_{2б}$, рассматриваемые процессы оказываются подобными. Выразим критерии подобия через параметры обоих процессов:

$$\pi_1^{(1)} = \frac{u_1}{i_1 R_1}; \quad \pi_1^{(2)} = \frac{u_2}{i_2 R_2}; \quad \pi_2^{(1)} = \frac{L_1}{R_1 t_1}; \quad \pi_2^{(2)} = \frac{L_2}{R_2 t_2}.$$

Проведем те же преобразования, которые выполнялись при решении задачи в общем виде:

$$\pi_1^{(1)} = \frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{u_1/u_{1б}}{i_1/i_{1б} \cdot R_1/R_{1б}} = \frac{u_2/u_{2б}}{i_2/i_{2б} \cdot R_2/R_{2б}} = \frac{u_2}{i_2 R_2} \cdot \frac{i_{2б} R_{2б}}{u_{2б}} = \pi_1^{(2)} \frac{i_{2б} R_{2б}}{u_{2б}}.$$

Аналогично можно получить

$$\pi_2^{(1)} = \pi_2^{(2)} R_{2б} t_{2б}/L_{2б}.$$

Таким образом, для существования подобия помимо выполнения условий (1.55a) необходимо, чтобы зависимые базисные величины для второго процесса были выбраны в соответствии со следующими выражениями:

$$u_{2б} = i_{2б} R_{2б}; \quad L_{2б} = R_{2б} t_{2б}.$$

Базисные величины для независимых параметров i_2, R_2, t_2 могут быть выбраны произвольно.

§ 1.7. ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ УСЛОВИЙ ПОДОБИЯ

Первая формулировка третьей теоремы подобия. Третья теорема обычно формулируется следующим образом: *необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия изучаемого явления.*

Напомним понятия условий однозначности. Известно, что дифференциальное уравнение в общем виде описывает бесконечное множество процессов, относящихся к данному классу. Так, например, дифференциальное уравнение $u = iR + L di/dt$ описывает изменение тока во времени в цепи с активным сопротивлением R и индуктивностью L при включении ее на $u = \text{const}$. Условия, определяющие индивидуальные особенности процесса или явления и выделяющие из общего класса конкретный процесс или явление, называются *условиями однозначности*. К ним относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления, факторы и условия:

- геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- физические параметры среды и тел, образующих систему;
- начальное состояние системы (начальные условия);
- условия на границах системы (граничные или краевые условия);
- взаимодействие объекта и внешней среды.

Очевидно, нельзя математически сформулировать условия однозначности в общем виде. В каждом конкретном случае они могут быть различны в зависимости от рода решаемой задачи и вида уравнения. Так, для выделения определенного процесса из совокупности процессов, описываемых приведенным уравнением, достаточно задать параметры u , R , L и начальные условия, например, $i = i_0$ при $t = t_0$. В большинстве задач, связанных с исследованием полей, однозначность процессов определяется не только начальными условиями, но и свойствами среды, геометрическими свойствами системы и граничными условиями.

Вторая формулировка третьей теоремы подобия. Практически более удачная формулировка третьей теоремы, предложенная в последнее время*, имеет вид, отвечающий реальным задачам создания различных моделей. Эта формулировка состоит из трех положений.

П о л о ж е н и е 1. *Создание модели возможно, если критерии подобия (безразмерные комплексы), составленные из величин, характеризующих только ее системные (материальные) параметры, равны соответствующим критериям изучаемой системы-оригинала.*

Примечание 1.1. Частным случаем является равенство материальных параметров систем элементов модели и оригинала, выраженных в относительных единицах.

П о л о ж е н и е 2. *В созданной, согласно положению 1, модели осуществление процессов, подобных оригиналу, возможно, если критерии подобия, содержащие только параметры процессов, входящих в условия однозначности и в том числе начальные условия (параметры исходного режима, возмущений и отклонений), в модели и оригинале соответственно одинаковы.*

Примечание 2.1. Частным случаем является равенство параметров исходного режима в модели и оригинале, выраженных в относительных единицах.

* Веников В. А., Сыромятников С. Ю. Развитие основных положений теории подобия (уточнение условий создания моделей на основе третьей теоремы о подобии). — Электронное моделирование, 1983, № 1, с. 3—11.

Положение 3. Осуществление модели согласно формулировкам 1 и 2 возможно в сколь угодно сложных анизотропных, нелинейных или имеющих вероятностно заданные параметры системах при условии одновременного соблюдения соответствующих дополнительных положений, сформулированных в гл. 2

Примечание 3.1. Третья теорема в указанной первой формулировке имеет ряд ограничивающих условий; она, в частности, не распространяется на автомодельные системы (см. с. 76), для которых нельзя составить ни одного критерия, содержащего только параметры системы, но можно при любых их значениях осуществлять переход от характеристик одного процесса к характеристикам другого за счет изменения только масштабов параметров процессов.

Примечание 3.2. В указанных выше положениях понимается, что система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, связанных в той или иной мере единством происходящих процессов.

Сказанного выше, вообще говоря, достаточно, чтобы пользоваться третьей теоремой, не заботясь о ее доказательствах. Однако для интересующихся ее обоснованием приведем следующие соображения.

Обоснования третьей теоремы. В первой формулировке третья теорема не имеет, как уже указывалось, строгого доказательства. Однако можно довольно просто показать справедливость положений этой формулировки.

Пусть имеется два процесса, дифференциальные уравнения которых буквенно одинаковы. Очевидно, что у них одинаковое число участвующих параметров m , число независимых параметров k и число критериев подобия $m - k$, полученных на базе π -теоремы. Согласно определению подобия, необходимым условием его существования является наличие определенных масштабов соотношений между всеми сходственными параметрами ($P_i/R_i = m_i$).

У подобных явлений на масштабы накладываются определенные ограничения. Они заключаются в том, что не все, а только k масштабов ($m_1, m_2, \dots, m_k$) можно выбрать произвольно, независимо от остальных ($m_{k+1}, \dots, m_m$). Математически эти условия выражаются в равенстве единице ($m - k$) соотношений между масштабами

$$\frac{m_{k+1}}{m_1^{x_1} \dots m_k^{x_k}} = 1; \dots; \frac{m_m}{m_1^{z_1} \dots m_k^{z_k}} = 1.$$

Указанные соотношения после простых преобразований приводят к равенству $m - k$ критериев подобия: заменив масштабы отношениями сходственных параметров, получим

$$\frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_k^{x_k}} = \frac{R_{k+1}}{R_1^{x_1} \dots R_k^{x_k}}, \text{ или } \pi_1 = \text{idem};$$

.....

$$\frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_k^{z_k}} = \frac{R_m}{R_1^{z_1} \dots R_k^{z_k}}, \text{ или } \pi_{m-k} = \text{idem}.$$

Однако, согласно π -теореме, один из $m - k$ критериев является функцией остальных и автоматически соблюдается при их равенстве. Таким образом, очевидно, что равенства $m - k - 1$ критериев достаточно для обеспечения возможности подобия процессов. Эта возможность реализуется, если, задав условия однозначности, выделить из бесконечного множества процессов, которым соответствует данное дифференциальное уравнение, те конкретные процессы, подобие которых необходимо обеспечить. Это требование и содержится в третьей теореме подобия.

Величины, характеризующие однозначность процесса, обязательно входят в дифференциальное уравнение, если оно полное. При этом в формулировке третьей теоремы можно не оговаривать специально требования выполнения условий однозначности, т. е. их пропорциональности. Тогда можно сформулировать третью теорему так: *подобие любых двух систем создается при пропорциональности всех сходственных величин в этих системах и равенстве $m - k - 1$ критериев подобия, определенных, согласно π -теореме, из полного уравнения (или полной системы уравнений) процесса.*

Пропорциональность переменных величин в подобных процессах требуется обеспечивать во всем пространстве, в том числе на его границах, и на всем протяжении времени рассматриваемого процесса. Можно влиять на установление этой пропорциональности через начальные и граничные значения параметров процесса, получая пропорциональность их остальных значений как следствие пропорциональности в начальный момент.

Доказательство третьей теоремы подобия во второй формулировке основывается на положениях следующей вспомогательной теоремы*: *систему обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка, описывающую процесс в физической системе, можно привести к такому критериальному виду, при котором эти уравнения и начальные их условия содержат выраженные в относительных единицах параметры процесса и безразмерные комплексы, составленные только из материальных параметров физической системы.* При этом под выраженным в относительных единицах параметром процесса в данном случае понимается отношение $P_{i+i}/A_i = P_{i+i}^*$, где P_{i+i} — i -й параметр процесса, A_i — степенной комплекс, составленный из параметров системы $P_1, \dots, P_i$. Приведенные положения нарушаются, если уравнения процесса о д н о в р е м е н н о удовлетворяют ряду ограничений**, главнейшие из которых следующие:

1) все параметры процесса являются размерными величинами и имеют нулевые начальные значения;

* Сыромятников С. Ю. Методика критериального планирования экспериментов (применительно к исследованию систем электроэнергетики и их элементов). Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. МЭИ, 1982.

** Веников В. А., Сыромятников С. Ю. Третья теорема подобия, ее доказательство и реализация. Тезисы докладов. Всесоюзная научная конференция «Моделирование электроэнергетических систем». Баку, 1982 г. 50.

2) аргументы безразмерных функций не содержат параметры процесса;

3) строка матрицы размерностей всех параметров, соответствующая времени t , не является линейной комбинацией строк матрицы размерностей параметров системы.

Из приведенной выше вспомогательной теоремы следует вывод: если физический процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\frac{d^n P_{l+1}}{dt^n} = \varphi \left(t, P_{l+1}, \frac{dP_{l+1}}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} P_{l+1}}{dt^{n-1}}, P_1, P_2, \dots, P_l \right)$$

и параметр процесса P_{l+1} либо имеет ненулевое начальное значение, либо является безразмерной величиной, то уравнение процесса и начальные условия можно привести к критериальному виду.

Справедливость этого вывода станет очевидной, если учесть, что всякое обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка можно свести к равносильной системе уравнений первого порядка путем замены высших производных вспомогательными неизвестными функциями:

$$dP_{l+1}/dt = P_{l+2}, \dots, d^{n-1} P_{l+1}/dt^{n-1} = P_{l+n}.$$

Выраженные в относительных единицах параметры процесса и безразмерные комплексы, составленные из параметров системы, по сути дела, представляют собой критерии подобия изучаемого процесса, определенные методом анализа размерностей на основе π -теоремы, если в качестве независимых величин выбраны параметры системы. Поэтому для приведения уравнений процесса и начальных условий к критериальному виду необходимо:

а) убедиться в том, что данная система дифференциальных уравнений не удовлетворяет одновременно перечисленным выше ограничениям и, следовательно, эту систему можно представить в критериальной форме;

б) составить матрицу A размерностей всех участвующих в процессе параметров $P_1, \dots, P_l, P_{l+1}, \dots, P_{l+n}, t$ и определить ранг $r_A = k$ этой матрицы;

в) определить на основе анализа размерностей соответствующую форму записи безразмерных комплексов $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{l-k}$, составленных из параметров системы $P_1, P_2, \dots, P_l$ и выраженных в относительных единицах параметров процесса $P_{l+1}^*, \dots, P_{l+n}^*, t^*$, выбрав в качестве независимых параметры $P_1, \dots, P_k$ физической системы, в которой протекает процесс;

г) представить уравнения и начальные условия в критериальной форме.

Применительно к случаю, когда процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, эту систему уравнений и начальные условия можно привести к критери-

альному виду*, при котором выраженные в относительных единицах параметры процесса $P_{l+1}^*, \dots, P_{l+n}^*$ являются однозначными функциями безразмерных комплексов $\pi_1, \dots, \pi_{l-k}$, составленных из параметров системы, и выраженного в относительных единицах времени t_* :

[illegible]

Если параметры двух сравниваемых систем подобраны таким образом, что

$$\pi_1 = \text{idem}, \dots, \pi_{l-k} = \text{idem}, \quad (1.57)$$

то всегда можно выбрать такой масштаб времени, при котором

$$\pi_{l-k+1} = t_*^{(1)} = t_*^{(2)} = t_* = \text{idem.} \quad (1.58)$$

Согласно выражениям (1.56) будут соответственно одинаковыми остальные критерии подобия:

$$\pi_{l-k+2} = P_{l+1*}^{(1)} = P_{l+1*}^{(2)} = \text{idem}, \dots, \pi_{l-k+n+1} = P_{l+n*}^{(1)} = P_{l+n*}^{(2)} = \text{idem}. \quad (1.59)$$

Это значит, что в сходственные моменты времени ($t_* = \text{idem}$) значения параметров процессов в сравниваемых системах будут отличаться лишь масштабами, т. е. процессы будут подобными. Следовательно, выполнения условий (1.57) достаточно для получения подобия, а критерии подобия (1.58) и (1.59) служат для определения масштабов времени и параметров процессов $P_{l+1}, \dots, P_{l+n}$. Необходимость соблюдения условий (1.57) следует из первой теоремы подобия.

Автомодельность. При постановке и обработке опытов важно учитывать, что в различных отраслях техники встречаются явления (процессы), которые называются *автомодельными*. В этом случае при моделировании физических явлений можно не соблюдать точно, или даже вообще не соблюдать, критерии подобия. Автомодельность какого-либо явления означает автоматическое сохранение его подобия исходному явлению (оригиналу) независимо от абсолютных значений параметров элементов той системы, в которой данное явление протекает.

Пример 1.11. Рассмотрим включение цепи $R_1 L_1$ на постоянное напряжение u_1 . Происходящий процесс описывается уравнением

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 di_1/dt_1.$$

Критерии подобия этого процесса имеют вид

$$\pi'_1 = i_1/(u_1 R_1^{-1}); \quad \pi'_1 = t_1/(L_1 R_1^{-1}),$$

причем $\pi'_1 = f(\pi'_2)$.

*! Существуют случаи, когда дифференциальные уравнения нельзя привести к критериальному виду. Но известные авторам уравнения такого рода соответствуют автомодельным (т. е. заведомо подобным) процессам. Так что этот факт не нарушает строгости приводимого в данной статье доказательства третьей теоремы подобия.

Для обеспечения подобия второго процесса первому (исходному) необходимо, чтобы определяющие критерии в сходственные моменты времени были равны, т. е. чтобы

$$\pi_2^* = t_2 / (L_2 R_2^{-1}).$$

При любых заданных значениях L_2 и R_2 всегда можно удовлетворить этим условиям соответствующим выбором величины t_2 , и, следовательно,

$$m_t = t_1 / t_2.$$

Очевидно, что если $R_1/L_1 \neq R_2/L_2$ или $m_R/m_L \neq 1$, то и

$$m_t = m_R/m_L \neq 1.$$

Таким образом, при соответствующем выборе масштаба времени рассматриваемые два процесса будут подобны при любых значениях параметров элементов второй системы (R_2 и L_2). Отметим, что значение еще одного параметра второй системы, а именно u_2 , никакого влияния на подобие процессов не оказывает, поскольку он входит в неопределяющий критерий. Следовательно, величина u_2 может быть любой, что также соответствует и тому, что u_2 входит в систему независимых параметров второго процесса.

Итак, при любых значениях параметров элементов системы (u , R , L) процессы в цепях RL оказываются подобными. Следовательно, эти процессы можно считать автомодельными. При этом необходимо, однако, учитывать ограничения, наложенные на выбор масштаба времени m_t .

Нетрудно показать, что процессы, протекающие, например, в цепях RLC , не могут быть полностью автомодельными, поскольку число параметров элементов системы (u , R , L , C) превышает число независимых параметров ($k = 3$), а следовательно, на выбор масштаба одного из параметров элементов второй системы будут наложены определенные ограничения.

Одним из формальных признаков автомодельности является выполнение условия

$$m_{a.c} \leq k,$$

где $m_{a.c}$ — число параметров элементов системы.

Процессы, описываемые двучленными уравнениями, всегда автомодельны. Критерии подобия автомодельных процессов при моделировании служат не для расчета значений параметров элементов модели, а лишь для определения масштабов при любых значениях параметров элементов модели.

Пример 1.12. Рассмотрим уравнение второго закона Ньютона

$$f = M d^2 l / dt^2.$$

Уравнение содержит два члена ($n = 2$), четыре параметра (f , M , l , t), т. е. $m = 4$, и если оно записано в СИ, то $q = 3$. Согласно первой теореме число критериев подобия $n - 1 = 1$. Этот единственный критерий

$$\pi = M l / (f t^2).$$

Так как критерий подобия один, то и число $m - k$ обязано быть равным единице; следовательно, число независимых параметров $k = 3$. Покажем, что их действительно можно выбрать произвольно. Запишем формулы размерностей всех параметров:

$$[f] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}; \quad [M] = [M]^1 [L]^0 [T]^0;$$

$$[l] = [M]^0 [L]^1 [T]^0; \quad [t] = [M]^0 [L]^0 [T]^1.$$

Составим далее матрицу размерностей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Общее число определителей третьего порядка, составленных из строк этой матрицы,

$$C_3^3 = 4!/[3!(4-3)!] = 4;$$

ни один из них не равен нулю потому, что ни один из них не содержит строку, являющуюся линейной комбинацией двух остальных. Таким образом, любые три из четырех параметров могут быть выбраны в качестве независимых, в том числе и параметры системы f и M , т. е. процессы, описываемые уравнением второго закона Ньютона, подобны при любых значениях f и M и, следовательно, автомодельны.

Из формулировки третьей теоремы подобия следует признак автомодельности процессов: *процессы, протекающие в системах, из параметров которых нельзя составить ни одного безразмерного комплекса, являются автомодельными*. При этом в представленные в критериальной форме дифференциальные уравнения и начальные условия войдут только выраженные в относительных единицах параметры P_{i+1} , ..., P_{i+n} , t_* , и процессы будут подобными при любых значениях параметров системы $P_1, \dots, P_i$.

Пример 1.13. Рассмотрим дифференциальное уравнение переходного процесса в цепи, состоящей из активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C при включении ее на источник постоянного напряжения

$$u = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + Ri.$$

В данном случае, чтобы выделить конкретный процесс из множества процессов, описываемых этим уравнением, необходимо задать значения параметров u , R , L , C и начальные условия $i = 0$ при $t = 0$. При этом л-теорема показывает, что из шести параметров ($m = 6$) лишь три являются независимыми ($k = 3$), и, следовательно, число критериев подобия составляет $m - k = 3$, причем существует 15 форм записи трех критериев. Например, одна из них, соответствующая независимым величинам u , C и t , дает следующие критерии:

$$\pi_1 = i/(uC); \quad \pi_2 = RC/t; \quad \pi_3 = LC/t^2.$$

Эти критерии можно представить в другой, иногда практически более удобной форме — через постоянные времени:

$$\pi'_1 = \Delta u/u; \quad \pi'_2 = T_C/t = T_{*C}; \quad \pi'_3 = T_L/t = T_{*L},$$

где $\Delta u = iR$; $T_{*L} = L/R$; $T_{*C} = RC$.

Предположим, что существуют два процесса, у которых критерии π_2 и π_3 равны. Покажем, что равенства этих критериев достаточно для того, чтобы процессы были подобны. Если π_2 и π_3 соответственно одинаковы у двух процессов, то

$$R_1 C_1 / t_1 = R_2 C_2 / t_2; \quad L_1 C_1 / t_1^2 = L_2 C_2 / t_2^2,$$

или

$$\frac{(R_1/R_2)(C_1/C_2)}{t_1/t_2} = \frac{m_R m_C}{m_t} = 1; \quad \frac{(L_1/L_2)(C_1/C_2)}{(t_1/t_2)^2} = \frac{m_L m_C}{m_t^2} = 1.$$

Поскольку u , C и t — независимые параметры, то их масштабы можно выбрать произвольно. Однозначно определяем масштабы сопротивлений и индуктивностей:

$$m_R = m_i / m_C; \quad m_L = m_i^2 / m_C.$$

Если произвольно выбраны m_u , m_C , m_i и определены m_R и m_L , то при $\pi_2 = \pi_3$ масштаб токов m_i , как показано ниже, будет таким, что всегда справедливо условие

$$m_i m_t / (m_u m_C) = 1.$$

Пусть первый процесс характеризуется следующими параметрами: $u_1 = 500$ В; $R_1 = 30$ Ом; $L_1 = 2,62$ Гн; $C_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ Ф. Зададимся $m_u = 5$; $m_C = 0,4$; $m_t = 1$. Тогда

$$m_R = m_L = 1/0,4 = 2,5,$$

и параметры второго процесса

$$u_2 = u_1 / m_u = 500/5 = 100 \text{ В}; \quad R_2 = R_1 / m_R = 30/2,5 = 12 \text{ Ом}; \\ L_2 = L_1 / m_L = 2,62/2,5 = 1,045 \text{ Гн}; \quad C_2 = C_1 / m_C = 2 \cdot 10^{-3}/0,4 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Ф}.$$

При данных параметрах для сходственных моментов времени критерии π_2 и π_3 соответственно одинаковы для обоих процессов. Например, при $t_1 = t_2 = 0,125$ с

$$\pi_2 = 30 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 0,125 = 12 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 0,125 = 0,480;$$

$$\pi_3 = 2,62 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 0,125^2 = 1,045 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 0,125^2 = 0,336.$$

Для обоих процессов $R^2 C - 4L < 0$ и, следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$i = \frac{u \exp[-Rt/(2L)] \sin t \sqrt{(4L - R^2 C)/(4L^2 C)}}{L \sqrt{(4L - R^2 C)/(4L^2 C)}}.$$

Ниже приведены результаты расчета значений токов i_1 и i_2 . Соответствующие зависимости $i = f(t)$ представлены на рис. 1.5. Нетрудно видеть, что для сходственных моментов времени отношение токов постоянно: $m_i = 2$.

t , с	0	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875
i_1 , А	0	7,450	0	-1,820	0	0,430	0	-0,093
i_2 , А	0	3,725	0	-0,910	0	0,215	0	-0,047

При этом

$$m_i m_t / (m_u m_C) = 2 \cdot 1/5 \cdot 0,4 = 1.$$

Таким образом, равенства критериев подобия π_2 и π_3 оказывается достаточным для того, чтобы выполнялись условия, накладываемые на масштабы. Поскольку пропорциональность всех параметров существует и эти условия соблюдены, то рассматриваемые процессы подобны. В соответствии со второй формулировкой теоремы о подобии необходимо, чтобы при рассмотрении процесса в натуральном времени $\pi'_2 = L/Rt = \text{idem}$ и $\pi'_3 = RC/t = \text{idem}$ и для определения масштаба

$$\pi'_3 = iR/u = i/i_\infty.$$

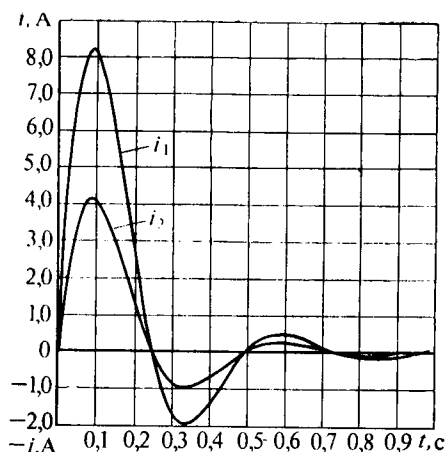


Рис. 1.5

Пример 1.14. Рассмотрим движение ротора синхронного генератора, работающего на шины неизменного напряжения. Уравнение процесса имеет вид

$$\frac{T_J}{360f} \frac{d^2 \delta}{dt^2} - P_0 + P_m \sin \delta = 0,$$

причем

$$P_0/P_m = \sin \delta_0.$$

Для подобия необходимо соблюдение двух критериев:

$$\pi_1 = \sqrt{T_J/(360fP_m)} \quad \text{и} \quad \pi_2 = \delta,$$

где π_1 (при натуральном времени) характеризует требования к установке-модели, π_2 указывает, что при создании подобного процесса угол δ в модели и оригинале должен быть одинаков.

Те же результаты получим, если потребуем, чтобы $\pi_1 = \text{idem}$, и, кроме того, соблюдалось условие однозначности $\delta = \delta_0$. При постоянных масштабах это означает, что $m_\delta = 1$, т. е. что углы δ в подобных системах должны быть равны.

Из рассмотренных примеров видно, что для обеспечения подобия важно установить количество критериев подобия, которые необходимо выполнить, и надлежащим образом выбрать масштабы. Ответ на этот вопрос и дает третья теорема подобия.

§2.1. ПЕРВОЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Первое дополнительное положение о подобии сложных систем. Это положение формулируется следующим образом: *подобие сложных систем, состоящих из подсистем, соответственно подобных в отдельности, обеспечивается подобием всех сходственных элементов и связей, являющихся общими для этих подсистем.*

Для подтверждения справедливости данного положения рассмотрим две сложные системы A и B (рис. 2.1), каждая из которых состоит из двух подсистем a', a'' и b', b'' соответственно. Процессы в системах A и B описываются уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi_A &= \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_{\text{общ}} + \varphi''_{\text{общ}} + \varphi''_1 = 0; \\ \Psi_B &= \psi'_1 + \psi'_2 + \psi'_{\text{общ}} + \psi''_{\text{общ}} + \psi''_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где φ'_1, φ'_2 и ψ'_1, ψ'_2 — члены уравнений, характеризующие «внутренние» процессы в подсистемах a' и b' ; φ''_1 и ψ''_1 — «внутренние» процессы в подсистемах a'' и b'' ; $\varphi'_{\text{общ}}, \varphi''_{\text{общ}}$ и $\psi'_{\text{общ}}, \psi''_{\text{общ}}$ — процессы взаимодействия (взаимосвязи) подсистем a', a'' и b', b'' соответственно.

Рассматривая A и B как единые системы, для процессов Φ_A и Ψ_B в соответствии с правилом интегральных аналогов можно записать критерии подобия:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_2/\varphi'_1 &= \psi'_2/\psi'_1 = \pi_1; & \varphi'_{\text{общ}}/\varphi'_1 &= \psi'_{\text{общ}}/\psi'_1 = \pi_2; \\ \varphi''_{\text{общ}}/\varphi'_1 &= \psi''_{\text{общ}}/\psi'_1 = \pi_3; & \varphi''_1/\varphi'_1 &= \psi''_1/\psi'_1 = \pi_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Для «внутренних» процессов в подсистемах a' и a'' , b' и b'' , рассматриваемых в отдельности, критерии подобия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_2/\varphi'_1 &= \psi'_2/\psi'_1 = \pi_1; & \varphi'_{\text{общ}}/\varphi'_1 &= \psi'_{\text{общ}}/\psi'_1 = \pi_2; \\ \varphi''_{\text{общ}}/\varphi'_1 &= \psi''_{\text{общ}}/\psi'_1 = \pi_3; & \varphi''_1/\varphi'_1 &= \psi''_1/\psi'_1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Подобие каждой из подсистем, образующих системы A и B , обеспечивается в соответствии с третьей теоремой подобием граничных условий, которые в данном случае характеризуются процессами $\varphi'_{\text{общ}}, \varphi''_{\text{общ}}$ и $\psi'_{\text{общ}}, \psi''_{\text{общ}}$, т. е. связями между подсистемами (одновременно являющимися общими для соответствующих подсистем сходственными «элементами»):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{общ}}^{\circ}/\Phi_1^{\circ} &= \psi_{\text{общ}}^{\circ}/\psi_1^{\circ} = \pi_6; & \Phi_{\text{общ}}^{\circ}/\Phi_{\text{общ}}^{\circ} &= \psi_{\text{общ}}^{\circ}/\psi_{\text{общ}}^{\circ} = \pi_8; \\ \Phi_{\text{общ}}^{\circ}/\Phi_1^{\circ} &= \psi_{\text{общ}}^{\circ}/\psi_1^{\circ} = \pi_7. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В соответствии с правилами преобразования критериев подобия для (2.4)

$$\pi_6 \pi_8 / \pi_7 = \frac{\Phi_{\text{общ}}^{\circ} \Phi_1^{\circ} \Phi_{\text{общ}}^{\circ}}{\Phi_1^{\circ} \Phi_{\text{общ}}^{\circ} \Phi_{\text{общ}}^{\circ}} = \frac{\Phi_1^{\circ}}{\Phi_1^{\circ}} = \pi_4. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.3) — (2.5) приводят к критериям подобия π_1 — π_4 , тождественным (2.2).

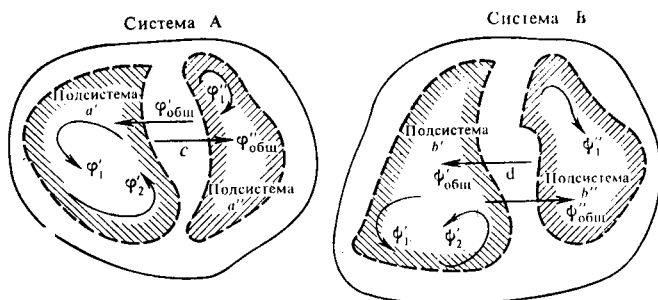


Рис. 2.1

Таким образом, для подобия сложных систем, образованных несколькими подсистемами, подобными в отдельности, необходимо равенство критериев подобия, которые составлены из параметров, общих для этих подсистем. Общая часть подсистем, составляющих сложную систему, может рассматриваться как самостоятельная подсистема, условия обеспечения подобия которой определяются соответствующими теоремами.

При обосновании первого дополнительного положения неявно предполагалось, что рассматриваются геометрически подобные и изотропные системы с детерминированно определенными линейными или постоянными параметрами. Однако, как будет показано далее, первое дополнительное положение справедливо и в тех случаях, когда рассматриваются сложные геометрически неподобные анизотропные системы с нелинейными или переменными параметрами, заданными вероятностными (статистическими) характеристиками.

Следствие первого дополнительного положения. Анализ прикладного содержания первого дополнительного положения позволяет сформулировать следующие два следствия.

С л е д с т в и е 1. Если каждые две системы, в отдельности подобные двум другим системам, сходственно соединены между собой через третьи системы, то и образовавшиеся при этом две новые (сложные) системы будут подобны при подобии соединяющих их систем (в состав соединяющих систем входят как общие элементы соединяемых систем, так и элементы, относящиеся только к соединяющим системам). В соответствии с этим следствием система-модель, к которой присоедине-

ны натурные устройства (регуляторы, защитная, измерительная и иная аппаратура), будет подобна системе-оригиналу, если сохранены подобными условия присоединения.

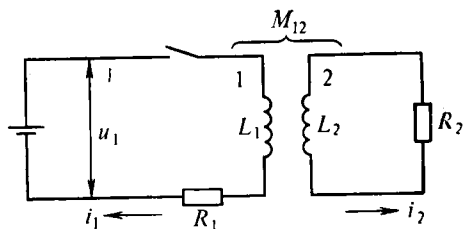


Рис. 2.2

Следствие 2. Две подобные системы остаются подобными после любых преобразований, выполненных соответственно одинаково в обеих системах.

В соответствии с этим следствием оценка влияния различных допущений и уточнений на рассмотрение процессов в оригинале возможна на основании сопоставления результатов экспериментов, получаемых на упрощенных и усложненных (более полных) моделях, подобных оригиналу; аналогично на основании анализа результатов экспериментов на физических моделях может оцениваться рациональная полнота математического описания (математической модели) исследуемого объекта.

Пример 2.1. Определить критерии подобия электрической цепи с взаимной индукцией M_{12} , образованной двумя (1 и 2) взаимно неподвижными контурами RL ; контур 2 ($R_2 L_2$) короткозамкнут, а контур 1 ($R_1 L_1$) включается на постоянное напряжение u_1 (рис. 2.2). Предполагается, что математическое описание процессов отсутствует.

Рассматривая функциональную зависимость

$$f(R_1, L_1, R_2, L_2, u_1, M_{12}, i_1, i_2, t) = 0, \quad (2.6)$$

характеризующую процессы в данной цепи, критерии подобия можно установить с помощью π -теоремы в сочетании с первым дополнительным положением о подобии. Для этого представим рассматриваемую цепь, как сложную систему, образованную двумя подсистемами — контурами $R_1 L_1$ и $R_2 L_2$, взаимодействие между которыми обуславливается индуктивной связью с коэффициентом M_{12} .

Согласно соотношениям (1.36) критерии подобия контуров 1 и 2 как самостоятельных подсистем будут

$$\pi_1^{(1)} = u_1 / (i_1 R_1); \quad \pi_2^{(1)} = L_1 / (R_1 t); \quad \pi_3^{(2)} = L_2 / (R_2 t). \quad (2.7)$$

В соответствии с первым дополнительным положением необходимо также обеспечить подобие всех сходственных элементов, общих для подсистем; в данном случае общий элемент контуров 1 и 2 — взаимноиндуктивная связь с коэффициентом M_{12} , размерность которого совпадает с размерностями L_1 и L_2 . На основании (1.36) и (2.6) при независимых параметрах i_1, R_1, t и i_2, R_2, t критериями подобия, отражающими взаимодействие подсистем, будут

$$\pi_3^{(1)} = \frac{M_{12}}{R_1 t} = \frac{T M_1}{t}; \quad \pi_3^{(2)} = \frac{M_{12}}{R_2 t} = \frac{T M_2}{t}; \quad \pi_4^{(1)} = \frac{i_2}{i_1}; \quad \pi_4^{(2)} = \frac{i_1}{i_2}. \quad (2.8)$$

Таким образом, для рассматриваемой сложной системы получено семь критериев подобия, определяемых соотношениями (2.7) и (2.8), которые могут быть приведены к виду, тождественному (1.34).

Полагая далее в качестве определяемых критериев подобия для контуров 1 и 2 критерии $\pi_1^{(1)}$ и $\pi_4^{(2)}$, соответственно для первой и второй подсистем можно записать критериальные уравнения:

$$\pi_1^{(1)} = f_1(\pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}, \pi_4^{(1)}); \quad (2.9a)$$

$$\pi_1^{(2)} = f_2(\pi_2^{(2)}, \pi_3^{(2)}). \quad (2.96)$$

Учитывая, что $\pi_4^{(1)}$ эквивалентно $\pi_4^{(2)}$, можно, заменив в (2.9а) $\pi_4^{(1)}$ на (2.96), получить окончательное критериальное уравнение рассматриваемой сложной системы:

$$\pi_1^{(1)} = F(\pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}, \pi_2^{(2)}, \pi_3^{(2)}). \quad (2.9)$$

Таким образом, для подобию процессов в электрических цепях с двумя индуктивно связанными взаимно неподвижными контурами необходимо и достаточно равенство четырех определяющих критериев подобию:

$$\pi_2^{(1)} = T_{L1}/t; \quad \pi_3^{(1)} = T_{M1}/t; \quad \pi_2^{(2)} = T_{L2}/t; \quad \pi_3^{(2)} = T_{M2}/t. \quad (2.10)$$

Рассмотренный подход к определению критериев подобию останется справедливым и для сложной разветвленной цепи, содержащей любое количество взаимных индуктивностей и любое число источников питания. Всякая разветвленная цепь, подобная другой разветвленной цепи той же конфигурации, может быть составлена из подобных между собой контуров. Действующие в данной цепи э.д.с. (напряжения) при этом должны находиться в тех же соотношениях, какие имеются в цепи, подобной данной. При этом пропорциональные изменения значений всех э.д.с. данной цепи влияют на масштаб токов, не меняя подобию процессов.

В общем случае подобные разветвленные цепи (многополюсники) должны обладать одинаковой конфигурацией, равными относительными постоянными времени сходственных ветвей многополюсников, пропорциональностью всех э.д.с. и токов одного многополюсника соответствующим э.д.с. и токам другого многополюсника.

§ 2.2. ВТОРОЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Второе дополнительное положение о подобию систем с нелинейными или переменными параметрами. Это положение формулируется следующим образом: условия подобию линейных сложных систем могут быть распространены на системы с нелинейными или переменными параметрами, если удовлетворяется дополнительное требование совпадения относительных характеристик сходственных нелинейных или переменных параметров.

Для подтверждения справедливости данного положения рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$f(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k, \dots, P_n, \dots, P_m) = 0, \quad (2.11)$$

в котором параметр P_n является нелинейной функцией параметра P_i :

$$P_n = \varphi(P_i). \quad (2.12)$$

Обычно зависимости типа (2.12) задаются в виде кривых, полученных экспериментально, и могут быть аппроксимированы, например, степенным многочленом

$$P_n = a_0 + a_1 P_i + a_2 P_i^2 + a_3 P_i^3 + \dots + a_n P_i^n, \quad (2.13)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — размерные постоянные коэффициенты.

В общем случае аппроксимирующая (2.12) функциональная зависимость типа (2.13) имеет вид

$$\Phi(P_n, P_i, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0. \quad (2.14)$$

Таким образом, при наличии в уравнении (2.11) одного нелинейного параметра необходимо рассматривать совместно (2.11) и (2.14).

Согласно л-теореме уравнения (2.11) и (2.14) можно представить в критериальной форме:

$$\pi_1 = f_1 (\pi_2, \dots, \pi_n, \dots, \pi_{m-k}); \quad (2.15)$$

$$\pi_n = \Phi_1 (\pi_{a0}, \pi_{a1}, \dots, \pi_{an}), \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \dots P_i^{x_i} \dots P_k^{x_k}}; & \pi_n &= \frac{P_n}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i} \dots P_k^{y_k}}; \\ &\dots\dots\dots & \pi_{a0} &= \frac{a_0}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i} \dots P_k^{y_k}}; \\ \pi_n &= \frac{P_n}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i} \dots P_k^{y_k}}; & \pi_{a1} &= \frac{a_1}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i-1} \dots P_k^{y_k}}; \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ \pi_{m-k} &= \frac{P_m}{P_1^{z_1} \dots P_i^{z_i} \dots P_k^{z_k}}; & \pi_{an} &= \frac{a_n}{P_1^{y_1} \dots P_i^{y_i-n} \dots P_k^{y_k}}. \end{aligned}$$

Согласно третьей теореме, для соблюдения подобия при отсутствии нелинейных параметров необходимо и достаточно равенство $m - k - 1$ критериев подобия. В рассматриваемом случае это условие дополняется требованием равенства критериев $\pi_{a0}, \pi_{a1}, \pi_{a2}, \dots, \pi_{an}$, характеризующих подобие изменения нелинейного параметра, поскольку критерий π_n является их функцией, что эквивалентно требованию совпадения относительной характеристики нелинейного параметра.

Рассмотренный подход остается справедливым и для систем с не-сколькими нелинейными параметрами.

Предположим, что m параметров исследуемого процесса связаны зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= f_1 (P_2, P_3, \dots, P_m) P_2; \\ P_2 &= f_2 (P_1, P_3, \dots, P_m) P_3; \\ &\dots\dots\dots \\ P_m &= f_m (P_1, P_2, \dots, P_{m-1}) P_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17a)$$

Для каждого параметра выберем некоторую характерную величину, в долях от которой представим зависимости (2.17a). Пусть эти характерные величины имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} P_{10} &= f_{10} (P_{20}, P_{30}, \dots, P_{m0}) P_{20}; \\ P_{20} &= f_{20} (P_{10}, P_{30}, \dots, P_{m0}) P_{30}; \\ &\dots\dots\dots \\ P_{m0} &= f_{m0} (P_{10}, P_{20}, \dots, P_{(m-1)0}) P_{(m-1)0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.176)$$

Тогда из (2.17a) и (2.176) получим

$$\left. \begin{aligned} P_1/P_{10} &= (f_1/f_{10}) (P_2/P_{20}), & \text{или} & & P_{*1} &= f_{*1} P_{*2}; \\ P_2/P_{20} &= (f_2/f_{20}) (P_3/P_{30}), & \text{или} & & P_{*2} &= f_{*2} P_{*3}; \\ &\dots\dots\dots & & & & \\ P_m/P_{m0} &= (f_m/f_{m0}) (P_{m-1}/P_{(m-1)0}), & \text{или} & & P_{*m} &= f_{*m} P_{*m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Для подобных систем с переменными параметрами аналогичными преобразованиями можно получить соотношения типа (2.17), эквивалентные требованию совпадения относительных характеристик переменных параметров. Таким образом, в рассмотренных случаях для обеспечения подобия необходимо выполнение дополнительного требования совпадения относительных характеристик сходственных переменных или нелинейных параметров, выраженных в долях от некоторых характерных (базисных) значений.

Пример 2.2. Обеспечить подобие зависимостей $\mu_1(H_1)$, $\mu_2(H_2)$ и $\mu_3(H_3)$, представленных на рис. 2.3.

Для каждой из зависимостей $\mu_i(H_i)$, $i = 1, 2, 3$, вводятся соответствующие базисные значения параметров μ_{i0} и H_{i0} , после чего характеристики $\mu_i(H_i)$ строятся в новой системе координат $\mu_* = \Phi(H_*)$, где $\mu_* = \mu_i/\mu_{i0}$ и $H_* = H_i/H_{i0}$.

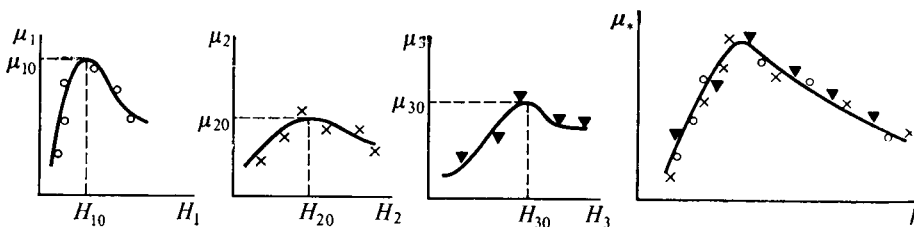


Рис. 2.3

Пример 2.3. Определить критерии подобия электрической цепи с нелинейной индуктивностью. Рассматривается переходный процесс $i(t)$, который возникает при включении на постоянное напряжение u цепи с активным сопротивлением R и переменной (динамической) индуктивностью L_d , являющейся нелинейной функцией тока i (рис. 2.4).

При определении критериев подобия воспользуемся соотношениями (2.11) — (2.16). Рассматриваемая зависимость имеет вид

$$f(i, u, R, L_d, t) = 0, \quad (2.11a)$$

где

$$L_d = \Phi(i). \quad (2.12a)$$

Зависимость $L_d = \Phi(i)$ может быть аппроксимирована степенным многочленом

$$L_d = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots + (-1)^n a_n i^n. \quad (2.13a)$$

Представляя (2.13a) в виде

$$\Phi(L_d, i, a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, \quad (2.14a)$$

на основании π -теоремы определяем критерии подобия для (2.11a), принимая в качестве независимых параметров i, R, t (см. пример 1.6):

$$\pi_1 = u/(iR); \quad \pi_2 = \pi_n = L_d/(Rt).$$

Размерные коэффициенты ряда (2.13a) можно также выразить через систему независимых параметров i, R, t в соответствующих степенях. Поэтому критерии, полученные из уравнения (2.14a), имеют вид

$$\pi_n = L_d/(i^n R t);$$

$$\pi_{a0} = a_0/(i^0 R t); \quad \pi_{a1} = a_1/(i^{-1} R t);$$

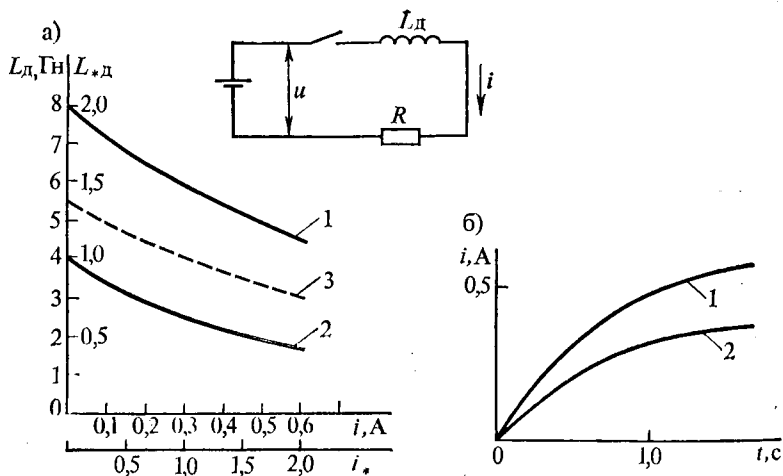


Рис. 2.4

$$\pi_{a2} = a_2 / (i^{-2} R t); \dots; \pi_{an} = a_n / (i^{-n} R t),$$

а критериальное уравнение (2.16) записывается следующим образом:

$$\pi_n = \pi_{a0} - \pi_{a1} + \pi_{a2} - \pi_{a3} + \pi_{a4} - \pi_{a5}. \quad (2.16a)$$

Рассмотрим две цепи, первая из которых характеризуется параметрами $u_1 = 6$ В, $R_1 = 10$ Ом, L_{d1} , а вторая — параметрами $u_2 = 2$ В, $R_2 = 5$ Ом, L_{d2} . Зависимости $L_{d1} = f(i_1)$ и $L_{d2} = f(i_2)$, представленные на рис. 2.4, а (кривые 1 и 2 соответственно), на основании (2.13а) аппроксимируются многочленами:

$$L_{d1} = 8 - 8i_1 + 4i_1^2 - 1,333i_1^3 + 0,333i_1^4 - 0,067i_1^5 \text{ [Гн]}; \quad (2.13б)$$

$$L_{d2} = 4 - 6i_2 + 4,5i_2^2 - 2,25i_2^3 + 0,845i_2^4 - 0,253i_2^5 \text{ [Гн]}. \quad (2.13в)$$

В результате решения нелинейного дифференциального уравнения вида (1.24) при $L = L_d$ для двух процессов получены зависимости токов i_1 и i_2 от времени, представленные на рис. 2.4, б. Значения токов для сходственных моментов времени приведены ниже:

$t, \text{ с} \dots$	0,08	0,17	0,26	0,36	0,47	0,60	0,75	0,96	1,28	∞
$i_1, \text{ А} \dots$	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60
$i_2, \text{ А} \dots$	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40

Значения критериев подобия $\pi_1, \pi_{a0}, \pi_{a1}, \dots, \pi_{a5}$ для двух процессов в сходственные моменты времени соответственно равны. Например, для момента времени $t = 0,6$ с критерии первого (π') и второго (π'') процессов принимают следующие значения:

$\pi'_0 = 6 / (0,36 \cdot 10) = 1,667;$	$\pi''_1 = 2 / (0,24 \cdot 5) = 1,667;$
$\pi'_{a0} = 8 / (10 \cdot 0,6) = 1,333;$	$\pi''_{a0} = 4 / (5 \cdot 0,6) = 1,333;$
$\pi'_{a1} = 8 \cdot 0,36 / (10 \cdot 0,6) = 0,48;$	$\pi''_{a1} = 6 \cdot 0,24 / (5 \cdot 0,6) = 0,48;$
$\pi'_{a2} = 4 \cdot 0,36^2 / (10 \cdot 0,6) = 8,64 \cdot 10^{-2};$	$\pi''_{a2} = 4 \cdot 5 \cdot 0,24^2 / (5 \cdot 0,6) = 8,64 \cdot 10^{-2};$
$\pi'_{a3} = 1,333 \cdot 0,36^3 / (10 \cdot 0,6) = 1,04 \cdot 10^{-2};$	$\pi''_{a3} = 2,25 \cdot 0,24^3 / (5 \cdot 0,6) =$
	$= 1,04 \cdot 10^{-2};$

$$\begin{aligned}\pi_{a4}' &= 0,333 \cdot 0,36^4 / (10 \cdot 0,6) = 9,32 \cdot 10^{-4}; \quad \pi_{a4}'' = 0,845 \cdot 0,24^4 / (5 \cdot 0,6) = \\ &= 9,34 \cdot 10^{-4}; \\ \pi_{a5}' &= 0,067 \cdot 0,36^5 / (10 \cdot 0,6) = 6,75 \cdot 10^{-5}; \quad \pi_{a5}'' = 0,253 \cdot 0,24^5 / (5 \cdot 0,6) = \\ &= 6,72 \cdot 10^{-5}; \\ \pi_n' &= 0,9299. \quad \pi_n'' = 0,9299.\end{aligned}$$

Равенство критериев подобия π_1 и $\pi_2 = \pi_n$ для сходственных моментов времени означает подобие рассматриваемых процессов. Дополнительным подтверждением этому служит постоянно масштаб по току для сходственных моментов времени: $m_i = i_1/i_2 = \text{const} = 1,5$.

Таким образом, подобие процессов в нелинейных системах требует равенства критериев $\pi_{a0}, \dots, \pi_{an}$, характеризующих подобие изменения переменного параметра, что в свою очередь эквивалентно требованию совпадения его относительных характеристик. Общая для рассматриваемых цепей относительная характеристика $L_{*д} = f(i_*)$, построенная при базисных условиях ($L_{10} = 5,8$ Гн, $i_{10} = A \cdot 0,3$ и $L_{20} = 2,9$ Гн, $i_{20} = 0,2A$), приведена на рис. 2.4, а (кривая 3).

Пример 2.4. Определить критерии подобия для процесса вынужденных механических колебаний с демпфированием, рассмотренного в примере 1.7, если коэффициент демпфирования K нелинейно зависит от скорости v , т. е. $K = f(v)$, причем эта нелинейная характеристика задана графически.

Из физических и практических соображений установим базисные значения ($K = K_0$, $v = v_0$) и представим нелинейную характеристику в относительных единицах. Дополнительный (5-й) критерий подобия, учитывающий нелинейность, будет иметь вид

$$\pi_5 = K/K_0 = \varphi(v/v_0) = K_* = \varphi(v_*) = \text{idem}.$$

При другом подходе зависимость $K = f(v)$ можно представить степенным многочленом вида (2.13)

$$K = a_0 - a_1 v + a_2 v^2 - a_3 v^3 \dots (-1)^n a_n v^n \dots$$

Далее в соответствии с (2.14) и (2.16) определяется критерий π_5 , характеризующий подобие изменения переменного (нелинейного) параметра $K = f(v)$, причем для обеспечения подобия необходимо, чтобы

$$\pi_5 = \Phi_1(\pi_{a0}, \pi_{a1}, \pi_{a2}, \pi_{a3}, \dots, \pi_{an}) = \text{idem}.$$

Согласно второму положению для подобия систем с переменными или нелинейными параметрами необходимо выполнение дополнительного требования $L_* = f(t_*) = \text{idem}$ или $M_* = f(t_*) = \text{idem}$; для любого другого параметра Π (C , R и т. д.) — требования $\Pi_* = f(t_*) = \text{idem}$. Обобщая приведенные рассуждения на случаи, когда параметр изменяется по любому (в общем случае неперiodическому) закону $\Pi = \varphi(t)$, можно заключить, что для подобия систем с переменными параметрами необходимо выполнение дополнительного требования одинакового относительного их изменения во времени. Данный вывод можно распространить и на системы, содержащие любые переменные параметры.

Пример 2.5. Определить критерии подобия электрической цепи с взаимной индукцией M_{12} , образованной двумя (1 и 2) взаимно перемещающимися контурами RL ; контур 1 ($R_1 L_1$) включается на постоянное напряжение u_1 , контур 2 ($R_2 L_2$) короткозамкнут (рис. 2.5). При взаимном перемещении контуров по заданному закону со скоростью v коэффициент взаимной индукции M_{12} изменяется во времени t , т. е. $M_{12} = f(t)$.

Критерии подобия вида (2.10), полученные при $M_{12} = \text{const}$ (пример 2.3), требуют равенства относительных постоянных времени $T_{*L} = T_L/t$ и $T_{*M} =$

$= T_M/t$ контуров 1 и 2. В цепях с $M_{12} = f(t)$ система критериев (2.10) дополняется требованием относительного одинакового изменения данного параметра во времени, т. е.

$$M_{*12} = f(t_*) = \text{idem}.$$

Соответствующие этому требованию критерии подобия при заданном (аналитически или графически) законе изменения M_{12} можно получить любым из известных способов. Например, при линейном характере изменения M_{12} по закону $M_{12} = M_{120} - kt$ вместо критериев $\pi_3^{(1)} = M_{12}/(R_1 t)$ и $\pi_3^{(2)} = M_{12}/(R_2 t)$ для случая $M_{12} = \text{const}$ получим критерии, которые характеризуют подобие изменения M_{12} во времени, обеспечивают совпадение относительных характеристик $M_{*12} = f(t_*)$:

$$\left. \begin{aligned} \pi_3^{(1a)} &= M_{120}/(R_1 t); \quad \pi_3^{(1b)} = k/R_1; \\ \pi_3^{(2a)} &= M_{120}/(R_2 t); \quad \pi_3^{(2b)} = k/R_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Выводы, полученные для частного случая, изменения взаимной индукции двух контуров, можно распространить и на случаи изменения каких-либо других параметров в функции скорости перемещения контуров.

В примере 2.5 предполагалось, что обратное воздействие электрического состояния цепи на механическое отсутствует, т. е. скорость перемещения не зависит от взаимодействия токов, протекающих по контурам. При этом подобие электрических процессов определялось системой критериев подобия вида $T_{*L} = \text{idem}$ и дополнительным условием $M_{*12} = f(t) = \text{idem}$.

При установлении критериев подобия цепей с динамическими параметрами, электрическое состояние которых связано с механическим, необходимо дополнительно рассмотреть функциональные зависимости, характеризующие взаимосвязь этих состояний. Устанавливая критерии подобия на основе первого и второго дополнительных положений, сначала определяют систему критериев подобия, предполагая, что динамические параметры постоянны. Далее эту систему критериев дополняют критериями, характеризующими подобие изменения переменных параметров.

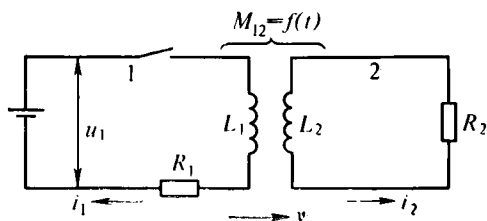


Рис. 2.5

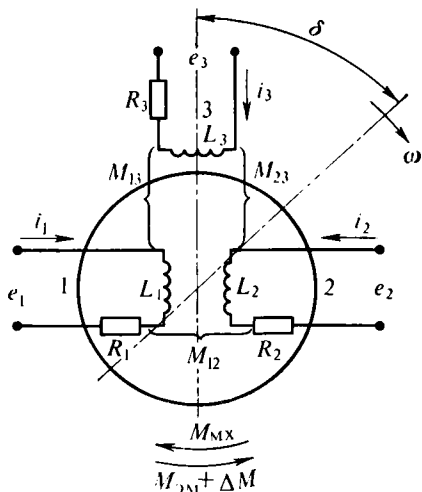


Рис. 2.6

Пример 2.6. Определить критерии подобия системы с динамическими параметрами, состоящей из электрических контуров 1, 2 и 3, обладающих активными сопротивлениями R_1, R_2, R_3 , индуктивностями L_1, L_2, L_3 и взаимноиндуктивностями M_{12}, M_{13}, M_{23} (рис. 2.6).

Пусть электрические контуры 1 и 2, жестко связанные между собой, перемещаются относительно контура 3, вращаясь под действием некоторого постоянного механического момента $M_{\text{мх}}$ с угловой скоростью ω . Это перемещение приводит к изменению всех индуктивностей и взаимноиндуктивностей.

Принимая за обобщенную геометрическую координату угол δ поворота оси контура 1 относительно некоторой условно выбранной оси отсчета, можем записать:

$$\left. \begin{aligned} M_{13} &= f_1(\delta); M_{23} = f_2(\delta); M_{12} = f_3(\delta); \\ L_1 &= \varphi_1(\delta); L_2 = \varphi_2(\delta); L_3 = \varphi_3(\delta), \end{aligned} \right\} \quad (2.19a)$$

где вид функций $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ зависит от геометрических параметров связанных контуров.

Дифференциальные уравнения, характеризующие электрическое состояние системы, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= i_1 R_1 + \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3); \\ e_2 &= i_2 R_2 + \frac{d}{dt} (L_2 i_2 + M_{21} i_1 + M_{23} i_3); \\ e_3 &= i_3 R_3 + \frac{d}{dt} (L_3 i_3 + M_{31} i_1 + M_{32} i_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.19б)$$

Дифференциальные уравнения, характеризующие перемещение контуров, имеют вид:

$$J d^2 \delta / dt^2 = M_{\text{мх}} - M_{\text{эм}} - \Delta M; M_{\text{эм}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \omega} - \frac{dW}{d\delta}, \quad (2.19в)$$

где J — момент инерции вращающихся контуров 1 и 2; $M_{\text{мх}}$ — внешний механический момент; $M_{\text{эм}}$ — электромагнитный момент, действующий между неподвижным контуром 3 и перемещающимися относительно него контурами 1 и 2; ΔM — вращающий момент, обусловленный трением; W — энергия магнитного поля системы.

Полагая, что динамические параметры (2.19) постоянны, критерии подобия можно найти как способом интегральных аналогов, так и на основании л-теоремы и первого дополнительного положения. Применяя способ интегральных аналогов, критерии подобия можно определить из (2.19б) и (2.19 в) аналогично примеру 1.5. При использовании л-теоремы и первого дополнительного положения по аналогии с примером 2.1 целесообразно рассматривать четыре подсистемы: в качестве трех подсистем принимаются контуры, характеризующиеся электрическими параметрами $i_1, i_2, i_3, e_1, e_2, e_3, R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, M_{12}, M_{13}, M_{23}, t$; четвертая подсистема характеризуется механическими параметрами $M_{\text{мх}}, M_{\text{эм}}, \Delta M, W, J, \delta, t, \omega$. Угол δ необходимо рассматривать как размерную величину, поэтому в соответствии с правилом Фурье и (2.19 в) формулы размерностей $M_{\text{мх}}, M_{\text{эм}}, \Delta M, J, \omega$ имеют вид:

$$[M_{\text{мх}}] = [L^2 M^1 T^{-2} I^0 \delta^{-1}] = [M_{\text{эм}}] = [\Delta M];$$

$$[J] = [L^2 M^1 T^0 I^0 \delta^{-2}]; [\omega] = [L^0 M^0 T^{-1} I^0 \delta^1].$$

После выполнения соответствующих преобразований систему критериев подобия при постоянстве динамических параметров можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \pi_1^{(1)} &= \frac{e_1}{i_1 R_1} ; \pi_2^{(1)} = \frac{I_1}{R_1 t} ; \pi_3^{(1)} = \frac{M_{12}}{R_1 t} ; \pi_4^{(1)} = \frac{M_{13}}{R_1 t} ; \\ \pi_1^{(2)} &= \frac{e_2}{i_2 R_2} ; \pi_2^{(2)} = \frac{L_2}{R_2 t} ; \pi_3^{(2)} = \frac{M_{21}}{R_2 t} ; \pi_4^{(2)} = \frac{M_{22}}{R_2 t} ; \\ \pi_1^{(3)} &= \frac{e_3}{i_3 R_3} ; \pi_2^{(3)} = \frac{L_3}{R_3 t} ; \pi_3^{(3)} = \frac{M_{31}}{R_3 t} ; \pi_4^{(3)} = \frac{M_{32}}{R_3 t} ; \\ \pi_1^{(4)} &= \frac{J \delta}{M_{MX} t^3} ; \pi_2^{(4)} = \frac{M_{\partial M}}{M_{MX}} ; \pi_3^{(4)} = \frac{\Delta M}{M_{MX}} ; \\ \pi_4^{(4)} &= \frac{M_{\partial M} \delta}{W} ; \pi_6^{(4)} = \frac{\delta}{\omega t} . \end{aligned} \right\} \quad (2.20a)$$

В соответствии со вторым дополнительным положением система критериев (2.20а) должна быть дополнена критериями, характеризующими подобие переменных параметров (2.19а), что эквивалентно требованию совпадения сходственных относительных характеристик:

$$\left. \begin{aligned} L_{*1} &= \varphi_1(\delta_*) = \text{idem}; L_{*2} = \varphi_2(\delta_*) = \text{idem}; L_{*3} = \varphi_3(\delta_*) = \text{idem}; \\ M_{*13} &= \psi_1(\delta_*) = \text{idem}; M_{*23} = \psi_2(\delta_*) = \text{idem}; \\ M_{*12} &= \psi_3(\delta_*) = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (2.206)$$

Нелинейно подобные преобразования. На представлении нелинейных зависимостей в виде относительных характеристик основываются так называемые нелинейно подобные преобразования. Пусть m величин $(x_1, \dots, x_m)$ одной системы (X) связаны функциональными соотношениями с величинами $(y_1, \dots, y_m)$ другой системы (Y) :

$$x_1 = \psi_1 y_1, \psi_1 = F_1(y_1, \dots, y_m); \dots; x_m = \psi_m y_m, \psi_m = F_m(y_1, \dots, y_m). \quad (2.21a)$$

Выбрав характерные величины, представим (2.21а) соотношениями

[illegible]

для которых на основании формул перехода к относительным характеристикам типа $x_1/x_{10} = (\psi_1/\psi_{10}) (y_1/y_{10})$ можно окончательно записать уравнения преобразований с использованием относительных характеристик нелинейных величин в виде

$$x_{*1} = \psi_{*1} y_{*1}; \dots x_{*m} = \psi_{*m} y_{*m}. \quad (2.22)$$

Таким образом, возможен нелинейно подобный переход от системы X к системе Y (см. пример 1.1).

Нелинейно подобным преобразованием является также переход от одной области пространства V_1 , ограниченной поверхностью S_1 , к другой области V_2 , ограниченной поверхностью S_2 . Эти области будут нелинейно подобными, если для каждой точки x_1, y_1, z_1 на поверхности S_1 можно с помощью нелинейно подобного преобразования найти со-

ответствующую точку x_2, y_2, z_2 на поверхности S_2 . При этом координаты сходственных точек будут связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \psi_{x2} x_1; & \psi_{x2} &= F_x(x_1, y_1, z_1); \\ y_2 &= \psi_{y2} y_1; & \psi_{y2} &= F_y(x_1, y_1, z_1); \\ z_2 &= \psi_{z2} z_1; & \psi_{z2} &= F_z(x_1, y_1, z_1) \end{aligned} \right\}$$

или

$$x_2/x_{20} = (\psi_{x2}/\psi_{x20})(x_1/x_{10}) \text{ и } x_{*2} = \psi_{*x2} x_{*1} \text{ и т. д.} \quad (2.23)$$

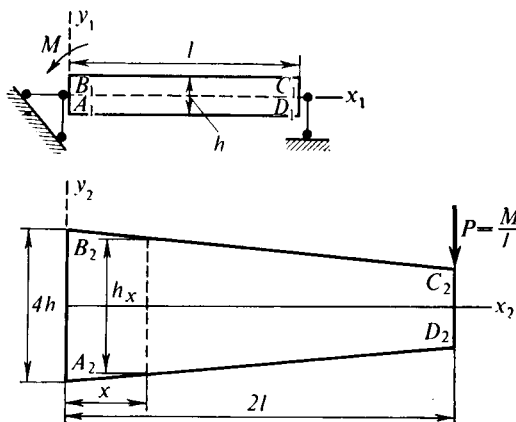


Рис. 2.7

Если функции нелинейно подобного преобразования имеют постоянные значения $\psi_{x2} = m_x$; $\psi_{y2} = m_y$; $\psi_{z2} = m_z$, то области V_1 и V_2 и соответственно поверхности S_1 и S_2 будут *аффинно подобными*, а при $m_x = m_y = m_z = m$ они превратятся в *геометрически подобные* области (см. рис. 1.1 и 1.2).

Пример 2.7. Определить функции нелинейно подобного преобразования f_σ и f_τ для стационарных полей компонентов напряжений σ и τ двух балок, находящихся в плоском напряженном состоянии (рис. 2.7); размер, перпендикулярный плоскости рисунка, в обоих случаях принят равным единице.

Напряженные состояния первой и второй балок характеризуются соответственно компонентами

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= 12M(l-x_1)y_1/(h^3 l); & \sigma_{y1} &= 0; \\ \tau_{xy1} &= 6M(h^2/4-y_1^2)/(h^3 l); \\ \sigma_{x2} &= 12Ml^3(2l-x_2)y_2/[h^3(4l-x_2)^3]; & \sigma_{y2} &= 0; \\ \tau_{xy2} &= [3Mh^2(2-x_2/2l)^3-y_2^2]/[4h^3 l(2-x_2/2l)^3]. \end{aligned}$$

Анализ конфигураций и размеров обеих балок позволяет установить, что они нелинейно подобны: любой точке с координатами x_1 и y_1 геометрической фигуры $A_1B_1C_1D_1$ (первая балка) можно поставить в соответствие точку с координатами x_2 и y_2 геометрической фигуры $A_2B_2C_2D_2$ (вторая балка) такую, что координаты этих точек будут связаны соотношениями

$$x_2 = f_x x_1 = 2x_1; \quad y_2 = f_y y_1 = 2(2-x_1/l)y_1.$$

Если в уравнениях для σ_{x2} и τ_{xy2} выразить x_2 и y_2 через x_1 и y_1 , то после соответствующих преобразований можно записать

$$\sigma_{x2} = \sigma_{x1} / [2 (2 - x_1/l)^2] = f_{\sigma x2} \sigma_{x1};$$

$$\tau_{xy2} = \tau_{xy1} / [2 (2 - x_1/l)] = f_{\tau xy2} \tau_{xy1}.$$

Следовательно, поля соответствующих компонентов напряжения в сопоставляемых балках будут нелинейно подобными, если при принятых размерах и конфигурациях балок функции нелинейного преобразования определить выражениями:

$$f_{\sigma x2} = 1 / [2 (2 - x_1/l)^2]; \quad f_{\tau xy2} = 1 / [2 (2 - x_1/l)];$$

$f_{\sigma y2}$ — произвольна, поскольку $\sigma_{y2} = f_{\sigma y2} \sigma_{y1}$, но $\sigma_{y2} = \sigma_{y1} = 0$.

Таким образом, для физического моделирования напряженного состояния балки определенной конфигурации можно использовать балку другой конфигурации, процессы в которой описываются иными по отношению к оригиналу уравнениями, если установлены функции взаимного соответствия между сходственными величинами оригинала и модели.

§ 2.3. ТРЕТЬЕ, ЧЕТВЕРТОЕ И ПЯТОЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Третье дополнительное положение о подобии анизотропных или неоднородных систем. Это положение формулируется следующим образом: *условия подобия изотропных или однородных систем могут быть распространены на анизотропные или неоднородные системы, если удовлетворяется дополнительное требование обеспечения одинаковой относительной анизотропии или неоднородности сходственных параметров сопоставляемых систем.*

Изотропные системы характеризуются одинаковостью физических свойств (электропроводность, теплопроводность, упругость и т. п.) по всем направлениям внутри данной системы; анизотропные системы имеют неодинаковые физические свойства по различным направлениям. В однородных системах все элементы обладают постоянными по значениям сходственными физическими параметрами; неоднородные системы имеют переменные значения сходственных параметров, характеризующих физические свойства, для различных элементов системы.

Таким образом, изотропия и анизотропия характеризуют систему с точки зрения изменения значений параметров элементов системы по различным направлениям, тогда как однородность и неоднородность (в том или ином смысле) являются характеристикой изменения параметров элементов системы по абсолютному значению.

Если система обладает неоднородностью (или анизотропией), зависящей от параметров процесса, то ее можно рассматривать как нелинейную с параметрами, изменяющимися во времени и в пространстве или только в пространстве. Третье дополнительное положение в этом случае не отличается принципиально от второго и не требует специального доказательства. Подход к установлению условий подобия систем, обладающих неоднородностью и анизотропией, остается в любом случае таким же, как и подход к установлению критериев подобия нелинейных систем.

Четвертое дополнительное положение о подобии физических процессов при отсутствии геометрического подобия. Это положение фор-

мулируется следующим образом: условия подобия процессов в геометрически подобных системах могут быть распространены на геометрически не подобные системы, если выполняется дополнительное требование обеспечения такого нелинейного подобия пространства параметров системы, при котором существуют подобные изменения параметров процесса в нелинейно сходственных точках этого пространства.

Если физические процессы в областях V_1 и V_2 могут быть представлены непрерывными функциями

$$P_1 = F(x_1, y_1, z_1); \quad P_2 = F_2(x_2, y_2, z_2),$$

то функция P_1 подобна соответствующей функции P_2 , когда для нелинейно сходственных точек областей V_1 и V_2 справедливы соотношения

$$P_2 = \psi_2 P_1; \quad \psi_2 = \psi_1(x_1, y_1, z_1),$$

где x_1, y_1, z_1 — пространственные координаты области V_1 ; x_2, y_2, z_2 — координаты области V_2 , нелинейно подобной области V_1 .

В этом случае необходимо, чтобы

$$P_{*2} = \psi_{*2} P_{*1},$$

$$P_{*2} = P_2/P_{20}; \quad \psi_{*2} = \psi_2/\psi_{20}; \quad P_{*1} = P_1/P_{10}.$$

Таким образом, процессы, не удовлетворяющие условию $P_2 = m_P P_1$, могут оказаться подобными при установлении между переменными P_2 и P_1 нелинейной связи $P_{*2} = \psi_{*2} P_{*1}$.

Нелинейное подобие какого-либо явления другому явлению означает нелинейно подобное преобразование величин, характеризующих первое явление.

Нелинейное преобразование временных функций осуществляется введением нелинейных масштабов времени. При этом время протекания процесса t_1 в первой системе будет связано с временем t_2 во второй системе соотношением

$$t_2 = F_t(t_2) t_1,$$

где F_t — функция преобразования времени или функция нелинейной гомохронности.

Если ввести некоторые базисные значения времени (t_{10}, t_{20}) , в долях от которых вести исчисление, то будет справедливо соотношение

$$t_{*2} = F_{*t} t_{*1},$$

где $t_{*2} = t_2/t_{20}$; $t_{*1} = t_1/t_{10}$; $F_{*t} = F_t/F_{t0}$.

В этом случае некоторая непрерывная во времени и в пространстве функция $P_1 = F_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ может быть связана с другой функцией $P_2 = F_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ соотношением

$$P_2 = \psi_2(P_1) \text{ или } t_{*2} = F_{*t}(t_{*1}),$$

где ψ_2 или F_{*t} — функция нелинейного преобразования.

При наличии такой связи имеет место пространственно-временное нелинейное подобие, частным случаем которого является аффинное подобие пространства.

Если нелинейные дифференциальные уравнения описывают процессы в нелинейно подобных системах, то эти уравнения могут быть представлены так, что:

а) *нелинейные параметры выражаются относительными характеристиками, причем критерии подобия, найденные обычным порядком, будут соответственно одинаковы.* В этом случае дифференциальные уравнения подобных процессов должны иметь одинаковую форму записи, а их нелинейные параметры, входящие в соответствующие члены уравнений и выраженные в относительных единицах, должны быть соответственно одинаковы. Чтобы убедиться в наличии подобия, нужно сначала, считая уравнения линейными, найти критерии подобия, а затем проверить тождественность относительных характеристик нелинейных параметров или совпадение дополнительных критериев;

б) *нелинейные относительные параметры удовлетворяют тождественным замкнутым системам уравнений, записанным в нелинейно относительной форме.* В этом случае уравнения могут и не содержать нелинейных параметров, но должны принадлежать к различным классам и иметь различные буквенные выражения. Чтобы выявить подобие, требуется нелинейно подобное преобразование.

Пятое дополнительное положение о подобии при вероятностном характере процессов. Это положение формулируется следующим образом: *условия подобия процессов в системах с детерминированно определенными параметрами могут быть распространены на системы с вероятно (статистически) определенными параметрами, если удовлетворяются дополнительные требования совпадения плотностей вероятностей сходственных параметров в относительной форме и пропорциональности их статистических моментов, степени масштабных коэффициентов при которых совпадают с порядками соответствующих моментов.*

В соответствии с этим положением теоремы и условия подобия, относящиеся к детерминированно заданным системам, будут справедливы для стохастически определенных систем при совпадении у этих систем плотностей вероятностей сходственных параметров, представленных в виде относительных характеристик. При этом дисперсии и математические ожидания всех параметров (с учетом масштабов) должны быть у подобных систем одинаковыми; должна также обеспечиваться физическая реализуемость сходственной корреляции между стохастически заданными параметрами, входящими в условия однозначности.

Можно упрощенно показать правильность* пятого дополнительного положения, вводя в условия подобия детерминированных систем относительные стохастические характеристики соответствующих параметров. Наличие стохастических зависимостей при этом можно рас-

* Более строгое доказательство имеется в работе: *Веников Г. В.* Подобие стохастически определенных физических систем. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1968, № 1, с. 136—141. Дальнейшее развитие этого аспекта проблемы подобия излагается в следующей работе: *Веников Г. В.* и др. Кибернетические вопросы экспериментального исследования сложных технических систем. «Итоги науки и техники. Техническая кибернетика», т. 7. М., ВИНТИ АН СССР, 1980, с. 35—113.

смагивать как появление своего рода нелинейностей и на этой основе распространять на данный случай выводы второго дополнительного положения.

§ 2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ПОДОБИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ, НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Критерии подобия пслеи в однородной и изотропной среде. Протекающие электромагнитные процессы, создаваемые постоянным током, во времени и в пространстве описывается в общем случае системой уравнений Максвелла, которая для однородной и изотропной среды имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\partial \bar{B} / \partial t; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \\ \bar{\delta} = \gamma \bar{E} + \partial \bar{D} / \partial t + \rho \bar{v}; \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где $\bar{H}$ — напряженность магнитного поля; $\bar{\delta}$ — плотность тока; $\bar{E}$ — напряженность электрического поля; $\bar{B}$ — магнитная индукция; $\bar{D}$ — электрическое смещение; ρ — объемная плотность заряда; γ — удельная проводимость среды; $\bar{v}$ — скорость движения зарядов; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды; μ — магнитная проницаемость среды; t — время.

Плотность тока $\bar{\delta}$ в (2.24) для общности выражена в виде суммы составляющих $\gamma \bar{E}$, $\partial \bar{D} / \partial t$, $\rho \bar{v}$ — т. е. плотностей токов проводимости, смещения, переноса (конвекции). Две первые слагающие обычно одновременно проявляются в полупроводящей среде; в хорошо проводящих средах можно пренебречь второй составляющей, а при исследовании изолирующих веществ — первой.

Система уравнений (2.24) в совокупности с заданными условиями однозначности является полной системой, т. е. позволяет однозначно определить в каждой точке пространства и в каждый момент времени состояние электромагнитного поля, характеризующее зависимостями

$$H = f(x, y, z, t); \quad E = \varphi(x, y, z, t).$$

Условия однозначности включают в себя геометрические параметры исследуемой системы, физические параметры среды (ϵ , μ , γ , ρ), начальные условия ($\bar{E} = \bar{E}_0$ и $\bar{H} = \bar{H}_0$) при $t = 0$ во всех точках системы, а также краевые условия на ее границах. Геометрическое подобие характеризуется равенством масштабов геометрических параметров по трем осям координат:

$$m_x = m_y = m_z = m_l.$$

В практических задачах масштаб m_l удобно вычислять как отношение сходственных характерных геометрических размеров, в качестве которых обычно принимают размеры, отражающие конфигурацию системы (ширину полюса электромагнита, диаметр расточки статора генератора и т.п.):

$$m_l = l_1 / l_2,$$

где l_1 и l_2 — сходственные характерные размеры систем 1 и 2 соответственно.

Критерии подобия электромагнитного поля в однородной и изотропной среде могут быть получены способом интегральных аналогов непосредственно из уравнений (2.24). Однако удобнее получить их, предварительно подставив выражения $\bar{\delta}$, $\bar{D}$ и $\bar{B}$ в первые четыре уравнения, поскольку изменения $\bar{H}$ и $\bar{E}$ во времени и в пространстве полностью характеризуют состояние электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \varepsilon (\partial \bar{E} / \partial t) + \rho \bar{v}; \quad (2.24a)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \partial \bar{H} / \partial t; \quad (2.24б)$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0; \quad (2.24в)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \rho / \varepsilon. \quad (2.24г)$$

Соотношения (2.24а) и (2.24б) являются основными уравнениями электромагнитного поля, а уравнения (2.24в) и (2.24г), не содержащие переменного параметра t , — вспомогательными, характеризующими состояние системы; (2.24в) характеризует начальные условия интегрирования, а (2.24г) служит для определения величины ρ .

Для получения критериев подобия электромагнитного поля достаточно решения только основных уравнений. Применяя способ интегральных аналогов, путем деления (2.24а) и (2.24б) на их левые части из первого уравнения получим три критерия подобия, а из второго — один;

$$\pi'_1 = \frac{\gamma E l}{H}; \quad \pi'_2 = \frac{\varepsilon E l}{H t}; \quad \pi'_3 = \frac{\rho v l}{H}; \quad \pi'_4 = \frac{\mu H l}{E t}. \quad (2.25a)$$

Систему критериев (2.25а) при геометрическом подобии можно свести к двум. Так, $\pi'_3 = \pi'_2$, что легко показать, подставив вместо v и ρ их аналоги $v \equiv l/t$ и $\rho \equiv \varepsilon E/l$. Определяя из π'_2 значение E/H , подставляя его в π'_1 и π'_4 и учитывая, что сомножитель $1/\pi'_2$ определяет только масштаб процесса и может быть опущен, окончательно запишем

$$\pi_1 = \varepsilon / \gamma t; \quad \pi_2 = \mu \gamma l^2 / t. \quad (2.25)$$

Анализируя совокупность параметров H , E , γ , ε , μ , ρ , v , l , t при определении критериев подобия на базе π -теоремы, можно получить пять критериев, например, в форме записи, соответствующей системе независимых параметров H , ε , l , t :

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= E / (H \varepsilon^{-1} l^{-1} t); & \pi_2 &= \mu / (\varepsilon^{-1} l^{-2} t^2); & \pi_3 &= \gamma / (\varepsilon l^{-1}); \\ \pi_4 &= \rho / (H l^{-2} t); & \pi_5 &= v / (l t^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Электромагнитному полю в диэлектриках, вакууме и воздухе ($\gamma = 0$, $\rho = 0$, $v = 0$) соответствует критериальное уравнение

$$\pi_1 = f_1(\pi_2) \quad \text{или} \quad E \varepsilon l / (H t) = f_1(\mu \varepsilon l^2 / t^2).$$

При наличии в указанных средах зарядов ($\gamma = 0$, но $\rho \neq 0$, $v \neq 0$)

$$\pi_1 = f_2(\pi_2, \pi_4, \pi_5) \quad \text{или} \quad \frac{E \varepsilon l}{H t} = f_2\left(\frac{\mu \varepsilon l^2}{t^2}, \frac{\rho l^2}{H t}, \frac{v t}{l}\right).$$

Критериальное уравнение для поля в полупроводящей среде ($\rho = 0$, $v = 0$)

$$\pi = f_3(\pi_2, \pi_3) \text{ или } \frac{E\gamma l}{H} = f_3\left(\frac{\mu\gamma l^2}{t}, \frac{\varepsilon}{\gamma t}\right),$$

а для поля в проводящей среде ($\varepsilon = 0$, $\rho = 0$, $v = 0$)

$$\pi_1 = f_4(\pi_2) \text{ или } E\gamma l/H = f_4(\mu\gamma l^2/t).$$

Частным случаем полученных результатов является известная теорема подобия магнитов и электромагнитов, называемая *теоремой Кельвина*. Эта теорема утверждает, что все одинаково намагниченные, геометрически подобные магниты имеют в соответственных точках пространства одинаковые напряженности поля. Теорема Кельвина хорошо подтверждается опытом, при этом получаются лишь небольшие отступления за счет неоднородности материала или различных условий закалки магнитов.

Для получения критериев подобия электромагнитных полей, создаваемых периодическими переменными токами, системы критериев (2.25) и (2.26) следует дополнить критерием гомохронности $\pi = \omega t$

$$\pi_1 = (\varepsilon/\gamma)\omega; \quad \pi_2 = \mu\gamma l^2\omega; \quad \pi_3 = \omega t, \quad (2.27a)$$

полагая в качестве независимых параметров H , γ , l , ω :

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= E/(H\gamma^{-1}l^{-1}); & \pi_2 &= \mu/(\gamma^{-1}l^{-2}\omega^{-1}); & \pi_3 &= \varepsilon/(\gamma\omega^{-1}); \\ \pi_4 &= \rho/(Hl^{-2}\omega^{-1}); & \pi_5 &= v/(l\omega); & \pi_6 &= t/\omega^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27b)$$

Следовательно, *электромагнитные поля в однородных изотропных средах подобны, если существует геометрическое подобие систем и определяющие критерии подобия равны в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени.*

Условия подобия полей в неоднородных и анизотропных средах. Подобие электромагнитных процессов в неоднородных и анизотропных средах устанавливается с учетом того, что их физические свойства характеризуются тензорами ϵ_{ik} или μ_{ik} вместо скалярных величин ϵ или μ , определяющих изотропную среду. Выбирая оси координат совпадающими с главными направлениями осей тензоров, можно вдоль осей установить различные геометрические масштабы m_{ix} , m_{iy} , m_{iz} и масштабы для измерения физических параметров ϵ или μ .

Рассмотрим однородную среду, физические свойства которой характеризуются анизотропией μ , полагая, что различные масштабы приняты для μ равными $m_{\mu x}$, $m_{\mu y}$, $m_{\mu z}$, а геометрические размеры сравниваемых систем находятся в соотношении

$$x_1 = m_{ix} x_2; \quad y_1 = m_{iy} y_2; \quad z_1 = m_{iz} z_2,$$

причем $m_{ix} \neq m_{iy} \neq m_{iz}$ и геометрическое подобие отсутствует.

Из критерия подобия

$$\pi = \mu\gamma l^2/t,$$

который в данном случае должен остаться справедливым, с учетом изменения масштабов вдоль любой оси следует, что

$$m_{ix}^2 m_{\mu x} = m_{iy}^2 m_{\mu y} = m_{iz}^2 m_{\mu z}.$$

Поэтому для получения подобия величины μ_{ik} вдоль осей x, y, z должны быть обратно пропорциональны квадрату геометрических размеров вдоль соответствующих осей.

Рассмотрим подобие электромагнитных явлений в случае анизотропной неоднородной среды, свойства которой, характеризуемые ϵ , в различных точках пространства различны. Полагая, что физические параметры D, E, H и B подобны только вдоль осей x, y, z и линейны, можно выразить D через E для их составляющих по осям:

$$D_x = \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z; \quad D_y = \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z;$$

$$D_z = \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z.$$

Коэффициенты ϵ_{ik} в этом преобразовании — составляющие симметричного тензора.

В случае прямолинейной анизотропии, когда оси анизотропии совпадают с выбранной для анализа прямоугольной системой координат, выражение для диэлектрической проницаемости может быть представлено тензором второго ранга

$$\bar{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

При этом уравнение поля

$$\nabla \bar{\epsilon} \nabla \varphi = 0 \text{ или } \operatorname{div} \bar{D} = \operatorname{div} \bar{\epsilon} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

где φ — потенциал точки созданного в данной среде электрического поля.

Покажем, что среда с анизотропными свойствами, характеризуемыми значениями $\epsilon_{x1}, \epsilon_{y1}, \epsilon_{z1}$, может быть подобна среде, имеющей другие анизотропные свойства и другие геометрические размеры, не удовлетворяющие условиям геометрического подобия.

Пусть для этой новой среды физические параметры вдоль главных осей равны $\epsilon_{x2}, \epsilon_{y2}, \epsilon_{z2}$. В этом случае масштаб геометрических преобразований должен быть различен по различным осям, причем необходимо, чтобы

$$\varphi_1(x, y, z) = m_\varphi \varphi_2(m_x x_2, m_y y_2, m_z z_2).$$

Для первой установки, подобие которой отыскивается, уравнение поля имеет вид

$$\epsilon_{x1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \epsilon_{y1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \epsilon_{z1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Для второй установки, которая должна быть подобна первой, уравнение поля с учетом масштабных коэффициентов m может быть записано так:

$$m_\varphi \epsilon_{x2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial m_x^2 x_1^2} + m_\varphi \epsilon_{y2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial m_y^2 y_1^2} + m_\varphi \epsilon_{z2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial m_z^2 z_1^2} = 0.$$

Преобразование этих двух уравнений к идентичной форме записи вида

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (x_1/\sqrt{\varepsilon_{x1}})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (y_1/\sqrt{\varepsilon_{y1}})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (z_1/\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (m_x x_2/\sqrt{\varepsilon_{x2}})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (m_y y_2/\sqrt{\varepsilon_{y2}})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (m_z z_2/\sqrt{\varepsilon_{z2}})^2} = 0$$

позволяет сформулировать требования к масштабным коэффициентам: уравнения будут тождественны, если

$$m_x = (x_1/x_2) \sqrt{\varepsilon_{x2}/\varepsilon_{x1}}; \quad m_y = (y_1/y_2) \sqrt{\varepsilon_{y2}/\varepsilon_{y1}}; \quad m_z = (z_1/z_2) \sqrt{\varepsilon_{z2}/\varepsilon_{z1}}.$$

Кроме того, в подобных системах

$$\varepsilon_1 \operatorname{grad} \varphi_1 d\bar{S}_1 = \varepsilon_\varphi \varepsilon_2 \operatorname{grad} \varphi_2 d\bar{S}_2; \quad d\bar{S}_1 = \bar{k}_z dx_1 dy_1; \quad d\bar{S}_2 = \bar{k}_z dx_2 dy_2,$$

где $\bar{k}_z$ — орт оси z .

Это позволяет записать соотношения:

$$\varepsilon_1 \operatorname{grad} \varphi_1 d\bar{S}_1 = \varepsilon_{z1} m_\varphi (\partial \varphi_1 / \partial z_1) dx_1 dy_1;$$

$$\varepsilon_2 \operatorname{grad} \varphi_2 d\bar{S}_2 = \varepsilon_{z2} m_\varphi (\partial \varphi_2 / \partial z_2) dx_2 dy_2.$$

Согласно полученным выше соотношениям для m_x , m_y и m_z , последние уравнения можно представить иначе:

$$\varepsilon_2 \operatorname{grad} \varphi_2 d\bar{S}_2 = \varepsilon_{z2} m_\varphi \frac{\partial \varphi_1 m_z}{\partial z_1 m_y m_x} \sqrt{\frac{\varepsilon_{z1} \varepsilon_{y2} \varepsilon_{x2}}{\varepsilon_{z2} \varepsilon_{y1} \varepsilon_{x1}}} dx_1 dy_1,$$

откуда

$$\varepsilon_2 = m_z \sqrt{\varepsilon_{z2}} \sqrt{\varepsilon_{x1} \varepsilon_{y1} \varepsilon_{z1}} / (m_x \sqrt{\varepsilon_{x2}} m_y \sqrt{\varepsilon_{y2}}).$$

Таким образом, поле в одной анизотропной среде с параметрами ε_{x1} , ε_{y1} , ε_{z1} подобно полю в другой анизотропной среде с параметрами ε_{x2} , ε_{y2} , ε_{z2} , если геометрические координаты подобных точек, т. е. точек, в которых подобны потенциальные функции ($\varphi_1 = m_\varphi \varphi_2$), находятся в определенных соотношениях.

Поля, действующие в изотропной среде, могут быть подобны полям, действующим в анизотропной среде, при специальном выборе масштабов пространственных координат и отказе от соблюдения условий геометрического подобия. В этом случае координаты x_1 , y_1 , z_1 точки с потенциалом $\varphi_1 = m_\varphi \varphi_2$, отвечающей условиям физического подобия, находятся в следующих соотношениях с координатами x_2 , y_2 , z_2 :

$$x_1 = x_2 / \sqrt{\varepsilon_x}; \quad y_1 = y_2 / \sqrt{\varepsilon_y}; \quad z_1 = z_2 / \sqrt{\varepsilon_z};$$

причем $\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z} \equiv \varepsilon_1$ — физический параметр.

В случае плоскопараллельного поля соотношения упрощаются, так как их приходится устанавливать только между двумя координатами, при этом ε_1 пропорционально корню квадратному из соответствующей пары составляющих ε .

При анализе подобия полей в телах, имеющих аксиальную анизотропию, оказывается удобно выбрать оси анизотропии, совмещенные с цилиндрическими осями координат. Тогда для подобных плоскопа-

параллельных полей можно установить связь между радиусами r_1 и r_2 и физическими параметрами в следующем виде:

$$r_1 = m_1 r_2 \sqrt{\epsilon_{r2} \epsilon_{\alpha 1} / (\epsilon_{\alpha 2} \epsilon_{r1})}; \epsilon_{\alpha 1} \epsilon_{r1} / (\epsilon_{\alpha 2} \epsilon_{r2}) = \text{idem}.$$

В частном случае, когда одно из сопоставляемых полей действует в изотропной, а другое — в анизотропной среде, необходимо, чтобы

$$r_1 = m_r r_2 \sqrt{\epsilon_{\alpha 1} / \epsilon_{\alpha 2}}; \sqrt{\epsilon_{\alpha 1} \epsilon_{r1}} = \epsilon_2.$$

Пусть, например, требуется обеспечить подобие двух систем геометрически подобных проводников. Первая система имеет цилиндрические проводники диаметром d . Вторая пара проводников, подобие полей которых отыскивается, имеет эллиптическое сечение. Большая полуось эллипса в m_x раз больше диаметра d проводника первой системы проводников, а меньшая ось эллипса равна диаметру проводников. Поля этих двух геометрически неподобных систем могут быть подобны в том случае, если пространство между двумя проводниками второй системы, имеющей проводники эллиптического сечения, заполнить анизотропным диэлектриком; при этом необходимо получить соотношение

$$\epsilon_y / \epsilon_x = x_2^2 / x_1^2.$$

Расстояние между проводниками второй системы, очевидно, должно быть в m_x раз больше, чем расстояние между проводниками первой системы (рис. 2.8).

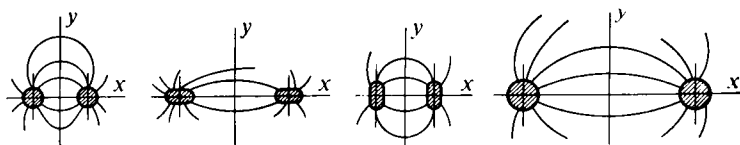


Рис. 2.8

Подобие движущихся электромагнитных полей (электродинамическое подобие). Для моделирования процессов в машинах и аппаратах большое значение имеет установление подобия явлений, происходящих при взаимном перемещении распределенного в пространстве электромагнитного поля и различного рода диэлектриков и проводников или при взаимном перемещении распределенной проводящей среды и диэлектриков. Для движущейся диэлектрической среды уравнения Максвелла могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \partial \vec{D} / \partial t; \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t; \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} + (\epsilon - 1/c^2 \mu) [\vec{v} \vec{B}]; \vec{B} = \mu \vec{H} + [\vec{v} \vec{E}] / c^2, \end{aligned}$$

где v — скорость перемещения; c — скорость света.

Сведя эти уравнения к двум, содержащим $\vec{H}$ и $\vec{E}$, способом интегральных аналогов получим шесть критериев подобия

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \varepsilon E l / (H t); \quad \pi_2 = \varepsilon \mu v l / t; \\ \pi_3 &= \varepsilon v^2 E l / (c^2 H t); \quad \pi_4 = v^2 E l / (c^4 \mu H t); \\ \pi_5 &= \mu H l / (E t); \quad \pi_6 = v l / (c^2 t).\end{aligned}$$

При движении проводящих сред система исходных уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t; \\ \vec{j} &= \gamma (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]); \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + [\vec{v} \vec{E}] / c^2,\end{aligned}$$

где $\vec{j}$ — плотность тока.

Аналогично получаем выражения для критериев подобия:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \gamma E l / H; \quad \pi_2 = \gamma \mu v l; \quad \pi_3 = \gamma v^2 E l / (c^2 H); \\ \pi_4 &= \mu H l / (E t); \quad \pi_5 = v l / (c^2 t).\end{aligned}$$

Таким образом, подобие явлений, связанных с электродинамикой, определяется полученными критериями полного подобия. Когда геометрическое подобие нарушается, могут сохраняться соотношения подобия, относящиеся к цепям. Во всех случаях *критерии электродинамического подобия остаются справедливыми при нелинейных или переменных параметрах, если соблюдено условие идентичности относительных характеристик этих параметров.*

Соотношение между подобием полей и подобием цепей. При рассмотрении первой теоремы подобия и критериев подобия различных электрических и электромагнитных явлений подходили или как к подобию полей, или как к подобию цепей. Подобие полей предполагало существование геометрического подобия (в реальном или «деформированном» — при той или иной анизотропии — пространстве). Подобие цепей рассматривалось независимо от наличия пространственного подобия. Разумеется, условия подобия электрических установок находятся легче, если подходить к подобию явлений, исходя из упрощенного их представления (в виде подобия цепей). Но оказывается, что и при этом иногда можно найти определенное геометрическое соответствие между сходственными точками электромагнитных полей тех установок, подобие которых определялось, исходя из подобия цепей. Разумеется, это справедливо только в случае, если установки имеют аналогичную конфигурацию, а не являются лишь схемами замещения. Например, в двух геометрически неподобных электрических машинах, подобие процессов в которых определено, исходя из эквивалентных схем замещения и параметров соответствующих им цепей, можно найти соотношения аффинного подобия. При замещении машины дроссельной катушкой, изображающей X_d или X'_d , соотношения могут быть только сугубо условными. Справедливость обратного положения, т. е. утверждения, что подобие полей вместе с геометрическим подобием цепей обеспечивает полное подобие установок, не нуждается в доказательстве. Полное подобие всех параметров и физических переменных обеспечивается, согласно первой теореме подобия, при удовлетворении критериев электромагнитного подобия. Следовательно, и подобие цепей, требующее подобия только части этих величин, заведомо обеспечивается при соблюдении подобия полей.

Рассмотрим некоторые геометрические соотношения, характеризующие цепи, содержащие индуктивность и активное сопротивление.

В общем случае и для цепи низкой частоты соответственно выражения для индуктивности и активного сопротивления

$$L = \oint_e \oint_k \frac{\mu \cos(\omega r/c) dl_e dl_k}{4\pi r_{ke}};$$

$$L = \oint_e \oint_k \frac{\mu dl_e dl_k}{4\pi r_{ke}};$$

$$R = \oint_l r_0 dl_m, \text{ где } m = 1, 2.$$

Следовательно, при удовлетворении критериев подобия и соответственно одинаковых значениях $L/(Rt)$ фиксируются некоторые соотношения между геометрическими размерами подобных цепей:

$$\frac{\oint_{e_1} \oint_{k_1} \frac{\mu_1 dl'_e dl'_k}{4\pi r'_{ke}}}{\oint_{e_2} \oint_{k_2} \frac{\mu_2 dl''_e dl''_k}{4\pi r''_{ke}}} = \frac{\oint_l r_{01} dl_1}{\oint_l r_{02} dl_2}.$$

Для конкретных установок, имеющих подобные цепи, выражения эти можно раскрыть следующим образом: можно выявить аффинные соотношения между геометрически неподобными полями, отвечающими подобными цепям. Определить связь между геометрическими размерами и критериями подобия в общем виде невозможно, а поэтому аффинные соотношения между пространственными размерами и электрическими параметрами, входящими в критерии подобия, следует находить применительно к конкретным случаям. Однако, не вдаваясь здесь в детали вопроса, отметим, что *подобие полей можно установить и в геометрически неподобных машинах, не имеющих подобия параметров, выбранных исходя из подобия цепей.*

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Решение современных научно-технических проблем методами планирования экспериментов. Понятие эксперимента — очень широкое и неоднозначное, изменяющееся в зависимости от постановки задачи. Образно эксперимент определил в свое время известный естествоиспытатель Кювье, когда сказал, что экспериментатор заставляет природу разоблачаться. Если не прибегать к метафорам, то в наиболее общем виде под *экспериментом* можно понимать *целенаправленно организованный опыт, содержащий наблюдение исследуемого явления в специально создаваемых условиях, позволяющих следить за ходом явления с необходимой точностью и допускающих его воспроизведение в этих условиях*. Вместе с производственной деятельностью людей эксперимент составляет важнейшую сторону практики, являющуюся основой познания и критерием истины результатов процесса познания.

Различают эксперименты лабораторные, поставленные в специальных условиях, к ним относятся модельные эксперименты, реализованные на специально созданных моделях. Эксперимент может быть производственным, поставленным в условиях, при которых не нарушается течение производственного процесса, но в то же время ведутся наблюдения за ходом его. Эксперимент может быть натурным, заключающимся в наблюдении его факторов и выявлении тех условий, которые создаются вследствие тех или иных причин в природе. Он может быть также расчетным, поставленным на ЦВМ.

Параметры системы и параметры происходящих в ней процессов в теории эксперимента и его практике обычно называются *факторами*. В зависимости от того, сколько в эксперименте рассматривается переменных факторов, они называются одно-, двух-, трехфакторными и т.д. Проведение эксперимента должно планироваться. Основной классический план состоит в том, что все независимые переменные, кроме одной, полагаются постоянными, а эта одна переменная изменяется во всем интервале значений, при этом выбор интервалов между значениями переменных производится по какому-либо правилу. По существу простейший, называемый классическим, многофакторный эксперимент

представляет собой последовательность однофакторных экспериментов.

Современное планирование эксперимента основывается на *факторном плане*, предусматривающем управление экспериментом. Так, если каждый из k факторов имеет p значений, сочетания которых называются *уровнями*, то полный факторный план, содержащий $N = p^k$ экспериментов (исследуемых точек), образует факторную решетку. Например, если факторов семь, а каждый из них имеет только два уровня (наименьший и наибольший), то число точек $N = p^k = 2^7 = 128$. Полные факторные планы имитационных экспериментов требуют больших вычислений. Для их сокращения применяются различные *неполные факторные планы* (планы латинских и греко-латинских квадратов, ротатабельные и др.), различающиеся только правилами отбора точек. Строятся эти планы таким образом, чтобы выдавать надежные результаты с меньшим числом испытаний и отсеивать менее значимые факторы.

Таким образом, планирование эксперимента в его современном понимании — математико-статистическая дисциплина, изучающая методы рациональной организации экспериментальных исследований от оптимального выбора исследуемых факторов и определения собственно плана эксперимента в соответствии с его целью до анализа результатов. Основными понятиями теории планирования эксперимента являются *управляемый фактор* (входная переменная величина), *отклик* — реакция системы на изменение входной величины, план эксперимента, имитационная модель. Поскольку в имитационных экспериментах отсутствуют неуправляемые и ненаблюдаемые факторы (а в реальных условиях такие факторы неизбежны), то в имитационную модель вводятся случайные переменные. При этом эксперимент сводится к серии (выборке) проигрываний различных ситуаций на модели. Планирование эксперимента позволяет получать достоверные результаты с наименьшим числом таких проигрываний, т. е. с наименьшей затратой времени.

Планирование эксперимента при нахождении экстремальных значений (экстремальное планирование эксперимента). Пусть необходимо найти экстремум функции двух переменных $Y = f(x_1, x_2)$. Единственное, что можно сделать — выбрать значения переменных (факторов) x_1 и x_2 и узнать соответствующее значение переменной Y — отклика. Например, Y — процент выхода продукта в химическом производстве, x_1, x_2 — условия ведения процесса, например температура и давление. Желательно выбрать такие условия, чтобы процент выхода был максимальным. Конечно, в реальных процессах количество управляемых факторов может быть большим, но и тогда оперируют только несколькими главными. Задача становится статистической из-за того, что наблюдаемые значения отклика отклоняются от $f(x_1, x_2)$ под воздействием ряда неучтенных факторов. Эти случайные отклонения в разных опытах независимы.

Обсудим план действий, представив сначала, что случайное отклонение отсутствует. При этом наибольшее значение функции можно искать так называемым методом крутого восхождения. Допустим, что график функции $Y = f(x_1, x_2)$ есть поверхность в виде некоторого

холма (рис. 3.1), вершина которого и будет искомой точкой максимума. Представим далее, что у подножья холма стоит альпинист и хочет взобраться на эту вершину. Но он не знает дороги и в тумане видит только небольшое пространство вокруг себя. Альпинист заведомо достигнет цели, если все время будет подниматься в гору по наиболее крутому пути (если, конечно, вершина только одна). Чтобы узнать направление этого подъема, по которому необходимо двигаться, пока функция не начнет убывать, надо вычислить частные производные $\partial f / \partial x_1$ и $\partial f / \partial x_2$, затем необходимо повторять процедуру.

Имеющиеся в действительности случайные отклонения могут заставить по-другому искать направления наиболее крутого подъема. Малые участки поверхности всегда кажутся почти плоскими. Следовательно, можно заменять участки поверхности участками касательной плоскости. Направления скорейшего подъема по поверхности и по плоскости совпадают. Поэтому можно найти касательную плоскость, которая имеет линейное уравнение. Следовательно, наблюдения сглаживаются линейной функцией $Y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + b$. При этом значения A_1 и A_2 являются частными производными.

Задача планирования опытов возникает при выборе точек измерений в той области, где такие точки размещены. Область изменения факторов должна быть довольно малой, чтобы различия между поверхностью и касательной плоскостью были незначительными. Однако увеличение области уменьшает относительное влияние отклонений Y от $f(x_1, x_2)$. Компромиссное решение, однако, можно выбрать, только учитывая свойства функции, а они, как правило, не известны. Чаше всего на основании интуиции и опыта исследователь выбирает интервал изменений каждого фактора на плоскости $x_1 - x_2$, что соответствует прямоугольнику. Наилучшая стратегия, которая позволила бы достичь вершины при наименьшем числе шагов, зависит от конкретного выбора сглаживающей функции. Поэтому выбор числа экспериментов в окрестности точки отчасти связан с удобством обработки результатов. С точки зрения точности определения коэффициентов наиболее целесообразно размещать наблюдения в вершинах выбранного на плоскости $x_1 - x_2$ прямоугольника. Иначе говоря, каждый фактор может принимать два значения; когда факторов много, общее число комбинаций возрастает, поэтому опыты ставят только в некоторых вершинах. Пока подъем достаточно крут и коэффициенты A_1 и A_2 заметно отличаются от нуля, погрешность обычно невелика. Но по мере приближения к вершине частная производная уменьшается и в определении величин A_1, A_2 появляется неточность. Во избежание этого рекомендуется перейти к аппроксимации функции многочленом второй степени (регрессионным уравнением).

Таким образом, планирование экспериментов сводится к отысканию оптимальных условий с применением методов *регрессионного анализа*. Смысл его состоит в получении и исследовании уравнения регрессии (включая оценку его параметров), с помощью которого оценивается величина случайной переменной, если величина другой (или других в случае множественной или многофакторной регрессии) известна, т. е. фиксирована, не случайна. В отличие от этого *корреляционный*

анализ применяется для нахождения и выражения тесноты связей между случайными величинами. Задача сводится к тому, чтобы, анализируя множество точек на графике, т. е. множество статистических данных, найти линию, по возможности точно отражающую заключенную в этом множестве закономерность, тенденцию, — линию регрессии. Существует ряд математических методов, позволяющих решить эту задачу. В случаях, когда искомая закономерность может быть принята за линейную, наиболее эффективен метод наименьших квадратов. Используя его, можно получить оценки коэффициентов уравнения регрессии, которое в общем виде может быть представлено как

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (3.1)$$

Метод факторного планирования экспериментов. Этот метод обеспечивает наиболее точное представление искомой зависимости по результатам наименьшего числа целенаправленно спланированных экспериментов. Последнее возможно за счет того, что в каждом эксперименте одновременно варьируются все переменные. Поэтому, обрабатывая результаты наблюдений всех запланированных экспериментов, получают оценки коэффициентов уравнения регрессии с наименьшей дисперсией. Число экспериментов определяется количеством независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ и уровней варьирования их. Во многих практически важных случаях достаточно варьировать независимые переменные на двух уровнях. Для получения независимых оценок коэффициентов уравнения регрессии целесообразно, чтобы уровни рассматриваемых факторов были симметричны относительно начала координат. Таким образом, число экспериментов определяется числом всех не повторяющихся комбинаций, которые можно составить из k рассматриваемых независимых переменных, имеющих по два уровня.

Если осуществляются все 2^k возможные и не повторяющиеся комбинации, то получают *полный факторный эксперимент (ПФЭ)*. В слу-

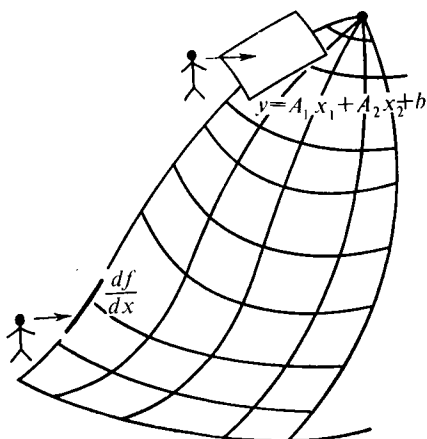


Рис. 3.2

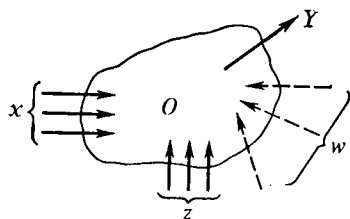


Рис. 3.1

чаях, когда априорная зависимость не может быть представлена в виде линейной функции, используют полиномы более высокой степени [см. (3.1)]. На практике стараются ограничиться полиномом не выше второй степени и при планировании и выборе точек предусматривают варьирование независимых переменных на трех уровнях. Тогда оптимальным будет план, полученный с помощью так называемого *центрального композиционного планирования*, которое включает в себя полный факторный эксперимент и некоторое дополнительное число точек, зависящее от количества рассматриваемых факторов *.

Подведем итоги и дополним приведенные определения необходимыми понятиями. Под *планом эксперимента* понимается совокупность правил, в соответствии с которыми определяется цель, выделяются и классифицируются факторы, устанавливается последовательность действий экспериментатора, обрабатываются данные и оцениваются полученные результаты. В общем виде схема эксперимента представлена на рис. 3.2, где O — объект, который исследуется, с тем чтобы найти некоторую *функцию цели* Y ; на объект воздействуют факторы: x — варьируемые, z — неизменные, w — случайные.

Эксперимент может быть *интерполяционным*, когда устанавливаются зависимости вида $Y = f(x)$, и *оптимизационным*, когда определяется такое наилучшее сочетание факторов, при котором функция цели достигает желаемого экстремума, т. е. $Y_{\text{экстр}} = f(x_{\text{опт}})$.

Эксперименты разделяются также на *активные*, в которых экспериментатор изменяет влияющие факторы, и *пассивные*, в которых экспериментатор только регистрирует происходящие изменения. Факторы, таким образом, могут быть неизменные или варьируемые, и случайные, являющиеся неконтролируемыми, воздействующими на объект независимо от экспериментатора.

Цель эксперимента, или *функция цели* (*целевая функция*), — это точное указание свойств, признаков или характеристик, устанавливаемых или оптимизируемых в процессе эксперимента, т. е. все то, ради чего проводится эксперимент.

Факторы в эксперименте. В активном эксперименте все или часть факторов k должны быть управляемыми, т. е. экспериментатор должен иметь возможность задавать любое требуемое значение фактора x внутри области его определения и поддерживать его заданным в ходе эксперимента. Эти факторы должны быть независимыми, т. е. каждый из них должен устанавливаться независимо от уровня других факторов. Факторы x в активном эксперименте должны быть совместными, т. е. любые используемые в эксперименте сочетания их уровней $|p|$ не должны приводить к аварийным ситуациям или режимам, не имеющим смысла.

Эксперимент, таким образом, состоит в установлении факторов x на некоторых уровнях $|p|$ и наблюдении при этом за функцией цели Y . Число опытов $N = p^k$ резко возрастает с увеличением числа n фак-

* Более подробные характеристики этих понятий см., например, в кн.: *Нахимов В. В., Голикова Т. И. Логические основания планирования эксперимента*. — М.: Металлургия, 1981.

торов и поэтому теория эксперимента уделяет большое внимание такой постановке опытов, при которой можно было бы уменьшить число варьируемых факторов без потери информации об объекте.

Влияние случайных факторов. Необходимость учета в эксперименте случайных факторов заставляет обращаться к математической статистике, задача которой — построение методов оценки вероятностей событий или принятие решений о характере событий на основе статистических данных. При этом предполагается, что статистические данные — случайные величины. Это предположение позволяет использовать методы теории вероятности и обуславливает вероятностный характер выводов.

Случайные величины имеют определенные *функции распределения*, или *плотности распределения*, по которым можно полностью определить и вычислить любые их признаки. Для удобства работы со случайными величинами вводятся числовые характеристики, отражающие особенности законов распределения*. При получении результатов экспериментов предполагают, что представленные в виде уравнения регрессии эти результаты подчиняются конкретному *закону распределения*.

Однако в результате экспериментов, как правило, бывает выявлено некоторое небольшое число точек, или, пользуясь терминологией математической статистики, получены *малые выборки*. По этим выборкам и надо составить суждение о характеристике случайной величины. Это прежде всего важно для того, чтобы выяснить, отражает ли полученный результат определенную закономерность или та или иная точка является чисто случайной, появившейся в результате неточностей исследования. Для проверки закономерности этого результата выдвигается гипотеза о статистическом распределении и затем проверяется соответствие этого результата принятой гипотезе. Проверка производится по критериям Стьюдента, Фишера, Колмогорова и др., называемым иногда *критериями согласия*. Далее при изложении способов обработки эксперимента эти критерии будут применяться без специальных пояснений.

Основы планирования эксперимента. Ортогональные планы. Организация активного эксперимента, его планирование тесно связаны с регрессионным анализом. В самом деле, предположим, что в результате опыта (физического или математического эксперимента) получена математическая модель, характеризующая регрессионным уравнением

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \dots + b_{n-1, n} x_{n-1} x_n + b_{1,2,3} x_1 x_2 x_3 + \dots + b_{1,2,\dots,n} \times \\ \times x_1 x_2 \dots x_n + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2. \quad (3.2)$$

* Здесь очень кратко напоминаются основные положения математической статистики. Чтобы более обстоятельно вспомнить их, следует обратиться, например, к книге: Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1969.

В уравнение входят ненулевой член, члены вида $b_1 x_1$ (линейная регрессия), члены вида $b_{i,j,h} x_i x_j x_h$, отражающие взаимодействие факторов (неполная квадратичная регрессия), и члены вида $b_{ii} x_i^2$ (квадратичная регрессия).

В более компактной форме уравнение (3.2) для n факторов можно представить как

$$Y = \sum_{i=0}^m b_i x_i, \quad (3.3)$$

где m — полное число членов полинома (3.3), не считая нулевого; b_i — коэффициенты при факторах (для $i \leq n$), при произведениях и квадратах факторов (для $i > n$); x_i — факторы (для $i \leq n$), произведения и квадраты факторов (для $i > n$).

Для определения коэффициентов регрессии b_i по данным u опытов можно записать соотношение, справедливое для любого u -го опыта:

$$Y_u = \beta_0 x_{0u} + \beta_1 x_{1u} + \dots + \beta_m x_{mu} + \varepsilon_{un}, \quad (3.4)$$

где $\beta = b$ — «истинные» значения коэффициентов регрессии, оценки которых $b_0, \dots, b_m$ входят в уравнения (3.2), (3.3); $x_{0u}, x_{1u}, \dots, x_{mu}$ — значения соответствующих независимых переменных в данном опыте; ε_{un} — ошибка в u -м опыте.

Результаты всех N опытов Y и выражение для коэффициентов B могут быть представлены (подробнее см. § 3.2) матричными уравнениями

$$Y = X\beta + \varepsilon; \quad B = C^{-1} X^T Y, \quad (3.5)$$

где C^{-1} — матрица, обратная исходной C , отражающей значения независимых переменных в опытах.

Если эти независимые переменные в каждом опыте задаются, т. е. проводится активный эксперимент, то можно составить матрицы C и C^{-1} некоторым наилучшим образом. Эти матрицы зависят лишь от матрицы X , т. е. от того, как построен эксперимент. Если не принимать никаких мер по организации эксперимента, т. е. правильно его не спланировать, выбрав определенное сочетание факторов в опытах, определяемых матрицей X , то неизбежно появятся следующие трудности: 1) матрица C может оказаться особенной, т. е. с ее помощью не удастся определить коэффициенты b ; 2) все коэффициенты b могут оказаться зависимыми друг от друга; 3) дисперсии коэффициентов могут оказаться в сложной зависимости от структуры и элементов матрицы C^{-1} . Чтобы избавиться от этих трудностей, можно так спланировать эксперимент, чтобы матрица C стала диагональной. Соответствующие матрицы X и планы называются ортогональными.

Составляя матрицу X , прежде всего следует определить число уровней варьирования каждого фактора. Если выбрать минимальное число уровней, равное двум, то число опытов при полном переборе всех уровней $N = 2^k$.

Составим план ПФЭ 2^k для случая, когда $k = 2$. Число строк матрицы планирования (матрицы X) составит $2^k = 2^2 = 4$. Число столбцов определится числом учтенных членов регрессии, соответствующей выражению

i	0	1	2	3	
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	
1	+	-	-	+	Y_1
2	+	+	-	-	Y_2
3	+	-	+	-	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Рис. 3.3

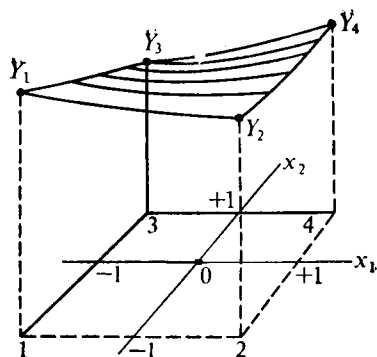


Рис. 3.4

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2. \quad (3.6)$$

Матрица планирования для простейшего случая показана на рис. 3.3 и может быть уточнена при учете квадратичных (x_1^2, x_2^2) членов, который здесь не проводится.

Для факторов x_1 и x_2 переберем все возможные сочетания уровней. Соответствующие столбцы, обведенные штриховой линией, образуют собственно план эксперимента, т. е. показывают, на каких уровнях устанавливаются факторы в каждом опыте. Геометрическая интерпретация плана ПФЭ 2^k показана на рис. 3.4. Остальные столбцы матрицы заполнены в соответствии с написанными над ними формулами. Справа от матрицы планирования размещается матрица-столбец Y , в которую заносятся результаты опытов $Y_1, \dots, Y_4$. В геометрической интерпретации — это вертикальные отрезки, соответствующие точкам плана (рис. 3.4). Функция регрессии, построенная по данным опытов, представляет собой поверхность, соединяющую вершины отрезков, т. е. является *поверхностью отклика**.

§ 3.2. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ПОСТАНОВКИ И ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Задача регрессионного анализа. Задача математически формулируется так. Необходимо найти зависимость

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

где Y — выходная характеристика, а $x_1, x_2, \dots, x_k$ — значения факторов.

Значения Y и x измеряют в процессе эксперимента и при анализе они уже известны. Однако их функции связи (модель) до опыта не известны и должны быть найдены по опытным данным. При этом на значение Y влияют не только значения $x_1, x_2, \dots, x_k$, но также ряд неуправляемых факторов, к которым относятся погрешности измере-

* Понятие *отклик* пояснено на с. 105.

ния, неконтролируемые изменения окружающей среды и др. Поэтому даже при фиксированных значениях x функция $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ведет себя случайным образом, в связи с чем ставится задача нахождения ее математического ожидания и дисперсии, или доверительных интервалов. Поскольку вид функции Y заранее не известен, ее выбирают в виде полинома, точнее, отрезка полинома, выбор которого зависит от предполагаемого характера зависимости и необходимой точности ее определения.

Уравнение регрессии выводится на основании статистических данных, которые могут быть получены двумя способами: в результате пассивного или активного эксперимента. Выбор того или иного способа зависит от конкретно поставленной задачи и от возможностей, имеющих у исследователя. При первом способе оценки коэффициентов уравнения регрессии определяются методами корреляционного либо регрессионного анализа. При втором способе эти оценки находятся методом статистической обработки результатов опытов, проведенных в соответствии с теорией планирования эксперимента.

Математическое ожидание функции

$$M(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i \neq j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (3.7)$$

При этом $\beta_1 = \partial f / \partial x_1$; $\beta_2 = \partial f / \partial x_2$; $\beta_{12} = \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2$; ... $\beta_{11} = (1/2) \times \partial^2 f / \partial x_1^2$; $\beta_{22} = (1/2) \partial^2 f / \partial x_2^2$; ...

По результатам опыта можно найти только выборочные значения x и Y , т. е., например, их точечные оценки — $\bar{y}$, b_0 , b_i , b_{ij} , b_{ii} ... Тогда уравнение регрессии примет вид

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (3.8)$$

Задача регрессионного анализа — выбор вида функции $\bar{y}$ (вида отрезка полинома) и оценка коэффициентов регрессии. Вид функции должен быть по возможности прост, но в то же время должен достаточно хорошо выражать реальную зависимость. Выбор вида базируется на физических предпосылках, материалах решения аналогичных задач и т. д. Выбранный вид функции в процессе регрессионного анализа проверяется по соответствующим критериям и при необходимости уточняется.

Часто зависимость $M(Y)$ от x можно принять линейной (линейная модель):

$$M(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k.$$

Для упрощения методов определения коэффициентов регрессии целесообразно принять следующие допущения:

— результаты наблюдений $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ (где n — число наблюдений над величиной Y) представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины;

— дисперсии $D(y_i)$ равны друг другу или пропорциональны какой-то известной функции $\Phi(Y)$;

— переменные $x_1, \dots, x_k$ являются независимыми и измеряются с пренебрежимо малой погрешностью по сравнению со среднеквадратичным отклонением $\sigma[y_i]$.

Методы вычисления коэффициентов регрессии. Эти методы сравнительно сложны и базируются обычно на аппарате матричного исчисления; при этом в наиболее сложных случаях используются стандартные программы на ЭВМ.

Результаты эксперимента записываются в виде матрицы наблюдавшихся значений:

$$X = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{vmatrix}; \quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}.$$

По этим результатам можно найти точечные оценки коэффициентов регрессии. Для этого, используя метод наименьших квадратов, составляют n несовместных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 x_{01} + b_1 x_{11} + \dots + b_i x_{i1} + \dots + b_k x_{k1} &= y_1; \\ \dots & \dots \\ b_0 x_{0j} + b_1 x_{1j} + \dots + b_i x_{ij} + \dots + b_k x_{kj} &= y_j; \\ \dots & \dots \\ b_0 x_{0n} + b_1 x_{1n} + \dots + b_i x_{in} + \dots + b_k x_{kn} &= y_n. \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы уравнений определяют $(k + 1)$ коэффициентов регрессии. Решение записывают в матричной форме. Всю систему уравнений записывают в матричной форме в виде $XB = Y$, где

$$X = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0j} & x_{1j} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{kj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{in} & \dots & x_{kn} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{vmatrix}; \quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}.$$

Матрицу B при этом определяют из уравнения

$$B = C^{-1} X^T Y,$$

где X^T — транспонированная матрица X ; C^{-1} — обратная матрица произведения $C = X^T X$, равная $C^{-1} = (X^T X)^{-1}$.

Для получения матрицы B (а значит, и всех оценок коэффициентов регрессии) необходимо произвести ряд преобразований, которые хотя и являются стандартными в матричном исчислении, но в общем виде не наглядны, поэтому ход таких вычислений представим на числовом примере.

Пример 3.1. Результаты эксперимента приведены ниже:

N	x_1	x_2	y	N	x_1	x_2	y	N	x_1	x_2	y
1	0	0	10	4	1	0	14	7	2	2	40
2	0	1	17	5	2	0	18	8	0	-1	3
3	0	2	20	6	1	1	24	9	-1	-1	3

Число факторов $k = 2$. Количество опытов $n = 9$.

Провести регрессионный анализ, определив значения коэффициентов регрессии. Пусть полином для функции y (модель) линейный:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Составим матрицу X и транспонированную матрицу X^T (путем замены мест столбцов и строк):

$$X = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad X^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Найдем произведение $X^T X$, складывая почленно произведения элементов строк X^T и столбцов X :

$$X^T X = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 7 \\ 4 & 6 & 12 \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить обратную матрицу $(X^T X)^{-1}$, найдем определитель матрицы $X^T X$:

$$\Delta = 9(11 \cdot 12 - 6 \cdot 6) - 5(5 \cdot 12 - 4 \cdot 6) + 4(5 \cdot 6 - 4 \cdot 11) = 628.$$

Матрицу $(X^T X)^{-1}$ составим из определителя Δ и дополнений матрицы $X^T X$:

$$\begin{aligned} (X^T X)^{-1} &= C^{-1} = \frac{1}{628} \begin{vmatrix} 11 \cdot 12 - 6 \cdot 6 & 5 \cdot 12 - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 6 - 4 \cdot 11 \\ 5 \cdot 12 - 6 \cdot 4 & 9 \cdot 12 - 4 \cdot 4 & 9 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \\ 5 \cdot 6 - 11 \cdot 4 & 9 \cdot 6 - 5 \cdot 4 & 9 \cdot 11 - 5 \cdot 5 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{628} \begin{vmatrix} 96 & -36 & -14 \\ -36 & 92 & -34 \\ -14 & -34 & 74 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Запишем матрицу Y и найдем произведение $X^T Y$:

$$Y = \begin{vmatrix} 10 \\ 17 \\ 20 \\ 14 \\ 18 \\ 24 \\ 40 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad X^T Y = \begin{vmatrix} 149 \\ 151 \\ 155 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, матрица

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{628} (96 \cdot 149 - 36 \cdot 151 - 14 \cdot 155) \\ \frac{1}{628} (-36 \cdot 149 + 92 \cdot 151 - 34 \cdot 155) \\ \frac{1}{628} (-14 \cdot 149 - 34 \cdot 151 - 74 \cdot 155) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10,65 \\ 5,2 \\ 6,8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 10,65$; $b_1 = 5,2$; $b_2 = 6,8$, и уравнение регрессии получает конкретный вид:

$$Y = 10,65 + 5,2x_1 + 6,8x_2.$$

Проверка адекватности. После расчетов проверяют соответствие (адекватность) полученного уравнения опытным данным. Такая проверка необходима, так как вид зависимости был заранее неизвестен и выбирался по возможности простым.

Адекватность проверяют обычно по критерию Фишера *:

$$F = s_{aq}^2 / s_y^2. \quad (3.9a)$$

Оценку дисперсий s_{aq}^2 и s_y^2 производят по формулам

$$\left. \begin{aligned} s_{aq}^2 &= \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^n (y_j - y_{pj})^2; \\ s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2; \bar{y} = \sum_{j=1}^n y_j / n, \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

где $n - k = f$ — число степеней свободы; k — количество коэффициентов в уравнении регрессии; y_j — текущее значение величины Y ; y_{pj} — расчетное значение величины Y , вычисленное по уравнению регрессии при подстановке в него опытных значений x_j .

Критерий Фишера позволяет как бы сравнить общий разброс относительно линии регрессии с разбросом в точке. Задавая уровень значимости q (обычно q выбирают равным 0,05), по заранее составленной таблице находят значение критерия Фишера. Если оно больше вычисленного ранее, то полученная в виде уравнения регрессии модель адекватна результатам эксперимента, если же нет — то требуется выбрать другой, более сложный вид уравнения. Однако здесь необходимо соблюдать условие, чтобы число опытов было не меньше числа оцениваемых коэффициентов. При этом значения x_j^2 или произведения значений факторов x_i , которые дополнительно могут войти в уравнение, обозна-

* О критериях Фишера, Стьюдента и других подробнее см., например в кн.: Ильинский Н. Ф. Элементы теории эксперимента. — Труды МЭИ, 1980, 92 с.

чают условно как факторы с номером больше k и все последующие операции регрессионного анализа проводят аналогично изложенному выше методу.

Если число опытов в каждой точке (т.е. при каждом сочетании значений факторов) больше единицы и различно, то

$$s_{aq}^2 = \sum_{j=1}^n n_j (\bar{y}_j - y_{pj})^2 / f, \quad (3.10)$$

где n_i — число параллельных (повторных) опытов в i -й строке матрицы; $\bar{y}_i$ — среднее арифметическое из n_i параллельных опытов.

Анализируя далее, проверим значимость коэффициентов двумя равноценными способами: по критерию Стьюдента или с помощью доверительного интервала. Если опытные данные получены в результате полного факторного эксперимента, то доверительные интервалы для всех коэффициентов (в том числе и эффектов взаимодействия) равны друг другу.

Найдем сначала дисперсию коэффициента регрессии

$$s_{bj}^2 = s_y^2 / n.$$

Дисперсии всех коэффициентов равны друг другу, так как они зависят только от погрешности измерений и числа опытов. Доверительный интервал для j -го коэффициента

$$\Delta b_j = \pm t_c s_{bj} = t_c s_y / \sqrt{n}.$$

Здесь t_c — квантиль распределения Стьюдента при числе степеней свободы, с которыми определялась дисперсия для вероятности, равной выбранному уровню значимости.

Коэффициент значим, если он больше доверительного интервала, т. е. если его среднее влияние на y больше, чем влияние разбросов за счет неточности модели и «мешающих» факторов.

В тех случаях, когда экспериментальные данные получены с существенными погрешностями и расхождениями, исследователю, создающему гипотезу явления и его математическое описание, приходится выбирать из множества возможных описаний (гипотез), не противоречащих полученным экспериментальным результатам — данным измерений.

В этом случае решающее значение в планировании эксперимента и обработке его данных приобретает принцип максимума правдоподобия: *наилучшим описанием явления будет то, которое дает наибольшую вероятность получить в результате измерений именно те значения, которые фактически получены.*

Не рассматривая подробно этот принцип*, заметим, что его приходится применять и в тех случаях, когда нельзя непосредственно получить в эксперименте подлежащие изучению величины, а удастся только получить некоторые их функции, зависящие от ряда других параметров.

* Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. — М.: Наука, 1964; Некоторые вопросы математического описания многофакторных процессов / Под ред. Г. К. Круга. — Труды МЭИ, вып. 51, 1963.

Принцип максимума правдоподобия отражает стремление исследователя выбрать такую гипотезу, при которой (предполагая, что выбранное описание истинно) вероятность получить в процессе измерения фактически наблюдавшиеся величины была бы максимальной. При этом вероятность получения различных результатов наблюдения описывается некоторой функцией распределения. Теоретические распределения, выдвигаемые в качестве гипотез, основанных на предшествующих сериях измерений, требуют обязательной проверки. Они могут также выводиться математически исходя из природы исследуемых случайных величин или из связи рассматриваемых величин с другими, распределение которых известно. Специально разработанная методология позволяет в каждом конкретном случае найти функцию правдоподобия и достаточно уверенно планировать и обрабатывать опыты даже в сложных случаях.

§ 3.3. ПРОСТЕЙШАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Порядок проведения эксперимента. Все экспериментальные исследования, проводимые как в натуре, так и на моделях, должны быть предварительно тщательно продуманы не только в отношении порядка их проведения, но и выбора способов обработки полученных данных (см. § 3.1 и 3.2). Далее (см. § 3.6) будет показано, что такая обработка должна, как правило, проводиться в критериальной форме, хотя в отдельных случаях в этом нет необходимости и тогда под критериальными величинами π можно понимать параметры исследуемого явления. Следует заметить, что термин «данные» относится ко всем материалам, накапливающимся у экспериментатора по окончании опыта. Ими могут быть таблицы записей, осциллограммы, ленты регистрирующих приборов, записи на магнитных лентах, фотоснимки и прочее, т. е. «сырые» необработанные данные. Обработанные данные составляют та же информация после выполнения таких математических операций, как построение графиков, пересчет в относительные единицы, выявление функциональных зависимостей и их математическое (аналитическое) представление в виде буквенных выражений (формул). При конструировании этих выражений причинная зависимость может быть достаточно ясной, а может быть и малозаметной. В одних случаях она определяется сразу же при построении графика, а в других для ее определения требуется применять статистические критерии значимости и выявлять наличие совокупности ошибок. Однако во всех случаях в результате эксперимента получают некоторую конечную выборку отсчетов из бесконечной совокупности. Чем больше выборка, тем ближе ее распределение к распределению генеральной совокупности. Однако, как правило, выборка эта ограничена и далеко не всегда удается сразу же по полученным в опыте данным определить аналитический вид зависимости. Приходится выдвигать гипотезу о виде зависимости и проверять по известным (см. § 3.1) критериям ее правоту.

Представление результатов эксперимента. При обработке эксперимента важно наилучшим образом выбрать форму представления его результатов. В качестве такой формы обычно принимают степенную

зависимость $y = Ax^m U^n V^p$, как наиболее простую и гибкую (обладающую возможностью варьирования коэффициентов и показателей для отдельных интервалов), причем следует вводить в эту степенную форму не отдельные именованные величины, а критериальные значения или, в крайнем случае, значения, представленные в относительных единицах. Метод дальнейшей конкретизации такого рода выражений, т. е. определения значений их параметров, заключается в следующем:

1. Получив путем предварительного анализа степенную зависимость между критериями подобия $\pi_x = A\pi_1^m \pi_2^n$, необходимо так провести эксперименты, чтобы для каждого постоянного значения опреде-

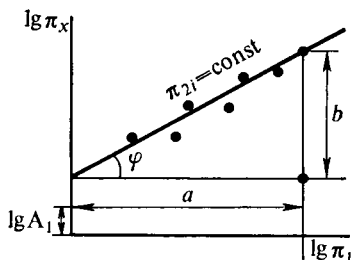


Рис. 3.5

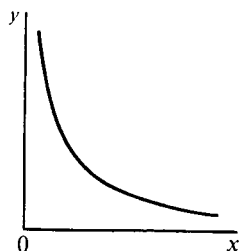


Рис. 3.6

ляющего критерия π_2 найти достаточно большой ряд значений неопределяющего критерия π_x в зависимости только от одного определяющего критерия π_1 .

2. Полученные экспериментальные данные следует представить графически в логарифмической анаморфозе (рис. 3.5). Если между критериями π_x и π_1 действительно имеется степенная зависимость, то в логарифмической анаморфозе все экспериментальные точки (для каждого постоянного значения π_{2i}) укладываются на одну прямую:

$$\lg \pi_x = \lg A_1 + m \lg \pi_1,$$

где $A_1 = A\pi_{2i}^n$.

3. Далее необходимо определить показатель m как тангенс угла наклона полученной прямой линии к оси абсцисс:

$$m = \operatorname{tg} \varphi = b/a,$$

где a и b находятся непосредственно масштабной линейкой.

4. Коэффициент A_1 следует найти для ряда значений (не менее трех):

$$A_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\pi_{xk}}{\pi_{1k}^m},$$

где N — число значений π_x .

Если степенная форма критериального уравнения дает неудовлетворительные результаты, то задача конкретизации формы этого уравнения сводится к подбору эмпирической формулы типа $y = f(x)$, последующему определению значений ее параметров по методу наименьших квадратов и проверке полученной формулы. При подборе типа

эмпирической формулы рекомендуется руководствоваться следующими соображениями:

— табличные значения переменных x и y нанести на график и по общему виду графика подобрать тип формулы;

— для зависимости типа обратной пропорциональности (рис. 3.6) выбрать формулу дробно-линейного вида ($A < C$):

$$y = (Ax + B) / (Cx + D);$$

— если процесс затухающий, то выбрать одну из экспоненциальных зависимостей — 1 или 2 (рис. 3.7);

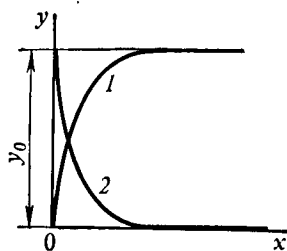


Рис. 3.7

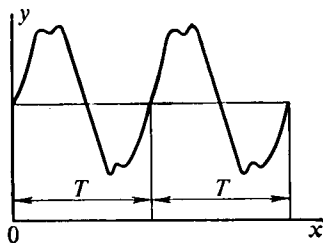


Рис. 3.8

— если процесс периодический (рис. 3.8), то использовать тригонометрическую зависимость

$$y = A \sin(\alpha + 2\pi x / T),$$

или тригонометрический ряд

$$y = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + A_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots + B_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + \\ + B_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots,$$

где $\pi = 3,14$;

— в более общем случае, когда нельзя сделать предположений относительно ожидаемой после обработки аналитической формы, функцию следует представить в виде отрезков степенного ряда полиномов той или иной степени, т. е. *уравнением регрессии*

$$y = b_0 + \sum b_{1j} x_{1j} + \sum b_{2j} x_{2j} + \sum b_{ij} x_i^2 + \dots,$$

где y — исследуемый параметр; b_0 , b_i , b_{ij} , b_{ii} — коэффициенты регрессии, определяемые обычно методом наименьших квадратов; x — влияющие параметры.

В частном случае необходимо применить многочлен

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Mx^n.$$

При этом проверку следует начать с многочлена первой или второй степени. Если она не удовлетворительна, то надо повысить степень многочлена; подобрав тип эмпирической формулы, определить значе-

ния ее буквенных параметров по методу наименьших квадратов. При этом надо руководствоваться следующими соображениями.

1. Если формула нелинейна относительно параметров, приведем ее к линейному виду соответствующим преобразованием (или разложением в ряд), в частности:

— для дробно-линейной зависимости

$$Ax + B - Dy = Cxy;$$

— для экспоненциальной зависимости

$$\ln \ln \frac{y_0}{y_0 - y} = m + n \ln x \text{ или } \ln \ln \frac{y_0}{y} = m + n \ln x,$$

где $m = \ln a$; n — постоянная величина;

— для тригонометрической зависимости

$$a \cos (2\pi x/T) + b \sin (2\pi x/T) = y,$$

где $a = A \sin \alpha$; $b = A \cos \alpha$.

2. Подставляя в полученную формулу поочередно все табличные значения x_i и y_i (где $i = 1, 2, \dots$), для определения буквенных параметров A, B, C найдем r линейных условных уравнений вида $f(x_i, A, B, C, \dots) = y_i$, которые можно представить как

$$a_i u + b_i v + c_i w + \dots = l_i,$$

где a_i, b_i, c_i, l_i — коэффициенты условных уравнений, получаемые в результате подстановки табличных значений x_i и y_i ; u, v, w — неизвестные буквенные параметры эмпирической формулы.

3. Для определения неизвестных буквенных параметров составим нормальные уравнения:

$$u \sum a_i^2 + v \sum a_i b_i + w \sum a_i c_i + \dots = \sum a_i l_i;$$

$$u \sum a_i b_i + v \sum b_i^2 + w \sum b_i c_i + \dots = \sum b_i l_i;$$

$$u \sum a_i c_i + v \sum b_i c_i + w \sum c_i^2 + \dots = \sum c_i l_i.$$

4. Коэффициенты нормальных уравнений проверим, вычислив сумму коэффициентов условных уравнений

$$s_i = a_i + b_i + c_i + \dots + l_i$$

и проверив равенства

$$\sum a_i^2 + \sum a_i b_i + \sum a_i c_i + \dots + \sum a_i l_i = \sum a_i s_i;$$

$$\sum a_i b_i + \sum b_i^2 + \sum b_i c_i + \dots + \sum b_i l_i = \sum b_i s_i;$$

$$\sum a_i c_i + \sum b_i c_i + \sum c_i^2 + \dots + \sum c_i l_i = \sum c_i s_i.$$

Получив значения параметров эмпирической формулы, проверим удовлетворительность ее. Для этого, подставив табличные значения x_i в формулу, найдем вычисленные значения y_{pj} и определим среднюю квадратическую ошибку на единицу веса

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum (y_j - y_{pj})^2 / (r - s)},$$

или среднее абсолютное отклонение

$$\delta = \sum |y_j - y_{pj}| / r,$$

где r — число табличных значений; s — число параметров.

Если величины σ_0 и δ находятся в пределах абсолютного значения допустимых ошибок y_i , то формула удовлетворительна.

Пример 3.2. Подобрать эмпирическую формулу, аппроксимирующую данные, приведенные ниже:

$x \dots$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$y \dots$	7,0	4,8	2,8	1,4	0

Примем сначала в качестве эмпирической формулы многочлен первой степени

$$y = A + Bx.$$

Подставляя в него табличные значения, получаем условные уравнения для A и B :

$$A = 7,0; A + 0,5B = 4,8; A + B = 2,8; A + 1,5B = 1,4; A + 2B = 0.$$

Составляем нормальные уравнения:

$$5A + 5B = 16,0; 5A + 7,5B = 7,3.$$

Проверяем коэффициенты нормальных уравнений:

$$5 + 5 + 16,0 = (1 + 7,0) + (1 + 0,5 + 4,8) + (1 + 1 + 2,8) +$$

$$+ (1 + 1,5 + 1,4) + (1 + 2) = 26,0;$$

$$5 + 7,5 + 7,3 = 0,5(1 + 0,5 + 4,8) + (1 + 1 + 2,8) + 1,5(1 + 1,5 +$$

$$+ 1,4) + 2(1 + 2) = 19,8.$$

Решая нормальные уравнения, получаем

$$A = 6,68; B = -3,48,$$

на основании чего эмпирическая формула (рис. 3.9, кривая 1) представится как

$$y = 6,68 - 3,48x.$$

Подставив в полученную формулу значения x (табл. 3.1), определим вычисленные значения y_{pi} и отклонения. Отсюда находим $\sum (y_j - y_{pi})^2 = 0,364$. Средняя квадратическая ошибка на единицу веса

$$\sigma_0 = \sqrt{0,364/(5-2)} = 0,348.$$

Среднее абсолютное отклонение

$$\delta = (0,32 + 0,14 + 0,40 + 0,06 + 0,28)/5 = 0,240.$$

Полученные значения показывают, что формула подобрана неудовлетворительно, так как табличные значения даны с точностью до 0,1, а средняя квадратическая ошибка на единицу веса значительно больше 0,1.

Аналогично проверяем многочлен второй степени вида

$$y = A + Bx + Cx^2.$$

Подставляя в него табличные значения x и y , получаем условные уравнения

$$A = 7,0; A + 0,5B + 0,25C = 4,8; A + B + C = 2,8; A + 1,5B + 2,25C =$$

$$= 1,4; A + 2B + 4C = 0.$$

Составляем нормальные уравнения:

$$5A + 5B + 7,5C = 16,0;$$

$$5A + 7,5B + 12,5C = 7,3;$$

$$7,5A + 12,5B + 22,125C = 7,15.$$

Таблица 3.1

x	y_{pj}	$y_j - y_{pj}$	$(y_j - y_{pj})^2$
0	+6,68	+0,32	0,1024
0,5	+4,94	-0,14	0,0196
1,0	+3,20	-0,40	0,1600
1,5	+1,46	-0,06	0,0036
2,0	-0,28	+0,28	0,0784

Таблица 3.2

x	y_j	$y_j - y_{pj}$	$(y_j - y_{pj})^2$
0	7,0	0	0
0,5	4,79	+0,01	0,0001
1,0	2,89	-0,09	0,0081
1,5	1,30	+0,10	0,0100
2,0	0,04	-0,04	0,0016

Проверяем коэффициенты нормальных уравнений:

$$5 + 5 + 7,5 + 16,0 = (1 + 7,0) + (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + \\ + (1 + 1 + 1 + 2,8) + (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + (1 + 2 + 4) = 33,5;$$

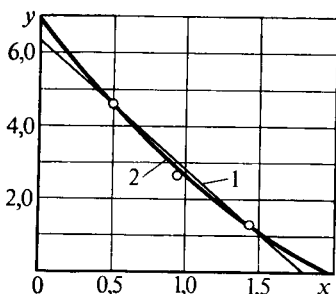


Рис. 3.9

$$5 + 7,5 + 12,5 + 7,3 = 0,5 (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + \\ + (1 + 1 + 1 + 2,8) + 1,5 (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + 2 (1 + 2 + 4) = \\ = 32,3;$$

$$7,5 + 12,5 + 22,125 + 7,15 = 0,25 (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + \\ + (1 + 1 + 1 + 2,8) + 2,25 (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + 4 (1 + 2 + 4) = \\ = 49,275.$$

Решая нормальные уравнения, находим:

$$A = 7,00; B = -4,74; C = 0,63,$$

на основании чего записываем эмпирическую формулу

$$y = 7,00 - 4,74x + 0,63x^2.$$

Подставляя в нее значения x , получаем табл. 3.2.

Средняя квадратическая ошибка на единицу веса

$$\sigma_0 = \sqrt{0,0198 / (5 - 3)} = 0,0995.$$

Среднее абсолютное отклонение

$$\delta = (0 + 0,01 + 0,09 + 0,10 + 0,04) / 5 = 0,048.$$

Многочлен второй степени можно считать удовлетворительным (рис. 3.9, кривая 2).

Наиболее целесообразно иметь аналитическое описание в виде критериального уравнения регрессии:

$$\begin{aligned} \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-k}) = b_0 + \sum_{i=2}^{m=k} b_i \pi_i + \\ + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{m-k} b_{ij} \pi_i \pi_j + \sum_{i=2}^{m=k} b_{ii} \pi_i^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где b_i, b_{ij}, b_{ii} — оценки коэффициентов уравнения (3.11), близкие к истинным значениям коэффициентов:

$$b'_i = \left. \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \right|_{\bar{\pi}=0}; \quad b'_{ij} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \right|_{\bar{\pi}=0}; \quad b'_{ii} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_i^2} \right|_{\bar{\pi}=0};$$

здесь $\bar{\pi}$ — вектор, координатами которого являются критерии подобия исследуемого процесса.

Весовые значения коэффициентов уравнения регрессии (3.11) показывают, как влияют на π_1 остальные критерии подобия и их совокупности.

После проведения эксперимента для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизации. По этим значениям видно наилучшую (близкую к оптимальной) и наихудшую комбинацию значений факторов. Однако прежде чем перейти к оптимизации, необходимо выполнить ряд операций по анализу полученных данных.

Статистическая неопределенность. Обладают результаты каждого опыта за счет погрешности измерения значений факторов и параметра Y , влияния неучтенных факторов и т. п. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизации Y будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов («в каждой точке») проводить по нескольку повторных опытов. Вначале производят обработку опытов по формулам, аналогичным приведенным выше:

$$\bar{y} = \sum_{q=1}^n y_q / n, \quad s = \sqrt{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2 / (n-1)},$$

где q — текущий номер повторного опыта (из общего числа n) при определенном сочетании значений факторов.

Затем сравнивают две любые серии по n опытов, чтобы оценить их значимость, т. е. понять — существенно ли различие значений y при двух комбинациях значений факторов («в двух точках») или оно мало по сравнению с разбросом при воспроизведении n опытов при одних и тех же значениях факторов. Если в каждой точке погрешности опыта практически равны, то используется t -критерий (критерий Стьюдента):

$$t = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) / (s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}); \quad (3.12)$$

$\bar{y}_1$ — среднее значение n_1 опытов при определенном сочетании значений факторов; $\bar{y}_2$ — среднее значение n_2 опытов при другом сочетании значений факторов; s — разброс значений y .

Вычисленное значение t_p сравнивают с табличным t_T , которое находят для числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ и уровня значимости α (обычно $\alpha = 0,05$). Если $t_p < t_T$ табличного, то с вероятностью $p = 1 - \alpha$ следует считать, что разницы между сериями опытов n_1 и n_2 нет, т. е. их отличие незначительно.

Обработку экспериментальных результатов, учет (при необходимости) нескольких составляющих погрешностей, исключение грубых ошибок и т. п. производят методами теории ошибок.

Помимо дисперсии s^2 в серии из n опытов рассчитывается также общая дисперсия параметра оптимизации s_y^2 , называемая также дисперсией воспроизводимости эксперимента $s_{\text{воспр}}^2$ [см. (3.9)]:

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2 / [N(n-1)], \quad (3.13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; $q = 1, \dots, n$ — число повторных опытов, одинаковое по всей матрице.

При разных числах опытов n приходится пользоваться средневзвешенным значением дисперсий, взятым с учетом числа степеней свободы:

$$s_y^2 = \frac{s_1^2 f_1 + \dots + s_N^2 f_N}{f_1 + \dots + f_N} = \sum_{i=1}^N f_i s_i^2 / \sum_{i=1}^N f_i, \quad (3.14)$$

где f_i — число степеней свободы в каждой серии опыта ($f_i = n - 1$).

Последняя формула справедлива только в том случае, когда дисперсии s_i однородны, т. е. среди них нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Можно проверить однородность по различным критериям. Для двух дисперсий применяют критерий Фишера, представляющий собой отношение большей дисперсии к меньшей. Если полученное значение отношения больше (см. сноски на с. 115 и 140) для соответствующих степеней свободы и выбранного уровня значимости, то дисперсии неоднородны.

Пример 3.3. Пусть $s_1^2 = 5,14$, $n_1 = 7$, $f_1 = n - 1 = 6$; $s_2^2 = 0,324$, $n_2 = 6$, $f_2 = 5$.

Критерий $F = 5,14/0,324 = 15,9$.

Для степеней свободы $f_1 = 6$, $f_2 = 5$ и уровня значимости 0,05 находим табличное значение 4,95. Значит, дисперсии неоднородны.

Если сравниваемое число дисперсий больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные, можно воспользоваться критерием Кохрена. Этот критерий пригоден для случаев, когда число опытов во всех точках одинаково. При этом подсчитывают дисперсию в каждой горизонтальной строке матрицы s^2 , а затем из всех дисперсий выбирают наибольшую s_{max}^2 , которую делят на сумму всех дисперсий:

$$G = s_{\text{max}}^2 / \sum_{i=1}^N s_i^2. \quad (3.15)$$

Далее полученное значение сравнивают с табличным. Если $G_T > G_p$, то дисперсии однородны.

Пример 3.4. Для результатов эксперимента

Номер опыта...	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_i^2 \dots$	1,444	1,444	0,062	1,620	0,046	0,246	0,246	0,106

критерий

$$G = 1,62/5,214 = 0,31.$$

Табличное значение $G = 0,68$, т. е. больше расчетного. Следовательно, дисперсии однородны:

$$s_y^2 = 2 \sum_{i=1}^8 (y_{iq} - \bar{y}_i)^2 / 8 = 0,652.$$

Если возникает предположение о неоднородности дисперсий, то его следует проверить. Для этого можно воспользоваться критерием Фишера, сравнивая из всего ряда наибольшую и наименьшую дисперсии; если они отличаются не сильно, значит, все дисперсии однородны.

После проведения эксперимента проводят анализ адекватности (соответствия) выбранной модели (вида полинома) опытным данным. Затем проверяют значимость коэффициента по критерию Стьюдента или путем построения доверительных интервалов.

§ 3.4. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПЛАНИРОВАНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТА

Планирование экспериментов приобретает все большее и большее значение при постановке исследований сложных систем и различных многофакторных объектов. Повышение эффективности эксперимента особенно актуально в связи с тем, что многие экспериментальные научные исследования проводятся настолько хаотично, что их коэффициент полезного действия оказывается очень невысоким. Так, известный ученый Д. Берналл оценивал его в 2%. Между тем четко провести эксперимент, объективно оценив сведения об изучаемом процессе и распространив материал, полученный в одном исследовании, на серию других исследований можно только в том случае, если экспериментальные исследования правильно поставлены, а их обработка выполнена при обобщенном подходе. Первым этапом такого подхода к постановке эксперимента и его обработке является **п л а н и р о в а н и е э к с п е р и м е н т а**, вторым этапом — **к р и т е р и а л ь н о е п л а н и р о в а н и е и о б р а б о т к а**.

Планирование экспериментов должно предусматривать применение в практике исследователя способов, позволяющих увеличивать эффективность от наблюдений, проводимых при относительно «бедной» статистике, получать наглядную интерпретацию результатов и наилучшим образом оценивать случайные и систематические ошибки.

Применение методов планирования эксперимента может быть облегчено и расширено, если учесть, что цели, которые ставятся при планировании эксперимента, и задачи, которые с помощью его решаются, во многом совпадают с целями и задачами, решаемыми методами теории подобия и моделирования. Именно теория подобия, являющаяся расширенной теорией эксперимента, ставит своей задачей так обобщить опытные данные, чтобы любой единичный эксперимент (физический или математический), проведенный на какой-либо модели (мате-

риальной или мысленной), мог бы быть закономерно перенесен на неограниченно большой класс явлений, которые в соответствии с критериями, вытекающими из теории подобия, признаются подобными данному явлению.

Обработка результатов исследований при относительно неполной информации также выполняется методами теории подобия.

При усложнении энергетических объектов все большее значение приобретает увеличение надежности результатов, получаемых с помощью эксперимента. Здесь исследования, проведенные на базе методов теории подобия, с одновременным применением статистического эксперимента на вычислительных машинах, позволяють повысить уверенность заключений о свойствах объектов, экспериментально выявляемых на натуре, физических моделях, математических аналоговых моделях разного рода и ЦВМ (математические эксперименты).

Современные тенденции синтеза теоретических наук и экспериментальных методов указывают на целесообразность объединения методов теории подобия и моделирования, являющихся испытанным средством инженерного исследования, с относительно недавно зародившимися методами планирования экспериментов и проведения их как экстремальных, отвечающих принципу максимума правдоподобия. Несомненно, что такой синтез приведет к большому расширению возможностей как теории планирования экспериментов, так и развивающихся методов теории подобия и моделирования.

Планирование экспериментов базируется в основном на математических методах. Здесь статистические методы используются на всех этапах исследования при формализации априорных сведений перед постановкой опытов; при выборе факторов, влияющих на свойства, и самих свойств, подлежащих изучению; при постановке эксперимента и обработке его результатов; при принятии решений как на промежуточных этапах, так и в конце всей работы. Способы планирования экспериментов весьма разнообразны. Наиболее эффективно они применяются при решении так называемых *экстремальных задач*. В этих задачах предполагается, что параметр оптимизации (например, то свойство, которое необходимо оптимизировать) связан с факторами, влияющими на изменение изучаемого свойства, каким-то математическим выражением.

Экстремальный эксперимент требует при минимальном числе опытов, варьируя значения независимых переменных по специально сформированным правилам, найти область оптимума и получить ее математическую модель. Подход здесь чисто кибернетический. Весь процесс влияния факторов на свойства представляется в виде «черного ящика», и экспериментатор на первом этапе исследования, по сути дела, абстрагируется от механизма явления, от механизма влияния факторов. Он лишь меняет входы «черного ящика» и соответственно этому получает разные его выходы.

Получение математической модели требует выбора функции вида

$$Y = f(x_1, \dots, x_k),$$

где Y — обобщенный показатель (параметр оптимизации), характеризующий эффективность устройства (системы) и позволяющий проводить оптимизацию; экстремум Y соответствует оптимальной системе; $x_1, \dots, x_k$ — факторы (внешние и внутренние), влияющие на значение функции Y и принимающие оптимальные значения при экстремуме Y .

В эксперименте определяются численные значения коэффициентов уравнения. Обычно функция $(x_1, \dots, x_k)$ выбирается в виде степенного ряда, точнее, отрезков степенных рядов — алгебраических полиномов. В частности, для двух факторов полиномы нулевой, первой, второй и третьей степеней имеют вид соответственно:

$$Y = b_0;$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2;$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2;$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + \\ + b_{112} x_1^2 x_2 + b_{122} x_1 x_2^2 + b_{111} x_1^3 + b_{222} x_2^3.$$

Модель должна быть достаточно близкой к фактической зависимости, т. е. быть адекватной натуре, и простой. В каждой конкретной задаче исследователь выбирает модель, проводит эксперимент, а затем по его результатам проверяет адекватность модели. Очень часто простейшей моделью может являться полином первой степени (линейная модель).

Схема решения задачи в общем виде предполагает вначале наблюдение за факторами, влияющими на параметр оптимизации, а затем поиск связи между ними. Связь эта, выявляемая в результате опытов, обычно представляется в виде известного уравнения регрессии (3.8), т. е. в виде некоторой поверхности $y = \varphi(x_i, x_j, \dots)$, расположенной в многомерном пространстве (поверхность отклика).

Решается задача поэтапно, и в этом — основной принцип метода планирования экспериментов. На первом этапе, варьируя в каждом опыте сразу все независимые переменные (что значительно уменьшает объем экспериментальной работы), исследователь ищет лишь направление движения к области оптимума. Поверхность отклика при этом исследуется только на небольшом участке, в линейном приближении. В дальнейшем на каждом этапе в соответствии с результатами, полученными на предыдущих этапах, ставится небольшая серия опытов, результаты которых вместе с интуитивными решениями определяют следующий шаг. Эта процедура заканчивается в области оптимума, где ставится значительно большая серия опытов, и поверхность отклика в области оптимума описывают уже нелинейными функциями. *Получающиеся в результате уравнения регрессии служат математическими моделями.* По значениям коэффициентов этих уравнений, как правило, можно судить об эффектах — степени влияния — соответствующих факторов и их взаимодействиях.

Статистическая значимость коэффициентов соответствует значимости эффектов. Такой целенаправленный подход к исследованию значительно эффективнее подхода, выполняемого на основе проб и ошибок или на основе только опыта и интуиции.

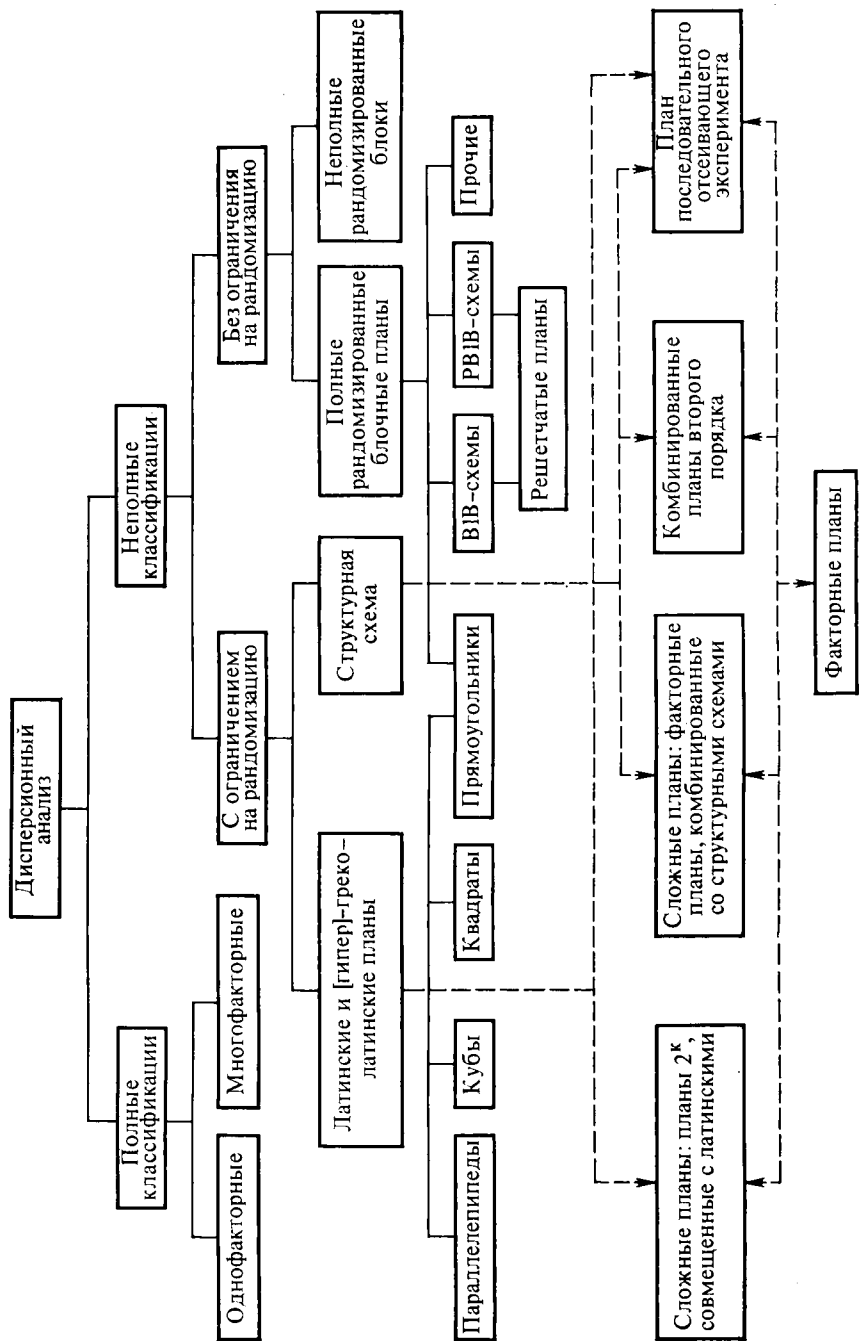
Основная идея метода планирования — возможность целенаправленного *оптимального управления экспериментом при неполном знании механизма изучаемого явления* — отвечает идеям кибернетического подхода, предусматривающего формализацию нетворческой части труда исследователя. В основе теории планирования эксперимента лежат методы регрессионного и дисперсионного анализа.

Д и с п е р с и о н н ы й а н а л и з является статистическим методом, с помощью которого суммарную дисперсию разлагают на составляющие. Методы дисперсионного анализа применяются в условиях неоднородности. Различные варианты применения дисперсионного анализа при планировании экспериментов показаны на рис. 3.10. В зависимости от числа источников дисперсии различают о д н о - и м н о г о ф а к т о р н ы й дисперсионный анализ. Если при постановке опытов реализуются все возможные совокупности условий, задаваемых выбранной схемой эксперимента, то имеется п о л н а я к л а с с и ф и к а ц и я дисперсионного анализа. При н е п о л н ы х к л а с с и ф и к а ц и я х дисперсионного анализа реализуются не все возможные совокупности условий и, следовательно, сокращается перебор вариантов. Сокращение может быть осуществлено случайным образом или в соответствии с некоторыми строгими правилами. При случайном сокращении имеется классификация с ограничениями на случайность — «рандомизация». *Рандомизацией** эксперимента называется сознательное проведение запланированных опытов в случайной последовательности, с тем чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями. Простейший подход рандомизации состоит в использовании таблицы случайных чисел, по которой выбирается последовательность всех опытов, включая и n_i опытов в каждой точке. Другой подход состоит в разбивке матрицы на блоки. Если экспериментатор знает об изменении каких-то внешних условий, он может планировать эксперимент так, чтобы влиянием этих условий можно было пренебречь. Например, матрицу 2^3 можно разбить на два блока таким образом, чтобы эффект влияния условий сказался на величине трехфакторного взаимодействия, а все линейные коэффициенты и парные взаимодействия были свободны от этого влияния.

В теории планирования эксперимента широко пользуются понятием *матриц планирования эксперимента*, т. е. таблицами, в которых записаны кодированные значения факторов. Каждый столбец в этой матрице планирования называется *вектор-столбцом*. Если сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю, то матрица планирования обладает свойством *ортogonalности*. Если точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления, то это свойство называется *ротатабельностью*.

Эксперимент, при котором реализуются все уровни факторов, называется *полным факторным экспериментом* (ПФЭ). Часто применяют

* В теории планирования эксперимента вместо русского слова «случайность» применяют английский термин «Random» — отсюда «рандомизация».



относится к области, далекой от оптимальных условий. Кроме того, получая значения y^I , y^{II} , ..., исследователь может «проскочить» точку экстремума $y_{\max}$.

При использовании метода планирования экспериментов их ход рационализируется следующим образом. Вблизи точки y_0 ставится небольшая серия из четырех (область a на рис. 3.11) опытов. Цель этих опытов — еще не поиск, а предварительное отыскание направления поиска. При этом исследователь неизвестную поверхность отклика на небольшом участке вблизи точки y_0 аппроксимирует плоскостью и находит коэффициенты регрессии уравнения

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Получив это приближенное уравнение, исследователь далее может найти его градиент, установить направление α , в котором надо двигаться из области a . Сделав несколько опытов в этом направлении (осуществив, как говорят, «крутое восхождение по поверхности отклика в направлении градиента линейного приближения»), исследователь выбирает новую исходную точку y_1 , возле которой вновь ставит аналогичную серию из четырех опытов, рассчитывает коэффициенты нового, линейного приближения, теперь уже вблизи точки y_1 ($y = b'_0 + b'_1 x_1 + b'_2 x_2$), и движется по градиенту этого уравнения, т. е. по направлению β из области b . Направление градиента линейного приближения геометрически представляет собой в данном случае прямую, перпендикулярную изолиниям, т. е. самый крутой склон (кратчайший путь), ведущий от данной точки к вершине. Для поверхности отклика, показанной на рис. 3.11, оказалось достаточным проведением двух серий опытов, чтобы при крутом восхождении найти $y_{\max}$ — экстремум. Естественно, что чем больше факторов варьируется, тем эффективнее применение методов планирования экспериментов.

Общая схема планирования экспериментов для решения экстремальных задач включает в себя следующие этапы: 1) постановка задачи; 2) выбор параметра оптимизации; 3) выбор факторов; 4) составление линейного плана; 5) реализация линейного плана и построение линейной модели; 6) поиск области экстремума; 7) описание области экстремума; 8) интерпретация результатов. Рассмотрим подробно главнейшие из них.

§ 3.5. ПОЛНЫЙ И ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Постановка задачи. Решение задачи начинается с ее формулировки. Исследователь должен иметь ясное, четкое, однозначное представление о цели работы. Желательно, чтобы цель исследования была сформулирована количественно, так как планирование экспериментов связано прежде всего с установлением количественных связей между входными и выходными параметрами изучаемой системы; разумеется, объект обследования должен быть управляемым.

Выбор параметра оптимизации. При этом должны удовлетворяться следующие требования. Желательно, чтобы параметр оптимизации был

однозначным, характеризовался числами, действительно определяя оптимум. Надо стремиться к тому, чтобы параметр был только один, имел ясный физический смысл и оценивался с максимальной статистической эффективностью (последнее позволяет сократить до минимума число параллельных опытов).

Простейший случай имеет место, когда заранее известен параметр и то его значение, к которому следует стремиться. При этом иногда приходится видоизменять вид параметра (например, переходить от его натуральных значений к логарифмическим, обратным величинам и пр.). Если значение параметра, к которому следует стремиться, неизвестно, все же следует попытаться установить ограничения его значения хотя бы с одной стороны.

Иногда параметр оптимизации приходится изменять из-за технических трудностей, связанных, например, с отсутствием необходимых методик или достоверных методов оценки. В этих условиях можно применять параметры, дающие косвенные оценки, но поиск экстремума становится интуитивным, а интерпретация результатов усложняется.

Часто возникают трудности в количественной оценке параметра оптимизации. Тогда можно использовать субъективные ранговые параметры, такие, например, как сорт, балл, класс и др. Некоторые методы планирования экспериментов вообще не требуют количественных оценок параметра оптимизации.

Выбор факторов. Не менее сложно выбрать факторы, влияющие на изменение параметра оптимизации. Если при постановке задачи не учесть какой-нибудь сильно влияющий фактор, то вся работа окажется бесполезной. Поэтому при планировании экспериментов необходимо включать в план исследования все факторы, которые, по мнению экспериментатора, могут влиять на параметр оптимизации. Часто выбранных факторов оказывается очень много; если число их превышает 10, то возникает задача отсеивания незначимых факторов. Некоторые существующие в настоящее время способы отсеивания будут рассмотрены дальше. Пока же будем полагать, что факторы, влияющие на параметр оптимизации, удалось выбрать без отсеивания.

Факторы, которые по тем или иным причинам невозможно учесть в эксперименте, необходимо в течение всех опытов стабилизировать на постоянных уровнях. Важное требование, предъявляемое к факторам,— невозможность их взаимозаменяемости. Взаимозаменяемость не следует допускать даже для двух любых факторов из общей совокупности.

Выбирая факторы, рекомендуется учитывать область, ограничивающую их возможное варьирование. Желательно, чтобы факторы имели количественную оценку, хотя планирование экспериментов возможно, когда некоторые факторы представлены качественно. После выбора факторов для каждого из них необходимо установить основной уровень и интервалы варьирования. При этом интервалы следует выбирать таким образом, чтобы их значения не превышали удвоенной среднеквадратичной ошибки в определении данного фактора. Условия проведения опытов при изменении факторов можно представить табл. 3.3.

Таблица 3.3

Уровень	Факторы (код)				
	x_1	x_2	x_3	...	x_i
Основной уровень (0)	0,40	840	60	...	x_i
Интервалы варьирования (Δx_i)	0,15	100	60	...	Δx_i
Верхний уровень (+1)	0,55	940	120	...	$x_i + \Delta x_i$
Нижний уровень (—1)	0,25	740	0	...	$x_i - \Delta x_i$

Организация экспериментов. Для этого, исходя из предварительных соображений, выберем границы изменения факторов, учитывая продолжительность испытаний, практические возможности установки и т. д. В этих границах для каждого фактора установим основной уровень и интервал варьирования, которые непосредственно используем при планировании эксперимента. Интервалы факторов должны позволять найти оптимальное состояние, основные уровни должны находиться примерно в центре интервалов. Часто, в развитие табл. 3.3, применяют так называемое кодированное значение фактора

$$x_j = (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{j0}) / \Delta x_j, \quad (3.16)$$

где $\tilde{x}_i$ — натуральное значение фактора; $\tilde{x}_{j0}$ — натуральное значение основного уровня; Δx_j — интервал варьирования; j — номер фактора*.

Для качественных факторов, имеющих два уровня (верхний уровень обозначают +1, а нижний — 1), порядок не имеет значения. Верхний уровень фактора найдем как сумму основного уровня и интервала варьирования, нижний — как их разность.

В качестве примера в табл. 3.4 приведены натуральные и кодированные значения факторов для условий опыта с четырьмя факторами:

Таблица 3.4

Уровень	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
Основной уровень	3	30	1,5	15
Интервал варьирования	2	10	1,0	10
Верхний уровень	5	40	2,5	25
Нижний уровень	1	20	0,5	5
Натуральные значения	2	20	1,25	15
Кодированные значения	—0,5	—1	—0,25	0

В ПФЭ реализуются все возможные сочетания уровней факторов. Если число уровней каждого фактора равно двум (верхний и нижний), то имеем полный факторный эксперимент типа 2^k . Общее число опытов

* Подробнее см. в кн: *Зажигаев Л. С., Кишьян А. А., Романников Ю. И.* Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. — М.: Атомиздат, 1978, 230 с., откуда заимствовано данное изложение.

$n = 2^k$, где k — число факторов. Если в опыте используются только верхний и нижний уровни факторов, то кодированные значения факторов равны соответственно $+1$ и -1 ; для простоты записи единицы можно опускать.

Условия эксперимента запишем в виде матриц планирования эксперимента, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы — значениям факторов.

При трех факторах взаимодействия ПФЭ имеют вид, показанный в табл. 3.5.

Полный факторный эксперимент обладает четырьмя свойствами.

1. Симметричен относительно центра эксперимента, что означает равенство нулю алгебраической суммы элементов вектор-столбцов каждого фактора:

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} = 0,$$

где n — число опытов; i — номер опыта; j — номер фактора ($i = 1, \dots, k$).

2. Выполняется условие нормировки, требующее, чтобы сумма квадратов элементов каждого столбца была равна числу опытов:

$$\sum_{i=1}^n x_{ji}^2 = n.$$

Это свойство является следствием того, что значения факторов в матрице задаются равными $+1$ и -1 .

3. Матрица планирования обладает свойством ортогональности, позволяющим принимать сумму почленных произведений любых двух фактор-столбцов матрицы равной нулю:

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} x_{ui} = 0 \text{ и } j = u, j, u = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Таблица 3.5

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y
1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	y_1
2	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	y_2
3	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	y_3
4	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	y_4
5	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	y_5
6	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	y_6
7	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	y_7
8	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1	y_8

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	Кодовое обозначение строк	y
1	+	+	+	+	ab	y_1
2	+	—	+	—	b	y_2
3	+	+	—	—	a	y_3
4	+	—	—	+	(1)	y_4

4. Матрица планирования обладает свойством ротатбельности, позволяющим подбирать точки в матрице планирования так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Составление линейного плана. Следующий этап планирования экспериментов — составление линейного плана, реализация опытов которого преследует цель отыскания направления к оптимуму.

Допустим, что в задаче варьируются только два фактора — x_1 и x_2 , причем каждый на двух уровнях: $+1$ и -1 . Все возможные комбинации факторов будут исчерпаны в четырех опытах (табл. 3.6). Линейный план, или линейная модель, характеризуется варьированием факторов на двух уровнях. Если число факторов каждого уровня равно двум, то реализуется ПФЭ типа 2^2 .

Приведенная таблица называется *матрицей планирования полного факторного эксперимента* типа 2^2 . Во втором столбце приведены значения фиктивной переменной $x_0 = +1$ (ее оценка отвечает значению свободного члена b_0 в уравнении регрессии); в третьем и четвертом — значения переменных x_1 и x_2 (эти два столбца и образуют собственно планирование); в пятом столбце — значения парного взаимодействия $x_1 x_2$. Первая строка соответствует первому опыту, в котором оба фактора находятся на верхнем уровне; вторая строка — второму опыту, где фактор x_1 принимает значение нижнего уровня, а x_2 — верхнего, и т. д.

По результатам четырех опытов (седьмой столбец табл. 3.6) можно вычислить четыре коэффициента регрессии уравнения:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2.$$

Рассматриваемую матрицу планирования можно записать сокращенно (шестой столбец), при этом факторы обозначаются последовательно буквами a и b . Тогда символику можно расшифровать так: для первого опыта ab обозначает, что оба фактора взяты на уровне $+1$; для второго опыта b — что только x_2 взят на уровне $+1$, x_1 принимает в этом случае значение -1 и т. д.; символ (1) означает, что в данном опыте все факторы должны быть на нижнем уровне. Таким образом, матрицу табл. 3.6 можно записать как ab, b, a (1).

Как отмечалось выше, техника ПФЭ с варьированием факторов на двух уровнях сводится к реализации 2^k опытов, где k — число факторов. Для по-

Таблица 3.7

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+	+	+	+	+	+	16	+	—	—	—	—	+
2	+	—	+	+	+	+	17	+	+	+	+	+	—
3	+	+	—	+	+	+	18	+	—	+	+	+	—
4	+	—	—	+	+	+	19	+	+	—	+	+	—
5	+	+	+	—	+	+	20	+	—	—	+	+	—
6	+	—	+	—	+	+	21	+	+	+	—	+	—
7	+	+	—	—	+	+	22	+	—	+	—	+	—
8	+	—	—	—	+	+	23	+	+	—	—	+	—
9	+	+	+	+	—	+	24	+	—	—	—	+	—
10	+	—	+	+	—	+	25	+	+	+	+	—	—
11	+	+	—	+	—	+	26	+	—	+	+	—	—
12	+	—	—	+	—	+	27	+	+	—	+	—	—
13	+	+	+	—	—	+	28	+	—	—	+	—	—
14	+	—	+	—	—	+	29	+	+	+	—	—	—
15	+	+	—	—	—	+	30	+	—	+	—	—	—
							31	+	+	—	—	—	—
							32	+	—	—	—	—	—

строения матрицы ПФЭ при любом k дважды повторяется матрица планирования для случая $k = 1$ (сначала при значении k -го фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем). Последовательное достраивание матриц при увеличении k от 2 до 5 показано в табл. 3.7. Первые четыре (отчеркнутые) опыта представляют собой матрицу типа 2^2 . Далее они еще раз повторены, а в столбце x_3 для матрицы типа 2^2 проставлены четыре знака «+», для второй — четыре знака «—». Таким образом, отчеркнутые восемь опытов представляют собой уже матрицу планирования типа 2^3 . Далее процедура повторяется вплоть до построения матрицы типа 2^5 . Матрицы можно записывать и сокращенно. Например, матрицу 2^3 (табл. 3.7) можно записать строкой: $abc, bc, ac, c, ab, b, a, (1)$.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ). С ростом числа факторов число опытов в ПФЭ быстро возрастает. Так, при трех факторах следует поставить $2^3 = 8$ опытов, при пяти — $2^5 = 32$ опыта, а при восьми — $2^8 = 256$ опытов. В то же время, планируя эксперимент, исследователь может не знать заранее, в какой части изучаемой поверхности отклика находится искомый оптимум. Поэтому, начиная исследование, целесообразно получить информацию при минимальной затрате труда на проведение экспериментов, хотя, возможно, эта информация и не будет точной. В связи с этим вначале стремятся ограничиться лишь линейным описанием локальной поверхности отклика, используя дробные реплики, позволяющие упростить первые этапы исследования и сократить число опытов.

Таблица 3.8

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	Кодовое обозначение строк	y
1	+	+	+	+	abc	y_1
2	+	—	+	—	b	y_2
3	+	+	—	—	a	y_3
4	+	—	—	+	c	y_4

Для построения дробных реплик используют матрицы ПФЭ. Дробные реплики получают делением числа опытов соответствующего ПФЭ на число, кратное двум. Так, например, получают $1/2$ реплики (полуреплику), $1/4$ реплики (четвертьреплику), $1/8$ реплики и т.д.

Однако механически распределять строки матрицы на группы, например делить ее на две части, нельзя. Дробные реплики составляют заменой некоторых эффектов взаимодействия новыми независимыми переменными. Эти реплики связаны с планированием типа 2^{k-p} , где p — число линейных членов, приравненных эффектам взаимодействий. Тогда, если, например, ПФЭ типа 2^6 включает 64 опыта, то полуреплика содержит $2^{6-1} = 32$ опыта, четвертьреплика — $2^{6-2} = 16$ опытов, $1/8$ реплики — $2^{6-3} = 8$ опытов и т. д.

Пример 3.5. Предположим, что изучается влияние трех факторов: x_1 , x_2 , x_3 . Тогда ПФЭ 2^3 должен включать 8 опытов. Но исследователи на первом этапе хотели бы поставить возможно меньшее число опытов. Можно взять планирование типа 2^2 (см. табл. 3.6) и взаимодействие $x_1 x_2$ приравнять третьему фактору x_3 (тем более что имеются соображения о значительно более сильном влиянии x_1 , x_2 , чем их взаимодействие). Тогда будет получена матрица планирования типа 2^{3-1} (табл. 3.8), элементы которой в точности равны элементам матрицы в табл. 3.6. Однако опыты здесь надо ставить с включением третьего фактора x_3 . В первом опыте все факторы будут на верхнем уровне; во втором: x_2 — на верхнем, а x_1 и x_3 — на нижнем и т. д. Пользуясь таким планированием, можно оценить свободный член b_0 и три коэффициента регрессии при линейных членах: b_1 , b_2 , b_3 . При этом линейные эффекты не могут быть оценены независимо от парных взаимодействий, так как столбцы для линейных членов и парных произведений неразличимы. Если, например, в дополнение к столбцам, указанным в таблице, вычислить столбец для взаимодействия $x_1 x_3$, то он полностью совпадает со столбцом x_2 .

Принципиальное отличие ПФЭ от ДФЭ заключается таким образом в том, что в первом случае все линейные эффекты и взаимодействия любого порядка оцениваются независимо, а во втором случае некоторые эффекты обязательно смешаны. Число линейных эффектов, которое не смешано в данной дробной реплике, называется ее *разрешающей способностью*. Прямая оценка разрешающей способности данных реплик при большом числе факторов затруднена, так как приходится перебирать большое число эффектов и их взаимодействий. Поэтому дробные реплики обычно задают с помощью специальных *генерирующих соотношений*, показывающих, какие из взаимодействий приняты незначимыми и заменены в матрице планирования но-

выми факторами. Например, в рассмотренном случае планирование 2^{3-1} задано генерирующим соотношением $x_3 = x_1 x_2$. Это означает, что фактор x_3 занимает в матрице столбец, соответствующий взаимодействию $x_1 x_2$.

Генерирующие соотношения позволяют получить все оценки. Для этого надо умножить обе части генерирующего соотношения на новую независимую переменную. При этом произведение фактора на самого себя принято считать равным единице. В результате получается так называемый *определяющий контраст*:

$$x_3 = x_1 x_2; \quad x_1 x_3 = x_1 x_2 x_3; \quad 1 = x_1 x_2 x_3.$$

По определяющему контрасту далее находят все совместные оценки для данной дробной реплики. При этом каждую независимую переменную умножают на определяющий контраст и, если в одной части полученного соотношения какой-либо фактор встречается четное число раз, его заменяют на единицу.

Рассмотрим более сложный случай. Изучается влияние шести факторов. Решено реализовать $1/8$ реплики типа 2^{3-3} . Эта реплика включает восемь опытов (табл. 3.9). Матрица планирования составляется в этом случае следующим образом.

Восемь опытов представляют собой ПФЭ 2^3 . Поэтому для первых трех факторов ($x_1 - x_3$) в таблице записана матрица 2^3 . Оставшиеся три фактора ($x_4 - x_6$) приравнены к тем или иным взаимодействиям. По имевшимся априорным сведениям фактор x_4 приравнен взаимодействию $x_1 x_3$, фактор x_5 — взаимодействию $x_2 x_3$, фактор x_6 — взаимодействию $x_1 x_2 x_3$.

Таким образом, генерирующие соотношения выбранного планирования и соответствующие определяющие контрасты представляются как

$$x_4 = x_1 x_3; \quad x_5 = x_2 x_3; \quad x_6 = x_1 x_2 x_3;$$

$$1 = x_1 x_3 x_4; \quad 1 = x_2 x_3 x_5; \quad 1 = x_1 x_2 x_3 x_6.$$

Умножая определяющие контрасты сначала по два, а затем по три, получаем обобщающий определяющий контраст

$$1 = x_1 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_6 = x_1 x_2 x_4 x_5 = x_2 x_4 x_6 = x_1 x_5 x_6 = x_3 x_4 x_5 x_6.$$

Следовательно, в данном случае совместные оценки, например для линейных коэффициентов регрессии, будут * следующими:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{34} + \beta_{56} + \beta_{236} + \beta_{245}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{25} + \beta_{46} + \beta_{136} + \beta_{145};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{14} + \beta_{25} + \beta_{126} + \beta_{456}; \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{13} + \beta_{26} + \beta_{356} + \beta_{125};$$

$$b_5 \rightarrow \beta_5 + \beta_{16} + \beta_{23} + \beta_{124} + \beta_{316}; \quad b_6 \rightarrow \beta_6 + \beta_{15} + \beta_{24} + \beta_{345} + \beta_{123}.$$

Планирование считается оптимальным, если оно связано с проведением несложных вычислений и позволяет получать независимые оценки коэффициентов регрессии, определяемые с одинаковой дисперсией. Важно также, чтобы дисперсии параметра оптимизации,

* При пренебрежении эффектами взаимодействия выше тройных.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_3$	$x_5 = x_2 x_3$	$x_6 = x_1 x_2 x_3$	Кодовое обозначение	y
1	+	+	+	+	+	+	+	abcdef	y_1
2	+	—	+	+	—	+	—	bce	y_2
3	+	+	—	+	+	—	—	acd	y_3
4	+	—	—	+	—	—	+	cf	y_4
5	+	+	+	—	—	—	—	ab	y_5
6	+	—	+	—	+	—	+	bdf	y_6
7	+	+	—	—	—	+	+	aef	y_7
8	+	—	—	—	+	+	—	de	y_8

предсказываемого уравнением регрессии, не зависели от вращения системы координат в центре плана (свойства ортогональности и ротативности). При дробных репликах ПФЭ

$$\sum_{n=1}^N x_{in} x_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ N & \text{при } i = j \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^N x_{in} = 0.$$

Здесь $i, j = 0, 1, 2, \dots, k$; N — число опытов в матрице планирования; n — номер опыта; k — число факторов.

Способ расчета коэффициентов регрессии и определения их доверительных интервалов. По результатам опытов, проведенных в соответствии с матрицей планирования, можно подсчитать коэффициенты регрессии линейного уравнения, описывающего поверхность отклика в локальном участке вблизи выбранного основного уровня, по формуле

$$b_i = \sum_{n=1}^N x_{in} y_n / N,$$

где x_{in} — значение x_i в n -м опыте; y_n — значение параметра оптимизации в том же опыте.

Таким образом, способ расчета коэффициентов очень прост: столбцу y следует приписать знаки соответствующего столбца x_i , сложить все значения параметров оптимизации со своими знаками и результат разделить на число опытов матрицы планирования.

Пусть, например, при восьми опытах согласно полуреплике 2^{4-1} получается матрица планирования, приведенная в табл. 3.10.

Тогда коэффициенты b_i :

$$b_1 = [(-1)64 + (+1)130 + (-1)95 + (+1)90 + (-1)81 + (+1)69 + (-1)36 + (+1)100]/8 = 14,1;$$

$$b_2 = (-64 - 130 + 95 + 90 - 81 - 69 + 36 + 100)/8 = -2,9;$$

$$b_3 = -(64 - 130 - 95 - 90 + 81 + 69 + 36 + 100)/8 = -11,6;$$

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+	—	—	—	—	64
2	+	+	—	—	+	130
3	+	—	+	—	+	95
4	+	+	+	—	—	90
5	+	—	—	+	+	81
6	+	+	—	+	—	69
7	+	—	+	+	—	36
8	+	+	+	+	+	100

$$b_4 = (-64 + 130 + 95 - 90 + 81 - 69 - 36 + 100)/8 = 18,4;$$

$$b_0 = (64 + 130 + 95 + 90 + 81 + 69 + 36 + 100)/8 = 83,1.$$

Аналогично можно было бы рассчитать и эффекты при парных взаимодействиях b_{ij} (для этого в матрицу планирования следовало бы добавить столбцы соответствующих взаимодействий).

После расчета коэффициентов регрессии следует проверить их статистическую значимость. Для этого рассчитывают доверительные интервалы коэффициентов регрессии Δb_i , которые при планах первого порядка равны для всех коэффициентов.

В общем случае дисперсия, характеризующая ошибку в определении коэффициентов регрессии, находится согласно (3.13).

Проверяются также условия однородности выборочных дисперсий s_u^2 , для чего согласно (3.15) вычисляется G .

Если вычисленное значение $G_{\max}$ окажется меньше значения $G_{кр}$, найденного по таблице (табл. VIII, стр. 479*) для $f_1 = m - 1$ и $f_2 = N$, то гипотеза об однородности дисперсии принимается.

В некоторых случаях, когда проводится только одна серия опытов, дисперсия ошибки может быть принята в процентных отношениях от коэффициента b_0 (например, 5% от b_0).

Доверительный интервал для коэффициентов регрессии

$$\Delta b_i = \pm t_c \sqrt{s_{b_i}},$$

где t_c — критерий Стьюдента, находится по известным таблицам, при пользовании которыми уровень значимости, т. е. вероятность практически невозможных событий, обычно принимается равным 0,05 или 0,01; v — число степеней свободы.

* Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. — М.: Наука, 1969; в дальнейшем изложении будут даны ссылки на табл. V и VI этой книги. Эти таблицы имеются и в других руководствах по теории вероятности и математической статистики.

Таблица 3.11

Количество факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Количество опытов	
			для дробной реплики	для ПФЭ
3	1/2 реплики от 2 ³	2 ³ -1	4	8
4	1/2 » 2 ⁴	2 ⁴ -1	8	16
5	1/4 » 2 ⁵	2 ⁵ -2	8	32
6	1/8 » 2 ⁶	2 ⁶ -3	8	64
7	1/16 » 2 ⁷	2 ⁷ -4	8	128
5	1/2 » 2 ⁵	2 ⁵ -1	16	32
6	1/4 » 2 ⁶	2 ⁶ -2	16	64
7	1/8 » 2 ⁷	2 ⁷ -3	16	128
8	1/16 » 2 ⁸	2 ⁸ -4	16	256

Коэффициент регрессии можно считать статистически значимым, если его абсолютное значение равно или превышает значение доверительного интервала.

Статистический анализ уравнения регрессии. После вычисления коэффициентов регрессии и проверки их значимости проводят статистический анализ уравнения регрессии. Для этого проверяют гипотезу об адекватности данного уравнения, получая ответ на вопрос, соответствует ли линейное уравнение изучаемому явлению или необходима более сложная модель.

Гипотеза об адекватности линейной модели может быть принята, если расчетное значение критерия Фишера (F_p) не превышает его табличного значения F_T , определенного по (3.9а) и (3.9б) для выбранного уровня значимости α . Если $F_p < F_T$, то гипотеза об адекватности линейного уравнения не отвергается, и его можно использовать для следующих этапов планирования, в частности для поиска направления движения по градиенту к оптимуму. В противном случае его нужно было бы дополнить членами высшего порядка.

Количество дробных реплик. Как было указано выше, для сокращения времени вместо ПФЭ можно провести сокращенный эксперимент —ДФЭ, позволяющий сократить число опытов и в то же время получить необходимую информацию.

Условные обозначения дробных реплик и количество опытов приведены в табл. 3.11.

Образование реплик двухфакторного эксперимента можно проследить на примере.

Пример 3.6. Пусть задана матрица для ПФЭ 2² (табл. 3.12).

Параметр оптимизации выражается равенством

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	Y
1	+	—	—	+	Y_1
2	+	+	—	—	Y_2
3	+	—	+	—	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Если есть основания полагать, что в выбранных интервалах варьирования параметр Y может быть представлен линейной моделью (т. е. $b_{12} \rightarrow 0$), то достаточно определить только три коэффициента: b_0 , b_1 и b_2 . Тогда число опытов будет больше числа искомых коэффициентов, поэтому столбец $x_1 x_2$ можно использовать для нового фактора x_3 . Следовательно, получится, что вместо восьми опытов в ПФЭ для трех факторов можно провести только четыре опыта. При этом оценки b_1 , b_2 , b_3 истинных коэффициентов β_1 , β_2 и β_3 являются уже смешанными: $b_1 = \beta_1 + \beta_{23}$; $b_2 = \beta_2 + \beta_{13}$; $b_3 = \beta_3 + \beta_{23}$. Эффект этого смешивания снижает точность оценок. Однако поскольку модель считается линейной, а взаимодействия пренебрежимо малыми, то точность оценок будет достаточной.

Составленная матрица представляет собой полуреплику от ПФЭ 2^3 , которая обозначается 2^{3-1} . При выборе более сложных реплик применяют специальные правила. Действенность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействий. Реплики, у которых линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наивысшего порядка, являются наиболее действенными, они обладают наибольшей разрешающей способностью.

Если известно взаимодействие факторов, то должно быть известно, когда и какие эффекты определяются совместно, т. е. необходимо определить разрешающую способность дробных реплик. Для этого пользуются понятиями «определяющие контрасты» и «генерирующие соотношения», введенными выше.

Поясним эти понятия на примере полуреплики 2^{3-1} . При построении ее имеются две возможности: $x_3 = x_1 x_2$ и $x_3 = -x_1 x_2$ (табл. 3.13).

Для произведения трех столбцов матриц I и II имеем

$$+1 = x_1 x_2 x_3; \quad -1 = x_1 x_2 x_3.$$

Определяющий контраст, содержащий произведения столбцов матриц, равные $+1$ или -1 , помогает найти смешанные эффекты. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, для матрицы I

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3; \quad x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3; \quad x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2.$$

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения являются оценками линейных эффектов:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, называются *планами с разрешающей способ-*

Номер опыта	I. $x_3 = x_1 x_2$				II. $x_3 = -x_1 x_2$			
	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2 x_3$
1	—	+	+	+	+	+	—	—
2	—	—	+	+	—	—	—	—
3	+	—	—	+	+	—	+	—
4	—	+	—	+	—	+	+	—

ностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте) и обозначаются 2_{III}^{3-1} .

При выборе полуреплики 2^{4-1} возможны восемь решений:

1. $x_4 = x_1 x_2$, 5. $x_4 = x_1 x_3$,
2. $x_4 = -x_1 x_2$, 6. $x_4 = -x_1 x_3$,
3. $x_4 = x_2 x_3$, 7. $x_4 = x_1 x_2 x_3$,
4. $x_4 = -x_2 x_3$, 8. $x_4 = -x_1 x_2 x_3$.

Реплики 1 — 6 имеют по три фактора в определяющем контрасте, а 7 и 8 — по четыре. Поэтому реплики 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность и называются *главными*. Это объясняется тем, что обычно тройные взаимодействия менее важны, чем парные.

Реплики, в которых нет ни одного главного эффекта, смешанного с другим главным эффектом или парным взаимодействием, называются *планами с разрешающей способностью IV* (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте) и обозначаются 2_{IV}^4 .

Пример 3.7. Необходимо спланировать эксперимент, чтобы выбрать оптимальные параметры устройства и получить максимальное значение выходной характеристики Y . Исходные значения факторов и интервалы варьирования заданы (табл. 3.14).

Таблица 3.14

Фактор	Уровни факторов			Интервал варьирования
	—1	0	+1	
x_1	200	220	240	20
x_2	3	6	9	3
x_3	40	100	160	60
x_4	1	2	3	1

Таблица 3.15

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2 = x_3x_4$	$x_1x_3 = x_2x_4$	$x_2x_3 = x_1x_4$	Y
1	+	+	+	—	—	+	—	—	10
2	+	—	—	—	—	+	+	+	9
3	+	+	—	—	+	—	—	+	15
4	+	—	+	—	+	—	+	—	25
5	+	+	+	+	+	+	+	+	26
6	+	—	—	+	+	+	—	—	14
7	+	+	—	+	—	—	+	—	5
8	+	—	+	+	—	—	—	+	20
b_i	15	—1,50	4,75	0,75	4,50	—0,75	0,75	2	

Для матрицы планирования выбираем полуреплику 2^4 , заданную генерирующим соотношением $x_4 = x_1x_2x_3$. Определяющим контрастом является $I = x_1x_2x_3x_4$. Умножая определяющий контраст последовательно на x_1, x_2, x_3 и x_4 , найдем совместно оценки линейных эффектов и взаимодействий:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, \quad b_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{14},$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124},$$

$$b_3 \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}, \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123},$$

$$b_4 \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}.$$

Матрица планирования и результаты эксперимента приведены в табл. 3.15. Коэффициенты b_i рассчитываются по формулам, приведенным выше:

$$b_0 = (+10 + 9 + 15 + 25 + 26 + 14 + 5 + 20)/8 = 15;$$

$$b_1 = (+10 - 9 + 15 - 25 + 26 - 14 + 5 - 20)/8 = -1,5$$

и т. д. Таким образом, аналитическое выражение для Y принимает вид

$$Y = 15 - 1,5x_1 + 4,75x_2 + 0,75x_3 + 4,5x_4 - 0,75x_1x_2 + 0,75x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

§ 3.6. КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Особенности критериальных представлений. Как отмечалось в § 3.1, 3.3, все основные положения и приемы планирования эксперимента и обработки его данных в основном сохраняются при критериальном планировании экспериментов (КПЭ), которое, однако, имеет некоторые особенности*.

* Подробнее см.: 1. *Веников В. А.* Современные проблемы моделирования. — Электронное моделирование, 1979, № 1, с. 12—17. 2. *Веников В. А., Сыромятников С. Ю.* Развитие методов подобия и планирования эксперимента. — Электронное моделирование, 1980, № 6, с. 35—44. 3. *Сыромятников С. Ю.* Применение метода критериального планирования экспериментов для оценки допустимости упрощений в математическом описании переходных процессов в электрических системах. — Электричество, 1979, № 6, с. 64—66.

Математическое описание в критериальном виде позволяет переносить полученные результаты на ряд подобных процессов. Предположим, что имеется какой-либо физический процесс, представленный зависимостью

$$f(P_1, \dots, P_k, \dots, P_s, \dots, P_m) = 0.$$

Один из параметров этой зависимости может представлять собой целевую функцию процесса. Определим критерий подобия данного процесса. При этом характеристика процесса будет иметь вид

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-k}).$$

Величина π_1 может являться целевой функцией, при отыскании которой теория подобия позволяет сократить число переменных с m размерных величин до $m - k$ безразмерных. Применяя *методы факторного планирования эксперимента*, получим критериальное уравнение регрессии вида (3.11), где m — общее число изучаемых параметров; k — число независимых параметров.

Особенности применения экспериментально-статистических методов для исследования критериальных соотношений в основном связаны с тем, что в данном случае исследователь оперирует не с отдельными факторами, как обычно, а с обобщенными. При этом подходе, имеющем, конечно, некоторые особенности, применение обычных экспериментально-статистических методов не вызывает особых затруднений, так как регистрируются не значения отдельных факторов, а значения критериев подобия. Если даже определение значений критериев подобия аналитическим способом невозможно, то при регистрации отдельных факторов оно не вызывает затруднений.

Однако применение методов факторного планирования эксперимента несколько усложняет исследования. Первое усложнение заключается в том, что нельзя задавать шаг варьирования критериям подобия независимо от шага варьирования факторов, входящих в эти критерии. Выходом из этих затруднений может быть один из двух: 1) многократно промоделировать случайным образом факторы процесса в заданных пределах варьирования и для каждой случайной реализации вычислить значения критериев подобия, затем определить шаг варьирования их; 2) задать шаг варьирования факторам процесса и на основе этого определить значения шага варьирования критериев подобия.

Второе усложнение заключается в следующем. Выше было показано, что после представления результатов эксперимента в виде той или иной зависимости (какого-либо регрессионного уравнения) нужно, применив критерии согласия (Фишера, Стьюдента, Колмогорова и др.), убедиться, что та или иная величина (вероятностная), входящая в выявленную зависимость, закономерна и не является случайным выбросом. При обработке результатов экспериментов в виде критериев подобия π возникает вопрос, а можно ли для критериальных зависимостей, составленных из комбинаций отдельных вероятностных величин, применять те же критерии согласия.

Специальные исследования* показали, что критерии подобия, составленные из отдельных величин, изменяющихся по вероятностному закону, имеют, так же как и эти величины, вероятностный характер (их кривые распределения имеют, как правило, положительную асимметрию). Поэтому с известным приближением для критерияльных соотношений можно пользоваться теми же (и так же) критериями согласия, что и для соотношений с конкретными величинами.

Основные положения критериального планирования эксперимента. Пусть сформировано факторное пространство первичных параметров, характеризующих исследуемый процесс

$$P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_m,$$

где P_{k+1} — целевая функция эксперимента.

Факторное планирование эксперимента позволяет получить уравнение регрессии, аппроксимирующее применительно к оригиналу зависимость целевой функции P_{k+1} от остальных параметров:

$$P_{k+1} = f(P_1, \dots, P_k, P_{k+2}, \dots, P_m) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i P_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m a_{ij} P_i P_j + \sum_{i=1}^m a_{ii} P_i^2 + \dots, \quad i \neq k+1, \quad j \neq k+1. \quad (3.17)$$

Для получения этого уравнения надо проварьировать $(m - 1)$ параметров оригинала в соответствии с матрицей планирования экспериментов.

Сформировав критериальное факторное пространство на основе л-теоремы, получим

$$\pi_1 = \frac{P_{k+1}}{P_1^{\alpha'_{k+1}} P_2^{\beta'_{k+1}} \dots P_k^{\epsilon'_{k+1}}} = \frac{R_{k+1}}{R_1^{\alpha'_{k+1}} R_2^{\beta'_{k+1}} \dots R_k^{\epsilon'_{k+1}}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\pi_{m-k} = \frac{P_m}{P_1^{\alpha'_m} P_2^{\beta'_m} \dots P_k^{\epsilon'_m}} = \frac{R_m}{R_1^{\alpha'_m} R_2^{\beta'_m} \dots R_k^{\epsilon'_m}}, \quad (3.18)$$

где $P_1, \dots, P_m$ — параметры оригинала; $R_1, R_2, \dots, R_m$ — сходственные параметры модели; k — число независимых параметров.

Изменив значения $(m - k - 1)$ критериев подобия в соответствии с матрицей планирования экспериментов, получим критериальное уравнение регрессии (3.11).

Можно отметить следующие преимущества метода критериального планирования экспериментов: возможность проведения опытов на сравнительно недорогой физической модели объекта, построенной в умень-

* Веников В. А. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1976, 487 с. 2. Веников Г. В., Кулиев А. М. Статистический анализ динамической устойчивости электрических систем. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1969, № 6, с. 164—168.

шенном масштабе; возможность закономерного перенесения результатов этих опытов на неограниченно большой класс процессов, подобных данному; возможность сокращения необходимого числа экспериментов в результате сокращения варьируемых факторов. Имеется еще одно важное преимущество синтеза методов теории подобия и методов активного эксперимента: при получении критериального уравнения регрессии k параметров можно не варьировать. Это позволяет разработать новые относительно простые способы изменения значений первичных параметров модели, обеспечивающие вариацию критериев подобия в соответствии с матрицей планирования.

Матрицы планирования экспериментов, содержащие как критерии подобия, так и входящие в них параметры, обычно относятся к случаю, когда в каждый критерий подобия входит по два различных параметра и значения всех первичных параметров изменяются в ходе проведения опытов. Однако можно получить критериальное уравнение регрессии при более сложной структуре критериев подобия путем изменения значений только $(m - k - 1)$ первичных параметров модели.

Рассмотрим способы изменения первичных параметров, обеспечивающие независимую вариацию каждого из критериев подобия $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$. Предположим, что значения k независимых параметров $R_1, \dots, R_k$ зафиксированы. Этот случай соответствует наиболее простому способу изменения первичных параметров, поскольку согласно выражениям (3.18) вариацию критерия π_2 можно осуществить, изменяя значения параметра R_{k+2} , вариацию π_3 — изменяя R_{k+3} , и т. д. Если например, зафиксировать значения параметров $R_2, \dots, R_k, R_m$, то можно варьировать критерий π_{m-k} , изменяя R_1 , а значения параметров $R_{k+2}, \dots, R_{m-1}$ следует определять согласно (3.18), исходя из значений критериев $\pi_2, \dots, \pi_{m-k-1}$ в данной строке матрицы планирования и значения параметра R_1 , соответствующего критерию π_{m-k} . Следовательно, чем больше зафиксировано первичных параметров, выбранных при определении критериев подобия в качестве независимых, тем легче осуществить на модели вариацию критериев в соответствии с матрицей планирования. Поэтому при выборе наилучшей формы записи критериев подобия желательно ввести в число независимых параметров $R_1, \dots, R_k$ параметры, которые на модели трудно или невозможно варьировать.

Таким образом, для получения критериального уравнения регрессии необходимо следующее:

- 1) сформировать факторное пространство первичных параметров $(P_1, \dots, P_m)$ для оригинала и соответственно $R_1, \dots, R_m$ для модели), включающее целевую функцию эксперимента;

- 2) определить число k независимых единиц измерения первичных параметров;

- 3) выбрать независимые параметры $R_1, \dots, R_k$, по возможности включив в их состав все параметры модели, которые трудно или невозможно варьировать; определить на основе π -теоремы соответствующую форму записи критериев подобия $\pi_1, \dots, \pi_{m-k}$ (при выборе независимых параметров необходимо стремиться, чтобы в каждый критерий входило наименьшее число первичных параметров и их показатели степе-

ни по модулю мало отличались от единицы; целевую функцию не следует включать в число независимых параметров, тогда она войдет в один критерий подобия π_1);

4) задать интервалы варьирования для первичных параметров оригинала, входящих в критерии подобия $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$, и с помощью (3.18) определить максимальные (π_{i+}), минимальные (π_{i-}) и средние (π_{icp}) значения варьируемых критериев ($i = 2, \dots, m - k$);

5) составить матрицу планирования экспериментов, содержащую в качестве варьируемых факторов критерии подобия $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$;

6) внести в матрицу планирования значения $(m - k - 1)$ варьируемых первичных параметров модели, определенных на основе (3.18) и обеспечивающих требуемые значения критериев $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$ в данном опыте;

7) на основе матрицы планирования, содержащей значения критериев подобия и варьируемых первичных параметров, составить рандомизированный план экспериментов, включающий несколько дублирующих серий опытов; провести на модели опыты по этому плану, вычислить коэффициенты уравнения регрессии, оценить значимость коэффициентов и адекватность уравнения.

Изложенный подход нетрудно применить к случаю, когда в состав факторного пространства, включающего m первичных величин, входит q нелинейных параметров и требуется исследовать зависимость $P_{k+1} = f(P_1, \dots, P_k, P_{k+2}, \dots, P_s, \dots, P_{m-q})$. Для определения условий подоби́я можно воспользоваться способом относительных единиц и вторым дополнительным положением о подобии нелинейных систем. При этом образуется $(m - k + p - q)$ критериев подобия, где k — число независимых единиц измерения базисных величин; p — число величин, выбранных в качестве базисных и не вошедших в состав факторного пространства первичных параметров (например, номинальные значения параметров или значения, подобранные из условия совпадения относительных нелинейных характеристик в модели и оригинале).

Критерии подобия будут иметь следующую структуру:

$$\pi_i = \frac{P_s}{P_{16}^{\alpha'_s} P_{26}^{\beta'_s} \dots P_{k6}^{\varepsilon'_s}} = P_{s*} = \frac{R_s}{R_{16}^{\alpha'_s} R_{26}^{\beta'_s} \dots R_{k6}^{\varepsilon'_s}} = R_{s*}, \quad (3.19)$$

где P_s и $P_{16}, P_{26}, \dots, P_{k6}$ (R_s и $R_{16}, R_{26}, \dots, R_{k6}$) — линейный параметр и базисные величины оригинала (модели). Зафиксировав значения базисных величин модели, можно обеспечить вариацию критерия π_i в соответствии с матрицей планирования в результате изменения R_s .

Число m величин, включаемых в состав факторного пространства первичных параметров, и соответственно число критериев подобия в ряде случаев удастся уменьшить на основании анализа исходных или специальным образом преобразованных уравнений исследуемого процесса.

При экспериментальном определении зависимости целевой функции от первичных параметров оригинала или физической модели следует учитывать, что значения этих параметров не всегда известны с доста-

точной точностью и, кроме того, имеют тенденцию к вероятностному изменению под влиянием стохастических факторов. В этом смысле представление искомой зависимости в виде критериального уравнения регрессии удобнее, чем аппроксимация ее обычным уравнением регрессии, поскольку, во-первых, одному значению критерия подобия соответствует неограниченное число сочетаний значений входящих в него случайно изменяющихся параметров, а во-вторых, как показали предварительные исследования, в ряде случаев система менее чувствительна к отклонениям критериев подобия, чем к отклонениям отдельных параметров, входящих в эти критерии.

Обоснование приближенной методики физического моделирования. Метод КПЭ позволяет оценить степень влияния каждого критерия подобия на исследуемый процесс и сформулировать требования к точности воспроизведения критериев на модели. Для этого необходимо провести ряд расчетов по уравнениям, выраженным в критериальной форме. Согласно π -теореме всякое полное уравнение физического процесса может быть представлено зависимостью между критериями подобия. Поэтому уравнения исследуемого процесса и условия однозначности можно привести к виду, при котором они содержат только критерии подобия π_i , составленные из параметров системы, и параметры процесса, выраженные в относительных единицах:

$$\frac{A_{k+1}}{P_{16}^{\alpha'_{k+1}} P_{26}^{\beta'_{k+1}} \dots P_{k6}^{\varepsilon'_{k+1}}} = A_{k+1*} = \frac{B_{k+1}}{R_{16}^{\alpha'_{k+1}} R_{26}^{\beta'_{k+1}} \dots R_{k6}^{\varepsilon'_{k+1}}} = B_{k+1*};$$

$$\frac{P_{m+1}}{P_{16}^{\alpha'_m+1} P_{26}^{\beta'_m+1} \dots P_{k6}^{\varepsilon'_m+1}} = P_{m+1*} = \frac{R_{m+1}}{R_{16}^{\alpha'_m+1} R_{26}^{\beta'_m+1} \dots R_{k6}^{\varepsilon'_m+1}} = R_{m+1*};$$

$$\dots$$

$$\frac{P_{m+r}}{P_{16}^{\alpha'_m+r} P_{26}^{\beta'_m+r} \dots P_{k6}^{\varepsilon'_m+r}} = P_{m+r*} = \frac{R_{m+r}}{R_{16}^{\alpha'_m+r} R_{26}^{\beta'_m+r} \dots R_{k6}^{\varepsilon'_m+r}} = R_{m+r*},$$

где A_{k+1} (B_{k+1}) — параметр процесса в оригинале (в модели), определенное значение которого, например экстремальное, входит в выражение для целевой функции P_{k+1} (R_{k+1}); $P_{m+1}, \dots, P_{m+r}, \dots, (R_{m+1}, \dots, R_{m+r})$ — остальные параметры процесса в оригинале (в модели); $P_{16}, \dots, P_{k6}$ ($R_{16}, \dots, R_{k6}$) — базисные величины оригинала (модели), которые для системы с линейными параметрами равны независимым первичным величинам $P_1, \dots, P_k$ ($R_1, \dots, R_k$).

Если целевой функцией является экстремальное значение параметра процесса A_{k+1} , а в число остальных параметров процесса $P_{m+1}, \dots, P_{m+r}$ входит время t , то тогда, рассчитав кривые $A_{k+1*}(t_*)$ при вариации значений критериев подобия $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$ в соответствии с матрицей планирования экспериментов и определив экстремальные значения A_{*k+1*} , получим критериальный полином

$$\pi_1 = A_{\text{эк } k+1*} = F(\pi_2, \dots, \pi_{m-k}) = c_0 + \sum_{i=2}^{m-k} c_i \bar{\pi}_i + \\ + \sum_{\substack{i, j=2 \\ i \neq j}}^{m-k} c_{ij} \bar{\pi}_i \bar{\pi}_j + \sum_{i=2}^{m-k} c_{ii} \bar{\pi}_i^2 + \dots, \quad (3.20)$$

где $\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j$ — нормированные значения критериев подобия.

Анализ коэффициентов в (3.20) позволяет решить вопрос о необходимой точности воспроизведения критериев подобия, соответствующей степени их влияния на моделируемый процесс. Если коэффициенты c_i, c_{ii} и c_{ij} ($j \neq i$) при каком-либо критерии подобия π_i малы, то это означает, что можно сузить приближенное моделирование при нарушении условия $\pi_i = \text{idem}$. При этом следует проверить, что погрешность аппроксимации поверхности отклика в граничных точках многомерного пространства критериев подобия ($|\bar{\pi}_i| = 1, i = 2, \dots, m-k$) и в центральной точке ($\bar{\pi}_i = 0$) не превышает выбранного значения допустимой погрешности $\delta_{\text{доп}}$. О возможности невыполнения условия $\pi_i = \text{idem}$ следует судить по максимальному значению приращения $\Delta\delta$, которое получает погрешность аппроксимации поверхности отклика в центральной и граничных точках пространства критериев в результате отбрасывания в (3.20) некоторых членов.

Метод КПЭ позволяет обосновать возможность приближенного моделирования и в более сложных случаях. Пусть, например, критерий π_i оказывает сильное влияние на π_1 . Как показал анализ выраженных в критериальной форме уравнений процесса, зависимость между критериями подобия можно представить в виде

$$\pi_1^a \pi_i^b = \varphi(\pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_{m-k}), \quad (3.21)$$

где a, b — числа.

Рассчитывая кривые $A_{k+1*}(t_*)$ при вариации $\pi_2, \dots, \pi_{m-k}$ в соответствии с матрицей планирования, аппроксимируем зависимость (3.21) полиномом вида

$$\pi_1^a \pi_i^b = d_0 + \sum_{i=2}^{m-k} d_i \bar{\pi}_i + \sum_{\substack{i, j=2 \\ i \neq j}}^{m-k} d_{ij} \bar{\pi}_i \bar{\pi}_j + \sum_{i=2}^{m-k} d_{ii} \bar{\pi}_i^2 + \dots \quad (3.22)$$

Если в (3.22) коэффициенты d_i, d_{ii} и d_{ij} ($j \neq i$) малы, то при вариации значений π_i получим $\pi_1' = \pi_1^a \pi_i^b \approx \text{idem}$. Предложенный способ формирования критериальной целевой функции в виде $\pi_1' = \pi_1^a \pi_i^b$ позволяет разработать упрощенную методику физического моделирования, согласно которой $\pi_i \neq \text{idem}$; вместо π_1 выступает критерий π_1' , учитывающий влияние вариаций π_i на значения π_1 .

Пример 3.8. Рассмотреть изменение параметра режима электрической системы (угла сдвига э. д. с. δ синхронного генератора относительно напряжения шин) в зависимости от изменений параметров системы:

$$\delta = f(X_r, R_r, X_n, R_n, T_{d0}, T_J),$$

где X_r — реактивное сопротивление статора; R_r — активное сопротивление статора; X_L — реактивное, R_L — активное сопротивление линии; T_{d0} — постоянная времени цепи возбуждения при разомкнутой цепи статора; T_J — постоянная инерции.

Параметры системы приближенно (см. с. 214) представлены в виде критериев

$$\pi_1 = X_r/R_r; \quad \pi_2 = R_L/X_L; \quad \pi_3 = T_J/T_{d0}^2.$$

В этом случае рассматриваемая зависимость будет иметь вид

$$\delta = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

Если для исходной зависимости применить метод ПФЭ, то число опытов $N = 2^6 = 64$ (6 — число переменных).

При использовании критериев подобия потребуется постановка восьми опытов. При выборе шага варьирования критериев используется первый из указанных путей. За исходные значения параметров и критериев принимаются следующие: $X_r^* = 0,346$; $R_r^* = 0,0069$; $X_L^* = 1,69$; $R_L^* = 0,1$; $T_{d0}^* = 5,2$ с; $T_J^* = 13,8$ с; $\pi_1^* = 51,77$; $\pi_2^* = 0,059$; $\pi_3^* = 0,512$. Шаг варьирования параметров (в %): $\Delta X_r = \pm 20$; $\Delta R_r = \pm 20$; $\Delta X_L = \pm 5$; $\Delta R_L = \pm 20$; $\Delta T_{d0} = \pm 10$; $\Delta T_J = \pm 10$. Средний шаг варьирования критериев был выбран $\pm 25\%$ для π_1 и $\pm 15\%$ для π_2, π_3 .

Согласно методам теории планирования эксперимента была составлена таблица-матрица (табл. 3.16) планирования эксперимента для одной из серий опытов. Эта матрица отличается от обычной тем, что в ней указаны не только значения критериев подобия, но и значения параметров, соответствующих данному значению критериев подобия. При этом шаг отклонения критериев подобия задавался с помощью вариаций параметров, входящих в них.

В соответствии с теорией планирования эксперимента и с учетом особенностей получения критериального уравнения регрессии проведены одна серия и два дублирования опытов. Осуществлялась проверка однородности оценок дисперсии согласно критерию (3.15), причем было получено $G_{\max} = 0,414$.

Значение $G_{\max}$ оказалось меньше критического (табличного) $G_{кр} = 0,5157$, поэтому можно сделать вывод о воспроизводимости опытов. В соответствии с матрицей планирования были проведены все опыты (расчеты) и определено критериальное уравнение регрессии в виде

$$\delta_{\max} = 76,09 + 1,316\pi_1 - 0,683\pi_2 + 0,02\pi_3 - 0,0055\pi_1\pi_2 + 0,0065\pi_1\pi_3 - 0,004\pi_2\pi_3 + 0,00075\pi_1\pi_2\pi_3.$$

При проверке коэффициентов уравнения регрессии на значимость была использована дисперсия, обусловленная статистической зависимостью. Доверительный интервал для коэффициентов регрессии получится равным $\Delta b_i = 0,212$.

Так как коэффициенты регрессии при $\pi_3, \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3, \pi_2\pi_3, \pi_1\pi_2\pi_3$ оказались незначимыми, то уравнение можно переписать:

$$\delta_{\max} = 76,09 + 1,316\pi_1 - 0,683\pi_2.$$

Полученное выражение с помощью критерия Фишера проверялось на адекватность. При этом дисперсия адекватности получилась равной $s_{ад}^2 = 0,000986$.

Сформулированный для данного примера критерий Фишера ($F_p = 0,0428$) оказался много меньше табличного F_T , т. е. полученная математическая модель адекватно представляет собой исследуемую зависимость. Опуская промежуточные вычисления, приведем полученное методом корреляционного анализа критериальное уравнение регрессии вида

$$\delta_{\max} = 76,336 + 0,131\pi_1 - 102,5\pi_2 - 1,87\pi_3 + \dots$$

Как отмечалось выше, применение корреляционного анализа для получения критериального уравнения регрессии принципиально в методическом плане не вызывает затруднений, т. е., как обычно, регистрируются значения критериев подобия и целевой функции при естественной флуктуации в системе. В

Таблица 3.16

π_1		π_2		π_3		$\delta_{\max}$
X_{Γ}	R_{Γ}	R_{Π}	X_{Π}	T_J	T_{d0}	
39,22 (—)		0,05 (—)		0,437 (—)		75,43
0,3099	0,0079	0,08749	1,7307	14,1	5,693	
64,72 (+)		0,05 (—)		0,437 (—)		78,47
0,3793	0,0059	0,08749	1,7307	14,1	5,693	
39,22 (—)		0,068 (+)		0,437 (—)		73,40
0,3099	0,0079	0,1133	1,6816	14,1	5,693	
64,72 (+)		0,068 (+)		0,437 (—)		76,38
0,3793	0,0059	0,1133	1,6816	14,1	5,693	
39,22 (—)		0,05 (—)		0,589 (+)		75,18
0,3099	0,0079	0,08749	1,7307	14,58	4,974	
64,72 (+)		0,05 (—)		0,589 (+)		78,18
0,3793	0,0059	0,08749	1,7307	14,58	4,974	
39,22 (—)		0,068 (+)		0,589 (+)		73,18
0,3099	0,0079	0,1133	1,6816	14,58	4,974	
64,72 (+)		0,068 (+)		0,589 (+)		76,10
0,3793	0,0059	0,1133	1,6816	14,58	4,974	

данном случае на ЦВМ эта флуктуация задавалась с помощью метода статистических испытаний.

Таким образом, различными методами получено два критериальных уравнения регрессии для одного и того же процесса. Результаты, полученные на основе этих уравнений, дают хорошие совпадения.

Пример 3.9. Рассмотреть применение статистического метода факторного планирования эксперимента и расчета к оценке статической устойчивости электрических систем.

Расчет устойчивости в условиях изменения параметров и режимов систем необходим вследствие того, что исходные данные о параметрах схемы известны с относительно небольшой точностью. Если при этом учесть и возможные случайные отклонения нагрузок от заданных значений, то можно утверждать, что результаты расчета устойчивости не могут быть достоверными, а являются условными.

Применение статистического метода факторного планирования эксперимента или расчета позволило оценить влияние неточности задания параметров на коэффициент запаса статической устойчивости системы. Вопрос учета неточно-

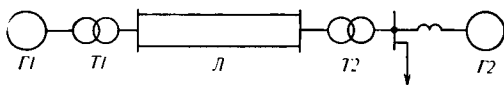


Рис. 3.12

сти задания исходных данных системы является актуальным. Имеющиеся в литературе сведения по этому вопросу не дают наглядной зависимости коэффициента запаса от параметров при одновременном их изменении.

Поставленную задачу можно удовлетворительно решить, применяя статистические методы. Рассмотрим систему, содержащую два эквивалентных генератора G_1 и G_2 , работающих на общую нагрузку (рис. 3.12). Схема замещения системы, где учтены проводимости трансформаторов и линий, а нагрузка представлена постоянными сопротивлениями, приведена на рис. 3.13.

Режимы системы, представленной на рис. 3.12, можно рассчитать, воспользовавшись выражениями:

$$P_1 = E_1^2 y_{11} \sin \alpha_{11} + E_1 E_2 y_{12} \sin (\delta_{12} - \alpha_{12});$$

$$P_2 = E_2^2 y_{22} \sin \alpha_{22} - E_1 E_2 y_{12} \sin (\delta_{12} + \alpha_{12}),$$

где E_1, E_2 — э. д. с. эквивалентных станций, принимаемые неизменными; y_{11}, y_{22}, y_{12} — модули собственных и взаимных проводимостей; $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}$ — углы, дополняющие аргументы собственных и взаимных проводимостей; δ_{12} — относительный угол между векторами э. д. с. станций.

Если для оценки статической устойчивости воспользоваться практически критерием $dP/d\delta_{12} = 0$, то в системе, приведенной на рис. 3.12, можно найти предельную мощность и коэффициент запаса по статической устойчивости

$$P_{1\text{пр}} = E_1^2 y_{11} \sin \alpha_{11} + E_1 E_2 y_{12}; \quad K_3 = (P_{1\text{пр}} - P_{1(0)}) / P_{1(0)},$$

где $P_{1(0)}$ — активная мощность, выдаваемая первой станцией в исходном нормальном режиме.

Если исходные данные параметров и режима системы достоверно известны, то определение коэффициента запаса K_3 не представляет труда. О допустимости рассматриваемого режима судят по коэффициенту запаса, который должен быть не ниже рекомендуемых значений.

Поскольку исходные данные режима и параметров системы известны лишь приближенно, то приходится проводить серию расчетов, для того чтобы найти влияние тех или иных параметров на искомые величины $P_{1\text{пр}}$ и K_3 , а также отклонение их от значений, соответствующих принятым. Естественно, что при проведении подобных расчетов для каждого из варьируемых параметров приходится принимать как минимум три значения; в этом случае общее число расчетов составит $3k$, где k — число варьируемых параметров.

Получаемые при этом результаты позволяют оценить влияние лишь одного параметра на искомые величины. Это создает определенные трудности в оценке устойчивости даже простой системы (см. рис. 3.13), поскольку оправданным можно считать предположение об одновременном отклонении нескольких исходных данных от заданных величин. Однако можно при этом проследить влияние такого одновременного отклонения, воспользовавшись уравнениями регрессии, полученными на основе статистического метода планирования эксперимента (расчета).

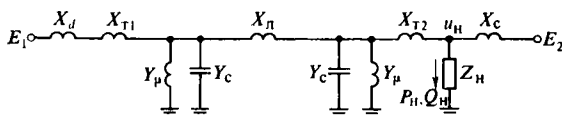


Рис. 3.13

Таблица 3.17

Вариант	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2$	$x_5 = x_2 x_3$	$x_6 = x_1 x_3$	P_{10}	P_{1np}
1	+	+	+	+	+	+	0,681	0,881
2	—	+	+	—	+	—	0,527	0,782
3	+	—	+	—	—	+	0,141	0,762
4	—	—	+	+	—	—	0,745	0,910
5	+	+	—	+	—	—	0,778	0,958
6	—	+	—	—	—	+	0,351	0,842
7	+	—	—	—	+	—	0,488	0,775
8	—	—	—	+	+	+	0,629	0,884

Параметры могут либо изменяться из-за неточности задания исходных данных, либо варьироваться с целью выявления изменения этих величин на статическую устойчивость. При малых отклонениях независимых переменных изучаемую функцию можно представить в первом приближении линейной зависимостью

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n=6} b_i x_i. \quad (3.23)$$

Программа эксперимента (или расчета) задана табл. 3.17.

Применим изложенный ранее метод к отысканию зависимостей P_{1np} и P_{10} от параметров электрической системы (рис. 3.13). В качестве переменных параметров были приняты проводимости трансформаторов, реактивное сопротивление линии, напряжение на нагрузке, ее активная и реактивная мощности.

Расчеты зависимостей P_{1np} и P_{10} от параметров схемы системы позволили сделать вывод об отсутствии явно выраженных взаимосвязей между переменными параметрами. Это дало возможность при числе переменных $K = 6$ ограничиться проведением восьми опытов ($N = 8$ вместо $N' = 2^6 = 64$) и для дальнейшего анализа использовать уравнение (3.23).

В соответствии с матрицей (см. табл. 3.17) была проведена серия расчетов, в результате которых по уравнениям для P_{1np} и P_{10} находились их значения. При этом пределы изменения переменных параметров принимались в соответствии с табл. 3.18.

По значениям P_{10} для всех вариантов планирования расчета был найден критерий Стьюдента $t_C = 2,37$ и вычислены коэффициенты b_i ;

$$b_0 = 0,542; \quad b_1 = -0,02; \quad b_2 = 0,042; \quad b_3 = -0,018;$$

$$b_4 = 0,166; \quad b_5 = 0,039; \quad b_6 = -0,092.$$

Так как погрешность расчета была оценена в 5% ($s_y = 5\%$ от b_0), то доверительный предел для коэффициентов

$$\Delta b_i = t_C s_y / \sqrt{N} = 2,37 \cdot 0,05 \cdot 0,542 / \sqrt{8} = 0,023,$$

т. е. все найденные коэффициенты, кроме b_1 и b_3 , значимы, так как $|b_i| > \Delta b_i$, причём $i \neq 1, i \neq 3$.

В результате получаем уравнение

$$P_{10} = 0,542 + 0,042x_2 + 0,166x_4 + 0,039x_5 - 0,092x_6, \quad (3.24)$$

Параметр	Пределы изменения, %	Фактор	Границы изменения x_i
Проводимость трансформатора Y_μ	± 25	x_1	0,03 0,02
Проводимость линии Y_c	± 25	x_2	0,11 0,06
Сопротивление линии X_Π	± 10	x_3	0,39 0,31
Напряжение на шинах нагрузки u_n	± 5	x_4	1,05 0,95
Активная мощность нагрузки P_n	± 5	x_5	3,86 3,48
Реактивная мощность нагрузки Q_n	± 5	x_6	2,38 2,16

адекватное истинной зависимости P_1 от выделенных параметров x_2, x_4, x_5, x_6 в области $-1 \leq x_i \leq 1$.

Аналогично было получено уравнение регрессии для $P_{1пр}$

$$P_{1пр} = 0,849 + 0,059x_4 - 0,031x_5. \quad (3.25)$$

В этом уравнении $b_5 = -0,031$ совпадает с предельным значением по критерию Стьюдента.

Выражения (3.24), (3.25) позволяют в общем случае выявить переменные параметры, существенно влияющие на P_{10} и $P_{1пр}$, а также найти зависимость изменения их как функцию всех значимых параметров, что нельзя было сделать другим путем.

Найдем предельные отклонения величин при принятых пределах изменения параметров (табл. 3.18). Если считать, что при заданных параметрах (см. рис. 3.12) $P_{1пр} = 0,826$, а $P_{1пр \min} = 0,759$ (при снижении напряжения на шинах нагрузки до 0,95 и повышении активной мощности нагрузки на 5%), то имеем $P_{1пр \max} = 0,939$ (при повышении напряжения и снижении активной мощности нагрузки на 5%).

Если отклонения будут меньше приведенных в табл. 3.18, то величины $P_{1пр}$ будут находиться в пределах $P_{1пр \max}$ и $P_{1пр \min}$.

Другая серия расчетов была проведена применительно к схеме, показанной на рис. 3.14. Предполагалась неточность задания исходных данных по u_n, P_1, Q_1, X_1, X_2 в пределах $\pm 10\%$. Требовалось определить влияние неточности задания всех параметров на $P_{1пр}$ и K_3 .

В этом случае при вариациях неточности задания любой из указанных величин менялся режим системы, а при изменении u_n считалось, что мощность нагрузки остается заданной. В табл. 3.19 приведены матрица планирования и обозначения факторов.

Рассчитанные коэффициенты регрессии для $P_{1пр}$ и K_3 позволяют записать: для предельной мощности $P_{1пр} = 0,906 + 0,058x_3 + 0,034x_4$; аналогично, для коэффициента запаса $K_3 = 0,563 - 0,056x_1 + 0,102x_3 - 0,094x_4 + 0,04x_5$. Таким образом, для данной схемы при заданном режиме достоверная оценка $P_{1пр}$ требует знания значений u_n и P_1 , как наиболее важных для K_3 ; кроме того, необходимо знать величины X_1 и Q_1 .

Неточность задания реактивного сопротивления X_2 не влияет ни на $P_{1пр}$, ни на K_3 . Отсюда следует, что на основании получаемых общих зависимостей можно проследить влияние на выходную функцию изменяющихся параметров, если они находятся внутри заданного (принятого) по тем или иным соображениям интервала, и одновременно оценить влияние неточности задания нескольких параметров схемы и ее режима на статическую устойчивость.

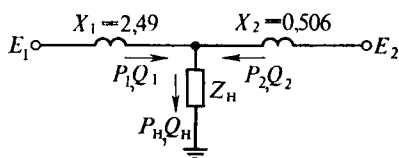


Рис. 3.14

Таблица 3.19

Вариант	Значения факторов и соответствующих параметров					Выходная функция, отн. ед.	
	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2$	$x_5 = x_1 x_3$		
	X_1	X_2	u_H	P_1	Q_1		
	+1 (2,74) -1 (2,24)	+1 (0,557) -1 (0,9)	+1 (1,1) -1 (0,9)	+1 (0,641) -1 (0,525)	+1 (0,398) -1 (0,326)	K_3	P_{1np}
1	+	+	+	+	+	0,530	0,980
2	—	+	+	—	—	0,795	0,943
3	+	—	+	—	+	0,770	0,929
4	—	—	+	+	—	0,566	1,004
5	+	+	—	+	—	0,310	0,840
6	—	+	—	—	+	0,655	0,869
7	+	—	—	—	—	0,420	0,746
8	—	—	—	+	+	0,460	0,935

Пример 3.10. Рассмотрим методы регрессионного анализа при критериальных зависимостях, применив предлагаемую методику к изучению переходного процесса. Пусть цепь, состоящая из активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C , включается на источник постоянного напряжения u . Предположим, что математическое описание переходного процесса неизвестно.

С помощью π -теоремы посредством формул размерностей i , u , R , L , C , t нетрудно найти критерии подобия процесса. Если принять за независимые параметры C , i , t , то получим следующие критерии подобия процесса:

$$\pi_1 = it/(uC); \pi_2 = RC/t; \pi_3 = LC/t^2.$$

В общем случае зависимости между i и критериями подобия $\pi_1 - \pi_3$ представится следующим образом:

$$i/i_0 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

На основе ПФЭ определим математическую модель процесса при следующих исходных данных: $u = 500\text{В}$; $i_0 = 8,2\text{ А}$; $R = 30\text{ Ом}$; $C = 2 \cdot 10^{-3}\text{ Ф}$; $L = 2,62\text{ Гн}$. Пределы вариации критериев подобия принимаем равными 15% от номинальных.

В соответствии с теорией планирования эксперимента проведем серию опытов. Уравнение регрессии получим в виде

$$i_* = i_{\max}/i_0 = 1,02 - 0,143\pi_1 - 0,052\pi_2 - 0,038\pi_3 + 0,0076\pi_1\pi_2 + 0,0057\pi_1\pi_3 + 0,0106\pi_2\pi_3 - 0,0028\pi_1\pi_2\pi_3. \quad (3.26)$$

Проверка однородности выборочных дисперсий, адекватности математического описания и значимости коэффициентов уравнения регрессии осуществлялась в соответствии с изложенной методикой. После проверки на значимость коэффициентов регрессии уравнения (3.26) адекватное математическое описание примет вид

$$i_* = 1,02 - 0,143\pi_1 - 0,052\pi_2 - 0,038\pi_3.$$

Очевидно, что наиболее сильное влияние на исследуемый процесс оказывает критерий π_1 .

Пример 3.11. Исследовать влияние параметров на целевую функцию эксперимента в линейной системе. Предположим, что импульсное электромагнитное поле какой-либо электрической установки (например, линии электропередачи

при перенапряжениях) воздействует на устройство, расположенное в полости экранирующей металлической оболочки, причем следует учесть, что оболочка выполнена из неферромагнитного материала и воздействующее импульсное магнитное поле однородно, квазистационарно и может быть описано выражением

$$h(t) = H_0 \exp(-\alpha t) \sin \beta t, \quad (3.27)$$

где t — время; H_0 , α и β — параметры импульса.

Требуется исследовать влияние параметров внешнего импульса и удельной электропроводности оболочки γ на амплитуду напряженности возбуждаемого в полости оболочки магнитного поля H_{im} , которую будем считать целевой функцией эксперимента. Метод КИЭ позволяет решить эту задачу при проведении минимального числа опытов на моделирующей установке уменьшенных размеров; при этом модельная оболочка должна быть геометрически подобна оболочке в оригинале.

Сформируем факторное пространство первичных параметров:

$$\Phi_n = \Psi(H_{im}, H_{lm}, \alpha, \beta, \mu_0, \gamma, l), \quad (3.28)$$

где H_{lm} — амплитуда внешнего импульса, являющаяся однозначной функцией параметров H_0 , α и β ; μ_0 — магнитная постоянная; l — характерный линейный размер полости оболочки (поскольку целевой функцией является амплитудное значение напряженности H_{im} , в состав факторного пространства не входит время t).

Анализ размерностей показывает, что у рассматриваемых семи параметров ($m = 7$) имеется четыре независимые единицы измерения ($k = 4$). В качестве независимых выбираем параметры μ_0 , γ , l и H_{lm} , поскольку μ_0 является константой, а удельную электропроводность и размеры модельной оболочки трудно варьировать. Соответствующая форма записи критериев подобия имеет вид

$$\pi_1 = H_{im}/H_{lm}; \quad \pi_2 = \alpha \mu_0 \gamma l^2; \quad \pi_3 = \beta \mu_0 \gamma l^2. \quad (3.29)$$

Зададим интервалы варьирования параметров оригинала, входящих в критерии π_2 и π_3 :

$$\alpha_0 = \alpha_1 \div \alpha_2; \quad \beta_0 = \beta_1 \div \beta_2; \quad \gamma_0 = \gamma_1 \div \gamma_2 \quad (3.30)$$

(размер l_0 оболочки в оригинале по условию задачи не меняется). Из выражений (3.29) и (3.30) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{2-} &= \alpha_1 \mu_0 \gamma_1 l_0^2; \quad \pi_{2+} = \alpha_2 \mu_0 \gamma_2 l_0^2; \quad \pi_{2cp} = (\pi_{2-} + \pi_{2+})/2; \\ \pi_{3-} &= \beta_1 \mu_0 \gamma_1 l_0^2; \quad \pi_{3+} = \beta_2 \mu_0 \gamma_2 l_0^2; \quad \pi_{3cp} = (\pi_{3-} + \pi_{3+})/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

В табл. 3.20 приведена матрица, полученная на основе ортогонального центрального композиционного планирования второго порядка и содержащая нормированные значения критериев подобия π_2 и π_3 . При вариации на модели этих критериев значения четырех первичных параметров могут оставаться неизменными ($k = 4$). Поэтому для получения критериального уравнения регрессии достаточно изготовить одну модельную экранирующую оболочку меньших по сравнению с оригиналом геометрических размеров ($l_m < l_0$) с удельной электропроводностью γ_m . Величина амплитуды H_{mim} внешнего импульса может иметь произвольное значение. Вариация критерия π_2 будет осуществляться в результате изменения параметра внешнего импульса α_m , а вариация π_3 — в результате изменения параметров β_m (табл. 3.20).

Проведение на модели 9n опытов (n — число серий параллельных опытов) в соответствии с рандомизированным планом экспериментов (см. табл. 3.20) даст возможность получить критериальное уравнение регрессии

$$\pi_1 = b_0 + b_2 \pi_2 + b_3 \pi_3 + b_{23} \pi_2 \pi_3 + b_{22} \pi_2^2 + b_{33} \pi_3^2,$$

которое после подстановки в него вместо критериев подобия первичных параметров оригинала примет вид

$$\begin{aligned} H_{oim}/H_{olm} &= b_0 + (b_2 \alpha_0 + b_3 \beta_0) \mu_0 \gamma_0 l_0^2 + (b_{23} \alpha_0 \beta_0 + b_{22} \alpha_0^2 + b_{33} \beta_0^2) \times \\ &\times \mu_0^2 \gamma_0^2 l_0^4. \end{aligned}$$

Номер опыта	$\pi_2 = \alpha_M T$		$\pi_3 = \beta_M T$	
	$\bar{\pi}_2$	α_M	$\bar{\pi}_3$	β_M
1	-1	π_{2-}/T	-1	π_{3-}/T
2	+1	π_{2+}/T	-1	π_{3-}/T
3	-1	π_{2-}/T	+1	π_{3+}/T
4	+1	π_{2+}/T	+1	π_{3+}/T
5	-1	π_{2-}/T	0	π_{3cp}/T
6	+1	π_{2+}/T	0	π_{3cp}/T
7	0	π_{2cp}/T	-1	π_{3-}/T
8	0	π_{2cp}/T	+1	π_{3+}/T
9	0	π_{2cp}/T	0	π_{3cp}/T

Примечание. $T = \mu_0 \gamma_M l_M^2$.

Последнее уравнение позволяет оценить экранирующее действие оболочки в оригинале, характеризуемое отношением H_{im0}/H_{im} , при вариации не только параметров импульса внешнего магнитного поля α_0 , β_0 , но и удельной электропроводности оболочки γ_0 , хотя электропроводность модельной оболочки в ходе проведения опытов не менялась.

Критериям подобия (3.29), полученным при выборе в качестве независимых величин μ_0 , γ , l и H_{im} , соответствует наиболее простой способ изменения первичных параметров модели α_M и β_M (табл. 3.20).

Для сравнения рассмотрим случай, когда в состав независимых параметров входит варьируемая величина. Выбрав в качестве независимых параметров μ_0 , l , H_{im} и α , получим следующую форму записи критериев подобия:

$$\pi_1 = H_{im}/H_{im}; \quad \pi_2 = \alpha \mu_0 \gamma l^2; \quad \pi_3 = \beta/\alpha. \quad (3.32)$$

Соответствующая матрица планирования экспериментов, приведенная в табл. 3.21, предусматривает вариацию параметра β_M по более сложному закону, реализация которого не вызовет особых затруднений, так как в отличие от величин γ_M и l_M параметры импульса α_M , β_M сравнительно просто варьируются на моделирующей установке.

Пример 3.12. Обосновать приближенную методику физического моделирования. Из соотношений (3.29) и (3.32) следует, что при уменьшении линейных размеров модельной экранирующей оболочки в λ раз по сравнению с оригиналом для выполнения условий $\pi_2 = idem$, $\pi_3 = idem$ потребуется увеличить значения параметров импульса внешнего магнитного поля в модели α_M и β_M по сравнению с оригиналом в $\lambda^2 \gamma_0/\gamma_M$ раз. Это затруднительно при больших значениях α_0 и β_0 в оригинале и больших значениях λ . Покажем, что этих трудностей можно избежать, если при сохранении геометрического подобия полостей оболочек в модели и оригинале отказаться от соблюдения условия $l/d = idem$, где l — характерный линейный размер полости оболочки, d — ее толщина.

Введем в состав факторного пространства первичных параметров величину d : H_{im} , H_{im} , α , β , μ_0 , γ , l , d . Выбрав в качестве независимых параметры μ_0 , d , H_{im} и α , получим критерии подобия:

$$\pi_1 = H_{im}/H_{im}; \quad \pi_2 = \alpha \mu_0 \gamma d^2; \quad \pi_3 = \beta/\alpha; \quad \pi_4 = l/d. \quad (3.33)$$

Пусть значение критерия π_4 в модели (π_{M4}) меньше, чем в оригинале (π_{O4}): $\pi_{O4}/\pi_{M4} = (l_0/d_0)(d_M/l_M) = \kappa$, $l_0/l_M = \lambda$.

$$(3.34)$$

Для обеспечения $\pi_2 = idem$, $\pi_3 = idem$ значения параметров α_M и β_M надо увеличить в меньшее число раз:

$$\alpha_M = \alpha_0 (\lambda/\kappa)^2 \gamma_0/\gamma_M, \quad \beta_M = \beta_0 (\lambda/\kappa)^2 \gamma_0/\gamma_M.$$

Номер опыта	$\pi_2 = \alpha_M T$		$\pi_3 = \beta_M / \alpha_M$	
	$\overline{\pi_2}$	α_M	$\overline{\pi_3}$	β_M
1	-1	π_{2-}/T	-1	$\pi_{2-} \pi_{3-}/T$
2	+1	π_{2+}/T	-1	$\pi_{2+} \pi_{3-}/T$
3	-1	π_{2-}/T	+1	$\pi_{2-} \pi_{3+}/T$
4	+1	π_{2+}/T	+1	$\pi_{2+} \pi_{3+}/T$
5	-1	π_{2-}/T	0	$\pi_{2-} \pi_{3cp}/T$
6	+1	π_{2+}/T	0	$\pi_{2+} \pi_{3cp}/T$
7	0	π_{2cp}/T	-1	$\pi_{2cp} \pi_{3-}/T$
8	0	π_{2cp}/T	+1	$\pi_{2cp} \pi_{3+}/T$
9	0	π_{2cp}/T	0	$\pi_{2cp} \pi_{3cp}/T$

В частности, если $\gamma_M = \gamma_0$ и $\kappa = \lambda$, то $\alpha_M = \alpha_0$ и $\beta_M = \beta_0$.

При обосновании приближенной ($\pi_4 \neq \text{idem}$) методики физического моделирования с помощью метода КИЭ следует учитывать, что решение исходных дифференциальных уравнений процесса может быть получено в явном виде. Известно, что поле $H_i(t)$, возбуждаемое в полости металлической оболочки импульсом произвольной формы $h(t)$, можно определить из соотношения

$$H_i(t) = \int_0^t P_H(t') h(t-t') dt', \quad (3.35)$$

где $P_H(t')$ — импульсная функция оболочки, описывающая импульс поля, который возбуждается внутри оболочки внешним импульсом с временной зависимостью в виде δ -функции. Подставив в (3.35) выражение (3.27) и преобразовав выражение для $P_H(t)$, после интегрирования получим

$$H_i = \frac{H_{lm} \sqrt{(\alpha/\beta)^2 + 1}}{\beta \mu_0 \gamma d L_H} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right) \left\{ \frac{1}{(\varepsilon^2 + 1)} \times \right. \\ \times \left[(\varepsilon \sin \beta t - \cos \beta t) \exp(-\alpha t) + \exp\left(-\frac{t}{\mu_0 \gamma d L_H}\right) \right] + \\ \left. + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(\delta_v^2 + 1)} \left[(\delta_v \sin \beta t - \cos \beta t) \exp(-\alpha t) + \exp\left(-\frac{v^2 \pi^2 t}{\mu_0 \gamma d^2}\right) \right] \right\}, \quad (3.36)$$

где L_H — эффективная магнитная длина оболочки; $\varepsilon = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\mu_0 \gamma d L_H} - \alpha \right)$; $\delta_v = \frac{1}{\beta} \left(\frac{v^2 \pi^2}{\mu_0 \gamma d^2} - \alpha \right)$; $\pi = 3,14$.

Учитывая выражения (3.33) и выбирая в качестве характерного линейного размера величину $l = L_H$, представим уравнение (3.36) в виде

$$H_{i*} = \frac{\sqrt{(1/\pi_3)^2 + 1}}{\pi_2 \pi_3 \pi_4} \exp\left(\frac{1}{\pi_3} \operatorname{arctg} \pi_3\right) \left\{ \frac{1}{(\varepsilon^2 + 1)} \times \right. \\ \times [(\varepsilon \sin \pi_2 \pi_3 t_* - \cos \pi_2 \pi_3 t_*) \exp(-\pi_2 t_*) + \exp(-t_*/\pi_4)] + \\ \left. + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(\delta_v^2 + 1)} [(\delta_v \sin \pi_2 \pi_3 t_* - \cos \pi_2 \pi_3 t_*) \exp(-\pi_2 t_*) + \right.$$

$$+ \exp(-v^2 \pi^2 t_*) \} \}, \quad (3.37)$$

$$\text{где } H_{i*} = \frac{H_i}{H_{lm}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\pi_3} \left(\frac{1}{\pi_2 \pi_4} - 1 \right), \quad t_* = \frac{t}{\mu_0 \gamma d^2},$$

$$\delta_v = \frac{1}{\pi_3} \left(\frac{v^2 \pi^2}{\pi_2} - 1 \right).$$

Рассчитав согласно (3.37) несколько точек кривой $H_i/H_{lm} = f(t_*)$, определим первый максимум этой кривой $H_{im}/H_{lm} = \pi_1$. Методом КПЭ исследуем влияние, которое оказывает на величину π_1 вариация критериев π_2 , π_3 и π_4 в диапазонах $\pi_2 = 5 \div 10$, $\pi_3 = 0,2 \div 0,5$, $\pi_4 = 5 \div 100$. Поскольку в (3.37) перед фигурной скобкой находятся критерии π_2 и π_4 , для уменьшения погрешности аппроксимации зависимость между π_1 и варьируемыми критериями подобия представим в виде $\pi_1 \pi_2 \pi_4 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$. Кроме того, разобьем диапазон вариации критерия π_4 на два поддиапозона. В результате расчетов в соответствии с планом ПФЭ эксперимента типа 2^3 получим

$$\begin{aligned} &\text{— при } \pi_4 = 5 \div 20, \quad \bar{\pi}_4 = (\pi_4 - 12,5)/7,5 \\ &\pi_1 \pi_2 \pi_4 = 2,220 + 0,032\bar{\pi}_2 - 0,133\bar{\pi}_3 + 0,115\bar{\pi}_4 - 0,015\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3 - \\ &- 0,015\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_4 - 0,024\bar{\pi}_3 \bar{\pi}_4; \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &\text{— при } \pi_4 = 20 \div 100, \quad \bar{\pi}_4 = (\pi_4 - 60)/40 \\ &\pi_1 \pi_2 \pi_4 = 2,377 + 0,010\bar{\pi}_2 - 0,167\bar{\pi}_3 + 0,042\bar{\pi}_4 - 0,006\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3 - \\ &- 0,006\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_4 - 0,010\bar{\pi}_3 \bar{\pi}_4, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $\bar{\pi}_2 = (\pi_2 - 7,5)/2,5$, $\bar{\pi}_3 = (\pi_3 - 0,35)/0,15$.

Погрешность аппроксимации, имеющая наибольшее значение в центре плана эксперимента, не превышает 4%, что для данной задачи можно считать допустимым.

Оценим погрешность приближенной методики моделирования, согласно которой значения критериев подобия π_2 и π_3 в оригинале и модели соответственно одинаковы, а значение π_4 в модели π_{M4} уменьшено по сравнению с оригиналом π_{O4} в κ раз. Из выражений (3.38) и (3.39) следует, что для оригинала и модели соответственно

$$\pi_{O1} \pi_{O4} = \frac{H_{Oim}}{H_{Olm}} \frac{l_O}{d_O} = \pi_{Om} = \frac{1}{\pi_2} \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_{O4});$$

$$\pi_{M1} \pi_{M4} = \frac{H_{Mim}}{H_{Mlm}} \frac{l_M}{d_M} = \pi_{Mm} = \frac{1}{\pi_2} \varphi\left(\pi_2, \pi_3, \frac{\pi_{O4}}{\kappa}\right).$$

Отклонения в результатах приближенного моделирования показаны на рис. 3.15 и равны

$$\Delta = \frac{|\pi_{Om} - \pi_{Mm}|}{\pi_{Om}} 100\% = \psi(\pi_2, \pi_3, \pi_{O4}, \kappa).$$

Анализ показывает, что при $\kappa \leq 10$ отклонение Δ не превосходит 15% и уменьшается с ростом значений критериев подобия π_2 , π_3 и отношения $\pi_{O4} = l_O/d_O$. Следует отметить, что предложенная упрощенная методика физического моделирования позволяет оценить экранирующие свойства оболочки любой сколь угодно сложной геометрической формы.

Пример 3.13. Исследовать влияние нелинейных параметров на целевую функцию. Для этого рассмотрим изменение запаса статической устойчивости узла нагрузки при подключении (рис. 3.16) устройства, имеющего емкостную характеристику

$$C = f(u_H). \quad (3.40)$$

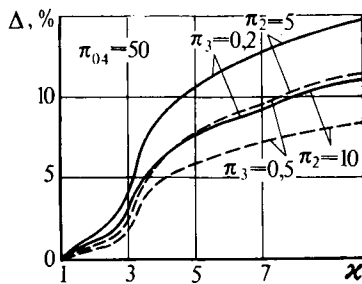
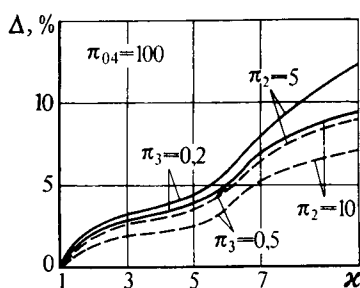


Рис. 3.15

Аппроксимируем зависимость (3.40) выражением

$$C = C_0 + a(1 - u_H/u_{H0}), \quad (3.41)$$

где u_{H0} и u_H — исходное и текущее значения напряжения на шинах узла, и исследуем влияние величин a и C_0 , а также сопротивления внешней сети X на целевую функцию K_3 . Метод КПЭ дает возможность решить эту задачу при проведении минимума опытов на физической модели узла нагрузки, замещающего эквивалентным асинхронным двигателем АД.

Известно, что K_3 является функцией величины $(1/X - \omega C)$, где ω — угловая скорость сети. С учетом (3.41) получим

$$b = 1/X - \omega C_0. \quad (3.42)$$

Сформируем факторное пространство из семи первичных параметров ($m = 7$):

$$\varphi_H = \psi(K_3, a, b, u_{H0}, \omega, P, Q), \quad (3.43)$$

где P и Q — активная и реактивная мощности, потребляемые узлом при $C = 0$ и связанные с напряжением u_H статическими характеристиками

$$Q = f_Q(u_H), \quad P = f_P(u_H). \quad (3.44)$$

Так как параметры P и Q — нелинейны, воспользуемся для определения критериев подобия способом относительных единиц. Анализ размерностей показывает, что только три базисные величины ($k = 3$) могут быть выбраны независимо, например:

$$u_6 = u_{H0}; \quad \omega_6 = \omega, \quad S_6 = S_0, \quad (3.45)$$

где S_0 — мощность, потребляемая узлом нагрузки при $C = 0$ и $u_H = u_{H0}$ ($p = 1$). Остальные базисные величины имеют вид

$$a_6 = \frac{S_6}{u_6^2 \omega_6} = \frac{S_0}{u_{H0}^2 \omega}; \quad b_6 = \frac{S_6}{u_6^2} = \frac{S_0}{u_{H0}^2} = a_6 \omega. \quad (3.46)$$

Используя полученные соотношения (3.43) и (3.46) найдем две относительные характеристики ($q = 2$):

$$Q/S_0 = \varphi_Q(u_H/u_{H0}), \quad P/S_0 = \varphi_P(u_H/u_{H0}) \quad (3.47)$$

(которые согласно второму дополнительному положению о подобии нелинейных систем должны быть соответственно одинаковыми в модели и оригинале) и три

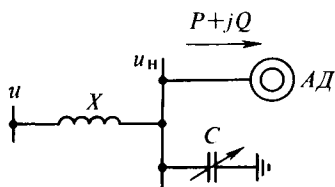


Рис. 3.16

критерия подобия ($m - k + p - q = 3$):

$$\pi_1 = K_3; \pi_2 = a/a_0 = a_*; \pi_3 = b/b_0 = X_0/X - C_0/C_0 = 1/X_* - C_{0*}, \quad (3.48)$$

где $X_0 = 1/(a_0\omega)$, $C_0 = a_0$.

В табл. 3.22 приведена матрица, соответствующая плану ПФЭ типа 2^2 и предусматривающая вариацию критерия π_2 в результате изменения параметра a_m и вариацию π_3 в результате изменения X_m . В соответствии с рандомизированным планом эксперимента, составленным на основе табл. 3.22, было проведено восемь опытов (две дублирующие серии по четыре опыта в каждой) на физической модели электрической системы при снижении питающего напряжения (рис. 3.16) вплоть до появления лавины напряжения. В результате получено следующее критериальное уравнение регрессии (%):

$$\pi_1 = K_3 = (u_0 - u_{кр}) 100/u_0 = 15,2 + 5,4\pi_2 + 2,9\pi_3 = 15,2 + 5,4a_* + 2,9(1/X_* - C_{0*}), \quad (3.49)$$

где $\pi_2 = 0 \div 1,3$, $\pi_3 = 1,26 \div 2,12$, $a_{m,0} = C_{m,0} = 230$ мкФ, $X_{m,0} = 13,8$ Ом. Зависимости, приведенные на рис. 3.17 (кривые 1), позволяют оценить влияние на запас устойчивости не только параметров a и X , но и величины C_0 , хотя

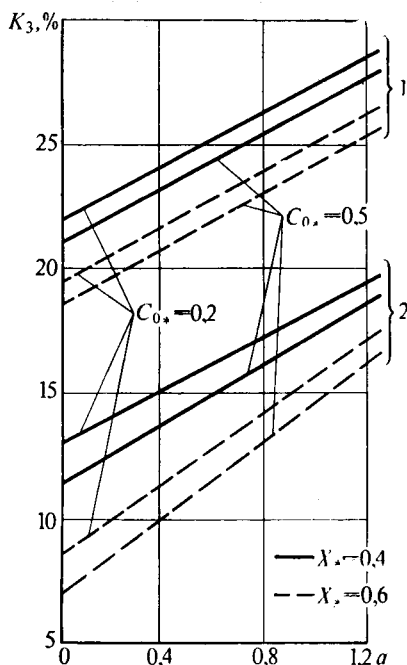


Рис. 3.17

при проведении опытов на модели значение ее оставалось постоянным: $C_{m,0} = 100$ мкФ ($C_{0*} = 0,43$). Из рис. 3.17 видно, что увеличение C_0 с целью улучшения $\cos \varphi$ в исходном режиме приводит к снижению запаса устойчивости, которое можно скомпенсировать выбором соответствующего значения коэффициента a_* , определяющего крутизну емкостной характеристики.

Для оценки влияния вида статических характеристик узла нагрузки по напряжению на эффективность устройства с регулируемой емкостью были проведены аналогичные опыты при пониженном напряжении исходного режима. Полученное критериальное уравнение регрессии (%) имеет вид

$$\pi_1 = K_3 = 1 + 10\pi_2 + 5,2\pi_3 - 2\pi_2\pi_3 = 1 + 10a_* + 5,2(1/X_* - C_{0*}) - 2a_*(1/X_* - C_{0*}), \quad (3.50)$$

где $\pi_2 = 0 \div 1,25$, $\pi_3 = 1,22 \div 2,34$, $a_{m,0} = C_{m,0} = 240$ мкФ, $X_{m,0} = 13,3$ Ом.

Сопоставление зависимостей 1 и 2 на рис. 3.17 показывает, что при пологой характеристике $Q/S_0 = \varphi(u_n/u_{n0})$, когда исходный режим системы ближе к предельному по статической устойчивости, применение устройства с регулируемой емкостью даст большой эффект.

Пример 3.14. Рассмотреть влияние отклонений значений критериев подобия на характер процесса*.

* Исследование влияния отклонений критериев подобия на динамические характеристики автоматизированного электропривода при физическом моделировании/ Кулиев А. М., Барьюдин А. А., Качанов В. А. и др. — Известия вузов. Энергетика, 1982, № 2, с. 106—108.

Номер опыта	$\pi_2 = a_{M.6}/a_{M.6}$		$\pi_3 = 1/(X_{M.6} \omega_{M.6}) - C_{0*}$	
	$\bar{\pi}_2$	a_M	$\bar{\pi}_3$	X_M
1	-1	$a_{M.6}\pi_{2-}$	-1	} $\frac{1}{a_{M.6}\omega_M (C_{0*} - \pi_{3-})}$
2	-1	$a_{M.6}\pi_{2+}$	-1	
3	-1	$a_{M.6}\pi_{2-}$	+1	} $\frac{1}{a_{M.6}\omega_M (C_{0*} + \pi_{3+})}$
4	+1	$a_{M.6}\pi_{2+}$	+1	

Для решения этой задачи необходимо получить критериальное уравнение регрессии, связывающее изучаемый процесс с соответствующими критериями подобия; с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии этого уравнения установить степень влияния отклонения значения каждого критерия подобия на исследуемый процесс и направление этого влияния.

Для получения критериального уравнения регрессии может быть использован ПФЭ или ДФЭ. При этом в матрицу планирования эксперимента входят не только критерии подобия, но и сами параметры. Использование критериев по добия в качестве факторов позволяет заметно снизить размерность задачи, уменьшить число опытов и получить компактную математическую модель изучаемого процесса.

Для реализации ПФЭ или ДФЭ, как правило, необходимо соблюдение условий, обеспечивающих симметричность, нормировку и ортогональность матрицы планирования. Обычно матрицы планирования, содержащие критерии подобия и сами параметры, обладают свойствами симметричности и ортогональности.

Пусть необходимо исследовать влияние критериев подобия $T_{эм}^* = \pi_1 = \text{idem}$ и $M_c^* = \pi_2 = \text{idem}$ на первый максимум тока якоря и угловую скорость двигателя, соответствующую этому максимуму, при пуске электропривода постоянного тока, т. е. получить критериальные уравнения вида

$$I_{1\max}/I_0 = f_1(\pi_1; \pi_2); \quad \omega/\omega_0 = f_2(\pi_1; \pi_2).$$

Критерии π_1 и π_2 связаны с параметрами следующим образом:

$$T_{эм} = JR_3/(c\Phi_H)^2; \quad T_{эм}^* = T_{эм}/T_{эм.ном};$$

$$M_c(\omega) = M_{c.нач} + k\omega^\alpha; \quad M_c^* = M_c(\omega)/M_{c.ном}.$$

В качестве базовых использованы номинальные значения параметров модельной установки: $J_0 = 0,227 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $R_3 = 1,537 \text{ Ом}$; $\Phi_H = 0,058 \text{ Вб}$; $\alpha = 1,5$; $M_{c.нач} = 7,22 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T_{эм} = 0,252 \text{ с}$.

В матрицу ПФЭ, содержащую критерии подобия, в качестве факторов введен фиктивный критерий подобия π_0 , представляющий собой свободный член искомого уравнения регрессии (табл. 3.23).

Шаг вариации параметров принят равным $\pm 10\%$ относительно номинальных значений. После обработки результатов получены следующие критериальные уравнения регрессии:

$$I_{1\max}/I_0 = 0,99 + 0,004\pi_2 - 0,028\pi_1 - 0,0008\pi_1\pi_2;$$

$$\omega/\omega_0 = 1,036 - 0,043\pi_2 - 0,296\pi_1 - 0,0028\pi_1\pi_2.$$

Номер опыта	Критерии подобия и параметры						Результаты	
	π_0	π_2		π_1			$I_{1\max}, \text{ А}$	$\omega_{\text{дв}}, \text{ рад/с}$
		$M_{\text{с.нач}}$	α	J	$R_{\text{э}}$	$\Phi_{\text{н}}$		
1	+	—		—			31,3	15,6
		—	—	—	—	+		
2	+	+		—			31,6	14,6
		+	+	—	—	+		
3	+	—		+			29,6	8,9
		—	—	+	+	—		
4	+	+		+			29,8	8,0
		+	+	+	+	—		

Как видно, наиболее сильное влияние на исследуемый процесс оказывает критерий π_1 . Поэтому при построении физической модели автоматизированного электропривода необходимо особое внимание уделить воспроизведению именно этого критерия. В то же время критерий π_2 может быть воспроизведен с погрешностью, которая не окажет существенного влияния на изучаемый процесс.

Сопоставление некоторых методов планирования эксперимента

На примере исследования процессов в системе «асинхронный двигатель — магнитный усилитель»* с обратными связями рассмотрим применение методов планирования эксперимента — ортогональный и ротатабельный — для анализа работы системы и выявления функциональной связи

$$\Delta n = f(K_u, K_i),$$

где Δn — перепад частоты вращения двигателя при изменении момента нагрузки в заданных пределах; K_i, K_u — коэффициенты обратной связи по току и напряжению. Анализ конструкции асинхронного двигателя следует провести при заданных диапазонах изменения факторов: $x_1 = K_u = 1,5 \div 2,1$; $x_2 = K_i = 2,4 \div 3,6$.

Целесообразность планирования эксперимента в данной задаче обусловлена следующим. Необходимо получить удобную и компактную зависимость между Δn и K_u, K_i в виде полинома

$$\Delta n = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + \dots \quad (3.51)$$

Следует уменьшить влияние нестабильности аналоговой модели на результаты экспериментальных исследований. Сокращение

* Копылов И. П. Применение вычислительных машин в инженерно-экономических расчетах. — М.: Высшая школа, 1980.

числа экспериментальных (расчетных) точек в рассматриваемой задаче является не главным. На первом этапе изучения аналоговой модели необходимо использовать ПФЭ и ДФЭ первого порядка, и если модель неадекватная, то использовать планы второго порядка.

Планирование второго порядка существенно отличается от планирования первого порядка, так как в нем нет экспериментальных планов, сочетающих в себе простые расчетные формулы и полиномы высокой точности.

Преимущества ортогонального плана состоят в относительной простоте расчетных формул и меньшем числе опытов по сравнению с ротатбельным.

В рассматриваемом примере для получения зависимости $\Delta n = f(K_u, K_i)$ использован ортогональный план второго порядка (планирование первого порядка дает неадекватный полином). Матрица планирования типа ортогонального центрального композиционного планирования, приведенная в табл. 3.24, представлена полиномом вида (3.51)

$$\Delta n = 67,3 - 5,34x_1 - 6,33x_2 - 0,5x_1x_2 - 3,5x_1^2 - 12x_2^2. \quad (3.52)$$

Для заданного диапазона изменения K_u и K_i применение планирования даже второго порядка дает полином, обладающий невысокой точностью. Это можно проследить по результатам крайнего правого столбца, в котором приведены значения Δn , вычисленные по полиному. Расхождения в некоторых точках, особенно для опытов 7 и 8, столь велики, что не удовлетворяют заданной точности.

Неодинаковая точность предсказания в разных направлениях факторного пространства, т. е. при различных сочетаниях K_u и K_i , — один из существенных недостатков ортогонального планирования второго порядка. Использовать такой полином для дальнейшего анализа и синтеза конструкции электрической машины нельзя, так как поиск оптимальных геометрических параметров машины происходит для различных сочетаний K_u и K_i , а погрешность полинома может дать ложный экстремум.

При исследовании аналоговых и физических моделей, когда вопрос точности полинома при заданных интервалах варьирования факторов является первостепенно важным, следует использовать ротатбельное планирование ($\widehat{\Delta n}$, табл. 3.24).

Основной особенностью планирования эксперимента для рассматриваемого класса задач является то, что объект исследования имеет строгое математическое описание, которое из-за громоздкости в явном виде неудобно. Это уравнение можно решить на ЦВМ или другими средствами. Оно однозначно определяет связь между переменными параметрами и целевыми функциями, т. е. объект исследования стабилен. Для данного класса задач заменим термин планирование эксперимента термином планирование расчета. Для этого класса задач характерно использование матриц планирования для проведения планируемого расчета, в результате чего сложное математическое описание заменяется простой полиномиальной моделью.

Т а б л и ц а 3.24

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\tilde{x}_1 = x_1^2 - 0,666$	$\tilde{x}_2 = x_2^2 - 0,666$	Δn	$\Delta \hat{n}$	Прог- ноз
1	+1	-1	-1	+1	0,333	0,333	79	76,3	76,2
2	+1	+1	-1	-1	0,333	0,333	93	93,5	91,1
3	+1	-1	+1	-1	0,333	0,333	58	64,6	58,1
4	+1	+1	+1	+1	0,333	0,333	70	71,3	74,3
5	+1	-1	0	0	0,333	-0,666	62	58,5	64,5
6	+1	+1	0	0	0,333	-0,666	68	69,1	70,1
7	+1	0	-1	0	-0,666	0,333	100	85,6	98,2
8	+1	0	+1	0	-0,666	0,333	60	73,2	57,3
9	-1	0	0	0	-0,666	-0,666	66	67,3	69,1

Время разбега $t_{\text{разб}}$ асинхронного двигателя при снижении или повышении момента инерции X_3 , сопротивления ротора X_1 , сопротивления статора X_2 определяется ПФЭ 2³. Предположим, что изменение происходит в пределах $\pm 20\%$ (табл. 3.25), и составим табл. 3.26.

Т а б л и ц а 3.25

Уровень	Переменные параметры		
	X_1 , Ом	X_2 , Ом	$X_3 \times 10^{-3}$, кг·м ²
Базовый	3,80	3,57	1,52
Верхний } +	4,52	4,28	1,82
Нижний } -	3,08	2,86	1,22

Здесь под экспериментом подразумевается расчет на ЦВМ системы дифференциальных уравнений при фиксированных в соответствии с матрицей планирования значениях параметров.

Определим коэффициенты полинома по соответствующим расчетным формулам. Так как повторные расчеты показателей машины при тех же значениях параметров дают одинаковые результаты, то дисперсия эксперимента $\sigma^2\{t_{\text{разб}}\} = 0$ и, следовательно, все коэффициенты полинома значимы. Проверку адекватности модели по критерию Фишера в вершинах факторного пространства провести нельзя.

Адекватность полинома для $t_{\text{разб}}$ при решении аппроксимационных задач проверяется для других точек факторного пространства. Как показывает опыт, при постановке экспериментов в вершинах факторного пространства (рис. 3.18) наибольшее расхождение между $t_{\text{разб}}$ и $\hat{t}_{\text{разб}}$ имеется в точках 1, 2, 3, 4 и в центральной точке 0. Поэтому проверку адекватности модели следует проводить в этих точках, исполь-

зую критерий Кохрена об однородности оценок дисперсий неадекватности

$$\sigma_{\max} = \max [s_q^2] / \sum_{q=1}^k s_q^2,$$

где $s_q^2 \{t_{\text{разб}}\} = (t_{\text{разб } q} - \widehat{t_{\text{разб } q}})^2$ — дисперсия неадекватности для контрольной точки q ; k — число контрольных точек.

Если вычисленное значение $\sigma_{\max}$ меньше $\sigma_{\text{кр}}$, определенного по таблице для соответствующих степеней свободы $\nu_{1\text{в}} = 1$ и $\nu_{2\text{в}} = k$ и для выбранного уровня значимости q (обычно 5%), то принимаем гипотезу об однородности дисперсии. Оценка генеральной дисперсии неадекватности

$$s \{t_{\text{разб}}\} = \sum_{q=1}^k s_q^2 / k.$$

Если величина $s \{t_{\text{разб}}\}$ удовлетворяет предъявляемой к аппроксимации точности, то полином адекватен; если не удовлетворяет — необходимо переходить к планам высоких порядков или уменьшать интервал варьируемых факторов. Так как число контрольных опытов при проведении планируемых расчетов ограничено нежестко, рекомендуется с помощью таблицы случайных чисел взять еще дополнительные точки внутри факторного пространства.

Применяя метод планирования эксперимента для решения задач аппроксимации, необходимо иметь в виду, что любая аппроксимация вместе с простотой функциональных связей вносит в результаты расчета и дополнительные погрешности. Оценка целесообразности использования метода планирования проводится для конкретного случая.

Таблица 3.26

Номер опыта	Условные обозначения						
	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$t_{\text{разб}} \times 10^{-1}, \text{с}$
1	—	—	—	+	+	+	10
2	+	—	—	—	—	+	5
3	—	+	—	—	+	—	4,5
4	+	+	—	+	—	—	3,5
5	—	—	+	+	—	—	11
6	+	—	+	—	+	—	7
7	—	+	+	—	—	+	6,5
8	+	+	+	+	+	+	5

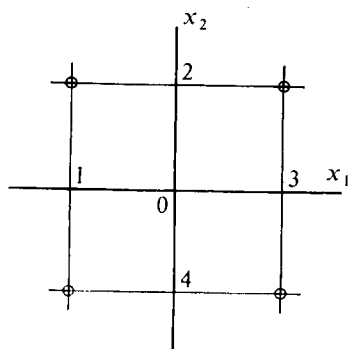


Рис. 3.18

§ 4.1. ПОСТРОЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОДЕЛЕЙ

При построении моделей и выявлении их места в научном исследовании необходимо прежде всего установить цель исследования, сформулировать допущения и выделить из бесконечного множества подсистем и процессов, составляющих систему и происходящие в ней явления, те, которые подлежат изучению. При этом любое явление или система рассматриваются как состоящие из ряда более простых элементов; учитывается, что в каждом явлении содержится, вообще говоря, бесконечное количество различных процессов. При создании моделей нельзя охватить все это многообразие процессов, составляющих явление: необходимо выделить из него те процессы, которые интересуют инженера в данной постановке задачи *.

Так, изучая явление передачи энергии по проводам воздушной ЛЭП, инженер не рассматривает одновременно огромное количество процессов, связанных с этим явлением и происходящих на построенной для его реализации ЛЭП (рис. 4.1, а). В зависимости от того, какие задачи ставятся при исследовании, инженер выделяет для изучения процессы, соответствующие поставленным задачам. Могут изучаться, например, распространение электромагнитных волн 7, обеспечивающих передачу мощности от начала линии к ее концу, или распределение напряжений 3, 11, или процессы в диэлектриках 2. Могут быть выделены термические процессы 4 или механические процессы 1, связанные с работой опор и проводов электропередачи. Возможно также и выделение процессов, которые определяют электромагнитные излучения 5, 6, создаваемые линией, и соответственно влияние электропередачи на живые организмы 12, находящиеся в сфере действия излучений, или на технические установки 8—10 (устройства связи, радиоприемники, телевизоры и т. п.). В зависимости от постановки задачи, таким образом, одно и то же явление (в данном примере передача мощности по проводам) необходимо рассматривать с разных позиций, выделяя при

* Блехман И. И., Мышкес А. Н., Пановко Я. Г. Прикладная математика (предмет, логика, особенности). — Киев. Наукова думка, 1977, 127 с; Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики/ Веников В. А., Зуев Э. Н., Литкенс И. В. и др.; Под ред. В. А. Веникова. — М.: Высшая школа, 1981, 288 с.

этом только процессы или группы процессов, обладающие свойствами, существенно важными для конкретной технической задачи. На рис. 4.1, б показано, как из явления *I* отбираются для рассмотрения составляющие его процессы 2. При отборе делаются допущения и принимаются некоторые стилизации действительного описания. Символически эти допущения показаны штриховой линией *I*.

Для перехода далее к количественным исследованиям необходимо составить общую описательную модель явления 3. При этом в нее войдут только определенным образом отобранные, существенные для данного исследования процессы.

Общая описательная модель явления 3 может быть составлена как описание чисто словесное (вербальное), может содержать классификацию 3' или систематизацию 3'', связывающую предметы отдельных областей, либо статистические оценки 3'''.

От общей описательной модели 3 осуществляется переход к математическому описанию 4, для чего после допущений, символически показанных на рис. 4.1, б штрихпунктирной линией *II*, записывается система алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений, т. е. соотношения, отражающие связи между отдельными переменными, участвующими в общей описательной модели.

Затем составляется математическая модель 5 интересующего явления, которая отражает это явление в удобной для математического изучения форме, но при еще большей стилизации: кроме допущений *I* и *II* вводятся новые допущения *III* (штриховая линия). Они обусловлены тем, что математическую модель должны составить не все соотношения математического описания, а только те их модификации (уравнения, схемы замещения и т. д.), которые пригодны для количественного исследования. При этом придется примириться с потерей каких-либо деталей.

Количественное решение, проводимое или как непосредственное решение (в квадратурах 6), или как численное решение на ЦВМ7, или как исследование на какой-либо модели 8, в свою очередь, обязательно сопровождается рядом дополнительных допущений *IV* (штриховая линия). Эти допущения прежде всего обусловлены необходимостью упрощения математической модели, с тем чтобы на ее основе получить, например, аналитические зависимости 6 или ввести конечные интервалы для рассмотрения непрерывного процесса при численном решении 7. В целом, как это видно из рис. 4.1, б, исследование явления с помощью прикладных математических методов включает в себя последовательность переходов от одного описания и одной модели к другому описанию и другой модели, причем при каждом переходе принимаются различные допущения и упрощения, связанные с созданием соответствующего математического описания, выбором вычислительного метода и т. д.

Возможны и другие пути решения поставленной задачи. Так, на основе общей описательной модели явления 3, не составляя математическую модель 5, на базе анализа размерностей 9 физических величин, участвующих в процессе, можно непосредственно исследовать интересные явления на физической 11 или натурной 12 моделях, под кото-

рыми понимаются некоторые промежуточные объекты изучения действительности. Эти модели после проведения соответствующих экспериментов дадут окончательное решение, так же как и после исследования математической модели 5, но без математического решения.

На основе общей описательной модели 3 можно провести исследование путем постановки активных планированных экспериментов, которые дадут окончательное решение. Разумеется, что создание физической модели на базе математической модели 5 или анализа размерностей 9 будет проходить при допущениях IV, а следовательно, результаты, получаемые исследованием с помощью планированного эксперимента 10, также будут с некоторыми допущениями IV.

Таким образом, каким бы путем ни было получено решение 13, оно нуждается в апробации 14, без которой ценность его ничтожна. Апробация заключается в лучшем случае в сопоставлении результатов решения с действительным явлением, как это и показано на рис. 4.1, б (жирная линия), или в худшем случае в сопоставлении между собой решений 13, полученных различными способами. При этом в окончательном решении неизбежно содержится ряд тех или иных упрощающих допущений I—IV и поэтому явление, подлежащее изучению, отражено в решении 13 с какой-то определенной степенью достоверности.

Если степень достоверности в целом удовлетворительна, т. е. отвечает сущности поставленной практической задачи, то исследование проведено с необходимой технической строгостью. Если во всем для данной задачи существенном диапазоне у процессов, выделенных для исследования, получаемые на модели количественные данные практически удовлетворительно совпадают с результатами измерений действительных процессов, то решение выполнено с практически удовлетворительной технической точностью. Такие понятия технической строгости и технической точности при прикладном математическом исследовании отличаются от понятий строгости и точности в теоретической математике.

Разумеется, что все характеристики изучаемого явления как при составлении математического описания и математической модели, так и при апробации полученных решений связаны с измерениями и вычислениями. Поскольку исследуемые процессы — это реально существующие процессы материального мира, так же как и взаимодействия и связи между ними, то конечная цель измерений и вычислений — получение информации об этих процессах и о явлении в целом.

Точность измерений данной величины и обоснование выбора измеряемых величин необходимо устанавливать с учетом целей измерения. Эти цели зависят от вида задачи, т. е. от того, решаются чисто познавательные задачи, в которых всесторонне изучаются явления, или прикладные задачи, в которых выявляются определенные свойства тех или иных процессов, используемые для конкретных практических целей.

Точность измерений и вычислений определяет точность проводимых исследований. С наибольшей точностью должны быть исследованы существенные факторы. Слишком точные измерения и вычисления несущественных факторов не только бесплодны и излишне усложняют результат, но и могут привести к тому, что действительно существен-

ные в данном явлении закономерности выпадут из рассмотрения. Известно, что многие крупнейшие инженеры-математики рассматривали излишнюю точность получения результатов как грубейшую ошибку. Проблемы точности возникают с особой остротой в связи с существованием факторов, влияющих на результат измерения, но не охватываемых моделью исследуемого явления.

Распространенной ошибкой является недостаточное внимание к качеству исходных данных. Самый точный вычислительный метод может быть в значительной мере обесценен, если воспользоваться не вполне верными исходными данными или данными, имеющими низкую точность. При этом может создаться неправильное представление об обоснованности вывода. Поэтому важно, чтобы выбираемый метод решения задачи был рассчитан на использование таких данных, которые можно реально получить с требуемой достоверностью. Некоторые более точные методы, учитывающие большое количество факторов и более тонко отражающие физические зависимости, могут быть более чувствительны к погрешностям исходных данных, чем методы грубые. Следовательно, если получить точные данные невозможно, целесообразно видоизменить метод получения количественных результатов, быть может «заглубить» его и упростить, с тем чтобы труд, связанный с применением метода высокой точности, не оказался неоправданным.

Построение модели, как всякая неформальная процедура, не может выполняться чисто дедуктивно, а всегда опирается на индукцию, используя полученные с тем или иным приближением экспериментальные данные. Это приводит к тому, что модель адекватна реальному явлению лишь в некоторой степени, но эта степень должна удовлетворять технической постановке задачи. Степень адекватности обычно заранее неизвестна и выясняется только после многократных проверок.

Любой результат прикладного математического исследования должен восприниматься критически. Такие исследования всегда основываются на тех или иных гипотезах либо допущениях, которые могут сказаться и неверными. Даже если каждое допущение в отдельности представляется приемлемым, то их сочетание из-за неблагоприятного стечения обстоятельств может привести к ошибке, а следовательно, модель может оказаться неадекватной. Чаще всего после получения математического описания и математической модели исследователь имеет только некоторую ожидаемую степень адекватности, называемую *внешним правдоподобием*. Это правдоподобие характеризует соответствие математической модели изучаемому реальному объекту (рис. 4.1, б, в). Внешнее правдоподобие, как правило, тем ближе к истинной степени адекватности, чем выше опыт работы и интуиция исследователя в изучаемой области (рис. 4.1, в).

Аналогично можно ввести понятие *внутреннего правдоподобия*, характеризующего ожидаемую степень адекватности после всех процедур решения, осуществляющих переход от математической модели, формализовавшей задачу, к окончательному ответу. Следовательно, внутреннее правдоподобие — это ожидаемое соответствие реально полученного решения уравнений формализованной математической модели идеальному математическому решению; оно выявляется при сопоставле-

нии полученного решения с идеальным (рис. 4.1. в). Внутреннее правдоподобие зависит от метода исследования. Если бы исследование проводилось на дедуктивном уровне исходя только из определенных теоретических и чисто математических положений, то внутреннее правдоподобие было бы максимальным — максимально возможным. В прикладном же практическом исследовании, когда применяются упрощения при описании системы и уравнения системы преобразуются без полного дедуктивного обоснования, внутреннее правдоподобие соответственно снижается.

Среди многих вопросов, касающихся соотношения между внешним и внутренним правдоподобием, одним из центральных является вопрос о разумных требованиях к внутреннему правдоподобию при некотором принятом уровне внешнего правдоподобия, т. е. при фиксированном выборе математической модели.

Внутреннее правдоподобие может уменьшаться в связи с появлением разнообразных ошибок чисто математического характера. Прикладное математическое исследование не может и не должно находиться на уровне чистой математики, однако это не значит, что исследователь может допускать математические ошибки, приводящие к заведомо неверным результатам. Важно предотвратить математические ошибки, которые могут возникать из-за недостаточной разработанности прикладных методов той или иной области математики к конкретным задачам. Условия применения возможных упрощений при этом оказываются недостаточно ясными. В результате исследователь может прийти к неправильному решению, полагая, что он упрощает или даже уточняет его.

С инженерной точки зрения бессмысленно проводить слишком точные решения уравнений (добиваясь внутреннего правдоподобия), при составлении которых была значительно огрублена реальная картина (невелико внешнее правдоподобие). Увеличение внешнего правдоподобия и чрезмерное усложнение (но не углубление) математического описания и математической модели может привести к повышению погрешностей в процессе решения, т. е. к понижению внутреннего правдоподобия.

Исследователь, излишне верящий в неограниченные возможности математики (в частности, ЦВМ), безудержно стремится к повышению внешнего правдоподобия, стараясь учитывать всевозможные, даже второстепенные, связи и ничтожно влияющие параметры. Это приводит его ко все более сложным системам уравнений, при решении которых неизбежно приходится проводить огрубления, существенно понижающие уровень внутреннего правдоподобия. При этом снижается общий уровень адекватности результатов. Однако исследователь, стремящийся лишь к математическому совершенству исследования, при создании математической модели может значительно отклониться от реальной картины, если это даст ему возможность получить изящное и строгое (в смысле чистой математики) решение. Оба эти подхода могут (каждый по-своему) создавать иллюзию точности и строгости решения. Но наилучшим в рассматриваемом отношении и не создающим неоправданных иллюзий является путь построения модели, удовлетворитель-

ной по внешнему правдоподобию, и в то же время настолько простой, что при решении обеспечивается достаточно высокий уровень внутреннего правдоподобия.

Оптимальна такая ситуация, при которой значения внешнего и внутреннего правдоподобия одного порядка. Однако этого не всегда можно достичь и часто приходится выбирать между громоздкой математической моделью, обладающей высоким внешним правдоподобием, но грубым решением, и более простой моделью, у которой внешнее правдоподобие ниже, но решение можно получить с высокой точностью. Ожидаемый итоговый уровень адекватности решения во всех случаях будет примерно одинаковым.

§ 4.2. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ В ПОЗНАНИИ

Общая задача теории подобия и моделирования — выработка методологии, направленной на упорядочение получения и обработки информации об объектах, существующих вне нашего сознания и взаимодействующих между собой и внешней средой. Развитие любой науки, тем более физических наук, являющихся основой для технических дисциплин, всегда начинается с того или иного экспериментального исследования. Далее на основе обобщения опытных данных развивается теория. От наблюдения и эксперимента к теоретическому мышлению, а затем к специально организованным производственным процессам — таков путь научно-технического развития. «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»*.

Указанное положение не противоречит тому, что в развитии науки большое значение придается научным гипотезам, т. е. определенным предсказаниям, основывающимся сначала на небольшом количестве опытных данных, некоторых тонких наблюдениях и догадках. Иногда гипотезы опережают возможности экспериментальных исследований, как это было, например, с гипотезой об атомах, которая в древней философии носила скорее поэтический характер и была проверена только спустя много веков после ее зарождения.

Быстрая и полная проверка выдвигаемых гипотез, их отсев или утверждение и перевод в теорию могут быть сделаны только после закономерного обобщенного и обычно специально поставленного эксперимента. Характеризуя этот процесс уточнения, «очищения» гипотез, Ф. Энгельс писал: «Формой развития естествознания, поскольку оно мыслит, является гипотеза. Наблюдение открывает какой-нибудь новый факт, делающий невозможным прежний способ объяснения фактов, относящихся к той же самой группе. С этого момента возникает потребность в новых способах объяснения, опирающаяся сперва только на ограниченное количество фактов и наблюдений. Дальнейший опытный материал приводит к очищению этих гипотез, устраняет одни из них, исправляет другие, пока, наконец, не будет установлен в чистом виде закон. Если бы мы захотели ждать, пока материал будет готов в чистом

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152—153.

виде для закона, то это значило бы приостановить до тех пор мыслящее исследование, и уже по одному этому мы никогда не получили бы закона»*.

Можно быстро получить обобщенный опытный материал, если правильно поставить опыты и обработать их результаты, что опять-таки обеспечивается с помощью теории подобия и моделирования. При определении, формулировании и проверке правильности гипотез большое значение в качестве метода суждения имеет аналогия.

Аналогией вообще в логическом смысле называется суждение о каком-либо частичном сходстве двух объектов, позволяющее на основании сходства рассматриваемых объектов в каком-либо отношении сделать вывод об их сходстве в других отношениях. В практике научных и тем более научно-технических исследований следует рассматривать аналогию в качестве разновидности подобия, а реализацию аналогии — в качестве метода моделирования.

Теоретическое научно-познавательное значение аналогии заключается в ее связи с какой-либо гипотезой, выдвигаемой для объяснения изучаемых явлений. Основой этой связи всегда служит практика, опыт, так как гипотетические суждения нельзя продуктивно получить только на основе абстрактных философских принципов. Современная научная гипотеза создается, как правило, именно по аналогии с проверенными на практике научными положениями. Аналогия, таким образом, связывает гипотезу с экспериментальными данными и фактами, придающими ей жизненность. Физические гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны или иметь непосредственную наглядность, или сводиться к некоторым удобным для исследования структурам и схемам. Эти структуры и схемы, облегчающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, которые уточняют природу явлений, называются *моделями*. Под *экспериментом* в широком смысле понимается специально организованная процедура постановки и обработки наблюдений, проводимых в лаборатории, в условиях природы или производства. Различают п а с с и в н ы й эксперимент, сводящийся только к наблюдению за протеканием явления, и а к т и в н ы й, допускающий некоторое вмешательство в ход процессов и соответственно организующий наблюдения. Разновидностью эксперимента являются мысленно воспроизводимые опыты, называемые *мысленным экспериментом*. Под моделью при мысленном эксперименте понимают некоторые логические построения, наборы формул, алгоритмы для расчетов на ЦВМ и просто рассуждения, оперирующие предполагаемыми, даже и не обязательно осуществимыми зависимостями и соотношениями. Мысленный эксперимент, являющийся технически неосуществленной или даже вообще неосуществимой процедурой, — логическая аналогия реального опыта. Примером могут служить мысленные эксперименты В. Гайзенберга, обосновывающие невозможность одновременного точного определения координат микрочастицы, и т. д. Такие эксперименты, представляя собой только логические операции, не могут быть

* Энгельс Ф. Диалектика природы. Госполитиздат, 1969, с. 207.

тем «критерием истины», каким является специально поставленный физический эксперимент или обработанные результаты натурных наблюдений. Поэтому развитие мысленного эксперимента, связанное с глубоким проникновением в физику явлений, в той или иной мере основывается на ранее осуществленных физических опытах. Однако научные теории и методы становятся все менее наглядными в непосредственном, чувственном понимании наглядности. Мысленный эксперимент и мысленные модели используют абстрактные понятия математики, такие, как многомерные пространства, построенные по аналогии с материальным трехмерным пространством, и т. д. В этих условиях появились соображения о том, что время, когда познание мира и исследование происходящих в нем явлений нуждались в проведении реального эксперимента, моделировании, обработке данных на основе теории подобия с учетом математики для описания объективно существующей действительности, теперь прошло. Это было якобы время «детского возраста» науки. Физические и даже технические исследования в их принципиальных построениях, по мнению этих теоретиков, теперь могут быть сведены только к математическим исследованиям, которые, являясь свободным продуктом человеческого разума, не нуждаются ни в модельных, ни в натурных экспериментах, ни в каких-либо аналогиях.

Крупнейший английский физик Дирак утверждал, что достоинства той или иной математической теории определяются в первую очередь ее «изяществом» и «красотой». Физика при таком подходе представляется как свод некоторых отвлеченных представлений, которые, так же как, например, игра в шахматы, должны удовлетворять определенным правилам. Упрощенно связывая понятия моделей и моделирования только с наглядностью и отмечая ненаглядность современных физических теорий, иногда считают закономерным отказ от моделей, не понимая того, что понятия моделей и наглядности изменяются и развиваются. Так, например, общеизвестно, что если в XIX в. наглядность связывалась только с механическими представлениями, то теперь часто механические явления объясняются посредством электрических и т. д.

Немецкий физик Вейцеккер и некоторые другие неоднократно высказывали мысль, что мир можно познать исключительно аналитически, не прибегая к опытам, на основе некоторой системы аксиом. Английский физик А. Эддингтон утверждал, что, хотя выводы физики и астрономии действительно вытекают из обобщения опытно полученных данных, подлинная наука начинается тогда когда разум предписывает законы природе, а не заимствует их у нее. Он считал, что фундаментальные законы и константы физики могут быть установлены из чисто теоретико-познавательных соображений, совершенно независимо от опыта, и что человек только «отвоевал у природы то, что он в нее вложил». Весьма похожие соображения высказывались астрономом Э. Милном, также считавшим законы природы субъективными построениями. Известный ученый Карнап утверждал, что в логическом анализе должна рассматриваться система научных понятий, сводящихся к системе протокольных предложений, которые должны не основаны на свойствах природы, не нуждаются в каком-либо опытным обосновании и не должны соответствовать реальному миру. Они должны сравниваться только с другими предположениями такого же рода, а не «с опытом», «миром» или чем-либо подобным. Таким образом, формализация и математизация физики — явление само по себе прогрессивное и положительное — может приводить к идеалистическому преувеличению значения отвлеченных логических построений и гиперболизации роли математики. Соображения о ненужности моделирования и вообще снижении роли эксперимента в технических исследованиях высказывают и некоторые инженеры, противопоставляющие роль вычислительной техники и формализованного анализа эксперименту.

В действительности же эксперимент для инженера или физика не только облегчает подход к изучению той или иной проблемы, но и является средством прямого решения технических задач. Его роль значительнее, так как он часто еще и помогает найти наилучший подход к аналитическому решению. Недооценка роли экспериментальных данных в синтезе знаний приводит к частым ошибкам в оценке новых фактических данных и к задержке внедрения новых разработок. Именно эксперименты подсказывают ход аналитических решений в развитии теории и путей внедрения новых разработок. Все математические понятия, даже, казалось бы, совершенно абстрактные, в конечном счете отражают количественные и пространственно-временные соотношения реального мира. Как бы ни были интересны и «красивы» отвлеченные математические построения, для фактического решения практических вопросов всегда требуется эксперимент, хотя иногда необходимость в нем не проявляется явно.

Итак, физическое экспериментирование, практическое воспроизведение исследуемых явлений на моделях представляет собой реальную основу научного и тем более инженерно-научного творчества. В общих чертах соотношение между экспериментом и теорией, рассмотренное применительно к физике и технике, присуще любому научному исследованию.

В некоторых случаях при соблюдении специальных условий, обеспечивающих «чистый» ход процесса, эксперимент может быть также непосредственным критерием истинности для теоретического познания. Сила эксперимента — в реальной действительности, в объективном значении его конечных результатов. *«Практика выше (теоретического) познания, — подчеркивал В. И. Ленин, — ибо она имеет не только достоинство всеобщности, но и непосредственной действительности»* *. Но надо подчеркнуть, что эксперимент может иметь существенное значение в той или иной области науки только при специальной его обработке и обобщении. Единичный эксперимент никогда не может быть решающим для подтверждения гипотезы, проверки теории. Поэтому нельзя согласиться и с переоценкой роли физического эксперимента для естествознания, которую допускает так называемая неопозитивистская философия, по существу отрицающая теорию и сводящая всю науку к некоторому набору экспериментальных фактов. Борьба за правильную оценку эксперимента составляет часть той борьбы, которая ведется в физике и теории познания между материализмом и идеализмом во всех его разновидностях. Эта идеологическая борьба получает определенные отголоски и в постановке научно-технических исследований, влияя на практические выводы. Поэтому и инженер-исследователь, и инженер-практик должны быть знакомы с элементами современной методологии теории познания и, в частности, не должны забывать основного положения материалистической философии: *именно экспериментальное исследование, опыт, практика являются критериями истины*. Следовательно, вопросам правильной постановки опытов

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 195.

и их обработке необходимо уделять достаточно много внимания в образовании инженера, который должен владеть современной методологией технических наук.

§ 4.3. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

XX век характеризуется быстрым развитием всех отраслей науки и тем несомненным фактом, что наука становится непосредственной производительной силой. Вместе с тем бурное развитие науки приводит к непомерному росту той информации, которую нужно воспринять специалисту при изучении предметов, не только непосредственно относящихся к области его специализации, но и находящихся в смежных областях науки. Огромный рост количества информации был бы катастрофическим для дальнейшего развития человеческого познания, если бы вместе с расширением и углублением наук все яснее и яснее не проявлялись бы тенденции к их синтезу и не создавались бы новые возможности автоматизации хранения и передачи информации. В настоящее время выявились новые пути выполнения вспомогательных операций, автоматизирующих многие процессы умственного труда. Таким образом, оказывается возможным автоматизировать и этот вид человеческой деятельности, сосредоточивая внимание на наиболее творческой и существенной ее части.

Синтез знаний и автоматизация элементов умственной деятельности связаны с быстрым развитием обобщающих наук и появлением новых научных дисциплин: кибернетики, теории графов и др. В глубоком синтезе наук большую роль играют математика и примыкающие к ней полностью или частично математизированные науки и отдельные дисциплины. Большая роль аналитических методов в общей системе научных исследований все более подтверждается теми открытиями, которые, как говорят, делаются «на кончике пера», т. е. как будто бы чисто умозрительно. Однако было бы совершенно неправильно забывать то обстоятельство, что самая абстрактная теория обобщает практический опыт, что в любой, даже отвлеченной, теории критерием истины является, опыт, практика, в том или ином виде специально поставленный эксперимент. Даже те науки, которые называют «отвлеченными», «чистыми», в конечном счете возникли и выросли на базе эксперимента, обеспечивающего их фактическим материалом — явно или неявно — на той или иной стадии их формирования. Быстрое, плодотворное, действительно целенаправленное развитие новых наук, новых научных дисциплин или их разделов и в дальнейшем возможно только в том случае, если «рука об руку» с анализом будут применяться и совершенствоваться экспериментальные методы.

Чем быстрее развивается теория и накапливается научная информация, тем быстрее должны развиваться экспериментальные методы и тем более тонкими, изящными и обобщающими они должны быть. Как и прежде, эксперимент остается и всегда останется существеннейшим инструментом познания. Вот почему теория подобия, теория (и практика) моделирования в их новом, широком смысле, позволяющие

концентрировать информацию и являющиеся обоснованием эксперимента, дающие направления для постановки опытов и указывающие закономерности их обобщения, получили именно сейчас особое значение. *Подобие и моделирование облегчают единое описание процессов в различных сферах исследования.*

Закономерное обобщение результатов единичного явления на широкие группы подобных явлений, которое позволяет сделать теория подобия, необходимо в естественных и особенно технических науках. Подобие начинает рассматриваться все в более и более широком плане, когда множество объектов объединяются в группы по довольно сложным признакам, а не только по условиям пропорциональности сходственных величин, как это постулировалось при простейшем подходе. Моделирование в различных его видах (в том числе и новых — аналоговых, кибернетических и др.) становится основой для исследований и разнообразных экспериментов, не только физических, но также математических и мысленных. Теории подобия и моделирования, таким образом, все в большей степени становятся мощным инструментом исследований во всех областях знаний от уровня микромира до космических уровней. Области, которые охватывает теория подобия, меняются. Меняется и само понятие моделирования. Эта «нестационарность» понятия вполне закономерна, ибо действительно жизненными являются только те отрасли науки, центр интереса которых перемещается и изменяется с течением времени. Таковы быстро развивающиеся методы подобия и моделирования, планирования эксперимента.

В учебной и научной практике моделирование применяется в основном для решения двух групп задач: **о б у ч е н и я и и с с л е д о в а н и я**.

В задачи обучения входят вопросы применения моделей и моделирования для уяснения физических законов, иллюстраций принципов действия новых установок, тренировки персонала действующих производственных объектов.

Исследовательские задачи можно разделить на четыре подгруппы:

— прямые задачи анализа, при решении которых исследуемая система задается параметрами элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями; требуется определить реакцию системы на действующие силы;

— обратные задачи анализа, при решении которых по известной реакции системы требуется найти силы (возмущения), заставившие рассматриваемую систему прийти к данному состоянию и вызвавшие данную реакцию;

— задачи синтеза, иногда называемые инверсными задачами, требующие нахождения таких параметров, при которых процессы в системе будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер;

— индуктивные задачи, решение которых предполагает проверку гипотез, уточнение уравнений, описывающих процессы в системе, выяснение свойств элементов, проверку или, как говорят, апробацию программ (алгоритмов) для расчетов на ЦВМ.

Определяя гносеологическую роль подобия и моделирования, т. е. их значение в процессе познания, необходимо прежде всего отвлечься

от имеющегося в науке и технике многообразия моделей. Нужно выделить то общее, что присуще всем моделям. Это общее заключается в наличии некоторой структуры (статической или динамической, материальной или мысленной), которая действительно подобна, или рассматривается в качестве подобной, структуре другой системы. Модель, таким образом, — это естественный или искусственный объект, находящийся в соответствии с изучаемым объектом или, точнее, с какой-либо из его сторон. В процессе изучения модель служит относительным «квазиобъектом», позволяющим получить при исследовании некоторые знания о нем самом.

В общетеоретическом смысле *моделирование означает осуществление* каким-либо способом *отображения или воспроизведения действительности для изучения имеющихся в ней объективных закономерностей*. Обобщенно моделирование определяется как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект (оригинал) находится в некотором соответствии с другим объектом (моделью), причем объект-модель способен в том или ином отношении замещать оригинал на некоторых стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых может происходить такая замена, равно как и формы соответствия модели и оригинала, могут быть различны. Исходя из понятия отображения, принятого в теории познания, можно определить два характерных вида моделирования:

— моделирование как познавательный процесс, держащий переработку информации, поступающей из внешнего мира, о происходящих в нем явлениях. В результате этой информации в сознании появляются образы, имеющие определенное сходство с соответствующими объектами. Сумма этих образов позволяет выявлять свойства изучаемых объектов и их взаимодействие. Математическая запись, составленная на основании суммы образов и содержащая описание динамики физических или других (например, экономических) закономерностей, и есть модель;

— моделирование как создание некоторой системы — системы-модели (второй системы), имеющей определенное сходство с системой-оригиналом (первой системой). Две эти материально реализованные системы, из которых одна рассматривается как отображение другой, связаны соотношениями подобия. Отображение одной системы в другой — следствие выявления сложных зависимостей между двумя системами, отраженных в соотношениях подобия, а не результат непосредственного изучения поступающей информации.

При первом виде моделирования имеет мысленный характер, при втором — материальный, поскольку его реализация требует создания специальных установок, воспроизводящих исследуемую систему.

Понятие моделирования тесно связано с понятием информации, характеризующей воздействия (которые получают система и ее отдельные элементы), а также происходящие в результате этих воздействий изменения состояния системы, определяемые, вообще говоря, всегда во времени и в пространстве, но иногда рассматриваемые или только во времени, или только в пространстве. *Информация* — это содержание воз-

действия, его величина, изменение в пространстве и во времени, взятые в отрыве от первичного носителя воздействия и от его энергетических свойств. Овладение информацией невозможно без применения моделирования в том или ином виде. Это объясняется следующим образом. Чтобы выявить физическое воздействие, его нужно в течение некоторого промежутка времени запомнить, т. е. отразить в структуре воспринимающей системы. Модели в этом смысле можно дать приведенное выше общее определение как структуры, в которой *отражено изменение физического воздействия и во времени, и в пространстве* (полная модель) или *только во времени либо только в пространстве* (неполные модели).

Обширная информация о происходящих явлениях при изучении методами моделирования должна быть упорядочена. Это осуществляется с помощью теории подобия, которая, позволяя по данным характеристикам одного явления судить о больших группах явлений, в том или ином смысле подобных первому, применяется:

- при аналитическом отыскании зависимостей, соотношений и решений конкретных задач;
- при обработке результатов экспериментальных исследований и испытаний различных технических устройств;
- при создании моделей, т. е. установок, воспроизводящих явления в других установках (оригиналах), обычно более сложных и более дорогих, чем модели.

Особая роль принадлежит моделям, предназначенным для изучения сложных больших систем, эксперименты в которых затруднительны или даже невозможны, если они могут нанести какой-либо вред изучаемой системе. При моделировании сложных систем исключительно важно учитывать положение о том, что подобие отдельных подсистем обеспечивает (при соблюдении определенных условий) подобие всей сложной системы. Это означает, что опытное изучение сложной системы можно начинать раньше, чем установлено ее математическое описание как сложной системы, т. е. при описании только элементов.

Особая роль методов подобия и моделирования в изучении сложных систем обусловлена еще и тем, что эти методы по своей природе, свойствам направлены именно на выделение из сложной системы того, что является самым важным при изучении (в данной конкретной постановке задачи) ее свойств. Любая система и даже, более того, любое явление связано с многообразием различных процессов, любая естественная система всегда нелинейна. Попытки ее познания для активного вмешательства в происходящие процессы (в чем и состоит задача технических наук) невозможны без создания модели, всегда упрощенной по сравнению с бесконечной глубиной оригинала, но упрощенной так, чтобы сохранять те стороны явления, которые существенны в данной теоретической или практической проблеме.

Теория подобия и основанное на ней моделирование имеют глубокие связи с теорией познания и всеми естественными науками, так как при установлении подобия в явлениях одной физической природы

вскрываются глубокие зависимости качественных сторон явлений от количественных.

Возможность установления подобия между разнородными по физической природе явлениями также не случайна. В природе вследствие материального единства имеются общие для всех качественных разновидностей материи и ее разнообразных проявлений количественные отношения и пространственные формы. Это позволяет обобщать процесс познания, отвлекаясь от деталей, содержащихся в полном комплексе качеств объектов исследования, от происходящих процессов, и отображать те или иные их стороны математически в виде функциональных связей, дифференциальных уравнений.

Применение тождественного математического аппарата в разных отраслях науки, разных дисциплинах (например, единый подход к колебаниям и волнам различной физической природы) — вопрос не просто «удобства» или теоретического произвола, умения «красиво» выбрать уравнения, как это пытаются изображать некоторые физики и математики, стоящие на субъективистских позициях. В сущности, на такой же субъективистской позиции находятся и те, кто отвергает единый подход к явлениям разной природы, утверждая, что он является чисто формальным, основанным якобы на «только формальной» аналогичности математического аппарата. Ответ на этот вопрос с позиций диалектического материализма уже давно с исчерпывающей ясностью дан В. И. Лениным. Рассматривая борьбу физиков Л. Больцмана и Э. Маха — сторонника «феноменологической» физики — и касаясь вопроса об аналогичности дифференциальных уравнений, которыми оперируют в различных разделах физики, В. И. Ленин писал: «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений»*. Действительно, развитие физики подтверждало и подтверждает, что единство природы, единство многих закономерностей объективных процессов, происходящих при различных видах движения материи, описывается одинаковыми уравнениями. Так, например, в колебаниях маятника и колебаниях в электрическом контуре, в распространении упругих волн и распространении электромагнитных волн имеется общность, позволяющая создать единое учение о колебаниях и волнах с общим математическим аппаратом, лежащим в основе этого учения. Таким образом, в общности подхода к явлениям природы, имеющей у теории подобия и моделирования, есть глубокий смысл и большое познавательное значение, которые не всегда оцениваются правильно. Между тем метод моделирования превращается в один из универсальных методов познания, применяемых во всех современных науках, как естественных, так и общественных, как теоретических, так и экспериментальных, которые все больше и больше обращаются к изучению сложных систем. Однако свою роль этот метод может выполнять только при правильной его оценке, методологически закономерном применении основных понятий и процедур.

§ 4.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматриваемая схема классификации (рис. 4.2) основывается на концепции взаимосвязи понятий моделирования и подобия, в соответствии с которой модель и оригинал находятся между собой в отношении подобия (подобны друг другу), и отражает методологические аспекты проблемы моделирования, т. е. указывает, какие виды подо

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 306.

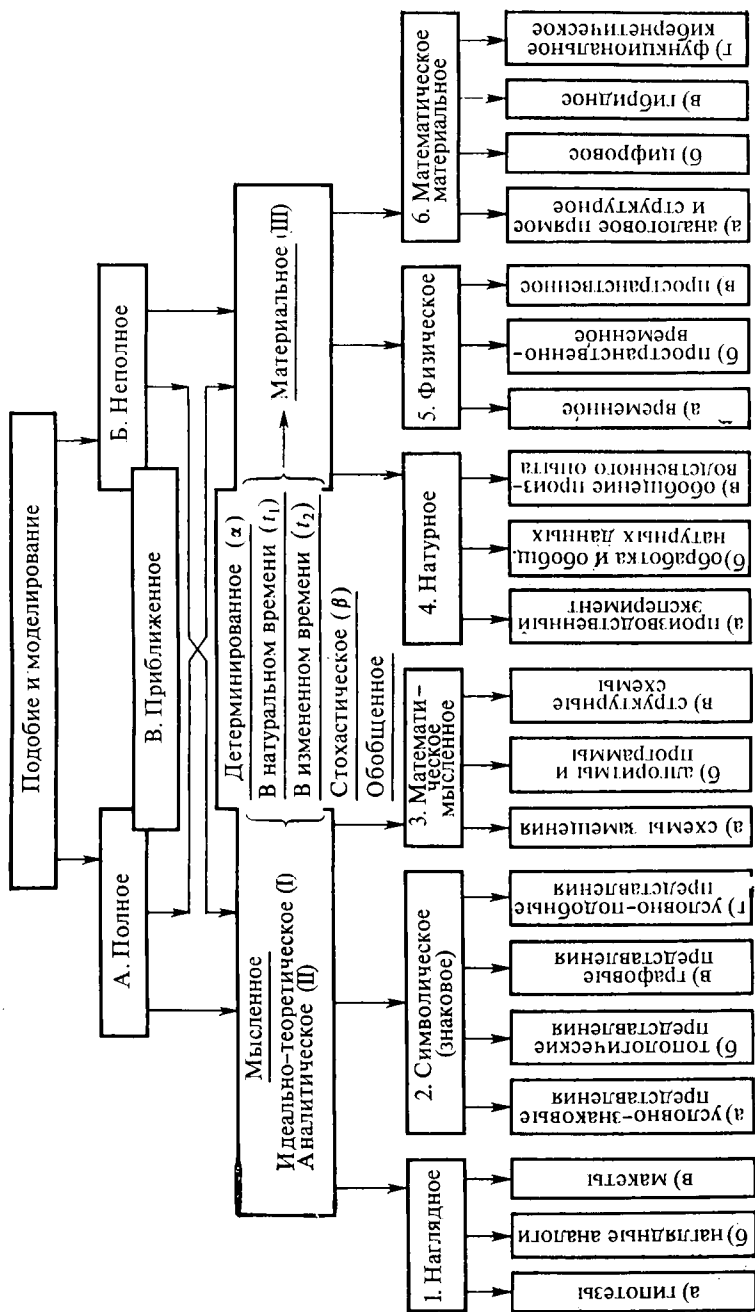


Рис. 4.2

бия и соответствующего им моделирования могут быть методически использованы при решении практических задач.

Первоначально виды подобия и моделирования разделяются (рис. 4.2) по признаку полноты учета и воспроизведения на модели параметров оригинала и процессов в нем: *полное (А), неполное (Б) и приближенное (В)* подобие (см. § 1.1); адекватно характеризуются и соответствующие им виды моделирования (полное, неполное и приближенное моделирование).



Рис. 4.3

Далее все указанные виды моделирования дифференцируются на *мысленное* и *материальное* (рис. 4.2) в зависимости от принципиального способа их материальной реализации: I — *мысленное, идеально-теоретическое, моделирование*; II — *мысленное аналитическое моделирование*, использующее ту или иную аппаратуру для подтверждения отвлеченных представлений (например, расчеты на ЦВМ, аналоги, иллюстрирующие мысленно созданные положения); III — *материальное, реально-практическое, или вещественно-агрегатное, моделирование*. Моделирование вида II является промежуточным между видами I и III.

Как мысленное (I, II), так и материальное (III) виды моделирования могут быть либо *детерминированными* (α), отражающими детерминированные процессы с однозначно определенными причинами и их следствиями, либо *стохастическими* (β), отражающими вероятностные события. Подобие и моделирование любого вида (I, II, III, А, Б, В, α , β) могут быть *обобщенными* (γ), т. е. отражать явления оригинала с той или иной условностью и могут реализоваться в на-

натуральном времени* (t_1) и в измененном относительно натурального времени (t_2), при изучении линейных систем и нелинейных систем.

Дальнейшая классификация видов моделирования (рис. 4.2) основывается на детализации способов материальной реализации моделей и включает в себя наглядное 1, символическое 2, математическое мысленное 3, натурное 4, физическое 5 и математическое материальное 6 виды моделирования.

1. Наглядное моделирование. К этому виду моделирования (рис. 4.2) следует отнести различные *мысленные представления (гипотезы)* в форме тех или иных воображаемых моделей (1,а), например, известные планетарные модели атомов или молекул, причем для них могут создаваться модели в виде *наглядных аналогов* (1,б) типа, показанного на рис. 4.3. Эти модели, создаваемые как мысленные, идеальные, могут быть реализованы материально в виде, подкрепляющем идеальные, мысленные соотношения чувственно воспринимаемыми построениями. К таким построениям относятся, в частности, макеты (1,в) изучаемого или проектируемого объекта.

Деревянные модели церквей и башен, на основе которых проводилось строительство, известны очень давно. В XVII в. ученый монах Арсений Суханов привез патриарху Никону модели иерусалимских храмов, в храме Василия Блаженного были найдены макеты, которыми пользовались зодчие, создавая реальные конструкции. У современных архитекторов имеются не только такого рода макеты, но и специальные приборы — макетоскопы (рис. 4.4, а). В них применяется принцип так называемой «камеры-обскуры», т. е. безлинзовой камеры с отверстием — объективом малого диаметра 1, затвором 2 в виде обыкновенной задвижки и приспособлением для перемотки пленки 3. Точка съемки выбирается с помощью перископического устройства или оптического прибора типа медицинского эндоскопа. В выбранное место ставят аппарат и снимают макеты (рис. 4.4, б), которые обычно выполняются в масштабе 1 : 1000 или 1 : 2000. Макетоскоп дает практически неограниченную глубину резкости: расстояние от объектива до элементов макета может быть от 1 см до нескольких метров при больших углах съемки. При этом не искажается перспектива, что очень важно для архитектуры. Снимки макета и построенной в дальнейшем натуре, выполненные с «одной» точки, имеют полное сходство: дома, автомобили, деревья на макете выглядят, как на «живой» улице. «Проехав» с таким аппаратом по «городу» будущего, можно получить полную картину в виде набора фотографий или кинофильма.

Создание пространственных моделей различного рода компоновок (например, оборудования в цехах станций или заводов) называется *объемным проектированием*. Объемное восприятие чертежей существенно различно в зависимости от опыта человека, его состояния и ряда субъективных качеств. Эту разницу в восприятии, часто являющуюся причиной ошибок, снимает объемное проектирование, исключая незаметные на первый взгляд ошибки проектировщика, приводящие при реализации проекта к большим потерям средств. Метод объемного проектирования способствует внедрению промышленных методов строительства и позволяет готовить персонал будущего предприятия до окончания строительства, давая ему возможность ознакомиться с оборудованием на объемной модели. Метод объемного проектирования имеет ряд разновидностей, к од-

* Необходимо обратить внимание на недопустимость применения встречающегося в литературе бессмысленного термина «реальный масштаб времени». Масштаб — отвлеченное число $m = t_1/t_2$, которое всегда реально.

ной из них относится цветное проектирование, когда на пространственно-подобных моделях (макетах) изучаются условия освещения тех или иных объектов.

2. Символическое (знаковое) моделирование. Этот вид моделирования (см. рис. 4.2) предусматривает прежде всего *условно-знаковые представления* в виде упорядоченной

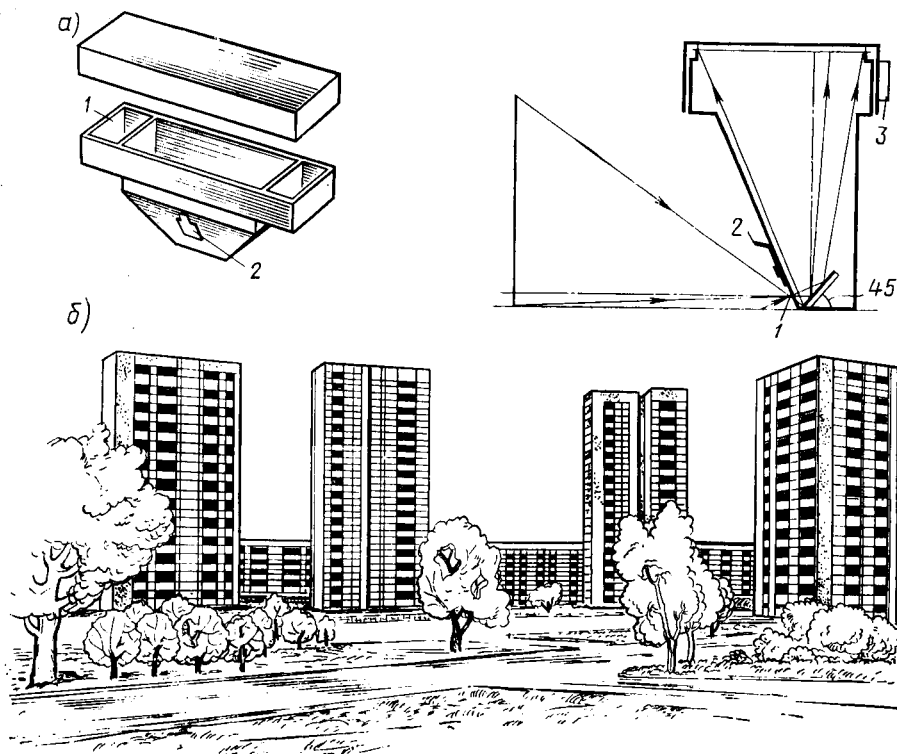


Рис. 4.4

записи (2.а), к которой относятся, например, географические карты, химические модели, представленные в виде условных знаков и отображающие состояние или соотношение элементов во время химических реакций. К знаковым моделям относятся разнообразные *топологические* (2.б) и *графовые* (2.в) представления исследуемых объектов. Например, знаковыми моделями являются так называемые «деревья графов», которые символически изображают различного рода состояния систем и возможные пути перехода из одного состояния в другое. *Условно-подобные представления* (2.г) применяются в тех случаях, когда обычным путем не удастся найти математически выраженные критерии подобия, но по некоторым показателям (например, по словесным описаниям, равноотстоящим от некоторого уровня отсчета

акных-либо значений и т. д.) из объектов формируются «подобные группы», которые хотя и выделяются, но условно.

3. Математическое мысленное моделирование. Этот вид моделирования (см. рис. 4.2) способствует установлению связи между логическим и чувственным и должен подкрепить абстрактное мышление привычными образами, которые, помогая воспринять и проанализировать явления, могут явиться источником идей для новых исследований. Здесь прежде всего можно назвать *схемы замещения* (3.а) различных элементов электрических систем

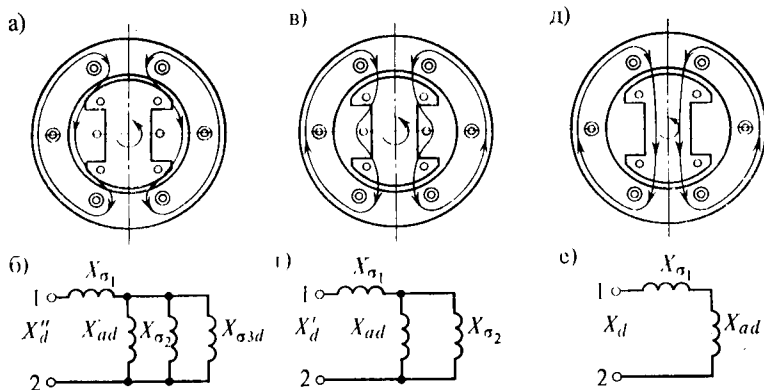


Рис. 4.5

(генераторов, трансформаторов, линий передач и т. д.), которые отражают математические уравнения и их физическую интерпретацию с помощью более простых и наглядных объектов.

Схемы замещения обычно отражают частные соотношения, существенные для определенных аспектов рассмотрения изучаемого явления. Так, например, сложный процесс постепенного изменения магнитного поля и тока во время переходного процесса в синхронном генераторе (в частности, при коротком замыкании) можно представить для ряда характерных моментов времени схемами замещения, отражающими изменения эквивалентного индуктивного сопротивления генератора (рис. 4.5). В начале процесса, когда изменяющееся поле статора наводит токи в обмотке возбуждения и демпферных обмотках и при этом поле статора не проникает в тело ротора (рис. 4.5, а), синхронная машина характеризуется сверхпереходным индуктивным сопротивлением X''_d , которое зависит от сопротивления реакции якоря X_{ad} и сопротивлений рассеяния обмоток статора (X_{σ_1}), ротора (X_{σ_2}) и демпферной продольной обмотки $X_{\sigma_{3d}}$ (рис. 4.5, б). Затем, когда влияние токов в обмотке возбуждения становится менее значительным и не может препятствовать частичному проникновению поля статора в тело ротора (рис. 4.5, в), генератор характеризуется индуктивным переходным сопротивлением X'_d (рис. 4.5, г). При установившемся режиме, когда реакция статора проявляется полностью (рис. 4.5, д), генератор характеризуется индуктивным синхронным сопротивлением X_d (рис. 4.5, е). Схемы замещения либо расчетные схемы могут строиться не только для непосредственно изучаемой системы, но и для преобразованной системы: например, при изучении различного рода плоскопараллельных полей широко практикуется переход от изучаемого поля к новому, математически полученному в результате так называемого конформного преобразования.

К математическим мысленным моделям можно отнести *алгоритмы и программы*, составленные для вычислительных машин, которые в условных знаках отражают (моделируют) определенные процессы, описанные дифференциальными уравнениями, положенными в основу алгоритмов (3.б), а также различные *структурные схемы* (3.в), отражающие функциональные связи между подсистемами сложных систем.

Примером математического мысленного моделирования типа (3.в) могут быть *экономические модели*, которые играют большую роль в экономике, хотя вопрос об их построении с учетом принципов теории подобия еще подлежит разработке.

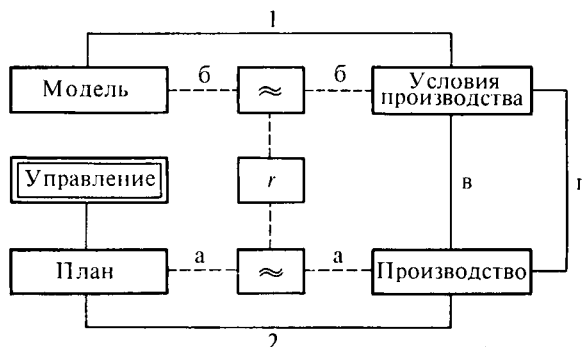


Рис. 4.6

Схема модели такого рода представлена на рис. 4.6, где блок «Условия производства» изображает производственные мощности, ресурсы всех видов, потребности в продукте данного производства и т. д. Линия 1 означает, что имеется некоторый аппарат учета и передачи информации об условиях производства. Блок «Модель» содержит тот комплекс данных, которыми в конечном счете руководствуются при управлении. На основе данных, полученных в модели, орган «Управление» выносит решения и вырабатывает стратегию, которая отражена в блоке «План». На основе плана и осуществляется процесс производства. Линия 2 отражает те операции, с помощью которых план доводится до исполнителей (людей, механизмов, машин). Штриховая линия *а* означает необходимость корректировки, вызванной неадекватностью реального процесса производства его описанию в плане; штриховая линия *б* выявляет степень соответствия реального процесса производства плану, а блок, обозначенный знаком «≈», указывает на необходимость проведения корреляции между ними. Процесс производства зависит от ряда дополнительных условий (линия *в*), в то же время результаты производственного процесса оказывают определенное воздействие на эти условия, что в свою очередь влияет на управление (блок *г*, линия *г*).

4. **Натурное моделирование.** Под этим видом моделирования (см. рис. 4.2) понимаются исследования «на натуре», т. е. в природе, при специально подобранных подобных условиях. При натурном моделировании в объект, подлежащий исследованию, не вносят специальных изменений. Например, не создают специальных установок, как это делается при физическом или математическом моделировании. Но обязательным для этого вида моделирования, как и для любого другого, является требование критериальной обработки результатов экспериментов.

Производственный эксперимент, проводимый во время производственного процесса на действующем предприятии (4.а), может рассматриваться как модель, отвечающая задачам производства, его развития и совершенствования.

Возникнув как метод опытного исследования из потребностей материального производства и пройдя долгий путь развития и совершенствования, производственный эксперимент применяется в настоящее время параллельно с естественнонаучным экспериментом, являясь важнейшей составной частью и одной из форм научного исследования. Производственный эксперимент обладает диалектической двойственностью: прямой зависимостью от производственного процесса и непосредственным соприкосновением с наукой и ее специфическими методами исследования. Это единство теории и практики, науки и производства характерно для производственного эксперимента, имеющего большое значение в теории познания.

В гносеологическом аспекте производственный эксперимент имеет четыре основные особенности: 1) непосредственно связывает человека с производственным процессом; в результате проведенные на практике теории и идеи претворяются в жизнь, становясь действительностью, что и делает производственный эксперимент тем практическим критерием, которым пользуется человек для установления ложности либо истинности той или иной мысли, технической идеи; 2) полностью раскрывает революционно-преобразовательную роль познания, выявляет возможность овладения силами природы и на основе этого расширяет и углубляет знания об объективной действительности; 3) выявляет положение о роли практики как критерия истины и об относительности практики, ее способности к непрерывному расширению; 4) показывает, что только историческое рассмотрение материально-производственной деятельности человека и близко примыкающей к ней практики производственного экспериментирования дает возможность глубоко проникнуть в законы познания, вскрыть материальную основу активности человеческого мышления, его постоянную связь и зависимость от объективного мира во всем его многообразии.

Связь научного эксперимента и научно-исследовательской работы можно охарактеризовать следующими соображениями. Каждая научная работа, проводимая для решения той или иной практической задачи, должна пройти три последовательных этапа: 1) поисковое научное исследование; 2) получение технического результата; 3) доведение этого результата до формы, приемлемой для производства. На первых двух этапах задачи решаются преимущественно проведением теоретических и лабораторных исследований. При этом сознательно пренебрегают рядом параметров, которые существенны в условиях производства, но излишне усложняют разработку теоретических основ изучаемых процессов. Разумеется, технический результат научного исследования необходимо как можно быстрее внедрить в производство. Однако между научными разработками и внедрением их в практику нередко бывает большой разрыв из-за ряда факторов, которые на первой стадии исследований не принимались во внимание, а в дальнейшем стали определять процесс внедрения и получения производственных результатов. Происходит своеобразное движение познания от абстрактного к конкретному. Создаваемый в лабораторных условиях технологический процесс является в известном смысле идеальным, ибо в нем концентрируется прежде всего наиболее общее,

существенное. При этом происходит отвлечение, абстрагирование от тех условий, связей и взаимоотношений, которые могут «затемнить» ход создаваемого процесса. Технологический процесс, находящийся на стадии лабораторного исследования, не включает в систему связи и отношения, существующие в реальной действительности. Производственный эксперимент расширяет эти связи, включая новые факторы и условия и создавая возможность перехода от абстрактного к конкретному. В производственном эксперименте отражаются многочисленные стороны предмета, познанные в их единстве, обеспечивается качественный скачок, при котором мышление углубляется в сущность предмета.

Примером производственного эксперимента в энергетике могут служить опыты, проведенные в энергосистемах по определению пределов устойчивости, пропускной способности электропередач, качества напряжения и т. д.

Обработка и обобщение натуральных данных (4.б), т. е. сведений о явлениях или отдельных процессах, происходящих в природе, с целью построения соответствующих моделей применяется, например, при прогнозе динамики изменения берегов рек, морей, водохранилищ (натурное геологическое моделирование). При этом для малоизученных участков побережья используются данные о других исследованных в течение длительного времени участках берегов, физически подобных первым участкам. Участки, данные о которых заносят в специальные альбомы, позволяющие на основе критериев подобия подобрать подходящую модель и пересчитать с учетом масштабов происходившие изменения, прогнозируя по прошлому будущее, называются *природными моделями*. На рис. 4.2 в качестве разновидности натурального моделирования, в сущности мало отличающегося от производственного эксперимента (4.а) и от моделирования, основанного на обобщении натуральных данных (4.б), показано *моделирование путем обобщения производственного опыта* (4.в). Отличие здесь состоит в том, что вместо специально организованного в производственных условиях эксперимента пользуются имеющимся материалом, обобщая его с помощью теории подобия и обрабатывая в соответствующих критериальных соотношениях. Здесь, так же как и в производственном эксперименте, полезно обобщенное моделирование, когда для характеристики изучаемого процесса тем или иным путем находят некоторые обобщенные функции.

5. Физическое моделирование. Этот вид моделирования (см. рис. 4.2) характеризуется прежде всего тем, что исследования проводятся на установках, обладающих физическим подобием, т. е. сохраняющих полностью или хотя бы в основном природу явлений. Если осуществлено полное или неполное физическое моделирование и соответственно подобие, то по характеристикам модели можно получить все характеристики оригинала пересчетом через масштабные коэффициенты. Физическое моделирование может быть *временным* (5.а), при котором исследуются только процессы, протекающие во времени, например изменение тока в электрической цепи при каких-либо переходных процессах. Оно может быть и полным *простран-*

ственно-временным (5.б), применяемым, например, для изучения нестационарных течений рек, морей, каналов, гидравлических сооружений (рис. 4.7) или исследования на моделях антенн влияния окружающей среды на излучение радиоволн в пространстве (рис. 4.8). *Физическое пространственное моделирование* (5.в) предназначено для изучения процессов, действие которых не рассматривается во времени. Они изучают только установившиеся состояния (режимы), или «замороженные» процессы, отвечающие какому-то моменту времени. Например, {подобие распределения токов в электрической сети или распределения {магнитных и электрических полей в магнитопроводах и воздушном зазоре электрической машины, картину пространственного поля вокруг провода линии передачи и т. д.

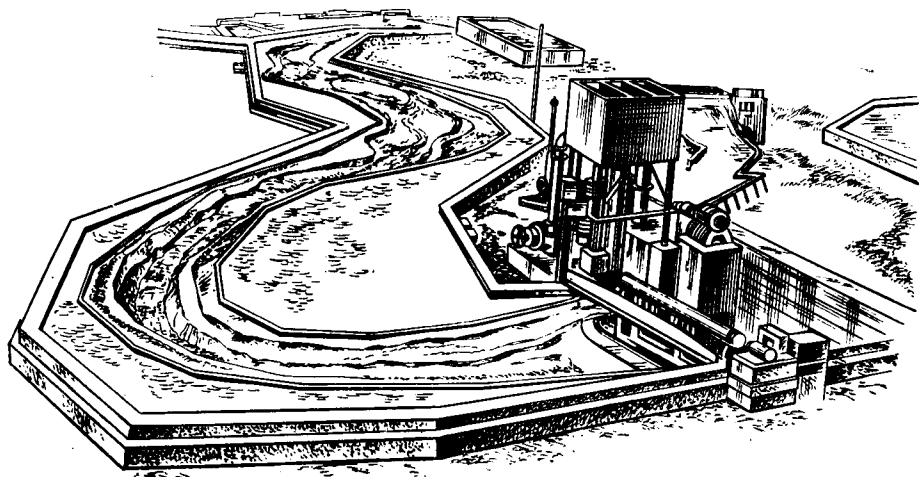


Рис. 4.7

6. Математическое материальное моделирование. При этом виде моделирования (см. рис. 4.2), имеющем многочисленные разновидности, физика исследуемого процесса не сохраняется. Моделирование основывается на изоморфизме уравнений, т. е. их способности описывать различные по своей природе явления и выявлять различные функциональные связи, используя изоморфизм уравнений (способность описывать отдельные стороны поведения систем без полного описания всего поведения). Эту группу моделирования можно разделить на следующие четыре подгруппы;

Аналоговое прямое моделирование (6.а) использует непосредственную аналогию между величинами, присущими одному явлению, и формально такими же и также входящими в уравнения процессов величинами, присущими другому явлению. Движение маятника и колебания корабля на волнах или изменения электрического тока в цепи, содержащей емкость и индуктивность, — простейшие примеры аналоговых моделей. При *аналоговом структурном моделировании* воспроизводится не весь процесс, а отдельные математические опера-

ции, которые выполняют элементы модели. Проведение таких операций в определенной последовательности, достигаемой соответствующим соединением отдельных аналоговых элементов структурной схемы, позволяет получить математическую структурную модель, составленную из отдельных вычислительных элементов непрерывного типа.

Цифровое моделирование (6.б) основывается на элементах, производящих математические операции дискретно. Цифровой моделью может быть вычислительная машина общего назначения. Считать, что с помощью этой машины создается цифровая модель явления, разумеемся, можно только условно. Но разработанный алгоритм, программа, вводимая в машины с помощью перфоленты (или как-либо иначе), и критериальная запись полученных результатов — все это позволяет считать комплекс «алгоритм—программа—ввод—машина—вывод» моделью явления. Достоинством цифровых моделей по сравнению с аналоговыми является их большая точность. Цифровые модели могут быть специализированными, предназначенными для решения некоторых конкретных задач.

Гибридное моделирование (6.в) является сочетанием цифрового и аналогового моделирования и реализуется путем соединения аналоговых моделей и цифровых машин. В таком сочетании используются положительные специфические свойства аналоговых моделей (наглядность, простота набора схемы, быстроедействие) и цифровых машин (точность, хранение в памяти нужных данных, результатов анализа и т.д.). Гибридные модели выполняются и выпускаются в различных исполнениях и широко применяются в различных отраслях науки и техники.

Под *функциональным кибернетическим моделированием* понимают широкую группу методов (6.г) исследования. Если физические и отчасти математические модели определяют связь количественной и качественной сторон явления, раскрывая структуру явления и на базе этого выясняя функцию, то кибернетическая модель предусматривает моделирование функции функцией. Она является только изофункциональной моделью, не стремящейся вскрыть ни подобия физики, ни подобия структуры внутри модели.

Наиболее характерная особенность* кибернетического моделирования — возможность выявления внешних функциональных зависимостей системы от среды, при этом познание абстрагируется от вещественных субстратов в моделируемых объектах и от внутренних причинных связей. В кибернетическом моделировании, таким образом, центральное место занимает характеристика поведения сложной динамической системы в определенной среде. В соответствии с этим специфический подход и задачи кибернетического моделирования можно считать в какой-то мере совпадающими с подходом и задачами функционального моделирования. Для него характерно рассмотрение раз-

* Здесь дается только общая характеристика метода кибернетического моделирования. Подробно см. в кн.: *Веников В. А., Суханов О. А.* Кибернетические модели электрических систем. — М.: Энергоиздат, 1982, 327 с.

ития системы без анализа внутренних причинных связей, только в плане уравнивания ее со средой с учетом механизма обратных связей. Так, кибернетическая модель птицы может не содержать самого характерного для птицы — крыльев. Вместо этого определенная функция птицы — способность летать — может моделироваться действием авиадвигателя, а при полете могут создаваться некоторые зависимости от внешней среды, моделирующие условия полета, например влияние ветра и т. д. Многие модели можно считать разновидно-

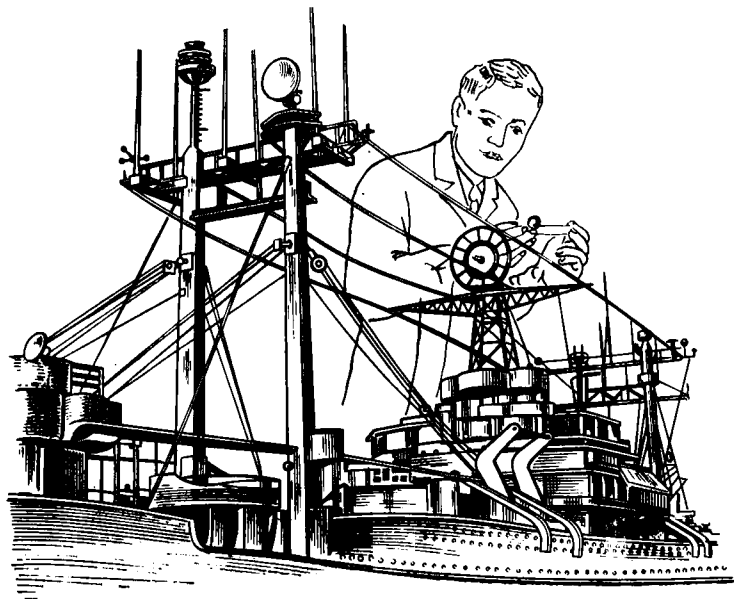


Рис. 4.8

стями кибернетического моделирования. Например, бионические модели, где может частично раскрываться структура живой модели и именно через это раскрытие «функция «живого» искусственно может воспроизводиться в «мертвом» агрегате». Специфику кибернетических моделей можно охарактеризовать тем, что в них *объекты отражаются главным образом исходя из информационных процессов и процессов управления.*

Для кибернетики характерны модели управления, в которых с помощью электронных машин подбираются параметры входа, позволяющие поддерживать заданное значение выхода. При этом электронные машины, осуществляющие подбор параметров входа и сопоставление их с параметрами выхода системы, воспроизводят одну из возможных структур того класса, к которому принадлежит и структура системы.

Для функционального метода кибернетики характерна также модель, построенная на концепции «черного ящика», когда внутреннее содержание сис-

темы неизвестно, а описание ее поведения в меняющейся среде связывается с двумя группами параметров — входа (управляющие воздействия информации среды) и выхода (исполнительные реакции системы). При этом выход рассматривается как функция входа, причем зависимость выхода от входа может в общем случае обнаруживаться чисто эмпирическим, статистическим путем, методом «проб и ошибок». Модель, составленная из цепочки «черных ящиков», для каждого из которых известны входы и выходы, но неизвестны внутренние процессы, может быть сведена к «серому ящику», полупрозрачному, поскольку неизвестна некоторая внутренняя информация.

При вероятностном кибернетическом моделировании может быть создана «игровая модель», построенная на основе теории вероятностей и теории игр, которая представляет изучаемые процессы в виде взаимодействия двух или нескольких участвующих в процессе сторон («игроков») и отражает характер течения процесса («конфликтные ситуации»).

Для кибернетического моделирования существенно единство применения функциональных методов и методов оптимизации для получения данных, обеспечивающих наилучшее управление системой. Технической предпосылкой кибернетического моделирования сложных динамических систем являются быстродействующие электронные машины, позволяющие решать многие задачи управления за приемлемый для хода данного процесса отрезок времени, связать теорию моделирования с теорией оптимального управления.

Иногда возникает вопрос: а не противоречат ли все остальные методы моделирования кибернетическому моделированию или не более ли исчерпывающим, чем все они, является «черный ящик» кибернетической модели; не надо ли классификацию моделей строить иначе, идя от модели кибернетической, и не может ли эта модель дать объяснения всему происходящему в природе, в человеческом обществе с помощью универсальных правил математики и кибернетики?

Если бы все явления природы, определяющие физические, химические и другие зависимости, не были бы неисчерпаемыми и если все сведения о них, так же как и сведения о человеческом обществе, могли бы быть полностью формализованы и введены в вычислительную машину, то тогда на указанный выше вопрос следовало бы ответить положительно. Однако это не так. С одной стороны, неисчерпаем процесс познания, а с другой — неизвестно, что можно получить от машины. Очевидно, что она может сделать все, что может быть формализовано. Но что именно может быть формализовано? На такой вопрос принципиально однозначно ответить нельзя. Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим исследование научной математической школы Д. Гильберта, стремившейся полностью формализовать математику, т. е. вывести все ее положения из заранее и навсегда заданной системы аксиом. Школа Д. Гильберта рассматривала эти аксиомы как выражение символов, не отражающих объективной действительности, а являющиеся только некими знаками. Некоторыми исследованиями в известном смысле удалось свести геометрию и математический анализ к арифметике целых положительных чисел и для последней построить конечную систему аксиом А. Казалось, что поставленная задача формализации успешно решена. Однако в 1931 г. принадлежащий к этой же школе английский математик К. Гедель доказал следующую теорему, состоящую из четырех частей: 1) если дана система аксиом А, то всегда возможно, прибегая лишь к понятиям, входящим в нее, построить по меньшей мере одну теорему Т, такую, что ее нельзя с помощью системы аксиом А ни доказать, ни опровергнуть; 2) следовательно, всегда можно подобрать новую аксиому а так, что, присоединив ее к системе А и получив расширенную систему аксиом $A + a$, можно обязательно с ее помощью либо

доказать, либо опровергнуть теорему T ; 3) однако тогда в расширенной системе аксиом $A + a$ можно, не прибегая к каким-либо посторонним понятиям, обязательно построить по меньшей мере одну теорему T' , которая не доказывается и не опровергается в системе $A + a'$. Присоединяя все новые и новые аксиомы $a, a', \dots, a^n$, этот процесс можно продолжить беспрестанно; 4) среди недоказуемых и неопровергаемых в системе A аксиом T имеется аксиома τ , гласящая, что система A логически непротиворечива. Иначе говоря, доказано, что с помощью одной лишь системы аксиом арифметики нельзя доказать или опровергнуть ее логическую непротиворечивость, т. е. нельзя получить уверенность в том, что когда-либо, продолжая делать из этой системы аксиом все новые и новые выводы, получая все новые и новые теоремы, не приходим к полному противоречию.

Таким образом, оказалось, что школе математиков-формалистов не удалось доказать возможности свести всю математику к конечной, независимой от неисчерпаемой, вечно развивающейся действительности наперед заданной системы заставших понятий.

Исследования показали, что математика, как и всякое другое знание, неизбежно неполна в том смысле, что она только приближенно отражает материальную действительность реального мира и что вместе с этим она способна к дальнейшему развитию, в процессе которого может расширяться и уточняться отражение этой действительности. Оказалось, что проверка логической непротиворечивости математики невозможна, если не соотносить в том или ином виде, на том или ином этапе развития математику с практикой, если не сопоставлять ее аксиомы с данными действительного мира. Это утверждение о невозможности свести математику к заранее данной конечной логической системе не содержит каких-либо элементов агностицизма.

Следовательно, нельзя считать сколько-нибудь основательной тенденцию отказа от эксперимента и различных видов моделирования. Именно различных, так как при невозможности формализации математики, что было показано выше, и тем более при невозможности формализации физики, что противоречило бы основным положениям материалистической теории познания, метод кибернетического моделирования, несмотря на его огромное значение в науке, не может оцениваться как универсальный метод. Он может и должен рассматриваться только как один из приемов научного познания, применяющийся наряду с другими методами исследования, в том числе и методами моделирования, показанными на рис. 4.2.

Моделирование во всех его видах и формах должно осуществляться на основе некоторых математических соотношений, количественно фиксирующих условия подобия — *критериев подобия*. Однако не всегда при моделировании удается найти критерии подобия. Поэтому иногда вводят понятия критериев, хотя все модели должны быть в той или иной форме критериальными. В отдельных случаях, где пока критерии подобия еще не удалось установить, и впредь до их установления следует пользоваться качественными (описательными или словесными) условиями подобия, стремясь, однако, возможно скорее перейти к количественно выраженным критериям. Эти количественные выражения критериев могут быть различными — начиная от простейших соотношений, вытекающих из элементарных характеристик процесса, до критериев, определенных в соответствии с теорией подобия. Термины «некритериальные» и «критериальные» модели применять поэтому не рекомендуется.

Подобие может быть реализовано при обычном, основанном на простых физических и логических представлениях подходе (в некоторых работах его называют «классическим»), когда каждому параметру системы и происходящему процессу в одной системе соответствуют параметр и процесс в подобной системе или группе систем. Допустимо и не отыскивать явного соответствия «по параметрам», понимая подобие более широко и менее определенно. В этом случае подобными считаются схожие результаты, выявляемые в виде в том или ином смысле одинаковых функций, «интегральных» эффектов, соответственных реакций и т. д. Такие виды подобия и моделирования стали широко развиваться, получив названия *обобщенного, интегрального, эквивалентного* и т. д. Однако все они подчиняются единой теории подобия и моделирования.

Рассмотренная схема классификации видов подобия и моделирования (см. рис. 4.2) в определенной мере условна, поскольку на практике в зависимости от постановки конкретной задачи исследования для одной и той же модели могут применяться различные классификационные признаки.

§ 5.1. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ
ПРОЦЕССОВ В КОНСТРУКЦИЯХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО
ОБОРУДОВАНИЯ И СООРУЖЕНИЙ

Основные общие критерии подобия механических, гидромеханических и тепловых процессов. Подобие механических движений (перемещений) сходственных материальных точек (тел), находящихся под действием параллельных сходственных сил, характеризуется *критерием гомохронности*, который обозначается как π_{Ho} или Ho , и *критерием Ньютона* — π_{Ne} или Ne .

При линейном движении материального тела с массой M , перемещающегося со скоростью v на расстояние l за время t под действием силы F , критерии гомохронности и Ньютона определяются способом интегральных аналогов из уравнений $v = dl/dt$ и $F = Md^2l/dt^2$ (см. пример 1.2) и имеют вид

$$\pi_{\text{Ho}} = \text{Ho} = vt/l; \quad \pi_{\text{Ne}} = \text{Ne} = Ft^2/(Ml). \quad (5.1)$$

При вращательном движении материального тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω (угловое перемещение φ , момент инерции J) под действием момента $M_{\text{вр}} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{2} J \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$ критерии гомохронности и Ньютона имеют вид

$$\pi_{\text{Ho}} = \text{Ho} = \omega t; \quad \pi_{\text{Ne}} = \text{Ne} = M_{\text{вр}}/(J\omega^2). \quad (5.2)$$

Подобие перемещений материальных тел под действием сил тяжести характеризуется *критерием Фруда*

$$\pi_{\text{Fr}} = \text{Fr} = v^2/(gl), \quad (5.3)$$

который определяется путем умножения квадрата критерия гомохронности на критерий $\pi = l/(gt^2)$, получаемый на основании соотношений $F = Md^2l/dt^2$ и $F = Mg$ (g — ускорение свободного падения).

Подобие упругих сил в подобных системах характеризуется *критерием Коши*

$$\pi_{\text{Ca}} = \text{Ca} = v/\sqrt{eE/\rho}, \quad (5.4)$$

который определяется на основании соотношений $F = \varepsilon E l^2$ и $F = M l / t^2 = (\rho l^3) / (l / t^2) = \rho l^2 v^2$, где ε — относительное удлинение; E — модуль упругости (модуль Юнга); l — линейный размер; ρ — плотность материала.

Гидромеханическое подобие процессов движения несжимаемых жидкостей характеризуется *критерием Рейнольдса* (π_{Re} или Re) и *критерием Эйлера* (π_{Eu} или Eu)

$$\pi_{Re} = Re = l v \rho / \mu; \quad \pi_{Eu} = Eu = \Delta P / (v^2 \rho), \quad (5.5)$$

при определении которых методом анализа размерностей рассматривается падение давления ΔP жидкости с плотностью ρ и вязкостью μ при ее перемещении со скоростью v на расстояние l по трубе диаметром d (принимается, что $d/l = \text{idem}$).

Полагая в исходной функциональной зависимости $f(\Delta P, \rho, \mu, v, l, d) = 0$ независимыми переменными ρ, μ и v , можно записать выражения для критериев подобия

$$\pi_1 = \frac{l}{v^{x_1} \mu^{y_1} \rho^{z_1}}; \quad \pi_2 = \frac{d}{v^{x_d} \mu^{y_d} \rho^{z_d}}; \quad \pi_3 = \frac{\Delta P}{v^{x_P} \mu^{y_P} \rho^{z_P}},$$

в которых размерности отдельных участвующих величин в СИ имеют следующий вид:

$$[\Delta P] = [L^{-1} M T^{-2}]; \quad [v] = [L T^{-1}]; \quad [\rho] = [L^{-3} M]; \quad [l] = [L];$$

$$[\mu] = [L^{-1} M T^{-1}]; \quad [d] = [L].$$

Далее выражения для критериев подобия π_1, π_2 и π_3 представляются как функции первичных единиц измерения L, M и T ; например,

$$\pi_1 = \frac{l}{v^{x_1} \mu^{y_1} \rho^{z_1}} = \frac{[L]}{[L T^{-1}]^{x_1} [L^{-1} M T^{-1}]^{y_1} [L^{-3} M]^{z_1}}.$$

В уравнении для π_1 размерности числителя и знаменателя должны быть одинаковы. Это возможно только в случае равенства в числителе и знаменателе показателей степеней у одноименных величин L, M и T , что приводит к системе уравнений $1 = x_1 - y_1 - 3z_1$; $0 = y_1 + z_1$; $0 = -x_1 - y_1$, из которых $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ и $z_1 = -1$ и, следовательно,

$$\pi_1 = l / (v^{-1} \mu \rho^{-1}) = l v \rho / \mu = \pi_{Re} = Re.$$

Аналогично,

$$\pi_2 = d v \rho / \mu = \pi_{Re} = Re; \quad \pi_3 = \Delta P / (\rho v^2) = \pi_{Eu} = Eu,$$

т. е. при условии соблюдения геометрического подобия ($\pi_2/\pi_1 = d/l = \text{idem}$) рассматриваемый процесс полностью характеризуется π_{Re} и π_{Eu} .

Подобие процессов теплоотдачи от круглой трубы диаметром d к поперечно омываемому ее со скоростью v потоку жидкости с плотностью ρ и вязкостью μ характеризуется *критерием Нуссельта* (π_{Nu} или Nu) и критерием Рейнольдса:

$$\pi_{Nu} = Nu = \alpha d / \lambda; \quad \pi_{Re} = Re = d v \rho / \mu, \quad (5.6)$$

где α — коэффициент теплоотдачи от поверхности трубы к жидкости; λ — коэффициент теплопроводности.

При определении этих критериев методом анализа размерностей рассматривается функциональная зависимость $f(d, v, \rho, \mu, \alpha, \lambda) = 0$, в которой размерности отдельных участвующих величин в СИ имеют такой вид:

$$[d] = [L]; \quad [\mu] = [L^{-1} M T^{-1}]; \quad [v] = [L T^{-1}]; \\ [\alpha] = [M T^{-3} \theta^{-1}]; \quad [\rho] = [L^{-3} M]; \quad [\lambda] = [L M T^{-3} \theta^{-1}].$$

Выражения для критериев подобия могут быть найдены не только аналогично π_{Re} и π_{Eu} на основе общей методики определения критериев подобия путем анализа размерностей, но и (как это иногда делается в литературе) на основе непосредственных рассуждений, выполняемых следующим образом.

При шести участвующих в процессе величинах ($m = 6$) и четырех независимых размерностях ($k = 4$) число определяющих критериев подобия должно быть равно двум.

Из сопоставления размерностей участвующих в процессе величин следует, что $[\lambda] = [\alpha] [d]$ и один из критериев подобия (критерий Нуссельта) может быть представлен в виде

$$\pi_1 = \alpha d / \lambda = \pi_{Nu}.$$

Принимая, что $[\alpha]$ и $[d]$ являются независимыми, и дополняя их двумя независимыми величинами ($[v]$ и $[\mu]$), запишем размерность еще одной величины через $[d]$, $[v]$, $[\mu]$, $[\alpha]$. Учитывая, что $[\theta]$ не входит в размерность $[\rho]$ и только единственный раз входит в $[\alpha]$, запишем $\rho \neq \varphi_1(\alpha)$, и следовательно, величину α можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Искомый критерий подобия должен зависеть от соотношения размерностей величин $[\rho] = [d]^x [v]^y [\mu]^z$, где x, y, z — неизвестные показатели степеней.

Из сопоставления размерностей этих величин следует, что $[M L^{-3}] = [L]^x [L T^{-1}]^y [M T^{-1} L^{-1}]^z$, т. е. $x = -1$; $y = -1$; $z = 1$. В этом случае $\rho = d^{-1} v^{-1} \mu$ или $\pi_2 = \pi_{Re} = \rho v d / \mu$.

Рассматриваемый процесс полностью характеризуется двумя критериями, т. е. $F(\pi_{Re}, \pi_{Nu}) = 0$. Этот вывод соответствует π -теореме, так как число участвующих в процессе величин $m = 6$, а независимыми размерностями обладают четыре величины $k = 4$; число критериев подобия $m - k = 6 - 4 = 2$.

Общим условием подобия тепловых процессов является соблюдение для любых сходственных моментов времени и в любых сходственных точках пространства критериев подобия Фурье (π_{Fo} или Fo), Пекле (π_{Pe} или Pe), Нуссельта и Прандтля (π_{Pr} или Pr):

$$\left. \begin{aligned} \pi_{Fo} = Fo = at^2/l^2; \quad \pi_{Pe} = Pe = vl/a; \\ \pi_{Nu} = Nu = \alpha l/\lambda; \quad \pi_{Pr} = Pr = \gamma/a, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где a — коэффициент температуропроводности; t — время; l — линейный размер; v — скорость; α — коэффициент теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности; γ — коэффициент кинематической вязкости.

При исследовании установившихся тепловых режимов можно опустить критерий Фурье, при изучении неподвижных сред — критерий Пекле, при рассмотрении сред с неизменными физическими свойствами (вязкостью, плотностью) — критерий Прандтля.

В задачах, связанных с определением критериев подобия в неоднородных и анизотропных средах, коэффициент теплопроводности λ яв-

ляется тензором. Если неоднородность или анизотропия существует по двум (рис. 5.1, а, б) или трем (рис. 5.1, в, г) направлениям, то, совмещая с ними ориентацию координатных осей, можно записать основное уравнение теплового состояния конструкции, нагреваемой электрическим током, в виде

$$c\gamma = d\theta/dt = g + \text{div}(\lambda \text{ grad } \theta), \quad (5.8)$$

где c — удельная теплоемкость; θ — температура, отсчитанная от температуры окружающей среды как от нуля; λ — тензор теплопроводности с главными составляющими по координатным осям: $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$; $g = g_0(1 + \beta\theta)$ — теплота, выделяемая в единице объема ($g_0 =$

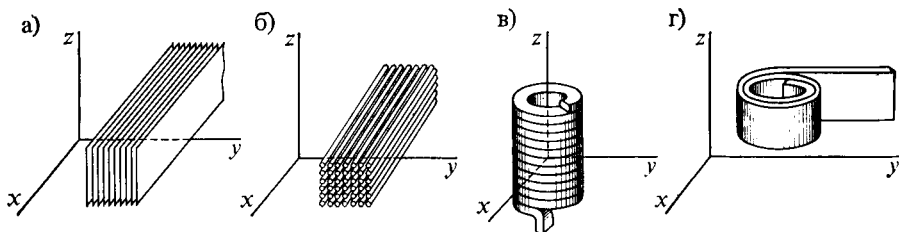


Рис. 5.1

$= i^2 R_0$ — удельные потери мощности в установившемся режиме при $\theta = 0$; R_0 — электрическое сопротивление при $\theta = 0$; β — температурный коэффициент изменения R_0).

Представляя (5.8) в прямоугольной системе координат

$$c\gamma \frac{d\theta}{dt} = g + \lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

способом интегральных аналогов получаем следующие критерии подобия:

$$\pi_1 = \frac{ax^2}{\lambda_x \theta}; \quad \pi_2 = \frac{c\gamma}{\lambda_x t} x^2; \quad \pi_3' = \frac{x^2 \lambda_y}{y^2 \lambda_x}; \quad \pi_3'' = \frac{x^2 \lambda_z}{z^2 \lambda_x}. \quad (5.9)$$

Таким образом, геометрическое подобие в данном случае не является обязательным условием ($z/y \neq x/y$); его отсутствие корректируется требованием

$$z/y = \lambda_z/\lambda_y,$$

которое равносильно введению новых координат:

$$y' = y \sqrt{\lambda_x/\lambda_y}; \quad z' = z \sqrt{\lambda_x/\lambda_z}.$$

Отсутствие геометрического подобия может быть также скорректировано соответственным подбором значений теплопроводности по главным осям.

В условиях геометрической ($z/y \neq x/y$) и структурной ($\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$) несимметрии критерии π_1 и π_2 не меняют своего содержания. Критерий π_1 дает возможность установить связь температуры с количеством выделяющейся теплоты и масштаб температуры. Критерий

π_2 , характеризующий постоянную времени теплового процесса, может быть представлен в виде

$$\pi_2 = T_T / t = T_{*T},$$

где T_T — постоянная времени теплового процесса; T_{*T} — относительная постоянная времени.

Подобие условий теплоотдачи на граничной поверхности характеризуется соотношением

$$\alpha_i l_i / \lambda_i = \text{idem}$$

или при отсутствии геометрического подобия

$$\alpha_i \text{ grad } \theta / (\lambda_i \theta) = \text{idem},$$

где α_i и λ_i — коэффициент теплоотдачи и теплопроводность окружающей среды; индекс i принимает значение x, y, z в зависимости от вида рассматриваемой поверхности; l_i — характерный размер.

Рассмотренные критерии подобия остаются справедливыми при нелинейности параметров, которые согласно второму дополнительному положению о подобии должны быть соответственно одинаковыми у подобных процессов, например $\lambda/\lambda_m = \varphi(\theta/\theta_m)$ или $c/c_m = \varphi(\theta/\theta_m)$.

Подобие и моделирование механических процессов в опорах воздушных ЛЭП. Рассмотрим случай сооружения опоры из однородного материала, упругие свойства которого характеризуются модулем упругости E и коэффициентом Пуассона σ . Для геометрически подобных конструкций все размеры можно выразить через некоторый характерный размер, например высоту h ; если существен вес опоры, то необходимо учесть и плотность ее материала:

$$\gamma = \rho g,$$

где ρ — плотность материала; g — ускорение свободного падения.

Пусть действие внешних нагрузок (натяжение проводов и давление ветра) определяется силой F .

Для функциональной зависимости $f(E, \sigma, h, \rho, g, F) = 0$ путем анализа размерностей можно найти следующие критерии подобия:

$$\pi_1 = E/(\rho g h); \quad \pi_2 = F/(E h^2); \quad \pi_3 = \sigma. \quad (5.10)$$

Если две опоры изготовлены из одного и того же материала ($E_1 = E_2, \rho_1 = \rho_2$), то для механического подобия (критерий π_1) необходимо выполнение $gh = \text{idem}$, т. е. равенство размеров. При неравенстве размеров для удовлетворения критерия π_1 необходимо взять другой материал для модели опоры либо изменить («моделировать») силу тяжести с помощью центробежной машины, создающей искусственное воздействие (центробежными силами) на испытываемую модель конструкции, которая вращается на этой машине с постоянной угловой скоростью. При достаточно малых размерах опоры по сравнению с радиусом вращения центробежные силы инерции элементов модели можно считать параллельными. Изменяя угловую скорость, можно получать любые значения ускорения g . Подобие распределения напряжений e , возникающих при упругой деформации

конструкции опоры под действием заданных нагрузок, определяется соблюдением всех трех критериев:

$$e/E = f[\sigma, E/(pgh), F/(Eh)^2],$$

где e/E — безразмерная величина.

Если обе опоры выполнены из одного и того же материала, то напряжения в их сходственных точках одинаковы. Если внешние нагрузки значительно больше собственного веса конструкции, то можно пренебречь γ , а следовательно, и критерием π_1 . В этом случае

$$\pi_2 = F/(Eh^2); \quad \pi_3 = \sigma \text{ и } e/E = f[F/(Eh)^2, \sigma].$$

Таким образом, для обеспечения подобия с сохранением свойств материалов внешние нагрузки необходимо изменять пропорционально квадрату линейных размеров. Изменение длины какого-либо элемента опоры при увеличении нагрузок определяется соотношением

$$\Delta l/h = f[\gamma h/E, F/(Eh^2), \sigma].$$

Величина $\Delta l/h$ уменьшается при увеличении модуля упругости, т. е. при использовании более жесткого материала. Для геометрически подобных опор, изготовленных из одного и того же материала, критерий $F_1/(Eh_1^2) = F_2/(Eh_2^2) = \text{const}$, а критерий $\gamma h/E$ уменьшается одновременно с уменьшением размеров опоры и, следовательно, механическое подобие нарушается. На опоре меньших размеров относительные деформации меньше. Если собственный вес опоры не учитывается, то при $F/(Eh^2) = \text{const}$ относительные деформации подобных опор будут иметь одинаковое значение.

Методы подобия и физического моделирования с применением центробежных машин целесообразно использовать и в задачах, связанных с необходимостью учета влияния либо исследования таких явлений, как «пляска проводов» или «бегущие волны» на проводах. Их появление математически характеризуется уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{F}{Sf_0} + g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{E}{2Sf_0 l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (5.11)$$

на основании которого в соответствии со способом интегральных аналогов можно записать критерии подобия:

$$\pi_1 = g l^2 F / (x^2 f_0 S); \quad \pi_2 = F / (El_0^2), \quad (5.12)$$

где x — текущее значение переменной (ось x совпадает с направлением провода); y — отклонение провода от оси; F — тяжение провода; f_0 — удельная нагрузка; l_0 — длина пролета.

Применение методов подобия позволяет использовать для построения моделей механических конструкций объекты иной конфигурации, выполненные из другого материала. Так, например, при моделировании изгиба балки на упругом основании при произвольно распределенной нагрузке исходное уравнение, определяющее моделируемый процесс, имеет вид

$$d^4 \omega / dx^4 + K \omega / (EJ) = g / (EJ), \quad (5.13)$$

где ω — прогиб балки; x — текущая координата вдоль оси балки; K — коэффициент отпора [основания; E — модуль упругости материала балки; J — момент инерции сечения балки.

Граничные условия для левого конца балки при $x = 0$: $\omega = 0$, $d^2\omega/dx^2 = 0$; для правого конца при $x = l$: $\omega = 0$, $d^2\omega/dx^2 = 0$. Начальные условия отсутствуют, если рассматривается статическая работа. Предельные условия по геометрии: $a \leq 0,2l$, где a — наибольший размер сечения балки; по прогибам $\omega \leq 1/4a$.

Введем масштабные преобразования:

$$\omega_0 = m_\omega \omega_M; \quad K_0 = m_K K_M; \quad E_0 = m_E E_M;$$

$$J_0 = m_J J_M; \quad x_0 = m_x x_M; \quad g_0 = m_g g_M.$$

Применение способа интегральных аналогов позволяет записать для масштабных соотношений следующие условия: $m_K m_x^4 / (m_E m_J) = 1$; $m_g m_x^4 / (m_\omega m_E m_J) = 1$, связывающие шесть масштабов (m_ω , m_g , m_E , m_J , m_x , m_K), четыре из которых можно выбрать произвольно, например m_E , m_x , m_J , m_g . Тогда

$$m_\omega = m_g m_x^4 / (m_E m_J); \quad m_K = m_E m_J / m_x^4. \quad (5.14)$$

Из масштабных соотношений следует, что при решении данной задачи модель балки *может быть изготовлена из произвольного материала и может иметь произвольное очертание сечения*, при этом симметрия относительно плоскости изгиба должна быть сохранена. Используя результаты эксперимента на модели балки, можно через масштабы подобия найти значения прогибов в балке другого сечения, пролета или материала. Такие задачи возникают в тех случаях, когда конструкция сложная, ее элементы работают на изгиб и кручение и в них имеются поступательное и вращательное смещения.

Подобие тепловых процессов в проводах воздушных ЛЭП. Критерии подобия процессов нагревания и охлаждения голого провода воздушной ЛЭП определяются из уравнения теплоотдачи

$$i^2 R_0 (1 + \beta\theta) dt = c\gamma V_0 d\theta + \alpha s \theta dt, \quad (5.15)$$

способом интегральных аналогов (делением на $\alpha s \theta dt$)

$$\pi_1 = i^2 R_0 / (\alpha s \theta); \quad \pi_2 = c\gamma V_0 / (\alpha s) = T_T / t; \quad \pi_3 = \beta\theta, \quad (5.16)$$

где V_0 — объем провода; s — сечение провода; α — коэффициент теплоотдачи, зависящий от свойств среды (температуры воздуха, скорости ветра, барометрического давления), внешнего диаметра и состояния поверхности провода.

При заданном неизменном состоянии среды достаточно, чтобы соотношение $\alpha_1/\alpha_2 = \text{idem}$ удовлетворялось при изменении температур проводов в определенном диапазоне. При переменных свойствах среды должны также удовлетворяться критерии Рейнольдса и Нуссельта.

Подобие тепловых процессов в электрических кабелях. В общем случае полное тепловое подобие кабелей достигается при соблюдении критериев

$$T_{*T} = \frac{T_T}{t} = \text{idem} \text{ или } \frac{at^2}{l^2} = \frac{\lambda}{c\gamma} \frac{t}{l^2} = \text{idem};$$

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \text{idem}; \quad \frac{vd}{a} = \text{idem}; \quad (5.17)$$

и, если кабели находятся в различных средах, также критериев $\rho v l / \mu = \text{idem}$ и $\mu g c / \lambda = \text{idem}$.

Связь температуры с количеством выделяющейся теплоты (мощности) определяется соотношением $\lambda \theta / (q d) = \text{idem}$, которое позволяет также установить масштаб температуры.

При решении практических задач возможны упрощения приведенной системы критериев подобия.

Так, например, если два кабеля, между которыми устанавливается подобие, находятся в неподвижном воздухе, то можно приближенно считать, что теплота от оболочки кабеля отводится только путем конвекции. В этом случае, отказываясь от требования соблюдения геомет-

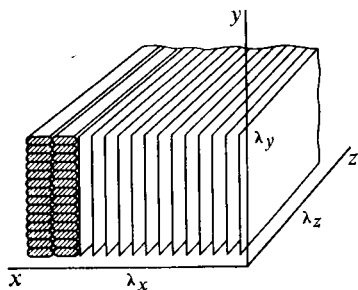


Рис. 5.2

рического подобия и полагая, что изометрические линии совпадают с жилой кабеля и его оболочкой, можно, пренебрегая условиями $\alpha d / \lambda = \text{idem}$ и $T_{*T} = \text{idem}$, на основании исходного уравнения теплоотдачи записать критерий подобия

$$\theta / Q R_T = [\theta / (i^2 R)] [\alpha d / (1 + \beta \theta)] = \text{idem},$$

где R_T — результирующее тепловое сопротивление.

Для получения теплового подобия при неустановившихся процессах следует выбирать масштабы времени на основании критерия $T_{*T} = \text{idem}$. При приближенном подходе можно выбирать масштаб времени из условия

$$T_{T2} / (m_t t_2) = T_{T1} / t_1,$$

где T_T — результирующая тепловая постоянная времени, характеризующая скорость изменения температуры во всей массе кабеля.

Приближенно считая, что теплоотдача происходит только путем конвекции, а теплопроводность свинцовой оболочки бесконечно велика, можно отразить свойства окружающей среды и изоляции кабеля критериями подобия

$$\pi_1 = \theta \alpha / (\lambda \text{ grad } \theta) \text{ и } \pi_2 = \alpha d / \lambda,$$

где λ — коэффициент теплопроводности изоляции.

Связь между этими критериями можно представить в виде

$$\theta \alpha / (\lambda \text{ grad } \theta) = f(\alpha d / \lambda) \text{ или } \theta = (\lambda / \alpha) \text{ grad } \theta f(\alpha d / \lambda),$$

что позволяет записать для полного геометрического подобия двух кабелей только один критерий подобия

$$\text{grad } \theta = \theta / d = \text{idem}.$$

Подобие тепловых процессов в электрических машинах. При установившемся режиме критерии подобия распределения температуры в стальных частях электрической машины или аппарата (рис. 5.2) можно определить на основании уравнения

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \psi B^2 = 0 \quad (5.18)$$

способом интегральных аналогов

$$\frac{\lambda_x \theta}{\psi B^2 x^2} = \text{idem}; \quad \frac{\lambda_y \theta}{\psi B^2 y^2} = \text{idem}; \quad \frac{\lambda_z \theta}{\psi B^2 z^2} = \text{idem}, \quad (5.19)$$

где $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ — коэффициенты теплопроводности вдоль осей x, y, z , причем λ_x учитывает также и теплопроводность изолирующего слоя; ψ — коэффициент, зависящий от частоты f , материала и толщины стальных листов; B — магнитная индукция.

При этом должны быть соблюдены также условия

$$\lambda_x y^2 / (\lambda_y x^2) = \text{idem}; \quad \lambda_x z^2 / (\lambda_z x^2) = \text{idem}; \quad \lambda_y z^2 / (\lambda_z y^2) = \text{idem}; \\ \lambda_{\text{ст}} / \lambda_{\text{из}} = \text{idem},$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ и $\lambda_{\text{из}}$ — коэффициенты теплопроводности стали и изоляции соответственно.

Подобие условий теплоотдачи на поверхности и связь масштабов температуры и мощности, затрачиваемой на нагревание железа и обмоток машины, устанавливаются из уравнения

$$\alpha = Q_s / \theta_1,$$

где Q_s — тепловой поток, приходящийся на единицу поверхности и рассеиваемый в окружающей среде; θ_1 — температура поверхности.

Если хладагент (воздух или масло) имеет вынужденное движение, то подобие процесса теплоотдачи устанавливается критериями

$$\pi_1 = \alpha l / \lambda; \quad \pi_2 = v l / a; \quad \pi_3 = \rho v l / \mu.$$

В частном случае геометрического подобия критериальное уравнение принимает вид

$$\alpha l / \lambda = f(l_x / l_y, \dots, \delta v / l \mu_0, v l / a) \text{ или } \alpha = \alpha_m \phi,$$

и для обеспечения подобия необходимо, чтобы $\alpha_m = \text{idem}$, а относительная функция ϕ была постоянной во всем диапазоне изменения температуры, давления и скорости воздуха, обдувающего установку.

Соотношения, аналогичные выражению $\alpha = \alpha_m \phi$, могут быть получены и при отступлении от геометрического подобия.

При наличии естественной циркуляции охлаждающей среды скорость движения хладагента зависит также от превышения температуры поверхности установки над температурой окружающей среды.

Подобие и моделирование процессов трения. Теория подобия применяется при разработке нового подхода к решению задач изучения тепловой динамики трения на основе молекулярно-механической теории трения.

При трении различные явления взаимно влияют друг на друга: взаимодействие и следующее за ним разрушение одних контактирую-

щих участков поверхностей тел сочетаются с механическими и устойчивыми изменениями (накоплением дефектов) других участков. Процесс происходит дискретно-непрерывно, сопровождаясь выделением и распространением теплоты, которая образуется вследствие деформирования и разрушения выступов тонкого поверхностного слоя. В зоне трения современных тяжело нагруженных тормозных устройств температура составляет 1000°C и более. В начальный момент торможения температура остального объема фрикционного элемента на несколько сотен градусов меньше, поэтому возникает крайняя неравномерность нагревания по толщине. Вследствие дискретности контакта резко изменяется температура смежных участков поверхности, и в результате возникают сначала напряжения термоупругости, а далее термопластичности, которые влияют на режим контактирования и определяют характер износа.

Процесс трения характеризуется тремя группами взаимосвязанных явлений: взаимодействием контактирующих поверхностей; изменениями, происходящими в материалах пары трения при взаимодействии; разрушением поверхностей (износом). При рассмотрении явлений первой группы применимы методы механики, в частности динамики; при анализе явлений второй группы — методы теплофизики и механохимии (т. е. поверхностных явлений и материаловедения); при рассмотрении явлений третьей группы — методы теории термоупругости и термопластичности. Трудность моделирования трения заключается в том, что необходимо рассматривать совокупность взаимосвязанных процессов; некоторые процессы имеют нелинейные зависимости от определяющих параметров, а для некоторых процессов аналитические зависимости отсутствуют. Поэтому для получения критериев подобия применяется метод анализа размерностей, учитывающий имеющуюся статистику опытных данных.

На рис. 5.3, а показана модель пары трения с геометрическими размерами элементов (V_1, V_2 — объемы; A_{a1} и A_{a2} — номинальные площади трения) и с динамическими параметрами режима трения ($W_{т.п}$ — работа, m_1, m_2 — масса, v — скорость, ω — ускорение, t — время, P — нагрузка). В общем случае номинальные поверхности трения элементов пары различаются, что учитывается коэффициентом взаимного перекрытия $K_{вп}$. Характерный размер контактирующих тел учитывается параметрами S_1 и S_2 , которые определяются как частное от деления взаимной площади поверхности ($A_{с1,2}$) на соответствующий объем элемента.

На рис. 5.3, б представлена модель макротеплообразования, теплопроводности и теплоотдачи в окружающую среду. Здесь важно то, что тепловой поток, генерируемый трением, распределяется между элементами пары в соответствии с коэффициентом распределения тепловых потоков $\alpha_{т.п}$. Процессы теплопроводности характеризуются параметрами — коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, удельными теплоемкостями c_1, c_2, c_3 , плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3 , а процессы теплоотдачи — коэффициентами внешней теплоотдачи σ_1, σ_2 . Эти процессы зависят от температурных полей в элементах пары трения и температуры окружающей среды.

Температурные поля в элементах пары в общем случае зависят от времени трения. Модель контактирования шероховатой поверхности на примере номинальной площади трения A_{a1} показана на рис. 5.3, в. Как известно, касание поверхностей дискретно и при трении необходимо различать три площади: A_{a1} , A_{a2} — номинальную, A_{c1} , A_{c2} — контурную площадь касания и $\Sigma \Delta A_r$ — фактическую площадь как сумму элементарных пятен касания. Первая площадь является заданным параметром, а вторая и третья образуются при трении под нагрузкой в зависимости от шероховатости поверхности и механических

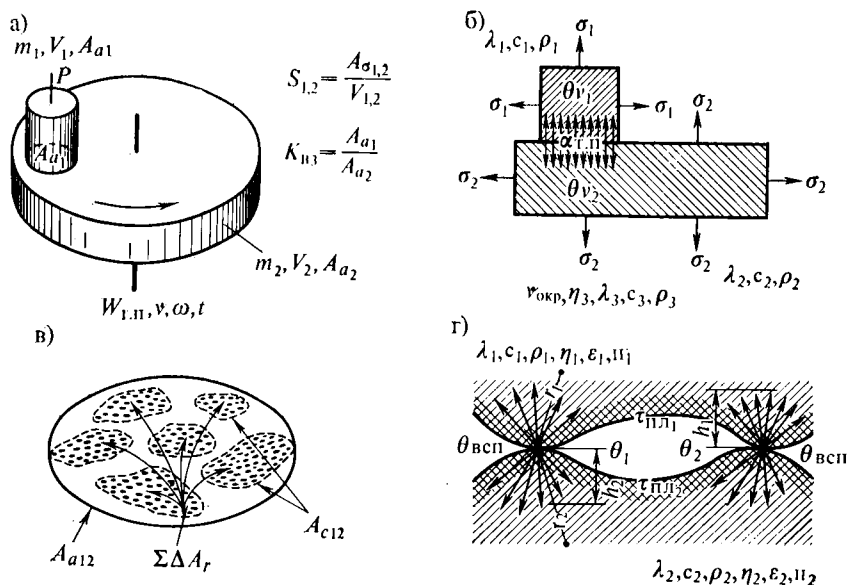


Рис. 5.3

свойств материалов пары. На номинальной поверхности имеет место средняя температура поверхности трения, а температура вспышки возникает на фактическом пятне касания. При износе контурные зоны касания перемещаются по номинальной поверхности.

Модель микроконтактирования изображена на рис. 5.3, г. В модели учтена микрошероховатость каждого из элементов (r_1 , r_2 — радиусы единичной неровности, h_1 , h_2 — высоты неровностей). На микровыступах, находящихся в контакте, возникает температура вспышки. На формирование контакта при деформациях трения влияют поверхностные пленки, образуемые на каждом из элементов пары, характеризующиеся сопротивлением разрушению этих пленок $\tau_{пл1}$, $\tau_{пл2}$, а также упругие ϵ_1 , ϵ_2 , пластические μ_1 , μ_2 и вязкостные η_1 , η_2 свойства материалов (последние обычно проявляются при высоких температурах). Эти свойства зависят от температуры в каждом из элементов пары (максимальная является суммой средней температуры поверхно-

сти θ_1 , θ_2 и температуры вспышки $\theta_{\text{всп}}$) и градиента температуры $\partial\theta_1/\partial P_1$, $\partial\theta_2/\partial P_2$.

Во многих случаях на трение и износ существенно влияют макро- и микрокоробление элементов пары трения, вызываемое температурным градиентом. Поэтому необходимо учитывать термические коэффициенты линейного расширения материалов a_1 и a_2 .

Физическая сущность явления такова, что размеры (например, длина) трущихся тел и пути трения оказывают различное воздействие. Поэтому характерный размер тел учитывается параметром S_1 и S_2 , имеющим размерность, отличную от размерности пути трения, который является отношением теплоотдающей поверхности к теплопоглощаемому объему каждого из элементов пары.

При моделировании процесс трения можно охарактеризовать совокупностью следующих основных критериев подобия; теплофизического (π_1), теплопередачи (π_2), физико-механического (π_3), макро- и микрогеометрии контактирования (π_4), динамического (π_5), аналитические выражения которых могут быть представлены в виде*:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_{1,2,3}}{C_{1,2,3} \rho_{1,2,3}} \frac{\text{grad } \theta_{1,2}}{\Delta\theta_{1,2} v^4 t}; \quad \pi_2 = \frac{\sigma_{1,2}}{g\beta} \frac{v^3 t^3 (\Delta\theta_{1,2})^{1/2}}{P^2};$$

$$\pi_3 = \frac{E_{1,2} \tau_{\text{пл}1,2}}{P_{1,2} W_{\eta_{1,2,3}}} \frac{P^2 t^2}{v}; \quad \pi_4 = \frac{S_{1,2}}{A_{a_{1,2}}} \frac{r_{1,2} v^6 t^6}{h_{1,2}}; \quad \pi_5 = m_{1,2} \omega_{a_{1,2}} \frac{v \Delta\theta_{1,2}}{P^2 t}.$$

Для построения модели необходимо равенство критериев подобия модели и оригинала. Приравнивание критериев, характеризующих модель, к критериям, характеризующим оригинал, дает систему уравнений, совместное решение которой позволяет получить значения масштабов для одноименных величин модели и оригинала.

Справедливость изложенного подхода подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями, в частности лабораторными испытаниями фрикционных пар для следующих четырех вариантов постановки задачи**:

- моделирование нестационарного трения с учетом теплоотдачи;
- моделирование кратковременного нестационарного трения без учета теплоотдачи;
- моделирование стационарного трения;
- моделирование при стационарном режиме эффективного значения коэффициента трения нестационарного режима.

В отличие от остальных методов, которые сводятся к той или иной упрощающей интерпретации математической модели процесса, метод размерностей дает возможность учесть практически все необходимые параметры физической модели. Анализ размерностей позволяет получить критериальные соотношения, обобщающие явления трения. Для определения критериев подобия используется методика анализа матриц размерностей на ЦВМ. Решение задачи моделирования при различ-

* Коэффициенты с двойным или тройным индексом указывают на необходимость учета соответствующих взаимодействующих величин.

** Решения были выполнены А. В. Чичинадзе.

ных начальных условиях даёт совокупность частных решений для многофакторной системы тепловой динамики трения. Метод построения и решения критериальных уравнений успешно применен для выявления масштабных факторов в отдельных задачах тепловой динамики трения. Моделирование проводилось на большом количестве образцов различных конструкций тормозов, работающих в режимах как однократного, так повторно-кратковременного (с постепенным накоплением теплоты) торможения.

§ 5.2. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Задачи моделирования электрических машин. Задачи моделирования электрических машин разделяются на три основные группы:

1. Техничко-экономические задачи, в которых с помощью подобия устанавливаются улучшенные конструкции машин, их размеры, выявляются оптимальные серии и т. д.

2. Задачи по созданию машин с использованием еще не изученных на практике физических принципов.

Обе эти группы задач требуют установления **п о л н о г о п о д о б и я**, учитывающего распределения электромагнитных полей.

3. Задачи, для решения которых необходимо изучение временных процессов в машинах, включенных в какие-либо системы (электроэнергетические, системы электропривода). Для решения такого рода задач вполне достаточно установления **н е п о л н о г о п о д о б и я**.

Физическое (динамическое) моделирование электрических систем, широко применяемое в настоящее время, требует только подобия цепей. Однако для его осуществления приходится специально конструировать электрические машины-модели, удовлетворяя требованиям, вытекающим из условий подобия.

Подобие электрических машин, рассматриваемое с точки зрения подобия электрических цепей, является неполным. Оно обеспечивает, если удовлетворяются система критериев подобия цепей при характерных положениях ротора и дополнительные критерии, требующие одинаковых относительных изменений взаимондуктивностей контуров при изменении электрического угла, характеризующего положение ротора по отношению к статору. Между критериями подобия бесколлекторных электрических машин и их размерами имеется определенная связь. При сохранении частоты ($f = \text{const}$) физическое подобие моделей как элементов системы может быть получено только при отклонении от геометрического подобия в пределах полюсного деления.

Открывая большие возможности для исследования процессов, происходящих в энергосистемах, такие модели оказываются непригодными для количественного исследования электромагнитных полей «внутри» электрических машин-оригиналов.

Методы физического моделирования можно успешно применять и для исследования внутренних электромагнитных процессов, которое обеспечивается подобием электромагнитных полей.

Подобие коллекторных машин. Для случая неполного подобия критерии подобия переходных процессов в машинах постоянного тока с независимым возбуждением* с практически достаточной точностью можно найти из двух дифференциальных уравнений, отражающих электромагнитные и электромеханические процессы

$$u - \omega \Phi(i_B) = L di/dt + iR; \quad J_0 \omega d\omega/dt - M_{\text{ном}} \omega = ui - i^2 R,$$

где u — напряжение на якоре; ω — угловая скорость якоря; i_B — ток возбуждения; L и R — суммарные индуктивность и сопротивление цепи якоря; i — ток якоря; J_0 — момент инерции; $M_{\text{ном}}$ — номинальное значение вращающего момента.

В соответствии со способом интегральных аналогов (делением первого уравнения на iR , а второго — на ui) можно записать три определяющих критерия подобия:

$$\pi_1 = \omega \Phi(i_B)/u; \quad \pi_2 = J_0 \omega_{\text{ном}}^2 / (P_{\text{ном}} t); \quad \pi_3 = L/(Rt),$$

где $\omega_{\text{ном}}$ — номинальная угловая скорость; $P_{\text{ном}}$ — номинальная мощность; $B = J_0 \omega_{\text{ном}}^2 / P_{\text{ном}}$ — величина, характеризующая инерционные свойства якоря электродвигателя и привода.

Приближенно (без учета свободных токов в обмотке возбуждения) критерий π_1 , характеризующий размагничивающее действие якоря, можно представить в виде

$$\pi_1 = \omega_{\text{ном}} (E/u_{\text{ном}}) \Phi(i_B/i_{\text{ном.в}}),$$

где E — э. д. с., соответствующая нормальному току возбуждения; $\Phi(i_B/i_{\text{ном.в}})$ — функция, представляющая собой относительную характеристику холостого хода и отражающая свойства магнитной цепи двигателя.

Подобие и моделирование синхронных машин. Определяя критерии подобия, прежде всего нужно выбрать исходную систему уравнений, стремясь получить подобие протекания процессов только во времени.

Работа трехфазной синхронной машины с демпферной обмоткой в установившихся режимах работы и в переходных процессах с исчерпывающей полнотой описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_a &= i_a R_a + \frac{d}{dt} [L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c + M_{ap} i_p + M_{ad} i_d]; \\ u_b &= i_b R_b + \frac{d}{dt} [M_{ab} i_a + L_b i_b + M_{bc} i_c + M_{bp} i_p + M_{bd} i_d]; \\ u_c &= i_c R_c + \frac{d}{dt} [M_{ac} i_a + M_{cb} i_b + L_c i_c + M_{cp} i_p + M_{cd} i_d], \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

где i_p — ток ротора; i_d — ток демпферной обмотки;

* Этим же методом могут быть решены задачи для любых систем возбуждения.

— для цепи ротора

$$u_p = i_p R + \frac{d}{dt} [M_{pa} i_a + M_{pb} i_b + M_{pc} i_c + L_p i_p]; \quad (5.21)$$

— для цепи демпферной обмотки

$$u_d = i_d R_d + \frac{d}{dt} [M_{da} i_a + M_{db} i_b + M_{dc} i_c + L_d i_d]; \quad (5.22)$$

— для электромагнитного момента

$$M_{эм} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial \delta},$$

где $s = d\delta/dt$ — скольжение;

$$W = 0,5 (L_a i_a^2 + L_b i_b^2 + L_c i_c^2) + M_{ab} i_a i_b + M_{bc} i_b i_c + M_{ac} i_a i_c + \\ + M_{pa} i_a i_p + M_{pb} i_b i_p + M_{pc} i_c i_p + M_{da} i_a i_d + M_{db} i_b i_d + M_{dc} i_c i_d; \quad (5.23)$$

— для относительного движения ротора

$$J_0 d^2 \delta / dt^2 + M_{эм} = M_{мх} + \Delta M_{мх}. \quad (5.24)$$

В формулах (5.20)—(5.24) индуктивность L и взаимоиндуктивность M являются функциями положения ротора в пространстве и функциями магнитной проницаемости μ , в свою очередь зависящей от среднего значения напряженности поля H на том или ином участке магнитной цепи машины. Обычно при исследованиях не принимают во внимание действительный вид функций $\mu(H)$, $L(\delta)$ и $M(\delta)$, а ограничиваются только учетом первой гармонической взаимоиндуктивности между обмотками статора и ротора и учетом второй гармонической индуктивностей обмоток статора и ротора. Но и при этих упрощениях аналитическое решение оказывается слишком сложным. Стремление упростить дифференциальные уравнения приводит к применению различных систем координат ($d, q, 0, \alpha, \beta, 0, f, b, 0$).

Для установления подобия нет необходимости решать дифференциальные уравнения или вводить какие-либо ограничения. Установив условия подобия на основании уравнений (5.20) — (5.24), достаточно точных и наиболее простых с точки зрения записи и выяснения физической природы процессов, получим критерии подобия, включающие основные электрические параметры обмоток — M, L, R и параметр, характеризующий инерцию ротора, — J_0 . Параметры синхронной машины обычно даются заводом применительно к системе $d, q, 0$. Их можно ввести в критерии подобия, определенные на основе исходных уравнений. Уравнения (5.20)—(5.24) справедливы не только для синхронных, но и для асинхронных машин (если предположить на роторе три замкнутые обмотки), а также для трансформаторов (если предположить, что ротор неподвижен).

Условия подобия, определяемые общими уравнениями взаимно перемещающихся магнитно-связанных цепей, можно сформулировать в трех положениях:

1. Для каждой из магнитно-связанных цепей машины (обмоток статора, возбуждения, демпферной) отношение полной индуктивности

к активному сопротивлению должно быть одинаковым в модели и оригинале, если процессы рассматриваются в одном и том же масштабе времени:

$$L/R = \text{idem}.$$

Если масштаб времени для модели изменяется, то единица измерения времени должна быть прямо пропорциональна постоянной времени. В этом случае

$$T_* = L/(Rt) = \text{idem}. \quad (5.25)$$

2. Аналогичному соотношению должны удовлетворять и взаимдуктивности:

$$M'_{*ab} = M_{ab}/(R_a t) = \text{idem}; \quad M''_{*ab} = M_{ab}/(R_b t) = \text{idem}, \quad (5.26)$$

где R_a и R_b — суммарные сопротивления магнитно-связанных цепей.

Из уравнений (5.20) и (5.24) видно, что в машинах, параметры которых различны по значению, но удовлетворяют соотношениям (5.25) и (5.26), протекающие процессы отличаются только масштабами переменных. Уравнение (5.23) позволяет получить еще один дополнительный критерий. Для любой цепи машины, если удовлетворены критерии (5.25) и (5.26), то

$$\frac{M_{\text{эм}} \delta}{i^2 L} = \frac{M_{\text{эм}} \delta}{t} \frac{tR}{i^2 RL} = \frac{P_{\text{эм}}}{i^2 R} \frac{1}{T_*} = \text{idem} \text{ или } \frac{i^2 R}{P_{\text{эм}}} = \text{idem}.$$

Отношение электромагнитной мощности машины к потерям мощности в активном сопротивлении цепи должно быть одинаковым в модели и оригинале. Однако это условие не является определяющим. Если требования (5.25) и (5.26) выполнены, то всегда можно установить в обмотке возбуждения ток, обеспечивающий соблюдение указанного условия. Таким образом, это условие может служить для определения масштабов переменных.

3. Должно удовлетворяться требование, вытекающее из уравнения (5.24):

$$J_0 \delta / (M_{\text{мх}} t^2) = \text{idem}.$$

Если значение δ в модели и оригинале одинаково, то это условие сводится к требованию

$$M_{*0} = T_J / (\omega_0 t^2) = \text{idem}.$$

Из уравнения (5.24) вытекает еще одно требование: различные механические потери в машине-модели должны составлять такую же долю от полной мощности, какую составляют те же потери в машине-оригинале.

Индуктивность L и взаиминдуктивность M изменяются при изменении положения ротора:

$$L, M = f(\delta).$$

Если зависимости $M = M_{\text{max}} f(\delta/\delta_{\text{max}})$ и $L = L_{\text{max}} f(\delta/\delta_{\text{max}})$ в модели и оригинале одинаковые, то подобие всех пространственных гармонических обеспечено.

Аналогично для обеспечения подобия в отношении эффекта насыщения необходимо в модели иметь такие же характеристики, как и в оригинале:

$$\mu = \mu_{\max} f(i/i_{\max}); \quad L = L_{\max} f(i/i_{\max}).$$

Переходя к параметрам, принятым в теории двух реакций, и выражая все индуктивности и взаимоиндуктивности через L_d , L_q и L_0 , получаем простую запись закона подобия электрических машин.

Электромеханические процессы в электрических машинах подобны, если эти машины имеют одинаковые величины T_* , M_{*ab} , M_{*0} , одинаковые относительные потери мощности и подобные начальные режимы. Учитывая только первую гармоническую наводимой ротором э. д. с., можно обеспечить влияние эффекта насыщения на работу машины при одинаковой относительной характеристике холостого хода, позволяющей получить необходимое насыщенное значение X_{ad} . Сравнительно небольшое влияние насыщения на X_{aq} специально может не моделироваться. Влияние насыщения на сопротивление рассеяния X_σ и на сопротивление взаимоиндукции фаз M_{ab} должно быть проверено дополнительными опытами, так как обычно завод таких данных не дает.

Преобразуя основные критерии подобия (5.24), (5.25) подстановкой вместо L и M значений L_d , L_q , M_d , M_q и учитывая, что любая комбинация из критериев подобия (отношение, произведение и т. д.) также является критерием подобия, приходим к выводу, что отношения X'_d/X_d ; X''_d/X_d ; X_q/X_d ; X_{ad}/X_d и т. д. должны быть одинаковы в модели и оригинале.

Из условия гомохронности ($\omega t = \text{idem}$) следует, что изменять масштаб времени при исследовании процессов, происходящих в машинах переменного тока, можно только одновременно с изменением частоты.

В наиболее общем виде можно указать три определяющих критерия подобия электрических систем с вращающимися машинами:

— критерий электромагнитных и электрических скоростей $T_* = \text{idem}$;

— критерий механической скорости $T_{J*} = \text{idem}$;

— критерий гомохронности $t_* = \text{idem}$, или дополнительный критерий, необходимый для установления масштаба.

Эти критерии, записанные в относительных единицах*, позволяют выяснить возможности приближенного моделирования, изменения масштаба переменных i и u в магнитно-связанных цепях вместо изменения полного сопротивления и т. д. Особенно полезны они в тех случаях, когда моделируются машины и аппараты, еще недостаточно хорошо изученные.

Как упоминалось выше, получить в машинах-моделях малой мощности те же отношения $L/(Rt) = L\omega/R$, что и в мощных машинах, затруднительно. Изменять частоту так, чтобы обеспечить одинаковое значение ωt в модели и оригинале, также может быть затруднительно.

* В качестве основных, базисных, величин должны быть приняты две электрические величины (например, мощность и напряжение) и одна механическая (синхронная частота вращения).

Однако оказывается возможным получать приближенное подобие процессов, изменяя масштабы времени с нарушением критерия гомохронности.

Предположим, что изучается изменение во времени токов, напряжений и магнитных потоков. Характер изменения этих величин при любых процессах известен. Так, например, на основании опыта и анализа можно утверждать, что значение тока в любой обмотке синхронной машины может быть представлено выражением вида*

$$i = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2 + \varphi_2) + \dots + B_1 e^{-t/T_1} + \\ + B_2 e^{-t/T_2} + \dots + D_1 e^{-t/T_{D1}} \sin(\omega t + \psi'_1 + \varphi'_1) + D_2 e^{-t/T_{D2}} \times \\ \times \sin(2\omega t + \psi'_2 + \varphi'_2) + D_3 e^{-t/T_{D3}} \sin(3\omega t + \psi'_3 + \varphi'_3) + \dots$$

При $\omega_m = \omega_0$ с учетом (5.24)—(5.26) получаем критерии приближенного электромеханического подобия $T_J/T_0^2 = \text{idem}$, $t/T_0 = \text{idem}$, причем $T_0 = T_k$, где $k = 1, \dots, D_3, \dots$,

Возможности изменения постоянных времени путем изменения масштабов времени оказываются ограниченными необходимостью подобия начальных условий. Подобие начальных режимов требует равенства соответственных значений углов расхождения по фазе э. д. с. различных машин системы ($\delta_m = \delta_0$) и углов сдвига токов по отношению к э. д. с. А это можно получить только при равенстве значений параметра $\Sigma R/\Sigma X$ соответствующих цепей статора у модели и оригинала. Следовательно, изменяя масштаб времени, можно допустить изменение лишь тех постоянных времени, которые зависят от параметров цепей ротора.

Изменяя в модели постоянную времени цепей ротора за счет изменения масштаба времени, но сохраняя абсолютные значения постоянных времени цепей статора, можно осуществить подобие начальных условий, однако при этом приходится допустить искажения скорости изменения тех составляющих, затухание которых зависит от постоянных времени статора. Так, будут искажены аperiodические составляющие токов статорных цепей и периодические составляющие токов роторных цепей. Это приведет к некоторому искажению э. д. с., наводимых пульсирующими магнитными потоками. Кроме того, несколько исказится значение э. д. с., обусловленной дополнительной скоростью, которую ротор получает при качаниях:

$$e \equiv \omega = \omega_0 + d\delta/dt.$$

Изменение масштаба времени и абсолютной скорости изменения угла δ отвечает изменению доли составляющей э. д. с., обусловленной дополнительной скоростью $d\delta/dt$.

Для выявления допускаемой неточности удобно воспользоваться уравнениями синхронной машины, предложенными Парком—Горевым:

$$(T_J/M_{\text{мх}}) p^2 \delta - 1 = [i_q \Psi_d - i_d \Psi_q]/M_{\text{мх}}; \quad (5.27)$$

Приведенные здесь выражения характеризуют только качественные соотношения между отдельными составляющими переменных параметров.

$$\left. \begin{aligned} e_d &= p\Psi_d - \frac{\dot{R}}{X_d(p)} [G(p)E_0 - \Psi_d] - \Psi_q p(t+\delta); \\ e_q &= p\Psi_q + \frac{R}{X_q(p)} \Psi_q + \Psi_d p(t+\delta), \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

где $M_{\text{мх}}$ — механический момент на валу машины;

$$i_d = [G(p)E_0 - \Psi_d]/X_d(p); \quad i_q = -\Psi_q/X_d(p).$$

При одной обмотке возбуждения и отсутствии демпферных цепей

$$X_d(p) = \frac{X_d + X'_d T}{1 + pT}; \quad X_q(p) = X_q; \quad G(p) = \frac{1}{1 + pT}.$$

При наличии демпферных цепей выражения для $X_d(p)$, $X_q(p)$ и $G(p)$ усложняются, но структура их остается той же.

Предположим, что в m_t раз изменена постоянная времени T и одновременно в $1/m_t$ изменен масштаб времени. Новая постоянная времени $T' = T$. Изменение масштаба времени означает и изменение оператора p , новое значение которого

$$p' = p/m_t.$$

Предположим далее, что в соответствии с критерием приближенного подобия постоянная инерции T_J изменена в m_t^2 раз и ее новое значение $T'_J = T_J m_t^2$. Подставим новые значения p' , T'_J и T' в уравнения (5.27) и (5.28). Подстановка вызовет появление множителя $1/m_t$ перед членами $p\delta$, $p\Psi_d$ и $p\Psi_q$. Это, в свою очередь, приведет к неточному воспроизведению в модели влияния дополнительной угловой скорости ротора $p\delta$, влияния периодической составляющей тока ротора $p\Psi_d$ и аperiodической составляющей тока статора $p\Psi_q$ на характер изменения угла во времени $\delta = f(t)$ и характер изменения токов статора $I_{\text{ст}}$ и ротора I_r (рис. 5.4, где I — оригинал, II — приближенное моделирование, III — моделирование с изменением частоты). Большое количество опытов и расчетов показало, что это влияние ничтожно мало, если значение X/R для цепи статора достаточно велико (порядка 100). Влияние заметно только при малых значениях X/R , оно тем больше, чем меньше абсолютные значения постоянной времени ротора T и постоянной инерции T_J . На рис. 5.5 показано изменение угла при различных значениях постоянных инерции и постоянных времени, причем параметры подобраны так, что соблюдается условие $T_J/T_0^2 = \text{idem}$. При этом кривые I , II , III (штриховые линии) и кривые 1 , 2 (пунктирные линии) — приближенный расчет (без учета $p\delta$ и $p\Psi$), кривые I , II , III (сплошные линии) и кривые 1 и 2 (штрихпунктирные линии) — расчет по уравнениям (5.27) и (5.28).

Следовательно, приближенное моделирование почти всегда осуществимо. Его нельзя осуществлять только в редко встречающихся в практике случаях — при введении в цепь статора большого активного сопротивления или исследовании процессов в сравнительно маломощных генераторах, связанных протяженной кабельной сетью.

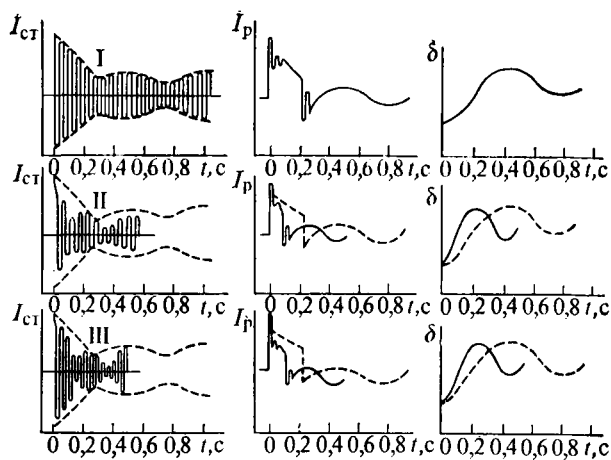


Рис. 5.4

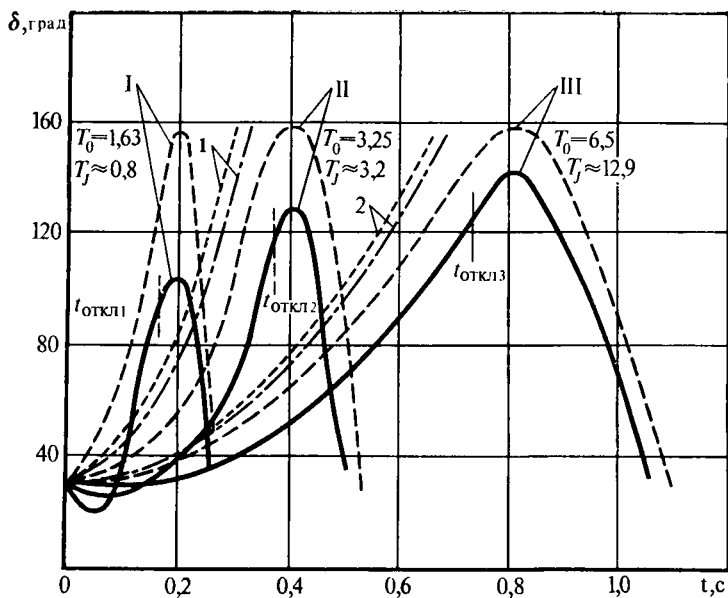


Рис. 5.5

Моделирование при повышенной частоте. Обычно это моделирование при электрической угловой скорости генераторов модели, большей, чем угловая скорость генераторов оригинала; оно позволяет удобно осуществлять требования критериев электромагнитной $T = \omega L/R = \text{idem}$, электрической $T = \omega C/G = \text{idem}$ и механической $T_{J*} = \text{idem}$ скоростей.

У нормальных машин малой мощности параметры T имеют малые значения и их трудно увеличивать. При повышенной угловой скорости указанные критерии обеспечиваются сравнительно легко. Так как при увеличении частоты процессы в модели протекают быстрее,

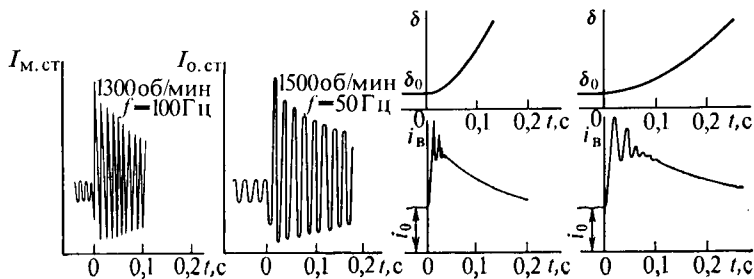


Рис. 5.6

чем в оригинале (рис. 5.6), то необходимо моделировать и граничные условия, изменяя соответственно выдержки времени реле, скорости отключения и т. д. Возможности моделирования машин с увеличением угловой скорости ограничиваются в связи с возрастанием постоянной инерции, которая (при выражении ее в относительных единицах) пропорциональна квадрату частоты вращения. Таким образом, значение m_ω не может быть выбрано больше, чем $\sqrt{m_m}$. Из этих соображений с учетом необходимости получения требуемых соотношений между сопротивлениями модели и оригинала определяются частота вращения, число полюсов и соотношения между геометрическими размерами (например, между диаметром ротора и его длиной). Выбирать большое значение m_ω нецелесообразно еще и потому, что при этом усложняется моделирование ряда побочных явлений (потери мощности на гистерезис, от вихревых токов, на трение и т. д.); затрудняется комплексное моделирование, охватывающее, например, наряду с электрическими процессами процессы в первичном двигателе; исключается применение нормальных измерительных приборов, аппаратов, реле. При моделировании системы шин бесконечной мощности требуются специальные мощные источники питания. Моделирование с большим повышением частоты можно осуществлять на машинах-моделях малых габаритов. Но возникающие при этом трудности (малые выдержки времени, трение в подшипниках, трение о воздух и т. д.) требуют применения других способов моделирования.

Генератор-модель, построенный на повышенной частоте, должен быть сконструирован так, чтобы его воздушный зазор мог легко из-

меняться. При этом переменными могут быть реактивные сопротивления рассеяния статора и ротора. Такая конструкция позволяет быстро изменять реактивные сопротивления модели. Наибольшие трудности при повышенной частоте вызывает моделирование потерь мощности на гистерезис и от вихревых токов, которые приблизительно входят в следующих соотношениях с мощностью и частотой:

$$\Delta P_{\text{гис}} \equiv 1/\sqrt[4]{P}; \quad \Delta P_{\text{вихр}} \equiv \omega/\sqrt[4]{P}.$$

Условия подобия можно обеспечить путем улучшения качества стали и уменьшения толщины ее листов.

Некоторые практические вопросы моделирования синхронных машин. Если определяющие критерии подобия модели и оригинала соответственно одинаковы, то всегда можно так подобрать базисные условия, чтобы получить равенство долевых параметров и тождественность уравнений при выражении величин в относительных единицах.

Пусть, например, один синхронный генератор имеет синхронное реактивное сопротивление 200% и активное сопротивление 3%, а другой генератор — реактивное сопротивление 100% и активное сопротивление 1,5%. Критерий $X/R = \text{idem}$ будет при этом удовлетворен. Если принять, что у первого генератора $P_6 = 0,5P_n$, то параметры первого и второго генератора в относительных единицах будут одинаковы. В этом случае режим полной нагрузки для второго генератора соответствует режиму половинной нагрузки для первого генератора.

Техника нахождения условий подобия сводится к следующему. Записываем уравнения модели и оригинала, принимая за базисные значения номинальные мощности и токи и считая, что частоты их равны. Выразим параметры модели через параметры оригинала:

$$R_m = m_R R_o; \quad X_m = m_X X_o; \quad M_m = m_M M_o.$$

Подбирая параметры и масштабы переменных, можно получить уравнения для модели и оригинала тождественными. У всех элементов сложной системы масштабы времени и мощности должны быть одинаковыми, но на разных ступенях трансформации токи и напряжения могут иметь разные масштабы. Изменение масштаба равносильно изменению коэффициента трансформации или изменению всех сопротивлений соответствующей части системы. Поскольку в данном случае вопросы геометрического подобия оказываются несущественными, то в конечном счете безразлично, как получены требуемые соотношения параметров — «внутри» каждой машины-модели или «извне», с помощью дополнительных устройств, которые можно включать последовательно в цепь этой модели. Такими дополнительными устройствами могут быть:

— трансформатор, позволяющий изменять подведенное к статору напряжение и приведенные значения активных и реактивных сопротивлений;

— катушки индуктивности, позволяющие изменять реактивные сопротивления рассеяния обмоток статора и ротора;

— реостаты, изменяющие активные сопротивления обмоток ротора и статора и их постоянные времени;

— серийный коллекторный генератор или специальная электронная установка, создающая отрицательное активное сопротивление.

Дополнительные устройства могут быть не только электрическими. Возможно, например, применение и специальных механических установок, искусственно уменьшающих трение, улучшающих охлаждение и т. д. Разумеется, применение любого дополнительного устройства возможно только при условии, что процессы, происходящие в нем, не искажают основных процессов, происходящих в модели.

Подобие и моделирование трансформаторов. При неполном моделировании энергосистем, когда изучается только протекание процессов во времени, снимается вопрос о пространственных размерах трансформатора-модели и влиянии геометрических соотношений и конструкции на электрические параметры и процессы. В условия подобия входят только параметры трансформаторов, рассматриваемые как сосредоточенные. Критерии могут быть получены непосредственно из уравнения трансформатора:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0; \quad R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (5.29)$$

На основе способа интегральных аналогов

$$1 + \frac{L_1}{R_1 t} + \frac{M}{R_1 t} \left(\frac{i_2}{i_1} \right) = 0; \quad 1 + \frac{L_2}{R_2 t} + \frac{M}{R_2 t} \left(\frac{i_1}{i_2} \right) = 0$$

или

$$1 + T_{*1} + T_{*12} n_i = 0; \quad 1 + T_{*2} + T_{*21} n_i^{-1} = 0.$$

Очевидно, что при условии $T_{*1} = T_1/t = L_1/R_1 t = \text{idem}$ и $T_{*2} = L_2/R_2 t = \text{idem}$, а также при

$$T_{*12} = M/(R_1 t) = \text{idem}; \quad T_{*21} = M/(R_2 t) = \text{idem} \quad (5.30)$$

процессы подобны.

Во всех трансформаторах, параметры которых удовлетворяют приведенным выше условиям, величина n_i , равная отношению приведенных токов первой и второй обмоток, одинакова. Найденные условия, как и следовало ожидать, ничем не отличаются от определяющих критериев подобия, полученных для электрических машин, и могут быть, по аналогии, записаны для многообмоточных трансформаторов. Трансформаторы, удовлетворяющие этим критериям, подобны при нестационарных процессах.

Вместо определяющих критериев (5.30) можно записать критерии для индуктивностей рассеяния:

$$T_{*1\sigma} = L_{1\sigma}/(R_1 t) = \text{idem}; \quad T_{*2\sigma} = L_{2\sigma}/(R_2 t) = \text{idem}; \\ L_{1\sigma}/M = \text{idem}; \quad L_{2\sigma}/M = \text{idem}.$$

Если явления, происходящие в трансформаторе со стальным сердечником, не представляют интереса, то достаточно потребовать, чтобы сумма этих критериев была постоянна:

$$L_K/M = (L_{1\sigma} + L_{2\sigma})/M = \text{idem} \quad \text{или} \quad x_K/x_M = \text{idem}; \quad (5.31)$$

сумма критериев для активных сопротивлений

$$r_K t/M = (R_1 + R_2) t/M = \text{idem}$$

или при одинаковых частотах

$$r_K/x_{\mu} = \text{idem}. \quad (5.32)$$

К определяющим критериям трансформатора следует добавить дополнительные критерии, выполнение которых также необходимо:

— постоянство относительных электрических потерь или относительного сопротивления короткого замыкания

$$P_{*Э} = P_{Э}/S_{\text{ном}} = (P_{Э1} + P_{Э2})/S_{\text{ном}} = (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2)/S_{\text{ном}} = r_{*K}$$

или

$$x_{*\mu} = (x_{*\mu}/r_{*K}) r_{*K} = \text{idem}; \quad (5.33)$$

— постоянство относительных магнитных потерь при номинальном напряжении

$$P_{*М} = P_{М}/S_{\text{ном}}$$

или

$$P_{*М} x_{*\mu} = \text{idem}; \quad (5.34)$$

— подобие относительных характеристик холостого хода

$$U_{*0} = f(I_{*\mu}) = \text{idem}. \quad (5.35)$$

Критерии подобия для многообмоточных трансформаторов записываются аналогично. Уравнения (5.33)—(5.35) остаются без изменений. Критерии (5.31) и (5.32) должны быть записаны для всех возможных сочетаний обмоток:

$$r_{kmn}/x_{\mu} = \text{idem}; \quad x_{kmn}/x_{\mu} = \text{idem},$$

где r_{kmn} и x_{kmn} — приведенные к первичной обмотке сопротивления короткого замыкания m -й и n -й обмоток при разомкнутых остальных обмотках.

При несимметричных режимах работы необходимо дополнительно потребовать выполнения определяющего критерия

$$x_0/x_{\mu} = \text{idem}.$$

Создаваемая на базе полученных критериев модель трансформатора, имеющая мощность значительно меньшую, чем мощность оригинала, разумеется, должна иметь и значительно меньшие размеры (приблизительно $l \equiv \sqrt[4]{V\bar{P}}$). Так же как и для генератора, полное относительное реактивное сопротивление трансформатора мало зависит от его мощности. Относительное активное сопротивление трансформатора возрастает с уменьшением мощности и размеров:

$$R_0/\rho_0 \equiv 1/(\mu\omega l^2),$$

где l — характерный размер.

Намагничивающий ток трансформатора

$$I_{\mu 0/\rho_0} \equiv B/(\mu i_{\text{ном}} l),$$

где $i_{\text{ном}}$ — плотность тока при номинальной нагрузке.

Постоянная времени $T = \omega L/R$ с уменьшением размеров снижается, так как магнитная индукция B одинакова в модели и оригинале (условие $B = \text{idem}$ необходимо для правильного отражения условий насыщения).

Таким образом, получить трансформатор-модель уменьшенных размеров и мощности, но удовлетворяющий критериям подобия, можно только при увеличении частоты. При неизменной частоте можно уменьшать активное сопротивление трансформатора, увеличивая его геометрические размеры. Однако это приводит к снижению номинальной плотности тока в его обмотках и увеличению намагничивающего тока. Для выполнения условия подобия трансформаторов малой мощности при неизменной частоте приходится принимать компромиссные решения — искусственно увеличивать сопротивления рассеяния за счет внешних сопротивлений и несколько увеличивать намагничивающие токи. Целесообразно применять автотрансформаторы вместо трансформаторов. Обычно проектирование модельных силовых трансформаторов затрудняется необходимостью одновременно обеспечить совпадение относительных характеристик холостого хода и равенство относительных потерь короткого замыкания. Как правило, удается получить совпадение потерь короткого замыкания лишь при равенстве токов холостого хода для номинальных напряжений. Однако такая модель трансформатора может быть с успехом использована при изучении динамической устойчивости электропередач.

Подобие и масштабы моделирования электромагнитных полей в электрических машинах. Электромагнитные процессы в электрических машинах описываются в общем случае системой уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = j + \partial \vec{D} / \partial t; \text{rot } \vec{E} = K_2 (-\partial \vec{B} / \partial t),$$

в которых при исследовании всех процессов, кроме волновых, протекающих при высоких частотах, можно не учитывать плотности тока смещения:

$$\partial \vec{D} / \partial t = e \partial \vec{E} / \partial t = 0.$$

Если изготовить модель некоторой электрической машины, геометрически подобной оригиналу, т. е. связать все линейные размеры модели l_m со сходственными размерами оригинала l_o масштабным коэффициентом m_l (т. е. $l_m = m_l l_o$), то соотношения между масштабами других величин можно установить сопоставлением сходственных уравнений Максвелла, записанных, например, в прямоугольной системе координат для модели и оригинала. Для этого с помощью масштабов необходимо связать величины, характеризующие элементарный объем модели, со сходственными величинами оригинала и потребовать, чтобы процессы в модели и оригинале были подобны. Если пренебречь токами смещения и изготовить модель и оригинал из одинаковых материалов, обладающих в сходственных элементарных объемах и сходственных направлениях одними и теми же физическими свойствами, то можно найти соотношения между масштабами величин, характе-

ризующих электромагнитные процессы в элементарном объеме, и масштабом линейных размеров.

Соотношения между масштабами обеспечивают подобие магнитных полей и токов во всех контурах геометрически подобных, насыщенных электрических машин (модели и оригинала), изготовленных из одинаковых материалов, одинаково ориентированных в пространстве (требование одинаковой ориентации относится только к анизотропным материалам). Для получения подобия магнитных полей и полей плотностей токов необходимо при переходе от оригинала к модели изменить частоты обратно пропорционально квадрату изменения размеров, а плотности тока — обратно пропорционально линейным размерам. При этом в случае применения одинаковых материалов в модели и оригинале напряженности магнитного поля в сходственных точках окажутся одинаковыми*.

Масштабы для i и ω выбираются на основании дополнительных критериев подобия:

$$iR/u = \text{idem}; \quad \omega/\omega_{\text{ном}} = \text{idem}.$$

Характеристика механического момента $M_{*м}$ в функции $\omega/\omega_{\text{ном}}$ должна быть тождественно одинаковой в модели и оригинале; кроме того, должно иметь место соотношение $u/u_{\text{ном}} = \text{idem}$, где u — подведенное к двигателю напряжение.

Если одновременно учитывать переходные процессы в обмотке возбуждения, то необходимо дополнить критерии подобия условием

$$L_B/(R_B t) = \text{idem},$$

где L_B и R_B — индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения.

В этом случае целесообразнее использовать общие, более строгие критерии подобия магнитно-связанных коэффициентом взаимной индукции M перемещающихся контуров (см. § 2.1), принимая $\omega = 1/t$ и вводя условия

$$M/(R_B t) = \text{idem}; \quad M/(Rt) = \text{idem}.$$

Физическое моделирование электрических машин при учете нелинейности. Определяющий критерий подобия квазистационарных полей в геометрически подобных средах, представленный в виде степенного комплекса, включающего частоту процесса f , линейный размер l , магнитную проницаемость μ и электропроводность λ , имеет вид

$$\pi_1 = f l^3 \mu \lambda = \text{idem} \quad (5.36)$$

и справедлив в любых нелинейных, неоднородных средах при соблюдении некоторых дополнительных условий.

Моделирование электрических машин при учете нелинейности, основывающееся на критерии π_1 , может осуществляться при изменении линейных размеров и сохранении параметров μ и λ . При изменении частоты критерий π_1 можно распространить на геометрически подобные

* Толщины материалов, применяемых в модели, должны быть пропорциональны ее линейным размерам. Это относится как к размерам обмоточной меди и электротехнической стали, так и к размерам конструктивных деталей.

ферромагнитные конструкции, в которых проявляются неоднородность, нелинейная анизотропия и гистерезис магнитной проницаемости. Дополнительными условиями при этом являются:

— совпадение относительных зависимостей диагональных компонент тензора магнитной проницаемости от проекций начальной намагниченности и предыстории изменения проекций напряженности на оси анизотропии во всех сходственных точках ферромагнитных сред модели и оригинала:

$$\overline{\mu_{*ik}} = \mu_{ih} [\overline{H_{*1}}, \overline{H_{*2}}, \overline{H_{*3}}, I_{*01}, I_{*02}, I_{*03}, x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}] = \text{idem}, \quad (5.37)$$

где $\overline{}$ означает, что величина определена с учетом предыстории ее изменения;

— равенство углов между осями выбранной системы координат и осями анизотропии в модели и оригинале, обеспечивающее совпадение компонент относительных тензоров проницаемости:

$$\overline{\mu'_{i'k'}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{i'i} \alpha_{k'k} \overline{\mu_{*ik}} = \text{idem}; \quad (5.38)$$

— выполнение дополнительного критерия:

$$\pi_2 = j\omega H^{-1} = \text{idem}.$$

Тензор магнитной проницаемости в (5.37) будет однозначной функцией координат, начальной намагниченности I_0 и предыстории изменения напряженности H только при пренебрежении магнитной вязкостью в ферромагнитной среде. Поэтому явления в ферромагнитных средах подобны лишь при дополнительном допущении о пренебрежении магнитной вязкостью в том диапазоне частот, в котором осуществляется моделирование. Ряд экспериментальных исследований свидетельствует о том, что магнитная вязкость ферромагнитных материалов в слабых полях не проявляется по крайней мере до 10 кГц. Магнитная вязкость в сильных полях вообще не была обнаружена. На этом основании при моделировании может быть принято допущение о пренебрежении магнитной вязкостью.

Экспериментально подтверждена также высокая точность моделирования электромагнитных процессов в массивных ферромагнитных роторах асинхронных двигателей. Это доказывает справедливость сформулированных ранее условий подобия электромагнитных полей в элементах, содержащих сильно насыщенные ферромагнитные среды, при пренебрежении магнитной вязкостью.

При моделировании квазистационарных электромагнитных полей в ферромагнитных средах можно не считаться с проявлением магнитной вязкости до ~ 150 кГц. Дополнительное положение о том, что критерии подобия квазистационарных электромагнитных полей в линейных средах справедливы в нелинейных средах, можно считать экспериментально доказанными и применять при моделировании любых электрических машин.

Сеточные модели электрических машин. Для исследования полей в электрических машинах успешно применяются также аналоговые

модели, выполненные в виде сеток из активных сопротивлений с включенными в узлы емкостями. Считая поле электрической машины плоскопараллельным и принимая, что электропроводность различных ее частей существует только в направлении продольной оси машины, уравнение для векторного потенциала можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial A}{\partial t} - i_{\text{стор}}(x, y, t)_o, \quad (5.39)$$

где γ , μ — электрическая проводимость и магнитная проницаемость среды оригинала; $i_{\text{стор}}(x, y, t)_o$ — плотность тока сторонних источников оригинала, зависящая от координат и времени.

Для проводящей среды, образованной из элементов, рассеивающих и накапливающих энергию, можно записать аналогичное уравнение в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = c \frac{\partial \Phi}{\partial t} - i_{\text{стор}}(x, y, t)_m, \quad (5.40)$$

где c и ρ — удельная емкость и удельная проводимость поверхностного слоя среды; $i_{\text{стор}}(x, y, t)_m$ — плотность тока сторонних источников модели, зависящая от координат и времени.

Уравнениям (5.39) и (5.40) соответствуют критерии подобия:

$$\frac{A}{\mu_o^2 i_o} = \frac{\Phi}{\rho_m^2 i_m} = \text{idem}; \quad \frac{t_o}{\mu_o^2 \gamma} = \frac{t_m}{\rho_m^2 c} = \text{idem}, \quad (5.41)$$

где t_o и t_m — условные единицы длины соответственно оригинала и модели.

Для выполнения (5.41) необходимо также соблюдение соответствия относительных нелинейных характеристик оригинала и модели [например, $\mu_*(H_*) = \Phi_*(\delta_*)$, где H_* — относительная магнитная напряженность, δ_* — относительная плотность тока в исследуемой точке модели]. Относительные величины определяются как частные от деления действительных величин на базисные, например $\mu_* = \mu/\mu_b$, причем базисные значения μ_b , δ_b , ρ_b и т. д. должны удовлетворять уравнениям (5.41). Для (5.40) аналогом является сетка активных сопротивлений и включенных в узлы этой сетки конденсаторов; в этом случае все уравнения и величины выражаются в конечно-разностном виде.

Модель синхронной явнополюсной машины для исследования установившегося режима выполняется в виде сетки сопротивлений. Особенности прохождения магнитных потоков по сердечникам машины позволяют существенно упростить моделирующую сетку. Полностью двумерная сетка выполняется только в зоне между полюсами (число полюсов в модели равно двум); зубцы и ярма статора и части полюса ротора выполняются в виде сосредоточенных сопротивлений. Это существенное упрощение не приводит к большим ошибкам, если принять, что потоки в зубцах и ярмах с допустимой точностью проходят соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях. В зоне воздушного зазора, достаточно удаленной от края полюсного наконечника, сетка выполняется одномерной, так как магнитный по-

ток в этой зоне ориентирован радиально. Характеристика $u_* = f(i)$ нелинейна и поэтому характеристики части сопротивлений сетки должны быть нелинейными, совпадающими с характеристиками намагничивания $\Phi_* = f(F_*)$ соответствующих участков сердечников статора и ротора.

Демпферная система в модели воспроизводится конденсаторами рис. 5.7, а), соответствующими демпферным стержням $C_{ст}$ и участкам короткозамыкающих колец или сегментов $C_{пн}$. Емкости, заранее рассчитанные по соответствующим соотношениям, соединены согласно схеме замещения с сопротивлениями воздушного зазора R_δ , пазового

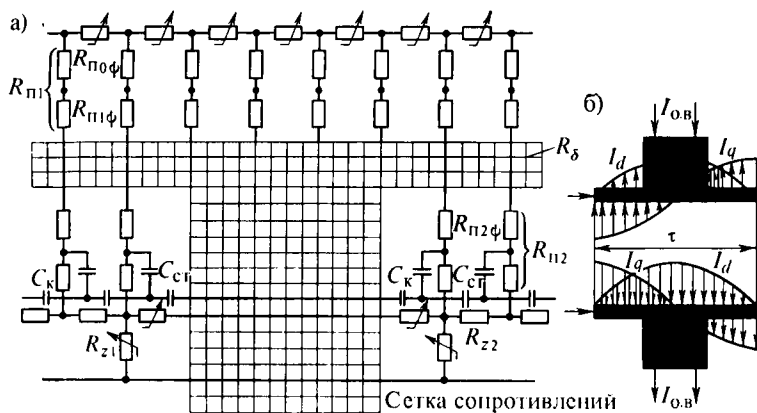


Рис. 5.7

рассеяния статора $R_{пн}$, наконечника полюса $R_{п0ф}$, зубца ротора $R_{з2}$, зубца статора $R_{з1}$ (нелинейное) и с сопротивлениями $R_{п1ф}$, $R_{п2ф}$, отражающими проводимость паза статора 1 и ротора 2. Ток в модели $I_{0,в}$, имитирующий ток обмотки возбуждения, задается (рис. 5.7, б) с помощью стабилизаторов токов на статоре в виде двух синусоид, оси которых совпадают с осями d и q . Суммарный ток по двум осям соответствует магнитодвижущей силе (м. д. с.) первой гармоники статора при заданном токе.

Используя данные прямых измерений токов и напряжений на модели, можно определить все величины, необходимые для расчета электрической машины (индукции, потоки и потокосцепления, напряженности, м. д. с., коэффициенты само- и взаимной индукций и т. д.). Обычно число величин, измеряемых на модели, довольно велико, и для сокращения времени обработки результатов применяются ЦВМ.

Задача нахождения всех величин, определяющих магнитное поле машины, может быть решена, если заданы м. д. с. статора F_1 , ротора F_2 и угол сдвига между ними γ . Обычно бывает известной только первая из этих величин, и приходится решать обратную задачу: при заданных размерах, обмоточных данных, характере нелинейностей, токе i , напряжении на зажимах машины u и коэффициенте мощности нагрузки

$\cos \varphi$ найти м. д. с. F_2 и внутренний угол сдвига γ . Такого рода задача может быть решена с помощью сеточной модели, сочетаемой с элементами АВМ. При этом в любой произвольный момент времени переходный процесс может быть остановлен и произведены измерения всех потоков, индукций, м. д. с. в модели синхронной машины. Непрерывно фиксируя и обрабатывая с помощью АВМ данные измерений в течение переходного процесса, можно получить различные характеристики и параметры синхронной машины с учетом насыщения.

Конформные модели электрических машин. Метод конформного преобразования области поля широко используется при расчете магнитных и электрических полей, границы которых имеют сложную конфигурацию. В этом случае математическое описание сложного поля, не поддающегося аналитическому исследованию, сводится к более простому описанию. Такой подход используется, в частности, для расчета магнитных двумерных полей в локальных объемах электрических машин: в зазоре при двух- и односторонней зубчатости, в зазоре явнополюсной машины и т. д. Известно также использование метода конформных преобразований при математическом моделировании полей в электрических машинах.

Создание конформной модели осуществляется в несколько этапов.

1. С помощью аналитической функции $Z_0 = \exp t_1$ область плоского параллельного поля оригинала (рис. 5.8, а) отображается в виде конечной полосы на комплексную плоскость t_1 с сохранением числа периодов изменения поля p_0 (рис. 5.8, б). Размеры областей поля оригинала и отображенного на полосу поля в плоскости t_1 связаны соотношением $t_1 = \ln Z_0$, где $t_1 = U_1 + jV_1$; $V_1 = \theta_0$.

2. С помощью формулы $t_2 = k_1 t_1$ полученное в плоскости t_1 поле отображается на плоскость t_2 в виде конечной полосы с числом периодов поля модели p_m (рис. 5.8, в). Для этого необходимо принять, что $k_1 = p_0/p_m = 1/k$.

3. Обратный переход от поля на полосе в плоскости t_2 к полю модели на плоскости Z_m с числом периодов p_m осуществляется на основе зависимости $Z_m = \exp t_2$ (рис. 5.8, г), причем для полюсного деления модели справедлива зависимость $\tau'_m = k_1 \theta_0 \exp k_1 U_1$.

4. При необходимости размеры модели могут быть уменьшены (рис. 5.8, д). При этом все масштабы моделирования определяются по формулам, полученным для геометрически подобных моделей.

Моделирование с помощью конформного преобразования позволяет построить модель для двумерного поля в активной зоне электрической машины. Для зоны лобовых частей, имеющих сложное трехмерное строение, применяются приближенные приемы преобразования, позволяющие построить картину поля.

Конформная физическая модель представляет собой реальную электрическую машину, выполненную из тех же материалов, что и оригинал, и имеющую длину $l_m = l_0$. Параметры модели и машины оригинала связаны вполне определенными соотношениями. В двумерной области в токовых и бестоковых зонах модели сохраняются потенциалы и потоки, если точечные или линейные токи в сходственных точках (1, 2, 3, 4 на рис. 5.8) имеют одинаковые значения. В конформной

ных моделях сохраняются магнитные проводимости $\lambda = \Phi/\Psi$, индуктивности обмоток на единицу длины по оси машины $L = \Phi/i$, взаимоиндуктивности и т. д.

Поверхностная плотность тока при переходе к другому числу периодов поля изменяется. Объемная плотность тока также изменяется, поскольку при конформном преобразовании в зависимости от радиуса изменяются сечения проводов катушки в пазу. Практически оказывается возможным выполнить обмотку проводом одного сечения и сохранить неизменными потери в проводах.

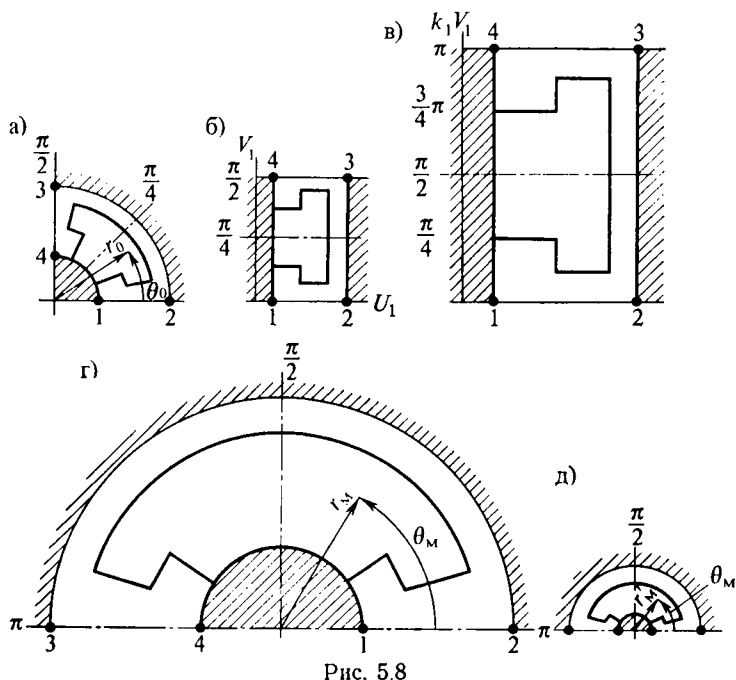


Рис. 5.8

Конформные модели с уменьшенным по сравнению с оригиналом числом периодов поля могут использоваться при исследовании полей в электрических машинах и их элементах. В этих моделях вполне точно воспроизводятся все эффекты в линейном приближении. Модели подобны, как элементы электрической цепи, поскольку в них сохраняются индуктивности, взаимоиндуктивности и могут быть сохранены омические сопротивления и постоянные времени. Потери в стали и характеристики намагничивания могут воспроизводиться искусственным путем. Это открывает возможности для применения конформных моделей при исследовании сложных электромагнитных процессов в электрических машинах и их элементах, а также в качестве динамических моделей в электрических системах.

§ 5.3. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВАХ, ПРОВОДАХ И ШИНАХ

Подобие и моделирование сложных электромагнитных цепей сводится к рассмотрению простых цепей. В этом случае для сложной электрической цепи записываются следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^p i_{jk} = 0; \quad \sum_{j=1}^p u_{jn} = 0, \quad (5.42)$$

где i_j , u_j — ток j -й ветви и напряжение на ее концах; $k = 1, 2, \dots, g-1$; $n = 1, 2, \dots, p-g+1$; p, g — число ветвей и узлов рассматриваемой схемы.

В общем случае любая ветвь может содержать источники э. д. с., активное, индуктивное и емкостное линейные сопротивления, а также нелинейные элементы. Напряжение на концах j -й ветви

$$u_j = i_j R_j + L_j \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{C_j} \int i_j dt + \sum_{h=1}^m w_{jh} s_h \frac{dB_h}{dt} + \sqrt{2} \sum_{s=1}^a u_{js} \sin(\omega_s t + \psi_s), \quad (5.43)$$

где R_j , L_j , C_j — активное сопротивление, индуктивность и емкость; w_{jh} — число витков j -й ветви на магнитном элементе h ; s_h — поперечное сечение магнитопровода элемента h ; B_h — мгновенное значение индукции в элементе h ; $\sqrt{2} \sum_{s=1}^a u_{js} \sin(\omega_s t + \psi_s)$ — сумма источников э. д. с. в j -й ветви; m — число нелинейных элементов в схеме; a — количество э. д. с. в схеме; u_{js} — действующее значение напряжения источника, включенного в j -ю цепь; ω_s , ψ_s — угловая скорость и фазовый угол источника.

В любом магнитопроводе элемента h индукция связана с токами отдельных ветвей цепи соотношением

$$B_h = \frac{\mu_0}{l_h} \left(\sum_{j=1}^p w_{jh} i_j \right) \varphi \left(\frac{1}{l_h H_0} \sum_{j=1}^p w_{jh} i_j \right). \quad (5.44)$$

Значение индукции из выражения (5.44) можно ввести в (5.42):

$$u_j = i_j R_j + L_j \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{C_j} \int i_j dt + \sqrt{2} \sum_{s=1}^a u_{js} \sin(\omega_s t + \psi_s) + \sum_{h=1}^m \frac{\mu_0 w_{jh} s_h}{l_h} \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{j=1}^p w_{jh} i_j \right) \varphi \left(\frac{1}{l_h H_0} \sum_{j=1}^p w_{jh} i_j \right) \right]. \quad (5.45)$$

Примем в качестве основного m -й магнитный элемент с поперечным сечением магнитопровода s_* и средней длиной магнитной силовой линии l_m , у которого главной будем считать обмотку в p -й ветви. После преобразований уравнение (5.45) можно привести к безразмерной форме:

$$\begin{aligned}
& u_{*j} = i_{*j} R_{*j} + X_{*Lj} \frac{di_{*j}}{d\theta} + X_{*Cj} \int_{h+m}^j i_j d\theta + \sqrt{2} \sum_{s=1}^a u_{js} \times \\
& \times \sin(\omega_{*s} \theta + \psi_s) + \sum_{h=1}^m \rho \frac{s_h l_m \omega_{jh}}{s_m l_h \omega_{pm}} \frac{d}{d\theta} \times \\
& \times \left[\left(\sum_{j=1}^p \frac{\omega_{jh}}{\omega_{pm}} i_j \right) \Phi \left(\eta \frac{l_m}{l_h} \sum_{j=1}^p \frac{\omega_{hi}}{\omega_{pm}} i_{*j} \right) \right], \quad (5.46)
\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
R_{*j} &= R_j / R_p; \quad \theta = \omega_a t; \quad \omega_{*s} = \omega_s / \omega_a; \\
u_{*js} &= u_{js} / u_a; \quad X_{*Lj} = \omega_a L_j / R_p; \\
X_{*Cj} &= \rho / (\omega_a C_j R_p); \quad \rho = \omega \omega_{pm}^2 s_m \mu_0 / (l_m R_p); \\
u_{*j} &= u_j / u_a; \quad \eta = u_a \omega_{pm} / (l_m R_p H_0); \quad i_{*j} = i_j R_p / u_a.
\end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

При одинаковых схемах узловые и контурные уравнения модели и оригинала будут совпадать. Условием подобия электромагнитных явлений в этих схемах будет равенство коэффициентов (5.47) модели и оригинала. Необходимо также, чтобы магнитопроводы оригинала и модели имели одинаковые относительные кривые намагничивания:

$$\mu_{*h} = \Phi(H_{*h}) = \text{idem}. \quad (5.48)$$

На основании (5.47) и (5.48) формулируются условия построения модели:

- схема модели должна быть такой же, как и схема оригинала;
- в сходственных ветвях должны быть одинаковые относительные действующие значения напряжения источников э. д. с. с равными относительными угловыми скоростями и фазовыми углами, а также одинаковые относительные активные, индуктивные и емкостные сопротивления;

- сходственные магнитные элементы модели должны иметь магнитопроводы из того же материала, что и оригинал; размеры магнитопровода должны быть такими, чтобы отношения их поперечных сечений и средних длин к сечению и средней длине основного магнитопровода были одинаковыми со сходственными отношениями в оригинале; обмотки магнитных элементов должны иметь равные отношения сходственных витков отдельных элементов к числу витков главной обмотки основного магнитного элемента;

- конструктивное исполнение основного магнитопровода должно обеспечивать необходимые пределы изменения величин ρ и η .

Выполняя модель согласно изложенным рекомендациям, получим зависимость F_{ξ} , определяющую токи в цепи с учетом влияния многих факторов и в том числе нелинейных элементов:

$$i_{*j} = F_{\xi}(R_{*j-1}, X_{Lj}, X_{Cj}, u_s, \omega_s, \psi_s, \rho, \eta, \theta),$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$; $s = 1, 2, 3, \dots$

Если в рассматриваемой цепи контур подмагничивается постоянным током, то уравнение этого контура следует рассматривать отдельно:

$$i'_{*y} + \frac{X_{Ly}}{R_y} \frac{di'_{*y}}{d\theta} + \frac{\rho}{\sigma_m} \sum_{h=1}^m \frac{\omega_{yh} S_h l_m}{\omega_{ym} S_m l_h} \frac{d}{d\theta} \times \\ \times \left\{ \tau_m \frac{\omega_{yh}}{\omega_{ym}} + i'_y \frac{\omega_{yh}}{\omega_{ym}} + \sum_{j=1}^{p-1} i'_{*j} \varphi \left[\frac{l_m}{l_h} \eta \left(\tau_m \frac{\omega_{yh}}{\omega_{ym}} + i'_y \frac{\omega_{yh}}{\omega_{ym}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{p-1} i'_{*j} \right) \right] \right\} = 0, \quad (5.49)$$

где

$$i'_{*y\sim} = \frac{i'_{y\sim} \omega_{ym} R_p}{u_a \omega_{pm}}; \quad \sigma_m = \frac{R_y \omega_{pm}^2}{R_p \omega_{ym}^2}; \quad \tau_m = \frac{E_{y\sim} \omega_{ym} R_p}{u_a \omega_{pm} R_y}; \quad (5.50)$$

$E_{y\sim}$, $i_{y\sim}$ — э. д. с. и переменная составляющая тока в цепи управления.

Таким образом, подобие цепей подмагничивания постоянным током характеризуется тремя обобщенными переменными: относительной постоянной времени линейной части цепи $T_y = X_{Ly}/R_y$, степенью подмагничивания τ и степенью компенсации гармонических составляющих тока σ .

Физическое моделирование требует определения критериев подобия, обычно отыскиваемых при некоторых допущениях, упрощающих форму записи уравнений. Так, при создании модели для изучения динамики электромагнитов переменного тока принимают, что:

1) параметр L полностью характеризует индуктивность катушки с учетом потоков рассеяния;

2) активное сопротивление R включает как омическое сопротивление катушки, так и эквивалентное сопротивление, отвечающее потерям в магнитопроводе;

3) нелинейность параметров L и R учитывается зависимостью от тока i и размеров x , y , z : $L = \varphi(i, x, y, z)$ и $R = \varphi(i, x, y, z)$, относительные характеристики которых должны быть соответственно одинаковы в модели и оригинале;

4) экранирующие короткозамкнутые витки не влияют на тяговую силу, развиваемую электромагнитом.

При исследовании статических режимов реальный электромагнит обычно заменяют эквивалентным, принимая, что:

1) поперечное сечение сердечника неизменно по средней длине силовых линий;

2) индукция постоянна во всех точках;

3) поток рассеяния и потери в стали отсутствуют;

4) подобие нелинейности кривой намагничивания учитывается относительной характеристикой $\mu_*(H_*) = \text{idem}$.

Условия подобия динамических процессов электромагнитов переменного тока требуют соблюдения равенства в модели и оригинале следующих критериев подобия:

1) относительной постоянной времени цепи катушки

$$\pi_1 = T_* = \omega L_6 / R_6 = \text{idem};$$

2) коэффициента использования затраченной при включении электромагнитной энергии

$$\pi_2 = \eta_* = \omega F_{\text{кр}} l_6 R_6 / u_6^2 = \text{idem};$$

3) относительной силы инерции подвижных частей электромагнита

$$\pi_3 = M_* = \omega^2 m l_6 / F_{\text{кр}} = \text{idem};$$

4) относительной силы трения

$$\pi_4 = Q_* = \omega g l_6 / F_{\text{кр}} = \text{idem};$$

5) относительных геометрических размеров

$$\pi_5 = y_* = y / l_6 = \text{idem}; z_* = z / l_6 = \text{idem};$$

6) начального фазового угла напряжения

$$\alpha = \text{idem};$$

7) критерия гомохронности

$$\pi_6 = \omega t = \text{idem}.$$

Здесь u_6 , ω — действующее значение и угловая скорость вектора напряжения, подводимого к цепи катушки; R_6 , L_6 — омическое сопротивление цепи катушки и базисная индуктивность; $F_{\text{кр}}$ — противодействующая сила в критической точке; m — масса подвижных элементов электромагнита; g — коэффициент трения; l_6 , y , z — базисный размер и некоторые характерные размеры магнитной системы в направлениях осей y и z ; t — время.

Кроме выполнения приведенных критериев для подобия электромагнитов в динамическом режиме требуется совпадение относительных характеристик противодействующих сил:

$$F_* = F_{\text{пр}} / F_{\text{кр}} = \varphi(l_{*\text{п}}) = \text{idem},$$

где $F_{\text{пр}}$ — противодействующая сила; $l_{*\text{п}}$ — относительное значение перемещения.

Подобие электромагнитов переменного тока при статических режимах обеспечивается при соблюдении следующих критериев:

1) индуктивного сопротивления катушки

$$\pi_1 = \omega \omega^2 S_{\text{ст}} \mu_6 / (I_{\text{ст}} R_6) = \text{idem};$$

2) напряженности магнитного поля

$$\pi_2 = H_* = u_6 \omega / (R_6 I_{\text{ст}} H_6) = \text{idem};$$

3) активного сопротивления $R_{\text{эк}}$ экранирующих короткозамкнутых витков $\omega_{\text{эк}}$

$$\pi_3 = R_{*\text{эк}} = R_{\text{эк}} \omega^2 / (R_6 \omega_{\text{эк}}^2) = \text{idem};$$

4) относительного конечного зазора

$$\pi_4 = \Delta_* \delta_K = \Delta \delta_K / l_{\text{ст}} = \text{idem};$$

5) отношения неэкранированной и экранированной частей полюса

$$\pi_5 = S_{\text{нэ}} / S_{\text{эк}} = \text{idem};$$

6) критерия гомохронности

$$\omega t = \text{idem}.$$

В последних выражениях: $l_{\text{ст}}$ и $S_{\text{ст}}$ — длина средней магнитной силовой линии и сечение основного полюса магнитопровода; μ_6 и H_6 — базисные значения магнитной проницаемости и напряженности поля; $\Delta \delta_K$ — конечный зазор от «залипания»; $S_{\text{нэ}}$, $S_{\text{эк}}$ — площади неэкранированной и экранированной частей полюса.

7) должно быть $\mu_* = f(H_*) = \text{idem}$.

Некоторые особенности условий подобия электромагнитных аппаратов. Электромагнитные аппараты, контакторы, реле и другие устройства могут быть представлены упрощенной механической характеристикой $F_* = \varphi(l_{*\text{ш}})$, имеющей два прямолинейных участка: до и после замыкания контактов. Полученные выше выражения критериев подобия можно уточнить, введя в них следующие величины: δ_{*0} и δ_{*1} — относительные значения хода якоря контактов; k_{*0} , k_{*1} — относительные коэффициенты крутизны участков механической характеристики; $F_{*u} = \varphi(l_{*\text{ш}})$. Обычно вводятся также относительные размеры магнитопровода: $y_* = c/a$; $z_* = b/a$; $\Delta_* = \Delta/h_K$, где b , c — ширина окна, занятого катушкой, толщина пакета; Δ , h_K — высота внедрения сердечника в катушку и высота намотки катушки.

Выбирая базисные значения нелинейных параметров, всегда можно добиться тождественности их относительных характеристик (L_* , R_* , μ_*). Обычно за базисное сопротивление принимают активное сопротивление цепи катушки, за базисный размер — ширину основного полюса; базисную индуктивность следует рассчитывать (для Ш-образных магнитных систем) по формуле

$$L_6 = k_L \mu_0 \omega^2 S_{\text{ст}} / a,$$

где $k_L = 1,1 \div 1,5$.

При выборе величин μ_6 и H_6 необходимо иметь в виду, что значения соответствующих параметров зависят от материала магнитопровода, значения конечного зазора $\Delta \delta_K$, а также от качества шлифовки рабочей поверхности и изменения магнитных свойств материала сердечника в результате технологической обработки.

При исследовании динамических и статических характеристик электромагнитов, в частности контакторов переменного тока, на физической модели в зависимости от конкретных условий могут быть приняты те или иные упрощения. Так, при моделировании динамических режимов прямоходных контакторов за неизменные можно принять параметры L_6 , a , $F_{\text{кр}}$. Тогда остальные параметры модели следует регулировать, с тем чтобы менять соответствующие критериальные величины, например, следующим образом:

Таблица 5.1

Поле токов в проводящей среде	Магнитостатическое поле
Линейная среда	
$J = \sigma E$	$B = \mu H$
$E = -\text{grad } \varphi$	$H = -\text{grad } \varphi_M$
$\text{rot } E = 0$	$\text{rot } H = 0$
$\text{div } J = 0$	$\text{div } B = 0$
$\sigma \nabla^2 \varphi = 0$	$\mu \nabla^2 \varphi_M = 0$
Нелинейная среда	
$\text{div } J = \sigma' \text{div } E$	$\text{div } B = \mu \text{div } H$
$\sigma = f(E)$	$\mu = f(H)$
$\text{div } J = \sigma \text{div } E + E (\partial \sigma / \partial E) \text{div } E$	$\text{div } B = \mu \text{div } H + H (\partial \mu / \partial H) \text{div } H$
Анизотропная среда	
$\sigma = F(x, y, z)$	$\mu = F(x, y, z)$
$\text{div } J = \sigma \text{div } E + E \text{grad } \sigma$	$\text{div } B = \mu \text{div } H + H \text{grad } \mu$

тивной нелинейной средой окружена пространством с пассивной линейной (воздух) или нелинейной (арматура магнита) средой.

Обычно при всех исследованиях систем с постоянными магнитами принимается, что удельной характеристикой магнитной среды является спинка предельной петли намагничивания материала постоянного магнита. В любой точке внутри постоянного магнита векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ принимаются коллинеарными. В каждом элементарном объеме поле считается равномерным, а направление векторов намагниченности — параллельным образующим этих объемов. Такие же допущения принимаются при создании электрических моделей осесимметричных систем с постоянными магнитами.

Проведение электрической аналогии постоянного магнита требует создания проводящей нелинейной среды, свойства которой в сходственных точках были бы подобны свойствам нелинейной магнитной среды (магнита). Необходимо также создать проводящую линейную электрическую среду, моделирующую окружающее магнит линейное воздушное пространство. Поля этих двух систем будут подобны (см. табл. 5.1). Однако реализация сплошной электрической среды с изменяющимися в широких пределах нелинейными свойствами, отражающими многообразие магнитных материалов, встречает серьезные технические трудности. Поэтому при аналоговом моделировании и заменяют сплошную среду сеткой нелинейных активных двухполюсников, внешние характеристики которых можно изменять в широких пределах. Характеристики $J_*(E_*)$ линейных активных двухполюсников и удельное сопротивление окружающей линейной

среды (электронинтегратора) выбираются так, чтобы отвечать выявленным критериям подобия.

Моделирование постоянного осесимметричного магнита можно осуществлять цепочкой нелинейных активных двухполюсников. При этом магнит как бы разбивается на ряд последовательно включенных объемов, магнитное состояние которых моделируется соответствующим нелинейным элементом в модели. Магнитное состояние каждого объема определяется рабочей точкой на спинке петли намагничивания. Рабочие точки электрических нелинейных элементов устанавливаются в модели автоматически, при этом распределение электрических потенциалов и токов в модели сразу дает решение задачи.

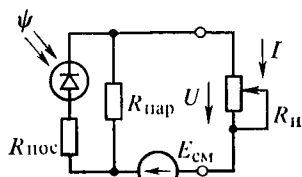
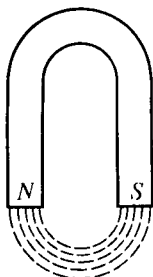


Рис. 5.10

←

Рис. 5.9

Рабочее поле электронинтегратора, отвечающее окружающему магнит пространству, может быть либо сплошной средой (электролитическая ванна, полупроводящая бумага), либо сеткой пассивных сопротивлений. Достоинством моделей — сплошных сред — является возможность получения трехмерного геометрического подобия модели и оригинала. Недостатками их являются громоздкость оборудования, относительно невысокая точность, необходимость применения только переменных токов для исключения погрешностей от поляризации.

При реализации электрической модели постоянного магнита (рис. 5.9) обычно применяют нелинейные активные двухполюсники, внешние характеристики $I(U)$ которых подобны кривым намагничивания $\Phi(U_M)$ магнитной цепи. Аналогом постоянного магнита может являться кремниевый фотодиод, работающий в вентильном режиме: при освещении он становится источником э. д. с. с нелинейным внутренним сопротивлением и его внешняя характеристика $I(U)$ по конфигурации подобна кривой $\Phi(U_M)$ магнита (рис. 5.10). Изменениями светового потока Ψ , последовательного $R_{\text{пос}}$ и параллельного $R_{\text{пар}}$ сопротивлений, включенных на выходе фотодиода, а также введением источника э. д. с. $E_{\text{см}}$ можно в широких пределах изменять масштаб и форму выходной характеристики. Магнитная система при этом может быть разбита на участки, которым в модели должны соответствовать нелинейные элементы. Зная длину l_i и сечение S_i элементарных объемов, по известной кривой $B(H)$ намагничивания материала магнита можно построить зависимости магнитного состояния $\Phi_i(U_{M_i})$ этих объемов. Затем следует ввести масштабы подобия $m_U = U_M/U$, $m_\mu = \mu_0/\sigma$, $m_l = l_M/l_0$. Масштаб подобия $m_I = \Phi/I$ находится из равенства $m_I = m_U m_\mu m_l$, которое следует из подобия уравнений природы и модели. Определив масштабы подобия, можно перейти от зависимостей $\Phi_i(U_{M_i})$ к зависимостям $I(U)$, по которым настраивают нелинейные элементы. Настраенные нелинейные элементы подключаются к рабочему полю обычного электронинтегратора, моделирующего пространство, окружающее магнит.

Подобие процессов в проводе из немагнитного материала. Состояние цепи характеризуется одним безразмерным критерием, который определяется с помощью л-теоремы или способа интегральных аналогов:

$$R_{\sim} = R = \varphi (sf/\rho).$$

Следовательно, явление вытеснения тока, характеризующееся возрастанием сопротивления с увеличением частоты и сечения проводника, может давать одинаковый эффект в проводниках подобной формы, но разных размеров. Исследуемое явление полностью характеризуется двумя основными критериями подобия пространственных электромагнитных процессов. Причем критерий подобия $\varepsilon/(\gamma t) = \text{idem}$, характеризующий токи смещения и излучение, может не учитываться, если частота проходящего по проводу тока не слишком велика. Тогда остается единственное условие подобия

$$\omega \mu \gamma s_0 = \text{idem}.$$

Здесь принято синусоидальное изменение тока; масштаб времени m_t должен изменяться с изменением частоты согласно критерию $\omega t = \text{idem}$, характерный размер сечения $s = l^2$. Следовательно, изменения сечения провода или частоты одинаково влияют на эффект вытеснения тока. Одинаково влияют на исследуемый процесс и величины μ и γ .

Подобие и моделирование процессов в системе проводов из немагнитного материала.

Полученные результаты можно распространить и на системы проводов. Так, например, для двух тонких трубок, из которых одна является прямым проводом, а другая — обратным,

$$R_{\sim}/R = \varphi (\delta \sqrt{f/\rho}), \quad (5.51)$$

где δ — толщина трубки. Предполагается, что материал трубок немагнитный ($\mu = 1$).

Экспериментально полученная в каком-либо конкретном случае зависимость (5.51) справедлива для любых геометрически подобных трубок, геометрически подобно расположенных в пространстве. Графически эта зависимость показана на рис. 5.11. Каждая кривая в плоскости l соответствует отношениям $2\delta/d_0$ и $2D_0/d_0$, где $d_0/2$ — радиус трубки; D_0 — расстояние между трубками. Зависимости, охватывающие любые геометрические соотношения, можно представить некоторыми поверхностями, расположенными в системе координат $2D_0/d_0$; $\delta \sqrt{f/\rho}$; $R_{\sim}/R$. При этом наглядны преимущества критериальных зависимостей, позволяющих по одному эксперименту судить о свойствах ряда различных, но подобных между собой конструкций. Полученные условия подобия можно применить и к катушкам индуктивности. При этом в условия геометрического подобия должны входить диаметр провода, шаг намотки, диаметр катушки и расстояние между

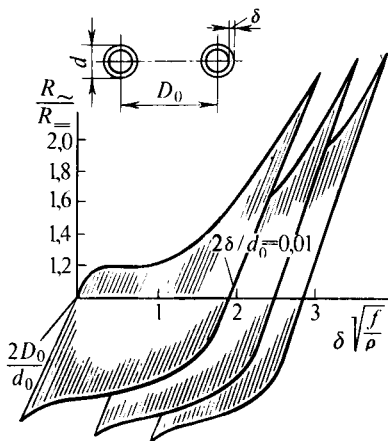


Рис. 5.11

слоями катушки. При повышении частоты междувитковая емкость катушек оказывается уже весьма заметной, и критерий, учитывающий токи смещения, казалось бы, не всегда можно отбрасывать. Практически трудно удовлетворить обоим критериям подобия. В этом обычно и нет необходимости, так как, несмотря на значительную разницу в значении емкости, катушки разных размеров при разных частотах могут иметь одинаковое отношение сопротивлений $R_{\sim}/R_{=}$.

При учете зависимости $\mu = f(H)$ дополнительным условием будет соблюдение у модели и оригинала одинаковости относительных характеристик

$$\mu_{*} = f(H_{*}) = \text{idem.}$$

Для тех случаев, когда необходимо учитывать стальные конструкции вблизи токоподвода, требование одинаковых относительных характеристик модели и оригинала запишется в виде

$$\mu_{*} = \mu_k / \mu_{k+1} = \varphi(H_k / H_{k+1}) = \text{idem.}$$

где k и $k+1$ — пара точек пространства модели или оригинала.

Это требование легко выполняется при пренебрежении изменением магнитной проницаемости в зависимости от частоты. Однако для его выполнения необходимо соблюдение масштабов токов: $i_m = i_o l_m / l_o$. Масштаб сопротивлений модели и оригинала обратно пропорционален линейному масштабу: $R_m / R_o = X_m / X_o = l_o / l_m$.

Для моделирования явлений, происходящих в различного рода экранирующих конструкциях, в модели устанавливаются расположенные параллельно проводнику с током стальные пластины, подобранные так, чтобы их параметры отвечали критериям подобия. По результатам измерения в модели строится зависимость, пользуясь которой можно определить вносимое сталью сопротивление R :

$$R \left(l \frac{h}{2d} f \right) = \varphi \left(\frac{h}{2d} \right),$$

где l — длина; h — расстояние от пластины до проводника; $2d$ — ширина стальной пластины; f — частота тока в проводнике.

Полученная зависимость позволяет определить потери в стальном листе, над которым проходит одиночный проводник с током. При двух проводниках с токами i_1 и i_2 , расположенными один над другим, потери

$$P = P_1 + P_2 \pm 2P_x,$$

где P_1 и P_2 — мощности потерь от проводников с токами i_1 и i_2 ; P_x — мощность потерь от фиктивного проводника с током $i_x = \sqrt{i_1 i_2}$, расположенного на расстоянии x от поверхности проводника. Знак «+» берется при одинаковом направлении токов в проводниках, «—» — при противоположных направлениях токов.

Зависимости $d/x = f(d/a; b/a)$, где d — ширина стальной пластины; a и b — расстояния по поверхности пластины до первого и второго проводников, предназначены для определения x .

Аналогично определяются потери и при большем числе проводников.

Примером исследования электромагнитных устройств, содержащих ферромагнитные элементы, является трехфазный токопровод с опорной и ограждающей конструкцией*. Физическая модель токопровода такого типа для генераторов промышленной частоты мощностью 60 МВт показана на рис. 5.12. Опорная и ограждающая конструкция токопровода оригинала состоит из профильного проката — швеллеров равнобоких уголков. Материал ферромагнитной конструкции — Ст3. Каждая фаза токопровода выполнена из двух алюминиевых

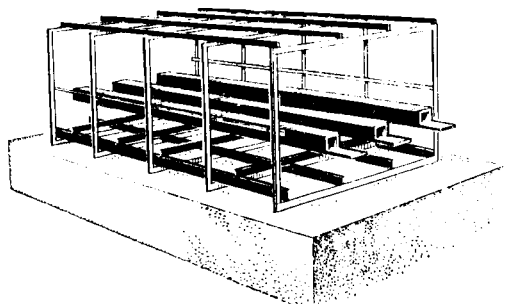


Рис. 5.12

швеллеров с удельной электрической проводимостью $\gamma = 35,2 \cdot 10^6$ 1/(Ом · м) при 20° С. Исследование на модели предполагает моделирование лишь электромагнитных процессов в токопроводе.

Модель и оригинал изготовлены из одних и тех же материалов. Наиболее рациональной с точки зрения конструктивного выполнения модели оказалась частота $f = 1$ МГц. При этом масштабы перехода от модели к оригиналу для частоты, геометрических размеров, тока, напряжения, мощностей и сопротивлений имеют соответственно значения: $m_f = 20$, $m_l = m_i = 1/\sqrt{m_f} = 0,2236$, $m_u = 1$, $m_s = m_p = m_q = 1/\sqrt{m_f} = 0,2236$, $m_z = m_r = m_x = \sqrt{m_f} = 4,472$. Номинальный ток оригинала $I_0 = 8000$ А.

На модели исследовались различные случаи, важные при проектировании мощных токопроводов: 1) на модель сверху одет П-образный кожух из стали, причем в кожухе поверхностный эффект проявляется резко; 2) изолирующие прокладки вынуты, и между отдельными ферромагнитными элементами создан надежный электрический контакт; этот случай приближенно соответствует сварке ферромагнитных элементов в оригинале; 3) между ферромагнитными элементами создан надежный электрический контакт, и на модель сверху надет сплошной П-образный кожух из стали и т. д. Результаты исследования показали

* Петровский В. Н. Исследование на физической модели мощного трехфазного токопровода. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 6, с. 93—118.

возможность достаточно точного физического моделирования сложных электромагнитных устройств с ферромагнитными элементами на повышенной частоте.

Аналоговое моделирование электрических характеристик токопроводов может осуществляться согласно схеме, показанной на рис. 5.13. Трехфазные экранированные токопроводы с дискретным подводом тока моделируются стеклянным диском D , покрытым с двух сторон листами проводящей бумаги B толщиной h , которые плотно соединяются или клеиваются между собой по краям диска. На верхний лист накладываются электроды, моделирующие элементы сечений проводников и

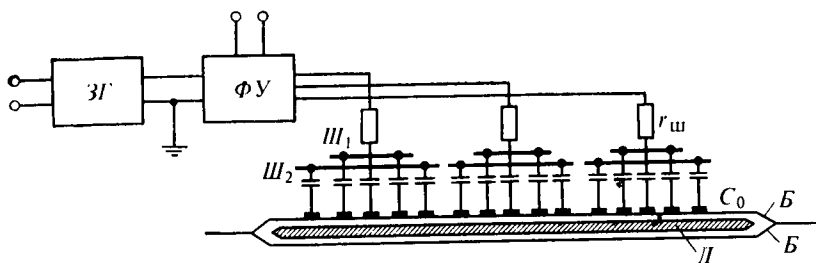


Рис. 5.13

кранов. К каждому электроду присоединен конденсатор C_0 . Другие обкладки конденсаторов присоединены к шинам $Ш_1$ или $Ш_2$. Шины $Ш_1$ проводников питаются от источника, а шины $Ш_2$ экранов, несущих рабочий ток, свободны. Если экраны разных фаз соединены между собой на обоих концах, то относящиеся к их моделям шины $Ш_2$ соединяются между собой. При отсутствии соединения экранов хотя бы на одном конце соответствующие шины $Ш_2$ остаются свободными, т. е. не соединяются ни с источником, ни с другими шинами. Нижний лист бумаги моделирует внешнее пространство, занятое магнитным полем токопровода, включая бесконечно удаленную точку, которая на модели совпадает с центром нижнего круга. В качестве источника питания модели используется генератор токов звуковых частот $ЗГ$. Для получения трехфазного тока в схему установки добавлено специальное фазоповорачивающее устройство $ФУ$.

На прямолинейном участке токопровода длиной l , где магнитное поле можно считать плоскопараллельным, составляющая напряженности электрического поля в проводящей среде, равная падению приложенного к токопроводу напряжения u на единицу его длины, имеет вид

$$E_0 = u/l = -(\rho/\mu) \operatorname{div} \operatorname{grad} A - E_{\text{вихр}}, \quad (5.52)$$

где ρ и μ — удельное сопротивление и магнитная проницаемость проводящей среды; $E_{\text{вихр}} = j\omega A$ — вихревая составляющая напряженности электрического поля.

Напряжение $u_{\text{и}}$ источника тока звуковой частоты, приложенное к модели, связано с потенциалом u_0 поверхности бумаги в месте подвода тока формулой

$$ju_{\text{и}} = - \frac{\Delta S_{\text{м}} h}{\omega_{\text{м}} c_0 \rho_{\text{м}}} \operatorname{div} \operatorname{grad} u_{\text{м}} + ju_0, \quad (5.53)$$

где $\rho_{\text{м}}$ — удельное сопротивление проводящей бумаги (модели).

Из сопоставления выражений (5.52) и (5.53) следует, что

$$E_0 = k_u ju_{\text{и}}; I = k_i I_{\text{м}}; l = k_l l_{\text{м}}; \omega = k_{\omega} \omega_{\text{м}}; \mu = k_{\mu} \rho_{\text{м}}/h; \rho = k_{\rho} \Delta S_{\text{м}}/c_0.$$

Критериальное соотношение для масштабов имеет вид $k_p/(k_{\mu} k_{\omega} k_l^2) = 1$. Коэффициент подобия по сопротивлению $k_z = k_u/k_i = k_{\omega} k_{\mu} l/\omega_{\text{м}}$, при этом один из коэффициентов (k_u или k_i) может быть выбран произвольно.

Напряжения между элементами сечений проводников и экранов и центром нижнего круга определяют средние значения напряженностей E электрического поля и плотностей тока δ в этих участках сечений, так как $\delta = E/\rho$.

Потери мощности в каком-либо отдельном элементе токопровода, проводнике, экране и любой другой металлической части можно выразить приближенно:

$$P = \sum_{i=1}^n i_i^2 r_i = \frac{\omega_{\text{м}}^2 c_0^2 r}{k_l^2} \sum_{i=1}^n u_{ci}^2;$$

где i_i — ток, протекающий по каждой из n одинаковых площадок, на которые разделено поперечное сечение элемента; u_{ci} — напряжение, измеренное на соответствующем конденсаторе.

Потери мощности в единице длины токопровода равны сумме потерь во всех его металлических частях.

Погрешности моделирования определяются погрешностями измерительных приборов, несовершенством ввода тока в области модели, изображающие токопроводящие части, неоднородностью и нестабильностью сопротивления бумаги.

Подобие цепей с распределенными параметрами. Наиболее характерные цепи этого типа — дальние линии электропередач, линии связи, волноводы и т. п. Отвлекаясь от вопросов геометрического подобия и пренебрегая излучением энергии в пространство, можно свести описание задачи к известным уравнениям однородной линии:

$$du/dl + L di/dt + Ri = 0; di/dl + C du/dt + Gi = 0. \quad (5.54)$$

При составлении данных уравнений предполагалась неизменность параметров линии (сопротивления, емкости, проводимости) во времени. Это допущение правомерно при анализе волновых процессов, поскольку, например, изменение сопротивления от температуры происходит несоизмеримо медленнее протекания электромагнитных процессов. Поэтому схема замещения, отвечающая данным уравнениям, представляет собой цепь с постоянными параметрами и, следовательно, в нахождении критериев подобия не будет ничего принципиально нового.

Уравнения (5.54) позволяют получить четыре критерия подобия способом интегральных аналогов:

$$\pi_1 = \frac{i}{u} \sqrt{\frac{R}{G}}; \pi_2 = \frac{L}{Rt} = \frac{T_L}{t}; \pi_3 = \frac{C}{Gt} = \frac{T_C}{t}; \pi_4 = l \sqrt{RG}. \quad (5.55)$$

Согласно π -теореме, один из них, например π_1 , можно считать неопределяющим, поскольку

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3, \pi_4). \quad (5.56)$$

Следовательно, для подобия рассматриваемых цепей необходимо и достаточно, чтобы были одинаковы относительные постоянные времени T_{*L} , T_{*C} и выполнялось условие $\pi_4 = \text{idem}$. Выражения (5.55) позволяют получить соотношения, необходимые для определения масштабов:

$$\frac{m_i}{m_u} \sqrt{\frac{m_R}{m_G}} = 1; \quad \frac{m_L}{m_R m_t} = 1; \quad \frac{m_C}{m_G m_t} = 1; \quad m_l \sqrt{m_R m_G} = 1. \quad (5.57)$$

При этом масштабы независимых параметров (m_u , m_R , m_G , m_t) можно выбрать произвольно, а остальные масштабы определить из соотношений (5.57). Выражения критериев подобия могут быть получены и на базе π -теоремы.

При выявлении физических свойств подобных явлений целесообразно преобразовать исходные критерии к такому виду, который наиболее ярко характеризовал бы изучаемую сторону явления. Так, например, умножая левую и правую части критериального уравнения (5.56) на $\sqrt{\pi_2 \pi_3^{-1}}$ и принимая во внимание, что для линии без потерь ее волновое сопротивление $Z_\lambda = \sqrt{L/C} = u/i$, получим уравнение

$$(i/u) \sqrt{L/C} = \sqrt{\pi_2 \pi_3^{-1}} f(\pi_2, \pi_3, \pi_4),$$

из которого следует, что процесс может характеризоваться соотношением

$$\pi_4 = f_2(\pi_2, \pi_3). \quad (5.58)$$

Умножив обе части уравнения (5.58) на $\sqrt{\pi_2 \pi_3}$, получим

$$(l/t) \sqrt{L/C} = \sqrt{\pi_2 \pi_3} f_2(\pi_2, \pi_3).$$

Учитывая, что скорость движения импульса по линии без потерь $v = 1/\sqrt{LC}$ и время пробега импульса от начала до конца линии $\tau = l/v$, определяем

$$\tau_* = \tau/t = f_3(\pi_2, \pi_3) = f_3(T_{*L}, T_{*C}). \quad (5.59)$$

Очевидно, что при одинаковых относительных постоянных времени T_{*L} , T_{*C} у подобных линий относительное время пробега импульса соответственно одинаково и не зависит от значения и формы импульса.

Используя выражение для скорости распространения импульса вдоль линии без потерь, можно записать

$$m_v = 1/\sqrt{m_L m_C} = 1/(m_t \sqrt{m_R m_G}) = m_l/m_t \text{ или } v_l = (m_l/m_t) v_2.$$

Следовательно, при $m_t = 1$ одинаковые скорости распространения импульсов по двум линиям могут быть получены лишь при одинаковых длинах этих

линий (т. е. $m_l = 1$). Изменение масштаба времени позволяет получить подобие скоростей распространения при различных длинах линий. В свою очередь, используя выражение для волнового сопротивления линии без потерь $Z_\lambda = \sqrt{L/C}$ и принимая во внимание соотношения (5.57), получаем масштаб волновых сопротивлений

$$m_\lambda = \sqrt{m_L/m_C} = \sqrt{m_R m_l/m_G m_l} = \sqrt{m_R^2 m_l^2} = m_R m_l.$$

Если устанавливаются условия подобия ЛЭП переменного тока, то, согласно второму дополнительному положению, кроме полученных выше критериев ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$) необходимо соблюсти критерий гомохронности $\pi_5 = \omega t$. В этом случае целесообразно записать критерии π_2 и π_3 в принятых для цепей переменного тока символах, для чего необходимо умножить их на критерий π_5 :

$$\pi'_2 = \pi_2 \pi_5 = \frac{L}{Rt} \omega t = \frac{X_L}{R}; \quad \pi'_3 = \pi_3 \pi_5 = \frac{C}{Gt} \omega t = \frac{1}{X_C G}.$$

При рассмотрении процессов, протекающих в дальних линиях, можно при необходимости учесть изменение параметров во времени: сопротивления от нагревания проводов, проводимости, состояния погоды и т. п. Условия подобия при этом устанавливаются в соответствии со вторым дополнительным положением.

Подобие процессов в трансформаторах, электрических машинах и других устройствах с распределенными по длине параметрами при подходе с точки зрения подобия цепей устанавливается так же, как и подобие ЛЭП, если закон распределения параметров (схема замещения) известен.

Подобие и моделирование процессов в заземлителях. При моделировании заземлителей критерии подобия сводятся к условиям геометрического подобия и соблюдению основных критериев подобия электромагнитных процессов:

$$\mu \gamma l^2/t = \text{idem}; \quad e/(\gamma t) = \text{idem}; \quad \dots$$

На работу заземлителя часто существенно влияет нагревание почвы; это особенно заметно при больших значениях тока, когда вокруг заземлителя может оказаться плохо проводящий слой земли. При исследованиях этого явления на модели необходимо прежде всего найти критерии подобия теплового процесса. Из основного уравнения стационарного температурного поля имеем $\text{div grad } \theta = -E^2/(\lambda \rho)$, где E — напряженность магнитного поля; λ — удельная теплопроводность грунта; ρ — удельное электрическое сопротивление грунта.

При наличии геометрического подобия интегральным аналогом величины $\text{div grad } \theta$ является θ/l^2 ; величины E^2 — выражение U^2/l^2 . В этом случае единственный критерий подобия теплового процесса

$$\pi_1 = \rho \lambda \theta / U^2 = \text{idem}. \quad (5.60)$$

В критерии π_1 отсутствует характерный размер l . Следовательно, при осуществлении термического подобия можно оперировать заземлителями любых размеров: температура будет пропорциональна квадрату подведенного напряжения. Напряжение, которое можно допустить при заданных θ , ρ и λ , находится из (5.60):

$$U = \sqrt{\rho \lambda \theta / \pi_1}. \quad (5.61)$$

Критерии подобия установившегося теплового процесса, происходящего при изменении напряжения, подведенного к заземлителю, находим из уравнения

$$C d\theta/dt - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \theta) = E^2/\rho, \quad (5.62)$$

откуда (кроме полученного ранее критерия π_1 , определяющего установившийся режим) получаем критерий, характеризующий скорость изменения теплового поля. Его можно рассматривать как относительную постоянную времени:

$$\pi_2 = \rho C \theta l^2 / U^2 t, \text{ или } \pi_2 = C l^2 / \lambda t = T_T / t, \quad (5.63)$$

где $T_T = C l^2 / \lambda$ — тепловая постоянная времени.

Приведенными простейшими соотношениями подобия можно характеризовать работу заземлителей.

Рассмотрим более сложные случаи. Так, при неоднородной среде, содержащей явно выраженные, конечного размера области с различными параметрами (μ , ϵ , ρ), необходимо ввести критерии, вытекающие из краевых условий. Предполагая, что на границах областей отсутствуют свободные поверхностные заряды, а внутри областей — сторонние токи, можно сформулировать следующие краевые условия:

— непрерывность нормальной составляющей вектора электрического смещения $D = \epsilon E$ на границе двух различных сред k и $k+1$

$$\epsilon_{k+1} E_{k+1, n} - \epsilon_k E_{k, n} = 0;$$

— непрерывность тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля

$$E_{k+1, t} - E_{k, t} = 0;$$

— непрерывность нормальной составляющей плотности тока

$$j_{k+1, n} - j_{k, n} = E_{k+1, n} / \rho_{k+1} - E_{k, n} / \rho_k = 0;$$

— непрерывность тангенциальной составляющей плотности тока

$$j_{k+1, t} / j_{k, t} = (E_{k+1, t} / \rho_{k+1}) / (E_{k, t} / \rho_k) = \rho_k / \rho_{k+1}.$$

Приведенные краевые условия требуют, чтобы

$$\epsilon_k / \epsilon_a = \operatorname{idem}; \rho_k / \rho_a = \operatorname{idem},$$

где ϵ_a и ρ_a — параметры соответственных областей, принятые за базу отсчета.

Иначе говоря, масштабы диэлектрической постоянной и проводимости по всему моделируемому пространству должны быть постоянными.

Кроме приведенных критериев подобия, не связанных с условиями однозначности, необходимо ввести определяющие критерии, получаемые при рассмотрении процессов на электроде заземлителя, к которому приложено заданное напряжение $u(t)$. Из многочисленных исследований известно, что если градиент электрического поля Земли, возрастая, достигает определенного значения $E_{\text{вп}}$ (пробивной градиент грунта), то характер прохождения тока изменяется и возникает искровой процесс. Упрощенная трактовка этого процесса состоит в том, что вся область, охваченная искровым процессом («искровая зона»), счи-

тается идеально проводящей, т. е. потенциал на ее границах приравнивается к потенциалу находящегося внутри этой области электрода. Границы искровой зоны определяются значением градиента электрического поля на них: $E = j\rho = E_{\text{пр}}$, где j — модуль плотности тока на поверхности искровой зоны.

Критерий подобия

$$\pi_A = i\rho / (l^2 E_{\text{пр}}) = \text{idem.}$$

Если внести потенциал (напряжение) на поверхность искровой зоны, то можно записать

$$\pi_B = u / (l\tilde{E}_{\text{пр}}) = \text{idem.}$$

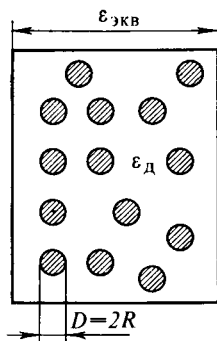


Рис. 5.14

С помощью безразмерного множителя преобразования $E'_{\text{пр}} l^2 / (i\rho)$ можно получить критерий пересчета напряжения на заземлителе:

$$\pi_C = ul / (i\rho) = \text{idem.}$$

Можно считать, что в сосредоточенном заземлителе и электрод, и границы искровой зоны имеют заданный, приложенный извне потенциал $u(t)$. Это дает возможность судить о кажущемся увеличении размеров электрода или об эффективных размерах электрода при наличии искровой зоны.

При протяженном электроде, например при заземлителе в виде проложенного в земле длинного провода (противовеса), потенциал изменяется в зависимости от времени и длины провода вследствие волнового процесса. В соответствии с принятой упрощенной схемой эффективный размер проводника (в данном случае — диаметр искровой зоны) зависит от напряжения и также изменяется по длине и во времени. Критерии π_A и π_B соблюдаются для любой пары сходственных элементов двух подобных заземлителей, в частности для точек приложения тока и напряжения. Напряжение, которое должно быть приложено к модели для соблюдения подобия, определяется именно этими критериями. Соответствующий ток находится согласно критерию π_C .

Критериальное уравнение для протяженных заземлителей в однородной среде имеет вид

$$\frac{ul}{i\rho} = \Phi \left(\frac{\mu l^2}{\rho t}, \frac{\epsilon \rho}{t}, \frac{i\rho}{l^2 E_{\text{пр}}}, l_{*1}, l_{*2}, l_{*3} \right),$$

где l_{*1}, l_{*2}, l_{*3} — отношения всех геометрических размеров электродов заземлителя к одному размеру l_a , условно принятому за характеристический, т. е. $l_{*1} = l_1 / l_a, l_{*2} = l_2 / l_a, \dots$.

Если заземлитель находится в неоднородной среде — грунте, состоящем из нескольких зон с различными параметрами, то критериальное уравнение имеет вид

$$\frac{ul}{i\rho} = \psi \left(\frac{\mu l^2}{\rho t}, \frac{\epsilon \rho}{t}, \frac{i\rho}{l^2 E_{\text{пр}}}, l_1, l_2, \dots, l_1^{(\epsilon)}, l_2^{(\epsilon)}, \dots, l_1^{(\rho)}, l_2^{(\rho)}, \dots \right).$$

Такие же критериальные уравнения можно было бы получить и из анализа размерностей восьми физических величин (μ , ϵ , ρ , $E_{пр}$, l , t , i , u), характеризующих процессы в заземлителе и измеряемых с помощью четырех единиц физических величин (метр, секунда, ампер, ом), что на основании π -теоремы подобия дает четыре рассмотренных критерия.

При моделировании заземлителей возможно создание искусственной моделирующей среды путем вкрапления в среду модели металлических частиц (рис. 5.14). Например, искусственный диэлектрик может иметь моделированную эквивалентную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon_{эКВ} \approx \left[1 + 2 \left(4\alpha N + \frac{\epsilon_d - 1}{\epsilon_d + 2} \right) \right] / \left[1 - \left(4\alpha N + \frac{\epsilon_d - 1}{\epsilon_d + 2} \right) \right].$$

Здесь α — электрическая поляризуемость частицы, зависящая от ее геометрической конфигурации и размеров. Так, $\alpha = R^3$ для шарика диаметром R , $\alpha \approx 0,425R^3$ для диска малой по сравнению с диаметром R толщиной и $\alpha = 0,082 d^3$ для квадрата со стороной d ; N — число металлических частиц в единице объема; ϵ_d — диэлектрическая проницаемость материала, в котором помещаются металлические частицы, т. е. проницаемость естественной среды модели.

Аналогично можно найти $\rho_{эКВ}$ и $\mu_{эКВ}$ и таким образом моделировать растекание тока в любых средах.

В процессе моделирования можно применить понятие о базисном заземлителе, в качестве которого может быть принят заземлитель в виде квадратного контура со стороной $\sqrt{s}$, равновеликий по площади с действительному заземлителю. Базисный заземлитель выполняется из проводника, диаметр d которого равен диаметру действительного проводника, а его ось находится на поверхности земли ($h = 0$).

При записи в относительных единицах уравнения для определения сопротивления заземлителя и напряжения прикосновения приобретают вид:

$$f_1(R/R_0, \rho/\rho_0, l/l_0) = 0;$$

$$f[(u_3 - u_x)/(u_3 - u_x)_0, i/i_0, \rho/\rho_0, l/l_0] = 0.$$

Для подобия заземлителей необходимо, чтобы соблюдалось постоянство в модели и оригинале относительных величин:

$$\frac{u_3 - u_x}{(u_3 - u_x)_0} = \text{idem}; \quad \frac{R}{R_0} = \text{idem}; \quad \frac{i}{i_0} = \text{idem}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \text{idem}; \quad \frac{l}{l_0} = \text{idem}$$

и выполнялся критерий подобия.

В качестве базисного может быть принят линейный размер, характеризующий протяженность заземлителя по горизонтали, а именно длина стороны базисного заземлителя $\sqrt{s} = t$.

Геометрическое подобие заземлителей (модели и оригинала) полностью определяется постоянством отношений всех линейных размеров к базисному:

$$(d/\sqrt{s}, l/\sqrt{s}, h/\sqrt{s}) = \text{idem}. \quad (5.64)$$

На основе теории подобия и физического моделирования может быть найдено сопротивление (Ом) любого сложного заземлителя $R = A(\rho/\sqrt{s})$, где A — безразмерная величина, зависящая от относительных размеров и конфигурации заземлителя, определяемая методом моделирования.

Например, сопротивление вертикального и горизонтального проводников

$$R_B = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{4l}{d} = \left[\frac{\ln \frac{4}{d/l}}{2\pi} \right] = \frac{\rho}{l} A_B;$$

$$R_T = \frac{\rho}{\sqrt{s}} \left[\frac{\ln \frac{2}{d\sqrt{s}}}{\pi} \right] = \frac{\rho}{\sqrt{s}} A_T.$$

Сопротивление сложных заземлителей всегда находится между предельными значениями

$$R_{\min} < R < R_0 \text{ или } A_{\min} < A < A_0.$$

На основании критерия подобия $R/R_0 = \text{idem}$ сопротивление сложного заземлителя может быть найдено как часть максимального сопротивления базисного заземлителя:

$$R = R_0 \Delta = (\rho/\sqrt{s}) A_0 \Delta, \text{ откуда } A_0 \Delta = A.$$

Поправочный множитель $\Delta = R/R_0$ (всегда меньше единицы) определяется опытом.

§ 5.4. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И ПРОЦЕССОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ УСТРОЙСТВАХ

Подобие процессов термоэлектронной эмиссии. Пусть к двум находящимся в вакууме пластинам достаточно больших размеров, отстоящим одна от другой на расстоянии l , подводится постоянное напряжение u . Пластина, имеющая отрицательный потенциал, накалена, и от нее к положительно заряженной пластине проходит ток плотностью j . Примем, что эта плотность тока, значительно меньшая плотности тока насыщения, является функцией только электрического поля. Решая задачу путем анализа размерностей, необходимо располагать достаточными опытными данными, чтобы правильно установить величины, влияющие на ход процесса. Предположим, что найдены влияющие величины, устанавливающие зависимость плотности тока j от подведенного напряжения u , диэлектрической проницаемости среды ϵ , заряда q_0 , массы m электрона и расстояния l между электродами. Из шести влияющих параметров четыре являются независимыми. Следовательно, имеются два критерия подобия π_1 и π_2 , которые можно записать в виде, соответствующем независимым параметрам ϵ, q_0, m, l

$$\pi_1 = j / \left(\epsilon^{\alpha'_1} q_0^{\beta'_1} m^{\gamma'_1} l^{\xi'_1} \right); \quad \pi_2 = H / \left(\epsilon^{\alpha'_2} q_0^{\beta'_2} m^{\gamma'_2} l^{\xi'_2} \right),$$

откуда можно найти показатели степеней $\alpha'_1, \dots, \xi'_2$.

В итоге критерии π_1 и π_2 принимают вид

$$\pi_1 = j \sqrt{\epsilon m l^7 / q_0^2}; \pi_2 = u_e l / q_0.$$

На основании π -теоремы можно утверждать, что данное явление характеризуется связью $\pi_1 = \Phi(\pi_2)$, причем вид функции неизвестен. Поставив несколько опытов по определению плотности тока в зависимости от расстояния или подведенного напряжения u , можно установить, что $\pi_1 = \pi_2^{3/2}$, или

$$\pi = j l^2 / u^{3/2} = \epsilon \sqrt{q_0 / m}.$$

Тот же результат можно получить значительно быстрее, если на основании предварительных теоретических или экспериментальных исследований известно, что влияющим фактором является не заряд и масса электрона, а их отношение. Тогда при пяти влияющих величинах и четырех независимых тем же приемом находим один критерий, равносильный π_1 :

$$\pi'_1 = \epsilon \sqrt{q_0 / m} u^{3/2} / j l^2.$$

Задача становится еще более определенной, если для изучаемого явления известны уравнения. В данном случае систему таких уравнений можно записать в следующем виде:

$$j = (dl/dt) n' q_0; u = -dl/dt; m du/dt = q_0 E,$$

где $q_0 n' = \operatorname{div} \epsilon E = \epsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} u$.

Тогда — $j = (dl/dt) \epsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} u$; — $m (d^2 l / dt^2) = q_0 \operatorname{grad} u$, откуда находим интегральные аналоги и критерии:

$$\pi_1 = j l / (\epsilon u); \pi_2 = m l^2 / (q_0 u l^2).$$

При установившемся режиме (при постоянных u и j) можно исключить время $t = \pi_1 \epsilon u / (j l)$. Подставив значение t в выражение π_2 , получим $\pi_2 = m j^2 l^4 / (\pi_1^2 \epsilon^2 u^3 q_0)$ или, объединив оба критерия в один, найдем

$$\pi = \sqrt{1 / \pi_1^2 \pi_2} = \epsilon \sqrt{q_0 / m} u^{3/2} / (j l^2),$$

что совпадает с π'_1 .

Приемы теории подобия успешно применяются и для более сложных случаев. Так, например, электроды могут иметь любую форму. Такое усложнение не позволяет применять аналитическое решение путем непосредственного интегрирования уравнений, но не мешает найти условия подобия.

Подобие электрических полей в газах, ионизированных облучением. Моделирование и использование соотношений теории подобия для изучения воздействия γ -излучения и других видов ионизирующих излучений на электротехнические устройства позволяют выявить искажения электрических полей объемными зарядами, возникающими в диэлектрике. Эти явления существенны, так как могут привести к нарушению работы изоляции, измерительных приборов, элементов автоматических, телеметрических, радиоэлектронных систем. Видимо, учет их существенен для явлений, связанных с короной проводов ЛЭП, открытой дугой, пробоем разрядных промежутков и т. д.

При облучении газообразного диэлектрика γ -лучами или рентгеновскими лучами (этот пример типичен для такого рода задач) процессы, происходящие в ионизированной облученной среде, можно описать системой дифференциальных уравнений, учитывающей процессы рекомбинации, дрейфа и диффузии ионов:

$$\frac{dn_i}{dt} = N_i - \alpha_p n_+ n_- - \operatorname{div} (\xi_+ n_+ \bar{E}) + D_+ \operatorname{div} \operatorname{grad} n_+; \quad (5.65)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = N_i - \alpha_p n_+ n_- + \operatorname{div} (\xi_- n_- \bar{E}) + D_- \operatorname{div} \operatorname{grad} n_-; \quad (5.66)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \rho/\epsilon = (q_0/\epsilon) (n_+ - n_-), \quad (5.66a)$$

где N_i — число пар ионов, создаваемых ионизирующим излучением в единице объема за единицу времени (эта величина пропорциональна мощности ионизирующего фактора); α_p — коэффициент рекомбинации в обычном смысле; n_+ и n_- — концентрации ионов соответствующего знака в единице объема; ξ_+ и ξ_- — коэффициенты, характеризующие подвижности соответствующих ионов; $\bar{E}$ — напряженность электрического поля; D_+ и D_- — коэффициенты диффузии ионов соответствующего знака; ϵ — диэлектрическая проницаемость; ρ — объемная плотность электрического заряда; q_0 — заряд одного иона; t — время.

Аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [см. (5.65)—(5.66a)] затруднительно даже при простой форме электродов. Задача существенно упрощается, если прибегнуть к методам подобия и моделирования. Можно получить критерии подобия, выразив в относительных единицах все переменные величины, входящие в уравнения:

$$n_{*+} = n_+/n_0; \quad n_{*-} = n_-/n_0; \quad N_{*i} = N_i/N_0; \quad \bar{E}_* = E/E_0; \quad l_* = l/l_0, \quad (5.67)$$

где n_0 , N_0 , E_0 , l_0 — соответствующие характерные значения (под l подразумевается любая линейная координата).

Характерное значение времени t_0 введем позднее. В качестве l_0 можно взять любой линейный размер исследуемого объекта; напряженность E_0 непосредственно связана с напряжением u_0 и размером l_0 : $E_0 = \pm u_0/l_0$ (знак в этом выражении выбирается в зависимости от того, какое направление E удобнее принять за положительное). Выбор характерного значения концентрации ионов n_0 целесообразно связать с ходом процесса, ориентируясь на какой-либо режим, допускающий аналитическое решение. Удобным для этой цели является установившийся режим при отсутствии электрического поля и при равномерном распределении в пространстве ионизирующего фактора ($N_i = N_0 = \text{const}$). При этом во всем пространстве концентрации положительных и отрицательных ионов одинаковы и определяются равновесием между ионизацией и рекомбинацией. Равновесное значение концентрации [см. (5.65)] можно принять за характерное значение ионных концентраций. При таком выборе n_0 относительные концентрации n_{*+} и n_{*-} в большинстве случаев будут выражаться числами, соизмеримыми с единицей. Заменим в уравнениях (5.65)—(5.67) натуральные величины относительными. После умножения обеих ча-

стей (5.65) на $1/N_0$, а обеих частей (5.66) на l_0^2/u_0 и введения относительного времени $t_* = t/t_0 = \sqrt{N_0 \alpha_p}$, где $t_0 = 1/\sqrt{N_0 \alpha_p}$, получим пять критериев подобия:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\xi_{+} u_0}{l_0^2 \sqrt{N_0 \alpha_p}}; \quad \pi_2 = \frac{\xi_{-} u_0}{l_0^2 \sqrt{N_0 \alpha_p}}; \\ \pi_3 &= \frac{q_0 l_0^2}{u_0 \varepsilon} \sqrt{\frac{N_0}{\alpha_p}}; \quad \pi_4 = \frac{D_{+}}{l_0^2 \sqrt{N_0 \alpha_p}}; \quad \pi_5 = \frac{D_{-}}{l_0^2 \sqrt{N_0 \alpha_p}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Однако в таком виде критерии не обладают физической наглядностью. Лучшее физическое истолкование получается, если систему (5.68) преобразовать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \pi_6 = \frac{\pi_3}{\pi_1} = \frac{q_0 N_0 l_0^4}{\varepsilon \xi_{+} u_0^2} = M; \quad \pi_7 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\xi_{+}}{\xi_{-}} = \xi; \quad \pi_8 = \frac{1}{\pi_1 \pi_3} = \\ = \frac{\alpha_p \varepsilon}{q_0 \xi_{+}} = \alpha_*; \\ \pi_9 = \frac{\pi_4}{\pi_1} = \frac{D_{+}}{\xi_{+} u_0} = D_{*+}; \quad \pi_{10} = \frac{\pi_5}{\pi_2} = \frac{D_{-}}{\xi_{-} u_0} = D_{*-}. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Здесь ξ и α_* — критерии, содержащие лишь постоянные, характеризующие среду (q_0 , ξ_{+} , ξ_{-} , ε , α_p); M , D_{*+} и D_{*-} — критерии, включающие величины, которые характеризуют внешние воздействия, мощность ионизирующего фактора N_0 и напряжение u_0 . Критерий $\pi_6 = M$ можно назвать главным критерием подобия для электрических полей в газе, ионизированном облучением, так как в него входят почти все определяющие процесс величины. Критерий π_8 можно считать относительным коэффициентом рекомбинации, так как только в него входит коэффициент рекомбинации α_p . Критерии π_9 и π_{10} являются как бы относительными коэффициентами диффузии. Они отчетливо показывают, что влияние диффузии уменьшается с ростом напряжения.

В случае физического моделирования условия подобия рассматриваемых полей, очевидно, будут:

- 1) геометрическое подобие систем электродов оригинала и модели;
- 2) равенство относительных потенциалов на электродах оригинала и модели: $(\varphi_{*h})_M = (\varphi_{*h})_0$;
- 3) соблюдение критериев подобия (5.59) для оригинала и модели.

Следствием указанных условий будет подобие пространственного распределения и изменения во времени ионизирующих факторов. В любой точке рассматриваемой области пространства и в любой момент времени исследуемого промежутка должно быть

$$[N_{*i}(x_*, y_*, z_*, t_*)]_M = [N_{*i}(x_*, y_*, z_*, t_*)]_0,$$

где левая часть записана в относительных единицах модели, а правая — в относительных единицах оригинала.

При математическом моделировании основой для решения задачи являются преобразованные уравнения (5.65)—(5.67), а также граничные и начальные условия, записанные в относительных единицах. Замена натуральных величин относительными и введение критериев подобия здесь, как и в других задачах, дает большую экономию труда и времени.

Соотношения подобия в задачах прикладной электроники. Для анализа работы и конструирования различных приборов критерии подобия отыскивают с учетом искажения поля объемными зарядами, граничных и краевых условий (потенциалов на проводящих электродах, поверхностях раздела диэлектрических и магнитных сред и т. д.). Обычно вводится требование геометрического подобия оригинала и модели, но не исключено применение нелинейных и, в частности, аффинных преобразований.

Если электрические и магнитные среды характеризуются нелинейными параметрами (ϵ , μ), то наиболее существенные нелинейные характеристики, приведенные к относительной форме, должны быть тождественны у модели и оригинала:

$$\mu/\mu_0 = \mu_* = \text{idem}, \quad \epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_* = \text{idem},$$

где μ_0 и ϵ_0 — характерные базисные величины.

Для установления критериев подобия необходимо составить систему дифференциальных уравнений изучаемых процессов. Первые два уравнения — это известные волновые уравнения электродинамики:

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 (\rho \bar{v} + \sigma \bar{E} + j_{\text{стор}}); \quad (5.70)$$

$$\nabla \varphi - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \text{div } \bar{A} + \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad \bar{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (5.71)$$

где $\bar{A}$ — векторный потенциал поля; v_0 — скорость света; ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная проницаемость вакуума; ρ — плотность объемного электрического заряда; v — скорость движения электрического заряда; σ — удельная проводимость; $\bar{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $j_{\text{стор}}$ — плотность стороннего (т. е. не зависящего от рассматриваемого поля) тока; φ — скалярный потенциал поля.

Далее составим уравнение дивергенции объемного заряда

$$\text{div } \rho \bar{v} = -\partial \rho / \partial t. \quad (5.72)$$

Уравнение движения электрона представим в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - (v/v_0)^2}} \right) = \frac{e_0}{m_0} (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}), \quad (5.73)$$

где e_0 и m_0 — заряд электрона и масса покоя; $\bar{B}$ — вектор индукции магнитного поля.

На основе полученных соотношений можно определить критерии подобия, пригодные для тех или иных конкретных случаев. Так, например, исходя из уравнения (5.70), найдем критерии подобия:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= l/(v_0 t); \pi = \sigma E/j_{\text{стор}} = \sigma u/(lj_{\text{стор}}); \\ \pi_3 &= \rho V/j_{\text{стор}} = j/j_{\text{стор}}; \pi = \mu_0 j_{\text{стор}} l^2/A; \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

на основании (5.70)–(5.74) критериальное уравнение $\pi = \psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, т. е.

$$A/(\mu_0 l^2) = j_{\text{стор}} \varphi[l/(v_0 t), \sigma u/(lj_{\text{стор}}), j/j_{\text{стор}}]. \quad (5.75)$$

Таким образом, подобие процесса определяется из (5.70) требованиями: $\pi_1 = \text{idem}$, $\pi_2 = \text{idem}$, $\pi_3 = \text{idem}$. Уравнение (5.71) позволяет найти дополнительно новый критерий, который, однако, выполняется при соблюдении всех остальных:

$$\pi = \rho l^2/v = \text{idem}.$$

Прежде чем находить критерии из уравнения (5.72), учтем, что после интегрирования его по объему V , ограниченному изнутри поверхностью катода $F_{\text{кат}}$ и извне произвольной поверхностью F , охватывающей $F_{\text{кат}}$,

$$I'_{\text{кат}} = \int_F \rho v dF - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (5.76)$$

Тогда получим два критерия. Из критерия

$$\pi = l/(vt) = \text{idem}$$

следует требование $v/v_0 = \text{const}$, т. е. во всех подобных процессах скорость движения электрона, выраженная в долях от скорости света, должна быть одинакова, или скорости движения электронов не моделируются. Другой критерий

$$\pi_4 = I_{\text{кат}}/(\rho v l^2) = \text{idem}.$$

Уравнение (5.73) позволяет получить новый критерий:

$$\pi_5 = vBl/v_0 = \text{idem}. \quad (5.77)$$

Таким образом, подобие обеспечивается при соблюдении пяти критериев и требования $v/v_0 = \text{const}$. Кроме того, должны быть соблюдены критерии $\omega t = \text{idem}$ и дополнительные граничные условия. Разумеется, такое установление критериев подобия имеет преимущественно методический характер. При решении практических задач следует принимать вытекающие из сути задачи упрощения, например, не учитывать волновые явления, считать изучаемые процессы квазистационарными, благодаря чему можно без ущерба для точности нарушать критерий $\pi_1 = l/(tv_0)$. При отказе от воспроизведения релятивистских эффектов можно отбросить критерии $\pi_1 = l/(tv_0)$ и $v/v_0 = \text{const}$. При отыскании подобия только в установившихся режимах можно пойти на еще большие упрощения. Таким образом, здесь, как и в других задачах, методами теории подобия следует пользоваться, исходя из конкретных задач. Полученные критерии нельзя рассматривать как готовые формулы, предназначенные для механического пользования ими; как в рассмотренном случае, так и в других они вполне пригодны при математическом моделировании электромагнитных полей и токов в различных установках.

Подобие и моделирование явлений короны. В задачах, связанных с проектированием и эксплуатацией ЛЭП, большое значение имеют исследования короны, возникающей на проводах высоковольтных линий. Критерии подобия при этом следует отыскивать на основе математических соотношений, учитывающих все влияющие факторы, которые проявляются в сложных процессах, связанных с явлением короны, а не только исходя из геометрического подобия.

В литературе появилось много предложений по использованию критериев подобия для постановки экспериментов, пересчета потерь, замеренных в одних условиях, на другие. Критерии получаются из основных уравнений, описывающих явление короны, приведенных обычно к безразмерному виду делением каждого уравнения на один из его членов. Используя уравнения короны, предложенные О. Майером, были получены соотношения*, на основе которых в любой момент времени процессы короны на разных проводах подобны при соблюдении критериев подобия:

$$\pi_1 = \frac{g_{\max}}{g_n} = \text{idem}; \quad \pi_2 = \frac{l^2 \omega}{g_{\max} k/\varepsilon},$$

$$\pi_3 = l/r_0 = \text{idem}; \quad \pi_4 = \omega t = \text{idem},$$

где $g_{\max}$ — максимальный заряд; g_n — начальный заряд; k — коэффициент подвижности ионов; ε — коэффициент рекомбинаций; $u_{\omega t}/u_0 = u_{* \omega t}/u_0$, $u_{\omega t}$ — напряжение, приложенное на коронирующем проводе; u_0 — начальное напряжение короны.

Критерий π_4 показывает, что при изменении частоты ω подведенного напряжения u необходимо менять масштаб времени, сохраняя критерий $\omega t = \text{idem}$. При моделировании короны в натуральном времени (без изменения частоты) сохранение критериев π_1 и π_2 обеспечивается нарушением критерия π_3 и отказом от геометрического подобия. Уравнения короны в критериальной форме записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r_{\omega t}/r_0 &= \varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4); \\ k\rho_{\omega t}/(\varepsilon_0 \omega) &= \varphi_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4); \\ u_{* \omega t} &= \varphi_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4), \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

где $r_{\omega t}$ — радиус, определяющий положение ионов в момент t ; r_0 — радиус коронирующего провода; k — коэффициент, характеризующий подвижность ионов в разных условиях; $\rho_{\omega t}$ — плотность объемного заряда ионов.

Критериальные соотношения применяют для обработки результатов различных опытов: пересчета потерь на корону P_1 , определенных

* Веников В. А. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1966.

на линии с проводами радиусом r_1 при частоте f_1 и зарядах g_1 , на потери P_2 на линии с проводами радиусом r_2 при частоте f_2 .

Общее критериальное соотношение для потерь имеет вид

$$P = \frac{\omega g_{\text{н}}^2}{\varepsilon_0} \varphi_{\text{р}} \left(u_*, \frac{k_+}{k_1}, \frac{\rho \varepsilon_0}{k_- l_0}, \pi_2, \pi_3, \pi_1 \right).$$

В частных случаях можно использовать выражение

$$P_2 = P_1 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^{1-\alpha_1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{g_{\text{н}2}}{g_{\text{н}1}} \right)^{\alpha_3} (u_* - 1),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — показатели степени, отражающие условия исследуемых процессов для конкретных случаев; u_* — кратность перенапряжений.

На основе теории подобия могут быть получены и другие зависимости. Например, относительная характеристика короны $P_* = P/P_0$ или $P_* = P/b_p u_0^2$, где b_p — проводимость короны. Как показывает рис. 5.15, эта формула дает хорошие результаты.

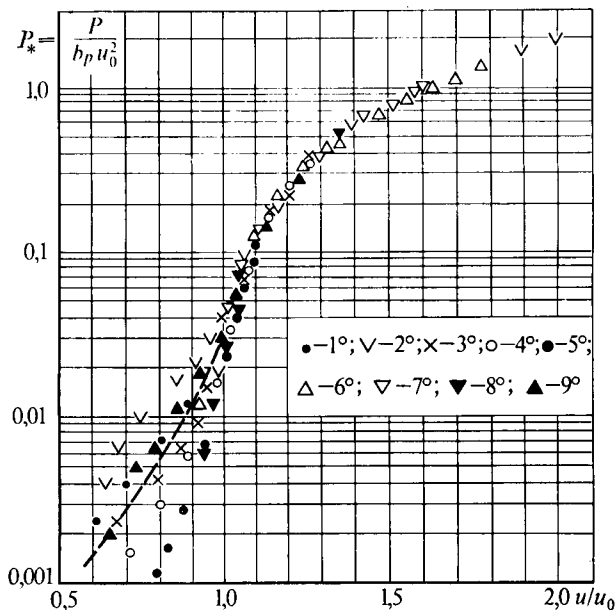


Рис. 5.15

Сложность и многогранность группы процессов, объединяемых под общим названием *корона*, требуют учета большего количества факторов, чем это делалось до сих пор, когда исследователи стремились получить результат, «удобный» для математической интерпретации. В частности, необходимо учитывать то обстоятельство, что объемный заряд в зоне ионизации распределяется в виде волн, форма которых

меняется во времени. Это движение волн весьма сложное: часть зарядов совершает поступательно-возвратное движение, часть ионов возвращается к проводу и происходит рекомбинация ионов; при этом существенно, что заряд коронирующей системы сосредоточивается не только на поверхности провода, но и в некотором изменяющемся объеме около провода. На все эти процессы влияют не только те факторы, которые учитываются в современной теории короны, но и многие другие — такие, как состав воздуха в данный момент времени и его движение, обусловленное посторонними причинами (ветер), распределение температуры около нагретого провода, наличие в пространстве, в котором развивается корона, внешних ионизирующих частиц в виде γ -излучений и т. д. Поэтому *соотношения*, необходимые для моделирования и подобных пересчетов, *следовало бы получить как вероятностные*, рассматривая возникающие поля, как действующие в неоднородной, анизотропной среде, причем параметры ее Π_x являются функцией координат и имеют вероятностный характер:

$$\Pi_x = \begin{vmatrix} f_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(\xi) \end{vmatrix},$$

где $f_{1, 2, 3}(\xi)$ — плотность распределения случайной величины.

Рассмотренный подход должен заменить современный детерминированный, при котором незакономерно стремятся к полному совпадению заранее известных данных единичного эксперимента. Этот подход еще требует разработки, однако *только он откроет практические возможности установления соотношений подобия короны* и других электронно-ионных явлений. Так, на основе вероятностных критериальных зависимостей должна исследоваться открытая дуга, появляющаяся при перекрытиях изоляции на высоковольтных ЛЭП.

При экспериментальных исследованиях на физических моделях моделирование может облегчаться различными *вспомогательными приемами*, направленными на изменение начального напряжения, вызывающего возникновение короны или дуги при перекрытиях. Например, один из таких приемов — подключение накаливаемой проволоки, позволяющей управлять искровыми промежутками, и т. д. Особое внимание должно быть обращено на моделирование явлений, связанных с молнией и реализацией грозозащиты. До сих пор в этой области исследователи не применяют теории подобия в ее полной интерпретации (с учетом подобия среды, в которой развивается разряд) в вероятностном аспекте, ограничиваясь геометрическими соотношениями, примитивными макетами, заведомо не могущими дать удовлетворительных результатов. При моделировании грозозащиты подстанций и обработке результатов исследований должны выбираться (например, согласно методу Монте-Карло) случайные параметры для каждого разряда. При физическом моделировании вероятностные характеристики, подлежащие реализации, следует подбирать на ЦВМ. При этом должна моделироваться не только геометрия сооружения и защищающих его устройств, но и окружающая среда с изменением состава

воздуха, если модель выполняется в закрытом помещении. Эти задачи еще предстоит решить.

Подобие и моделирование процессов в полупроводниках. Системы дифференциальных уравнений, описывающих физические явления в полупроводниках, нельзя решать в общем виде, однако их можно успешно применять для определения критериев подобия. Для основных процессов движения носителей заряда в полупроводниках можно записать следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{p-p_0}{\tau_p} - \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{j}_p; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n-n_0}{\tau_n} + \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{j}_n; \\ j_p &= q\mu_p p \bar{E} - qD_p \operatorname{grad} p; \quad j_n = q\mu_n n \bar{E} + qD_n \operatorname{grad} n; \quad \bar{j} = \bar{j}_p + \bar{j}_n; \\ \operatorname{div} \bar{E} &= \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} (p-n+N_D-N_a) \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi = \frac{-\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.79)$$

где p, n — соответственно концентрации дырок и электронов; p_0, n_0 — равновесные концентрации дырок и электронов; τ_p, τ_n — времена жизни носителей; q — заряд носителя; j_p, j_n — плотности дырочного и электронного токов; μ_p, μ_n — подвижности дырок и электронов; $\bar{E}$ — напряженность электрического поля; D_p, D_n — коэффициенты диффузии дырок и электронов; ϵ, ϵ_0 — диэлектрические проницаемости — относительная (материала) и вакуума; N_D, N_a — концентрации ионизированных доноров и акцепторов; φ — потенциал; ρ — плотность объемного заряда.

Граничные условия для системы уравнений (5.79) задаются значениями концентраций, токов носителей, потенциала. Например, на границе раздела n -полупроводник—металл при диффузионном токе дырок

$$-D_p (\partial p / \partial v) = s_p (p - p_0),$$

где v — внешняя нормаль к поверхности раздела; s_p — скорость поверхностной рекомбинации.

Граничные (краевые) условия на p - n -переходе $p = p_0 \exp qU_n / (k_B \theta_K)$, где U_n — напряжение на p - n -переходе; k_B — постоянная Больцмана; θ_K — абсолютная температура.

Для определения критериев подобия преобразуем исходные уравнения, представив их как проекции на одну из пространственных осей $[l]$, отнеся величины l и v к характерному линейному размеру (например, или к длине l_0 , или к толщине базы полупроводникового прибора, или к диффузионной длине L_p , или к длине Дебая L_D); время $[t]$ — к τ_p ; величины, имеющие размерность тока, — к сходственной плотности дырочного тока j_{0p} и т. п.

В результате при $N_D \approx n_0$ и $N_0 \approx p_0$ уравнения принимают следующую безразмерную форму:

$$\begin{aligned} I_{*p} &= \frac{qD_0 p_0}{l_{0p} l_0} \left[\left(\frac{E_{*0} l_0}{\varphi_0} \right) p_* E - \frac{\partial p_*}{\partial L_*} \right]; \\ \frac{\partial p_*}{\partial t_*} &= -\Delta p_* - \left(\frac{j_{0p} \tau_p}{q p_0 l_0} \right) \frac{\partial}{\partial L_*} I_{*p}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial L_*} = \frac{q p_0 l_0}{\varepsilon \varepsilon_0 E} \left(\Delta p - \frac{n_0}{p_0} \Delta N \right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial V_*} = \frac{s_p l_0}{D_p} \Delta p; p_{*n} = \exp U_{*n};$$

$$\varphi_0 = \frac{k_B \theta_K}{q}; \Delta p_* = p_* - 1; \Delta N = N_* - 1,$$

где $I_{*p} = j_p / j_{0p}$; $E_{*0} = E / E_0$; $p_* = p / p_0$; $t_* = t / \tau_p$; $L_* = l / l_0$; $V_* = v / v_0$; $U_{*n} = U_n / \varphi_0$; $N_* = n / n_0$ — относительные переменные.

В соответствии с характером решаемых задач граничные и начальные условия могут видоизменяться.

В системе безразмерных уравнений критерии подобия имеют вид коэффициентов, стоящих перед относительными переменными. Так, из этих уравнений получаем шесть критериев подобия:

$$\pi_1 = j_{0p} l_0 / (q p_0 D_0); \quad \pi_2 = E_{*0} l_0 / \varphi_0; \quad \pi_3 = j_{0p} \tau_p / (q p_0 l_0);$$

$$\pi_4 = q p_0 l_0 / (\varepsilon \varepsilon_0 E_{*0}); \quad \pi_5 = s_p l_0 / D_p; \quad \pi_6 = n_0 / p_0.$$

Полученные критерии целесообразно несколько преобразовать и ввести для них единые обозначения. *Определяющими критериями* комплексного типа будут критерии, содержащие условия однозначности. Например, π_5 — критерий подобия процессов рекомбинации на поверхности полупроводников. *Определяемыми критериями* комплексного типа, содержащими неизвестные переменные величины j_p , E_{*0} , будут, например, критерии π_1 , π_2 . Критерии подобия плотностей дырочных токов, электрических и тепловых полей в полупроводниках (при $\theta_K = \text{const}$) представим в виде

$$\pi_2'' = \pi_2^{-1} \pi_8; \quad \pi_3' = \pi_1 \pi_7^{-2}, \quad \text{где } \pi_7 = l_0 / L_p; \quad \pi_8 = l_0 / L_D.$$

При этом условия подобия сформулируются следующим образом: — электронно-дырочные переходы должны быть геометрически подобны, т. е. должны выполняться условия: $L_* = \text{idem}$; $V_* = \text{idem}$; $\pi_7 = \text{idem}$; $\pi_8 = \text{idem}$ и т. п. Критерии геометрического подобия позволяют установить геометрические масштабы подобных полупроводниковых приборов. Эти величины показывают также, что подобными могут быть только полупроводниковые приборы с пропорциональными диффузионными и дебаевскими длинами;

— начальные условия должны быть подобны. Так, например, из условия $\pi_6 = \text{idem}$ видно, что для подобия полупроводниковых приборов необходимо, чтобы отношение равновесных концентраций носителей заряда было одинаковым;

— граничные условия, т. е. $\pi_5 = \text{idem}$, $U_{*n} = \text{idem}$ и т. д., должны быть подобны. Видно, что условием подобия является пропорциональность скоростей поверхностной рекомбинации для электронов и дырок. Критерий $U_{*n} = \text{idem}$ позволяет определить масштаб потенциала и температуры, а масштаб времени находится из условия $t_* = \text{idem}$;

— если физические свойства полупроводников зависят от параметров происходящих процессов, то в соответствии со вторым дополнитель-

ным положением подобия необходимо подобие их относительного изменения.

Выполнение этих условий приводит к обеспечению подобия и соответственно соблюдению соотношений $\pi_n = \text{idem}$ для всех критериев.

Большой практический интерес представляют вопросы приближенного подобия, когда приведенные условия выполняются только частично.

При использовании теории подобия к p - n -переходам важно установить общий интеграл исходных уравнений в форме функциональной связи. Исследуя задачи полупроводниковой электроники в обобщенных переменных, можно не только облегчить их аналитическое решение (вследствие уменьшения числа параметров), но и обобщить свойства полупроводниковых приборов. Так, рассматривая известную задачу о зависимости тока p - n -перехода от приложенного к нему напряжения, при некоторых допущениях получим для определения плотности дырочного тока через переход ($x = 0$) выражение

$$\pi_1 = \pi_7 \exp(U_{*n} - 1),$$

которое при дальнейшем обобщении и уточнении можно использовать для установления условий подобия вольт-амперных характеристик различных p - n -переходов. При $\theta_k = \text{idem}$ такими условиями будут $\pi_7 = \text{idem}$, $U_{*n} = \text{idem}$. Это позволяет, зная вольт-амперную характеристику одного p - n -перехода, получить вольт-амперную характеристику другого, подобного ему p - n -перехода. Если же строить вольт-амперные характеристики в координатах $\pi_1 = f(U_{*n})$, то при $\pi_7 = \text{idem}$ в первом приближении они совпадут для различных p - n -переходов.

Таким путем можно обобщать различные экспериментальные данные. Например, зависимость дифференциальной емкости C p - n -перехода от напряжения при одной и той же температуре получается для различных образцов в виде единственной прямой (в логарифмическом масштабе), т. е. дает совпадение всех графиков $C_* = f(U)$. Подобие p - n -переходов проявляется тем самым для различных полупроводников, отличающихся размерами и параметрами.

Обработка экспериментальных данных в критериальном виде позволяет осуществлять физическое моделирование полупроводниковых приборов и обобщать натурные данные, не только предсказывая характер протекания процессов при различных режимах работы, но и выявляя новые свойства.

Полученные критерии подобия могут успешно применяться и при всех видах моделирования полупроводниковых приборов. Рассмотрим моделирование полупроводниковых приборов на примере силового транзистора, схематично представленного на рис. 5.16 (1 — моделируемая область, 2 — эмиттер, 3 — коллектор, 4 — вывод базы; ω , ω_1 — тепловые потери; d , h — размеры). В области базы при отсутствии электрического поля и малом уровне инжекции уравнения (5.79) переходят в уравнение

$$\nabla^2 p = p/L_p^2 + (1/D_p) \partial p / \partial t. \quad (5.80)$$

Уравнение (5.80) при осевой симметрии транзистора моделируется сеткой, схема ячейки которой показана на рис. 5.17. Элементы сетки имеют следующие параметры:

$$R_x = \frac{h_x}{2r_0} \bar{R}_0; \quad R_{r1} = \frac{h_r \bar{R}_0}{2r_0 + h_r} \frac{h_r}{h_x}; \quad R_{r2} = \frac{h_r \bar{R}_0}{2r_0 - h_r} \frac{h_r}{h_x};$$

$$R_{\Pi} = \frac{L_p^2}{2h_x r_0} R_0 = \frac{L_p^2}{h_x^2} R_x; \quad C = \frac{2h_x r_0}{D \bar{R}_0} \frac{t_M}{t} = \frac{h_M^2}{D R_x} \frac{t_M}{t},$$

где h_x, h_r — шаг сетки по осям x и r соответственно; r_0 — радиальная координата узла сетки; $\bar{R}_0$ — постоянная для всей сетки величина; t_M — время на модели.

Полученная в соответствии с этими уравнениями система аналогий (в случае осевой симметрии полупроводни-

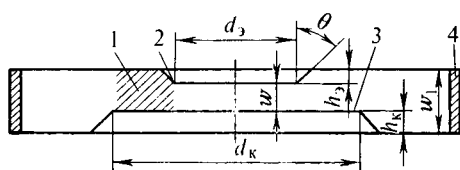


Рис. 5.16

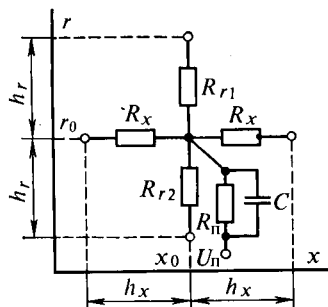


Рис. 5.17

кового прибора при $h_r = h_x = h$) дает соотношение между распределением неосновных носителей, электрическим полем и сеточной моделью.

Уравнение (5.80) воспроизводится на построенной сетке при $U_{\Pi} = 0$. Для задания граничных условий узлы сетки, соответствующие эмиттеру и коллектору, соединяются непосредственно с источниками питания $U_{\Pi 0}$ и $U_{\Pi K}$.

В результате исследований был получен ряд новых данных, хотя изучение отдельных процессов проводилось в основном без применения всей системы критериев подобия, но и это позволило выявить характер распределения носителей в области базы, соотношения диаметров коллектора и эмиттера при разной глубине его сплавления.

Преимущества применения метода подобия проявляются при исследовании связи скорости поверхностной рекомбинации s_0 , коэффициентов усиления β , диффузии D и толщины базы Δl . Пользуясь критерием подобия π_5 , удалось значительно сократить число исследований. При изучении объемной рекомбинации применяется критерий подобия π_1 ; при рассмотрении влияния сопротивления базы (например, от Δl — критерий π_4 ; при исследовании систем с пространственным зарядом например распределения поля в области электронно-дырочного перехода с учетом поверхностных зарядов, — критерии π_5 и π_6 .

Возможности методов подобия и моделирования при исследовании полупроводниковых материалов отчетливо выявляются при рассмо

тренин тепловой зависимости решеточной теплоемкости кристаллов и экспериментальном определении температуры Дебая. При этом пользуются критериальной формой температурной зависимости теплоемкости:

$$c_* = F(\text{De}),$$

где $c_* = c/c_{\text{De}}$; c_{De} — теплоемкость при так называемой температуре Дебая θ_{De} ; $\text{De} = \theta_K/\theta_{\text{De}}$.

Исследования показывают, что для большой группы подобных кристаллов $c_* = \text{idem}$. Это обстоятельство можно использовать при сравнении значений температуры Дебая, вычисленной теоретически, со значением θ_{De} , найденным опытным путем.

Применение метода подобия исключает необходимость проведения измерений зависимости $c(\theta_K)$ для всех веществ, входящих в данную группу подобных кристаллов, и позволяет сравнительно просто установить для теплопроводности решетки (в приближении, отвечающем теории Дебая), что температурная зависимость формулируется в безразмерном виде как $\kappa_* L = F(\text{De})$.

Подобие процессов в полупроводниковых термосопротивлениях (термисторах). Интерес представляет коэффициент рассеяния

$$H = P/\theta_v, \quad (5.81)$$

где P — полная мощность, рассеиваемая в стационарном режиме при прохождении через кристалл электрического тока; θ_v — средне-объемная температура перегрева кристалла относительно среды.

Анализ коэффициента H успешно выполняется с помощью аппарата теории подобия. Система первоначальных величин: θ — температура перегрева элементарного объема кристалла; w_0 — удельная мощность тепловых потерь в кристалле; κ — удельная теплопроводность; α — коэффициент теплообмена излучением поверхности кристалла со средой. Поскольку в термисторах кристалл часто имеет цилиндрическую форму и его диаметр значительно меньше длины, то геометрическими параметрами будут радиус образца a и радиальная координата r .

Безразмерные обобщенные параметры процесса: $\pi'_1 = w_0 a^2 / \kappa \theta$; $\pi'_2 = \alpha a / \kappa$; $\pi'_3 = r/a$, где π'_2 — так называемый критерий Био: $\pi'_2 = (\text{Bi})$. Следовательно, $\pi'_1 = f(\pi'_2, \pi'_3)$ или $\theta = (w_0 a^2 / \kappa) F(\pi'_2, \pi'_3)$. Среднеобъемная температура θ_v , как это следует из физических соображений, не может зависеть от π'_3 , поэтому

$$\theta_v = (w_0 a^2 / \kappa) \varphi(\pi'_2).$$

В рассматриваемом случае значение мощности, отнесенной к единице длины, $P = \pi_0 \alpha^2 w_0$, где $\pi_0 \approx 3,14$. Подставляя полученные выражения в (5.81), найдем

$$H \equiv \kappa / \varphi(\text{Bi}) \text{ или } H'_* = H / \kappa \equiv \varphi(\text{Bi}).$$

Полученное соотношение определяет методику, по которой должны выполняться экспериментальные исследования рассмотренного процесса; при этом результаты опыта на одном из образцов можно обобщить на группу образцов.

Рассмотрим простой кристаллический образец, предположив, что процессы в нем происходят при $\theta_K \gg \theta_{De}$, когда квантовые эффекты несущественны. При этом с помощью анализа размерностей получим связь величин: $\kappa_L = f(M_0, q_0, a, \theta_K)$, где M_0 — масса атома; q_0 — заряд иона; a — постоянная решетки.

Считая температуру θ основной единицей и используя методику анализа размерностей при четырех основных единицах, составляем один безразмерный степенной комплекс:

$$\pi = |\kappa_L| / (|M|^{\alpha'} |q|^{\beta'} |a|^{\gamma'} |\theta_K|^{\xi'}).$$

Решив уравнения для показателей степени размерности, после преобразований получим

$$\kappa_L = C_1 q_0^3 / (M_0^{0.5} a^{3.5} \theta_K), \quad (5.82)$$

где C_1 — безразмерный коэффициент (называемый иногда мультипликативной постоянной), определяемый по экспериментальным данным для каждого конкретного вещества.

Следовательно, приближенно можно принять $\kappa_L \approx 1/\theta_K$.

Применяя тот же аппарат теории размерности, можно получить соотношения, устанавливающие зависимость между параметрами, характеризующими теплопроводность решетки кристаллов κ_L при различных температурах. Основываясь на простой модели одновалентного ионного кристалла, полагаем, что при температуре кристалла, равной температуре Дебая, теплопроводность решетки

$$\kappa_{De} = C_2 q_0^3 / (M_0^{0.5} a^{3.5} \theta_{De}),$$

где C_2 — некоторая безразмерная постоянная.

Сопоставив κ_{De} с κ_L [см. (5.82)], замечаем, что при рассмотрении явления теплопроводности решетки кристаллов в дебаевском приближении существенными величинами для процесса являются κ_{De} , θ_{De} , θ_K , причем

$$\kappa_L = \kappa_{De} f(\theta_K / \theta_{De}) \text{ или } \kappa_{*L} = F(De).$$

Число De является критерием, значения которого разграничивают области с различными законами для теплопроводности решетки кристаллов. При $De \geq 1$ (область высоких температур) реализуются классические законы теплопроводности; при $De \ll 1$ (область низких температур) — квантовые законы теплопроводности.

Приведенные соотношения и аналогичные им позволяют по данным, полученным для какого-либо кристалла, находить неизвестные параметры других кристаллов с подобным видом химических связей и решетки.

§ 5.5. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Подобие и моделирование оптических и светотехнических устройств. Физическое моделирование осуществляется воспроизведением на установке-модели, приспособленной для проведения экспериментального исследования, светотехнического (оптического-

го) подобия изучаемых устройств. Подобие оригинала и модели, подразумевающее совпадение в определенном масштабе их кривых светораспределения, обеспечивается тождественностью углов внешнего пространства α , s и одинаковостью структуры световых пучков оригинала, модели. Светотехническое подобие реализуется при расстояниях, начиная с которых все лучи элементарных отображений займут в пучке примерно неизменное положение относительно друг друга и относительно оси оптического устройства.

В общем случае геометрическое подобие не является условием светотехнического подобия оригинала и модели. Это важно, так как из-за различия показателей яркости светящихся тел, а также неизбежного нарушения равенства угловых размеров полное геометрическое подобие не может быть обеспечено.

Основной критерий светотехнического подобия, полученный из анализа уравнений силы света оригинала и модели, имеет вид

$$\pi_1 = \rho B s K / I.$$

Масштабные соотношения подчиняются условию

$$m_\rho m_B m_s m_K / m_I = 1,$$

где B, s — площади поверхности элементов отражателей; K, ρ — коэффициент заполнения и отражения; I — сила света.

Набор оптических элементов, различных по форме и размерам, позволяет получить установку, на которой можно имитировать оптические устройства, имеющие распределение силы света, подобное заданному.

Модели могут иметь вращающиеся оптические элементы, причем сплошная поверхность отражателя заменяется меридиональной зеркальной полосой, вращаемой вокруг оси симметрии. При моделировании преломляющего устройства вращается непрозрачный колпак, на котором имеется меридиональный вырез, закрываемый набором преломляющих элементов.

Модели выполняются на основе критерия подобия

$$\pi_1 = \rho_m B_m \sum_t \Delta \psi s_\alpha / (2\pi I_{M\alpha}).$$

Этот критерий показывает, что зеркальный отражатель модели, образованный вращающейся меридиональной полосой угловой ширины $\Delta\psi$, светотехнически будет подобен оригиналу, если за период времени t средняя сила света, посылаемая им по направлению α , равна силе света сплошного отражателя с коэффициентом отражения, равным $\rho_m \Delta\psi / 2\pi$. Критерию подобия удовлетворяют модели с плоской меридиональной полосой определенной угловой ширины $\Delta\psi < \beta_\alpha$, где $\beta_\alpha = \psi_\alpha$ — максимальный размер светлой части сплошного отражателя.

Модели другого вида — каркасные, имеющие каркас для крепления оптических элементов несимметричного светораспределения. Каркасные модели со сменными оптическими элементами применяются при определении профильной кривой оптического устройства в какой-либо секущей плоскости, например для люминесцентного светильника в пло-

скости, перпендикулярной осям ламп (в поперечной плоскости). При моделировании люминесцентных светильников часто применяют систему относительных единиц, базисными единицами в которой являются максимальные значения сил света люминесцентных ламп модели и оригинала.

Цилиндрические зеркальные отражатели люминесцентных светильников имеют светлую часть в виде прямоугольника, высота h_α которого для разных направлений α зависит от их формы в поперечной плоскости, длина же постоянна и равна длине лампы. Подобие кривых силы света обеспечивается геометрическим подобием профильных кривых оптических устройств оригинала и модели согласно выражениям

$$h_\alpha/h_{m\alpha} = r_\phi/r_{m\phi} \text{ при } \rho = \rho_m \quad h_\alpha/h_{m\alpha} = d/d_m, \quad (5.83a)$$

где h_α , $h_{m\alpha}$ — высота проекции светлой части зеркальных зон оригинала и модели; r_ϕ , $r_{m\phi}$ — средние радиус-векторы тех же зон; ρ , ρ_m — коэффициенты отражения; d , d_m — диаметры люминесцентных ламп.

Изменение силы света здесь обуславливается двумя факторами: проективным сокращением светлой части ($\cos \alpha$) и краевым эффектом, т. е. сокращением длины светлой части за счет ее движения по поверхности отражателя светильника в сторону наблюдателя. Сокращение площади светлой части для зон отражателей модели и оригинала при геометрическом их подобии определяется согласно соотношению

$$s_\alpha = s_0 (1 - \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \epsilon) \cos \alpha, \quad (5.83b)$$

где s_0 — площадь светлой части отражателя по направлению $\alpha = 0^\circ$; α — текущая угловая координата; ϵ — угловой размер осветителя в продольной плоскости.

Согласно выражениям (5.83a) и (5.83b) светотехническое подобие люминесцентных светильников реализуется при геометрическом подобии в профильной плоскости, а также при равенстве длин оптического устройства и ламп в модели и оригинале.

Критериальные соотношения, приведенные выше, служат основой и для аналогового моделирования, при котором каждому элементу оптического устройства оригинала соответствует элемент модели, так что процессы в них описываются одним и тем же уравнением. При реализации оптико-электрической аналогии первично упавшие на отражатель световые потоки моделируются токами источников питания, оптические характеристики и геометрические данные отражателя — проводимостями электрической цепи, потоки многократных отражений — напряжениями между узлами электрической схемы и землей.

Оптические устройства могут моделироваться на основе структурного подобия, т. е. при расчленении уравнений на отдельные математические операции и воспроизведении этих операций на соответствующих элементах аналоговой модели, математические операции которой далее синтезируются и дают решение уравнений, описывающих изучаемый процесс. Так, при допущении о точечной малости светящего тела светораспределение симметричного зеркального светильника описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg} \frac{\varphi \pm \alpha}{2} = r \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \pm \frac{\rho I_{\text{л}\alpha} \sin \varphi}{(I_{\text{св}} - I_{\text{л}})_{\alpha} \sin \alpha}$$

где α , φ — полярные координаты точек поверхности отражателя; ρ — коэффициент отражения; $I_{\text{св}\alpha}$ — сила света светильника по направлению α ; $I_{\text{л}\alpha}$ — сила света лампы по тому же направлению.

При структурном моделировании решение этой системы уравнений выполняется тремя операциями: воспроизведением трех нелинейных функций $\operatorname{tg} \alpha$, $A = \rho I_{\text{л}\varphi} \sin \varphi$, $B = 1/[(I_{\text{св}} - I_{\text{л}})_{\alpha} \sin \alpha]$; двумя перемножениями функций $r \operatorname{tg} \alpha$, AB ; двумя интегрированиями по независимой переменной φ . Поэтому уравнения довольно легко решаются.

Математическое моделирование выполняется с помощью ЦВМ, обычно проводится при известной форме оптического устройства, заданной кривой светораспределения и заданном источнике света методом последовательных приближений. При этом основой алгоритма являются аналитические методы расчета площади светлой части и, следовательно, расчета силы света отдельных зон оптического устройства. Однако в этом случае должны быть определены численные способы автоматического заполнения заданной кривой светораспределения зональными кривыми.

Яркость и площадь светлой части зон оптического устройства можно рассчитать с помощью аналитических функций $\beta(\alpha)$ и $n(\alpha)$ установления зависимости числа светлых ячеек от угла α . Условие заполнения заданной кривой силы света заключается в том, что сумма зональных кривых $\sum I_i(\alpha)$ должна составлять функцию, близкую к необходимой кривой силы света $I(\alpha)$. Следовательно, по любому направлению должно удовлетворяться неравенство

$$\left| I(\alpha) - \sum_{i=1}^n I_i(\alpha) \right| \leq \varepsilon,$$

где n — число зон; ε — заданная погрешность.

Получающиеся при этом радиус-векторы r , соответствующие углам φ , определяют искомый профиль оптического устройства.

Оценка аппроксимации заданной кривой силы света $I(\alpha)$ в некотором фиксированном диапазоне углов α функциями $\sum I_i(\alpha)$ проводится на основе метода наименьших квадратов. При этом наилучшее приближение к $I(\alpha)$ будет соответствовать минимальной сумме

$$S = \sum_{\alpha=a}^b \left[I(\alpha) - \sum_{i=1}^k I_i(\alpha) \right]^2,$$

где a , b — выбранный интервал направлений приближения; k — число суммирующих зональных кривых.

Моделирование обычно проводится для определения необходимой точности изготовления оптических устройств (исходя из заданного разброса кривых светораспределения), оценки влияния расфокусировок на световой пучок и определения допустимых их значений, нахождения действительного светового центра светильника. Исследователи

стремятся учесть и скорректировать технологические погрешности при конструировании световых приборов.

Подобие и моделирование радиоизлучения. Различные методы исследования, широко применяющиеся при решении радиотехнических задач, включают как физические модели, так и различные аналоговые модели, использующие когерентные и некогерентные световые и звуковые волны. Применяются также аналого-качественные методы, на-

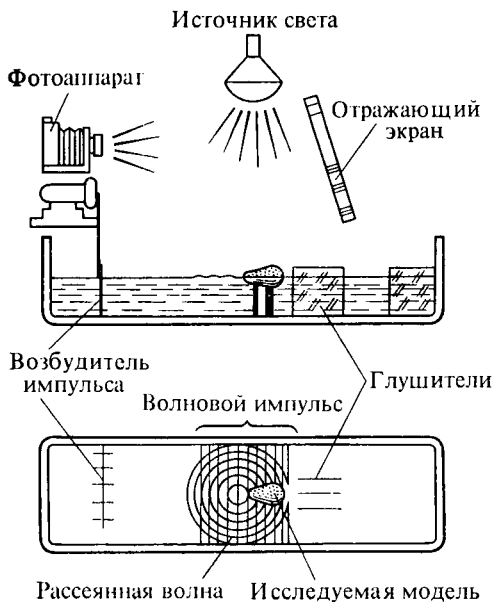


Рис. 5.18

пример моделирование в плоской водяной ванне. При этом в воде возбуждаются волны поперечного типа, отвечающие уравнениям Гельмгольца для гидромеханического потенциала скоростей, подобным уравнениям Герца. В рассматриваемом случае решение задач распространения радиоволн является приближенным и не может дать уверенного количественного подобия.

Установка для моделирования. Общий вид такой установки показан на рис. 5.18. Количественные данные относительно рассеяния радиоволн могут быть получены моделированием с помощью звуковых волн, техника создания и приема которых хорошо разработана. Однако

обычно звуковые волны являются продольными колебаниями и явления рассеяния моделируют рассеяние радиоволн только в некотором приближении. Если поляризационные явления несущественны (например, при больших размерах рассеивателя по сравнению с длиной волны), для моделирования применяют ультразвук. Основное преимущество его — относительно малые размеры моделей, определяемые тем, что скорость распространения ультразвука намного меньше скорости распространения радиоволн*.

Модель, выполненная на ультразвуке, аналогична установке (рис. 5.18), содержащей вместо механического возбудителя кварцевый. Образование поперечных звуковых волн при распространении в трубах подобно образованию электрических волн в волноводах, причем размеры сечения труб должны быть сравнимы с длиной волны. Установки, работающие на частотах, близких к 10 кГц, позволяют визу-

* Майзель Е. Н. и Торгованов В. А. Измерение характеристик рассеяния радиолокационных целей. — М.: Советское радио, 1972, 232 с.

ально наблюдать прохождение волн через линзы различного типа других устройств, подобных радиотехническим.

Физическое моделирование. При изучении явлений излучения, рассеяния и дифракции радиоволн применяется физическое моделирование. В частности, при изучении диаграмм рассеяния различных радиолокационных целей моделирование является основным методом лабораторных исследований. Для получения квазиплоской волны длиной λ расстояние R до измеряемого объекта размером L должно удовлетворять двум условиям, причем второе при $L_\lambda = L/\lambda$

$$R \geq KL^2/\lambda; \quad R \geq K\lambda L_\lambda^2.$$

При $L_\lambda = \text{const}$ необходимое расстояние, пропорциональное длине волны, уменьшается, что дает возможность работать на волнах, более коротких, чем рабочая, и выполнять исследования в помещении. При этом моделировать можно не только конфигурацию поля, но также уровни мощности и электромагнитные свойства системы, в том числе интенсивность падающего и отраженного полей. Однако получаемая при этом модель сложна, поэтому в диапазоне СВЧ практически моделируется лишь конфигурация поля. Напряженности полей или мощности в этом случае определяются косвенными методами.

Модели заданной радиосистемы обычно создаются на основе линейных уравнений Максвелла при исключении таких нелинейностей, как ионосфера, ферромагнетики и т. д. Условия подобия при этом устанавливаются для систем с линейными средами, параметры которых могут быть как однородными, так и неоднородными. Здесь следует применять дополнительные условия о подобии, расширяющие все выводы и распространяющие их на любые нелинейные случаи.

Рассмотрим условия электродинамического подобия, при которых значения векторов электромагнитного поля в каждой точке пространства модели отличаются от этих значений в соответствующей точке оригинала только постоянным численным множителем. При получении условий подобия будем исходить из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} + \mu \partial \vec{H} / \partial t = 0; \quad \text{rot } \vec{H} - \varepsilon \partial \vec{E} / \partial t - \gamma \vec{E} = 0, \quad (5.84)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы электрического и магнитного полей соответственно; μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды; γ — проводимость среды.

Воспользуемся равенствами

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= e \vec{E}_0; \quad \vec{H} = h \vec{H}_0; \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \kappa_l; \quad \mu = \mu_0 \kappa_m; \quad \gamma = \gamma_0 S; \quad l = l_0 L; \quad t = t_0 T. \end{aligned} \right\} \quad (5.85)$$

Здесь $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, κ_l , κ_m , S , l и T — числа, определяющие переменные поля в системе, в которой единичными величинами (масштабами) являются e , h , ε_0 , μ_0 , γ_0 , l_0 и t_0 .

Подставляя (5.85) в (5.84), получим

$$\text{rot } \vec{E}_0 + \alpha \kappa_m \frac{\partial \vec{H}}{\partial T} = 0; \quad \text{rot } \vec{H}_0 - \beta \kappa_l \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial T} - \delta S \vec{E}_0 = 0,$$

где $\alpha = (\mu_0 l_0 / t_0) (h/l)$; $\beta = (\epsilon_0 l_0 / t_0) (l/h)$; $\delta = \gamma_0 l_0 l/h$.

Для подобия электродинамических систем необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты α , β и δ были в обоих случаях одинаковы.

Если ограничиться рассмотрением монохроматических колебаний, за масштаб времени взять период колебаний τ и выразить его через частоту f , то условия подобия можно записать в виде

$$\mu/l_0 h/l = \text{const}; \quad \epsilon/l_0 l/h = \text{const}; \quad \gamma l_0 l/h = \text{const},$$

откуда после преобразований для модели можно получить

$$\pi_1 = \epsilon \mu (f l_0)^2; \quad \pi_2 = \mu (\gamma/f) (f l_0)^2; \quad \pi_3 = \epsilon (\gamma/f) (f l_0)^2. \quad (5.86)$$

Эти условия должны удовлетворяться во всем пространстве, т. е. в телах и среде, в которой находятся тела. Заманчиво применить в качестве среды в пространстве модели диэлектрик с высокой диэлектрической проницаемостью ϵ , например воду или твердый диэлектрик. Однако из-за потерь в воде измерения делаются неточными, а измерения с твердым диэлектриком практически трудновыполнимы и поэтому измерения на моделях всегда производятся в воздухе. Если средой в оригинале и модели является воздух, то $\epsilon = \epsilon_m$ и $\mu = \mu_m$. Это означает, что и для модели должны удовлетворяться такие же условия. Учитывая их, можно уточнить систему уравнений (5.86) для условий подобия модели в воздухе:

$$\epsilon = \epsilon_m; \quad \mu = \mu_m; \quad f/f_m = \lambda/\lambda_m = l_0/l_m. \quad (5.87)$$

В этом случае два последних соотношения (5.86) удовлетворяются автоматически.

Из выражения (5.87) следует, что измерения на модели будут совпадать с измерениями в натуре, если модель отображает образец, и по электрическим свойствам материала, и по размерам в масштабе $1:N$, а измерения производятся при частоте, в N раз большей рабочей.

Изучаемые объекты обычно выполняются из металла с большой проводимостью γ . Глубина проникновения электромагнитного поля СВЧ внутрь таких металлов, как медь, серебро, алюминий, настолько мала, что можно их проводимость приближенно считать равной бесконечности. Если и образец, и модель изготовлены из материала с $\gamma \rightarrow \infty$, то поле не проникает внутрь тел и два последних условия (5.86) можно не рассматривать, ограничиваясь условием (5.87).

Модели, изготовленные из материалов с потерями, могут пересчитываться на основе выражений (5.86), показывающих, что

$$h/l = h_m/l_m = \text{idem},$$

т. е. отношения масштабов электрического и магнитного полей в обеих системах равны, хотя h и l могут быть не равны h_m и l_m соответственно. Учитывая это, можно записать

$$\omega l_0 (\epsilon - j\gamma/\omega) = \omega_m l_{0m} (\epsilon_m - \gamma_m/\omega_m).$$

Это выражение в радиотехническом моделировании широко используется. Из него следует, что

$$\gamma/\omega = \gamma_m/\omega_m = \text{idem}.$$

Подобие и моделирование материалов с потерями. Оно требует специального подбора проводимостей и применяется редко. Однако модели, покрытые поглощающим материалом, дают удовлетворительную для практики точность. При измерениях в диапазоне волн вне резонансной области радиопоглощающего материала, покрывающего модель, достаточно, чтобы коэффициенты отражения поглощающих материалов модели и оригинала $K_{от}$ совпадали при всех углах падения. При равенстве коэффициентов $K_{от}$ совпадают амплитудные и обычно фазовые диаграммы.

Моделирование, осуществляемое с помощью волн оптического диапазона, позволяет получать приближенные сведения об отдельных параметрах полей и поэтому широко применяется для решения частных задач, например световые волны применяются для нахождения областей максимального отражения радиоволн.

Подобие и моделирование антенн. Подобие электромагнитных излучений антенн характеризуется критериями, определяющими полное электромагнитное подобие. Однако при рассмотрении только излучения и протекания токов смещения можно опустить первый критерий, исходя из условия $\omega^2 \mu \epsilon l^2 = idem$ и условия соблюдения геометрического подобия. Из записанного выше критерия подобия следует, что периоды T собственных колебаний геометрически подобных антенн, выполненных из одного материала и находящихся в одной и той же среде, пропорциональны геометрическим размерам этих антенн: при одинаковых μ и ϵ должно быть $l/T = idem$. Если практически удовлетворить требованиям, вытекающим из критериев подобия, затруднительно, то, выявив зависимость электрических параметров от геометрических размеров антенн, можно свести влияние геометрических размеров на протекание процесса к влиянию их на электрические параметры. Это вполне допустимо, так как антенна отличается от любой другой электрической цепи только способностью рассеивать значительную часть энергии при излучении электромагнитных волн. Поскольку геометрическая форма антенны обычно бывает сложной, то может показаться затруднительным получить какую-либо математическую зависимость. В действительности же самая сложная антенна является комбинацией простых элементов, которые и существенны с точки зрения установления подобия. Исследуя формулы емкости различных антенн, приходим к простому правилу: отношение статических емкостей геометрически подобных антенн равно отношению их геометрических размеров:

$$C_2 = (1/m_l) C_1.$$

Для индуктивности и взаимной индуктивности можно получить такое же правило. Размеры появляются в формулах для M и L всегда в виде отношений; влияние изменения размеров отражается только множителем m_l — коэффициентом геометрического подобия. Это правило применимо к антеннам любой формы.

Если учесть изменение сопротивления при высокой частоте и влияние скин-эффекта на индуктивность и сопротивление антенны, то в коэффициент подобия m_l нужно ввести поправочный множитель. Однако при определенных условиях эти поправки могут быть ничтожно

малыми. Возьмем, например, формулу для определения индуктивности провода с длиной l и диаметром сечения d . Уменьшение индуктивности вследствие действия магнитного поля внутри проводника

$$\Delta L_1 = -0,5\mu l [1 - \sqrt{\mu\pi f d^2 / (2p)}].$$

Для провода с коэффициентом m_1

$$\Delta L_2 = -0,5\mu l [1 - \sqrt{\mu\pi f d^2 / (2p m_1^2)}] m_1.$$

Изменение индуктивности при изменении частоты выражается нелинейной функцией от m_1 . Только для проводов, у которых $d_2 = d_1/\sqrt{m_1}$, приращение ΔL пропорционально m_1 , так что $\Delta L_2 = \Delta L_1/m_1$.

Излучение антенн — самая важная характеристика, мощность излучения антенны $P = I^2 S_\lambda$, где S_λ — сопротивление излучения антенны.

В отличие от активного сопротивления оно не зависит от удельного сопротивления материала, из которого выполнена антенна. Его зависимость от длины λ излучаемых волн и геометрической формы антенны запишется как

$$S_\lambda = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{I} \int i dh \right)^2,$$

где I — ток в нижней части антенны; h — высота антенны.

Однако $\lambda^2 = C_{\text{эф}} L_{\text{эф}} = 1/m_1^2$, следовательно,

$$S_{\lambda_2} \equiv \frac{m_1^2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{I} \int i dh \right)^2 = S_{\lambda_1}.$$

Очевидно, что у антенны любого типа распределение тока не изменится, если ее геометрические размеры изменятся пропорционально.

Вводя значения эффективной емкости $C_{\text{эф}}$ и эффективной индуктивности $L_{\text{эф}}$ антенны, получаем возможность применить формулу Томсона для вычисления частот f_0 собственных колебаний антенных контуров. Для рационально сконструированной антенны сопротивление излучения S_λ составляет преобладающую часть ее полного сопротивления. Пренебрегая влиянием активного сопротивления, для антенны 1 найдем

$$f_{01} = \sqrt{(L_{\text{эф}} C_{\text{эф}})^{-1} - S_\lambda (4L_{\text{эф}}^2)^{-1}} / 2\pi.$$

Собственная частота колебаний антенны 2, подобной антенне 1,

$$f_{02} \doteq m_1 f_{01}.$$

Подобие и моделирование процессов распространения радиоволн. Расчет распространения радиоволн вдоль земной поверхности с учетом искажений, вызванных отдельными препятствиями, чрезвычайно сложен, а при препятствиях произвольной формы вообще вряд ли возможен. Поэтому весьма эффективны моделирование и экспериментальные исследования в натуре с последующим пересчетом результатов согласно соотношениям подобия. При $\mu = 1$ для обеспечения подобия условий распространения необходимо, чтобы у всех элементов

рассматриваемой системы, включая и препятствия, выполнялись условия:

$$\omega^2 l^2 \xi = \text{idem}; \quad \omega l^2 \gamma = \text{idem}.$$

Например, если геометрические размеры и длина волны изменяются, то

$$\omega l = \text{idem} \text{ при } \xi = \text{idem}; \quad l\gamma = \text{idem}, \text{ или } \gamma/\omega = \text{idem}.$$

Чтобы сохранить подобие при уменьшении размеров, следует увеличить частоту и проводимость.

Опыты, поставленные при соблюдении указанных соотношений, позволяют выяснить влияние таких важных факторов, как амплитудные характеристики и искажение фазовой структуры электромагнитного поля в пространстве, обусловленное конечной проводимостью и электрической неоднородностью земли и геометрическими неоднородностями на трассе распространения радиоволн.

Примером проведения специальных экспериментальных исследований распространения радиоволн и последующих пересчетов результатов исходя из соотношений подобия могут служить опыты, проводимые на установке (рис. 5.19). Генератор Γ , создающий колебания частотой $f = 3000$ МГц, присоединен к излучающей антенне A_1 . Эта антенна, а также антенна A_2 , находящаяся в точке наблюдения, и контрольная A_3 изготовлены из медного провода и имеют размеры, соответствующие четверти волны; они расположены над алюминиевой поверхностью Π , являющейся трассой распространения волн. Из алюминия выполнен и полусферический «холм» — препятствие $Пр$. Влияние этого препятствия на фазовую структуру распространяющегося поля изучается с помощью смесительного устройства C , фазовращателя Φ и измерителя $И$. Сигналы от антенн A_2 и A_3 поступают в смесительное устройство, а фазовращатель позволяет совмещать сигналы от антенн A_2 и A_3 по фазе. Применяя компенсационный метод измерения и компенсируя с помощью фазовращателя амплитуды сигналов до минимума, можно по измерительному прибору найти изменение фазы $\Delta\phi$ и установить влияние на распространение волн расстояния x между приемником A_2 и холмом, а также влияние размеров холма. Полученные результаты можно распространить на подобные объекты, причем частота, при которой проводятся эксперименты, выбирается с учетом материалов модели. Так, при изучении влияния электрических неоднородностей почвы с проводимостью $\gamma = 1,2 \cdot 10^{10}$ при частоте 300 МГц результаты после пересчета согласно соотношениям подобия хорошо совпадали с экспериментально найденными условиями распространения радиоволн над почвами с проводимостью $\gamma = 4 \cdot 10^7$ 1/Ом, т. е. при $m_\gamma = m_\omega = 300$, частоте $f = 1$ МГц.

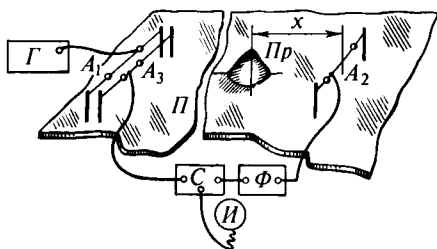


Рис. 5.19

Методы теории подобия и моделирования применяются не только при изучении распространения сигналов и их искажений под влиянием тех или иных факторов, но и при исследовании передачи энергии на расстояние без проводов.

Подобие и моделирование энергетических процессов в электронной аппаратуре и устройствах. Такие устройства могут быть представлены в виде обобщенных преобразователей энергии сигнала одной физической природы в энергию сигнала другой физической природы. Можно упрощенно предположить, что преобразователь не ограничен размерами пространства, которое ему необходимо для выполнения заданной функции, т. е. он образует идеальную термодинамическую систему, по границам которой не происходит обмена с окружающей средой ни энергией, ни массой. В качестве определяющего параметра преобразователя (системы) может быть принято изменение внутренней энергии dW . В этом случае изменение внутренней энергии системы можно представить как произведение обобщенной силы F_i соответствующей физической природы на изменение обобщенного заряда dQ_i :

$$dW = \sum F_i dQ_i. \quad (5.88)$$

В качестве определяющих параметров рассмотрим обобщенные силы

$$dF_i = \sum c_{ij} dQ_j, \text{ или } dF_i = \sum z_{ij} dI_j, \quad (5.89)$$

где c_{ij} — обобщенная жесткость системы; z_{ij} — обобщенное сопротивление системы; I_j — поток обобщенного заряда системы.

Так как при прохождении через систему информации (се преобразовании, генерировании или других процессах) внутренняя энергия системы изменяется, то для рабочей модели в качестве обобщенной силы можно выбрать количество информации S . Соответствующая математическая модель может быть представлена двумерным матричным полем. Параметры модели выбираются так, чтобы получить в результате безразмерную информационную единицу. Если в матричную модель ввести физические параметры, с которыми обычно оперирует конструктор (параметры материалов, энергию сообщения, мощность), то такого рода модель можно называть *энергетическим полем* конструкции и *энергетическим объемом* конструкции. Разделив модель энергетического поля конструкции на соответствующее ему матричное поле, получим удельную энергетическую характеристику, которая может быть использована при сравнении и оценке конструкций различных информационных устройств. Согласно аналогичной методике на основе выражения (5.88) можно получить важные для конструктора параметры: обобщенный энергоинформационный заряд Q (Дж/бит), имеющий смысл «цены» в джоулях за одну единицу информации; обобщенный энергообъемный заряд (Дж/м³), имеющий смысл объемной плотности энергии и характеризующий физические свойства материала, а также многие другие параметры. Находя такого рода параметры, конструктор может объективно оценивать модели систем по их информационно-энергетическим показателям.

На основе соотношений (5.89) можно получить ряд параметров, которыми определяются конструктивные характеристики систем.

Энергетические соотношения в конструкции. Энергия сообщения W_c только в идеальном случае равна энергии, потребляемой от первичных источников питания W_{Π} . В реальных условиях необходимо учитывать, что η_i — коэффициент преобразования (кпд), который всегда меньше единицы, поэтому количество информации, бит,

$$C = (W_{\Pi}/Q) \Pi \eta_i, \quad (5.90)$$

где Q — обобщенный энергоинформационный заряд системы, Дж/бит; η_i — коэффициент преобразования i -го преобразователя; Π — коэффициент пропорциональности.

Из (5.90) следует, что количество информации в системе тем больше, чем больше энергии потребляет система, меньше обобщенный энергоинформационный заряд системы, больше коэффициент преобразования и меньше элементарных последовательно соединенных преобразователей. Достоинства многих электросистем, в том числе радиоаппаратуры, можно характеризовать числом ее элементарных ячеек. Из приведенного выражения следует, что по энергетическим соображениям большое количество последовательных преобразований нецелесообразно.

Весовые и объемные соотношения в конструкции. Энергия сообщения или количество информации могут быть связаны с весовыми или объемными характеристиками реальных материалов выражениями

$$G = W_c K_G \text{ или } V = W_c K_V,$$

в которых коэффициенты K_G и K_V — весовые или объемные размеры данного материала, непосредственно обеспечивающего преобразование информации.

В реальных условиях в эти уравнения включаются различные коэффициенты, учитывающие конкретные конструктивные характеристики:

$$G = CQK_G \Pi K_i \text{ или } V = CQK_V \Pi K_i,$$

где G — вес аппарата, Н; K_G — «вес» единицы энергии в данном материале, Н/Дж; V — объем системы, м³; K_V — «объем» единицы энергии в данном материале, м³/Дж; K_i — безразмерные коэффициенты совершенства используемого материала по весовым и объемным параметрам и принятого конструктивного решения.

Интересные для практики соотношения иногда получают, используя метод неполных интегральных аналогов. В этом случае основой для рассмотрения состояния конструкции являются не дифференциальные уравнения, а уравнение полной энергии системы $\sum W_i = 0$. Можно представить величину W_i , как произведение n сумм обобщенной силы x_i на сопряженный с нею заряд Q_i : $\sum x_i Q_i = 0$. Так как каждая x_i — функция не только сопряженного с нею заряда, но и функция всех остальных зарядов (координат) конструкции, то обоб-

щенная сила $x_i = \sum c_{ij} Q_j$, что дает $\sum c_{ij} Q_i Q_j = 0$. Последовательно разделив последнее выражение на каждый из его членов, можно получить критерии подобия.

Если в качестве определяющих величин принимаются энергии источников питания, сообщения и потерь, а в качестве обобщенных сил — объем, количество информации и поверхность, то получается 15 критериев, объединяемых в пять групп: объемные, информационные, поверхностные, энергетические и комбинированные. Для каждой k -й группы будет справедливо условие $\pi_{2k} = \pi_{1k} \pi_{3k}$.

Если в качестве определяющих величин принимаются энергии системы, собственно конструкции, потерь и сообщения, а в качестве обобщенных сил — стоимость R , объем V , количество информации S , поверхность S , то будет существовать группа из 18 критериев, аналогичных предыдущим, которая включает новые критерии — экономические. В этом случае, как и в предыдущем, часть полученных критериев будет эвристическими критериями оценки качества компоновки, широко используемыми на практике. В каждой новой группе будет также справедливо условие $\pi_{2k} = \pi_{1k} \pi_{3k}$.

§ 5.6. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И УСТРОЙСТВ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

При изучении систем автоматического регулирования приходится оперировать с большим числом объектов, которые относятся (или с теми или иными допущениями могут быть отнесены) к линейным системам. Существенно нелинейные системы при исследовании их подобия и осуществлении моделирования можно, используя второе дополнительное положение о подобии, также свести к линейным.

Все рассмотренные методы и приемы использования подобия в научно-технических задачах (см. гл. 1, 4) могут (и должны) применяться не только при исследованиях, проводимых на тех или иных моделирующих установках, но и при чисто математическом моделировании (проведении расчетных экспериментов на АВМ или ЦВМ). Здесь будет показана возможность установления условий подобия любых динамических характеристик* и использования их при распространении одной характеристики на группы ей подобных.

В большинстве задач, связанных с определением динамических характеристик автоматических устройств, возникает необходимость определения реакции системы $y(t)$ (изменение выходной величины) на некоторое входное воздействие $x(t)$. При этом отыскивается зависимость $y(t) = F[x(t)]$. Применение положений теории подобия к решению такого рода задач начинается с рассмотрения изучаемой системы как системы линейной. Ее поведение может быть описано дифференциальным уравнением n -го порядка

* Подробнее см.: *Веников В. А., Скопинцев В. А.* Подобие динамических характеристик линейных систем. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971, № 6.

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s y}{dt^s} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x}{dt^k}, \quad (5.91)$$

где a_s и b_k — постоянные коэффициенты.

Уравнение (5.91) может описывать широкий класс физически разнородных явлений. Результаты исследований одной системы при этом переносятся на другую с помощью закономерностей, вытекающих из теории подобия. Пользуясь положениями этой теории (способ интегральных аналогов), делением на один из членов (5.91) находим критерии подобия:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{sa} &= \frac{a_s}{a_{s'}} \frac{1}{t^{s-s'}}, \quad s, s' = 0, 1, \dots, n; s \neq s'; \\ \pi_{kb} &= \frac{b_k}{b_{k'}} \frac{x}{y} \frac{1}{t^{k-k'}}, \quad s' = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \pi_{sa} &= \frac{a_s}{b_{k'}} \frac{y}{x} \frac{1}{t^{s-s'}}, \quad s = 0, 1, \dots, n; k' = 0, 1, \dots, m; \\ \pi_{kb} &= \frac{b_k}{b_{k'}} \frac{1}{t^{k-k'}}, \quad k, k' = 0, 1, \dots, m; k \neq k'. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Известно, что при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях реакция системы представляет собой переходную функцию, т. е. $y(t) = h(t)$, которая является критерием подобия линейных систем. Действительно, из (5.92) при $s' = 0$ и $k = 0$ следует, что

$$\pi_{0b} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{h(t)}, \quad \text{откуда } h(t) = \frac{1}{\pi_{0b}} \frac{b_0}{a_0}.$$

Известно (см. гл. 1, 2), что критерии подобия одной формы могут преобразовываться в критерии другой формы, получаемые за счет операций перемножения или деления критериев, возведения их в степень или умножения на любой постоянный коэффициент k . Так как π_b — критерий подобия, то и $k/\pi_{0b} = h(t)$ также является критерием. Обозначая $h(\infty) = b_0/a_0$ и $h_*(t) = h(t)/h(\infty)$, получим

$$h_*(t) = \text{idem}. \quad (5.94)$$

Из (5.94) следует, что приведенные переходные характеристики подобных линейных систем в сходственные моменты времени совпадают. Другие возможные применения критериев типа (5.92) будут показаны ниже. В частности, возможно сочетать их (при исследовании линейных систем) с применением преобразований Лапласа или Карсона—Хевисайда

$$\Psi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt; \quad (5.95)$$

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.96)$$

При нулевых начальных условиях и переходе к изображениям выражение (5.91) принимает вид

$$y(p) \sum_{s=0}^n a_s p^s = x(p) \sum_{k=0}^m a_k p^k. \quad (5.97)$$

Для обоих видов преобразования критерии подобия одинаковы:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{sa}(p) &= p^{s-s'} \frac{a_s}{a_{s'}} , \quad s, s' = 0, 1, \dots, n; \quad s \neq s'; \\ \pi_{kb}(p) &= p^{k-s'} \frac{b_k}{a_{s'}} \frac{x(p)}{y(p)} , \quad s' = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \pi_{sa}(p) &= p^{s-k'} \frac{a_s}{b_{k'}} \frac{y(p)}{x(p)} , \quad s = 0, 1, \dots, n; \quad k' = 0, 1, \dots, m; \\ \pi_{kb}(p) &= p^{k-k'} \frac{b_k}{b_{k'}} , \quad k, k' = 0, 1, \dots, m; \quad k \neq k'. \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

Передаточная функция системы в принятых обозначениях имеет вид

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \sum_{k=0}^m b_k p^k \left/ \sum_{s=0}^n a_s p^s \right. . \quad (5.100)$$

Покажем, что для подобия линейных систем необходимо и достаточно выполнение подобия их передаточных функций. Докажем условие необходимости. Для этого запишем выражение для $\pi_b(p)$ из (5.98) в случае $s' = 0$ с учетом (5.100)

$$\pi_{0b}(p) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{W(p)} ,$$

откуда

$$W(p) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{\pi_{0b}(p)} . \quad (5.101)$$

Из свойств критериев подобия следует, что если $\pi_{0b}(p)$ — критерий подобия, то и $k/\pi_{0b}(p) = W(p)$ также является им.

Докажем условия достаточности. Пусть имеются две системы с передаточными функциями $W_1(p) = d W_2(p)$, где d — постоянный коэффициент. Покажем, что эти системы подобны, т. е. выполняются критерии (5.108), (5.109). Значения $W_1(p)$ и $W_2(p)$ могут рассматриваться как несократимые рациональные дроби, поэтому из равенства этих дробей следует, что

$$\sum_{s=0}^n a_s^{(1)} p^s = c \sum_{s=0}^n a_s^{(2)} p^s; \quad \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} p^k = d c \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} p^k ,$$

где c — постоянное число.

Из условия равенства двух многочленов получим

$$\left. \begin{aligned} a_s^{(1)} p^s &= c a_s^{(2)} p^s, \quad s=0, 1, \dots, n; \\ b_k^{(1)} p^k &= d c b_k^{(2)} p^k, \quad k=0, 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (5.102)$$

При $s=0$ имеем $a_0^{(1)} = c a_0^{(2)}$. Поделим обе части первых равенств (5.102) на одинаковые постоянные числа:

$$(a_s^{(1)}/a_0^{(1)}) p^s = (a_s^{(2)}/a_0^{(2)}) p^s = \text{idem}, \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (5.103)$$

Обе части вторых равенств (5.102) также поделим на эти числа и на передаточную функцию $W_1(p) = d W_2(p)$. Тогда с учетом (5.100) можно записать:

$$\frac{b_k^{(1)}}{a_0^{(1)}} p^k \frac{x_1(p)}{y_1(p)} = \frac{b_k^{(2)}}{a_0^{(2)}} p^k \frac{x_2(p)}{y_2(p)} = \text{idem}, \quad k=0, 1, \dots, m. \quad (5.104)$$

Из выражений (5.103) и (5.104) следуют критерии подобия двух подобных систем.

Приведем доказательство положения: операторное уравнение и передаточная функция линейной системы могут быть представлены в виде функции безразмерных соотношений. Для доказательства разделим левую и правую части уравнения (5.97) на $a_0 y(p)$ ($a_0 \neq 0$) и перепишем его с учетом (5.98)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{a_0} p^s &= \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_0} p^k \frac{x(p)}{y(p)}; \\ \sum_{k=0}^m \pi_{kb}(p) - \sum_{s=1}^n \pi_{sa}(p) &= 1, \end{aligned} \quad (5.105)$$

т. е. операторное уравнение физического процесса можно представить как функцию $(m+n+1)$ безразмерных операторных соотношений.

Рассмотрим выражение для передаточной функции. Из (5.101) с учетом (5.105) следует, что

$$W(p) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\sum_{k=0}^m \pi_{kb}(p)}{\pi_{0b}(p) \left[1 + \sum_{s=1}^n \pi_{sa}(p) \right]}. \quad (5.106)$$

Введем обозначения: $W(0) = b_0/a_0$; $\pi_{*kb}(p) = \pi_{kb}(p)/\pi_{0b}(p)$; $W_*(p) = W(p)/W(0)$. Тогда

$$W_*(p) = \left[1 + \sum_{k=1}^m \pi_{*kb}(p) \right] / \left[1 + \sum_{s=1}^n \pi_{sa}(p) \right], \quad (5.107)$$

т. е. относительная передаточная функция — функция $(m+n)$ критериев подобия.

При исследовании динамических свойств систем широко применяются частотные характеристики, в частности амплитудно-фазовые

характеристики (АФХ). Одно из преимуществ АФХ по сравнению с другими динамическими характеристиками систем заключается в простой их связи с передаточной функцией — достаточно заменить p на $j\omega$. В связи с этим можно записать выражения для частотных критериев подобия, получаемых из формул для операторных критериев (5.98) и (5.99) заменой p на $j\omega$.

В практике исследований линейных систем применяются приведенные АФХ, определяемые выражением

$$W_*(j\omega) = W(j\omega)/W(0). \quad (5.108)$$

Связь между передаточной функцией и АФХ позволяет сделать вывод, имеющий важное прикладное значение: приведенные АФХ подобных линейных систем совпадают. При этом о совпадении можно говорить для точек характеристик со сходственными частотами ω , определяемыми масштабом по частоте m_ω .

Амплитудно-фазовые характеристики можно рассчитать аналитически по известным выражениям или получить в результате постановки эксперимента на действующем объекте. Свойство совпадения частотных характеристик математически подобных систем делает правомерной постановку задачи нахождения передаточной функции объекта по его экспериментальной АФХ.

При аппроксимации экспериментальной АФХ дробно-рациональной функцией исходная и аппроксимирующая характеристики подобны (квазиподобие объекта и его модели). Возможна также постановка задачи нахождения математической модели объекта при близком совпадении двух характеристик не на всем интервале частот от 0 до ∞ , а на конечном интервале, определяемом существенным диапазоном частот. Последнее позволяет значительно понизить порядок аппроксимирующей передаточной функции.

Пример 5.1. Покажем использование критериев подобия (5.92) для проектирования самонастраивающейся системы автоматического управления, структурная схема которой показана на рис. 5.20.

Пусть поведение объекта с достаточной для практики точностью описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$a_2 d^2 y/dt^2 + a_1 dy/dt + a_0 y = x, \quad (5.109)$$

где величины a_2 , a_1 , a_0 определяются параметрами объекта. Найдем такую модель, которая, будучи математически подобна заданному объекту, работала бы в значительно ускоренном времени по сравнению с временем работы оригинала. Тогда при одновременной подаче воздействия $x(t)$ на входы объекта и его модели реакцию $y(t)$ можно прогнозировать по реакции модели $y_M(t)$, и в случае нежелательных показателей качества переходного процесса параметры объекта можно скорректировать с помощью регулятора таким образом, чтобы улучшить реакцию объекта на входное воздействие.

В качестве модели используем показанную на рис. 5.21 электрическую цепь, которой соответствует дифференциальное уравнение

$$LCd^2 u_2/dt_M^2 + RCdu_2/dt_M + u_2 = u_1. \quad (5.110)$$

Запишем критерии подобия (5.92) для объекта и его модели при $s' = 0$

$$\pi_{1a} = \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{t} = \frac{CR}{t_M}; \quad \pi_{2a} = \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{t^2} = \frac{CL}{t_M^2}; \quad \pi_{0b} = \frac{1}{a_0} \frac{x}{y} = \frac{u_1}{u_2}. \quad (5.111)$$

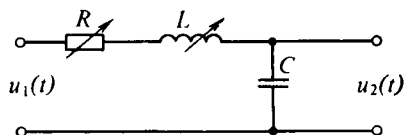


Рис. 5.20

$$CR = (a_1/a_0) m_t; \quad CL = (a_2/a_0) m_t^2; \quad m_H = a_0 m_x. \quad (5.112)$$
$$R = (a_1/a_0) (m_t/C); \quad L = (a_2/a_0) (m_t^2/C). \quad (5.113)$$

Пусть $a_0 = a_2 = 2$, $a_1 = 5$. Если выбрать $m_t = 0,01$, то переходные процессы в модели будут протекать в 100 раз быстрее, чем в оригинале. Кроме того, примем $m_x = 0,5$ и $C = 1 \cdot 10^{-4}$ Ф; тогда остальные неизвестные определяются выражениями (5.112), (5.113):

$$R = \frac{5}{2} \frac{0,01}{1 \cdot 10^{-4}} = 250 \text{ Ом}; \quad L = \frac{2}{2} \frac{(0,01)^2}{1 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Гн}; \quad m_y = 2 \cdot 0,5 = 1.$$

$$y(t) = -(2/3)e^{-0,5t} + (1/6)e^{-2t} + 0,5; \quad (5.114)$$

$$u_0(t) = -(2/3)e^{-50t} + (1/6)e^{-200t} + 0,5. \quad (5.115)$$

Из (5.114) и (5.115) видно, что значения реакций объекта и модели равны в сходственные моменты времени, т. е. $y(t) = u_2(0,01t)$. Переходный процесс в модели практически достигает установившегося значения при $t = 0,1$ с, в то время как для оригинала момент $t = 0,1$ с является началом переходного процесса.

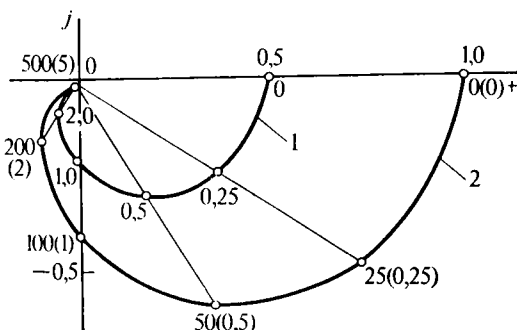


Рис. 5.22

Выражения для АФХ объекта и модели в соответствии с (5.109) и (5.110) имеют вид

$$W_o(j\omega) = 1/[2(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 2]; \quad (5.116)$$

$$W_m(j\omega) = 1/[1 \cdot 10^{-4}(j\omega)^2 + 0,025j\omega + 1]. \quad (5.117)$$

Графически АФХ, рассчитанные по (5.116), (5.117), показаны на рис. 5.22 линиями 1 и 2. При переходе к приведенным характеристикам обе АФХ совпадают (линия 2). Сходственные частоты определяются масштабом $m_\omega = 100$,

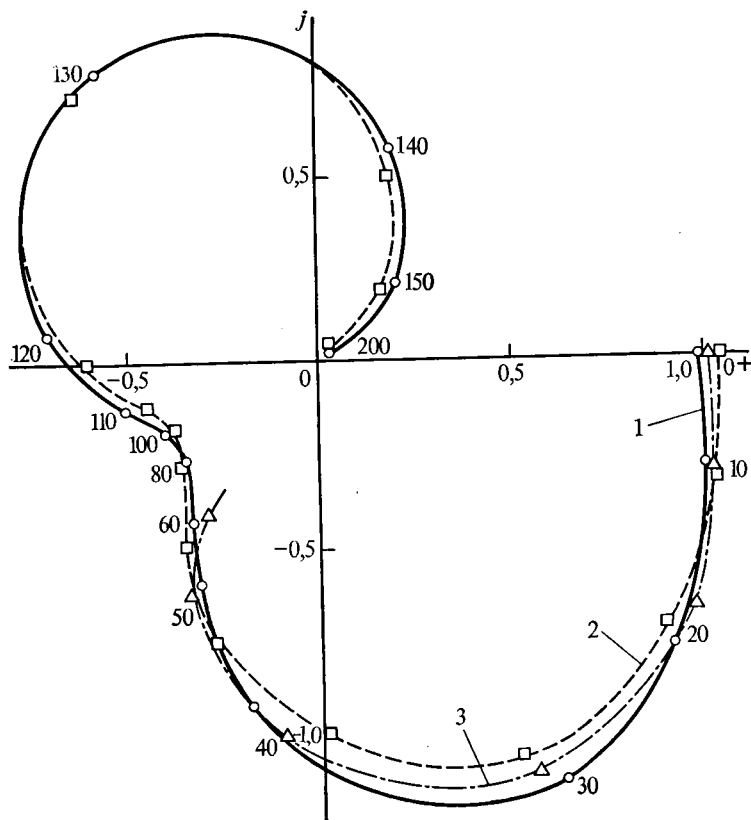


Рис. 5.23

На рис. 5.23 линией 1 изображена АФХ основного канала регулирования системы автоматического регулирования возбуждения сильного действия мощных синхронных генераторов. Передаточные функции для диапазонов угловых скоростей 0—200 и 0—60 рад/с соответственно имеют вид

$$W_1(p) = \frac{0,96 \cdot 10^{-3} p + 1,063}{0,352 \cdot 10^{-7} p^4 + 0,221 \cdot 10^{-5} p^3 + 0,692 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,304 \cdot 10^{-1} p + 1}; \quad (5.118)$$

$$W_2(p) = \frac{0,144 \cdot 10^{-2} p + 1,033}{0,722 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,252 \cdot 10^{-1} p + 1}. \quad (5.119)$$

Частотные характеристики, построенные по (5.118) и (5.119), на рис. 5.23 показаны линиями 2 и 3. Обе функции являются математической моделью иссле-

дуемой системы и используются для изучения переходных процессов регулируемого генератора; при этом следует иметь в виду диапазон частот, для которого справедлива каждая функция.

§ 5.7. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, СМЕЖНЫХ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ

Расширение задач энергетики. Энергетика — научная дисциплина, широко развивающаяся в трех главных аспектах: собственно техническом — технологическом, биосферическом, экономическом и социально-политическом.

Если технический аспект издавна привычен для инженера, то биосферический стал развиваться сравнительно недавно. Он обусловлен тем, что энергетика стала оперировать с мощностями, соизмеримыми с мощностями геофизических и геологических явлений, а также и тем, что влияние мощных энергетических (электротехнических) установок стало с большой силой проявляться в отношении различных биологических явлений в энергетике — энергетикам пришлось обращаться к биологии. Появились работы, применяющие для решения биологических задач методы анализа размерностей, методы синтеза дифференциальных уравнений, аналоговое и цифровое моделирование. Это убедительно опровергает мнение о том, будто сложность биологических и других явлений делает их недоступными для критериального описания. Было бы правильнее считать, что биологические явления слишком сложны для того, чтобы их можно было изучать без моделирования. В процессе проникновения науки в сущность биологических явлений должен формироваться новый адекватный предмету исследования математический язык. В этом формировании несомненно большая роль будет принадлежать теории подобия и моделирования.

Не меньшей должна быть роль методов теории подобия и моделирования в задачах, связанных с экономикой.

Подобие и моделирование географических процессов. Масштабы современной техники, соизмеримые с масштабами геофизических и даже космических явлений, вызывают у исследователя-энергетика определенный интерес к методологическому моделированию в космологии и геофизике. Задачи космологии, являющейся самой сложной из всех больших систем, которые может себе сегодня представить исследователь, имеют принципиальное значение. В таких системах также полностью не очевидны те предпосылки, которые должны быть положены в основу моделирования, и в какой-то мере (в миниатюре конечно) так же, как и в космологии, приходится распространять проверенное известное на неизвестное. В космологии как научной дисциплине теоретико-познавательной установкой, определяющей направление исследования, принимается* принцип экстраполяции. Вселенная, взятая как целое, —

* Здесь при характеристике проблем космологического моделирования использована работа: *Турсунов А.* Методологическая дилемма в научной космологии (о двух подходах к моделированию Вселенной). — Вопросы философии, 1970, № 4, с. 64—78.

это уникальный объект научного познания. Но она постижима на уровне знаний, являющихся синтезом земного опыта, обоснованных лабораторными экспериментами, подтвержденными, в свою очередь, ограниченными астрономическими наблюдениями (проведенными практически в пределах солнечной системы). Нет никаких оснований думать о невозможности применения принципов моделирования с использованием законов, раскрываемых локальной физикой, и некоторых общих законов макрофизики, для которых пока не выявлено реальных границ применимости. Эти законы могут быть, видимо, приняты за основу при изучении крупномасштабных процессов, так как всякое макро- и мега явление в конечном счете — совокупность микроявлений. Таким образом, есть все основания полагать, что существует принципиальная возможность моделирования структуры практически любого космического феномена вплоть до Вселенной. Следовательно, при моделировании больших систем космологии, геофизики и т. д. оправдан индуктивно-экстраполяционный подход, который в настоящее время принят в космологических теориях. В общеметодологическом плане главное достоинство такого подхода заключается в том, что он связывает физику больших систем с локальной физикой.

В процессе познания при любых его реализациях, включая и моделирование, происходит связывание неизвестного с известным. Новое знание, полученное на базе экстраполяции старого, может быть относительно истинным или просто заблуждением, но в любом случае оно необходимо для экспансии мышления в глубь еще не познанного и обнаружения его подлинной природы. «Мы просто обязаны, мы вынуждены распространять все то, что уже знаем, на как можно более широкие области, выходить за пределы уже постигнутого. Опасно? Да. Ненадежно? Да. Но ведь это единственный путь прогресса. Хотя этот путь неясен, только на нем наука оказывается плодотворной... Конечно, можно сказать: «Когда переходишь к масштабам галактик, можно ожидать чего угодно, поскольку мы ничего об этом не знаем». Верно, но такое ограничение — это конец науке», — писал Фейнман*. Именно на основе таких или близких к ним соображений появляется знаменательный прием рассмотрения «космологической реальности», состоящий в предварительном создании и последующем теоретическом анализе мысленной модели идеализированного объекта.

Рассмотренные общие соображения имеют определенное методологическое значение и для «земных» задач моделирования больших систем. Тот же принцип создания гипотетической модели «первой очереди» и дальнейшего ее уточнения по мере накопления фактов и развития теории будет широко применяться при исследовании любых больших систем. Применяются, или во всяком случае должны применяться, эти методы при географическом, геофизическом, геологическом моделировании. Здесь теория подобия еще не использует критерии подобия. Так, в географии применяют метод выделения «сходных или

* Фейнман Р. Характер физических законов. Наука, 1968, с. 181.

аналогичных сочетаний природных ресурсов» или районов со сходными комплексами природных и экономических ресурсов в процессе типологического районирования. Несомненно, что более радикальным здесь было бы установление и применение критериев подобия.

В экономической географии используются как модели оригинальные, так и модели, заимствованные из смежных наук (экономики, социологии, демографии, геологии и т. д.). Первые из них представляют собой экономико-географические модели различных производственно-территориальных комплексов (например, общеокономическая карта, система экономико-математических моделей районного комплекса). Модели заимствованные либо используются непосредственно (в транспортно-производственных задачах размещения отрасли хозяйства), либо трансформируются в соответствии с экономико-географической сущностью моделируемого объекта. Так, для моделирования межрайонных систем используется межотраслевой пространственный баланс, в котором каждый районный блок производства и распределения продукции дополнен матрицей районных ресурсов.

Производственные эксперименты в экономической географии выполнить очень трудно. Заменить их может система структурных, функциональных и энергопроизводительных моделей, позволяющая выявить оптимальные условия функционирования производственно-территориальных комплексов.

Для географических моделей характерны упрощения объектов с выделением только наиболее существенных свойств.

Масштабные соотношения позволяют рассматривать объекты в более удобном для обозрения виде. Так, меняя масштаб времени, можно ускорять процессы, для наблюдения за которыми не хватает жизни человека, а иногда и времени существования человеческого общества.

Три возможности, которые предоставляют модели, — упростить, уменьшить (или увеличить) объект исследования и ускорить (или замедлить) процесс — и обеспечили развитие географического моделирования. Например, упрощение объекта часто производится одновременно с обобщением, выявлением существенных сторон его, а это означает не только отбрасывание ненужных сведений, но и получение новых. Из сказанного очевидно, что именно моделирование явилось, по сути дела, основой географии как науки.

С помощью моделей решается задача, относящаяся и к технике, и к географии, — конструирование систем с требуемыми свойствами. Только моделирование больших систем может выявить те изменения среды, которые возникают при сооружении плотин, водохранилищ, осушении болот и т. д. Возникает задача конструирования ландшафтов с оптимальным сочетанием свойств. Роль моделирования в географии резко возрастает в связи с тем, что эта наука из описательной все больше становится аналитической, изучающей связи и взаимоотношения. Новый качественный скачок в развитии географии заключается в том, что анализ природных связей должен стать основой проектирования крупных технических сооружений, функционирование которых связано с воздействием на

природу. Неразумное строительство гидростанций, не всегда правильное осушение или, напротив, обводнение — результат отставания именно в этой научной области. Переход от анализа к управлению ландшафтами порождает новые методы в географии, среди которых моделирование находится на первом месте. Здесь основное требование — это увеличение точности моделей, которые из описательных становятся расчетными, и переход от статических моделей к динамическим. Дополнительно усложняет моделирование физико-географических природных систем взаимодействие компонентов различной природы (живых и неживых), а также необходимость включения в модель социальных факторов.

Возникает проблема, которую необходимо решить, прежде чем приступить к составлению уравнений и созданию модели. Это проблема измерения. Например, процессы прироста зеленой поверхности растений измеряются в квадратных сантиметрах, а воздействия человека — в кубометрах перемещенного грунта. Необходимо, следовательно, найти коэффициенты, устанавливающие энергетический или вещественный эквивалент процессов различной природы. Так, площадь зеленых листьев может быть заменена массой синтезируемой за единицу времени углекислоты или в конечном счете количеством энергии, затрачиваемой на фотосинтез. Таким образом, все участвующие в исследовании величины выражаются в единицах потоков энергии и связываются уравнениями баланса. Однако вопрос относительно превращений веществ и энергии с изменением структуры и организованности требует при создании моделей этого типа специального анализа.

Объективная проверка географических моделей трудна прежде всего тем, что только небольшая часть изучаемых явлений проявляется в пределах жизни человека или даже жизни целого поколения людей. Некоторый выход из этого затруднения дает исследование, когда при массовом явлении, с некоторыми повторяющимися вариациями, временные ряды чисел заменяются рядами наблюдений (измерений), сделанных в пространстве. При этом важно только быть уверенным, что все изученные таким образом системы, например ледники, управляются одной и той же (тождественной) программой. Это позволяет рассматривать разные системы как варианты одной и той же системы, что и требуется для определения количества передаваемой информации.

Все математические методы, которые описывают не связи, а форму зависимости между переменными, решают задачу моделирования качественной стороны передачи информации. При этом имеется большой выбор средств: алгебраические и дифференциальные уравнения, уравнения регрессии, графики, матрицы, высказывания формальной логики. Этими средствами можно во времени, в реальном или условном пространстве состояний показать процессы в природной системе.

Модели, описывающие процессы управления, которые совершаются в географических системах, не дают полного представления об изучаемых объектах, если затрагивают только информационную сторону

явлений. Превращения вещества и энергии не сводятся только к информации. Для достаточно полного описания объекта природы необходимо, чтобы модель имела шесть составляющих — три статические и три динамические: структурные информационные, энергетические и вещественные (связи), прихода-расхода энергии, прихода-расхода вещества, управления.

Подобие и моделирование атмосферных явлений. Аэродинамические модели позволяют проводить различные исследования. В качестве примера можно рассмотреть исследование урагана, который повалил в лесах Шотландии более 4 млн. деревьев. Сначала опыты проводились с настоящими деревьями, помещенными в большую аэродинамическую трубу. После этого работа продолжалась на моделях, построенных с применением критериев аэродинамического подобия. Был создан «лес» из 300 выполненных из медной проволоки «деревьев» высотой 12 см, диаметром кроны 8 см. При скорости воздушного потока около 25 м/с в аэродинамической трубе создавался эффект урагана (рис. 5.24).

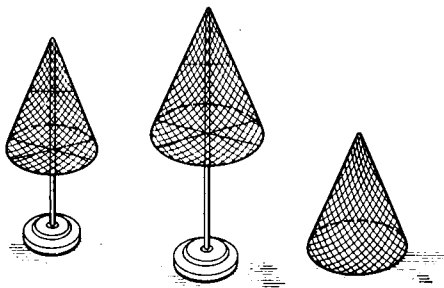


Рис. 5.24

«Лес» был укреплен на вращающейся платформе, 32 «деревя» были снабжены датчиками, которые позволяли измерять напряжения, возникающие в стволах деревьев, и выявили ряд ранее не известных эффектов. Например, лесные просеки, дороги и даже тропинки усиливают разрушительное действие ветра, поэтому перед посадкой леса, выбирая места дорог, необходимо производить математические расчеты.

Цель моделирования одного из атмосферных явлений, именно урагана, изучение не механизма происходящего явления, а его проявлений — в данном случае влияния на лес. Более глубокое изучение предусматривает рассмотрение широкого комплекса атмосферных явлений. Примером этого может служить общая (глобальная) модель циркуляции земной атмосферы, которая отражает в исходных уравнениях различные физические процессы, происходящие в атмосфере, — передачу энергии вследствие солнечного излучения, воздействия земли, турбулентности, конвекции и т. д.

Геологическое подобие и применение природных аналогов. Распространяя теорию подобия и моделирования на моделирование геологических процессов с помощью натурных моделей, необходимо уточнить ряд терминов в их приложении к геологическим объектам.

Подобие геологических процессов и явлений — геологическое подобие — представляет собой частный случай приближенного неполного подобия, при котором протекание (проявление) во времени процессов оказывается приближенно пропорциональным по наиболее существенным характеристикам.

При геологическом моделировании наиболее существенной характеристикой моделей является то, что они избирательно подобны, т. е. подобны по отношению к оригиналам лишь в некоторой части признаков: выступая в качестве носителя избирательного подобия, модель, с одной стороны, сходна и подобна моделируемой системе, а с другой — отлична от нее.

Таким образом, общую характеристику моделей, применяемых в геологии, можно представить следующим образом: модель — материальная или логическая (мысленная) категория, между свойствами которой и свойствами геологического процесса, явления или образования имеется приближенное подобие существенных и обобщенных характеристик, допускающее трансформацию свойств модели на объект (и наоборот). Термин «аналог» в геологическом моделировании имеет особый смысл. Аналогом называется база для аналогии, материальная или мысленная категория, между свойствами которой и свойствами объекта существует частичное подобие.

Таким образом, модель в рассматриваемом понимании — это усовершенствованный аналог. Все функции моделей одновременно являются и функциями аналоговых моделей, или «аналогов». В приложении к геологическим объектам целесообразно выделить три категории моделей: натурные, лабораторные, знаковые или логические.

Натурные модели — такие природные комплексы, особенности и поведение которых во времени достаточно изучены для того, чтобы можно было установить их аналогию (подобие) с другими природными комплексами. В качестве натуральных аналоговых моделей могут служить любые геологические объекты: участок побережья моря или водохранилища — для прогноза абразионных процессов, оползень — для прогноза интенсивности оползневых подвижек на склоне; рудная залежь, шахта, скважина, склон, терраса, речная долина и т. д.

Натурные модели и их применение имеют свои особенности:

1) воспроизводят в неискаженном виде геологические процессы и явления оригинала (натуры), действие которых ожидается на объекте прогноза (модели). В отличие от лабораторных и логических моделей натурная модель не «беднее» моделируемого объекта, а «богаче» его. Так, на участке-аналоге (натурной модели) геологические процессы во всем своем многообразии уже проявились, а на объекте прогноза они только ожидаются;

2) облегчают интерпретацию свойств модели на объект, так как масштаб подобия близок к единице;

3) не позволяют существенно воздействовать на ход и условия процесса.

Метод натурального моделирования представляет собой комплекс исследований объекта и его природной модели, выполненный в объеме и последовательности, достаточных для перевода полученных выводов с модели на объект, или наоборот*.

* Розовский Л. Б. Опыт применения теории физического подобия в инженерной геологии. — Известия вузов. Геология и разведка, 1964. № 4 с. 38—49.

Принципиальная возможность подобия природных моделей сложных геологических процессов и явлений основывается на постулате «однородного в целом, неоднородного в точке» геологического процесса. Длительное протекание геологических процессов и неоднократное изменение условий среды приводят к «неоднородности в точке» геологических образований. Однако длительность и разнообразие изменений создают многочисленные статистические ситуации, итогом которых является появление осредненных качеств. Эти обобщенные качества и обуславливают «однородность в целом». Так, сравнивая два пласта песка, легко обнаружить различие форм, размеров, состава частиц в соответственных точках пространства. Но указанное не исключает сходства обобщенных качеств — мощности, форм залегания, механического состава и т. д. *Геологическое подобие* — это выявление сходства существенных, обобщенных качеств (однородного в целом) при несхожести частных (неоднородного в точке). Основой условий натурального моделирования является тезис: *у геологических процессов и явлений нет особенностей, которые могли бы исключить применение к ним теорем физического подобия и дополнительных положений.*

Сложность вывода критериев подобия для многофакторных геологических процессов обусловлена трудностями выявления в достаточно конкретной форме взаимодействующих факторов.

В интерпретации к геологическим объектам сущность второй теоремы подобия излагается так: *подобные геологические явления, процессы, образования характеризуются качественными оценками или уравнениями, в которые входят критерии геологического подобия. Такие уравнения являются прогнозными в пределах границ, между которыми влияние несущественных факторов не установлено.*

Согласно третьей теореме подобия для реализации подобия необходимо равенство критериев подобия, содержащих условия однозначности, что применительно к геологическим процессам сводится к требованию подобия пространственных характеристик территории, на которой проявляется процесс геологической истории.

В более конкретной постановке для подобия условий однозначности процессов изменения берегов необходимо, чтобы в оригинале и модели были одинаковые:

- 1) литологические составы размываемых пород;
- 2) высота и крутизна изменяемых склонов;
- 3) исходные условия (профиль склона и свойства пород до начала переработки), а также продолжительность процессов;
- 4) соотношения между энергией волн, разрушающих берег, и потенциальной энергией сил сопротивления массива пород размыву.

К натурному геологическому моделированию прибегают при большой сложности и недостаточной исследованности процесса, когда дифференциальное уравнение не может быть составлено или требует столь существенных упрощений, что становится ненадежно. Поэтому анализ размерности является основным в натурном моделировании.

Покажем, как получают критерии подобия применительно к моделированию берегов водохранилищ. В табл. 5.2 приведен перечень важнейших факторов, представляющих их показателей и размерностей.

Таблица 5.2

Наименование фактора	Представляющий показатель	Обозначение	Размерность
Энергия волнения и прибойного потока	Энергия волн на внешнем крае отмели	$\mathcal{E}$	ML^2T^{-1}
Потери волновой энергии на отмели	Ширина отмели	l	L
Спротивляемость пород размыву	Угол сдвига и объемный вес грунта	ψ, γ	Нет
Вес и потенциальная энергия сопротивления размыву обвальных масс в одном цикле обрушения	Высота берега и ускорение свободного падения	h, g	L, LT^{-2}
Профиль склона	Уклон (крутизна) склона	i	Нет
Извилистость береговой линии	Коэффициент извилистости (отношение длины береговой линии к ее проекции)	j	»
Аккумуляция наносов на отмели	Коэффициент аккумуляции (отношение объема отложившихся пород к объему размытых)	z_0	»

Взаимосвязь между показателями, имеющими размерности, приведенные в табл. 5.2, и прогнозируемой величиной (шириной отмели l) записывается в критериальной форме:

$$\pi_1 = \mathcal{E}/(h^4 \kappa). \quad (5.120)$$

Безразмерные показатели также выступают в качестве критериев:

$$\pi_2 = \psi; \quad \pi_3 = i; \quad \pi_4 = j; \quad \pi_5 = z_0. \quad (5.121)$$

Критерий π_1 , называемый универсальным критерием геодинамического подобия, отражает соотношение энергий — сил, разрушающих склон, и сил, сопротивляющихся разрушению.

Вывод критериев подобия заканчивается эмпирической проверкой критериев путем сравнения различных пар натуральных моделей. При этом применяются специальные альбомы моделей — натурные аналоги, содержащие критерии геологического подобия и характеристики условий однозначности объекта, подлежащего исследованию. По данным, приведенным в альбоме, образец которого показан на рис. 5.25, выбирается подходящий натурный аналог. Затем данные об изменениях, происходивших с этим натурным аналогом в течение ряда лет, пересчитываются в соответствии с масштабами (при учете критериев подобия) на исследуемый объект. Такой же пересчет опытных данных о существующих энергосистемах и создание их натуральных карт были предложены кафедрой электрических систем МЭИ для проектирования и прогнозирования работы энергосистем.

Существенно, что применение количественных критериев подобия подводит к решению другой важной задачи — повышению эффективности использования быстро растущей информации о геологических

процессах и явлениях. Появляется возможность внести в «память» электронных информационно-логических машин описание большого количества натуральных моделей и далее объединить физическое (натурное) моделирование и математическое моделирование. Именно такой путь в данной отрасли, как и в других отраслях, наиболее перспективен. Дальнейшее развитие геологии и геохимии как науки характеризуется продолжающимся переходом от описательного метода к причинному.

Процессы, возникающие в результате взаимодействия гидротермальных растворов с горными породами, обычно сопровождаются переносом энергии и вещества, общие закономерности которого рассматривает теория тепло- и массообмена. Изучение природных нестационарных процессов тепло- и массообмена как единого, взаимосвязанного процесса — одна из наиболее актуальных задач в современной геологии.

Эффективен метод комплексного моделирования*, т. е. создание одновременно математических и физических моделей процесса, позволяющих предсказать вероятность тех или иных химических реакций. Метод физического и математического моделирования может успешно применяться в современной практике разведки и подсчета промышленных запасов термальных вод, нефти и газа, так же как для изучения процессов обводнения нефтяных и газовых месторождений.

Подобие и моделирование экономических процессов. Один из методов математического моделирования — построение мысленных обобщенных функциональных, числовых, графовых и т. п. моделей. Особенно широко они применяются в экономических задачах, для описания и исследования производственных процессов и экономических связей: такого рода моделями пользовался еще К. Маркс, выводя ус-



Рис. 5.25

* Кочергин В. Н., Балашев О. А. Методы математического моделирования процессов тепло- и массообмена в геологии. — Труды Пятой межвузовской конференции по физическому и математическому моделированию. МЭИ, 1968.

ловия осуществления процессов простого и расширенного воспроизводства.

Классическая схема моделирования процесса расширенного воспроизводства исходит из представления системы хозяйства в виде комплекса двух подразделений (рис. 5.26). Модель отражает повторяющийся цикл расширенного воспроизводства, расширение воспроизводства на длительный период представляется так называемой *динамической моделью* межотраслевых связей, в которой учитывается влияние распределения конечного продукта на фонды потребления и накопления. Модель межотраслевого баланса развивает заложенную в схеме

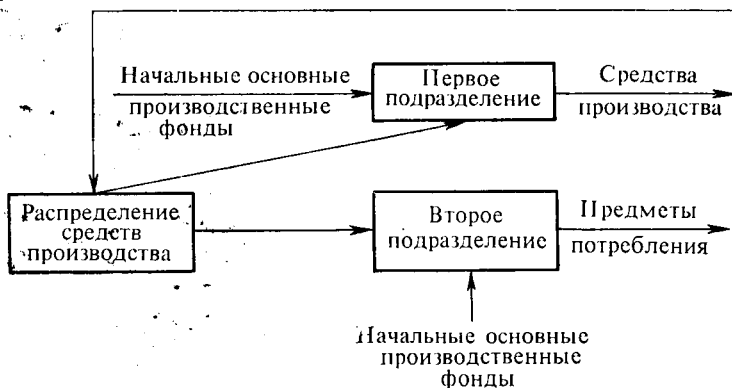


Рис. 5.26

расширенного воспроизводства идею К. Маркса — идею управляемости в целом (рис. 5.27). Модели служат и для решения экономических задач, связанных с представлением развития систем, исследованием динамических свойств и анализом их устойчивости. Для оптимизации производственных систем применяются критерии оптимальности, которые должны иметь определенный экономический смысл. Например, часто в качестве такого условия используется минимум приведенных расчетных затрат. Однако действительная оптимизация требует многокритериального подхода.

Применение методов теории подобия для решения технико-экономических задач может быть также проиллюстрировано на примере анализа развития энергетических систем и других объектов во времени. Эти методы могут быть полезны при определении критериев существования экономических интервалов мощности для уточнения шкал стоимостей унифицированных опор ЛЭП и т. п.

Рассмотрим простейший случай применения теории подобия для выявления условий существования экономических интервалов мощности ЛЭП. Считая, что наиболее экономичный вариант энергетического объекта — тот, который при прочих равных условиях дает наименьшие расчетные* затраты, являющиеся функцией технико-

* Здесь и далее имеются в виду приведенные расчетные затраты.

экономических параметров выбираемого энергетического объекта, запишем:

$$Z = C + p_{\text{норм}} K = f(P_1, \dots, P_m),$$

где Z — расчетные затраты; C — ежегодные издержки; $p_{\text{норм}}$ — нормативный коэффициент эффективности; K — капитальные вложения; $P_1, \dots, P_m$ — технико-экономические параметры объекта.

При переходе от одного варианта объекта к другому характер изменения параметров может быть различным. Одни из них остаются постоянными, другие меняются дискретно, а третьи — непрерывно. То

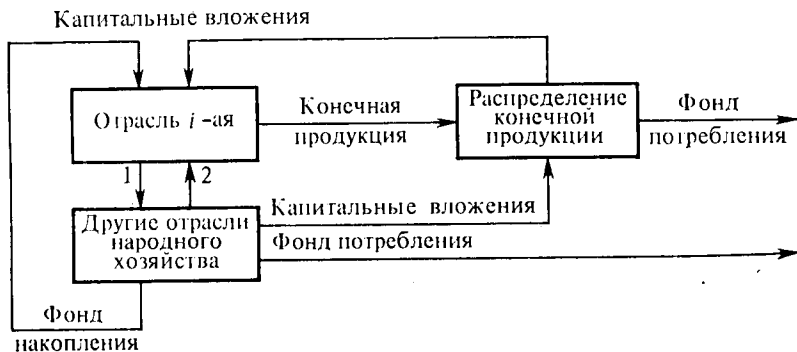


Рис. 5.27

обстоятельство, что часть параметров изменяется дискретно (например, сечение проводов, напряжение), предопределяет интервалы, или области, наиболее целесообразного применения объекта с данной величиной дискретно меняющегося параметра.

Предположим, что энергетический объект характеризуют всего три параметра (x, y, z) и технически осуществимо только n его вариантов, причем при переходе от одного варианта объекта к другому x меняется непрерывно, y — дискретно, z остается постоянным. В этом случае $Z = f(x_i, y_i, z_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Показанная на рис. 5.28 зависимость расчетных затрат Z от параметра x имеет вид прямой линии. Обычно с ростом значения y увеличивается Z_0 и уменьшается наклон прямой. Благодаря этому прямые, характеризующие смежные значения дискретного параметра y , должны пересечься. Абсцисса точки пересечения делит ось x на два интервала. В интервале от 0 до x_a наиболее экономичен вариант объекта с параметром y_i , а от x_a и далее — соответственно вариант с параметром y_{i+1} . Это обусловлено тем, что в интервале от 0 до x_a вариант с параметром y_i имеет меньшие расчетные затраты, нежели вариант того же объекта, но с параметром y_{i+1} . Поскольку в точке пересечения расчетные затраты вариантов с параметрами y_i и y_{i+1} равны, то абсциссу x_a можно найти из уравнения

$$Z_i = Z_{i+1}. \quad (5.122)$$

Таким образом, дискретный характер изменения параметра приводит к появлению экономических интервалов, число которых (включая и два крайних) должно быть равно числу возможных значений дискретно меняющегося параметра; при непрерывном изменении параметра интервал становится точкой.

Если число интервалов меньше числа значений дискретного параметра, то выбор объекта может быть неудачен. Оптимальный вариант ЛЭП прежде всего характеризуется экономически целесообразным сечением проводов, выбираемым для вариантов выполнения линии заданных напряжения, максимально передаваемой мощности, стоимости 1 кВт·ч потерянной энергии, времени наибольших потерь мощности и т. д. Такие задачи могут быть успешно решены с помощью экономических интервалов мощности, применяемых к стандартным сечениям проводов.

Зависимость удельных расчетных затрат ЛЭП от передаваемой мощности имеет следующий вид:

$$z = p_{\text{л}} \frac{K_{\text{л}}}{P_{\text{max}} T} + \frac{P_{\text{max}}}{u^2 \cos^2 \varphi} \frac{r \tau \mu}{T}, \quad (5.123)$$

где $p_{\text{л}} = p'_{\text{л}} + p_{\text{норм}}$, $p'_{\text{л}}$ — отчисления на ремонт и амортизацию сети в относительных единицах; $p_{\text{норм}}$ — нормативный коэффициент эффективности; $K_{\text{л}}$ — стоимость 1 км линии; P_{max} — максимальное значение передаваемой мощности; u — номинальное напряжение линии; $\cos \varphi$ — коэффициент мощности; r — активное сопротивление 1 км линии; τ — время наибольших потерь мощности; μ — стоимость потерянного 1 кВт·ч; T — срок окупаемости.

Пять критериев экономического подобия ЛЭП запишутся (см. пример 1.8) в виде

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= z (K_{\text{л}}^{1/2} T^{1/2} r^{1/2} \mu^{1/2} u^{-1}) = z/z_0; \\ \pi_2 &= P_{\text{max}} / (K_{\text{л}}^{1/2} T^{-1/2} r^{-1/2} \mu^{-1/2} u) \leftarrow P_{\text{max}} / P_{\text{max}0}; \\ \pi_3 &= \tau / T; \quad \pi_4 = \cos \varphi; \quad \pi_5 = p_{\text{л}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.124)$$

Критериальное уравнение

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) \quad (5.125a)$$

или

$$z/z_0 = f(P_{\text{max}}/P_{\text{max}0}, \tau/T, \cos \varphi, p_{\text{л}}) \quad (5.125b)$$

может быть получено некоторым преобразованием исходной формулы удельных расчетных затрат с учетом того, что

$$\begin{aligned} \pi_1 \pi_2 &= z P_{\text{max}} T / K_{\text{л}}; \quad \pi_1 / \pi_2 = z u^2 / (P_{\text{max}} r \mu); \\ \pi_1 &= \pi_5 / \pi_2 + \pi_2 \pi_3 / \pi_4^2 \end{aligned} \quad (5.126a)$$

или

$$\frac{z}{z_0} = p_{\text{л}} \frac{P_{\text{max}0}}{P_{\text{max}}} + \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{max}0}} \frac{\tau}{T} \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (5.126b)$$

Из уравнений (5.124)–(5.126) следует, что две ЛЭП экономически подобны, если у них соответственно одинаковы критерии $\pi_2, \pi_3,$

π_4, π_5 . Если установлено, что линии экономически подобны, то результаты технико-экономического анализа, полученные для одной линии, можно распространить на все другие линии, экономически подобные первой. Если обе части критериального уравнения (5.126а) умножить на выражение $0,5\pi_4\pi_3^{-1/2}\pi_5^{-1/2}$, то в результате получим

$$0,5\pi_4\pi_3^{-1/2}\pi_5^{-1/2} = 0,5(\pi_2^{-1}\pi_3^{-1/2}\pi_4\pi_5^{1/2} + \pi_2\pi_3^{1/2}\pi_4^{-1}\pi_5^{-1/2}).$$

Вычитая из левой и правой частей единицу и раскрывая выражения критериев, окончательно запишем

$$(z - z'_0)/z'_0 = 0,5(P'_{\max 0}/P_{\max} - P_{\max}/P'_{\max 0}) - 1, \quad (5.127)$$

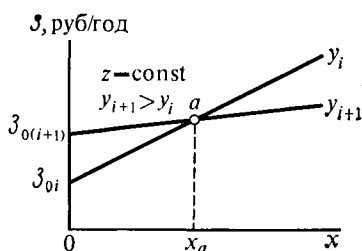


Рис. 5.28

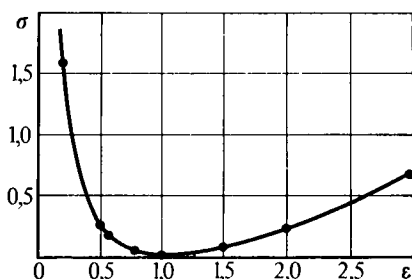


Рис. 5.29

где $z'_0 = 2\sqrt{K_{\pi}\mu\tau p_{\pi}}/(uT \cos \varphi)$ — минимальное значение z при изменении $P_{\max}$ от 0 до ∞ ; $P'_{\max 0} = u \cos \varphi \sqrt{K_{\pi}p_{\pi}/(\tau\mu)}$ — значение мощности, соответствующее минимальному значению $z = z'_0$.

Уравнение (5.127) определяет относительное отклонение удельных расчетных затрат от минимального значения при отклонении $P_{\max}$ от $P'_{\max}$. Введем следующие обозначения: $\sigma = (z - z'_0)/z'_0$, $\epsilon = P_{\max}/P'_{\max 0}$, тогда

$$\sigma = 0,5(1/\epsilon + \epsilon) - 1.$$

Аналогичное уравнение, имеющее большое значение для технико-экономического анализа ЛЭП, можно получить, рассматривая удельные расчетные затраты в функции капиталовложений K_{π} :

$$\sigma' = 0,5(1/\epsilon' + \epsilon') - 1,$$

где $\sigma' = (z - z''_0)/z''_0$; $\epsilon' = K_{\pi}/K'_{\pi 0}$; $K'_{\pi 0}$ — значение капиталовложений, соответствующее оптимальной величине расчетных затрат z''_0 .

При этом уравнение $\sigma = f(\epsilon)$ определяет относительное отклонение удельных расчетных затрат от оптимального значения z''_0 при отклонении K_{π} от $K'_{\pi 0}$ (рис. 5.29). Кривая $\sigma = f(\epsilon)$ является общей для всех ЛЭП и отражает их наиболее характерные технико-экономические свойства, поскольку она получена из критериального уравнения, которое инвариантно для экономически подобных линий.

Зависимость $\sigma = f(\epsilon)$ позволяет связать критерии существования экономических интервалов мощности. Для определения зависимости

удельных расчетных затрат z от мощности $P_{\max}$ для i -й марки провода ЛЭП запишем уравнение, отвечающее (5.123)

$$z_i = p_{\text{л}} \frac{K_{\text{ли}}}{P_{\max} T} + \frac{P_{\max}}{u^2 T \cos^2 \varphi} \tau_{\text{л}} r_i.$$

Значения $K_{\text{ли}}$ и r_i для некоторых марок проводов приведены ниже:

Марка провода	АС-70	АС-95	АС-120	АС-150	АС-185	АС-240	АС-300
$K_{\text{ли}}$, тыс. руб/км*	6,1	6,0	5,9	6,1	6,4	7,2	7,6
r_i , Ом/км	0,460	0,330	0,270	0,210	0,170	0,132	0,107

Таким образом, для ряда стандартных сечений получим семейство кривых различных марок ряда проводов. Абсциссы точек пересечения кривых определяют верхнюю и нижнюю границы экономического интервала мощности для данной марки провода при заданном напряжении линии. Однако экономический интервал для i -й марки может и не существовать. Это означает, что наличие в шкале стандартных сечений данного провода экономически не обосновано. Поэтому возникает необходимость установления условий (критериев) существования экономических интервалов мощности ЛЭП.

Покажем определение критериев, пользуясь выражением

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{z_i - z'_{0i}}{z'_{0i}} = \left(\frac{Z_i}{P_{\max} T} - \frac{Z_{0i}}{P_{\max 0} T} \right) / \left(\frac{Z_{0i}}{P_{\max 0} T} \right) = \\ &= \frac{Z_i}{(P_{\max}/P_{\max 0}) Z_{0i}} - 1 = \frac{Z_i}{\varepsilon Z_{0i}} - 1, \end{aligned} \quad (5.128)$$

где $Z_i = z_i P_{\max} T$ — полные расчетные затраты; $Z_{0i} = 2 p_{\text{л}} K_{\text{ли}}$ может принимать любые значения, в частности и $Z_{\text{гр}}$, т. е. $Z = Z_{\text{гр } i+1/i}$.

Приравнявая значения удельных расчетных затрат в граничной точке, находя граничную мощность $P_{\text{гр max } (i+1)/i}$ и подставляя ее значение в уравнение (5.123), определим значение

$$Z_{\text{гр } i+1/i} = p_{\text{л}} (K_{\text{ли } i+1} r_i - K_{\text{ли } i} r_{i+1}) / (r_i - r_{i+1}). \quad (5.129)$$

Полученная формула справедлива при $r_i > r_{i+1}$. Подставляя $Z_{\text{гр } i+1/i}$ и Z_{0i} в (5.129), найдем

$$\frac{K_{\text{ли } i+1} r_i - K_{\text{ли } i} r_{i+1}}{\varepsilon_{i+1/i} K_{\text{ли } i} (r_i - r_{i+1})} = \frac{1}{\varepsilon_{i+1/i}} + \varepsilon_{i+1/i}, \quad (5.130)$$

откуда

$$\varepsilon_{i+1/i} = \sqrt{\frac{r_i}{K_{\text{ли } i}} \frac{K_{\text{ли } i+1} - K_{\text{ли } i}}{r_1 - r_{i+1}}}. \quad (5.131)$$

Учитывая условие (5.129), заключаем, что поскольку ε — действительное число, то необходимо, чтобы

$$K_{\text{ли } i+1} > K_{\text{ли } i}. \quad (5.132)$$

* Стоимости условно.

Далее легко установить, что

$$\varepsilon_{i/i-1} = \sqrt{\frac{r_i}{K_{li}} \frac{K_{li} - K_{li-1}}{r_{i-1} - r_i}}.$$

Замечая, что $\varepsilon_{i+1/i} = P_{\text{гр max } i+1/i} / P_{\text{max } 0i}$; $\varepsilon_{i/i-1} = P_{\text{гр max } i/i-1} / P_{\text{max } 0i}$ и что для существования экономических интервалов необходимо, чтобы $P_{\text{гр max } i+1/i} > P_{\text{гр max } i/i-1}$, получаем критерий существования экономических интервалов в виде

$$\varepsilon_{i+1/i} > \varepsilon_{i/i-1}.$$

Используя (5.131) и (5.132), запишем

$$\frac{K_{li-1} - K_{li}}{r_i - r_{i+1}} > \frac{K_{li} - K_{li-1}}{r_{i-1} - r_i} \quad \text{или} \quad \frac{K_{li} - K_{li-1}}{K_{li+1} - K_{li}} < \frac{r_{i-1} - r_i}{r_i - r_{i+1}}.$$

Следовательно, провод i -й марки, смонтированный на опорах стоимостью K_{li} , экономически целесообразно применять только в том случае, если выполняется последнее неравенство. При этом предполагается, что условия, накладываемые неравенствами (5.129) и (5.132), также выполняются. Полученные выводы позволяют провести анализ условий существования экономических интервалов мощности у ЛЭП, выполненных проводами стандартных сечений.

Подобие и моделирование процессов в биологических системах.

Все биологические системы являются сложными или «большими» системами. Специфические свойства больших систем — высокая размерность, сложность структуры, множество нелинейных зависимостей между переменными, вероятностный характер изменения параметров и прямых и обратных взаимодействий между переменными — затрудняют аналитическое описание процессов. Воспроизведение поведения таких систем или постановка на них экспериментов связана не только с трудоемкостью и высокой стоимостью, но и со спецификой больших систем, проводить в которых «аварийные» эксперименты невозможно из-за опасности их повреждений, нарушений в работе. Этим определяется переход к моделированию сложных систем, которое позволяет строить отображающие эти системы «модельные объекты» и на них изучать происходящие процессы управления и переработки информации.

Биологические модели позволяют абстрагироваться от таких свойств исследуемой системы, которые выступают как несущественные в том или ином конкретном отношении.

Познавательные функции моделирования в биологии совпадают с функциями абстрактного мышления. Однако они в определенном смысле перекрещиваются с экспериментом — в обычном ли понимании или при моделировании «мысленном». В любом из этих случаев исследователь при моделировании получает возможность изучать явления в контролируемых условиях, используя для их характеристики точные количественные показатели.

При моделировании живых организмов и различных биологических явлений возможности теории подобия используются не в полной мере. Наиболее известные электронные модели животных — мы-

ши, черепахи и т. д. — используются преимущественно для демонстрации внешней «похожести» их поведения поведению живых оригиналов на основе подобия некоторых функций, связанных с изображением взаимодействия моделируемого организма и окружающей среды.

Условие подобия любых явлений, в том числе и происходящих «в живом», должно выражаться равенством в модели и оригинале критериев подобия. Выполнение этого условия может основываться на следующих соображениях. Прежде всего можно заметить, что у всех млекопитающих существует зависимость их основных размерных величин x_i от некоторого характерного показателя, например веса животного $P = \rho g L^3$ (где ρ — плотность тела, g — ускорение свободного падения):

$$x_i = a_i P_{Mi}^{\kappa} \quad (5.133)$$

где a_i — постоянная, соответствующая значению физиологического i -показателя для животного, масса которого $M_i = (3\alpha_i + \beta_i + \kappa\gamma_i)/3$ принята за исходную (α_i , β_i , γ_i — показатели размерности массы, длины и времени; параметр κ определяется соотношением между характерными для данного организма периодами τ_i и геометрическими размерами l_i). Постоянство ускорений g , скоростей v и коэффициента диффузии D определяют соотношения вида $\tau_1 \sim l^{1/2}$, $\tau_2 \sim l$, $\tau_3 \sim l^2$.

Первое условие характерно для динамического подобия в механике ($Fr = l/gt^2 = \text{idem}$); второе — для кинематического подобия в электродинамике ($Ho = vt/l = \text{idem}$), а третье — для подобия тепловых и диффузионных процессов ($Pe' = v_\tau l_\tau / a = \text{idem}$, $Pe = v c l_c / D = \text{idem}$). Для микросубъектов $\kappa \approx 2$, для млекопитающих $\kappa \approx 0,84$. Функциональные зависимости физиологических показателей от веса тела у последних удовлетворяют зависимостям (5.133) и отвечают, следовательно, условиям приближенного нелинейного подобия или квазиподобия.

Анализ размерностей параметров процессов позволяет установить зависимость физиологических показателей от мощности N , развиваемой организмом при физической работе: $x_i = x_{i0} (1 + BN)^{-\nu_i t}$; от перегрузок: $x_i = x_{i0} G^{-\nu_i / 2}$ (повышенных ускорений свободного падения); от температуры тела при гипотермии: $x_i = x_{i0} \exp[-\gamma_i E / (RT)]$. Экспериментальные данные подтверждают теоретические зависимости и предположение о том, что под влиянием внешних воздействий организм стремится перейти в состояние, подобное исходному.

Исследование условий подобия биологических систем и их сопоставление с соответствующими условиями подобия в гидро- и аэромеханике, электротехнике, химической технологии позволяет сделать вывод: системы с распределенными параметрами, состоящие из физически сходственных элементов с одинаковой структурой их соединения и выполняющие в том или ином смысле подобные функции хотя бы даже при разнородных процессах, должны считаться квазиподобными. Такие системы имеют ряд свойств, которые используются при пересчете значений физических величин и параметров с одного биологического объекта на другой.

Представление экспериментальных данных в безразмерной критериальной форме — в виде линейной функциональной связи или произведений степенных функций критериев — может привести к инвариантным зависимостям. Математические модели, менее подверженные статистическому разбросу параметров, обобщают установленную экспериментально зависимость на класс подобных явлений. Значения показателей и параметров моделей пересчитываются по формулам связи размерностей с учетом отклонений от строгого подобия. Влияние изменения одного параметра или внешних воздействий прослеживается на основе математической модели, описывающей поведение системы в целом.

Применение теории подобия и моделирования оказалось особенно актуально в космической биологии и космической медицине. Здесь одной из важнейших проблем является проблема перенесения экспериментальных закономерностей, полученных для одного животного, на класс подобных ему животных и на человека. Применение теории подобия для выбора подходящего объекта экспериментальных исследований, установления закона моделирования и обработки информации позволяет представить результаты исследования в обобщенном виде и дать им глубокое теоретическое обоснование. При этом необходимо принимать во внимание, что организм животного представляет собой комплекс взаимодействующих систем, в которых одновременно протекают механические, электрические и физико-химические (включающие тепловые, диффузионные и химические) процессы.

Сложность биологических объектов, наличие нелинейности и нестационарности позволяют говорить лишь о приближенном подобии. Это требует введения оценок степени приближения, вероятностных характеристик подобия биологических систем и оценок влияния второстепенных факторов.

Биологические системы и физиологические системы животных одного вида имеют одинаковые органы, выполняют одни и те же физиологические функции, и работа их основана на одних и тех же физических законах. При изменениях геометрических размеров биологической системы все физиологические показатели должны изменяться так, чтобы не нарушалась ее целостность. Поэтому правила этих изменений определяются условиями соответствующего вида подобия. Обобщение и перенесение экспериментальных данных, полученных для одного животного, на других, подобных ему, требуют установления общих закономерностей и функциональных взаимосвязей между физиологическими показателями сравниваемых животных. На основе анализа большого числа экспериментальных работ было показано, что основные физиологические показатели млекопитающих могут быть выражены как функции от определяющих геометрических размеров или веса тела животного. Все это позволяет говорить о существовании «биологического подобия» млекопитающих по их основным физиологическим показателям и о сохранении условий подобия в организме человека при перегрузках. В литературе приводятся данные относительно того, как, например, привлечение методов теории подобия позволило обосновать пересчет модели кислородного снабжения собаки в

аналогичную модель человека и промоделировать резкую разгерметизацию. При этом оказалось, что результаты моделирования отличаются лишь масштабом протекания времени и характерные времена у человека в 1,5 раза больше, чем у собак.

Основной задачей при моделировании психической деятельности является определение характера информационной системы, позволяющей делать достоверные выводы о «внутреннем» в сознании. Особое значение имеет представление мозга как кибернетической управляющей системы для построения алгоритмов работы мозга в эвристическом программировании и возможности построения нелинейной гносеологической модели мышления.

В связи с постановкой проблемы моделирования в биологии большое внимание уделяется также и обсуждению роли информационных процессов и теории информации при адекватном моделировании высшей нервной деятельности. Информация как функциональное свойство биологических систем — основа действия самоуправляющихся и управляющих систем. Возникающие при внешних и внутренних воздействиях нервные процессы и формируемые ими психические процессы являются по существу моделями информационных процессов. Поэтому задача нейрокибернетики — обобщение и описание этих моделей на основе теории информации и методов теории подобия.

При изучении принципов управления и самоорганизации в биологических системах возникает ряд проблем, связанных с изучением мозга животных и человека, проявляющихся во взаимодействии с внешней средой (анализ процессов распознавания образов, изучение и моделирование условно-рефлекторного поведения и принципов формирования адаптивного поведения вообще).

Современной медицине известны около 10^4 болезней, которые определяют 10^5 симптомов. Легко представить, насколько сложна задача врача, которому необходимо точно определить болезнь по оригиналу — состоянию больного организма. Моделируемый процесс может быть описан совокупностью признаков и последовательностью состояний организма, т. е. видом и течением болезни. Совокупность сведений, полученных из историй болезней, изображается в виде ориентированного связного графа, вершины которого соответствуют элементам информации, а дуги — связям между ними. Вопросы, возникающие у врача и обращаемые к модели, представляются «вектором вопроса». Ответы системы также можно представить в виде вектора. Компоненты «вектора вопроса» соответствуют исходным состояниям больного, наблюдавшимся у него или существенным для его жизнедеятельности; компоненты «вектора ответа» — состояниям, определяющим вид и течение болезни. Здесь закономерно возникает необходимость определения критерия правильности ответа.

§ 6.1. УСЛОВИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПОДОБИЯ МОДЕЛЕЙ

Моделирование — это процесс создания или отыскания в природе некоторого объекта, замещающего исследуемый объект. Этот промежуточный объект, или квазиобъект (модель), применяемый при исследованиях, может быть реальным (материальным) объектом той же или другой природы (физическая или аналоговая модель), что и изучаемый объект (оригинал). Он может быть только мысленным объектом, воспроизводящим объект исследования с помощью логических построений, математических выкладок (математическая модель). Промежуточный объект, замещающий объект, подлежащий исследованию (оригинал), может давать надежные сведения об изучаемом объекте, если он будет его моделью. Для этого прежде всего необходимо, чтобы он с определенной степенью достоверности был подобен модели в отношении всех интересующих исследователя процессов. Практическое применение методов теории подобия и моделирования требует оценки точности их и одновременно уточнения методов и приемов обработки* экспериментальных данных. Изучение любого физического явления связано с экспериментальными и аналитическими исследованиями, проводимыми совместно или поочередно и в з а и м н о д о п о л н я ю щ и м и д р у г д р у г а. На каждой стадии этих видов исследований возникает вопрос о достоверности и точности получаемых результатов. В зависимости от общих целей исследования и конкретных задач точность должна быть разной. Нельзя, например, одинаково подходить к оценке точности результатов экспериментальных исследований в реальной системе, результатов опытов на физической модели этой системы и результатов численного решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. В первом случае — это конкретное сложное явление, во втором — физическая модель, воспроизводящая определенные стороны явления, а в третьем — математическая модель, отражающая те общие физические законы, которым подчинено явление, и численная реализация этой модели.

* В предшествующих изданиях книги этот вопрос был освещен достаточно полно. В связи с появлением в последнее время многочисленной литературы (см. библиографию к гл. 6) в настоящем издании он не рассматривается.

Моделирование обычно эффективно при исследованиях сложных систем — особенно при определении свойств проектируемой системы, когда проведение эксперимента в натуральном масштабе обычно невозможно. Построение материальной системы в уменьшенном масштабе, подобной оригиналу и относительно недорогой, в которой явления, представляющие интерес, будут протекать подобно явлениям в системе-оригинале, и затем изучение их на полученной таким образом модели — задача метода моделирования. Этими простыми соображениями можно объяснить причины широкого применения моделирования как метода изучения сложных явлений во многих областях современной техники.

Моделирование, так же как и эксперимент в реальной системе, конечно, не исключает аналитическое исследование, а, наоборот, дает материал для более точного математического анализа, подобно тому, как анализ, в свою очередь, позволяет уточнить эксперимент. Сравнение же явлений в модели и оригинале с результатами соответствующего анализа позволяет уточнить условия моделирования, обеспечивая повышение точности воспроизведения явления не только в качественном, но и в количественном отношении.

Решать возникающие в сложных системах задачи аналитически часто затруднительно и даже невозможно из-за большого числа переменных и сложности (нелинейные характеристики, дискретность и т. д.) некоторых зависимостей. Иногда математической формулировки задачи вообще не существует, так как исследуемое явление настолько сложно, что для него пока нет достаточно полного описания отдельных процессов. Кроме того, аналитическое решение нуждается в проверке экспериментов в оригинале или модели. Последнее проще, дешевле, удобнее при исследованиях влияния вариаций различных параметров элементов системы, схемы их соединения и других факторов, определяющих характер процесса.

Таким образом, методика моделирования предусматривает, что прежде чем приступить к созданию какой-либо модели, необходимо найти критерии подобия для процессов, протекающих в оригинале, и выделить из их числа определяющие критерии. При этом, если с точки зрения математики безразлично, какой из $m - k$ критериев подобия, полученных на базе π -теоремы, считать определяющим, то, приступая к моделированию физических явлений и созданию моделей, необходимо выбрать определяющие критерии, учитывая возможности их практической реализации в модели. Естественно при этом, что критерии, содержащие искомые параметры процесса, являются следствием, а не предпосылкой наличия подобия и должны рассматриваться как функции определяющих критериев. *Определяющие критерии подобия должны быть составлены из заданных параметров элементов системы и независимых параметров процесса (например, времени).*

В методике моделирования критерии подобия служат, во-первых, для определения масштабов, связывающих параметры модели и оригинала; во-вторых, для выявления на основе анализа критерияльных соотношений наиболее характерных свойств моделируемого явления. Критерии могут быть найдены с помощью либо π -теоремы (тогда не требуется знать уравнения процесса, а лишь необходимо выявить все

участвующие параметры), либо метода интегральных аналогов. Во втором случае нужно знать уравнение процесса. Не является ли это парадоксальным? Можно ли уточнять уравнение, производя опыты на моделях, созданных на базе критериев, полученных из того же уравнения? Да, можно.

Опыты на модели, основанные на теории подобия, могут уточнять уравнения той системы, по элементам которой были найдены критерии подобия до этих опытов. Здесь природа явления, воспроизводимая на модели, снимает математическую абстракцию исходного уравнения и дает возможность исследователю проникнуть в суть процесса. Однако степени точности воспроизведения физических явлений на моделях могут быть различными. Они определяются прежде всего полнотой имеющихся знаний об оригинале и теми задачами, которые ставит перед собой исследователь. Кроме того, они определяются конкретными возможностями, отвечающими данному уровню развития науки и техники.

Абсолютно точная модель, так же как и абсолютное подобие, является математической абстракцией. Это значит, что *модель и отображаемый ею объект находятся в отношении сходства, а не тождества*. Это значит также, что модель в каком-то одном отношении подобна моделируемой системе, а в другом — о б я з а т е л ь н о о т л и ч н а от нее. Более того, существование каких-то определенных различий между моделью и оригиналом — неперемнное условие выполнения функций модели, облегчающей познание явления. Именно потому, что модель в какой-то степени отлична от оригинала, создается возможность отыскивать и выделять определенные, наиболее существенные связи и отношения, подсказывать определенные решения, легко и доступно видоизменять условия, т. е. действовать с моделью так, как нельзя или затруднительно действовать с оригиналом. Но чрезмерные различия между моделью и оригиналом также лишают модель ее познавательного значения. Иными словами, когда модель становится «слишком точной», она теряет смысл, перестает быть моделью; когда же она несовершенна — она источник ошибок. Как иногда образно говорят: «слишком близкая к оригиналу модель бесплодна, а слишком отдаленная — вводит в заблуждение». Таким образом, в соответствии с поставленной задачей из возможных методов полного, неполного или приближенного подобия и соответствующего ему полного, неполного и приближенного моделирования следует выбрать метод, наилучшим образом отвечающий и задачам исследования, и возможностям исследователя.

При получении на основе моделирования характеристик тех или иных явлений необходимо учитывать следующие факторы, обуславливающие расхождение результатов, получаемых в модели и оригинале:

- 1) погрешности определения отдельных параметров, входящих в критерии подобия;
- 2) неточности исходного математического описания явления;
- 3) погрешности в получении критериев подобия за счет заведомо упрощенного представления явления при его изучении;
- 4) случайные отклонения параметров оригинала и модели от принятых (расчетных);

5) погрешности проведения опытов, отклонения фактических параметров режима от расчетных и т. д.;

6) погрешности обработки результатов опытов.

Все эти факторы действуют не только в модели, но и в оригинале.

Возможность получения подобия согласно третьей теореме реализуется, когда *задание условий однозначности выделяет из бесконечного множества процессов, которым соответствует данное дифференциальное уравнение, те конкретные процессы, подобие которых необходимо обеспечить*. Это требование и содержится в третьей теореме подобия. Величины, характеризующие однозначность процесса, обязательно входят в уравнение, если оно полное. Если это учитывать, то при практическом использовании третьей теоремы можно не оговаривать специально требования закрепления условий однозначности, т. е. их пропорциональности. Тогда третью теорему можно упрощенно пояснить так: *подобие любых двух систем может быть создано при пропорциональности всех сходственных величин в этих системах и равенстве $(m - k - 1)$ критериев подобия, определенных согласно π -теореме из полного уравнения (или полной системы уравнений) процесса*.

При моделировании иногда бывает затруднительно применить π -теорему для установления числа критериев, обеспечивающих подобие. Но и в этих случаях необходимо стремиться к постановке задачи в духе третьей теоремы подобия, устанавливая условия однозначности и критерии подобия путем логического анализа и контрольных (поисковых) экспериментов. Таким должно быть применение теории подобия при биологическом моделировании, исследовании процессов в живых организмах, кибернетическом моделировании и т. д.

При изучении всех этих проблем методом моделирования не обязательно предъявлять к первоначальному математическому описанию (системе исходных уравнений) требования доказанности существования и единственности решения, как это делается в теории дифференциальных уравнений. Известно, что во многих случаях, когда условия существования и единственности математических решений не доказаны, физические решения существуют. Поэтому моделирование вполне удовлетворяется опытной проверкой.

Вопрос о математической корректности поставленной задачи в исследованиях, проводимых методом моделирования, может быть сведен только к установлению начальных и граничных условий с концентрацией внимания на опытной проверке*. В дальнейшем при обработке результатов исследований и создании или уточнении соответствующих аналитических методов исследователь, выступая в роли математика, может решать проблемы корректности, существования, единственности, переходя из области эксперимента в область теории.

* Авторы ряда работ допускают принципиальную ошибку, пытаются рассматривать моделирование и модели как некоторый математический инструмент. Пренебрегая физической стороной дела, они концентрируют внимание на математической строгости исходных положений, корректности, точности решений именно в математическом смысле, что по отношению к физическому и в определенной мере аналоговому моделированию ошибочно.

Практическая реализация моделей основывается на третьей теореме о подобии, которая может быть применена и при создании нелинейного подобия одного явления другому. При осуществлении подобия нелинейных явлений следует прежде всего попытаться представить их буквенно одними и теми же уравнениями, изменением масштабов выявить равенство критериев подобия и этим показать наличие скрытого подобия. Нелинейные параметры при этом должны быть представлены сначала как постоянные, а далее в форме относительных характеристик, которые в случае подобия должны быть тождественными. При отсутствии подобия необходимо изменять параметры, добываясь равенства критериев подобия и тождественности нелинейных характеристик. Для уравнений разных классов (разных буквенно) или уравнений, содержащих сложные зависимости (влияние нескольких параметров, нелинейности и т. д.), следует применять нелинейно подобные преобразования. Однако метод тождественности относительных характеристик нелинейных элементов и в этом случае действует в полной мере. Таким образом, *второе дополнительное положение — существенное дополнение и к третьей теореме подобия*: оно позволяет выявить подобие или установить необходимые и достаточные его условия для явлений, протекающих практически в любых нелинейных системах.

Оценка реальной точности* исследований, проводимых любыми методами моделирования (физического, математического — цифрового или аналогового), требует выявления степени соответствия (полноты и сложности) принятого общего (приближенного — словесного) или уточненного математического описания тем реально происходящим процессам, которые интересуют исследователя, проводящего моделирование. При этом следует учесть, что для установления подобия исследуемого явления должны быть выделены наиболее существенные для него процессы и их параметры. Необходимо также оценить реальную точность задания параметров системы — оригинала и модели, а также параметров их режимов.

Полнота общего или математического описания и точность задания параметров в конечном счете оказываются с в я з а н н ы м и в о п р о с а м и, имеющими практически некоторое п р о т и в о р е ч и е. В самом деле, инженеру, исследующему процессы в какой-либо системе, представляется разумным и даже необходимым стремиться к наивысшей адекватности математического описания, учету возможно большего числа деталей, неизбежно усложняющих исходные дифференциальные уравнения, у которых повышается порядок, увеличивается число членов и усложняются коэффициенты, в частности за счет учета нелинейности. Это приводит прежде всего к трудностям решения усложненного (полного) уравнения. Трудности эти, вообще говоря, преодолимые при физическом моделировании и тем более — математическом, применяющем современную мощную вычислительную технику, тем не менее часто приводят к п о н и ж е н и ю р е а л ь н о й т о ч н о с т и и п р а к т и ч е с к о й ц е н н о с т и р е з у л ь т а т а.

* Веников, Г. В. О реальной точности моделирования. — Известия высшей школы. Электромеханика, 1982, № 12, с. 1409—1413.

Обусловлено это тем, что усложнение математического описания, представляющееся «более точным», повышает его чувствительность к отклонениям параметров, обычно заданных и реализуемых в модели с практической точностью $\pm 10 \div 20\%$ и имеющих часто вероятностный характер. Таким образом, чувствительность такого уравнения оказывается значительно большей, чем чувствительность уравнения более грубого — упрощенного. Это положение, кажущееся парадоксальным, становится очевидным при рассмотрении простейшей задачи о малых колебаниях синхронного генератора. Упрощенное уравнение, составленное в предположении, что система не демпфирована, имеет вид

$$T_J d^2 \delta / dt^2 + c \delta = 0,$$

где T_J — постоянная инерции; c — коэффициент.

Его решение приводит к незатухающим гармоническим колебаниям, обычно в основном хорошо отражающим реальный характер происходящих процессов на первой их стадии. Имея в виду, что далее колебания будут затухать, инженер получает грубое, но достаточно правильное представление о характере движения и устойчивости системы. Ошибки в определении параметров не нарушают этих представлений в целом.

Если уточнить уравнение учетом демпфирования, то можно записать его как

$$T_J d^2 \delta / dt^2 + P_d d\delta / dt + c \delta = 0,$$

где $P_d = K_{D1} - K_{D2}$, причем K_{D1} характеризует успокоение качаний (влияние демпферных и эквивалентных им цепей), а K_{D2} — раскачивание (эффект активного сопротивления в цепи статора, неправильных настроек регулятора и т. д.).

В этом уточненном уравнении даже сравнительно небольшие отклонения и вероятностные разбросы при определении K_{D1} , K_{D2} могут привести к полному изменению характера движения (например, к неустойчивости вместо устойчивости в действительности) и, следовательно, дезориентировать исследователя, получившего из грубого уравнения приближенно правильную картину процесса.

Случай, когда при большей полноте математического описания исследуемого явления реальная точность результата падает и притом иногда довольно резко, создавая не только заметные количественные отклонения от действительных процессов, но даже меняя полностью качественную картину, могут быть и более сложные, чем описанный выше, и труднее распознаваемые. Так, известны случаи, когда на практике фактически устойчивая система оценивалась как неустойчивая, и наоборот; это если не приводило к тяжелым последствиям, то вызывало необходимость дополнительных исследований. Указанное положение могло бы быть проиллюстрировано большим числом сложных и практически важных примеров, в которых результаты не столь очевидны.

Рассмотрим один из них. Пусть методом математического моделирования исследуется поведение синхронного генератора в условиях резкого изменения режима (внезапное короткое замыкание в сети или подключение дополнительной нагрузки). Результаты экспериментального и аналитического исследований при разных допущениях представлены на рис. 6.1: процесс устойчивого перехода генератора от од-

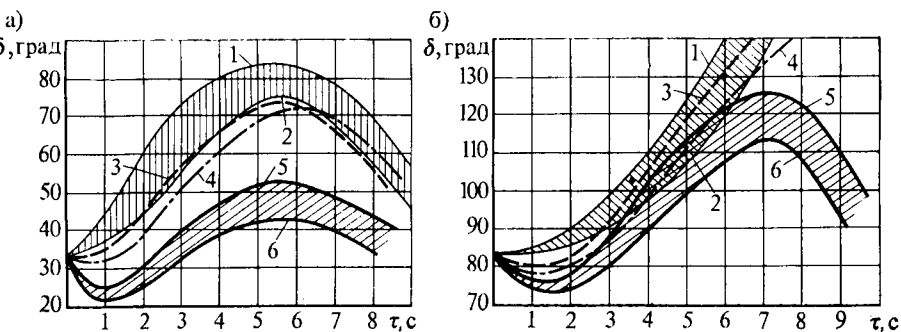


Рис. 6.1

ного режима к другому (рис. 6.1, а) и процесс, реально неустойчивый (рис. 6.1, б). При этом зависимости 1 и 2 показывают результаты расчета по приближенным* (или упрощенным) уравнениям Парка—Горева; кривые 3— экспериментально полученные результаты; соотношения 4 — протекание процесса, рассчитанного по полным уравнениям Парка—Горева, но при условии, что рядом специально поставленных экспериментов с максимально возможной точностью были определены параметры исследуемой системы и в них в достаточной степени отражены такие факторы, как влияние насыщения и дополнительных потерь. Такой в известном смысле уникальный расчет дает, как видно, хорошее совпадение с данными эксперимента. Однако проведение довольно сложных исследований затруднительно, а практически часто и невозможно. Если же улучшать математическое описание, не уточняя одновременно исходных данных, то можно сделать вывод о меньшей реальной точности, получаемой при более полном математическом описании.

В самом деле, расчет по приближенным упрощенным уравнениям при вариации исходных параметров (см. кривые 1 и 2 на рис. 6.1) дает результат, в среднем довольно близко приближающийся к реальному экспериментальному. Разумеется, что при этом не учитываются такие параметры, принимаемые во внимание в уравнении Парка—Горева, как, например, активное сопротивление цепи статора, которое в практических условиях может быть определено только очень грубо и с большим разбросом. Если проводить расчет по уравнениям Парка—

* Приближенные— не учитывающие влияния трансформаторных эдс ($p\psi_d$, $p\psi_q$) и дополнительной угловой скорости ротора ($p\delta$) на переходный процесс в синхронной машине.

Горева, подставляя в них неточно определенные параметры (кривые 5 и 6 на рис. 6.1, б), то область расчетных кривых, построенная по точным уравнениям, резко уходит из области значений, построенных по упрощенным уравнениям, и от реальной экспериментальной кривой 3. Таким образом, и данный пример показывает, что в условиях практики, когда параметры заданы не точно или не полно, использование упрощенных уравнений для инженера предпочтительнее, так как приводит к оценкам, более близким к реальным.

Следовательно, *нет смысла усложнять математическое описание, равно как и уменьшать систематические погрешности моделирования до уровня, намного меньшего неопределенности, связанной с неточностью исходных данных*. Вывод этот не является частным, а следует из методов теории чувствительности, устанавливающей связь между изменением параметров дифференциального уравнения (включая и изменение его порядка) и качественными и количественными характеристиками протекания исследуемого процесса. При этом предполагается, что отклонения параметров (погрешности вариации) от некоторых исходных значений вызывают дополнительное движение, которое определяется как разность движений в системе при наличии и отсутствии вариаций.

Покажем это, не претендуя на полноту и строгость доказательства. Так, если исходная динамическая система описывается дифференциальным уравнением («точным») вида

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0) = 0,$$

то при вариациях q_0 на величину Δq уравнение (приближенное) примет вид

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0 + \Delta q) = 0.$$

Разность решений этих уравнений $x(t, q_0 + \Delta q) - x(t, q)$ представляет собой дополнительное движение Δx , вызванное вариациями (отклонениями, погрешностями) параметров. Величина

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} (\Delta x / \Delta q) = U$$

называется *функцией чувствительности*, показывающей, как данное уравнение изменяется при вариациях параметров.

Из теории чувствительности известно, что

$$U = -(\partial F / \partial q_0 + \partial F / \partial \ddot{x} + \partial F / \partial \dot{x}) / (\partial F / \partial x).$$

Следовательно, чем «полнее» дифференциальные уравнения, т. е. чем больше переменных содержит функция F и чем она сложнее (больше высокие производные x), то тем с большим основанием следует ожидать большого значения функции чувствительности U и соответственно более заметного дополнительного движения Δx , обусловленного вариациями (погрешностями) параметров*. Таким образом, можно утверждать, что *влияние усложнений дифференциальных уравнений, выявленное в двух рассмотренных случаях, вполне закономерно и выбор*

* Подробнее см.: 1) Розенвасер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. Энергия, 1969, с. 268. 2) Энциклопедия кибернетики. Статья: Динамических систем теория чувствительности. Том I, 1975, с. 264—266.

сложности (полноты, точности) дифференциального уравнения, принимаемого в качестве базы моделирования, должен всегда производиться с учетом точности исходных данных.

Следовательно, выбор описания явления, подлежащего изучению, должен быть согласован с точностью задания параметров модели и оригинала; условия подобия должны устанавливаться в соответствии с третьей теоремой о подобии или, если нет достаточных для математической формулировки исходных данных, хотя бы в духе этой теоремы. При оценке достоверности полученной модели необходимо оценить погрешности отдельных параметров системы, входящих в критерии подобия, и критериев в целом.

§ 6.2. ТОЧНОСТЬ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Погрешности воспроизведения критериев подобия при полном моделировании. Требования, предъявляемые к точности результатов исследований, проводимых с помощью моделей, различны в зависимости от поставленных задач и характера исследований. Проектные разработки, а также оценки сопоставляемых вариантов не требуют высокой точности результатов. Однако точность результатов имеет большое значение, если исследования проводятся применительно к конкретной схеме, а полученные результаты необходимо распространить на оригинал.

Параметры, входящие в тот или иной критерий подобия, оказывают различное влияние на результат исследования в зависимости от характера изучаемого явления. В одном случае точность воспроизведения критерия оказывает решающее влияние на характер изучаемого процесса; в другом случае упомянутый критерий может воспроизводиться приближенно без ущерба для точности получаемого результата; в третьем случае параметры, входящие в критерий, могут не моделироваться, так как данный критерий не будет оказывать никакого влияния на протекание изучаемого процесса. Поэтому для установления условий подобия и осуществления моделирования при решении инженерных задач существенной оказывается не вся совокупность процессов, связанных с данным явлением, а только основные процессы аппарата, машины и т. д. Всякое подобие сложного комплексного явления, существенное в технических задачах, всегда в какой-то степени приближенно. Случаи, когда при установлении подобия основных процессов комплексного явления принимаются какие-либо допущения, заведомо приводящие к некоторым неточностям в воспроизведении именно этих основных процессов, должны рассматриваться как случаи приближенного подобия.

Первоначально на основе статистического анализа критериальных соотношений получаем критериальное уравнение регрессии и с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии этого уравнения устанавливаем степень влияния отклонения значения каждого критерия подобия на исследуемый процесс. Полученная информация позволяет объективно решить вопрос о необходимой точности воспроизведения критериев подобия, соответствующей их степени влияния на исследуемый процесс.

Например, для зависимости $\delta_{\max} = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ критериальное уравнение регрессии (см. пример 3.9) имеет вид

$$\delta_{\max} = 76,09 + 1,316\pi_1 - 0,683\pi_2 + 0,02\pi_3.$$

В данном случае наибольшее влияние на $\delta_{\max}$ оказывает критерий π_1 , несколько меньшее — π_2 и очень слабое — π_3 , который при наличии коэффициента 0,02 можно считать статистически не значимым. Знаки коэффициентов критериального уравнения регрессии показывают, в каком направлении критерии подобия влияют на $\delta_{\max}$. Таким образом, анализируя стандартизированные коэффициенты критериального уравнения регрессии, можно определить, какие из критериев подобия следует воспроизводить с высокой степенью точности при изучении того или иного процесса.

Подобие и моделирование всегда осуществляется с той или иной степенью точности. Пусть в оригинале и модели зависимости какой-либо переменной величины x от переменной t изображаются в виде

$$x_0 = f_0(t_0); \quad x_M \pm \Delta x = f_M(t_M),$$

где Δx — погрешность моделирования, зависящая от факторов, обуславливающих ту или иную погрешность.

К этим факторам относятся главным образом:

1) погрешности определения или задания параметров оригинала, входящих в критерии подобия, и воспроизведения этих параметров на модели, которые можно свести к некоторым суммарным погрешностям воспроизведения критериев подобия;

2) погрешности измерений при проведении опытов, которые могут быть уменьшены многократным повторением измерений, выбором приборов надлежащей точности и т. п.;

3) факторы, по-разному проявляющиеся в опытах на модели и в оригинале и изменяющие параметры исследуемых процессов (например, характеристика намагничивания модели может быть иной, чем в оригинале, зависимости потерь от частоты могут быть искажены), влияние которых может привести к тому, что результирующие зависимости, полученные в модели, будут отличаться от аналогичных зависимостей, полученных в оригинале;

4) неполный учет в модели факторов, заведомо влияющих на главные процессы, т. е. осуществление приближенного моделирования вместо точного на основе критериев подобия, найденных по упрощенным уравнениям (например, при исследовании переходного процесса электрических систем по уравнениям с отброшенными членами $p\psi$, $p\delta$, т. е. при некотором искажении апериодической составляющей тока статора и периодической составляющей тока ротора).

Обозначим через A, B, C, D некоторые физические параметры, определяющие величины критериев. Пусть идеальные значения этих величин, например значения, отвечающие некоторым расчетным, в оригинале будут $A_0, B_0, C_0, D_0, \dots, F_0$.

Соответствующие им величины в модели запишутся как

$$A_M = A_0/m_A; \quad B_M = B_0/m_B; \quad C_M = C_0/m_C; \quad D_M = D_0/m_D; \quad \dots, \quad (6.1)$$

где m_A, m_B и т. д. — масштабные коэффициенты.

Фактические величины (обозначим их индексом «ф») в модели и оригинале отличаются от величин, определенных соотношениями (6.1):

$$A_o. \phi = A_o (1 \pm \delta_{oA}); B_o. \phi = B_o (1 \pm \delta_{oB}); \dots;$$

$$A_m. \phi = A_m (1 \pm \delta_{mA}); B_m. \phi = B_m (1 \pm \delta_{mB}); \dots$$

Здесь $\delta_{mA} = \Delta A/A_m$, $\delta_{mB} = \Delta B/B_m$, δ_{oA} , δ_{oB} — относительные погрешности, причем ΔA , ΔB и т. д. — абсолютные погрешности.

Выражение для критерия подобия, как известно, имеет вид степенного комплекса участвующих в процессе физических параметров, т. е. может быть представлено как произведение этих параметров, возведенных в соответствующие степени:

$$\pi = A^\alpha B^\beta \dots F^\gamma,$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ — показатели степени (положительные и отрицательные).

Критерии подобия, составленные из идеальных (не имеющих погрешностей) величин, называются *идеальными критериями*. Идеальные критерии будут одинаковыми как для модели, так и для оригинала. Фактические критерии (π_o , π_m), определенные с учетом погрешностей модели и оригинала, различны и отличаются от идеальных критериев π :

$$\pi_o. \phi = \xi_o \pi; \pi_m. \phi = \xi_m \pi; \pi_m. \phi = \xi_\pi \pi_o. \phi.$$

Здесь ξ_π — погрешность в определении критериев подобия.

Выясним зависимость погрешности ξ_π от погрешности в определении параметров модели и оригинала. Для этого запишем критерий подобия, выразив его один раз через фактические (с учетом погрешностей) параметры модели, а в другой раз — через фактические параметры оригинала соответственно:

$$\pi_o. \phi = [A_o (1 \pm \delta_{oA})]^{\alpha'} [B_o (1 \pm \delta_{oB})]^{\beta'} \dots [F (1 \pm \delta_{oF})]^{\eta'} =$$

$$= \pi (1 \pm \delta_{oA})^{\alpha'} (1 \pm \delta_{oB})^{\beta'} \dots (1 \pm \delta_{oF})^{\eta'};$$

$$\pi_m. \phi = \pi (1 \pm \delta_{mA})^{\alpha'} (1 \pm \delta_{mB})^{\beta'} \dots (1 \pm \delta_{mF})^{\eta'}.$$

Разделив эти выражения и преобразовав их согласно известным приемам операций с малыми величинами, получим число ξ_π , показывающее, во сколько раз критерий, определенный по фактическим параметрам модели, больше критерия, определенного по фактическим параметрам оригинала:

$$\xi_\pi = 1 \pm (\delta_{mA} \pm \delta_{oA}) \alpha' \pm (\delta_{mB} \pm \delta_{oB}) \beta' \pm \dots \pm (\delta_{mF} \pm \delta_{oF}) \eta' =$$

$$= 1 \pm \alpha' \sum_A \delta \pm \beta' \sum_B \delta \pm \dots \pm \eta' \sum_F \delta,$$

где Σ — сумма погрешностей оригинала и модели.

Если бы были известны относительные погрешности модели и оригинала и их знак, то величины $\Sigma \delta$ должны были бы определяться как алгебраические с учетом знаков погрешностей. Наихудший случай — наименьшая точность в воспроизведении критерия и наибольшая погрешность моделирования — будет, очевидно, получаться, если принять, что все погрешности имеют одинаковый знак. Анализ выражения для определения ξ_π показывает, что надо как можно больше умень-

шить погрешности в модели у тех величин, которые входят в критерий подобия с наивысшим показателем степени. Так, например, погрешность в приближенном критерии электромеханического подобия $\pi = T_J/T_d$ имеет значение

$$\xi = 1 + \sum_{T_J} \delta + 2 \sum_{T_d} \delta,$$

откуда очевидно, что точность определения значения T_{0d0} в оригинале и точность установки значения T_{md0} в модели должны быть выше, чем точность определения и установки постоянной инерции T_J .

Идеальным моделированием было бы моделирование, при котором погрешность δ как в модели, так и в оригинале отсутствовала. Наличие погрешностей приводит к тому, что при $\pi = \text{idem}$, т. е. при инвариантности идеального критерия подобия, результаты фактически произведенных в модели опытов получаются неоднозначными. Эта неоднозначность, или «разброс» в результатах опытов, связана не только с моделированием. Опыты на ряде установок в оригинале или на одной установке, но в различных условиях, дают неоднозначные зависимости.

Рассмотрим, например, зависимость времени t_1 , отвечающего наибольшему значению угла вылета синхронной машины при качаниях, от критерия приближенного электромеханического подобия:

$$t_{*1} = f(T_J/T_{d0}^2) = f(\pi_1).$$

Предположим, что опыт проделан с разными машинами и на каждой машине повторен несколько раз. Для идеальных машин (с идеальными параметрами) расхождение в результатах различных опытов появлялось бы только за счет приближенности указанного критерия. Практически при достаточно больших T_J и малых R/X этот разброс не был бы замечен и зависимость $t_{*1} = f(T_J/T_{d0}^2)$ графически выражалась бы только одной характеристикой. В действительности же указанная зависимость выражается некоторой зоной характеристик и, проводя тот или иной опыт, можно определить разброс в характеристиках, полученных в оригинале:

$$\xi_0 = (1 \pm \delta_{0TJ}) / (1 \pm \delta_{0Td0})^2 = 1 \pm \delta_{0TJ} \pm 2\delta_{0Td0}.$$

Аналогичное расхождение критериев подобия приводило бы к тому, что характеристики $t_* = f(T_J/T_{d0}^2)$ также имели бы разброс

$$\xi_m = (1 \pm \delta_{mTJ}) / (1 \pm \delta_{mTd0})^2.$$

Для получения подобия в характере разбросов необходимо потребовать, чтобы $\xi_0 \equiv \xi_m$; для уничтожения разброса необходимо, чтобы $\xi_0 = \xi_m$. Практически такое требование почти никогда не соблюдается, и это приводит к тому, что, как бы *тщательно ни была выполнена модель, расхождение между получаемыми на ней результатами и результатами, получаемыми в оригинале, неизбежны*. Необходимо стремиться не к тому, чтобы получить полное — «идеальное» — совпадение этих результатов, а к тому, чтобы правильно оценить их разброс. Заметим, что разброс неизбежно должен быть и при повторении опытов в оригинале, особенно если учесть непостоянство исходных пара-

метров, имеющих случайный характер. По вероятным погрешностям в параметрах оригинала и модели должна оцениваться точность моделирования.

Погрешности воспроизведения критериев подобия при приближенном моделировании. Неточности, вносимые в критерии подобия при расчете, конструировании и изготовлении модельного оборудования, — причина появления одной группы погрешностей. Другую группу погрешностей составляют неточности методики постановки модельного эксперимента на действующей модели. К этой группе относятся по-

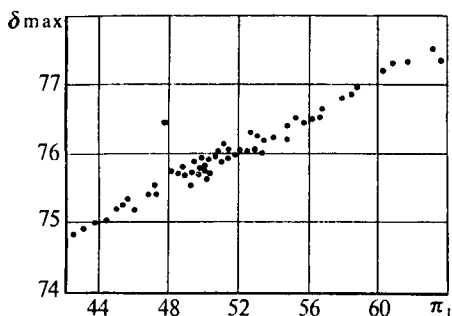


Рис. 6.2

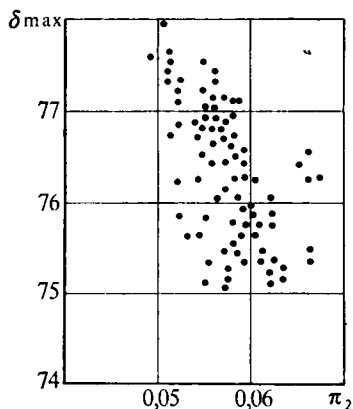


Рис. 6.3

грешности, связанные с упрощением (объединением, эквивалентированием) частей энергосистемы, с невозможностью плавного изменения параметров модельных элементов, с нарушением критериев подобия и т. д.

Для оценки погрешностей моделирования, связанных с неточностью воспроизведения критериев подобия (по каким-либо из перечисленных причин), целесообразно изучить характер связи между исследуемым процессом и отклонениями критериев подобия и определить количественные соотношения между ними. Например, исследуем влияние изменения критериев подобия на вылет угла синхронного генератора при коротком замыкании в начале линии (система «станция—шины»):

$$\pi_1 = X_r/R_r; \pi_2 = R_d/X_d; \pi_3 = T_f/T_{d0}^2.$$

При этом определим зависимости $\delta_{\max} = f(\pi_1)$; $\delta_{\max} = f(\pi_2)$; $\delta_{\max} = f(\pi_3)$. Вариация критериев подобия производилась изменением значений параметров, входящих в критерий подобия, методом статистических испытаний.

На основе проведенных исследований рассматриваемые зависимости представлены в виде полей корреляции, показанных на рис. 6.2, 6.3, 6.4. С помощью корреляционного анализа получены количественные соотношения в виде уравнений регрессии:

$$\delta_{\max} = 69,93 + 0,117\pi_1; \delta_{\max} = 81,41 - 85,6\pi_2; \delta_{\max} = 77,12 - 2,2\pi_3.$$

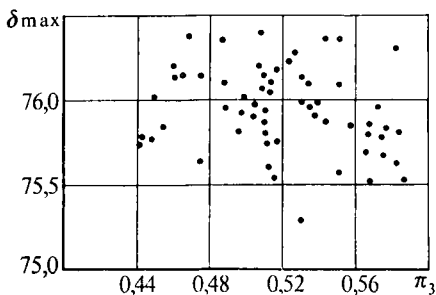


Рис. 6.4

По условиям выполнения подобия процесса необходимо в модели получить следующие значения критериев подобия: $\pi_1 = 51,77$; $\pi_2 = 0,059$; $\pi_3 = 0,512$. При отличии значений этих критериев от заданных по приведенным уравнениям регрессии можно оценить получаемую в модели погрешность.

Для одновременной оценки неточности всех критериев подобия можно получить уравнение регрессии для зависимости $\delta_{\max} = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

Особенно существенны погрешности, вызванные применением приближенного моделирования, осуществление которого невозможно без проверки. Погрешности приближенного моделирования выявляются двумя взаимно корректирующими путями: проверкой опытом на основе последовательного моделирования; аналитическим исследованием влияния не учитываемых факторов. Прежде чем окончательно воспроизводить какой-либо процесс оригинала, в модели следует провести серию опытов с разным сочетанием величин, входящих в приближенные критерии подобия. Например, опыты по определению изменения угла δ (вызванного коротким замыканием синхронного генератора), проводимые на основе приближенного критерия $\pi_1 = T_J / T_{d0}^2 = \text{idem}$, повторяются при разных значениях T_J и T_{d0} , сочетаемых так, что критерий π_1 удовлетворяется.

Одновременно в определенной последовательности, установленной так, чтобы как можно шире охватить зону вероятных влияний, меняют другие критерии подобия. В данном случае можно изменять

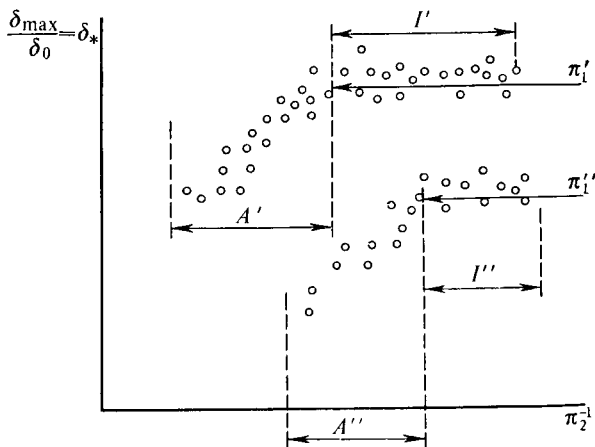


Рис. 6.5

критерий $\pi_2 = R/X = \text{idem}$. Построив функциональную зависимость одного критерия от другого или зависимость, связывающую наиболее существенные переменные величины и критерии, найдем максимальное значение угла в зависимости от величин критериев подобия. Затем можно установить зоны заметной погрешности. Эти зоны необходимо исключить (считать «запретными») при моделировании. На рис. 6.5 показаны такие зоны в виде зависимостей некоторого характерного параметра $\delta_{\max}/\delta_0 = \delta_*$ от критерия π_2^{-1} при различных постоянных значениях критерия π_1 . В области I' (при постоянном значении π_1') и в области I'' (при постоянном значении π_1'') среднее значение $\delta_{\max}/\delta_0$ остается постоянным.

Необходимость экстраполяции обычно обуславливается невозможностью воспроизведения на модели любых значений величин, входящих в критерии. При этом опыты на модели не могут считаться достоверными, подтверждающими точность и возможное приближенное моделирование, пока не будут проведены исследования уравнений, положенных в основу приближенных критериев подобия, или пока не будет проведено исследование на максимум правдоподобия полученных результатов. Двойная проверка последовательным моделированием и анализом уравнений моделируемой системы позволяет уверенно выявить возможности приближенного моделирования.

§ 6.3. ПОГРЕШНОСТИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ, ВХОДЯЩИХ В КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Случайные погрешности. В критерии подобия входят параметры системы и именно неточности в измерении этих параметров или их изменений в процессе опытов вызывают изменения критериев подобия (см. § 6.2). При проведении любых экспериментов как в оригинале, так и в модели экспериментатор должен считаться с тем обстоятельством, что все параметры исходной системы-оригинала, равно как и параметры его модели, могут быть установлены только с какой-то (в большинстве случаев не очень высокой) степенью точности.

Экспериментатору обычно приходится оперировать с исходными данными двух видов: параметрами системы-оригинала и ее элементов, которые должны быть в соответствующем масштабе воспроизведены на модели; параметрами режима, которые входят в начальные условия и тем самым определяют протекание процесса. Исходные параметры системы-оригинала и ее режима могут быть получены на основании расчета или опыта. Как в том, так и в другом случае имеются расхождения с действительными данными. При этом, как правило, экспериментальные данные, полученные в оригинале, при достаточно тщательной постановке эксперимента оказываются более достоверными, чем расчетные. Вывести какие-либо общие закономерности, касающиеся оценки фактической точности расчетов, не всегда возможно и такую оценку обычно приходится делать для конкретных условий.

При сопоставлении расчетных и экспериментальных значений параметров турбогенераторов (экспериментальные значения рассматрива-

лись как более достоверные) погрешности достигали больших значений. Неточности в определении параметров обусловлены следующим:

а) значения параметров для различных машин одного и того же типа могут отличаться из-за влияния ряда технологических факторов на 10% и более;

б) при опытным определении одного и того же параметра синхронного генератора различными методами отличие значений параметров составляет примерно $\pm 20\%$;

в) случайные ошибки эксперимента при многократном его повторении для определения одного и того же параметра одним и тем же методом могут составлять около 10—20%.

Моделирование энергетической системы, осуществляемое на основании задаваемых расчетных значений параметров и характеристик ее элементов, будет, очевидно, также иметь достаточно большие погрешности.

В процессе измерений физических величин (в модели и оригинале) могут иметь место четыре вида погрешностей:

1) ошибки чувствительных элементов измерительных устройств;

2) неточности отражения реакции чувствительного элемента в индикаторе;

3) неправильная фиксация показаний прибора наблюдателем — человеком или автоматическим регистрирующим устройством.

Эти три вида погрешностей приводят к ошибкам, имеющим две составляющие: случайную и систематическую. Относительный вес каждой из этих составляющих зависит от применяемых приборов и условий эксперимента;

4) искажения информации в используемых каналах связи.

Случайная ошибка выявляется при последовательных измерениях одной и той же постоянной величины, когда получаются различные значения. Определяется она в результате ряда измерений и специальной их обработки методами теории вероятностей и математической статистики.

Систематическая ошибка проявляется в виде отклонения среднего значения любого числа последовательных отсчетов от известного точного значения. Обнаруживается она при проверках прибора и устраняется путем калибровки или ремонта входящих в измерительную систему устройств.

Для уменьшения неточностей экспериментов необходимо повышение тщательности измерений в опытах на модели, многократное повторение опытов и надлежащая обработка их результатов. Однако при измерениях необходимо знать желательную точность определения измеряемой величины, так как стремление к чрезмерно повышенной точности измерений и увеличению числа повторных измерений может быть излишним.

Предположим, что выбранная аппаратура обеспечивает желательную точность измеряемой величины, но при измерениях возникает ряд явлений, вызывающих отклонения получаемых значений от истинного. Можно предположить, что получаемые ошибки имеют случайный характер. Изменения случайных погрешностей измерений в боль-

шинстве случаев подчиняются закону нормального распределения и не могут быть исключены опытом. Теория измерений указывает число измерений, которое обеспечивает желательную точность. Напомним, что различают следующие виды погрешностей.

Полная погрешность Δ_{Σ} , получающаяся при моделировании, часто определяется суммой погрешностей измерений ($\Delta_{\text{изм}}$), погрешностей, обусловленных неточностями примененных критериев подобия и воспроизведения их на модели ($\Delta_{\text{воспр}}$), и теоретическими погрешностями, связанными с принципиальными упрощениями и неточностями математического описания ($\Delta_{\text{теор}}$).

Максимальное значение модуля полной погрешности представляет собой сумму модулей максимальных значений погрешностей:

$$|\Delta_{\Sigma}|_{\max} = |\Delta_{\text{изм}}|_{\max} + |\Delta_{\text{воспр}}|_{\max} + |\Delta_{\text{теор}}|_{\max}. \quad (6.2)$$

Однако практически вычислять максимальную погрешность так нельзя, поскольку маловероятно, чтобы все ее составляющие одновременно получили максимальные значения одного знака. При определении этой погрешности в предположении, что ее составляющие распределяются по нормальному закону, следует применить известную из теории вероятностей теорему Ляпунова, которая утверждает, что при достаточно широких предположениях относительно законов распределения случайных величин с увеличением числа этих величин закон распределения их суммы всегда будет стремиться к нормальному. Поэтому можно утверждать, что полная погрешность Δ_{Σ} должна рассматриваться как величина случайная, подчиняющаяся нормальному закону распределения. Средняя квадратическая суммарная ошибка

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{изм}}^2 + \sigma_{\text{воспр}}^2 + \sigma_{\text{теор}}^2}. \quad (6.3)$$

При расчетах погрешностей моделей можно округлить результаты по так называемому критерию ничтожности. Согласно этому критерию при определении σ_{Σ} по (6.3) можно пренебречь теми слагаемыми, сумма квадратов которых не превышает 1/9 квадрата слагаемого. Например, пусть $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$. Если $\sigma_2^2 + \sigma_3^2 \leq \leq \sigma_1^2/9$, то $\sigma_{\Sigma} \leq \sigma_1 \sqrt{10/3} = 1,0546$. Нетрудно заметить, что пренебрежение величиной $\sigma_2^2 + \sigma_3^2$ в данном случае приведет к появлению относительной погрешности в определении σ_{Σ} , не превышающей 5,5%. При вероятностных расчетах такая величина вполне допустима. Следовательно, при наличии под корнем двух слагаемых, не превышающих 1/9 другого, можно пренебречь.

Используя правило «трех сигма», уравнение (6.3), можно представить в виде

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{|\Delta_{\text{изм}}|_{\max}^2 + |\Delta_{\text{воспр}}|_{\max}^2 + |\Delta_{\text{теор}}|_{\max}^2} / 3. \quad (6.4)$$

В инженерной практике для характеристики точности работы аналоговых вычислительных блоков чаще всего используется среднеквадратическая погрешность.

Существуют способы расчета среднеквадратических инструментальных погрешностей вычислительных блоков на стадии их проектирования. Полученные в результате экспериментов величины следует оценивать путем сравнения их с такими же расчетными данными с помощью принятых в теории вероятностей доверительных интервалов. Экспериментальные величины будут тем ближе к расчетным, чем строже поставлен эксперимент, т. е. чем точнее соблюдены при постановке опыта условия, положенные в основу приведенных выше формул.

Систематические погрешности измерений особенно заметно проявляются при неблагоприятных условиях. К этим условиям относятся влияние внешней среды на показания прибора (влияние температуры окружающего воздуха, магнитных полей и т. д.), непостоянство условий наблюдений при опытах и т. п. Принципиально систематические погрешности могут быть учтены и исключены из условий наблюдения в каждом отдельном случае измерений. Практически полное исключение систематических ошибок требует неоправданно высоких затрат времени для выяснения причин и внесения поправок в измерения. При проведении опыта поэтому стремятся избежать наиболее сильных влияний, допуская существование ряда дополнительных погрешностей, которые трудно учесть и исключить при постановке опыта.

Как было показано выше, при воспроизведении в модели какого-либо оригинала необходимо учитывать, что не все параметры его достаточно точно известны, что они не постоянны и изменяются во времени и что при протекании моделируемого процесса может действовать ряд дополнительных факторов. Так, например, изображая на модели электрической системы короткое замыкание, приходится считаться с тем, что сопротивление дуги в месте короткого замыкания, являясь случайной величиной, может отличаться от расчетного значения; аналогично этому, режим работы нагрузки в момент аварии может отличаться от режима, принятого при моделировании за исходный; отличаться от расчетных могут и токи возбуждения. На аварию, воспроизводимую в модели, в действительной системе может влиять также и характер погоды (дуга, коронирование проводов). Поэтому, точно воспроизводя в модели все расчетные параметры оригинала, нельзя ожидать обязательного совпадения результатов, полученных в модели и оригинале.

В любой сложной системе большинство параметров, имеющих тенденцию к вероятностному изменению, будут изменяться в зависимости от времени и, возможно, еще от каких-либо иных факторов будут изменяться и критерии подобия (π), в которые войдут эти изменяющиеся параметры. Зависимость $\pi = \varphi(x)$ может быть резко выраженной или настолько слабой, что данный параметр для большинства исследований можно будет принять не зависящим от x . Непостоянство случайно изменяющихся параметров, входящих в критерии подобия, приводит к тому, что критерии подобия также оказываются подверженными случайным вариациям. При этом представляются интересными закономерности в распределении вероятностей появления тех или иных значений критериев подобия при различных распределениях формирующих их параметров.

В математическом плане постановка сводится к следующему:

а) параметры, входящие в критерий подобия, являются случайными величинами, подчиненными определенным законам распределения и представляющими систему случайных величин;

б) критерии подобия являются функциями этих случайных величин*:

$$\pi_k = \prod_{\gamma=1}^n A_{\gamma}^{d_{\gamma}} \left/ \prod_{j=1}^t C_j^{\beta_j} \right. . \quad (6.5)$$

Выражение (6.5) можно представить как

$$\pi_k = \prod_{i=1}^m P_i^{x_i} .$$

Таким образом, следует проанализировать зависимость вида

$$\pi_k = f(P_1, \dots, P_m) .$$

Функция распределения системы случайных величин представляет собой многомерную область:

$$F(P_1, \dots, P_m) = \int_{-\infty}^{P_1} \dots \int_{-\infty}^{P_m} f(P_1, \dots, P_m) dP_m dP_{m-1} \dots dP_1 . \quad (6.6)$$

Плотность вероятности распределения системы случайных величин может быть получена из выражения (6.6):

$$f(P_1, \dots, P_m) = \partial^m F(P_1, \dots, P_m) / (\partial P_1 \dots \partial P_m) .$$

В общем виде функция распределения критерия подобия в этой постановке выражается зависимостью

$$\Phi(\pi_k) = \int \int \dots \int f(P_1, \dots, P_m) dP_1 \dots dP_m . \quad (6.7)$$

$$\prod_{i=1}^m P_i^{x_i} \leq \pi_k$$

Определение закона распределения критериев подобия в аналитическом плане — довольно сложная задача. Однако количественные результаты для конкретных случаев относительно легко получить, проведя расчетные экспериментальные исследования на ЦВМ. Каждый случайный параметр $P_1, \dots, P_m$, входящий в критерий подобия, при этом предполагается изменяющимся по некоторому закону распределения вероятностей. Далее случайные значения этих параметров подставляются в выражение для критерия подобия и определяется его случайная реализация. В результате многократных вычислений формируется массив случайных значений π_k и на основе его определяется эмпирическая плотность распределения функции критерия подобия.

Влияние точности определения критериев подобия на достоверность результатов моделирования. Пятое дополнительное положение о подобии, касающееся стохастически определенных систем**, позво-

* В более общем случае, который здесь не рассматривается, критерии подобия являются функцией случайных процессов.

** Веников Г. В. Оценка достоверности результатов моделирования с учетом стохастических факторов. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 5, с. 126—134.

ляет распространять методы моделирования на случаи вариации параметров системы относительно их «идеальных» значений, полученных при детерминированном задании исходных данных. При всех видах моделирования (физическом, аналоговом и математическом) системам, имеющих такие параметры, возникает вопрос о достоверности получаемых результатов. При этом неизбежно приходится рассматривать и эффективность результатов, получаемых при том или ином виде моделирования, т. е., по сути дела, определять «надежность» и «устойчивость» оценок с учетом особенностей данного вида моделирования.

Для современных расчетных и экспериментальных методов исследования характерен переход от детерминированного изолированного анализа отдельных составляющих результирующей погрешности к совокупному статистическому учету накопленных ошибок. Если в случае детерминированного подхода ошибка рассматривается как катастрофическое отклонение от принятого представления об идеальном, то вероятностно-статистический подход предполагает интерпретацию погрешностей как некоторых реакций моделирующей структуры, вообще говоря, свойственных ее реальному поведению и являющихся не столько отклонением от нормы, сколько шагом статистического приближения к норме. Однако характер этого приближения тесно связан со спецификой материальной реализации модели.

Поэтому к оценке точности результатов экспериментальных исследований реальной системы, опытов на физической модели, процедуры моделирования на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) и численного решения системы уравнений, описывающих исследуемый процесс, необходим различный подход. В первом случае (оригинал) — это конкретное сложное явление, во втором (модель) — физическое воспроизведение определенных сторон явления на основе теории подобия стохастически определенных систем (моделируемых в соответствии с пятым дополнительным положением), в третьем (АВМ) — воспроизведение математических закономерностей, отраженных в уравнениях описываемого процесса, в четвертом (ЦВМ) — численная интерпретация этих закономерностей.

Эксперименты, проводимые в любых подобных системах (оригинал, АВМ, ЦВМ, физические модели), принципиально не обеспечивают строгой однозначности результатов даже при реализации полного подобия. Это обусловливается тем, что абсолютное тождество конкретных явлений, представленных в различных пространственно-временных областях, являясь математической абстракцией, отсутствует в реальных задачах. Дифференциальное уравнение, описывая закон протекания множества сходных явлений, представляет собой математическую модель некоторого усредненного явления; конкретные ее реализации даже в пределах одной и той же моделирующей структуры различаются между собой вследствие стохастических вариаций физического воспроизведения коэффициентов уравнения. Характер исследуемого процесса во многих случаях зависит от условий, связанных с предысторией относительно рассматриваемого момента времени t_0 , принимаемого за начальный. Эти условия приводят к тому, что процесс в системе соответственно оказывается случайной функцией. При

аналоговом моделировании могут появляться специфические погрешности. Например, при исследованиях на АВМ устойчивости каких-либо систем дифференциальные уравнения в окрестности границы устойчивости могут из-за влияния паразитных параметров усилителей АВМ (паразитных емкостей в цепях обратных связей и т. д.) существенно отличаться от получаемых при аналитическом решении. Если для устойчивости системы согласно известным условиям Ляпунова требуется, чтобы при малых вариациях начальных условий решение незначительно отличалось от невозмущенного на всем бесконечном интервале времени, то для устойчивого решения на АВМ требуется только малость вариаций решения при незначительных вариациях начальных условий в конечном временном интервале. Практически это означает, что в системах, неустойчивых по Ляпунову, на некоторых интервалах может получиться машинное решение с приемлемой точностью. В то же время устойчивые по Ляпунову системы могут быть настолько чувствительны к изменению начальных значений параметров, что решение на АВМ оказывается невозможным*.

Так, при нулевых начальных условиях исследование движения, описанного уравнением вида

$$Kd^2x/dt^2 = Ax + B$$

при $K = 10$, $A = 0,96$, $B = 0,12$, дает результаты, свидетельствующие о неустойчивости системы по Ляпунову. Однако в интервале $0 \leq t \leq 10$ на АВМ можно получить устойчивое решение, если погрешность в установке параметров достигает 2—3%. Аналогично можно указать на многочисленные случаи, когда для систем, чувствительных к флуктуациям, малые погрешности в начальных условиях вызывают такое усиление колебательных компонент, что решение на АВМ дает результат, искаженный по сравнению с ходом единичного процесса, наблюдавшегося в оригинале.

Еще одной причиной получения расходящихся машинных решений при моделировании дифференциальных уравнений, описывающих сходящийся процесс, может явиться структурная неустойчивость модели. Эта неустойчивость обуславливается наличием в моделирующей структуре более простых связей, реализующих решение конечных уравнений таким методом подбора корней, в котором не обеспечивается сходимость процесса подбора. При этом переход от уравнений непрерывной физической системы к приведенным уравнениям сопровождается утратой сведений о составе и структуре системы, в связи с чем оказываются возможными случаи, когда приведенное дифференциальное уравнение не описывает фактического поведения системы: из двух систем с абсолютно одинаковыми приведенными дифференциальными уравнениями, удовлетворяющими существующим критериям устойчивости (основанным на исследовании этих уравнений), одна может быть устойчивой, а другая — неустойчивой. Результаты машинного решения в данном случае зависят от того, есть ли в реальной структурной схеме только устойчивые кольца конечных зависимостей или имеется хотя бы одно неустойчивое кольцо. При этом критерии устойчивости непрерывных систем, формирующие условия устойчивости, необходимые и достаточные для систем с неколецовой структурой, для систем с кольцевой структурой оказываются необходимыми, но не достаточными.

Весьма существенно то обстоятельство, что параметры, входящие в тот или иной критерий подобия, различно влияют на результаты отображения процесса в модели: в одних случаях точность получения

* Лебедев А. Н. Рациональная методика исследования устойчивости линейных САУ. — Известия ЛЭТИ, вып. 65, 1967, с. 18—21.

критерия имеет решающее значение для правильного воспроизведения процесса, в других—те же критерии могут быть приближенными. В то же время погрешности моделирования, связанные со случайным разбросом параметров модели и оригинала (реальная точность задания исходных данных, изменение параметров вследствие изменения режима, зависимости параметров системы и режима от случайных факторов, различно проявляющихся в оригинале и модели, и т. п.), являются неизбежными. Кроме того, параметры моделируемой системы, равно как и параметры режима этой системы, практически не могут быть воспроизведены в моделирующих объектах с высокой точностью (2—3%). Например, при моделировании сложных комплексов электроэнергетического обеспечения различных объектов в динамических (физических) моделях отношение R/X (критерий подобия) иногда превышает аналогичное отношение в оригинале в 2—3 раза; даже в специализированных установках не удается получить погрешность в этом критерии менее 10—15%.

При моделировании стохастически определенных физических систем для оценки их эффективности возникает вопрос о достоверности полученных результатов. Ответ на этот вопрос можно получить, проводя случайные вариации учитываемых при моделировании факторов. Оценка погрешностей прогнозирования поведения сложной системы A , получающей возмущающие воздействия, может производиться по экспериментальным данным о поведении другой стохастически определенной системы B , в том или ином смысле подобной первой, и необходимой точности (допустимой погрешности) воспроизведения отдельных критериев подобия при заданной вероятности ошибки прогнозирования. Такие оценки требуют не только анализа стохастической природы явлений, определенных статистическими характеристиками их индивидуального появления и количественного проявления, но и выявления значимости объективно необходимой замены точного моделирования приближенным с точки зрения результирующей эффективности теоретико-экспериментального исследования.

Исследования на моделях для решения задач прогнозирования. Проводя опыты на модели (любой: физической, математической, аналоговой), исследователь должен учесть, что достоверность прогнозирования зависит от трех факторов: основных гипотез (уравнений, соотношений, допущений), достоверности и точности исходных данных, учета вероятности появления случайных возмущающих воздействий.

Исследование возможностей прогнозирования характеристик системы A по результатам эксперимента (моделирования) в системе B (и, в частности, при определенных условиях эксплуатации для $A \equiv B$) осуществляется в предположении о наличии случайных возмущающих воздействий, объективно существующих как в системе A , так и в системе B , и сходственных в смысле их статистического подобия. Совокупным проявлением этих воздействий, преобразованных оператором системы, являются в соответствии с условием подобия A и B и второй теоремой подобия случайные вариации обобщенного функционала Ψ :

$$\Psi = \Psi(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}).$$

При этом на основании третьей теоремы подобия существуют такие обобщенные параметры (критерии подобия) $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$, т. е.

$$\pi_i = \varphi_i(U_1, \dots, U_n)_\xi, \quad i = 1, \dots, (n-k),$$

где $(U_1, \dots, U_n)_\xi$ — соответственные параметры (переменные) моделируемой $(A; \xi = a)$ и моделирующей $(B; \xi = b)$ систем и их режимов, что

$$\pi_i = \left[\frac{U_p}{U_1^{\beta_1}, \dots, U_k^{\beta_k}} \right]_i = \text{idem}, \quad p = k+1, \dots, n, \quad \beta_j = \alpha_j \gamma_j,$$

где α_j, γ_j — определенным образом выбранные безразмерные числовые коэффициенты.

Ставится задача вероятностной оценки эффективности моделирования структуры (процесса) A путем отображения ее в структуре B в предположении о наличии существенно влияющих (детерминированно проявляющихся) неидентичностей систем A и B (погрешности «конструктивного» характера, обусловленные особенностями отображения конкретного физического процесса или явления в данной модели) и некоторых случайных погрешностей определения и воспроизведения отдельных параметров (критериев подобия). Здесь справедливо соотношение

$$\pi_i = \theta(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-k}),$$

где $\pi_i = \varphi(U_1, \dots, U_n)$ — критерии подобия — суть функции случайно варьирующихся аргументов $U_1, \dots, U_n$.

При другой интерпретации функциональных соотношений подобия можно воспользоваться представлением о некотором гиперпространстве критериев подобия $\{\pi\}$, для которого существует $\pi_\Sigma \subset \{\pi\}$ такое, что

$$\bar{\pi}_\Sigma = \pi_\Sigma(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}).$$

В этом случае вероятностная оценка обобщенного подобия сводится к определению числовых характеристик случайного процесса блуждания изображающей точки μ стохастического по амплитуде и фазе вектора обобщенного критерия подобия $\bar{\pi}_\Sigma = \Psi(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$ в некоторой области ρ многомерного пространства частных критериев $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$. Границы области ρ определяются допустимой погрешностью окончательного результата прогнозирования. Вероятность пребывания точки μ в области ρ , т. е. $\mu \in \rho(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$,

$$P(\mu_\Sigma \in \rho) = \int \dots \int_{(\rho_\Sigma)} W(\mu_0) P(\bar{\pi}_{\Sigma 0}) d\mu_0,$$

где $\rho = \rho(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$ — область допустимого изменения $\bar{\pi}_\Sigma$; $W(\mu_0) d\mu_0$ — вероятность того, что фактическая точка траектории конца $\bar{\pi}_\Sigma$ находится в окрестности $d\mu_0$ точки μ_0 ; $\bar{\pi}_{\Sigma 0}$ — начальный вектор $\bar{\pi}_\Sigma$, соответствующий детерминированному заданию исходных данных при полном моделировании; μ_0 — начальная точка траектории конца $\bar{\pi}_\Sigma$ (по условию, $\mu_0 \in \rho$). При этом

$$P(\bar{\pi}_{\Sigma 0}) = \int \dots \int P(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}, \mu_0) d\pi_1, \dots, d\pi_{n-k}.$$

Здесь $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ — частные критерии подобия; $P(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}, \mu_0) d\pi_1, \dots, d\pi_{n-k}$ — вероятность того, что траектория, начинающаяся в точке μ_0 , находится в области параметров

$$\pi_{1,0} < \pi_1 < \pi_{1,0} + d\pi_1; \dots \pi_{(n-k),0} < \pi_{n-k} < \pi_{(n-k),0} + d\pi_{n-k}.$$

При нормальном законе распределения вероятность того, что π_Σ будет находиться в заданных пределах $[\alpha_\pi, \beta_\pi]$, определится как

$$P(\alpha_\pi < \pi_\Sigma < \beta_\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi \left(\frac{\beta_\pi - M[\pi_\Sigma]}{\sqrt{2} \sigma[\pi_\Sigma]} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha_\pi - M[\pi_\Sigma]}{\sqrt{2} \sigma[\pi_\Sigma]} \right) \right\},$$

где Φ — интеграл вероятности; $M[\pi_\Sigma]$ — математическое ожидание π_Σ ; $\sigma[\pi_\Sigma]$ — среднеквадратичное отклонение, для которого

$$\sigma^2 [\pi_\Sigma] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \pi_j} \right)_M [\pi_\Sigma]^2 \sigma^2 [\pi_j] + \\ + 2 \sum_{j < p} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \pi_j} \right)_M \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \pi_p} \right)_M r_{jp} \sigma [\pi_j] \sigma [\pi_p],$$

при этом $\frac{\partial \Psi}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \Psi (M [\pi_1], \dots, M [\pi_{n-h}])}{\partial \pi_j}$ — частная производная π_Σ по параметру π_j в точке, соответствующей значениям параметров $M [\pi_1], \dots, M [\pi_{n-h}]$; r_{jp} — коэффициент корреляции между критериями подобия π_j и π_p ; $\sigma [\pi_j]$, $\sigma [\pi_p]$ — среднеквадратичные отклонения значений π_j и π_p .

При произвольных законах распределения вариаций исходных параметров, априорно заданных или экспериментально определенных, аналитическая оценка может быть выполнена методом статистического моделирования на ЦВМ. При этом устанавливается либо вероятность нахождения критерия в требуемом поле допуска, либо (при заданном значении вероятности) необходимое значение поля допуска. Последующий анализ результатов статистического моделирования позволяет обоснованно сформулировать требования, предъявляемые к точности измерения отдельных параметров и воспроизведения их на физической модели с учетом допустимой (определяемой задачами конкретного исследования) погрешности.

В практических приложениях оценка достоверности результатов моделирования с учетом погрешностей задания и воспроизведения критериев подобия при статистических их вариациях сводится к двум задачам:

а) оценка погрешности реализации приближенного моделирования вместо точного;

б) оценка влияния стохастических вариаций критериев подобия.

Подобие и моделирование всегда осуществляются с той или иной степенью точности. Даже в предположении детерминированно определенных параметров при любом моделировании не могут не появляться расхождения в характеристиках модели и оригинала. Поэтому все исследования, при которых установление подобия комплексного явления осуществляется на основе каких-либо допущений, заведомо приводящих к погрешностям воспроизведения именно этих главных (определяющих) процессов, должны рассматриваться как исследования, основанные на приближенном подобии. Если в оригинале какой-либо параметр a представляется в виде функции $a_1 = f(x)$, то в модели аналогичная зависимость с учетом погрешностей моделирования имеет вид функции $a_2 \pm \Delta_a = \tilde{f}(x)$, где величина $\pm \Delta_a$ зависит от многообразия сопутствующих процедуре моделирования факторов. Если величины a_i , входящие в относящийся к оригиналу критерий подобия, определяются на основе расчета проектируемой системы, то в этом случае они могут рассматриваться как «идеальные» величины, не содержащие первичных погрешностей, т. е. представляющие собой, по сути дела, математическое ожидание соответствующего параметра $M [a_i]$. Если значения $M [a_i]$ получаются из опыта путем измерений, то они содержат некоторую ошибку в определении параметра Δ'_{ai} ; в модели этот параметр воспроизводится с некоторой результирующей погрешностью Δ''_{ai} .

Несмотря на то что при исследовании реальных (существующих) систем истинное значение величин, входящих в критерий подобия, фактически неизвестно, с помощью коэффициента несоответствия можно определить отклонение процесса при воспроизведении его в реальной, имеющей погрешности, модели относительно процесса, соответствующего «идеальной» модели. При этом, однако, необходимо знать точность примененных методов исследования и измерительных средств. Опираясь величинами заданного максимально допустимого отклонения процесса, можно установить допустимое значение коэффициента несоответствия с учетом погрешностей исследования оригинала и воспроизведения модели, а также предельно допустимых погрешностей воспроизведения величин, входящих в критерий подобия, при которых отклонение процесса, протекающего в реальной модели, не будет превышать заданного значения. Принципиально

возможно и решение обратной задачи — нахождения расхождения процесса в реальной модели по сравнению с процессом в «идеальной» модели по заданным погрешностям воспроизведения моделируемых величин. В связи с этим при моделировании реальных систем отклонение коэффициента несоответствия от единицы больше, чем при моделировании проектируемых систем, поскольку на неточность воспроизведения модели накладывается еще неточность определения соответствующих величин оригинала.

При строгом равенстве критериев подобия коэффициент несоответствия должен быть равен единице. Это не значит, однако, что единственным способом удовлетворения указанных условий является равенство нулю всех входящих в коэффициент относительных погрешностей. Возможны такие комбинации погрешностей и их знаков, при которых коэффициент несоответствия будет равен или близок к единице. Анализ структуры коэффициента несоответствия в каждом отдельном случае может определить выбор методов и аппаратуры экспериментального исследования.

При оценке значения коэффициента несоответствия проще всего ориентироваться на наилучший случай, т. е. на случай, приводящий к наибольшему отклонению рассчитываемого параметра — критерия подобия. Это заведомо увеличивает отклонение коэффициента несоответствия от единицы, так как в реальных условиях такое сочетание погрешностей не является наиболее вероятным. Такой подход позволяет лишь оценить границы изменения коэффициента несоответствия. Кроме того, разброс результатов опытов при инвариантности идеального критерия подобия связан не только с особенностями процесса моделирования, но и с тем, что опыты на ряде установок в оригинале или даже на одной и той же установке, но в различных условиях дают неоднозначные результаты. Существенно и то, что расхождения между расчетными и экспериментальными определенными параметрами могут достигать нескольких десятков процентов.

В связи с этим подробнее рассмотрим оценку погрешности моделирования. Обычно при оценке погрешности функций приближенных аргументов непрерывная дифференцируемая функция $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, в которой точное значение аргумента в точке $M(x_1, \dots, x_n)$ заменяется приближенным $M(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$, представляется в виде

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \bigg|_M \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \bigg|_M \Delta^2 x_i + \sum_{i \neq j}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_M \Delta x_i \Delta x_j, \quad (6.8)$$

где Δx_i — ошибки в определении x_i ($i = 1, \dots, \bar{n}$), принимаемые малыми значениями.

Пренебрегая членами второго и высшего порядков, можно записать

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \bigg|_M \Delta x_i,$$

откуда коэффициент несоответствия

$$\xi_i = 1 + \sum_{i=k}^n \alpha_i \delta_i - \sum_{j=l}^m \beta_j \varepsilon_j, \quad (6.9)$$

где α_i, β_j — показатели степени при соответствующих членах критерия подобия; δ_i, ε_j — относительные погрешности величин, входящих в числитель и знаменатель выражения для критерия подобия соответственно.

Подобный подход оправдан при малых изменениях участвующих величин. Однако предположение о малых погрешностях определения и воспроизведения параметров критерия подобия достаточно часто не соответствует действительности. Поэтому представляется целесообразным для решения рассматриваемой за-

дачи воспользоваться методикой определения зависимости относительного изменения функции $F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$ при относительных изменениях ее аргументов $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ без наложения условия малости приращения аргументов. Предполагается лишь, что вид исследуемой функциональной зависимости не изменяется в результате изменения величины аргументов и зависимость является непрерывной функцией аргументов. Так, например, если критериальная функция $F_\pi = \pi_1/\pi_2$, то абсолютное приращение функции, вызванное изменением ее аргумента,

$$\Delta F_\pi = F'_\pi - F_\pi = \pi'_1/\pi'_2 - \pi_1/\pi_2,$$

что после соответствующих алгебраических преобразований даст выражение

$$\Delta F_\pi = (\pi_2 \Delta \pi_1 - \pi_1 \Delta \pi_2) / [(\pi_2 + \Delta \pi_2) \pi_2].$$

Переходя к относительным погрешностям, можно записать

$$\delta F_\pi = (\delta \pi_1 - \delta \pi_2) / (1 + \delta \pi_2). \quad (6.10)$$

В частности, для малых приращений аргумента π_2 ($|\delta \pi_2| \ll 1$)

$$\delta F_\pi = \delta \pi_1 - \delta \pi_2.$$

Аналогично можно получить выражения погрешностей и для любых критериальных функций.

Преобразование выражений для критериев подобия в соответствии с изложенными соображениями позволяет получить при расчетах, выполняемых с учетом влияния случайных факторов, достаточно достоверные результаты. Следует, однако, отметить, что и в этом случае обычно применяемая методика оценки допусков по наиболее неблагоприятному сочетанию параметров определяет лишь границы изменения критерия подобия, но не дает никакой информации о наиболее вероятных значениях, представляющих наибольший практический интерес.

Влияние погрешностей параметров при различных видах моделирования. С общепознавательной точки зрения нет принципиальной разницы между различными видами моделирования. В любом случае при этом исследуется вместо оригинала некоторый промежуточный объект, при неизбежном наличии тех или иных погрешностей.

При моделировании процессы или некоторое обобщенное движение сложной системы характеризуется критериальным уравнением. Результаты каких-либо экспериментов (в том числе и экспериментальных расчетов, проводимых на ЦВМ) также характеризуются критериальными зависимостями. Однако оценки точности результатов в смысле их совпадения с некоторым эталоном и их повторяемости получаются различными; так, при численном решении уравнений на ЦВМ обеспечивается абсолютная повторяемость результатов при детерминированном задании исходных параметров. Результаты, получаемые на АВМ, имеют довольно заметный разброс, максимум гистограммы которого достаточно хорошо совпадает с решением, полученным на ЦВМ; значение этого разброса может быть в ряде случаев уменьшено специальными мерами. Исследования на физической модели в зависимости от характера отклонения параметров, входящих в критерий подобия, определяют сдвиги максимума гистограммы в сторону меньших или больших значений исследуемого параметра x . В отдельных случаях этого сдвига может и не быть, но, как правило, физическая модель дает более низкий максимум, чем математическая. Это объясняется большим приближением к физической природе явления и меньшей

точностью воспроизведения исходных параметров. Реальная исследуемая система дает, как правило, наименее четкий максимум, допуская в отдельных случаях резкие отклонения параметра от «идеального» расчетного значения. Если результаты исследований (рис. 6.6) на ЦВМ (зависимость 1), АВМ (кривая 2) и физической модели (зона, образованная кривыми 3' и 3'') представить в виде интегральных функций распределения, то результаты будут отличны от результатов, полученных в оригинале (кривая 4).

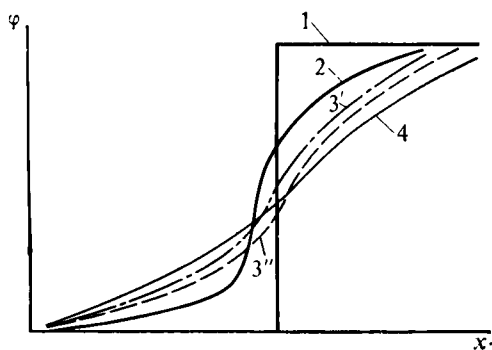


Рис. 6.6

На рис. 6.7, а показаны кривые распределения, полученные в модели и оригинале. Сдвиг точек В и С относительно А зависит от характера воспроизведения критериев подобия. Величина $K_{ср}$, характеризующая сдвиг кривой по сравнению с кривой для идеального расчетного случая, часто бывает такой, как показано на рис. 6.7, б. Значение $K_{ср}$ является функцией критерия подобия, наиболее сильно характеризующего изучаемый процесс.

На рис. 6.8 приведены гистограммы результатов решений при различных исполнениях. Численное решение на ЦВМ дает полную повторяемость, если только процесс решения выполняется каждый раз одинаково (по одному и тому же методу, при одинаковом шаге численного интегрирования и т. д.). При детерминированном задании исходных параметров на АВМ получается заметный разброс, причем максимум гистограммы совпадает обычно с максимумом, полученным на ЦВМ. Исследования на физической модели дают различные сдвиги максимума гистограмм в зависимости от характера параметров, входящих в критерии подобия. Реальная система дает, как правило, меньшую четкость кривой распределения.

Применение изложенного вероятностного подхода позволяет получить несравненно более надежные и практически важные результаты,

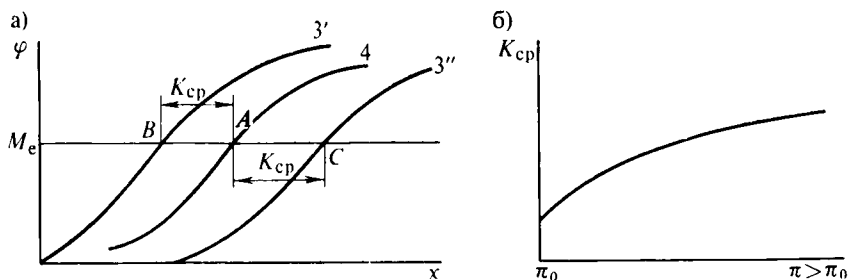


Рис. 6.7

чем при обычном «детерминистском» подходе. При рассмотрении следуют также учитывать, что результаты расчета, проведенного для детерминированно заданных параметров, часто не совпадают с результатами единичного опыта.

Результаты опытов на физической модели обычно бывают «сдвинуты» на гистограмме и дают большую повторяемость для несколько иного, чем расчетное значение, параметра x . Из анализа гистограмм можно сделать выводы о числе опытов на модели, совпадающих с опы-

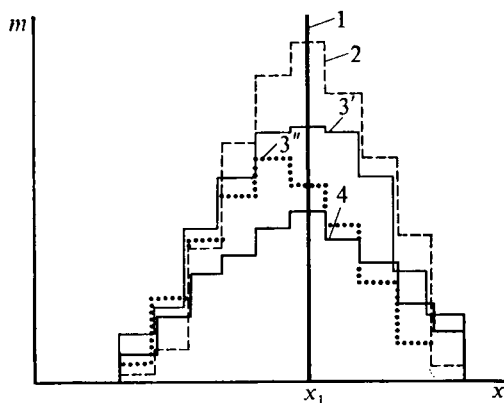


Рис. 6.8

тами в оригинале, о причинах расхождения гистограмм при различных исходных условиях и сдвига их характеристик относительно друг друга. Таким образом, облегчается анализ результатов, получаемых на физических и математических моделях и при натурных экспериментах. Только на основе вероятностного подхода и возможно сопоставление получаемых на моделях результатов с результатами, соответствующими случаю детерминированно заданных исходных параметров.

Резюмируя сказанное, отметим, что погрешности отдельных параметров проявляются в комплексе критериев, в которые эти параметры входят. Факторы, наиболее влияющие на сдвиг вероятностных кривых распределения результатов, можно выявлять различными путями, например путем анализа зависимости сдвига максимума кривой распределения от допусков на точность задания исходных данных. Это позволяет установить, какие именно параметры целесообразно задавать с большой точностью, чтобы получить требуемое приближение к результатам натурных испытаний. Выяснение этого вопроса тесно связано с исследованием влияния критериальных факторов и абсолютных величин на характер кривой распределения. На основании подобного анализа можно установить число опытов, которое в тех или иных условиях необходимо провести, чтобы получить требуемую достоверность результата.

Проведенные исследования показывают принципиальную неправильность подхода к аналоговым и тем более к физическим моделям как к расчетным установкам. Их следует рассматривать как определенное, так или иначе отражающее стохастическую природу воспроизведение оригинала и соответственно оценивать получающиеся результаты. При этом имеется возможность установить статистическое соответствие между моделью и оригиналом для более глубокого анализа физической сущности рассматриваемых явлений. Принципиально возможно также учитывать объективно существующие статистические

закономерности, с тем чтобы результаты моделирования давали статистически подобные с натурным экспериментом результаты при использовании моделей с различными физическими характеристиками и параметрами.

Таким образом, единичное экспериментальное исследование, поставленное на одном объекте, например на модели, не обязательно должно совпадать с экспериментальным исследованием, поставленным на другом подобном объекте (оригинале), поскольку у критериев подобия, определенных по данной модели и данному оригиналу, будет обязательно существовать некоторый разброс, обусловленный статистической природой физических параметров модели и оригинала. Количественный учет статистических зависимостей позволяет выявить влияние стохастических факторов, присущих модели и оригиналу, сформулировать требования к точности измерения и воспроизведения на модели различных параметров (величин, входящих в выражение для критерия подобия), а при объективно заданных погрешностях (что может быть обусловлено, например, спецификой физической реализации модели) оценить точность получаемого при моделировании результата и возможные отклонения параметров реальной системы, синтезируемой по результатам физического моделирования.

§ 6.4. КВАЗИАНАЛОГОВЫЕ МОДЕЛИ *

Структуры квазианалоговых моделей. Под *квазианалоговой моделью* обычно понимается вычислительное устройство, использующее *эквивалентность модели и оригинала* относительно получаемых результатов. При этом уравнения модели и оригинала могут быть не подобны, но при определенных условиях дают подобные (полностью или частично) результаты.

Основой теории квазианалоговых моделей является понятие об эквивалентности получаемых результатов. Признаки, которые позволяют судить о математической эквивалентности объекта и модели, называются *критериями эквивалентности*. Если аналоговые модели и аналоговое подобие требуют, чтобы уравнения модели и соответствующего процесса были подобны друг другу, то у квазианалоговых моделей уравнения моделирующего устройства и моделируемого объекта не подобны друг другу.

При определенных допущениях моделируемый объект можно описать алгебраическими, дифференциальными, интегральными или иными уравнениями. Математические модели являются моделями не объектов, а соответствующих уравнений. Для таких моделей объектами моделирования служат математические уравнения и отдельные операции.

С учетом сказанного понятие о квазианалоговой модели сводится к следующему: квазианалоговая модель каких-либо уравнений (а) —

* Квазианалоговым и гибридным моделям посвящен ряд работ Г. Е. Пухова и М. Н. Кулика, подробно рассматривающих этот вопрос (см. библиографию). Здесь же даются только основные сведения.

это аналоговая модель иных уравнений (б), частично не подобных заданным, но таких, что при выполнении критериев эквивалентности все или некоторые из параметров процессов, отвечающих искомым неизвестным системам уравнений (б), совпадают с неизвестными исходных уравнений (а). Если при этом в процессе исследования не требуется использование неизвестных, входящих в моделируемые уравнения (б), то квазианалоговая модель по своим свойствам практически будет мало отличаться от аналоговой (рис. 6.9, а). Такая модель называется *квазианалоговой моделью первого рода* или *неуравновешиваемой моделью* (рис. 6.9, б). Если для реализации моделирования используются получаемые из (б) величины, то для нахождения искомых

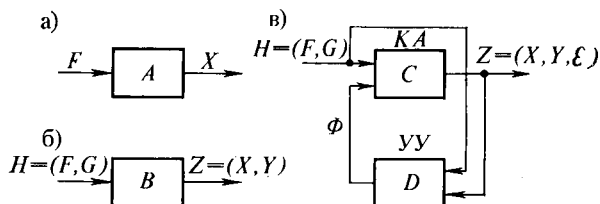


Рис. 6.9

неизвестных организуют процесс уравнивания модели. Используемая при этом модель называется *квазианалоговой моделью второго рода* или *уравновешиваемой моделью* (рис. 6.9, в). Модели второго рода должны состоять из двух основных частей, а именно: из собственно модели или квазианалога (КА) и из части, предназначенной для реализации процесса уравнивания, называемой устройством уравнивания (УУ). Аналоговые и квазианалоговые модели первого рода — это системы без обратных связей, а второго рода — это системы с обратной связью в виде устройств уравнивания, как показано на рис. 6.9, а, б, в (в соответствии с этим рисунком можно составить уравнения моделей).

Все сказанное иллюстрируется схемами, приведенными на рис. 6.9, где приняты обозначения: X и F — векторы искомых и заданных величин для аналоговой системы; компоненты F имеют характер возмущающих функций (при $F = 0$ вектор $X = 0$); A — аналоговая модель оператора, определяющего связи между X и F ; Z и H — векторы величин, получаемых и вводимых в квазианалоговые системы; B — аналоговая модель оператора, определяющего связи между Z и H в случае квазианалоговой системы первого рода; C — аналоговая модель оператора, определяющего связи между Z , H и вектором Φ уравнивающих величин, вводимых в квазианалог КА; D — аналоговая модель оператора, определяющего связи между Z , H и Φ для устройства уравнивания УУ.

Составляющими вектора H должны быть вектор F и в общем случае некоторый вектор с компонентами, определяемыми независимо от Z , т. е. согласно $G = k(l)$, где k — известный оператор; l — известный вектор величин. Вектор Z может содержать кроме X вектор вспомогательных неизвестных Y и в случае моделей второго рода еще и другую информацию (например, вектор невязок ϵ), необходимую для управления устройством уравнивания. Таким образом, вектор $H = (F, G)$, а вектор $Z = (X, Y)$, или $Z = (X, Y, \epsilon)$.

Уравнение неуравновешиваемой модели запишется в виде

$$B(Z, H) = 0.$$

Учитывая, что $Z = (X, Y)$ и $H = (F, G)$, его можно переписать в виде

$$B(X, Y, F, G) = 0.$$

Уравнения уравновешиваемой модели в соответствии со структурой можно представить как

$$C(Z, H, \Phi) = 0; D(\Phi, Z, H) = 0,$$

из которых первое называется *уравнением квазианалога*, а второе — *уравнением устройства уравновешивания*.

Назначение квазианалога состоит в том, чтобы после ввода известных векторов F, G и определенного уравновешивающего вектора Φ получить искомым вектор X . Устройство уравновешивания служит для преобразований векторов Z и H в вектор Φ .

Характер элементов, выбираемых для реализации систем A, B, C и D при рассмотрении общих свойств как аналоговых, так и квазианалоговых моделей, не имеет принципиального значения. Элементы могут быть непрерывного действия и дискретного. Возможен случай, когда для любой из систем применяются элементы обоих типов, т. е. когда квазианалоговая модель выполняется как гибридная.

Преобразование уравнений. Методы теории подобия могут использоваться как чисто математическая операция, а именно при преобразовании уравнений, предназначенных для получения решения, которое получить без такого преобразования затруднительно или даже невозможно. При этом отношении величин исходного уравнения к величинам преобразованного уравнения (которые могут быть определены из выражений связи между указанными величинами) являются коэффициентами подобия. Чтобы явления, описываемые исходным и преобразованным уравнениями, были подобны, коэффициенты подобия должны удовлетворять некоторым условиям подобия, которые можно считать критериями.

Преобразования дифференциальных уравнений при этом осуществляются в следующем порядке:

- записывается исходное (преобразуемое) уравнение;
- принимается (выбирается) вид преобразованного уравнения;
- на основе совместного анализа обоих уравнений устанавливаются условия их подобия;
- из условий подобия определяются соотношения подобия (критерии), дающие связь между параметрами обоих уравнений.

Из соотношений подобия получаются условия, при выполнении которых уравнения становятся взаимно преобразуемыми. Невозможность преобразования выявляется в процессе нахождения условий подобия. Так, например, уравнение, характеризующее проникновение электромагнитной волны в цилиндрическом проводе, имеет вид

$$d^2 E/dr^2 + (1/r) (dE/dr) - aE = 0.$$

Для решения поставленной задачи это уравнение путем замены переменных преобразуется в уравнение Бесселя:

$$d^2 E'/d\xi^2 + (1/\xi) (dE'/d\xi) + E' = 0.$$

Чтобы определить выражения, связывающие аргументы r и ξ и искомые функции E и E' , применим методы теории подобия. Примем обозначения для коэффициентов подобия:

$$K_r = r/\xi = \text{const}; K_E = E/E' = \text{const}.$$

В исходном уравнении заменим переменные, при этом получим

$$\frac{K_E}{K_r^2} \frac{d^2 E'}{d\xi^2} + \frac{K_E}{K_r^2} \frac{1}{\xi} \frac{dE'}{d\xi} - K_E a E' = 0.$$

Если процессы, описываемые уравнениями, подобны, то уравнения должны быть тождественны. На основе этого требования получим условие подобия

$$K_E/K_r^2 = -K_E a.$$

Из последнего условия вытекает, что при преобразовании исходного уравнения величина K_E может быть выбрана произвольно (в том числе $K_E = 1$), а величины K_r и ξ должны иметь значения:

$$K_r = 1/\sqrt{-a}; \xi = r/K_r = r \sqrt{-a}.$$

В практике преобразований дифференциальных уравнений в частных производных известны случаи, когда условия подобия выбираются различными в направлении различных осей координатной системы. Коэффициенты подобия длин и других величин могут быть при этом различными в зависимости от направлений. Пусть, например, при исследовании нестационарного теплового процесса в анизотропном цилиндре получено уравнение

$$\frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda_\alpha}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\omega + C \frac{\partial T}{\partial t},$$

где коэффициенты теплопроводности λ постоянны, но различны в направлении осей. Из-за последнего условия затруднено не только решение этого уравнения в аналитическом виде, но даже и его моделирование. Наиболее удобное решение уравнения было бы в том случае, если бы удалось заменой переменных преобразовать его в уравнение теплопроводности:

$$\frac{\lambda_M}{r_M} \frac{\partial T_M}{\partial r_M} + \lambda_{rM} \frac{\partial^2 T_M}{\partial r_M^2} + \frac{\lambda_{\alpha M}}{r_M^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial \alpha_M^2} + \lambda_{zM} \frac{\partial^2 T_M}{\partial z_M^2} = -\omega_M + C_M \frac{\partial T_M}{\partial t_M},$$

при этом $\lambda_{rM} = \lambda_{\alpha M} = \lambda_{zM} = \lambda_M$.

Такое преобразование уравнения можно назвать изотропизирующим преобразованием. Здесь, как и ранее, следует выбрать выражения для коэффициентов подобия. Очевидно, что соблюдение поставленных требований невозможно при геометрически подобном преобразовании области. Поэтому при решении данной задачи необходимо выбрать отдельно коэффициенты подобия длины и теплопроводности в направлении осей. Принимаем:

$$K_r = r/r_M = \text{const}; K_\alpha = \alpha/\alpha_M = \text{const}; K_z = z/z_M = \text{const};$$

$$K_T = T/T_M = \text{const}; K_{\lambda_r} = \lambda_r/\lambda_M = \text{const}; K_{\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha/\lambda_M = \text{const};$$

$$K_{\lambda z} = \lambda_z / \lambda_M = \text{const}; K_\omega = \omega / \omega_M = \text{const}; K_C = C / C_M = \text{const};$$

$$K_t = t / t_M = \text{const}.$$

Подставляя принятые выражения в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} & \frac{K_{\lambda r} K_T}{K_r^2} \frac{\lambda_{rM}}{r_M} \frac{\partial T_M}{\partial r_M} + \frac{K_{\lambda r} K_T}{K^2 r} \lambda_{rM} \frac{\partial^2 T_M}{\partial r_M^2} + \frac{K_{\alpha \lambda}}{K_r^2} \times \\ & \times \frac{K_T}{K_\alpha^2} \frac{\lambda_{\alpha M}}{K_\alpha^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial \alpha_M^2} + \frac{K_{\lambda z} K_T}{K_z^2} \lambda_{zM} \frac{\partial^2 T_M}{\partial z_M^2} = -K_\omega \omega_M + \\ & + \frac{K_C K_T}{K_t} C_M \frac{\partial T_M}{\partial t_M}. \end{aligned}$$

Из сопоставления соответствующих уравнений определим условия подобия:

$$K_{\lambda r} K_T / K_r^2 = K_{\alpha \lambda} K_T / (K_r^2 K_\alpha^2) = K_{\lambda z} K_T / K_z^2 = K_\omega = K_C K_T / K_t.$$

Найдем значения коэффициентов подобия для изотропизирующего преобразования координат:

$$K_r = \sqrt{\lambda_r} / \sqrt{K_\omega \lambda_M / K_T}; K_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha / \lambda_r}; K_z = \sqrt{\lambda_z} / \sqrt{K_\omega \lambda_M / K_T},$$

где величины K_ω , λ_M , K_T могут быть выбраны на основе заданных граничных условий или произвольно. Остальные коэффициенты должны быть выбраны исходя из условия

$$K_C K_T / (K_\omega K_t) = 1.$$

Если заданы граничные условия анизотропной области, то изложенным методом их можно определить на границах преобразованной (изотропизированной) области.

В рассмотренных случаях коэффициенты подобия были постоянными числами. Однако в практике преобразования дифференциальных уравнений заменой переменных в большинстве случаев отношения величин исходного уравнения к величинам преобразованного уравнения не являются постоянными, а зависят от какой-либо (или каких-либо) переменной. В этих случаях к преобразованию дифференциальных уравнений также могут быть применены приемы теории подобия — методы нелинейного подобия, когда коэффициенты подобия являются переменными величинами. Так, например, применением постоянных коэффициентов подобия не удастся выполнить преобразование уравнения

$$d^2 y / dx^2 + \operatorname{tg} x \, dy / dx + Qy \cos^2 x = 0$$

в уравнение

$$d^2 \eta / d\xi^2 + a\eta = 0.$$

Поэтому выбираем другие коэффициенты подобия:

$$K_x = x / \xi = f(\xi); K_y = y / \eta = \text{const}.$$

Тогда, согласно правилам замены переменных,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K_y}{dx/d\xi} \frac{d\eta}{d\xi};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{K_y}{(dx/d\xi)^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{K_y}{(dx/d\xi)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{d\eta}{d\xi}.$$

На основании этих соотношений исходное уравнение может быть представлено в окончательном виде:

$$\frac{K_y}{(dx/d\xi)^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{K_y}{(dx/d\xi)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{d\eta}{d\xi} + \operatorname{tg} x \frac{K_y}{dx/d\xi} \frac{d\eta}{d\xi} +$$

$$+ K_y a_\eta \cos^2 x = 0.$$

Сопоставляя исходное и окончательное уравнения, получим

$$\frac{K_y}{(dx/d\xi)^2} = K_y \cos^2 x; \operatorname{tg} x \frac{K_y}{dx/d\xi} = \frac{K_y}{(dx/d\xi)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2}.$$

Решение уравнения запишется в виде

$$\xi = \pm \sin x.$$

Коэффициент подобия K_y может быть выбран произвольно, в том числе и $K_y = 1$. В этом случае между физическими явлениями существует нелинейное подобие.

При преобразовании дифференциальных уравнений в частных производных возможно одновременное использование методов аффинного и нелинейного подобия. Например, если в рассмотренном ранее уравнении нестационарного теплового процесса в анизотропном цилиндре принять, что

$$K_r = \frac{r}{r_M} = f_1(r); \quad K_\omega = \frac{\omega}{\omega_M} = f_2(r); \quad K_C = \frac{C}{C_M} = f_3(r),$$

а остальные коэффициенты подобия сохранить прежними, то согласно правилам замены переменных

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{K_T}{dr/dr_M} \frac{\partial T_M}{\partial r_M};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{K_T}{(dr/dr_M)^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial r_M^2} - \frac{K_T}{(dr/dr_M)^3} \frac{d^2 r}{dr_M^2} \frac{\partial T_M}{\partial r_M};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = \frac{K_T}{K_\alpha^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial \alpha_M^2}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{K_T}{K_z^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial z_M^2}.$$

После замены переменных получим

$$\frac{K_{\lambda_r} K_T}{(dr/dr_M)^2} \lambda_{r_M} \frac{\partial^2 T_M}{\partial r_M^2} - \frac{K_{\lambda_r} K_T}{(dr/dr_M)^3} \frac{d^2 r}{dr_M^2} \lambda_{r_M} \frac{\partial T_M}{\partial r_M} +$$

$$+ \frac{K_{\lambda_r} K_T}{K_r dr/dr_M} \frac{\lambda_{r_M}}{r_M} \frac{\partial T_M}{\partial r_M} + \frac{K_{\lambda_\alpha} K_T \lambda_{\alpha_M}}{K_r^2 K_\alpha^2 r_M^2} \frac{\partial^2 T_M}{\partial \alpha_M^2} + \frac{K_{\lambda_r} K_T}{K_r^2} \times$$

$$\times \lambda_{z_M} \frac{\partial^2 T_M}{\partial z_M^2} = -K_\omega \omega_M + \frac{K_C K_T}{K_t} C_M \frac{\partial T_M}{\partial t_M}.$$

Далее определим условия подобия:

$$\begin{aligned} \frac{K_{\lambda_r} K_T}{(dr/dr_M)^2} &= \frac{K_{\lambda_r} K_T}{K_r dr/dr_M} - \frac{r_M K_{\lambda_r} K_T}{(dr/dr_M)^3} \frac{d^2 r}{dr_M^2} = \frac{K_{\lambda_\alpha} K_T}{K_r^2 K_\alpha^2} = \\ &= \frac{K_{\lambda_r} K_T}{K_z^2} = K_\omega = \frac{K_C K_T}{K_t}. \end{aligned}$$

Условие $K_{\lambda_\alpha} K_T / (K_r^2 K_\alpha^2) = K_{\lambda_r} K_T / K_z^2$ не может быть выполнено, так как $K_r = f_1(r)$, а все остальные коэффициенты в этом выражении приняты постоянными.

§ 6.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Некоторые виды подобия*. В процессе развития методов и средств познания моделирование, как научное понятие и как рабочая методология исследования, приобретает новые формы, что является следствием развития представлений об особенностях функционирования и закономерностях развития сложных систем различных категорий (технических, технико-экономических, человеко-машинных, социально-экономических и т. п.). При этом понятие подобия распространяется на различные явления, по обычным представлениям неподобные. Считают подобными явления, описание которых приводится не к одинаковому, а только в том или ином смысле эквивалентным уравнениям, причем эта эквивалентность может достигаться искусственно за счет нелинейно подобных преобразований параметров уравнений. Методы подобия при этом начинают применяться уже не только как средство, направляющее постановку эксперимента и облегчающее обработку его результатов, но и как средство, облегчающее решение уравнений.

К числу особых видов подобия, получивших в настоящее время наибольшее распространение, относятся квазиподобие, эквивалентное, функциональное, интегральное и кибернетическое подобие.

Квазиподобие. Обычно при установлении подобия рассматриваются такие процессы, которые характеризуются одинаковыми по

* Иногда авторы, рассматривающие и вводящие в научный обиход эти новые «особые» виды подобия, претендуют на совсем новую (в отличие от обычной, которую они называют «классической») теорию подобия, что неправильно, так как все виды подобия и моделирования должны базироваться на основах теории подобия и использовать критериальные зависимости. Сказанное отнюдь не означает, что теория подобия не должна совершенствоваться и развиваться. Напротив, такое развитие необходимо, но идти оно должно не за счет терминологических и «словотворческих» расширений.

Ниже дается краткая характеристика некоторых видов подобия, отличных от обычных, связанных с постоянством коэффициентов, масштабов подобия, и в этом смысле особых. Подчеркнем, что эта характеристика не является исчерпывающей.

форме дифференциальными уравнениями. Однако соответствие между оригиналом и моделью можно установить и в более сложных случаях, когда уравнения процессов в них различны. С этой целью осуществляются специальные функциональные преобразования масштабных соотношений между параметрами сопоставляемых процессов — вводятся переменные масштабы или нелинейные квазиподобные преобразования. Разумеется, выбор любого, в том числе и переменного, масштаба не изменяет фактический «материальный» процесс, однако его восприятие исследователем изменяется в необходимом направлении путем корректировки переменным масштабом: неподобные явления воспринимаются как подобные*.

Все теоремы о подобии справедливы и в этих более сложных случаях. Однако рассмотреть условия получения и использования соотношений квазиподобия лучше всего на конкретных примерах.

Пусть имеются три системы — две электрические (короткозамкнутые контуры $R_1 L_1 C_1$ и $L_2 C_2$ — рис. 6.10, а и б) и одна механическая (изогнутая нагруженная балка — рис. 6.10, в). Уравнения процессов в системах 1, 2 и 3 соответственно имеют вид:

$$\frac{d^2 Q_1}{dt_1^2} + T_1 \frac{dQ_1}{dt_1} + \frac{Q_1}{L_1 C_1} = 0;$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dt_2^2} + \frac{Q_2}{L_2 C_2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0.$$

Процессы, происходящие в системе 1, как это следует из схем и уравнений, нельзя подбором неизменных параметров сделать подобными процессам, происходящим в системах 2 и 3.

Подобие между системами 1 и 2, а также 1 и 3 можно установить, вводя постоянные и переменные масштабы.

Для перехода от системы 1 к системе 2 примем постоянный масштаб m_t для величины t и переменный масштаб m_Q для величины Q , полагая при этом $T/2 = \alpha$ и записывая выражение для m_t и m_Q следующим образом:

$$m_t = \sqrt{[1/(L_1 C_1) - \alpha_2] L_2^2 C_2^2} = t_2/t_1;$$

$$m_Q(t) = Q_2/Q_1 = m_Q e^{\alpha t}.$$

По результатам экспериментов с системой 1, перестроив далее полученную кривую $Q_1 = f(t_1)$ с помощью масштабов m_t и m_Q , можно получить зависимость $Q_2 = f(t_2)$, которая определяет поведение системы 2.

Для перехода от системы 1 к системе 3 также введем масштабы m_t и m_Q , учитывая при этом, что в системе 3 аналогом времени t_1 является изменение геометрической координаты x , а аналогом заряда Q_1 — прогиб балки y .

* Веников Г. В. Подобие при изменяющихся масштабах моделирующих систем. — Известия вузов. Электромеханика, 1980, № 4, с. 338—346.

Для определения выражений переменных масштабов введем преобразующие функции F_t и F_Q (вид которых пока неизвестен) такие, что

$$x = F_t t_1; y = F_Q Q_1.$$

Подставив записанные выше значения в уравнение, характеризующее систему 3, получим

$$\frac{d^2 (F_Q Q_1)}{d (t_1 F_t)^2} + \frac{P}{E I} F_Q Q_1 = 0.$$

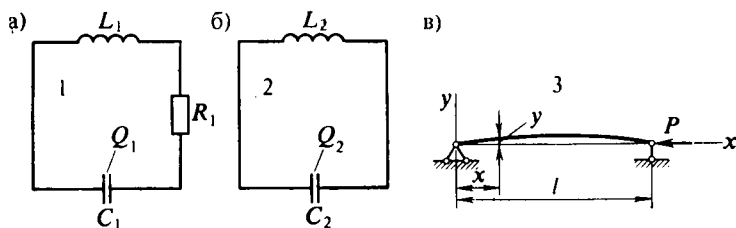


Рис. 6.10

Примем для времени постоянный масштаб, т. е. $F_t = \text{const} = m_t = t_2/t_1$. В этом случае

$$\frac{d^2 (F_Q Q_1)}{m_t^2 dt_1^2} + K F_Q Q_1 = 0, \text{ где } K = P/(EI).$$

Далее после элементарных преобразований получим

$$\frac{d^2 Q_1}{dt_1^2} + \frac{2dF_Q}{F_Q dt_1} \frac{dQ_1}{dt_1} + \left(\frac{d^2 F_Q}{F_Q dt_1^2} + m_t^2 K \right) Q_1 = 0.$$

Чтобы последнее уравнение стало почленно равно уравнению, характеризующему систему 1, необходимо иметь соотношения:

$$\frac{2dF_Q}{dt_1 F_Q} = T; \quad \frac{d^2 F_Q}{dt_1^2 F_Q} + m_t^2 K = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Из первого соотношения находится вид преобразующей функции F_Q (переменного масштаба):

$$F_Q = m_Q e^{\alpha t_1},$$

где $m_Q = \left. \frac{dQ_1}{y_1} \right|_{t=0}$ — постоянная величина, зависящая от начальных условий $\alpha = T/2$.

Из второго соотношения, соблюдение которого является следствием имеющегося подобия, можно найти критерий подобия $\pi = \frac{m_t^2 K}{1/(L_1 C_1) - T^2/4} = \text{idem}$, позволяющий установить, что масштаб времени

$$m_t = \sqrt{\left(\frac{1}{L_1 C_1} - \alpha^2\right) \frac{EI}{P}} = \text{const.}$$

Особенностью критерия π является наличие коэффициента преобразования, устанавливающего зависимость между временем t в одном уравнении и смещением y в другом. В связи с введением нелинейного преобразования физически разнородных уравнений (относящихся к явлениям разной физической природы) в критерий подобия вошли величины обоих сопоставляемых уравнений.

Можно заметить, что реализация подобия в ряде случаев возможна при уравнениях вида

$$d^n \varphi / dx^n + \psi_1(x) = 0; \quad d^n \varphi / dx^n + \psi_2(x) = 0,$$

где ψ_1 и ψ_2 — различные функции x . Введение масштабного соотношения вида $m_\psi(x) = \psi_1(x)/\psi_2(x)$ обеспечивает взаимосвязь процессов.

Примером квазиподобных преобразований может служить также переход от изображения на шаре к изображению на плоскости, т. е. преобразование глобуса в карту. Представление об этой процедуре можно получить, положив глобус южным полюсом на плоскость (рис. 6.11). Затем через северный полюс и каждую точку южного полушария следует провести прямые линии. Контуры островов, морей, рек, изображенные на глобусе, будут спроецированы в контуры островов, морей и рек на плоскости. Нетрудно убедиться, что при этом виде подобия, называемом в геодезии стереографической проекцией, сохраняются равными углы (но не длины!) между кривыми на поверхности земного шара и соответствующими кривыми на карте. В сущности та же самая идея используется при установлении подобия различного вида физических полей с помощью к о н ф о р м н о г о п р е о б р а з о в а н и я: трудности, которые возникают при экспериментальном исследовании объемного поля, можно устранить, заменив объемное поле плоскопараллельным и установив взаимное соответствие значений конформно отображенных полей, как это было сделано при преобразовании глобуса в карту.

В соответствии с высказанными соображениями квазиподобие можно определить как *наличие взаимного соответствия между уравнениями объекта и некоторыми уравнениями, имеющими среди решений такие, которые можно интерпретировать (после тех или иных преобразований) как уравнения объекта.*

На основе квазианалогового подобия строятся устройства, называемые квазианалоговыми моделями, необходимость в построении которых возникает тогда, когда не могут быть построены устройства прямой аналогии. Разновидность квазианалогового подобия применяется как средство, облегчающее математическое решение дифференциальных уравнений.

Вопрос о точности квазиподобия, как подобия, не возникает, так как преобразования, приводящие уравнения одного явления к другому, являются алгебраическими, и в этом смысле абсолютно точными, преобразованиями. Вопрос о точности построения модели по преобра-

зованным уравнениям должен рассматриваться аналогично тому, как это делалось ранее (см. § 6.1 и др.).

Эквивалентное подобие. В последнее время часто пользуются понятием эквивалентного подобия, при котором решения различных уравнений при определенных преобразованиях, например выборе нелинейных масштабов для параметров процесса, выражаются одинаковыми функциями. Здесь, таким образом, сочетаются нелинейное подобие и квазиподобие. Результаты переработки информации о процессах также в каком-то определенном смысле могут быть одинаковыми.

Таким образом, по существу разницы между этими видами подобия нет и их градация, как отдельных видов, больше обусловлена историческими причинами. Рядом таких преобразований стали пользоваться очень широко, выявляя эквивалентность сравнением результатов переработки исходной информации. В частности, вводится понятие *подобия алгоритмов*, устанавливаемого на основе сопоставления выраженных в относительной безразмерной форме решений, которые получаются по этим алгоритмам. Если решения, полученные по сравниваемым алгоритмам, отличаются на некоторую величину, несущественную в данной задаче, то подобие можно считать приближенным эквивалентным.

Разновидностью эквивалентного подобия являются результаты преобразования уравнений одного вида к другому — «подобному» в указанном выше смысле. Допустим, что исследованию подлежит процесс, описываемый не имеющим в явной форме решения параметрическим уравнением*

$$d^2 x/d\tau^2 + b(\tau) dx/d\tau + a(\tau) x = 0. \quad (6.11)$$

В соответствии со вторым дополнительным положением о подобии введением переменного масштаба для перехода от τ к y можно превратить это уравнение в модель, которой будет интегрирующееся линейное уравнение

$$d^2 x/dy^2 + B dx/dy + Ax = 0. \quad (6.12)$$

* Подробнее см.: Лукашевич Д. И., Табакс К. К. Преобразование обыкновенных дифференциальных уравнений методом подобия. В кн.: Вопросы динамики и прочности, т. XII, Рига, 1966, с. 24—30.

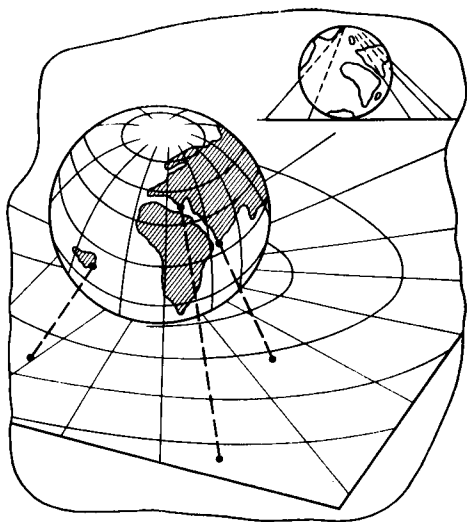


Рис. 6.11

Если $\tau f_\tau = y$, то $y = \psi(\tau)$, а также

$$dy = \psi(\tau) d\tau \text{ или } d\tau = (1/\psi) dy. \quad (6.13)$$

Переход от (6.11) к (6.12) выполняется, если определена функция $\psi(\tau)$ и заданы ограничения на выбор коэффициентов A и B . Подходя к осуществлению этого перехода как к преобразованию подобия, необходимо провести несколько последовательных операций, обеспечивающих: введение нелинейного масштаба независимой переменной; формирование упрощенного уравнения системы-модели введением масштабов моделирования, выраженных через его коэффициенты; нахождение эквивалентного решения и далее через известные масштабы распространение его на оригинал.

Рассмотрим эти операции.

Введем некоторые дополнительные соотношения с учетом (6.13):

$$\frac{dx}{d\tau} = \dot{\psi} \frac{dx}{dy}; \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\dot{\psi} \frac{dx}{dy} \right) = \dot{\psi}^2 \frac{d^2 x}{dy^2} + \ddot{\psi} \frac{dx}{dy}.$$

После соответствующей подстановки в (6.11) получим

$$\frac{d^2 x}{dy^2} + \frac{\ddot{\psi} + b(\tau) \dot{\psi}}{\dot{\psi}^2} \frac{dx}{dy} + \frac{a(\tau)}{\dot{\psi}^2} x = 0. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.14) будет описывать процессы в модели, т. е. будет относиться к классу уравнений (6.11), если только будут выполнены условия $a(\tau)/\dot{\psi}^2 = A$; $[\dot{\psi} + b(\tau)\psi]/\dot{\psi}^2 = B$ и, следовательно, $\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{A(\tau)} d\tau + C$. Это означает, что введение нелинейного масштаба независимой переменной позволяет перейти к упрощенной модели, уравнение которой имеет интеграл, определенный в явном виде. При этом

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{a(\tau)}; \quad \ddot{\psi} = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{a(\tau)}{2 \sqrt{a(\tau)}}; \\ \sqrt{A} \left[\frac{\dot{Q}(\tau)}{2 \sqrt{a^3(\tau)}} + \frac{b(\tau)}{\sqrt{a(\tau)}} \right] &= B. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Таким образом, (6.12) можно рассматривать как модель (6.11), если введение нелинейного масштаба приводит к уравнению связи

$$y = \psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{A(\tau)} d\tau + C.$$

Переменные коэффициенты A и B должны подчиняться соотношению (6.15). Далее можно найти эквивалентное решение $x(\tau)$, определив значение x :

$$x = C_1 e^y + C_2 e^{2y}. \quad (6.16)$$

В качестве примера рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{2}{\tau} \frac{dx}{d\tau} + \frac{2}{\tau^2} x = 0. \quad (6.17)$$

При $y = \psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{\frac{2}{\tau^2}} d\tau = \sqrt{\frac{1}{A}} \ln \tau$ и соотношении коэффициентов $B/\sqrt{A} = -3/\sqrt{2}$, полученном на основании (6.15), можно получить эквивалентное подобное уравнение

$$d^2 x/dy^2 - 3dx/dy + 2x = 0. \quad (6.18)$$

Решение (6.18) имеет вид уравнения (6.16). Принимая во внимание, что

$$y = \sqrt{1/A} \ln \tau = \sqrt{2/2} \ln \tau, \tau = e^y,$$

получим общее решение для (6.17)

$$x = C_1 \tau + C_2 \tau^2. \quad (6.19)$$

Приведенный пример показывает, что эквивалентное подобие, осуществляемое введением нелинейного масштаба преобразования независимой переменной и наложения ограничений на коэффициенты в модели, в ряде случаев может быть выполнено относительно легко и использовано как при создании линейных моделей нелинейных процессов, так и при получении аналитическим путем «подобных решений» нелинейных уравнений. Вопрос о точности эквивалентного подобия рассматривается, так же как и вопрос о точности квазиподобия, поскольку эти виды подобия близки.

Размытое подобие. Общеизвестно, что мышлению человека присуща определенная нечеткость. В научный обиход и в математические интерпретации понятие нечеткости (размытости, пушистости, расплывчатости или туманности — различные переводы английского слова *fuzzy*) было введено Л. А. Заде*. Он рассматривал теорию нечетких множеств как аппарат для анализа и моделирования *эргатических систем*, т. е. систем, в функционировании и анализе которых участвует человек. В соответствии с особенностями мышления человека в этой теории операции проводятся не с числами, а с элементами некоторых групп показателей — *нечеткими множествами*, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. Задать нечеткое множество — это значит установить для каждого элемента универсального множества степень принадлежности его нечеткому множеству. Другими словами, более привычными для математика, нечеткое множество характеризуется функцией, ставящей в соответствие каждому элементу универсального множества степень его принадлежности нечеткому множеству.

Как же соотносятся традиционное понятие множества и понятие нечеткого множества? Легко видеть, что обычные множества — частный случай нечетких, в котором функция принадлежности принимает скачкообразно только два значения — нуль или единицу: единица — если элемент входит в множество, нуль — если не входит. Иллюстрацией высказанного положения является рис. 6.12, где прямо-

* Беллман Р. Е., Заде Л. А. Принятие решений в расплывчатых условиях. — В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.: Мир, 1976, с. 172—215.

угольник и круг (левый рисунок) олицетворяют собой универсальное множество и еще одно, включенное в него некоторое множество A . Темная луночка (в середине) — пересечение множеств A и B , представленных кругами. Фигура, похожая на поваленную набок восьмерку (справа), изображает объединение тех же множеств: это множество всех тех элементов, каждый из которых входит хотя бы в одно из множеств A и B . На рисунках приведены традиционные обозначения для пересечения и объединения множеств.

Чтобы определить нечеткое множество, надо прежде всего задать совокупность всех тех элементов, для которых имеет смысл определять меру принадлежности рассматриваемому нечеткому множеству.

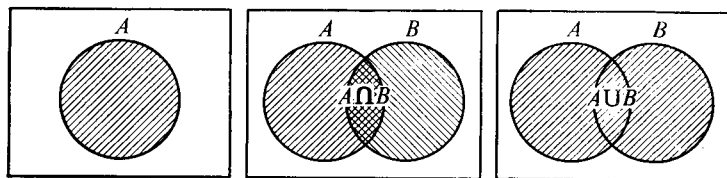


Рис. 6.12

Нечеткое множество естественно изображать с помощью круга с размытыми краями, как это показано на рис. 6.13 (слева). Таким приемом можно изобразить пересечение нечетких множеств (справа).

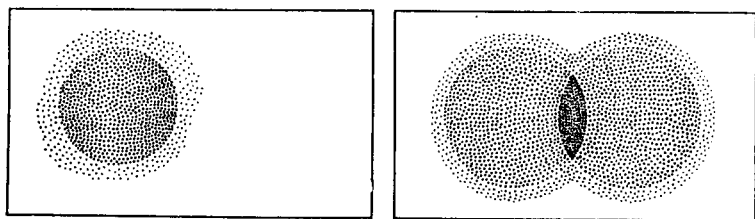


Рис. 6.13

В качестве еще одного примера можно привести нечеткий аналог теоремы о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 6.14).

«Пусть AB , BC и CA — примерно прямые линии, которые образуют примерно треугольник с вершинами A , B , C . Пусть M_1 , M_2 , M_3 — примерно середины сторон BC , CA и AB соответственно. Тогда примерно прямые линии AM_1 , BM_2 и CM_3 образуют примерно треугольник $T_1T_2T_3$, который более или менее мал относительно треугольника ABC ». Эта формулировка становится разумной только после того, как будет точно определен смысл слов «примерно» и «более или менее мал». Вот как, скажем, можно уточнить понятие «примерно отрезок AB »; под ним будет понимать любую кривую, проходящую через

точки A и B , такую, что расстояние (в обычном смысле) от любой точки кривой до отрезка AB мало по отношению к длине AB . Осталось выяснить, что значит «мало». Ответ может представляться нечетким множеством с функцией принадлежности.

Установив, что объекты (процесс или даже явление, содержащее гамму процессов), могут, с учетом эргатического подхода, характеризоваться размытыми областями, можно в первом приближении представить подобие при размытых параметрах, как подобие (в простейшем представлении — геометрическое) этих областей. Так можно установить подобие и качественно различных явлений или объектов. Для количественных характеристик можно ввести размеры расплывчатых областей (диаметры, расстояния характерных точек от центра и т. д.). Однако теория расплывчатых множеств дает возможность обеспечить и более объективный учет комплексного влияния трудно соизмеримых друг с другом количественных и качественных факторов. Для этого отдельные учитываемые параметры могут быть выражены в относительных единицах и для каждого параметра рассчитаны функции принадлежности. В качестве базисных величин при этом могут быть приняты допустимые или максимальные значения данного параметра по всем сравниваемым вариантам:

$$Y_{i\bar{b}} = Y_{i\text{доп}} = Y_{i\text{max}}.$$

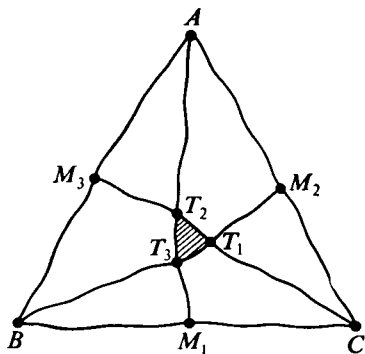


Рис. 6.14

В этих условиях все исследуемые параметры могут изменяться от 0 до 1. Относительные единицы должны быть приняты с учетом того, чтобы для всех параметров единице (нулю) соответствовало лучшее (или худшее) значение параметра.

При необходимости отдельные параметры могут выражаться детерминированными или вероятностными величинами, а также ранговыми оценками.

В расчетах обычно принимаются известные параметры, например для оптимизационных расчетов — приведенные затраты, качество напряжения по узлам электрической сети, среднеинтегральные значения качества напряжения, перспективность сети с точки зрения резерва загрузки отдельных ее элементов по устойчивости или по допустимой температуре и др. В качестве функции принадлежности могут быть приняты разные математические выражения, обеспечивающие изменение ее от 0 до 1.

Однако необходимо при этом принимать такие математические выражения, которые содержат минимальное число коэффициентов. В качестве функции принадлежности может быть принято выражение

$$\mu_{ij} = \{1 + a_i (Y_{ij}/Y_{j\text{доп}})^{m_i}\}^{-1}, \quad (6.20)$$

где i — номер параметра; j — номер варианта (альтернативы); a и m — коэффициенты; Y_{ij} — рассматриваемый параметр; $Y_{j\text{доп}}$ — допустимое или максимальное значение данного параметра.

Функция принадлежности должна иметь нелинейный характер, так как незначительные отклонения параметра от оптимальных значений не должны в большой мере влиять на результат принятия решения. Наоборот, значительные отклонения параметра от оптимального, или допустимого значения свидетельствуют о том, что вариант находится на грани возможного использования. Это положение должно учитываться функцией принадлежности.

В ряде случаев для отдельных параметров характер функции принадлежности может быть известен. Например, при расчетах режимов энергосистем ущерб Δ от некачественности напряжения пропорцио-

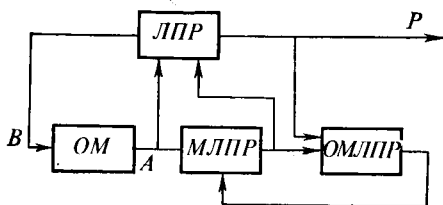


Рис. 6.15

нален отклонению напряжения во второй степени, что может быть учтено соответствующим подбором коэффициентов a и m . Если характер изменения функции принадлежности неизвестен, то указанные коэффициенты могут быть подобраны путем экспертных оценок или по ретроспективной информации о результатах.

В качестве входной информации используется матрица учитываемых параметров. По горизонтали этой матрицы располагаются номера вариантов, а по вертикали — учитываемые параметры. Значения элементов матрицы определяются согласно (6.20). Расчет заканчивается определением относительных значений функций принадлежности

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij} / \mu_{j\text{max}}$$

и среднего относительного значения функций принадлежности для каждого варианта:

$$\bar{\sigma}_j = \left(\sum_{i=1}^l k_i \sigma_{ij} \right) / l, \quad (6.21)$$

где l — число критериев; k_i — весовой коэффициент.

Весовой коэффициент выбирается по ретроспективной информации и не должен значительно отличаться от единицы. В процессе обучения он может меняться. На рис. 6.15 показаны отношения лица, принимающего решения (ЛПР), модели лица, принимающего решения (МЛПР) и обучаемого лица или блока, подлежащего обучению (ОМЛПР), где обозначено: A — альтернативы, B — входная информация, P — результат.

Изложенный подход к расчету практически соответствовал определению функции принадлежности в «мягком» смысле, когда признаком оптимальности варианта является максимум среднего значения

относительной функции принадлежности. Такой расчет был произведен* для анализа перспективного развития электрической сети. Программой было охвачено несколько десятков критериев и сравниваемых вариантов. Время расчета на ЭВМ ЕС-1033 по выбору оптимального варианта при 10 критериях и 10 вариантах для схем электрической сети, содержащих до 150 узлов и 300 ветвей, не превышало 30 с.

Практическое применение предложенного метода показало, что рекомендованные МЛПР оптимальные варианты перспективного развития электрических сетей совпадали с вариантами, предлагаемыми проектировщиками.

В сущности на методике расплывчатых множеств основывается и установление подобия объектов по группам. Выделение таких групп может проводиться по различным признакам, например:

1) из множества объектов составляются группы, внутри которых находится ряд признаков с такой корреляцией, которая несравненно сильнее, чем между группами;

2) объекты, несхожие, но равноотстоящие от некоторого уровня отсчета (в частном случае друг от друга), объединяются в группы;

3) объекты объединяются по признаку наиболее близких коэффициентов ассоциации у каких-либо параметров этих объектов. Идентификация группируемых объектов выделяет при этом некоторые общи е ч е р т ы, наличие которых и определяет условное подобие.

При объединении в группы большого числа объектов n могут возникнуть затруднения в непосредственном сравнении (оценке) каждого из них друг с другом или с каким-либо эталоном. Можно сократить число оценок, применяя иерархические схемы последовательно с определенной стратегией и производя группировки, основанные на измерении сходства между эталонным образцом, близостью цели или состояния.

Трем указанным случаям можно указать три соответственных пути:

1. Пусть основной характеристикой является степень статистической зависимости между объектами множества. Разбиение множества должно быть проведено так, чтобы объекты внутри групп были коррелированы сильно, а между группами — слабо. Корреляционная матрица исходного множества может при этом составляться исходя из выражения

$$\rho_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\left[\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 \right]^{1/2}}, \quad (6.22)$$

где ρ_{jk} — коэффициент корреляции между объектами j и k ; x_{ij} , x_{ik} — i -е наблюдение над объектами j и k соответственно; $\bar{x}_j$, $\bar{x}_k$ — оценки средней выборки для объектов j и k ; n — число наблюдений.

* Кузьмин Я. Ф., Лунс Ю. А., Армус А. Э. Применение теории расплывчатых множеств при решении задач перспективного развития электрических систем. — Известия АН Латв. ССР, 1981, № 4, с. 111—114.

2. Группировку можно провести, основываясь на геометрическом расстоянии между объектами. Если представить в многомерном пространстве n показателей P_j , $j = 1, \dots, n$, то соответствующие точки будут иметь координаты $(x_{j1}, \dots, x_{jv})$. Расстояния между точками j и k

$$d_{jk} = \left(\sum_{i=1}^v x_{ij}^2 + \sum_{i=k}^v x_{ik}^2 - 2 \sum_{i=1}^v x_{ij} x_{ik} \right)^{1/2} \quad (6.23)$$

будет своего рода критерием подобия. Значение d_{jk} желательно нормировать, для чего значение каждого наблюдения следует разделить на среднеквадратичную ошибку или кубический корень третьего выборочного момента.

Пусть исходные данные приведены в виде матрицы порядка $(n \times v)$, j -й строкой которой является вектор $P_j = (x_{j1}, \dots, x_{jv})$. Вектор P_j представляет собой вектор наблюдения над j -м объектом. Тогда разбиение объектов на группы превращается в разбиение матрицы x на вектор-строки. Представим исходное множество как выборку из неизвестной генеральной совокупности. Построим систему координат так, чтобы центром выборки являлся нуль-вектор. Тогда общая матрица рассеивания n точек

$$S = x' x = \sum_{j=1}^n P_j' P_j,$$

где штрихом обозначена операция транспонирования.

Теперь пусть исходное множество каким-то образом разбито на m групп с $n_1, \dots, n_m$ объектами в соответствующих группах:

$$n = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Тогда вектор-строки P_{lk} , $l = 1, \dots, n_k$ будут представлять объекты в группе Γ_k . Матрица рассеивания внутри каждой группы Γ_k :

$$W_k = \sum_{l=1}^{n_k} (P_{lk} - C_k)' (P_{lk} - C_k),$$

где C_k — вектор центра группы Γ_k .

Общая внутригрупповая и междугрупповая матрицы рассеивания

$$W = \sum_{k=1}^m W_k; B = \sum_{k=1}^m n_k C_k' C_k.$$

Следовательно, для каждого разбиения n объектов на m групп матрица

$$S = W + B. \quad (6.24)$$

Так как матрица рассеивания исходных данных не изменяется, то для создания изолированных групп необходимо минимизировать W в выражении (6.24), что эквивалентно максимизации B .

Коэффициент корреляции и расстояния между объектами очень близки. Однако следует иметь в виду, что максимальному расстоянию

соответствует минимальное значение коэффициента корреляций, и наоборот.

3. Применение так называемого коэффициента ассоциации также позволяет создать условно-подобные группы. Пусть, например, требуется создать такие группы для выявления связи между асинхронным режимом генераторов в системе и повреждениями их изоляции. Произведем выборку, например, для $n = 500$ генераторов из различных энергосистем с определенным сроком эксплуатации и режимом нормальной работы. Разделим выборку по условиям режима на две группы — на генераторы n_i , имевшие асинхронный режим, и генераторы n_y , не имевшие его. На основании исследования состояний изоляции генераторов разделим выборку снова на две группы: на генераторы с нарушенной изоляцией n_j и с нормальной изоляцией n_0 . Для каждой выборки введем обозначения в индексах величины n : n_{ij} — количество генераторов, имевших асинхронный режим и нарушенную изоляцию; n_{i0} — количество генераторов, не получивших повреждений изоляции при асинхронном режиме; n_{y0} — количество генераторов с нормальной изоляцией, не имевших асинхронного режима; n_{yj} — количество генераторов с нарушенной изоляцией, не имевших асинхронного режима.

По найденным показателям можно определить коэффициенты ассоциации, которые выражаются, вообще говоря, различно. Приведем три варианта таких коэффициентов, предложенных без учета теории размытых множеств, но вообще говоря, вытекающих из нее.

1. Коэффициент Сокала и Миченера

$$S = m / (m + U) = m / n, \quad 0 \leq S \leq 1,$$

где $m = n_{i0} + n_{y0}$; $U = n_{ij} + n_{yj}$.

2. Коэффициент Джаккарда

$$S = n_{ij} / (n_{ij} + U), \quad 0 \leq S \leq 1.$$

3. Коэффициент Кульсинского

$$S = n_{ij} / (n - 2n_{ij}), \quad 0 \leq S \leq 1.$$

Близкие значения коэффициентов будут служить основанием для формирования групп.

Группы, полученные описанным способом и отвечающие «одинаковым» признакам, можно считать условно-подобными. При этом группирование основывается на принятии подходящего критерия и составления матрицы попарного подобия (под матрицей будем понимать любую из матриц корреляций, расстояний или ассоциаций). Критерий группирования выбирается, исходя из требований решаемой задачи, и представляет собой функцию одного из вышеприведенных коэффициентов. Например, критерием может явиться функция двух аргументов:

$$B = B(\rho, \rho'),$$

где ρ — средний коэффициент корреляции между объектами предполагаемой группы; ρ' — средний коэффициент корреляции между объектами данной группы и всеми объектами других групп.

Другим критерием может быть выражение (6.22).

Многие методы группирования основываются на предварительном разбиении исходного множества на всевозможные группы с последующим выбором того разбиения, для которого критерий группирования принимает свое оптимальное значение. Количества всевозможных разбиений n объектов на m групп можно вычислить по рекуррентной формуле

$$P(n, m) = \left[m^n - \sum_{i=1}^{m-1} P(n, i) m_{m-i} \right] / m!,$$

где $P(n, i)$ — количество различных разбиений n объектов на i групп; $m_{m-i} = m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)$, $m \geq 2$, $n \geq m$.

Например, при $n = 19$ и $m = 3$; 7; 12 получим соответственно: $P(19, 3) = 193 \cdot 10^6$; $P(19, 7) = 149 \cdot 10^{10}$; $P(19, 12) = 234 \cdot 10^8$.

Из приведенных примеров видно, что даже при сравнительно небольших значениях n количество вычислений получается огромным и становится непосильным даже для ЦВМ.

Для уменьшения количества вычислений можно на основе практических соображений ограничить границы поиска, отбрасывая заведомо «плохие» разбиения. Но для этого необходимо наличие достаточной априорной информации об исходных данных.

В рассмотренной выше постановке задачи о подобии, определенном, исходя из теории размытых множеств, мы ориентировались на достоверность, определяемую, исходя из смыслового аспекта и качественного анализа. Возможен и количественный подход. Так, любые факторы x , влияющие на изменение какой-либо функции $\varphi(t)$ от некоторого принятого за заданное значения $\varphi_0(t)$, можно разделить на две группы — увеличивающие функцию $\varphi(t) - 1$ и уменьшающие ее — 2. Приращение $\Delta\varphi(t)$, характеризующее расплывчатое состояние, будет определяться как

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t, x_1) - \varphi_2(t, x_2).$$

Подобие можно количественно определить, как соотношение между $\Delta\varphi(t)$ для оригинала и модели. Можно характеризовать степень подобия относительным значением функции принадлежности, согласно (6.21) или (6.22), (6.23). Было показано*, что все теоремы и дополнительные положения, полученные для детерминированного подобия, справедливы и для размытого подобия, разумеется с учетом имеющихся здесь особенностей.

Точность и достоверность размытого подобия определяются величиной областей размытости и принадлежностью к ним рабочих (характерных) для исследуемого процесса точек. Это определение в основном проводится эргатически (визуально, эмпирически).

Интегральное подобие. Интегральное подобие было предложено для исследований нелинейных систем и систем с переменными параметрами. Здесь для установления подобия существенны не соотношения

* Веников В. А., Оруджев Ф. М. Размытое подобие, Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1983, № 2, с. 26—33.

между текущими (мгновенными) значениями параметров изучаемых процессов, т. е. не соотношения между отдельными величинами («точками»), характеризующими процесс, а соотношения между их функциями («областями») или функционалами. Под *функционалом* понимается числовая функция, определенная на некотором пространстве. Это переменная величина, зависящая от функции (линии) или нескольких функций. Примером функционала может быть площадь, ограниченная замкнутой кривой заданной длины, или работа силового поля вдоль того или иного пути и т. д. В качестве математического аппарата интегрального подобия применяется функциональный анализ, для которого характерны рассмотрение явлений на бесконечно малых пространствах, представленных, например, функциями последовательностей, и проведение операций над элементами таких пространств. Эти пространства, или области, при интегральном подобии можно искусственно сконструировать, исходя из параметров рассматриваемой системы и происходящих в ней процессов. Как области их нужно определять по интегральным показателям, полученным на основе характеристик систем. Понятие функции области при описании физических явлений является более гибким, чем обычное понятие функции точки. (При экспериментах, в сущности, никогда не наблюдается функций точек, а всегда среднее от этих функций в некоторой малой области). Все это делает метод интегрального подобия весьма перспективным. Однако пока практическая неразработанность затрудняет его применение. Очень грубо можно пояснить идею метода на примере сопоставления электродинамических систем не по токам и полям, а по выделяющейся теплоте в одной системе и другой. Здесь подобие устанавливается на основе простейших интегральных ($\int i^2 K dt$) показателей. Выделяющаяся теплота является как бы некоторой новой координатой сопоставляемых систем, которые могут быть неподобными в смысле соотношения между токами, полями и т. д. Пример этот, конечно, только подводит к идее интегрального подобия, так как оно несравненно глубже и сложнее по математическому аппарату.

Интегральное подобие означает введение новых координат, или новых переменных, для рассмотрения явлений. Именно в этих новых координатах полученные интегральные функции оказываются подобными. Теория подобия при интегральном подобии также применяется, но она требует не пропорциональности параметров режима, а соотношения между функционалами (областями). На основе подобия интегральных функций могут не только устанавливаться общие свойства интегрально подобных систем, но и уточняться некоторые свойства конкретных систем с выявлением соотношений между обычными («точечными») параметрами. Важно, что эти методы применимы и к системам, обладающим нелинейностью, для которых установление подобия представляет определенные трудности.

Критерии подобия могут быть получены двумя способами: а) анализом размерностей для процесса, рассматриваемого «в малом», т. е. на участке весьма малых изменений искомых величин, характеризующихся дифференциалами, с последующим интегрированием критериев «в малом» и переходом, таким образом, к интегральным критериям—

к критериям «в целом»; б) анализом дифференциальных уравнений рассматриваемого явления и такого преобразования этих уравнений, в результате которого удастся получить интегральные критерии подобия.

Анализ размерностей. При определении критериев этим способом π -теорема применяется к явлениям «в малом», что не требует каких-либо специальных доказательств. Очевидно, что для любых линейных систем все положения π -теоремы остаются в силе независимо от диапазона рассмотрения явлений «в малом» или «в целом».

Все нелинейные задачи при переходе к рассмотрению явлений «в малом» становятся линейными, и вопрос об учете нелинейности параметров системы снимается. Запишем

$$\pi = \frac{\{P_m\}}{\{P_1\}^{z_1} \dots \{P_k\}^{z_k}} = \{P_m\} \{P_1\}^{-z_1} \dots \{P_k\}^{-z_k}.$$

Представим переменную величину как dx , например, $\{P_n\} = \{dx\}$, где $k > n > 1$. Перепишем выражение для критерия в виде

$$\pi = \{P_m\} \{dx\}^\alpha \{\varphi\}^\beta = \text{idem},$$

где φ — произведение всех значений от P_1 до P_k , исключая P_n .

Введем «в малом» новую переменную dX так, чтобы

$$\{dX\}^\alpha = \{dx\}^\alpha \{P_m\} \{\varphi\}^\beta, \quad \{dX\} = \{\psi\} dx,$$

где $\psi = \{P_m\}^{1/\alpha} \{\varphi\}^{\beta/\alpha}$, тогда «в целом» система имеет вид

$$\{X\} = \int \{\psi\}, \{dx\}.$$

Переходя от размерностей к величинам, получаем интегральный критерий подобия в виде

$$\pi_n = X = \text{idem}.$$

Пример 6.1. Рассмотрим электромагнитное поле, описанное системой уравнений Максвелла в скалярном виде:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi\gamma}{c} E_x + \frac{\partial (\epsilon E_x)}{\partial z}; \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial (\mu H_x)}{\partial z}; \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon E_z) = \rho; \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu H_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_z) = 0. \quad (6.28)$$

В описании поля участвует семь параметров процесса: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \rho$ и четыре независимые переменные: $x_r = x, y, z, t$ при трех коэффициентах μ, ϵ, γ , характеризующих среду. При этом E_x, H_x — составляющие напряженностей электрического и магнитного полей; ρ — плотность пространственного заряда; ϵ — диэлектрический коэффициент; γ — проводимость; μ — магнитная проницаемость.

Если рассматриваемую систему подчинить условиям пропорциональных преобразований «в малом»:

$$\mu_i = C_{\mu j}, \text{ где } C = \text{const},$$

то обычное понятие размерности заменится понятием размерности «в малом». Тогда, как обычно, получаем ряд уравнений размерности всех членов уравнений (6.25), (6.27):

$$\begin{aligned} [H(dx^{-1})] &= [\gamma E_x] = [E_x t^{-1} \varepsilon]; [E_x(dx)^{-1}] = [\mu H_x dt^{-1}]; \\ [\varepsilon E_x(dx^{-1})] &= [\rho] \end{aligned} \quad (6.29)$$

и далее после преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \pi'_1 &= \gamma \varepsilon^{-1} dt = \text{idem}; \quad \pi'_{\Phi 1} = \gamma \mu \varepsilon^{-1} H_x E_x^{-1} dx = \text{idem}; \\ \pi'_x &= (\mu^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \gamma dx)^2 = \text{idem}; \quad \pi'_{\Phi 2} = \rho \varepsilon^{-1} E_x^{-1} dx = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Все величины, характеризующие эту систему ($dx, \dots, dt, H_x, \dots, E_x, \dots, \mu; \varepsilon; \gamma$), рассматриваются «в малом», когда с точностью до бесконечно малых высшего порядка нелинейные функции заменяются линейными, а все переменные коэффициенты исключаются. Поэтому нет препятствий к тому, чтобы подчинить критерии подобия «в малом» условиям их тождественных преобразований:

$$\pi_i = a'_k \pi_j, \quad a'_k \equiv 1,$$

что и соответствует тождественному преобразованию новых обобщенных характеристик X :

$$dX_{ik} = a_k dX_{jk} = \text{idem}, \quad \text{где } a_k \equiv 1.$$

Условия равенства критериев π' подобия «в малом» для исследуемых полей не дают возможности судить о подобии «в целом». Необходимо перейти к какой-то новой системе переменных «в целом», которая включала бы в себя только независимые переменные и функции от них, т. е. сохраняла бы все достоинства системы характеристик «в малом». Переход к такой новой системе, содержащей как независимые переменные, так и параметры процесса, можно осуществить интегрированием критериев π' подобия «в малом», т. е. интегрированием (6.30).

Искомými критериями интегрального подобия электромагнитных полей, или *интегральными критериями подобия*, будут выражения:

$$\begin{aligned} \pi_{it} &= \int_t \gamma \varepsilon^{-1} dt = \text{idem}; \\ \pi_{itl} &= \left[\int_l (\mu \varepsilon^{-1})^{1/2} \gamma dl \right]^2 = \text{idem}; \\ \pi_{i\Phi 1} &= \int_l \gamma \mu \varepsilon^{-1} H_l E_l^{-1} dl = \text{idem}; \\ \pi_{i\Phi 2} &= \int_l \rho \varepsilon^{-1} E_l^{-1} dl = \text{idem}. \end{aligned}$$

А н а л и з д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й. Возможности получения критериев в данном случае могут быть различными, но в основном порядок определения сводится к следующему: приводим уравнение к безразмерному виду, деля все члены дифференциального уравнения на один из его членов. При этом, однако, пользуясь способом интегральных аналогов, оставляем в каждом члене один дифференциал, а остальные заменяем конечными разностями. Например,

$$u = iR + L(di/dt), \quad \text{где } L(i) = L = f(i). \quad (6.31)$$

После приведения к безразмерному виду имеем «дифференциальные» (π') критерии «в малом»:

$$\pi'_1 = \frac{1}{R\Delta t} \frac{Ldi}{Ldi}; \quad \pi'_2 = \frac{1}{u\Delta t} Ldi.$$

Интегральные критерии получим после интегрирования «дифференциальных критериев»:

$$\pi_{1\text{и}} = \frac{1}{R\Delta t} \int_t \frac{L di}{i} = \text{idem}; \pi_{2\text{и}} = \frac{1}{u\Delta t} \int_i L di = \text{idem}.$$

Решение уравнения $t = \varphi(u, R, L, i)$ имеет вид

$$t/t_0 = \psi(\pi_{1\text{и}}, \pi_{2\text{и}}).$$

Полученные интегральные критерии могут быть применены и для моделирования исследуемого процесса с учетом, однако, той особенности, что эти критерии действуют только на интервале времени Δt .

Для рассматриваемого процесса (6.31) критерии подобия в малом имеют вид:

$$b_1 = \frac{L(di)}{iR(dt)} = \text{idem}; b_2 = \frac{L(di)}{u(dt)} = \text{idem}.$$

Когда параметр L становится линейным, эти критерии подобия подчиняются условию тождественных преобразований:

$$b_{1\text{м}}/b_{10} = C = \text{idem}; b_{2\text{м}}/b_{20} = C = \text{idem}; C \equiv 1, \quad (6.32)$$

т. е. «в малом» выполняется равенство критериев подобия модели и оригинала.

Таким образом, если исходную систему размерностей параметров $[i]$, $[R]$, $[t]$, $[u]$, $[L]$, для которой не выполняется условие тождественных преобразований инвариантов подобия модели и оригинала, содержащих нелинейный параметр, например

$$\left(\frac{Li}{ut}\right)_{\text{м}} \left/\left(\frac{Li}{ut}\right)_0 \neq 1 \neq \text{idem},\right.$$

преобразовать «в малом», т. е. ввести новую переменную $dJ = L di$ и рассматривать уже новую систему размерностей $[i]$, $[R]$, $[dt]$, $[dJ]$, то найденные для нее критерии подобия «в малом» будут подчиняться условию тождественных преобразований (6.32).

Переходя к подобию в целом, найдем интегральные критерии подобия:

$$\pi_{11} = \frac{1}{R} \frac{\int_{t_1}^{t_2} d\tau}{\int_{i_1}^{i_2} \frac{L}{i} di} = \text{idem}; \pi_{12} = \frac{1}{u} \frac{\int_{t_1}^{t_2} d\tau}{\int_{i_1}^{i_2} L di} = \text{idem},$$

где $t_1 \leq \tau \leq t_2$. Отсюда понятно, почему критерии обобщенного подобия $\pi_{\text{и}}$, в отличие от обычных критериев π , называются критериями интегрального подобия. Нелинейные процессы подобны в целом, если выполняется равенство значений интегральных критериев подобия модели и оригинала, т. е. $|\pi_{\text{м.и1}}| = |\pi_{\text{о.и1}}|$ и $|\pi_{\text{м.и2}}| = |\pi_{\text{о.и2}}|$. Подобие процессов, выраженное интегральными критериями, имеет другой характер, чем обычное подобие, поскольку требование пропорциональности параметров, характеризующих протекание процесса, за-

меняется требованием пропорциональности некоторых функций от них. В данном случае требуется пропорциональность $\int \frac{L di}{i}$ и $\int L di$. Новые переменные могут быть подобны и в другом смысле. Например, при нарушении пропорциональности изменений некоторых параметров процесса они могут быть подобными, поскольку, рассматривая процесс на конечном интервале времени $\Delta t_0 = (t_2 - t_1)_0$ и определяя для него интегральные критерии подобия, можно найти какой-то интервал времени в модели $\Delta t_M = (t_2 - t_1)_M$, когда выполняется условие тождественных преобразований критериев подобия, т. е. $\pi_{M.1} = \pi_{0.1}$. В этом случае процессы будут интегрально подобны.

Пример 6.2. Произведем оценку интегрально подобных интервалов нелинейных процессов. Примем значения параметров цепи следующими: $u = 6$ В; $R = 10$ Ом; зависимость $L = f(i)$ аппроксимируется многочленом

$$L = 8 - 8i + 4i^2 - 1,333i^3.$$

Численное решение нелинейного дифференциального уравнения (6.31) дает зависимость тока i от времени t :

$i, A \dots$	0	0,80	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56
$t, c \dots$	0	0,101	0,219	0,350	0,494	0,681	0,943	1,463

Найдем для интервала времени исходного нелинейного процесса $\Delta t_0 = 0,393$ с, когда токи изменяются от $i_{01} = 0,08$ А до $i_{02} = 0,32$ А, интервал времени процесса Δt_M модели, в котором будет существовать интегральное подобие процессов; предположим, что параметры цепей оригинала и модели одинаковы, за исключением индуктивности.

Интегральное подобие будет в том случае, если равны значения интегральных критериев подобия. Значения этих критериев подобия для исходного процесса:

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \frac{1}{10 \cdot 0,393} \int_{0,08}^{0,32} \frac{8 - 8i + 4i^2 - 1,333i^3}{i} di = \\ &= 0,255 (8 \ln i - 8i + 2i^2 - 0,44i^3) \Big|_{0,08}^{0,32} = 2,36; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= \frac{1}{6 \cdot 0,393} \int_{0,08}^{0,32} (8 - 8i + 4i^2 - 1,333i^3) di = \\ &= 0,424 (8i - 4i^2 + 1,33i^3 - 0,333i^4) \Big|_{0,08}^{0,32} = 0,68. \end{aligned}$$

Интегральные критерии подобия в модели должны иметь значения $\pi_{M.1} = 2,36$, $\pi_{M.12} = 0,68$, т. е.

$$\pi_{M.1} = \frac{1}{10 \Delta t_M} \int_{i_1=0,08}^{i_2=0,32} 8e^{-t} i^{-1} di = 2,36; \quad \pi_{M.12} = \frac{1}{4 \Delta t_M} \int_{i_1=0,08}^{i_2=0,32} 8e^{-t} di = 0,68,$$

откуда находятся неизвестные i_2 и Δt_M .

Решение этих уравнений проводится так. Построим зависимость $(\pi_{11}/\pi_{12})_M = \beta_M = f(i_2)$. По этой зависимости (рис. 6.16) легко найти, что значению

$$(\pi_{11}/\pi_{12})_M = \pi_{11}/\pi_{12} = 2,36/0,68 = 3,47$$

Соответствует величина тока $i_{2M} = 0,16$ А, которая и определяет границу интервала подобия процессов по току. Далее из зависимости $\pi_{M.И1} = f(\Delta t_M)$ или $\pi_{M.И2} = f(\Delta t_M)$ определяется интервал времени подобия процессов в модели. Например,

$$\Delta t_M = \frac{\int_{0,08}^{0,16} 8e^{-i} di}{4 \cdot 0,68} = \frac{8}{4 \cdot 0,68} \frac{(0,16 - 0,08)}{8} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{e^{0,08}} + \frac{2}{e^{0,09}} + \frac{2}{e^{0,1}} + \frac{2}{e^{0,14}} + \frac{1}{e^{0,16}} \right) = 0,208 \text{ с.}$$

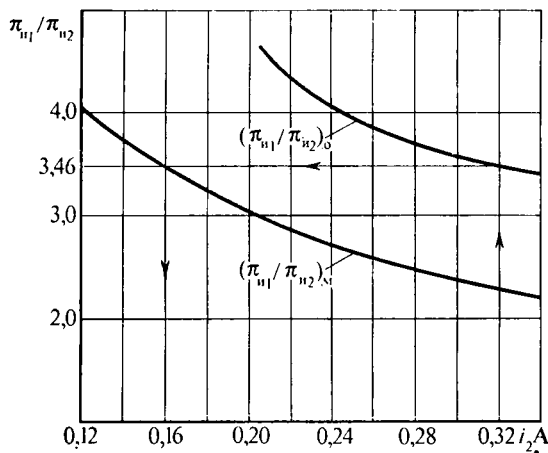


Рис. 6.16

Таким образом, если в исходной цепи с заданными параметрами процесс рассматривается в интервале времени $\Delta t = 0,393$ с, когда токи изменяются от $i_1 = 0,08$ А до $i_2 = 0,32$ А, то ему физически подобен процесс в модели при изменении токов от $i_1 = 0,08$ А до $i_2 = 0,16$ А на интервале времени $\Delta t_M = 0,208$ с. Из условия тождественных преобразований интегральных критериев подобия следуют масштабные соотношения для новой системы обобщенных переменных: из условия $\pi_{И1} = \pi_{M.И1}$ имеем

$$\frac{\int L_0 \frac{di}{i_0}}{R_0 \Delta t_0} = \frac{\int L_M \frac{di}{i_M}}{R_M \Delta t_M}, \text{ или } \frac{\int^m L \frac{d \ln i}{i}}{m_R m_{\Delta t}} = 1;$$

из условия $\pi_{И2} = \pi_{M.И2}$ имеем

$$\frac{\int L_0 di}{u_0 \Delta t_0} = \frac{\int L_M di}{u_M \Delta t_M}, \text{ или } \frac{\int^m L di}{m_u m_{\Delta t}} = 1.$$

Если перейти к средним значениям интегралов в рассматриваемом интервале изменения токов, то

$$\frac{L_{0.ср}(\ln i) \ln i_0}{R_0 \Delta t_0} = \frac{L_{м.ср}(\ln i) \ln i_m}{R_m \Delta t_m}; \quad \frac{m_{L_{ср}}(\ln i)}{m_R m_{\Delta t}} = 1;$$

$$\frac{L_{0.ср}(i) i_0}{u_0 \Delta t_0} = \frac{L_{м.ср}(i) i_m}{u_m \Delta t_m}; \quad \frac{m_{L_{ср}}(i)}{m_u m_{\Delta t}} = 1.$$

Этот пример показывает, что моделирование процесса при соблюдении равенства интегральных критериев подобия позволяет не заботиться о том, чтобы выдерживались определенные масштабные соотношения между исходными параметрами модели и натуры. В данном случае лишь необходимо соблюдать равенство $\pi_{м.и} = \pi_{0.и}$ при любых значениях величин, входящих под знаки интегралов. Это дает достаточно широкую возможность в выборе параметров модели. Соблюдение полученных выше масштабных соотношений позволяет моделировать нелинейные процессы в цепи RL , пользуясь двумя критериями подобия с любой необходимой степенью точности. Система обобщенных параметров содержит значительно меньше переменных, чем система исходных параметров, с учетом аппроксимации L .

Наиболее полно возможности интегрального подобия сказываются, когда моделируемая нелинейная функция $L = f(i)$ не задается в явном виде или же аппроксимация ее неудовлетворительна. В этом случае численное значение интегральных критериев подобия находится на основе эксперимента в натуре. Раскладывая по одной из формул квадратур выражение для интегрального критерия подобия (например, $\pi_{и2}$)

$$\pi_{и2} = \frac{1}{u \Delta t} \frac{i_1 - i_n}{2n} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + \dots + L_n) = \text{idem},$$

можно, находя из опыта n значений i , вычислить величину $\pi_{и2}$, равную $\pi_{м.и2}$. Точно так же вычисляется и $\pi_{и1}$. Параметры модели подбираются так, чтобы интегральные критерии выполнялись.

Таким образом, при интегральном подобии, как и при обычном подобии*, критерии могут быть получены двумя способами: а) анализом размерностей для процесса, рассматриваемого в «малом», с последующим переходом к интегральным критериям «в целом»; б) анализом дифференциальных уравнений рассматриваемого явления и такого преобразования этих уравнений, в результате которого можно получить интегральные критерии подобия. При этом для любых линейных систем все положения π -теоремы остаются в силе независимо от диапазона рассмотрения явления «в малом» или «в целом». Все нелинейные задачи при рассмотрении явлений «в малом» становятся линейными, и вопрос об учете нелинейности параметров системы снимается. При определении критериев анализом размерностей π -теорема применяется к явлениям «в малом», что не требует каких-либо специальных доказательств.

При определении интегральных критериев подобия способом анализа дифференциальных уравнений возможны различные пути полу-

* Интегральное подобие не следует рассматривать как не имеющее ничего общего с обычным подобием, хотя и в своей основе и в технике нахождения и использования критериев подобия оно имеет особенности. Подробнее можно познакомиться в ряде работ В. М. Брейтмана. См., например: «Подобие физических явлений с геометрической точки зрения». — Научные доклады высшей школы. Энергетика, 1958, № 1, с. 27—32.

чения их. Однако в основном операции сводятся к следующему: дифференциальное уравнение приводится к безразмерному виду, для чего все его члены делятся на один из них, особо фиксированный. При этом способ интегральных аналогов применяется с той особенностью, что в каждом безразмерном комплексе, полученном таким путем, оставляется символ дифференцирования, а остальные заменяются конечными разностями. Полученные интегральные критерии могут быть применены и для моделирования исследуемого процесса с учетом, однако, того, что эти критерии действуют только на интервале времени Δt .

Кибернетическое подобие и моделирование*. В отличие от других видов моделирования оно называется также функциональным, информационным и заключается в том, что подобие устанавливается только между входными-выходными характеристиками оригинала и соответственно модели. Кибернетическое моделирование может выполняться как аналоговое (может быть эквивалентным, квазиподобным и т. д.) или как цифровое. Это моделирование может иметь весьма абстрактный характер, поскольку получает критериальные связи на основе операций со сколь угодно сложными функциями, в том числе и не всегда реализующими те или иные формально фиксированные выражения. Понятие подобия часто может идти не от физической системы, а от логических и функциональных характеристик изучаемых объектов. Опираясь на «черными ящиками» как на основную базу для определения подобия, необходимо найти критерии подобия информации, поступающей для переработки, и информации выходной. Обозначим для подобных систем через I_i количество полезно перерабатываемой в i -й системе информации, где $i=1, \dots, m$, I_i — полезные преобразующие свойства алгоритма восприятия информации, заключенные в осведомляющем сообщении; π_i — коэффициент полезности сообщения. Некоторые функции Φ_k , где $k=1, \dots, n$, характеризуют при этом во времени и пространстве функционирование подобных систем, которые должны отвечать условию $\Phi_* = (\Phi_1 / \Phi_{01}) (\Phi_2 / \Phi_{02}) = \text{idem}$, где Φ_0 — характерное значение базисной функции. В соответствии с теоремами и положениями о подобии две кибернетически подобные системы ($i=1, 2$) будут характеризоваться критерием $\pi_1 = I_1 / I_2 = \text{idem}$. Этот критерий требует пропорциональности полезной информации осведомляющих сообщений, причем $\lambda_1 / \lambda_2 = \text{idem}$. Критерии вида $\pi_2 = L_1 / L_2 = \text{idem}$ будут устанавливать подобие для всех этапов преобразования входной информации. Кроме того, в условия подобия войдут критерии гомохронности $m_1 t_1 = t_2 = \text{idem}$ и показатели геометрического — линейного или аффинного — пространственного подобия.

При моделировании процессов с участием живых организмов (человека, животных) можно ввести коэффициенты, отражающие субъективные особенности. Критериальные величины могут быть найдены

* Здесь даются только общие сведения. Подробнее см. ниже, гл. 7, а также: Веников В. А., Суханов О. А. Кибернетические модели электрических систем. Энергоиздат, 1982, с. 326.

в полном соответствии с изложенными приемами определения критериев подобия при отсутствии уравнений процесса, но при наличии достаточных данных для проведения анализа размерностей величин, участвующих в процессе. Но даже и при отсутствии такой возможности количественные соотношения могут и должны быть введены в условия моделирования. Так, при кибернетическом моделировании птицы самолетом можно оценить подобие движения, сопоставляя скорости движения самолета без встречного ветра (v_0) и при встречном ветре (v_1) с соответствующими скоростями движения птицы и вводя критерий

$$v_* = (v_1 - v_0) / v_0 = \pi = \text{idem}.$$

Можно ввести количественные критерии подобия, исходя, например, из относительной устойчивости (по отношению к внешней среде) объекта-оригинала и соответственно устойчивости его кибернетической модели. Можно в ряде случаев оперировать с интенсивностью поиска, с вероятностными характеристиками получаемых на моделях результатов. Таковы модели черепахи или мыши, которые ищут кибернетическую пищу», и т. д. Если в кибернетической модели представлены цепочки управления и цепочка обратных связей, то в каждой из них при подобию соблюдаются критерии подобия типа $\Phi_* = \text{idem}$. Таким образом, и при кибернетическом моделировании необходимо стремиться к полному применению теории подобия и получению количественных характеристик, выявляемых на базе основных теорем и дополнительных положений.

Достоверность и точность кибернетического подобия существенно зависят от выполнения модели: при *цифровом варианте* достоверность определяется адекватностью системы уравнений модели системе уравнений оригинала, а точность — точностью процедуры решения на вычислительной машине. При *аналоговом варианте* подобие характеристик входа—выхода в большинстве случаев определяется в условиях неопределенности исходных данных и здесь часто уместным и вполне эффективным оказывается применение методов размытого подобия.

§ 7.1. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ, СТЕНДОВ И ТРЕНАЖЕРОВ

Различного рода модели, как физические, так и математические, аналоговые, выполняемые в виде специальных, иногда весьма сложных установок, широко применяются в инженерной практике — в научных исследованиях, при решении проектных задач и задач эксплуатационного характера, в том числе задач, связанных с обучением инженерно-технического персонала практической работе на различного рода установках (в этом случае модели обычно называются тренажерами). Не менее широко применяются и так называемые стенды для исследования той или иной аппаратуры в условиях, приближающихся к натуральным, а поэтому только частично использующих условия подобию. Вопросы создания и применения стендов и тренажеров составляют большую самостоятельную группу задач, решаемых в зависимости от конкретных условий различными средствами и приемами.

Моделирование — универсальный метод исследования физических процессов и различного рода технических систем. Изучаемые установки и процессы, происходящие в них, замещаются некоторыми другими, называемыми *модельными*, причем наличие критериальных соотношений обеспечивает подобие одной установки (оригинала) другой (модели). При исследовании сложных систем обычно ставится задача изучения только основных свойств системы, связанных с данной задачей. Построение модели всегда осуществляется в определенной последовательности:

- составляется описание объекта или формирование феноменологической модели;

- строится формализованное описание и на его базе находятся критерии подобию;

- создается модель;

- проводятся исследования по нахождению критериев подобию, проведению экспериментов с предварительной настройкой физической модели, или программированием на ЦВМ.

Иногда при моделировании сложных явлений не удается математически сформулировать на основе теории подобию те требования, которым должна удовлетворять модель. В этом случае при построении

модели большое значение имеют эвристические методы и интуиция исследователя.

При создании модели не следует стремиться учесть как можно большее количество факторов и различных взаимных связей, так как вследствие этого появляется неправильное представление о точности модели и, как следствие, громоздкость создаваемых моделей. Поэтому в моделях должны учитываться лишь те факторы и связи, значимость которых оказывается существенно заметной в условиях поставленной задачи; вопрос о точности и строгости решения вне условий конкретной задачи не имеет смысла.

§ 7.2. АНАЛОГОВЫЕ МОДЕЛИ

Основой аналогового моделирования является формальное соответствие математического описания явлений, различных по физической природе. Если явления в двух сопоставляемых системах имеют различную физическую природу, но некоторые, наиболее интересные для исследователя, процессы, происходящие в двух системах, описываются формально одинаковыми дифференциальными уравнениями, то можно считать, что одна система является прямой моделью-аналогом другой. Разновидность аналогового моделирования — структурное моделирование, при котором дифференциальные уравнения, описывающие физический процесс, представляются отдельными элементами модели. Так отображается процесс по его слагающим, отвечающим отдельным операциям. В модели осуществляется последовательная и непрерывная отработка каждой математической операции, необходимой для решения уравнения данной структуры. Отсюда и название — *структурная модель*. Такая модель часто рассматривается как вычислительная машина, дающая численное решение уравнений независимо от физической природы исследуемого процесса.

В применении прямых моделей-аналогов имеется ограничение, поскольку не для всех задач можно выявить аналогию и подобрать модель. В этом отношении структурные модели, поэлементно моделирующие отдельные математические операции, более универсальны и обеспечивают большую точность. Поэтому и механические модели прямой аналогии, отражающие электрические процессы в системах, нашли весьма ограниченное применение и больше использовались для демонстрационных целей, чем для целей численного анализа. Так, хорошо известна механическая модель-аналог, изображающая картину происходящих электромеханических процессов в электрической системе. Эта модель основывается на следующих соображениях. Движение роторов многих технических устройств (например, ротора генератора) можно представить движением механического маятника. Его движение при вязком трении под влиянием возмущающей силы $F(t)$ описывается известным дифференциальным уравнением

$$T_{\text{мх}} d^2 \varphi / dt^2 + h d\varphi / dt + mg l \varphi = F(t).$$

Движение зарядов в цепи с сосредоточенными параметрами R, L, C , к которой приложено напряжение $u(t)$, описывается уравнением-аналогом, буквенно тождественным предыдущему:

Электрическая система	Механическая модель-аналог
$T_J \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_0 - \frac{L q U}{X_C} \sin \delta$	$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = Q_0 r - f l_1 l_2 \sin \theta$
Реактивное сопротивление X_C	Податливость пружины $1/f$
Электродвижущая сила E_q	Длина рычага 1 — l_1
Напряжение приемных шин U	Длина рычага 2 — l_2
Напряжение в любой точке (x) электропередачи U_x	Расстояние от центра (0) до любой точки на пружине (x) — l_x
Падение напряжения в линии IX_C	Длина пружины l_{12}
Ток в линии I	Натяжение пружины $f l_{12}$
Активная мощность P_0	Вращающий момент $Q_0 r = M_0$
$P_0 = U I \cos \varphi = \frac{E_q U}{X_C} \sin \delta$	$M = f l_1 l_2 \sin \theta$
Угол δ между векторами E_q , U	Угол θ между рычагами 1 и 2
Реактивная мощность	Аналог — величина $l_1 l_2 f \cos \theta - l_2 f$
$Q = \frac{E_q U}{X_C} \cos \delta - \frac{U^2}{X_C}$	
Угол между током и напряжением φ	Аналог — угол ψ
Потребляемая мощность	Вращающий момент $M_1 = l_1 l_2 \cos \psi$
$P_H = P_0 = U I \cos \varphi$	

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t),$$

где q — электрический заряд.

Идентичность дифференциальных уравнений движения позволяет изучать механические колебания на электрической модели (и наоборот), получая при правильном подборе параметров вполне удовлетворительные результаты. В частности, для простой схемы (рис. 7.1) будут справедливы аналогии между отдельными параметрами электрической системы (рис. 7.1, а), параметрами ее режима (рис. 7.1, б) и параметрами механической модели (рис. 7.1, в), представленные в табл. 7.1.

Электрическими моделями прямой аналогии являются, например, расчетные модели постоянного тока, широко распространенные в энергетике для моделирования установившихся режимов тепловых и гидравлических сетей. В соответствии с принципом прямой аналогии эти модели используют постоянный ток в качестве аналога переменного тока или потока воды, теплоты (пара) и т. д. Расчетные модели постоянного тока не воспроизводят непрерывное протекание процессов, происходящих в оригинале, а представляют их во времени дискретно, в «последовательных интервалах времени». Переход к следующему интервалу осуществляется при этом по данным, полученным в предыдущем (отсюда название *последовательные интервалы*). Электрическая схема системы переменного тока воспроизводится с помощью активных сопротивлений, а э.д.с. генераторов электростанций — с помощью источников постоянного тока. Замена

в расчетной схеме индуктивных сопротивлений элементов системы активными, равными индуктивному (при $r \ll x$), не отражается на расчетном токе короткого замыкания. Замена реактивных сопротивлений активными упрощает модель, поскольку активные сопротивления дешевле и проще в изготовлении, чем индуктивные. Кроме того, анализ векторных диаграмм напряжений и э. д. с. генераторов в сложной системе, не имеющей длинных (более 300 км) ЛЭП, показывает, что угол между векторами э.д.с. генераторов разных станций обычно не превышает $20\text{--}30^\circ$. Отсюда следует, что распределения токов и пото-

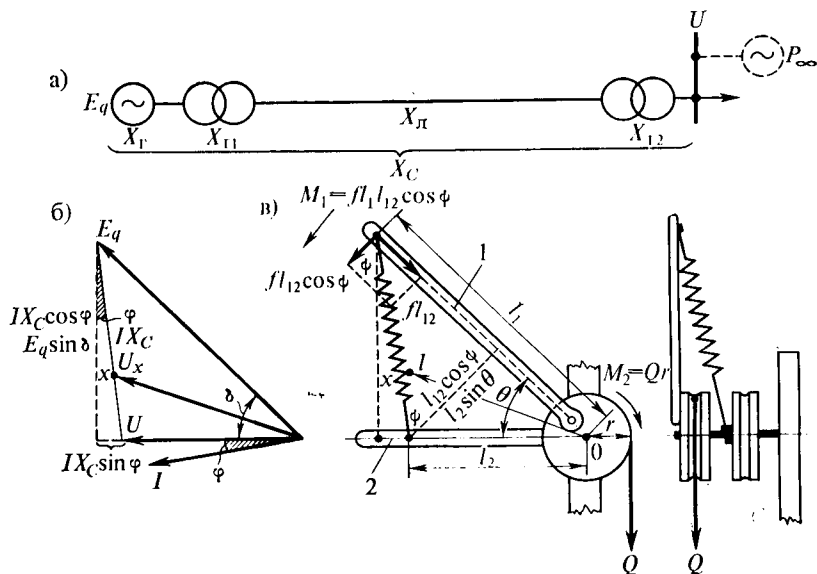


Рис. 7.1

ков мощности, определенные на расчетном столе постоянного тока при отсутствии сдвига фаз э.д.с., мало отличаются от соответствующего распределения в схеме-аналоге переменного тока.

Быстрота получения результатов на моделях постоянного тока, простота, надежность эксплуатации и невысокая стоимость привели к тому, что они в отдельных случаях применяются и сейчас, несмотря на наличие более совершенных устройств (моделей переменного тока, вычислительных машин). На рис. 7.2 приведен внешний вид модели электрической системы, выполненной на активных сопротивлениях.

Разумеется, нельзя одновременно рассчитывать распределение активной и реактивной мощностей на расчетных моделях постоянного тока; они применяются преимущественно для расчета распределения активных мощностей, хотя и существуют приемы, позволяющие использовать их для определения потоков реактивной мощности. При этом токи в сопротивлениях, моделирующих генераторы и нагрузки, долж-

ны быть пропорциональны потокам реактивных мощностей реальной сети, проходящим по этим элементам.

В настоящее время применяются два типа моделей постоянного тока: универсальные, пригодные для исследования схем любых энергетических систем, и специализированные, предназначенные для исследования лишь одной определенной энергетической системы.

Универсальные модели имеют большой набор сопротивлений, изменяющихся в широком диапазоне. Переключающие шнуры и коммутационные поля позволяют собирать электрическую схему любой энергетической системы. Недостаток этих моделей — недостаточная наглядность собранной электрической схемы.

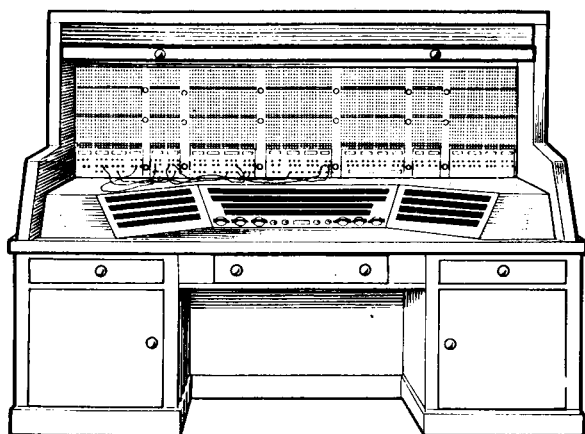


Рис. 7.2

Специализированные модели позволяют быстро определять распределение токов и напряжений при коротких замыканиях в какой-либо точке заданного исходного режима системы. В таких моделях сопротивление каждого элемента энергетической системы воспроизводится отдельным сопротивлением, причем коммутация элементов осуществляется так же, как в оригинале, — в самой энергетической системе. Для удобства на расчетном столе воспроизводится и мнемоническая схема.

Расчетные модели переменного тока (рис. 7.3) могут рассматриваться частично (для установившегося режима) как физические модели, а частично — как аналогии. Они представляют исследуемые схемы комплексными сопротивлениями с учетом сдвига фаз между приложенными э. д. с. и напряжениями. Эти модели позволяют определять с достаточной для всех инженерных задач точностью распределения токов, активных и реактивных мощностей в любых сложных системах при нормальных и аварийных режимах. Моделирование всех элементов электрической системы прежде всего предусматривает соблюдение в модели и оригинале критерия подобия $r/x = \text{idem}$. Это, однако, связано с трудностями, которые определяются тем, что большинство элементов электрической системы имеет активные сопро-

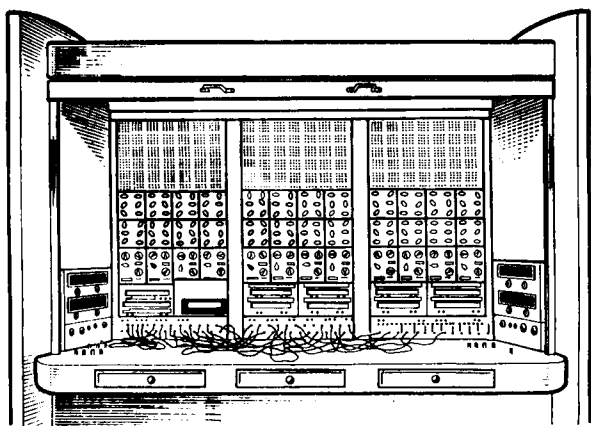


Рис. 7.3

тивления, во много раз меньше, чем индуктивные. Например, синхронное реактивное сопротивление турбогенератора обычно составляет 160—220 %, а активное сопротивление — всего 0,2—0,5 %. Чтобы создать в расчетной модели индуктивное сопротивление с такой же малой активной составляющей, приходится применять специальные дроссели высокой добротности или питать модель током не промышленной, а повышенной частоты (400—500 Гц).

Моделирование трансформаторов несколько проще, хотя при большой мощности активное сопротивление их обмоток примерно в 30 раз меньше, чем индуктивное сопротивление рассеяния. Затруднение представляет и моделирование тока холостого хода трансформаторов и нагрузок системы. Генераторы в расчетных моделях переменного тока моделируются с помощью напряжения, регулируемого по амплитуде и фазе и приложенного за некоторым сопротивлением. Установка, схематически показанная на рис. 7.4,а, служит моделью-аналогом генератора реальной системы. Изменения мощности турбины в ней отражаются поворотом фазорегулятора Φ , меняющего фазу подведенного напряжения (угол δ), а изменения тока возбуждения — значе-

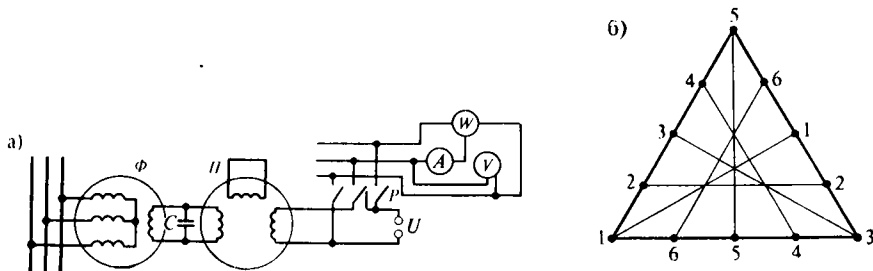


Рис. 7.4

нием напряжения U на зажимах генератора-модели (Π — потенциал-регулятор или вращающийся трансформатор, изменяющий значение подведенного напряжения).

В некоторых расчетных столах (обычно на частоте 50—200 Гц) фаза подводимого к генераторной станции напряжения регулируется с помощью трехфазного автотрансформатора, у которого отпайки подобраны так, что их переключением (1, ..., 6) можно изменять напряжение по фазе, не изменяя его по амплитуде. На рис. 7.4, б показана векторная диаграмма такого автотрансформатора для питания модели, позволяющего изменять фазовый угол от 0 до 360° . Обычно угол регулируется несколькими последовательно включенными автотрансформаторами: одного трехфазного, позволяющего изменять угол через 10° , и двух однофазных, позволяющих изменять угол на 1 и $0,1^\circ$. При расчетах переходных процессов на модели набирается схема, в которую входят реактивные сопротивления синхронных машин.

Моделирование нагрузок затруднительно, поскольку они переменны и зависят от значения и длительности изменения напряжения; кроме того, характер изменения нагрузок зависит от состава и характеристик отдельных составляющих, а точные сведения о них обычно отсутствуют. Моделирование нагрузок на неавтоматизированных моделях осуществляется при расчетах установившихся режимов путем установки нагрузочными сопротивлениями заданной активной и реактивной мощностей. При изучении переходных процессов на расчетных моделях переменного тока, так же как и постоянного, применяются последовательные интервалы. В каждом последующем интервале времени находятся новые параметры системы и режима, которые и устанавливаются. Так же моделируется и нагрузка, значения сопротивления которой изменяются от интервала к интервалу. Иногда моделируют нагрузку активными и реактивными сопротивлениями, но регулируют их так, чтобы они потребляли одну и ту же мощность независимо от того, какое напряжение оказывается на этих сопротивлениях. Это, однако, не вполне соответствует действительности.

Иногда в расчетах поддерживают не постоянство мощности, потребляемой нагрузкой, а постоянство тока нагрузки, равного току в предшествующем режиме. Но при изменении напряжения меняется во времени ток асинхронных двигателей, поскольку они переходят в режим торможения. Поэтому и такой способ моделирования также не совсем точен.

Представление на расчетной модели ЛЭП с той степенью точности, которая необходима для решения задач проектирования и эксплуатации электрических систем, в большинстве случаев не вызывает трудностей. Передача представляется эквивалентной схемой замещения, которая может быть Π - или T -образной. Ее параметры определяются с учетом поправочных коэффициентов, отражающих влияние распределения параметров реальной линии. При изучении режимов, связанных с появлением гармонических составляющих высших порядков, линия представляется цепочкой из Π - или T -образных схем.

Исследование на расчетных моделях переменного тока проводится в несколько стадий:

а) подготовка исходных материалов и составление расчетной схемы для воспроизведения на модели;

б) сборка схемы на модели, выбор масштабов параметров режима, установка заданных начальных режимов, выбор интервала времени для расчетов переходных процессов с помощью последовательных интервалов;

в) выполнение расчета, требуемого поставленной задачей, например расчета переходного электромеханического процесса для оценки динамической устойчивости системы, поведения релейной защиты, автоматики и т. д.;

г) обработка результатов расчетов с представлением их в критериальной форме.

Расчет переходного процесса сложной электрической системы представляет значительные трудности и требует для своего выполнения много времени. В самом деле, при изменении режима в каждом интервале времени расчетчику приходится изменять напряжение, изображающее переходную э.д.с., вычислять приращение этой э.д.с. и угла и изменять поворот вектора э.д.с. с помощью вращающегося (поворотного) трансформатора-фазорегулятора. В системе, содержащей несколько станций, такие операции оказываются весьма трудоемкими; если еще учесть необходимость изменения сопротивлений, изображающих нагрузки, то легко видеть, что работа на расчетной модели является весьма сложной.

Стремление упростить эту работу привело к автоматизации расчетов. Операции по определению переходной э. д. с. E'_q , установке э.д.с. E_q , изменению проводимостей нагрузок в соответствии с заданными характеристиками и другие операции должны проводиться без участия человека. Автоматизация может выполняться различными способами. Но в любом случае после какого-либо изменения схемы замещения сети должно изменяться напряжение, изображающее э.д.с. E'_q , и автоматически восстанавливаться его значение. При этом поддерживается постоянным результирующее потокоцепление Φ'_d , остающееся в реальной машине неизменным. Кроме того, автоматически должен происходить сдвиг напряжения, изображающего э. д. с. E'_q реальной машины. Этот сдвиг пропорционален избытку мощности турбины над отдаваемой электрической мощностью. Следовательно, в модели необходимо иметь устройство, изменяющее небаланс мощности ΔP , в соответствии с которым осуществлялся бы поворот фазы регулятора.

Двигатели, входящие в состав комплексной нагрузки, в этом случае целесообразно представить схемой замещения, в которой с помощью специального автоматического устройства поддерживалась бы неизменной мощность, поглощаемая в сопротивлении $r = R/s$, если характеристика двигателя отвечает условию $M_* = P_* = \text{const}$. Если механическая характеристика двигателя $M_* = \varphi(s_*)$ известна, то соответствующее автоматическое устройство должно так изменять сопротивление $R/s = r$, чтобы имитировалась соответствующая зависимость момента $M = \varphi(s)$ в схеме замещения двигателя. Реактивное сопротивление X_μ , в котором протекает намагничивающий ток, должно быть нелинейным, причем в этой нелинейности должен быть отражен эффект насыщения стали двигателя.

Реальное выполнение автоматических моделей сложно, поэтому, не приводя детального описания их, рассмотрим кратко установку «Дельта» (рис. 7.5). Она создана* на основе упомянутой выше расчетной модели сети переменного тока, в которой генераторные станции заменены аналоговыми вычислительными устройствами. Эти устройства решают уравнения электромеханических переходных процессов в генерирующих узлах энергосистемы и далее преобразуют результаты решения в напряжение, изменяющееся по амплитуде и фазе. Будучи приложены в соответствующих точках сети, напряжения имитируют сложную систему с большим (10—20) количеством станций.

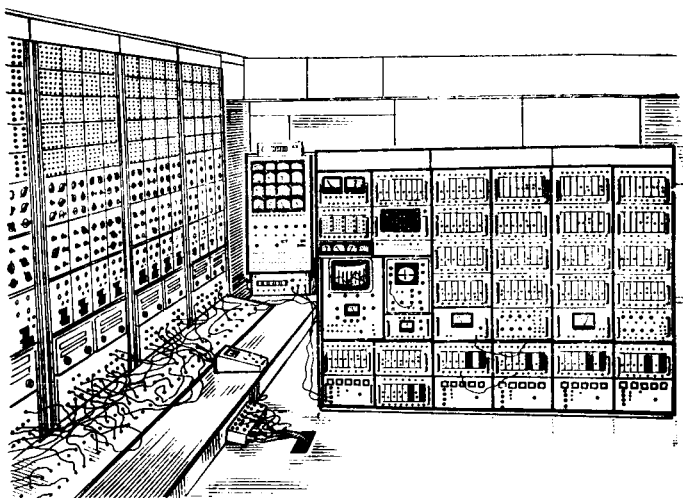


Рис. 7.5

Установка работает в натуральном времени. Имеющиеся системы управления и измерения превращают ее в быстродействующую «динамическую модель» энергосистемы, пригодную для оперативного расчета устойчивости и выбора установок противоаварийной автоматики, а также выдающую в виде осциллограмм сведения о переходном процессе.

В расчетные модели переменного тока включают нелинейные элементы. Простые аналоги можно получить при использовании различных нелинейных элементов. Для этого нелинейные электрические цепи модели должны подчиняться тем же закономерностям, что и исследуемая нелинейная система. Модель для изучения коронирования ЛЭП (рис. 7.6), представленной сопротивлением генератора X_g , трансформатора X_t , а также сопротивлениями X_l и X_c , замещающими ЛЭП Т-образной схемой и работающей в режиме холостого хода, является простейшим примером. В нее включен не-

* Лугинский Я. И. Специализированные аналоговые вычислительные машины для расчета электромеханических переходных процессов в электроэнергетических системах (принципы построения). — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 4, с. 44—49.

линейный элемент, состоящий из конденсатора, выпрямителя и низкого делителя напряжения. Явление короны начинается в момент, когда критическое значение превышает мгновенное значение напряжения. При этом по конденсатору C будет проходить ток, поскольку опорное напряжение выпрямителей $U_{оп}$ принято равным критическому значению.

На расчетных моделях переменного тока с нелинейными приставками и решаются нелинейные задачи и для неэлектрических систем. Они широко применяются, например, при анализе распределения напоров и расходов

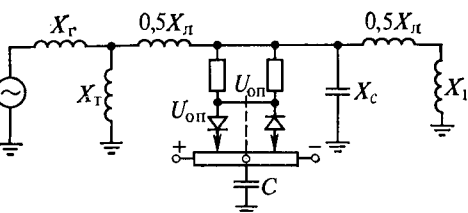


Рис. 7.6

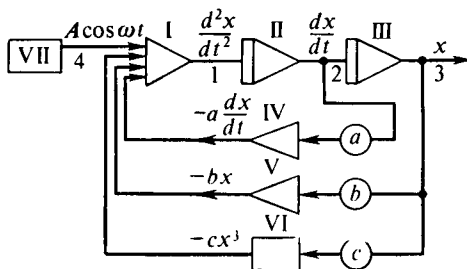


Рис. 7.7

в элементах гидравлических сетей в стационарных условиях. При моделировании водопроводных, теплофикационных и газовых сетей легко указать гидравлические аналоги законов Кирхгофа в виде законов непрерывности расходов и напоров жидкости. Для полного моделирования участков трубопроводов получают нелинейные зависимости между током и напряжением, соответствующие зависимости между падением напора и расхода жидкости.

Типовые (универсальные) структурные аналоговые модели, выпускаемые промышленностью, состоят из блоков (элементов), выполняющих отдельные математические операции: арифметические и алгебраические, интегрирование и дифференцирование, преобразование функций и т. д. Из таких блоков и создается структурная схема, которая синтезирует математические операции почленно представленного уравнения. Иными словами, структурная схема почленно моделирует уравнение, обеспечивая его решение в целом. Решаемое уравнение приводится к виду, удобному для набора. Поэтому вводимые в вычислительное устройство исходные данные теряют прямую связь с параметрами физических элементов исследуемой системы.

Поясним работу моделирующей установки на примере. Пусть исследованию на модели, структура которой показана на рис. 7.7, подлежит некоторый физический процесс, описанный дифференциальным уравнением

$$d^2x/dt^2 + ax/dt + bx + cx^3 = A \cos \omega t. \quad (7.1)$$

Решение этого уравнения заключается в выполнении ряда математических операций, символически показанных на рис. 7.7. Это интегри-

рование (блоки *II*, *III*), суммирование (*I*), возведение в степень (*VI*), получение косинусоидальной зависимости от независимой переменной *t* (*VII*) и умножение на постоянные (*a*, *b*) коэффициенты (*IV*, *V*). Отдельные блоки, обычно называемые решающими, выполняют указанные математические операции и соединяются между собой по определенной схеме, отражающей те операции, которые надо произвести для интегрирования уравнения. Перепишем исследуемое уравнение:

$$d^2 x/dt^2 = -adx/dt - bx - cx^3 + A \cos \omega t. \quad (7.2)$$

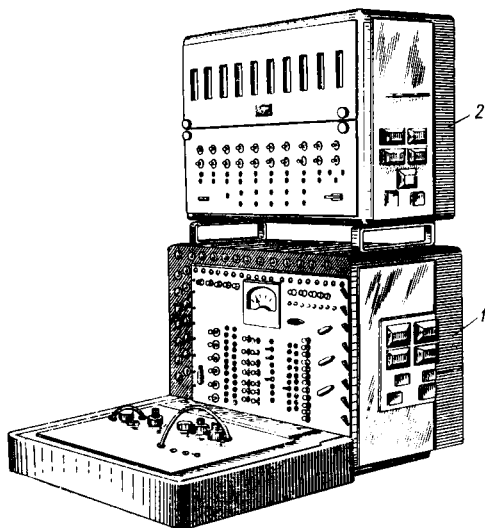


Рис. 7.8

Если предположить, что величина d^2x/dt^2 , представляемая на модели (рис. 7.7) напряжением в точке 1, известна, то на выходе блока *II* получим напряжение, представляющее в определенном масштабе первую производную dx/dt . Подав его на блок *III*, получим на выходе значение x . Подключив точки 2 и 3 к блокам *IV* и *V*, на их выходе, очевидно, получим значения напряжений, представляющих в определенном масштабе величины $-d^2x/dt^2$ и $-bx$. Подключив точку 3 ко входу блока *VI*, выполняющего операции умножения и возведения в степень, получим на выходе его величину $-cx^3$. Аналогично представив

величину $A \cos \omega t$ в виде напряжения в точке 4 и подав на вход суммирующего блока *I* напряжения с выходов блоков *IV*, *V* и *VI*, получим на выходе блока *I* сумму напряжений, которая равна величине d^2x/dt^2 , принятой за исходную. Очевидно, что схема, представленная на рис. 7.7, соответствует уравнению (7.2) и напряжения в точках 1, 2 и 3 пропорциональны значениям d^2x/dt^2 , dx/dt и x , которые непрерывно изменяются и могут быть записаны на осциллографе в виде переходного процесса.

При исследованиях переходных процессов часто приходится решать уравнения, в которых параметры a , b , ..., d и т.д. зависят от x . Для воспроизведения получающихся при этом нелинейных уравнений разработаны специальные схемы и созданы типовые блоки, отражающие:

1) типовые нелинейности — люфты, трения, релейные характеристики с зоной нечувствительности, различные петлеобразные характеристики и т. д.;

2) фиксированные нелинейности — тригонометрические функции, возведение в квадрат, куб, и т. д.;

3) произвольные нелинейности, т. е. блоки, отражающие функции двух переменных, и блоки, позволяющие получить произведения или соответственно частные от деления двух величин.

Различные типовые установки, выпускаемые промышленностью, состояются из рассмотренных блоков. В качестве примера на рис. 7.8 показана моделирующая установка. Блок 1 является линейной частью установки, имеющей 12 усилителей; он позволяет решать обыкновенные дифференциальные уравнения шестого — восьмого порядков. Блок 2 является нелинейной приставкой, которая после соединения с линейной частью установки позволяет решать нелинейные уравнения.

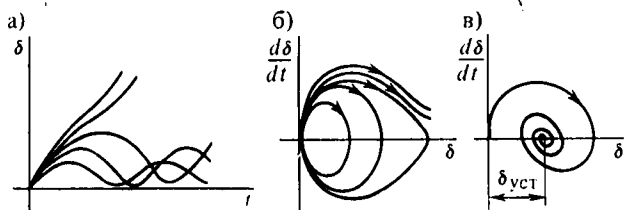


Рис. 7.9

На рис. 7.9 показаны фотографии экрана осциллографа, на котором записаны результаты интегрирования уравнения:

$$d^2 \delta / dt^2 + A \sin \delta = F(t).$$

При этом на рис. 7.9, а решения уравнения качаний синхронной машины получены на моделирующей установке и сфотографированы с экрана осциллографа; на рис. 7.9, б приведено то же изображение на фазовой плоскости; на рис. 7.9, в — то же, что и на рис. 7.9, б, но при наличии демпфирования.

Структурные аналоговые модели называются нередко аналоговыми вычислительными машинами (АВМ) или аналоговыми электронными вычислительными машинами (АЭВМ). Широкое их применение обусловлено простотой, быстродействием, возможностью присоединения к ним отдельных систем-оригиналов, подлежащих исследованию. Так, к модели можно присоединять натурные регуляторы и получать переходный процесс с учетом их действия. Разумеется, регуляторы должны присоединяться через соответствующие преобразовательные и усилительные устройства, обеспечивающие введение переменных величин в модель и обратное воздействие модели на регулятор. На рис. 7.10 представлена схема совместной работы электронной модели, изображающей электрическую систему, и регулятора возбуждения, воздействующего на один из генераторов системы.

При представлении на моделях систем, состоящих из нескольких генераторных станций, линий передач и нагрузок, число элементов больше, чем число генераторных станций, что сильно усложняет схему. Объясняется это тем, что при моделировании одного генератора можно составлять уравнения относительно одной какой-либо системы координат

нат, например системы координат, определяемых ротором исследуемой машины. Если моделировать несколько машин в системе координат какой-либо одной машины, то приходится составлять либо уравнения остальных машин в координатах одной машины, вследствие чего уравнения усложняются, либо уравнения для каждой машины в ее координатах, а затем преобразовывать координаты. И то и другое вызывает увеличение числа усилителей и усложняет схему. Стремление уменьшить количество элементов модели приводит к разработке специальных методов исследования.



Рис. 7.10

При моделировании сложных систем возникают задачи выбора системы уравнений и форм их записи. Здесь могут быть различные варианты:

1) запись всех уравнений генераторов в синхронно вращающейся системе координат;

2) упрощенная запись уравнений, составленных в предположении, что $E'_d = \text{const}$;

3) запись уравнений каждой машины в осях, связанных с ротором, с дальнейшим преобразованием координат.

В первом варианте используется сравнительно небольшое количество усилителей, однако при моделировании предполагается равенство сопротивлений по продольной и поперечной осям и, как правило, не учитываются активные сопротивления генераторов и линий. Во втором варианте предполагаются дальнейшие упрощения исходных уравнений и запись их через собственные и взаимные сопротивления, что облегчает решение, но ограничивает область применения. Третий вариант позволяет отказаться от большинства существенных ограничений и моделировать сложные системы при любой их конфигурации.

Приемы работы со структурной моделью могут быть показаны на простейших примерах.

Пример 7.1. Исследуем переходный процесс при включении электрической цепи RL на постоянное напряжение. Дано: $E=180$ В; $R=0,5$ Ом; $L=2$ мГн $= 0,002$ Гн, $i_0 = 0$. Схема исследуемой цепи приведена на рис. 7.11, а.

Составим дифференциальное уравнение

$$Ri + L di/dt = E, \text{ или } 0,5i + 0,002 di/dt = 180.$$

Выполним принципиальную схему соединения элементов системы (рис. 7.11, б), учитывая, что

$$di/dt = E/L - Ri/L. \quad (7.3)$$

Для выбора масштабов введем в уравнение значения параметров $E/L = 90\,000$; $R/L = 250$. Тогда уравнение запишется так:

$$di/dt = 90\,000 - 250i.$$

Из уравнения видно, что в начальный момент (при $t = 0$) производная очень велика. В установившемся режиме (при $di/dt = 0$) ток $i = E/R = 180/0,5 = 360$ А тоже относительно велик. Постоянная времени $L/R = 0,002/0,5 = 0,004$ с — еще один критериальный параметр, характеризующий протекание процесса.

Масштабы следует выбрать так, чтобы увеличить время процесса и не допустить выхода изображающих напряжений модели за допустимые пределы (100 В). Путем замены переменных в исходном уравнении введем масштабные коэффициенты с помощью равенств:

$$i_1 = m_i i; E_1 = m_E E; t_1 = m_t t, \quad (7.4)$$

где i_1 и E_1 — напряжения на модели, изображающие соответствующие переменные (ток и э. д. с.); t_1 — время в измененном масштабе.

Подставляя (7.4) в уравнение (7.3), получаем

$$\frac{m_t}{m_i} \frac{di_1}{dt_1} = \frac{1}{m_E} \frac{E_1}{L} - \frac{1}{m_i} \frac{R}{L} i_1$$

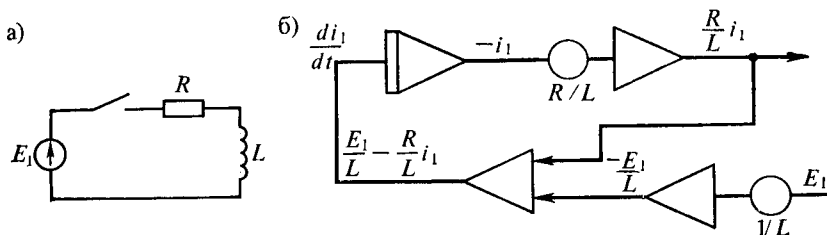


Рис. 7.11

или

$$\frac{dt_1}{m_t} = \frac{m_i}{m_E m_t} \frac{E_1}{L} - \frac{1}{m_t} \frac{R}{L} i_1. \quad (7.5)$$

Выбирая масштабные множители $m_i = 0,25$ В/А и $m_E = 0,5$, сохраним переменные i_1 и E_1 на модели в допустимых пределах. Примем $m_t = 250$. Тогда коэффициенты

$$R/(m_t L) = 1; m_i/(m_E m_t L) = 1.$$

Уравнение (7.5) приобретает вид

$$di_1/dt_1 = E_1 - i_1,$$

где $i_1 = 0,25i$; $E_1 = 0,5E$; $t_1 = 250t$.

Одному амперу в оригинале соответствует 0,25 А на схеме; одной секунде в оригинале — 250 с в модели. Ток в оригинале достигает практически установившегося значения через пять постоянных времени, т. е. через 0,02 с. На модели этому соответствует $0,02 \cdot 250 = 5$ с.

Составим схему набора задачи (рис. 7.12), упрощая ее за счет исключения инверторов; при этом будет записана величина i_1 .

Пример 7.2. Рассмотрим динамическую устойчивость синхронного генератора, работающего через ЛЭП на мощную систему. Для простоты рассмотрим случай отключения одной части двухцепной линии. При этом не будем учитывать действие регуляторов возбуждения и скорости. Процесс описывается уравнением

$$T_J d^2 \delta / dt^2 + D d\delta / dt + AE'_q \sin \delta + B \sin 2\delta = M_T, \quad (7.6)$$

где A, B, D, T_J — заданные постоянные. Будем считать E'_q и M_T тоже постоянными величинами. Введем дополнительную переменную с помощью уравнения

$$s = d\delta/dt. \quad (7.7)$$

Тогда уравнение (7.6) заменится уравнением

$$ds/dt = [M_T - Ds - AE'_q \sin \delta - B \sin 2\delta]/T_J. \quad (7.8)$$

Принципиальная схема, соответствующая уравнениям (7.7) и (7.8), изображена на рис. 7.13. Выбор масштабов искоемых переменных (δ, s) и масштаба времени производится аналогично выбору в предыдущем примере. Пусть в относительных единицах $AE'_q = 1,3$; $B = 0,15$; $M_T = 1$; $D = 10$; $T_J = 12,7$ с, т. е. 4000 в относительных единицах (параметры после отключения линии).

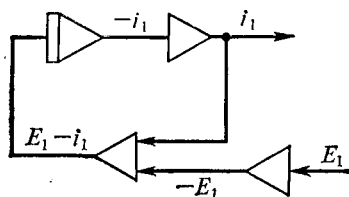


Рис. 7.12

Начальные условия: $s = 0$; $\delta = 30^\circ$. Заранее не известно, в каких пределах будут меняться переменные s и δ . Поэтому, когда данных об их изменениях нет, следует выбрать подходящие масштабы. Первые же опыты дадут необходимые сведения для правильного подбора масштабов. В большинстве случаев инженер знает, приблизительно в каких пределах изменяются интересующие его величины. В этом примере угол δ ориентировочно может меняться от -1 до 3 рад, а скольжение от $-0,01$ до $0,02$ (т. е. от -1 до 2%). Общая длительность процесса составляет 1 с

(314 рад). Масштабные множители введем, как и в предыдущем примере, с помощью равенств

$$\delta_1 = m_\delta \delta; \quad s_1 = m_s s; \quad M_1 = m_M M_T; \quad t_1 = m_t t;$$

$$f_1 = b_1 \sin \delta; \quad f_2 = b_2 \sin 2\delta.$$

Учитывая ожидаемые изменения искоемых величин, выберем $m_\delta = 25$ В/рад, $m_s = 5000$ В/рад, $m_M = b_1 = b_2 = 50$ В/рад. Учитывая ожидаемую длительность процесса (314 ед.), выберем масштаб времени $m_t = 0,25$ с/1. После подстановки масштабных множителей и коэффициентов в (7.7) и (7.8) получим уравнения

$$\frac{m_t ds_1}{m_s dt_1} = \frac{1}{T_J} \left[\frac{M_1}{m_M} - \frac{D}{m_s} s_1 - \frac{AE'_q}{b_1} \sin \left(\frac{\delta_1}{m_\delta} \right) - \frac{B}{b_2} \sin 2 \left(\frac{\delta_1}{m_\delta} \right) \right];$$

$$m_t d\delta_1 / (m_\delta dt_1) = s_1 / m_s;$$

$$ds_1/dt_1 = 0,1 (M_1 - 0,1s_1 - 1,3f_1 - 0,15f_2); \quad d\delta_1/dt_1 = 0,02s_1.$$

Коэффициенты не превышают тех пределов, которые допускаются конструкцией блоков. Если коэффициенты превышают значения $0,01-10,00$, то следует менять масштабы.

Схема моделирования (рис. 7.14) соответствует преобразованным уравнениям. Функциональный преобразователь f_1 получает на вход напряжение, изображающее в выбранном масштабе угол δ_1 ; на выходе его будет напряжение, пропорциональное $\sin \delta$. Аналогично преобразователь f_2 получает на вход напряжение δ_1 ; на выходе его будет напряжение, пропорциональное $\sin 2\delta$. Прежде чем собирать схему на коммутационном поле, следует подготовить функциональные преобразователи. Для этого вычерчивают график заданной функции с учетом выбранного масштаба переменных. В этом примере ординате $\sin \delta = 1$ соответствует 50 В, абсциссе, равной 1 рад, — 25 В. Тогда 1° будет соответствовать $25/57,3 = 0,436$ В.

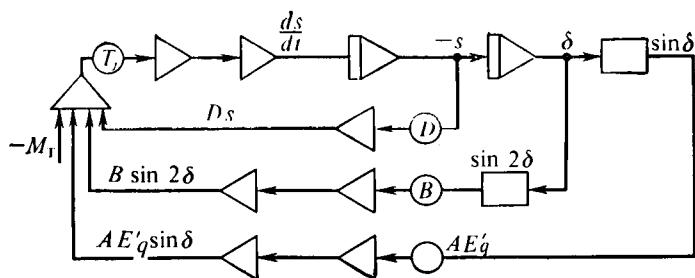


Рис. 7.13

Выбор масштабов осуществляется на основе уравнений моделируемого процесса и первой теоремы подобия. При этом следует иметь в виду, что между параметрами, воспроизводимыми непосредственно на АВМ, могут существовать некоторые дополнительные зависимости, которые в явном виде отсутствуют в моделируемой системе. Поэтому в наиболее общем случае для получения условий подобия поступают следующим образом:

1) в системе уравнений модели расчетные «машинные» параметры, для которых отсутствуют сходственные переменные в исходной системе, выражают через коэффициенты системы модели (так называемые машинные коэффициенты) и машинные параметры, имеющие сходственные величины в исходной системе;

2) в полученной системе машинные переменные выражают через масштабы и переменные x_j исходной системы;

3) сравнивают коэффициенты при соответствующих одночленах исходной и преобразованной систем;

4) в результате сравнения получают систему коэффициентов подобия, равных единице.

Эта система в общем виде может быть записана как

$$J_i = \prod_{j=1}^n \prod_{\mu=1}^{\lambda} \prod_{l=1}^r M_{ij}^{\alpha_{ij}} K_{\mu}^{\beta_{ij}} A_{l}^{\gamma_{ij}} = 1, \quad (7.9)$$

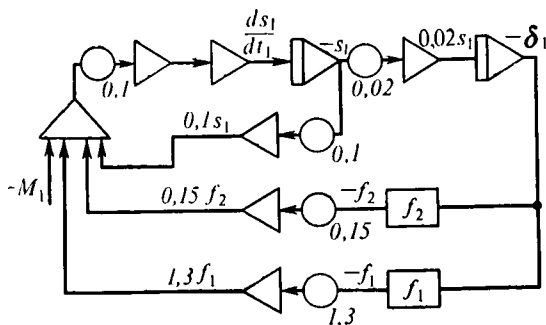


Рис. 7.14

где $i = 1, 2, 3, \dots$; j, μ и l — номера переменной, машинного коэффициента и коэффициента в исходной системе; $\alpha_{ij} = -1, 0, 1$; $\beta_{ij} = -1, 0, 1$; $\gamma_{ij} = -1, 0, 1$ — некоторые вспомогательные переменные, равные «1», если соответствующая величина M, K или A стоит в числителе коэффициента; «-1», если величина стоит в знаменателе; «0», если эта величина отсутствует в коэффициенте.

Число коэффициентов равно общему числу одночленов в исходной системе минус количество уравнений в этой системе:

$$m = \sum_{u=1}^r q_u - r,$$

где q_u — количество одночленов в q -м уравнении.

Уравнения (7.9), определяющие условия подобия модели и моделируемого явления, накладывают жесткие ограничения на выбор масштабов и машинных коэффициентов. Приведем пример. Пусть требуется вычислить коэффициенты подобия для аналоговой модели, воспроизводящей процесс, описываемый уравнением

$$a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} - a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} - a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = a_f f(t).$$

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{a_2}{a_3} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_3} \frac{dx}{dt} - \frac{a_0}{a_3} x + \frac{a_f}{a_3} f(t). \quad (7.10)$$

Процесс, определяемый уравнением (7.10), может быть воспроизведен некоторой структурной схемой, содержащей сумматоры и интеграторы, операции в которых производятся одновременно с умножением на машинные коэффициенты K . Машинные уравнения, отвечающие структурной схеме модели, имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= -[K_{14} x_6 + K_{13} x_4 + K_{12} x_5 + K_{11} f(\tau/M_t)]; \\ x_4 &= -\frac{1}{K_{61}} \cdot \frac{d}{d\tau} x_5; \\ x_3 &= -\frac{1}{K_{41}} \cdot \frac{d}{d\tau} x_4 = -\frac{1}{K_{41} K_{61}} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} x_5; \\ x_2 &= -\frac{1}{K_{31}} \cdot \frac{d}{d\tau} x_3 = -\frac{1}{K_{31} K_{41} K_{61}} \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} x_5; \\ x_1 &= -\frac{1}{K_{21}} x_2 = -\frac{1}{K_{21} K_{31} K_{41} K_{61}} \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} x_5; \\ x_6 &= -K_{61} x_3 = -\frac{K_{61}}{K_{41} K_{61}} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} x_5. \end{aligned}$$

Подставим в формулу для x_1 зависимости для x_2, x_3, x_4 и x_6 . Выразим x_5 и τ через масштабы:

$$x_5 = -M_x x; \tau = M_t t.$$

Разрешив полученное выражение относительно d^3x/dt^3 , запишем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = K_{14} K_{01} K_{21} K_{31} M_t \frac{d^2x}{dt^2} + K_{13} K_{21} K_{31} K_{41} M_t^2 \frac{dx}{dt} - \\ - K_{12} K_{21} K_{31} K_{41} K_{51} M_t^3 x + \frac{1}{M_x} K_{11} K_{21} K_{31} K_{41} K_{51} M_t^3 f(t). \quad (7.11)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых переменных в уравнениях (7.10) и (7.11), получим условия подобия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_3 K_{14} K_{01} K_{21} K_{31} M_t}{a_2} &= 1; \quad \frac{a_3 K_{14} K_{21} K_{31} K_{41} M_t^2}{a_1} = 1; \\ \frac{a_3 K_{12} K_{21} K_{31} K_{41} K_{51} M_t^3}{a_0} &= 1; \quad \frac{a_3 K_{11} K_{21} K_{31} K_{41} K_{51} M_t^3}{a_f M_x} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Таким образом, для подобия процессов в оригинале и модели необходимо, чтобы масштабы переменных и коэффициенты исходного и машинного уравнений удовлетворяли условиям (7.12).

§ 7.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Существует четыре пути применения математического подобия и моделирования в задачах электроэнергетики:

1) создание специальных алгоритмов и программ для решения на типовых ЦВМ задач, связанных с управлением, развитием (проектированием, планированием) и функционированием (эксплуатацией) больших систем энергетики. При этом методология анализа (особенно в части выбора масштабов, обработки результатов расчетов) должна быть полностью ориентирована на методы теории подобия — критерияльную обработку;

2) разработка специализированных ЦВМ и методов, приспособленных для решения конкретных задач, отвечающих определенным условиям и описываемых уравнениями определенного класса. Сюда надо, например, отнести кибернетическое моделирование, различные виды обобщенного моделирования;

3) создание гибридных устройств — аналогово-цифровых моделей, которые могут быть универсальными, но с большим успехом применяемые к задачам энергетики;

4) использование соотношений, вытекающих из теории подобия, и построение с их помощью обобщенных схем расчета, графовых моделей, мысленных структурных моделей и т. д.

Переходя к более детальному рассмотрению названных путей, заметим, что ЦВМ широко применяются при решении различных энергетических задач и, несомненно, являются одной из мощных составляющих метода моделирования.

При этом ЦВМ, моделирующие энергетические процессы, применяются в двух основных направлениях:

— работа в темпе происходящих энергетических процессов. В этом случае данные для вычислений могут

поступать в ЦВМ непосредственно от той системы, работа которой изучается или которой необходимо управлять (по-английски это называют «on line»). Здесь особенно важно быстроедействие машины и возможности ввода и вывода информации;

— решение задач проектирования, планирования и прогнозирования. Здесь нет надобности работать в темпе процесса, однако большое число уравнений, отвечающих, например, модели развития большой системы, требует быстрогодействия ЦВМ, для того чтобы в обозримые сроки решить поставленные задачи.

Эффективное моделирование на ЦВМ задач энергетики встречает трудности, связанные с разницей в скоростях машины и оператора, готовящего программы и данные для этих программ (например, получаемые путем обработки информации, поступающей из реальной системы, и вводимые затем в ЦВМ).

Создается ситуация, при которой время ввода необходимой информации в машину становится определенным барьером между инженером и цифровой моделью, реализованной с помощью вычислительной машины. Реальное время работы ЦВМ зависит также и от оператора, вводящего в нее данные. Это положение, иногда образно характеризуемое как «узкое горлышко цифровой вычислительной машины», сужает ее реальные возможности, в то время как именно реальные возможности и реальная необходимость в этих машинах должны приниматься инженером во внимание.

При выборе средств решения инженерных задач и тем более оценке получаемых результатов возникает проблема адекватности составленных программ и введенных в них данных реальной технической задачи. Выявление соответствия точности исходных данных и реально необходимой точности выходных данных, которые с учетом способов и методов программирования дает ЦВМ, — большая задача, частично сводящаяся к так называемой а п р о б а ц и и п р о г р а м м и проверке соответствия реальной эффективности программы в смысле получаемого технического, практического результата исходным предпосылкам, заложенным в эту программу.

Цифровые машины не являются моделирующими устройствами какого-либо конкретного процесса в том смысле, какой обычно на основе привычных представлений вкладывают в понятие модели. ЦВМ, получая данные для анализа, вычисляют какую-либо функцию, перерабатывают, хранят и выдают информацию, создавая [формальную модель-алгоритм вычисляемой функции.

Напомним, что под *алгоритмом* принято понимать точное задание однозначно определенной последовательности операций, перерабатывающих условия A в решение B или значение n в значение $m = \varphi(n)$, которое и определяет вычислительный процесс. Такое задание последовательности операций при любой исходной информации приводит к правильному искомому результату и соблюдению требований расчленения вычислительного процесса на элементарные шаги ограниченной сложности, которые выполняются «механически». Это, конечно, не

строгое, а скорее описательное определение понятия алгоритма. Классическим примером может быть алгоритм Евклида — нахождение общего наибольшего делителя двух целых чисел, проще — алгоритм сложения чисел столбиком и т. д. Отдельных конкретных алгоритмов известно очень много. Поскольку алгоритм задает строго определенную последовательность операций, то элементы этих операций, их всевозможные комбинации и результаты могут быть представлены некоторой функцией. Таким образом, алгоритму соответствует некоторая вычисляемая функция, определенная в цифрах и принимающая в качестве окончательных значений также цифры.

Если для математических задач, соответствующих определенным физическим проблемам, невозможно построить общий алгоритм решения, строятся алгоритмы для частных задач — создаются конкретные модели тех или иных процессов, изображаемых на дискретных вычислительных машинах.

Создание все более и более широких «электротехнических» и «электросистемных» алгоритмов позволяет проводить автоматические решения для обширных классов взаимоподобных задач. Распознавание подобия, установление условий его реализации во всех случаях должно производиться с помощью рассмотренных методов теории подобия, которая создает мост между методами эксперимента и вычислительной техники. Алгоритмы, перерабатывающие информацию, должны отвечать следующим требованиям:

1) иметь общность характера, т. е. отражать ход решения не какой-нибудь отдельной задачи, а класса обобщенных подобных задач, общность которых выявлена методами теории подобия и запись алгоритмов проведена в критериальных величинах;

2) обладать четкостью и однозначностью указаний по проведению операций на каждом этапе;

3) при любой исходной информации и точном соблюдении распоряжений, определяющих вычислительный процесс, должны непосредственно и наиболее быстро (по сравнению с другими возможными алгоритмами) приводить к решению, выдаваемому в удобной для использования форме, т. е. должны обладать результативностью;

4) должны выдавать окончательный результат в виде обобщенных зависимостей (соотношений, графиков), позволяющих распространить результаты на группы явлений, подобных данным.

При соблюдении указанных условий автоматическая ЦВМ вместе с соответствующим алгоритмом может рассматриваться как модель изучаемого процесса, обеспечивающая решение научных и технических задач. Результаты вычислений могут быть получены с большой, практически любой, степенью точности, что является большим достоинством ЦВМ. Однако реализация этого достоинства связана с преодолением ряда трудностей. Между тем очень большое число технических и научно-технических задач требуют сравнительно невысокой арифметической точности решения (три-четыре десятичных знака). К таким задачам относятся, например, все исследования динамики систем автоматического регулирования, переходных процессов в автоматически

регулируемых электрических системах и многие другие задачи, требующие решения дифференциальных уравнений и воспроизведения функциональных зависимостей.

В новых требованиях, предъявляемых к вычислительной технике, необходимо учитывать, что энергетика все больше интересует решения, использующие не только математические модели, алгоритм которых не предусматривает жесткого программного хода (как это делается в большинстве случаев при применении ЦВМ), но и модели, позволяющие подходить к задаче как к *эргатической*, т. е. такой, алгоритм которой предусматривает в процессе исследования или управления непосредственное участие человека-оператора в аналитических задачах. При эргатической модели отклонения от предусмотренной алгоритмом ситуации корректируются человеком-оператором (обладающим опытом — интуицией), который может вмешиваться в процесс исследования и изменять его в нужном направлении. Здесь вмешательство человека в процесс исследования или управления равносильно расширению алгоритма и переходу к более высокому классу задач.

При реализации рассматриваемого моделирования требуются изменения в подходах к программированию и сочетания цифровой вычислительной техники и техники аналоговой. Отсюда появляются новые модели — гибридные. Немалое внимание уделяется также и специальному программированию, которое можно назвать физическим или предметным программированием.

Оценивая гибридные модели, необходимо учитывать возможности АВМ. Погрешности в ее работе объясняются свойствами этих машин: 1) неточностью вычислительных блоков; 2) «дрейфом», вызывающим определенные изменения в блоках, проявляющиеся во время выполнения операций; 3) значительным числом блоков, необходимых для решения сложных задач, так как каждый из них используется только один раз; 4) затратой времени для набора задачи; 5) возможными ошибками при наборе сложных схем и установке их параметров, а также в связи с нарушением контактов между отдельными элементами; 6) ограниченной точностью, с которой параметры могут быть введены в машину, и возможной погрешностью, с которой может быть получено решение.

Преимущества АВМ наиболее полно проявляются при решении нелинейных задач. Это прежде всего большая скорость, позволяющая получать решения не только в натуральном времени, но даже много быстрее. Так, они могут решать различные динамические задачи, относящиеся к электроэнергетике, в сотни раз быстрее, чем протекает реальный процесс, и быстрее, чем решают современные ЦВМ. Когда нужно провести большое число испытаний, исчисляющихся тысячами, фактор большой скорости АВМ становится очень существенным. Аналоговые машины настолько гибки во времени, что позволяют «легко превратить годы в часы и часы в секунды» и, наоборот, сколь угодно замедлять сверхбыстрые явления для изучения их в замедленном масштабе. Ученые давно стремятся снять недостатки АВМ, сочетая их с ЦВМ, чтобы возможности одной системы компенсировали ограничения другой.

Именно в связи с этим начинают все шире распространяться гибридные вычислительные машины, наиболее успешно применяемые для решения смешанных задач, т. е. задач, одни вопросы которых лучше решаются на АВМ, а другие -- на ЦВМ. К таким смешанным задачам относится подавляющее большинство электроэнергетических задач. Гибридные машины дают непрерывное решение систем исследуемых уравнений, но без тех загрузлений, которые неизбежны в АВМ, поскольку гибридная машина имеет цифровую часть для арифметических действий и тех преобразований, которые по условиям конкретной задачи требуется провести численно точно. В то же время быстро протекающий процесс природы отображается соответствующим быстро протекающим процессом в аналоговой части модели, рассматриваемой в том же или любом другом масштабе времени. Цифровая документация, необходимая в ряде случаев и весьма важная для обработки результатов, легко реализуется в гибридных машинах.

Все необходимые данные закладываются в цифровую часть машины, которая, выполняя сложные логические и решающие операции, инспектирует аналоговую часть, оценивает решение и определяет, какой шаг нужно далее предпринять и как изменять параметры в аналоговой части, чтобы получить сопоставляемые варианты решений. В гибридной машине имеется полная возможность эргатического подхода, т. е. наилучшего взаимодействия инженера-исследователя и оператора с машиной.

Здесь всегда имеется выбор между полностью автоматической групповой работой с ручным взаимодействием, полностью автоматической работой или автоматической работой с ручным вмешательством. Все это и позволяет обеспечить наилучший подход к определению тактики ведения операций и повышает ценность гибридных машин. Способность обеспечивать высокую скорость исследования гибридная машина получает от элементов аналоговой машины; в то же время свойства, позволяющие проводить контроль, закладываются в элементы цифровой машины. Элементы цифровой машины могут осуществлять также контроль логики собранных схем и контроль состояния аналоговой части машин, т. е. контроль состояния контактов во всех элементах машины.

Сопоставление гибридных и цифровых машин позволяет оценить их преимущества и недостатки, а следовательно, оценить области их применения. Одним из существенных показателей при этом является скорость моделирования в зависимости от сложности задачи, которая условно определяется числом уравнений, описывающих исследуемые процессы. При больших скоростях моделирования преимущества имеют гибридные машины, в то время как при решении задач относительно меньшей условной сложности, но требующих большей тщательности при получении цифровых результатов (это, например, задачи анализа экономических соотношений, бухгалтерских расчетов, задачи, связанные с построением таблиц), преимущества имеют цифровые машины. Другим существенным показателем сравнительной оценки цифровых и гибридных машин является стоимость операций моделирования.

§ 7.4. ЦИФРОВОЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Применение этого вида моделирования при исследовании процессов в сложных системах представляет в настоящее время одну из актуальных задач электроэнергетики. Здесь перспективно применение типичного для кибернетики приема моделирования одной функции другой функцией, причем внутреннее содержание подсистемы, представляющее функцию-оригинал и функцию-модель, может оставаться не полностью раскрытым или совсем не раскрытым. Такой подход позволяет снять многие из трудностей, возникающих в связи с тем, что между отдельными подсистемами и отдельными элементами электроэнергетической системы имеются сложные связи, представляемые обычно в виде алгебраических или интегродифференциальных уравнений.

Решение уравнений переходных процессов при данном подходе предусматривает разделение времени протекания процесса на отдельные интервалы. При этом производится временное разбиение и разделение анализируемой системы на подсистемы как во времени, так и в пространстве. Разделение в пространстве становится возможным при использовании аппарата причинно-следственных связей, вводящего в рассмотрение взаимодействия и реакции отдельных подсистем. Построение модели системы в виде совокупности воздействующих друг на друга подсистем предполагает следующие действия: определяются границы подсистем, представляемых блоками; устанавливается характер связей между блоками и направление их; составляется математическое описание выделенных подсистем, при этом принимается, что воздействие других подсистем представляется некоторыми параметрами режима на границах подсистем и что данное воздействие не зависит от процессов, происходящих внутри подсистемы, т. е. что входные переменные не зависят от внутренних переменных этой подсистемы.

Представление подсистем, входящих в моделируемую систему, может быть различным, при этом большое значение имеет тот факт, что одни части системы воздействуют на другие с помощью переменных на границах подсистем; в силу этого для адекватного отражения какой-либо части подсистемы по отношению к остальной части системы требуется лишь правильное воспроизведение связей между величинами на границах, т. е. между воздействиями и реакциями подсистемы. Таким образом, блок, представляющий подсистему, должен быть в этом смысле изофункционален ей, т. е. должен обеспечивать тождественную связь между входами и выходами.

Указанное обстоятельство обуславливает значительную гибкость в математическом описании подсистем и построении модели. Подсистема может, в частности, быть представлена функционалом, непосредственно связывающим входные и выходные величины блока без раскрытия внутренних процессов блока, а также системой уравнений, связывающей входные переменные (воздействия), внутренние переменные и выходные переменные (реакции). В одной модели системы могут быть соединены блоки как с первым, так и со вторым типом описания. Приемлемый тип описания может быть выбран, исходя из значения различ-

ных подсистем в рассматриваемом процессе, их расстояния от места возмущения, размера и характера.

Взаимодействие различных блоков, составляющих модель, организуется на основе определения реакций отдельных подсистем в конце интервала по заданным воздействиям на эти блоки в начале интервала и передачи этих реакций непосредственно или через преобразовательные элементы различным блокам системы как воздействий. Непосредственная передача реакций на входы блоков возможна, если воздействия (и соответственно реакции) граничащих друг с другом блоков имеют разнородный характер. Например, для одних блоков воздействиями являются токи, а реакциями — напряжения, а для других — наоборот. Если же воздействия имеют однородный характер, то входы и выходы блоков соединяются через преобразовательные элементы, обеспечивающие соблюдение определенных условий на границах подсистем.

При описании блока системой уравнений приращения выходных, а также внутренних величин определяются методами численного интегрирования дифференциальных уравнений. Задание непосредственной связи между входами и выходами для линейного блока требует определения переходных функций и вычисления значений выходных величин по дискретной форме интеграла Дюамеля как суммы реакций на поступившие к данному моменту воздействия.

Для нелинейных подсистем связь между блоками может быть получена с помощью интегральных рядов Вольтерра, записанных в дискретной форме. Нелинейный блок можно реализовать в модели, параллельно соединяя линейные блоки и включенные на выходе некоторых из них множительные устройства.

Возможным вариантом построения модели является создание иерархической системы блоков, в которой большие блоки, образующие систему, в свою очередь, состоят из отдельных малых блоков, взаимодействующих друг с другом. В этом случае отдельно организуется взаимодействие внутри больших блоков, образующих систему, и между этими блоками.

Рассмотрим применение данных принципов к моделированию переходных электромеханических процессов в электрических системах. При этом вначале построим модель для случая, когда внутри достаточно больших блоков (подсистем) выделяются отдельные малые (элементарные) блоки. В качестве элементарных блоков удобно принять отдельные генераторы и подсистемы, включающие ЛЭП, сети и нагрузки.

Схема модели такого рода показана на рис. 7.15. Узлы нагрузки и ЛЭП системы представлены блоком 1, а генераторы — блоками 2—5. В качестве воздействий на генераторы со стороны остальной части системы приняты токи статора, в качестве реакций — напряжения на зажимах. Воздействиями для блока нагрузок являются напряжения, а токи определяются как реакции.

Если нагрузки системы заданы постоянными линейными сопротивлениями, то блок 1 является линейным, для которого связь между воздействиями и реакциями выражается уравнением

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}.$$

(7.13)

Реакцию генераторного блока определяем, рассматривая синхронный генератор в координатах d, q и используя уравнение движения ротора. Реакция генератора рассчитывается отдельно по осям d, q , что позволяет достаточно просто учитывать демпферные цепи, характеристики регуляторов возбуждения и нелинейности.

В пределах одного интервала принимается, что токи, действующие по осям генератора, постоянны. Рабочий процесс модели на интервале состоит из двух основных стадий: 1) определение изменений (приращений) выходных величин генератора, т.е. напряжений за вре-

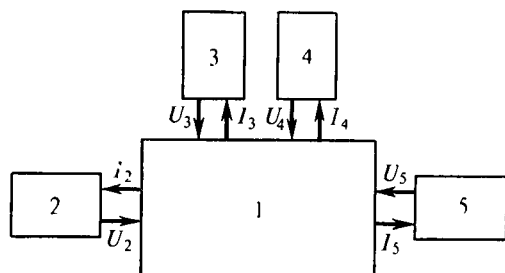


Рис. 7.15

мя Δt , и вычисление абсолютных значений этих величин к концу интервала; 2) определение квазистатического режима, соответствующего границе интервала по уравнению (7.13), при учете параметров только внутренней части системы, представленной блоком 1.

При этом можно выделить некоторые принципиальные особенности метода: 1) в ходе расчета определяются не значения э.д.с., являющиеся в данном рассмотрении внутренними переменными генераторных блоков, а переменные на границах блоков — токи и напряжения; 2) одному интервалу времени соответствует один цикл расчета, следовательно, метод является безытеративным.

Представим подробнее алгоритм расчета переходного электромагнитического процесса, составленный по данным принципам, применительно к случаю, когда учитывается переходный электромагнитный процесс в обмотках возбуждения генераторов и не учитываются демпферные обмотки, переходные процессы в цепях статора и потери активной мощности в генераторах. Дополнительно примем, что $P_g \equiv M_g$.

В начале интервала Δt известны векторы напряжений на зажимах генераторов (их модули U_n и углы φ_{U_n}), а также абсолютные углы, определяющие положения роторов δ_n . Последовательность действий имеет следующий вид:

1) рассчитываются токи статора для всех генераторов системы по уравнению (7.13). В результате определяются модули I_n и фазы токов φ_{I_n} ;

2) находятся составляющие тока статора по осям d , q и приращения этих составляющих:

$$\left. \begin{aligned} I_{dn}^{(k)} &= I_n \sin(\delta_n - \varphi_{In}); \quad I_{qn}^{(k)} = I_n \cos(\delta_n - \varphi_{In}); \\ \Delta I_{dn}^{(k)} &:= I_{dn}^{(k)} - \Delta I_{dn}^{(k-1)}; \quad \Delta I_{qn}^{(k)} = I_{qn}^{(k)} - I_{qn}^{(k-1)}; \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

3) определяются приращения напряжения по осям d , q для каждого генератора:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{dn}^{(k)} &:= \Delta I_{qn}^{(k-1)} x_{qn}; \\ \Delta U_{qn}^{'(k)} &= - \frac{\Delta t}{T_{don}} \sum_{i=1}^{k-1} (x_{dn} \Delta I_{dn}^{(i)} + \Delta U_{qn}^{(i)}) - \Delta I_{dn}^{(k-1)} x'_{dn}; \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

4) рассчитывается приращение напряжения на обмотке возбуждения при наличии регулятора возбуждения и приращение U_{qn} , вызванное действием регулятора:

$$\Delta U_{fn}^{(k)} = - \frac{\Delta t}{T_{fn}} \sum_{i=1}^{k-1} (k_{0U} \Delta U_n^{(i)} + \Delta U_{fn}^{(i)}); \quad (7.16)$$

$$\Delta U_{qn}^{''(k)} = \frac{\Delta t}{T_{d0}} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{x_{afdn}}{r_{fn}} \Delta U_{fn}^{(i)} - \Delta U_{qn}^{''(i)} \right); \quad (7.17)$$

5) находятся величины U_{dn} , U_{qn} в конце интервала:

$$U_{dn}^{(k)} = U_{dn}^{(k-1)} + \Delta U_{dn}^{(k)}; \quad U_{qn}^{(k)} = U_{qn}^{(k-1)} + \Delta U_{qn}^{'(k)} + \Delta U_{qn}^{''(k)}; \quad (7.18)$$

6) определяются мощность генераторов в начале интервала и избытки мощности:

$$P_n = U_n I_n \cos(\varphi_{Un} - \varphi_{In}); \quad \Delta P_n = P_n - P_n^0; \quad (7.19)$$

7) вычисляются угловые перемещения машин для первого и последующих интервалов

$$\Delta \delta_n = k_n \Delta P_n / 2; \quad \dots \quad \Delta \delta_n^{(k)} = \Delta \delta_n^{(k-1)} + k_n \Delta P_n; \quad (7.20)$$

8) находятся углы машин в конце интервала Δt

$$\delta_n^{(k)} = \delta_n^{(k-1)} + \Delta \delta_n^{(k)}; \quad (7.21)$$

9) вычисляются модули и фазы векторов напряжений генераторов в конце интервала:

$$U_n^{(k)} = \sqrt{U_{dn}^2 + U_{qn}^2}; \quad \varphi_{Un}^{(k)} = \delta_n^{(k)} - \arctg[U_{dn}^{(k)} / U_{qn}^{(k)}]; \quad (7.22)$$

10) определяются приращения модулей напряжений

$$\Delta U_n^{(k)} = U_n^{(k)} - U_n^{(k-1)}. \quad (7.23)$$

Формулы (7.22) — (7.23) соответствуют условию — токи I_d и I_q внутри интервала Δt не меняются. Аналогично рассчитываются ΔU_d и ΔU_q , если учитываются демпферные цепи по осям d , q генераторов.

Подсистема, представленная в модели блоком, как было указано выше, может охватывать большую часть электрической системы, вклю-

чая значительное число генераторов и других элементов. При описании системой уравнений блок рассматривается как единое целое на основе определения всех существующих между элементами данной подсистемы связей. Блоки соединяются между собой причинно-следственными связями, отражающими реально существующие физические связи системы.

В пределах интервала Δt каждый блок рассматривается отдельно как находящийся под постоянным во времени воздействием других подсистем и определяется приращение внутренних переменных и выходных переменных (реакций) данного блока. Взаимодействие между блоками осуществляется на границах интервалов обменом реакциями.

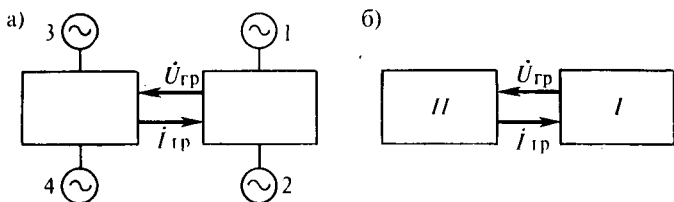


Рис. 7.16

Поскольку реакции являются физическими величинами на границах подсистем, взаимодействие отдельных частей системы происходит на пространственных и временных границах.

Рассмотрим модель, составленную для решения уравнений переходного процесса в электрической системе, содержащей четыре генератора (рис. 7.16). Предположим, что данная система состоит из двух частей, связанных ЛЭП, причем в каждую из них входят два генератора. В таком случае она может быть представлена как соединение блоков на рис. 7.16, а или в более общем виде на рис. 7.16, б. Для решения процесса в подсистемах может быть применен любой конечно-разностный метод. При подробном представлении генераторов (учет электромагнитных процессов в роторе и учет регуляторов) наиболее целесообразно разделить подсистему на элементарные блоки и использовать метод кибернетического моделирования, производя расчет для генераторных блоков по формулам (7.22) — (7.23).

Уравнения для внутренних блоков подсистем I и II будут иметь вид соответственно

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{гр} \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{гг} & K_{г1}^{(U)} & K_{г2}^{(U)} \\ K_{г1}^{(I)} & Y_{11} & Y_{12} \\ K_{г2}^{(I)} & Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{гр} \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}; \quad (7.24)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{гр} \\ \bar{I}_3 \\ \bar{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{гг} & Y_{г3} & Y_{г4} \\ Y_{3г} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{4г} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{гр} \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Величины, входящие в правые части матрицы уравнений (7.24) и (7.25), должны быть заданы для момента $t = 0$ в качестве начальных условий. Кроме того, должны быть известны мгновенные приращения токов ΔI_d , ΔI_q при $t = 0$ для всех генераторов. Определив напряжение и угол ротора каждого генератора, в конце интервала Δt следует рассчитать величины, находящиеся в левой части уравнений (7.24) и (7.25) для того же момента времени. Значение $U_{гр}$, найденное в (7.24), используется на следующем интервале времени в правой части уравнения (7.25), а значение $I_{гр}$, определяемое по (7.25), подставляется в правую часть (7.24).

Подсистемы могут и не разделяться на элементарные блоки и будут в этом случае описываться системами уравнений, относящимися к отдельным подсистемам.

Если для генераторов принято условие постоянства э.д.с. за переходным реактивным сопротивлением, то уравнения для блоков *I* и *II* принимают вид:

— подсистема *I*

$$P_1 = \frac{E_1^2}{z_{11}} \sin \alpha_{11} + \frac{E_1 E_2}{z_{12}} \sin (\delta_{12} - \alpha_{12}) + E_1 I_{гр} k_{1гр} \sin (\delta_{1гр} - \alpha_{1гр});$$

$$P_2 = \frac{E_2 E_1}{z_{21}} \sin (\delta_{21} - \alpha_{21}) + \frac{E_2^2}{z_{22}} \sin \alpha_{22} + E_2 I_{гр} k_{2гр} \sin (\delta_{2гр} - \alpha_{2гр});$$

$$\dot{U}_{гр} = Z_{гг} \dot{I}_{гр} + K_{г1} \dot{E}_1 + K_{г2} \dot{E}_2;$$

— подсистема *II*

$$P_3 = \frac{E_3^2}{z_{33}} \sin \alpha_{33} + \frac{E_3 E_4}{z_{34}} \sin (\delta_{34} - \alpha_{34}) + \frac{E_3 U_{гр}}{z_{3гр}} \sin (\delta_{3гр} - \alpha_{3гр});$$

$$P_4 = \frac{E_4 E_3}{z_{43}} \sin (\delta_{43} - \alpha_{43}) + \frac{E_4^2}{z_{44}} \sin \alpha_{44} + \frac{E_4 U_{гр}}{z_{4гр}} \sin (\delta_{4гр} - \alpha_{4гр});$$

$$\dot{I}_{гр} = -Y_{гг} \dot{U}_{гр} + Y_{г3} \dot{E}_3 + Y_{г4} \dot{E}_4.$$

Приращения углов, определяющих положение роторов различных генераторов, находятся по известным формулам метода последовательных интервалов.

Система может быть аналогично представлена тремя блоками (рис. 7.17, а) и более (рис. 7.17, б). Процесс решения в таких случаях не отличается от описанного выше.

В первой модификации метода ток на границе блоков определяется из системы уравнений, соответствующей одному блоку, а напряжения — из системы, соответствующей другому блоку. Возможна, однако, другая модификация метода, при которой на границе каждого временного интервала решается следующая система уравнений:

$$\bar{U}_{гр} = Z_{гг} \bar{I}_{гр} + K_{г1} \bar{E}_1 + K_{г2} \bar{E}_2;$$

$$\bar{I}_{гр} = -Y_{гг} \bar{U}_{гр} + Y_{г3} \bar{E}_3 + Y_{г4} \bar{E}_4,$$

где $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ определены в блоке *I*, а $\bar{E}_3$ и $\bar{E}_4$ — в блоке *II* для данного момента времени.

Найденные из этой системы уравнений значения $U_{гр}$ и $\bar{I}_{гр}$ используются в качестве независимых переменных для расчета на следующем интервале соответственно в блоках II и I.

Если исследуемая система представляется большим числом подсистем, то число неизвестных и соответственно число уравнений в решаемой системе для определения граничных переменных будет равно удвоенному числу физических связей между подсистемами.

Во второй модификации метода переменные на границе временного интервала вычисляются с помощью уравнений, составленных из ус-

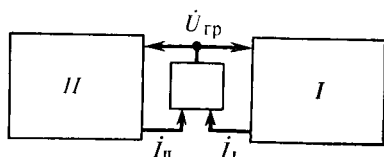
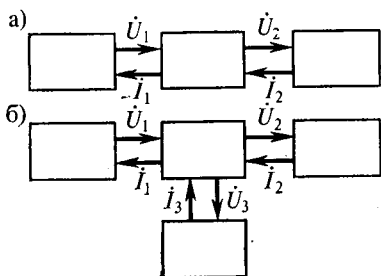


Рис. 7.18

Рис. 7.17

ловия равенства этих переменных, когда они определены в различных граничащих подсистемах. Для рассмотренного выше случая составленное таким образом уравнение имеет вид

$$Y_{гр}^I \bar{U}_{гр} + Y_{г1} \bar{E}_1 + Y_{г2} = -Y_{гр}^{II} \bar{U}_{гр} + Y_{г3} \bar{E}_3 + Y_{г4} \bar{E}_4, \quad (7.26)$$

откуда определяется напряжение на границе $\bar{U}_{гр}$, используемое для расчета на следующем интервале. Уравнение (7.26) можно представить в другом виде:

$$\bar{Y}_{гр}^I \bar{U}_{гр} + \bar{I}_I = -Y_{гр}^{II} \bar{U}_{гр} + \bar{I}_{II},$$

где $\bar{I}_I$ и $\bar{I}_{II}$ — составляющие граничного тока $\bar{I}_{гр}$, обусловленные внутренними переменными подсистем I и II.

Схема модели такого рода приведена на рис. 7.18. Нетрудно показать, что число уравнений системы для определений граничных параметров режима равно числу линий, связывающих различные подсистемы.

В ряде модификаций метода для определения граничных параметров режима решается дополнительная система уравнений, учитывающая условия во всех подсистемах; переходы через те моменты времени, в которых происходят скачкообразные изменения параметров системы, т. е. коммутации, не вносят каких-либо особенностей в процедуру расчета. Если же в качестве воздействий для одних подсистем непосредственно используются реакции других, то при скачкообразных изменениях параметров схемы необходимо производить некоторые дополнительные действия. Функции токов и напряжений (при допущениях, обычно принимаемых в расчетах электромеханических переходных процессов) испытывают при коммутациях разрывы, поэтому

нельзя принять в качестве воздействия для одних блоков реакции, определенные в других блоках на предыдущем интервале. Граничные параметры режима для мгновения, непосредственно следующего за коммутацией, должны определяться или из решения системы уравнений, или с помощью итерационного процесса, при котором в отдельных блоках модели определяются реакции по значениям воздействий, известным из режима, предшествующего коммутации, и передаются в другие блоки. Таким образом, во втором случае расчет организуется так же, как для переходного процесса, однако при временном интервале $\Delta t = 0$.

В то же время, как показал ряд расчетов (в частности, для электромагнитных переходных процессов в цепях RLC), точное определение начальных условий для первой стадии переходного процесса может иногда не проводиться. При этом в качестве начальных условий можно принять параметры режима, предшествующего рассматриваемому, и, имея для первой стадии процесса значительные отклонения рассчитанных величин от действительных, приближаться к точному решению непосредственно в ходе расчета переходного процесса. Однако определение границ применимости такого приема при решении переходных процессов требует дополнительных исследований.

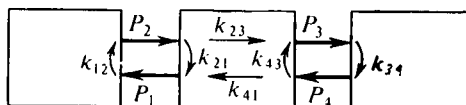


Рис. 7.19

Решение динамических задач предлагаемым методом имеет ряд существенных особенностей.

Для первой модификации метода характерно отклонение значений переменных, рассчитанных для первых интервалов, от тех, которые находятся методом численного интегрирования, но без разделения системы на отдельные блоки. Значения отклонений тем меньше, чем меньше принятый шаг интегрирования. Причиной их возникновения является то обстоятельство, что при определении реакций блоков в конце интервала не учитывается изменение воздействий со стороны других блоков за время интервала.

Изменение этих отклонений на последующих интервалах зависит от вычислительной устойчивости принятой модели системы. При устойчивой модели отклонения уменьшаются в ходе интегрирования, и после определенного числа шагов рассчитанные величины практически совпадают с теми, которые находятся из уравнений, составленных для системы. В случае неустойчивой модели погрешности нарастают в ходе расчета, что делает ее применение для анализа процессов невозможным. Как показал анализ, данная погрешность имеет колебательный характер и периодически меняет знак.

Условия устойчивости при моделировании переходного процесса таким образом тесно связаны с условиями устойчивости данной схемы вычислений при моделировании установившегося процесса. Рассматриваемую модель можно использовать для определения статического режима, если вычислительный процесс протекает при шаге

интегрирования $\Delta t = 0$. Модель, очевидно, будет устойчивой, если при отклонениях на полюсах модели от значений, соответствующих установившемуся режиму (при данных значениях инерционных внутренних переменных блоков), эти отклонения в процессе работы модели приближаются к нулю. Покажем, как определить устойчивость линейной модели (рис. 7.19) (величины k внутри блоков являются коэффициентами связи между приращениями переменных P на полюсах блоков). Значения отклонений после n тактов работы модели связаны с исходными отклонениями зависимостью:

$$\begin{vmatrix} \Delta P_{1n} \\ \Delta P_{2n} \\ \Delta P_{3n} \\ \Delta P_{4n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k_{21} & 0 & k_{41} \\ k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & 0 & k_{43} \\ 0 & 0 & k_{34} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta P_{10} \\ \Delta P_{20} \\ \Delta P_{30} \\ \Delta P_{40} \end{vmatrix}$$

или в более общем виде

$$\Delta P_n = \alpha_n \Delta P_0,$$

где α — матрица связи между приращениями переменных на полюсах блоков.

Как известно из алгебры матриц, при большом значении n

$$\alpha_n \approx \lambda_{1n} \prod_{s=2}^n \frac{\alpha - \lambda_s [I]}{\lambda_1 - \lambda_s},$$

где λ_1 — наибольшее собственное значение матрицы α .

Нетрудно видеть, что модель устойчива для статического процесса при $|\lambda_1| < 1$. Если модель неустойчива при данном разделении на блоки и направлении связей, она может быть устойчива при изменении направления связей или границ блоков. Нелинейные модели при достаточно малых отклонениях могут быть сведены к линейным с помощью линеаризации характеристик в рассматриваемой области.

Устойчивость модели рассматриваемого класса для статического процесса — необходимый признак ее устойчивости при расчете динамического процесса. Однако при этом имеет значение и шаг интегрирования.

Предлагаемый метод моделирования и расчета процессов в электрических системах позволяет существенно уменьшить объем вычислений, а также объем памяти ЦВМ. Например, если внутренняя часть системы (сеть и нагрузки) представляется при расчете комплексными сопротивлениями без учета переходных процессов, то число собственных и взаимных сопротивлений, необходимое для расчета, уменьшается примерно в K раз, где K — число блоков, каждый из которых содержит одинаковое число генераторов. Приблизительно в таком же соотношении уменьшается объем вычислений на шаге интегрирования. Данная зависимость относится к достаточно большим системам, включающим несколько десятков генераторов, при этом число K не должно быть чрезмерно большим.

Использование рассмотренного метода облегчает также учет коммутаций и нелинейностей в системе, поскольку пересчет параметров

должен проводиться только в той подсистеме, в которой произошли коммутация и переход на другие участки характеристик элементов.

Алгоритм кибернетического моделирования электрических систем можно окончательно представить в виде последовательности действий (рис. 7.20):

1) выделение внутри системы 1—2 подсистем ($1'$, $2'$, $3'$ и $1''$, $2''$, $3''$) и формирование уравнений преобразования, т. е. функциональных моделей подсистем (рис. 7.20, а);

2) построение модели функционального взаимодействия системы (рис. 7.20, б), внутри которой подсистемы (I , ..., VI) представляются через элементы, заданные функциональными характеристиками (a' , a'' , a''' , ..., g' , g'' , g''');

3) решение, проводимое на полученной функциональной модели, и определение таким образом граничных переменных;

4) обращение к моделям подсистем (модели нижнего уровня) и при необходимости раскрытие процесса внутри подсистем.

В случае, когда при моделировании интересуются только явлениями, происходящими в одной или нескольких подсистемах сложной системы, можно применить алгоритм с циклическим использованием полной модели подсистемы, а остальные представить функциональной

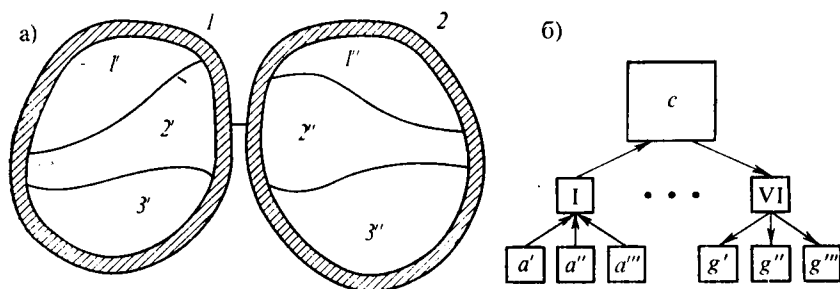


Рис. 7.20

моделью. Это позволяет, не раскрывая явлений, происходящих во всей системе, достаточно точно учитывать их влияние на процессы в интересующей части. Принятый тип функционального представления (линейный или нелинейный) определяется, кроме того, предполагаемым уровнем возмущений на границах подсистем. Таким образом, в зависимости от требуемой степени детализации исследуемых процессов, а также их характера может изменяться используемое описание подсистем, что позволяет экономить память и уменьшать объем вычислений при моделировании на ЦВМ. Кроме того, то обстоятельство, что в кибернетических моделях исключается характерное для обычных методов математического моделирования рассмотрение связей внутри подсистем, позволяет уменьшить необходимый объем памяти и вычислений.

Удобство моделирования, а также обобщимость и наглядность его результатов изменяются в зависимости от принятого описания под-

систем, структуры связей и вида деления. *Кибернетическое моделирование облегчает отражение и изучение явлений, происходящих в окружающей среде, представленной отдельными подсистемами.* Его алгоритмы могут являться основой для построения специализированных моделей электрических систем. Отдельные блоки этих моделей должны вычислять выходные величины подсистем по универсальным уравнениям преобразования при известных функциональных характеристиках подсистем. Между собой блоки должны соединяться непосредственно без промежуточных преобразований (модели типа I) или через блоки связи, обеспечивающие решения систем уравнений связи (модели типа II). Создание специализированных моделей позволяет реализовать преимущества, заложенные в принципах кибернетического моделирования. В частности, для моделирования переходных процессов перспективно применение блоков кибернетической модели, представляющих собой цифровые интеграторы нового типа с памятью, реализующие представление подсистем функционалами. Таким образом, *кибернетическая модель электрической системы — это модель иерархического типа, в которой на высшем уровне воспроизводится процесс взаимодействия между подсистемами на основе моделирования функций подсистем функциями и отражения структуры связей между подсистемами; на нижних уровнях определяются функциональные характеристики подсистем и при необходимости раскрываются их внутренние процессы.*

§ 7.5. ТРЕНАЖЕРЫ

В ряде случаев модель может рассматриваться как тренажер* для исследования поведения персонала в условиях непредвиденных ситуаций, появляющихся при отклонениях работы энергетической установки от заданного режима. Такого рода отклонения возникают случайно и для их своевременного выявления и устранения требуется постоянная готовность операторов. Подготовку на тренажерах операторы проходят в режимах обучения и контроля. В режиме обучения подготовка операторов проводится по заранее составленным сценариям, в которых изучаются нестандартные ситуации. Подобие процессов на модели-тренажере может быть только частичным. В режиме контроля, чтобы как можно полнее воспроизводить на тренажере условия работы операторов, тщательно имитируются случайные возникновения неисправностей. Нестандартные ситуации могут вызывать как неисправности внутри изучаемого энергоблока (неисправности в оборудовании или в системах управления), так и внешние воздействия (например, внезапное уменьшение электрической нагрузки, ошибки операторов и т. д.).

Операторы с помощью тренажера-модели, как правило, обнаруживают не первопричину возникновения нестандартных ситуаций, а

* 1. Мурадян С. Г., Каширин В. М. Система подготовки операторов АЭС. — Электрические станции, 1981, № 1, с. 14—18. 2. Анализ аварий. — В кн.: Безопасность ядерной энергетики/ Под ред. Дж. Раста и Л. Уивера. — М.: Атомиздат, 1980, 243 с.

определенное состояние технологических систем, которое является следствием имевших место нарушений или отклонений. Неисправности в оборудовании, нарушения в работе и отклонения от заданных режимов работы технологических систем обычно представляют в виде трех групп: возмущений, которые, как правило, не приводят к аварийным ситуациям, например выход из строя отдельных органов контроля; возмущений, которые могут привести к аварийным ситуациям, если не будет соответствующего вмешательства персонала; возмущений, обязательно приводящих к аварийным ситуациям.

Случайный характер возникновения нестандартных ситуаций можно имитировать с помощью генераторов случайных чисел. Генератор случайных чисел периодически (например, с периодом, равным шагу интегрирования) выдает числа в интервале (a, b) , разделенном на две части (a, c) и (c, b) , причем интервал (c, b) намного больше интервала (a, c) . Если случайное число попало в интервал (c, b) , считается, что нет возмущения. В свою очередь интервал (a, c) разделен на малые интервалы, число которых соответствует числу возможных возмущений, а ширина интервалов соответствует вероятности их возникновения. Если генератор случайных чисел выдал число в интервале $(a_i, c_i) \in (a, c)$, это означает, что выбрано возмущение с соответствующим номером i .

Как было отмечено ранее, в множество возмущений входят как дискретные, так и непрерывные входные параметры. Если интервалу (a_i, c_i) соответствует дискретный входной параметр, то при попадании случайного числа x в любое место области (a_i, c_i) выбирается данное дискретное возмущение. Если же интервалу (a_i, c_i) соответствует непрерывная переменная, вероятность появления значений которой также изменяется непрерывно на этом интервале, то выбор значений переменной можно осуществить двумя способами. При первом способе ввод значений входного параметра можно дискретизировать, разделив интервал (a_i, c_i) на подынтервалы, ширина которых пропорциональна вероятности появления дискретных значений входного параметра. Во втором способе считают, что некоторый характерный параметр системы T , являющийся функцией параметров T_0, T_1 системы, зависит от случайного числа x и значения a_i согласно выражению:

$$T = T_0 \exp [\alpha (x - a_i)^2],$$

где

$$\alpha = \ln (T_1/T_0)/(c_i - a_i)^2.$$

Вероятность возникновения произвольного возмущения и вероятность возникновения возмущения, соответствующего интервалу (a_i, c_i) ,

$$q = (a - c)/(a - b); \quad q_i = (a_i - c_i)/(a_i - b_i).$$

Очевидно, что $q = \sum_{i=1}^l q_i$, где l — число возмущений.

Процесс контроля на тренажере с использованием рассматриваемого способа ввода возмущений производится в следующем порядке.

Устанавливается заданный исходный режим на тренажере и запускается генератор случайных чисел. Произвольное возмущение (из выбранного множества) вводится в моделируемый технологический процесс в течение времени t_0 , определяемого из методических и психологических соображений. Если предположить, что за время t производится n розыгрышей, то вероятность того, что в течение этого времени будет выбрано хоть одно произвольное возмущение,

$$Q = 1 - (1 - q)^n.$$

Очевидно, что при достаточно большом n вероятность выбора какого-либо возмущения стремится к единице.

Координата точки c на интервале (a, b) при заданных t_0 и скорости розыгрышей k

$$c = a - (a - b) [1 - (1 - Q)^{1/n_0}],$$

где n_0 — целая часть выражения kt_0 .

С момента ввода возмущений начинается изменение технологических параметров, оператор своими действиями должен способствовать ликвидации нарушения и восстановлению нормального режима изучаемой установки.

При этом ход контрольного занятия регистрируется и соответствующая распечатка выводится в конце занятия. Например, при воспроизведении на тренажере практики эксплуатации АЭС возможно возникновение не только одной аварийной (нестандартной) ситуации, но и цепи следующих друг за другом аварийных ситуаций. Для имитации подобных, накладываемых друг на друга сложных нестандартных ситуаций можно воспользоваться двумя способами.

В первом способе сложная нестандартная ситуация как одно возмущение включается в интервал (a, c) . При этом сложная нестандартная ситуация выбирается с вероятностью $\sum_{i=1}^m q_i$, где m — число сложных возмущений. С выбором i -го сложного возмущения запускается программа, задающая очередность ввода простых возмущений.

Во втором случае сложную нестандартную ситуацию можно создавать многократным вводом возмущений с включением в работу генератора случайных чисел с различной частотой для каждого следующего этапа розыгрыша (отрезок времени от одной выбранной нестандартной ситуации до следующей). В этом случае становится возможным создавать сложные возмущения в зависимости от возникающей необходимости. Очевидно, что нельзя допускать выбора одного и того же возмущения в разных этапах розыгрышей, поэтому после выбора возмущения соответствующий ему интервал (a_i, c_i) прибавляется к (c, b) . Преимуществом данного способа является то, что из заданного множества возмущений можно создавать достаточно большое число сложных нестандартных ситуаций с накладыванием двух, трех возмущений и более. Например, при накладывании трех возмущений общее число сложных нестандартных ситуаций равно $l(l-1)(l-2)$.

Время, выделяемое на тренажере каждому обучаемому в режиме обучения, ограничено, поэтому в процессе тренировок обучаемые могут практически изучать только часть смоделированных на тренажере не-

стандартных и аварийных ситуаций. В режимах контроля по предлагаемому методу могут быть воспроизведены все предусмотренные для моделирования ситуации, т. е. обучаемым иногда будут предъявляться ситуации, с которыми они знакомы только из теоретических занятий. Рассматриваемый способ обеспечивает имитацию на тренажере условий работы операторов на действующих энергоблоках, что позволяет надеяться на более объективную оценку их обученности. Кроме того, в процессе обучения на тренажере операторы будут приобретать также определенные психофизиологические навыки при работе в нестандартных ситуациях.

Приведенный пример построения и использования тренажера относился к подготовке персонала для АЭС. По аналогичным принципам, с теми или иными вариациями в зависимости от конкретных условий, строятся тренажеры буквально во всех областях техники.

Приведем некоторые примеры. Так, тренажеры для летчиков, управляющих вертолетами, воспроизводят у обучаемого все физические ощущения, связанные с полетом. В качестве примера «опережающего действия» моделирования можно привести следующий факт: когда опытные образцы первого пассажирского сверхзвукового самолета еще только создавались, то будущие пилоты уже приступили к тренировкам по управлению машиной на тренажере-стенде.

«Водить» еще не построенный самолет командир и экипаж учились на пилотажном стенде. На нем была смонтирована точная копия кабины летчиков со всеми приборами, устройствами управления и связи. Имелся также пульт, с которого инструктор мог задавать условия «полета» и контролировать действия экипажа. Телевизионная аппаратура, магнитофон, блок имитации тряски предназначались для создания соответствующей «лётной» обстановки.

Мозгом пилотажного стенда-тренажера была вычислительная машина, на которой набирались дифференциальные уравнения движения нового самолета. При необходимости по ходу событий электронная модель включала магнитофон и блок имитации тряски. В модели было сделано все возможное, чтобы летчики чувствовали себя в «полете».

При «разбеге» самолета вычислительная машина включала подвижный макет аэродрома и окружающей местности. Лента, на которую была нацелена телевизионная камера, вращалась все быстрее. А летчики наблюдали движущееся изображение полосы на экране и на приборных указателях, что создавало иллюзию взлета. Что же случится, если пилот допустит ошибку при разгоне машины? Его неправильные действия сразу же будут восприняты АВМ, по сигналам которой телевизионная камера повернется в сторону от макета бетонной дорожки и по изображению на соответствующих экранах станет ясно, что самолет «ушел» с полосы. На пилотажном стенде летчики учились не только взлетать, управлять машиной в нормальных условиях, но и совершать посадку в сложных аварийных ситуациях.

В качестве примера можно привести и тренажеры для создания, созданный несколько лет тому назад во Франции. В нем смоделированы очертания различных проливов, подходов к каналам, портам, и

капитаны с помощью моделей лайнеров, танкеров и яхт учатся маневрировать в наиболее опасных районах океана.

Взаимодействие человека и радиопаратуры проверяется на тренажерах, с помощью физического моделирования приближающих условия эксперимента к рабочим условиям. Здесь опять-таки основным назначением тренажера является обучение и тренировка персонала.

Общезвестны тренажеры, на которых космонавты подготавливаются к будущим полетам.

Не пытаясь охватить здесь эту, поистине необъятную область применения моделей-тренажеров, подчеркнем, что при всех их применениях необходимо обращать большое внимание на соблюдение условий подобия и обработку результатов экспериментов в критерияльной форме.

§ 7.6. ФИЗИЧЕСКИЕ [ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ] МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Назначение и структура физических моделей электроэнергетических систем. Энергетическая система, осуществляющая выработку, преобразование, передачу, распределение и потребление энергии, состоит из ряда взаимосвязанных подсистем, содержащих многочисленные элементы. Система в целом приобретает свойства, не присущие отдельным подсистемам и тем более их элементам. Развитие системы и ее функционирование происходят в условиях целенаправленного стремления к оптимизации ее по ряду показателей. Все это дает основания характеризовать энергетическую систему как большую сложную систему кибернетического типа.

Методы анализа таких систем очень громоздки. Для их практического выполнения нужны многие допущения, которые могут внести существенные искажения. Методы расчета, применяемые для практических целей, требуют экспериментальной проверки. Для того чтобы иметь возможность быстро оценивать работоспособность, эффективность и надежность новой аппаратуры, новых устройств, проверять новые теории, новые методы и оценивать допущения и предпосылки существующих методов, нужна возможность экспериментов в системе, позволяющих имитировать любые режимы, воспроизводить любые аварии, наблюдать и выявлять их последствия. Возможности проведения экспериментов в реальной промышленной системе очень ограничены. Те наблюдения за «естественно» происходящими авариями или в редких случаях «специально производимыми» в системах должны подвергаться обработке и представляться в критериальных зависимостях, распространяющих данные единичного (и, как следует из сказанного выше, обычно уникального) опыта на ряд (класс) подобных систем и условий. Однако принципиальная ограниченность возможности получения таких материалов заставляет инженера-исследователя обращаться к опытной, специально созданной системе, своего рода «подопытному животному», физической модели.

Физическая модель энергосистемы представляет собой миниатюрную копию физически реальной энергосистемы, она имеет в своем составе модели всех основных элементов энергосистемы — оригинала. Для всякой модели энергосистемы всегда *четко формулируется круг задач, который будет решаться с помощью данной модели*. Это выявляет те части энергосистемы, которые должны быть воспроизведены на модели с наибольшей полнотой и точностью, требуемыми теорией (условия соблюдения критериев подобия) и практической необходимостью. Например, если физическая модель сооружается для изучения переходных процессов, протекающих в электрической части системы, то тепловая и гидравлическая части системы (котлы, паровые турбины, напорные трубопроводы, гидротурбины и т. п.) могут моделироваться приближенно с помощью математических моделей.

Модели энергосистем, включающие в себя наряду с физически моделированными элементами и математические модели отдельных элементов энергосистем, иногда называют *электродинамическими моделями*. Они широко применяются на практике. В электродинамических моделях моделируются только основные элементы, составляющие силовую часть системы. Все вспомогательные элементы, такие, как релейная защита, регуляторы возбуждения частоты, обменной мощности и др., устанавливаются на модели непосредственно натуральными (немоделированными). Поэтому в отношении этих элементов не возникает проблемы точности их воспроизведения.

Основные направления исследований на электродинамических моделях следующие: уточнение характеристик систем, например изучение их частотных характеристик, влияния состава нагрузки, поведения регуляторов при тех или иных изменениях в нагрузках или схемах систем; проверка теоретических положений, допущений и приближений, принимаемых в различных аналитических методах расчета.

К многочисленным и разнообразным исследованиям этого рода относится уточнение методики расчета динамической устойчивости в смысле дополнения ее учетом влияния моментов, создаваемых апериодической слагающей тока статора и периодической слагающей тока ротора, влияния насыщения, уточнения методов расчета статической устойчивости и т. д. Сюда же следует отнести проверку, настройку, регулировку устройств и аппаратов нового типа: релейных защит, регуляторов возбуждения, систем автоматического управления (включения резервов и пр.) в условиях нормальных и аварийных режимов электростанций и электропередач. В качестве примера можно привести исследование регуляторов сильного действия, теоретическая разработка которых, практическая наладка и регулировка были проведены на электродинамической модели МЭИ, благодаря чему не потребовалось проведение большого числа дорогостоящих опытов непосредственно на мощной Волжской ГЭС им. В. И. Ленина, где были впоследствии установлены эти регуляторы. Другим примером может служить исследование на этой модели релейной защиты для электропередачи от той же ГЭС в Москву.

Исследования, направленные на уточнение конструкции и отдельных параметров элементов сооружаемых электропередач и проверку их работы в системе, также с успехом можно проводить на модели. В качестве примера можно привести экспериментальное изучение параметров успокоительных систем у явнополюсных синхронных машин и их влияние на устойчивость, характер качаний и условия са-

мовозбуждения машин. В отдельных случаях на моделях целесообразно проведение исследований режимов и переходных процессов в некоторых конкретных системах с заданными параметрами. Модели могут быть широко использованы в эргатических задачах, рассматривающих взаимодействие человека и различного рода устройств, машин, автоматов. На моделях широко проводится демонстрация различных переходных процессов и аварийных режимов, выполняются учебные работы по ликвидации аварийных режимов, воспроизводимых на модели, и таким образом осуществляются и обучение студентов, и тренировка персонала электрических станций и систем.

Рекомендуется следующий порядок исследований различного рода новых задач:

1) сооружение специальной модели, параметры которой устанавливаются такими, чтобы критерии подобия модели были соответственно одинаковыми с критериями подобия оригинала. Возможны случаи, когда модель специально не сооружается, при этом используются какие-либо подходящие установки, а эксперимент ставится так, чтобы приблизиться к подобию процесса;

2) выбор критериев подобия, требующий предварительной оценки параметров, входящих в эти критерии, и выяснения наиболее значимых и второстепенных критериев. Так, например, при исследовании статической устойчивости активное сопротивление статора и соответственно критерии R/X не играют решающей роли. При исследовании динамической устойчивости, наоборот, этот критерий иногда может играть решающую роль;

3) выбор параметров и создание определенной гипотезы явлений. Далее составляется схема модели, воспроизводящая оригинал. Одновременно с составлением схемы и выбором участвующего в исследованиях оборудования выбираются масштабы, при которых учитываются как постановка задачи, так и возможности оборудования. Неудачный выбор масштабов может привести к тому, что расчетные параметры оборудования моделей изменятся. *Каждому исследованию, проводимому на модели, должна предшествовать тщательная проверка всех параметров модели;*

4) проверка работы оборудования модели по отдельным частям. *Только после того как получена полная уверенность в том, что все элементы модели в отдельности подобны соответствующим элементам оригинала, можно собрать модель, соблюдая граничные условия при соединении ее отдельных элементов;*

5) проведение экспериментов, включающее в себя серию опытов с обязательной вариацией параметров модели около параметров оригинала. Таким путем выявляются определенные зависимости и устанавливается тенденция влияния того или иного параметра.

Обычно при исследовании наибольший интерес представляют какие-то определенные зависимости, например характеристика передаваемой по линии мощности, полученная в условиях медленного изменения нагрузки (статическая устойчивость), или характеристика предельной передаваемой мощности, определенная в условиях той или иной аварии (при коротких замыканиях). Изучению могут также под-

вергаться режимы системы при асинхронном ходе, ресинхронизации и т. д. Во всех этих случаях решающее влияние имеют различные критерии подобия. Поэтому предварительными исследованиями, экспериментальным и теоретическим анализом необходимо установить, какие именно критерии должны быть обеспечены особо тщательно, а для каких можно допустить те или иные отклонения. Постановка опытов должна осуществляться в соответствии с теорией планирования эксперимента (см. гл. 3), а обработка его результатов содержать анализ критериальных зависимостей, выявляющих обобщенные (критериальные) соотношения, распространяющие результаты каждого опыта на группы подобных явлений. В ответственных случаях одновременно с исследованиями на физических моделях должны проводиться аналитические исследования.

Разумеется, и экспериментальные, и аналитические исследования должны сопоставляться (если возможно) с результатами опытов в системах, причем ограниченные возможности экспериментирования в реальных системах заставляют продолжать эти опыты на моделях, параметры которых корректируются на основании опытов в системах. Все виды исследований не противопоставляются, а взаимно дополняют друг друга.

Структура модели должна соответствовать структуре реальной энергосистемы лишь в той мере, в какой это необходимо для проведения данного круга экспериментов. Модели могут выполняться с измененным масштабом времени и частотой, отличной от частоты оригинала. В этом случае приходится моделировать вспомогательные элементы моделей, что ограничивает возможности их применения. Преимущественное распространение поэтому получили модели, выполненные на частоте оригинала. С большей полнотой и точностью на модели должны отражаться только те части реальной системы (электрической станции, ЛЭП и т. д.), которые подлежат более углубленному исследованию. Те же части системы, которые в данном исследовании играют второстепенную роль, можно моделировать приближенно, объединяя их в более крупные звенья, т. е. эквивалентирова их.

Рассмотрим условия моделирования некоторых наиболее существенных элементов энергосистемы.

Моделирование первичных двигателей. Требования, предъявляемые к модели двигателя, определяются видом решаемой задачи или характером исследуемых переходных процессов. С этой точки зрения процессы, исследуемые на моделях, можно условно разделить на несколько групп:

— процессы, в которых не требуется учитывать изменения скорости и влияние регуляторов, например при исследовании кратковременных (длительностью в несколько сотых долей секунды) электромагнитных процессов, в течение которых скорость не успевает заметно измениться. В этом случае в качестве первичного двигателя можно использовать любой привод, обеспечивающий необходимую мощность и угловую скорость;

— процессы, в которых изменения скорости имеют конечное значение, но регуляторы скорости по тем или иным причинам не

вступают в работу. В качестве примера можно привести процессы качания генераторов при сравнительно небольших толчках, когда колебания скорости не выходят за пределы зон нечувствительности регуляторов, или сравнительно кратковременные процессы, на которые регуляторы вследствие их инерционности не успевают оказывать влияния. В этих случаях первичный двигатель достаточно отразить моментно-скоростными характеристиками турбины. Зависимости $M_* = \omega(\omega_*)$ должны при этом быть одинаковыми для модели и оригинала;

— процессы, связанные с сильными возмущениями в системе, приводящими к большим изменениям скорости. В этом случае оказывают решающее влияние действия системы регулирования турбин и появление гидравлического удара в трубопроводах. В качестве примера можно привести асинхронные режимы, процессы регулирования частоты и потоков мощности в системах. На последние существенно влияют характеристики паровых котлов ТЭС (приемистость котла и т. п.). Очевидно, что в этом случае нужно учитывать весь комплекс первичного двигателя.

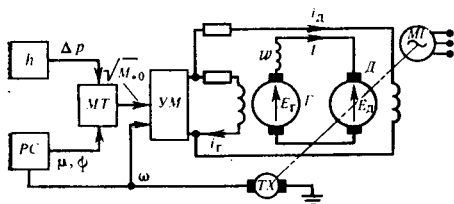


Рис. 7.21

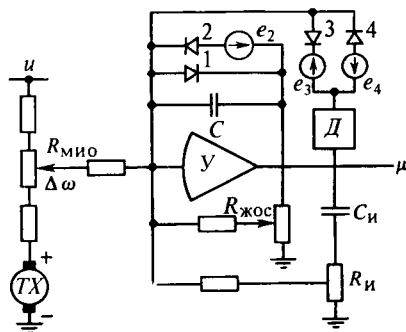


Рис. 7.22

Рассмотренные примеры показывают, что задачи моделирования электромеханических процессов могут ставиться по-разному и соответственно могут применяться различные методы моделирования первичных двигателей. К настоящему времени разработано много различных систем моделирования первичных двигателей. Их можно свести к нескольким типам:

— моделирование турбины двигателем постоянного тока с независимым возбуждением — наиболее простой способ;

— выполнение привода на основе асинхронного двигателя с фазным ротором. Двигатель питается от источника трехфазного регулируемого напряжения. Последовательно с роторными обмотками включены добавочные сопротивления. Моментные характеристики асинхронного двигателя в зависимости от скорости при регулировании напряжения источника питания могут быть сделаны подобными характеристикам оригинала;

— выполнение привода моделей как замкнутых систем регулирования, воспроизводящих вращающий момент по заданному закону.

Представленная на рис. 7.21 полная структурная схема модели состоит из двигателя D и питающего генератора G . Напряжение генератора и ток возбуждения двигателя регулируются усилителем мощности $УМ$, в качестве которого используется либо электромашинный усилитель, либо управляемый тиристорный выпрямитель. Для уменьшения наклона моментно-скоростных характеристик двигателя используется отрицательная обратная связь по току, которая вводится с помощью противовключенной серийной обмотки генератора w . Окончательная подгонка коэффициента саморегулирования двигателя и изменение его в некоторых пределах осуществляются с помощью регулируемой обратной связи по скорости, которая вводится на вход $УМ$ от датчика скорости — тахогенератора $ТХ$. Блок h обрабатывает изменение давления Δp . Согласно условию подобия момента токи возбуждения генератора и двигателя должны регулироваться пропорционально $\sqrt{M_{*0}}$. Сигнал, пропорциональный $\sqrt{M_{*0}}$, вырабатывается блоком модели турбины MT и подается на вход $УМ$. Модель обеспечивает воспроизведение характеристик турбин при действии регулятора скорости, представленного блоком $РС$. Блок MT построен из элементов, применяемых в математических машинах непрерывного действия, и содержит функциональные преобразователи для воспроизведения функций $f(\mu, \psi)$ и $\sqrt{x}$ и блоки перемножения. В результате преобразования входных напряжений, пропорциональных величинам μ, ψ, h , блок выдает сигналы, пропорциональные M_{*0} и $\sqrt{M_{*0}}$.

Моделирование регуляторов скорости. Регуляторы скорости турбины предназначены для первичного регулирования частоты при колебаниях нагрузки в системе, а также для предотвращения опасного разгона агрегатов при аварийных сбросах мощности. Регулятор состоит из измерительного элемента скорости, в качестве которого обычно используется центробежный маятник, системы гидроусилителей (сервомоторов), воспринимающих перемещение муфты маятника и передвигающих тяжелые регулирующие органы турбины, и устройств обратной связи, обеспечивающих устойчивость регулирования и требуемое качество переходных процессов. Кроме того, имеется устройство, позволяющее изменять уставку регулятора (МИО — механизм изменения оборотов). Модели регуляторов скорости состоят из элементов, моделирующих каждую из указанных частей и соответственно соединенных между собой.

Принципиальная схема модели регулятора гидротурбины представлена на рис. 7.22. Центробежный маятник моделируется тахогенератором $ТХ$. Напряжение тахогенератора сравнивается с постоянным напряжением, и их разность, пропорциональная отклонению скорости от заданной, подается на вход операционного усилителя $У$, работающего в режиме интегрирования благодаря наличию емкости C в цепи обратной связи. При отклонении скорости от заданной напряжение на выходе усилителя начнет изменяться со скоростью, пропорциональной этому отклонению, подобно тому, как сервомотор регулятора турбины движется со скоростью, пропорциональной отклонению золотника, смещаемого центробежным маятником. По мере роста на-

пряжения на выходе усилителя увеличивается сигнал жесткой обратной связи, снимаемый с потенциометра $R_{жос}$ и подаваемый на вход усилителя. Наступает момент, когда сигнал обратной связи полностью компенсирует входное воздействие со стороны тахогенератора и напряжение на выходе усилителя перестает изменяться. Таким образом, моделируется влияние жесткой обратной связи, которая по мере перемещения сервомотора возвращает золотник в среднее положение, прекращая доступ масла под поршень сервомотора. Благодаря этому каждому отклонению угловой скорости соответствует определенное перемещение сервомотора. В модели перемещению сервомотора соответствует изменение напряжения усилителя U . Цепочка $C_{и}$, $R_{и}$ моделирует воздействие гибкой (так называемой изодромной) обратной связи, которая вырабатывает исчезающий импульс, замедляющий движение сервомотора, благодаря чему обеспечивается необходимое качество переходного процесса. Описываемая модель позволяет учесть основные нелинейности регулятора.

Моделирование парогенераторов (котлов). Влияние парогенераторов на переходные процессы обусловлено тем, что в переходном процессе может значительно измениться нагрузка турбины, а следовательно, и котла, что в свою очередь приведет к изменению давления и температуры вырабатываемого пара и повлияет на мощность турбины. Например, при значительном (5—10 %) набросе мощности в системе, который воспринимается в основном турбинами регулирующей станции, давление котлов этой станции может упасть на 15—30 %, что, во-первых, замедлит процесс набора мощности, во-вторых, может быть опасным для турбин. При этом вступают в работу автоматические устройства котельной, регулирующие темп набора мощности так, чтобы обезопасить турбины. Особенно сильно переходные процессы сказываются при построении ТЭС по блочной схеме «котел — турбина». Приведенный пример показывает, что *учет влияния котла невозможен без учета его регулирующих систем*. При моделировании парогенератора с учетом изменений параметров пара в переходных режимах можно в первом приближении пренебречь влиянием некоторых вспомогательных систем (регулирования уровня воды в барабане, регулирования разрежения в топке и т. д.). Системы регулирования температуры пара современных котлов способны поддерживать температуру в течение переходного режима с точностью 1—2 %. Поэтому основным параметром, который может меняться в сравнительно широких пределах и оказывать влияние на мощность турбины, является давление острого пара. Эти допущения позволяют представить котел в виде двух основных частей: парообразующей части системы и системы регулирования процесса горения. Парообразующая часть воспринимает теплоту, образующуюся в топке. При увеличении воспринимаемого теплового потока (тепловой нагрузки) и постоянном расходе пара теплосодержание и, следовательно, давление пара возрастают со скоростью, пропорциональной приращению тепловой нагрузки. Аналогично этому при увеличении расхода пара (паровой нагрузки) давление падает. Скорость изменения давления при разбалансе тепловой и паровой нагрузок пропорциональна этому разбалансу, причем коэффициент

пропорциональности (постоянная времени) определяется аккумулярующей способностью котла, т. е. свойством либо накапливать, либо отдавать тепловую энергию, содержащуюся в массе воды, циркулирующей в трубах парообразующей системы.

Процесс изменения давления приближенно описывается дифференциальным уравнением

$$T_p \dot{p} = \lambda_q - \lambda_1,$$

где T_p — постоянная времени разгона котла по давлению, равная 150—300 с; p — относительное давление; λ_q и λ_1 — тепловая и паровая нагрузки.

Система регулирования процесса горения определяет количество теплоты, выделяющейся в топке. Она содержит регулятор топлива и систему подачи топлива. Регулятор топлива реагирует на расход и давление пара, а также некоторые другие параметры (в зависимости от конструкции) и дает импульс на увеличение или уменьшение подачи топлива. После подачи импульса, спустя некоторое время, обусловленное запаздыванием в системе топливоподачи, начинается изменение тепловой нагрузки λ_q . Процесс изменения λ_q может быть описан уравнением

$$(T_\tau p + 1) \lambda_q(p) = e^{-p/\tau} \mu_b(p),$$

где T_τ — постоянная времени (составляет 5—60 с и зависит от типа системы топливопередачи, вида регулирования и топлива); τ — время «чистого» запаздывания (составляет 0—6 с в зависимости от конструкции и вида топлива); μ_b — положение органа, регулирующего подачу топлива; p — символ дифференцирования.

Моделирование электрических машин. Требования, предъявляемые к физическим моделям электрических машин: генераторов, двигателей, трансформаторов, реакторов и т. д., определяются областями применения моделей в зависимости от того, используются они для преимущественного изучения процессов в электрических системах, рассматриваемых как сложные электромеханические цепи, или для изучения процессов внутри машин и аппаратов.

При моделировании электрической машины как элемента электрической системы наиболее важно, о с у щ е с т в л я я н е п о л н о е п о д о б и е, обеспечить подобие процессов и установившихся режимов во времени, т. е. потребовать, чтобы сходственные величины, характеризующие процессы в электрических цепях машины и положение ее ротора в пространстве (токи, напряжения, мощности, вращающие моменты, электрический угол), в модели и оригинале отличались только масштабами. Для осуществления такого подобия необходимо, чтобы в модели и оригинале критерии, устанавливающие определенные соотношения между электрическими и механическими параметрами моделируемых установок, были одинаковыми. В эти критерии подобия не входят геометрические размеры машины и конструктивные параметры, характеризующие магнитные и электрические свойства материалов, из которых она изготовлена. Размеры машины и ее конструктивные параметры существенны только при проектировании моделей.

Модели могут быть выполнены как при частоте оригинала, так и при некоторой другой частоте с сохраненным или измененным масштабом времени. При моделировании электрических машин чрезвычайно трудно одновременно с подобием временных процессов получить пространственное подобие магнитных, электрических и тепловых полей, а также подобие механических напряжений и деформаций. Это объясняется главным образом тем, что при создании модели электрической машины не удастся сохранить геометрическое подобие модели и оригинала. Не стремясь к сохранению подобия полей, можно при создании таких моделей прибегать к искусственным способам изменения параметров модели: включать последовательно с обмотками машины дополнительные индуктивные и активные сопротивления, уменьшать активные сопротивления цепи путем введения коллекторных машин постоянного тока с последовательным возбуждением (последовательных компенсаторов активного сопротивления).

Для исследования электромагнитных, тепловых, механических процессов внутри машины необходимо обеспечить подобие сходственных величин, характеризующих состояние и изменение соответствующих полей в пространстве и во времени. При этом критерии подобия, обеспечивающие полное подобие электромагнитных полей, одновременно обеспечивают и подобие машины как элемента электрической цепи. Для общего случая эти критерии могут быть получены из уравнений Максвелла. Однако, как показывает анализ критериев подобия полей, создание универсальной модели практически почти невозможно. Это заставляет исследователей прибегать к неполному моделированию, при котором подобие менее существенных в данном исследовании полей нарушается.

При моделировании электрической машины как элемента электрической цепи подобие может быть не только неполным, не воспроизводящим подобия полей, но и приближенным; например, в таких моделях может быть не полностью отражено влияние на параметры изменения частоты или насыщения. Приближенным является и моделирование, при котором подобие устанавливается не между мгновенными значениями, а между их осредненными значениями или их огибающими. Не полностью могут быть отражены те или иные процессы, например, потери в отдельных обмотках, действие вихревых токов на изучаемое магнитное поле и т. д.

В моделях машин и аппаратов, предназначенных для исследования полей, критерии подобия непосредственно содержат соотношения между геометрическими размерами модели и оригинала. Однако и при этом требование геометрического подобия не всегда обязательно: так, возможно введение аффинных соотношений между геометрическими характеристиками модели и оригинала.

Малые электрические машины, применяемые в качестве моделей. При решении различных технических задач, особенно при организации экспериментальных исследований в лаборатории с применением малых электрических машин, приходится учитывать, что параметры машин и трансформаторов, а также характер протекания переходных процессов в них в сильной степени зависят от мощности машин.

Возможности применения типовой синхронной машины в качестве физической модели весьма ограничены. Они могут быть расширены применением искусственных мер: введением в цепь обмоток дополнительных индуктивных сопротивлений и специальных коллекторных машин, позволяющих уменьшить активные сопротивления цепи установкой дополнительных маховиков и др. Эти меры, однако, оказываются недостаточными, если необходимо изменять соотношения между сопротивлениями взаимной индукции X_{ad} и X_{aq} или моделировать влияние демпферных обмоток. Значительное искусственное уменьшение (в 5—10 раз) активного сопротивления цепей переменного тока нельзя осуществить с достаточной точностью. Этим обстоятельством также ограничиваются возможности применения малых типовых машин в качестве моделей.

Во всех случаях, когда требуется достаточно высокая точность моделирования, физическая модель машины должна быть спроектирована специально. При исследовании полей это всегда необходимо. Это относится и к трансформаторам малой мощности, применяемым в качестве моделей.

Проектирование физических моделей синхронных машин. Рассматриваемое проектирование может основываться на двух подходах:

1) заданы критерии физического подобия, которым удовлетворяет оригинал и должна удовлетворять физическая модель. Необходимо определить размеры модели: R_l/X_n ; X_l/X_n ;

2) заданы размеры оригинала, необходимо определить размеры физической модели.

Обе эти задачи могут быть решены, если выявить основные соразмерности не геометрически подобных, а физически подобных — специальных — синхронных машин.

Общий вид одного из таких специальных генераторов моделей МГ-15-1000 показан* на рис. 7.23. Он моделирует явнополюсные гидрогенераторы любой мощности и угловой скорости. Изменение параметров модели в соответствии с условиями подобия осуществляется или введением дополнительных устройств, располагающихся вне машины, или заменой (возможность которой предусмотрена при разработке конструкции) некоторых частей внутри машины. Для увеличения индуктивных сопротивлений рассеяния в цепь обмотки якоря и обмотки возбуждения вводятся дополнительные индуктивные сопротивления с низкими потерями 1—5%. Проводимость полей рассеяния изменяется также путем замены магнитных клиньев между полюсными наконечниками. Удобство и быстрота замены одного ротора модели ротором с другим воздушным зазором или возможность смещения ротора на некоторый угол, предусмотренная в конструкции модели, позволяет получить другие значения индуктивных сопротивлений взаимной индукции — X_{ad} , X_{aq} . Успокоительная обмотка моделей разборная. Стержни соединяются с короткозамыкающими сегментами или кольцами с помощью гаек. Медные стержни с полым сечением могут быть заменены стержнями увеличенного сопротивления, имеющими выточку, или изготовленными из латуни. Вместо короткозамыкающих колец могут быть установлены сегменты по поперечной или продольной оси. При моделировании генератора без успокоительной обмотки удаляются и стержни, и короткозамыкающие кольца. Проводимость для полей рассеяния и частотные характеристики успокоительной обмотки изменяются путем смены магнитных клиньев и немагнитных прокладок. Момент инерции регулируется установкой различного числа дисков маховика. Эта операция не требует разборки агрегата, так как снятые с маховика диски за-

* Сокращение МГ-15-1000 означает модельный гидрогенератор мощностью 15 кВт·А, 1000 об/мин. Этот и другие генераторы-модели были впервые спроектированы А. В. Ивановым-Смоленским.

крепятся на специальной стойке. Заметим, что изменение реактивных сопротивлений модельных генераторов можно осуществлять с помощью дополнительного подмагничивания и насыщения стали одного или нескольких участков магнитной цепи синхронной машины. Так осуществляется регулируемое снижение сопротивлений взаимоиндукции между ротором и статором в обеих осях. При этом изменяются все параметры машины, зависящие от X_{ad} и X_{aq} , в функции тока подмагничивания.

Подобие и моделирование регулятора возбуждения. Присоединять к модели электрической системы регуляторы возбуждения желательно по возможности такие, которые должны работать в системе-оригинале

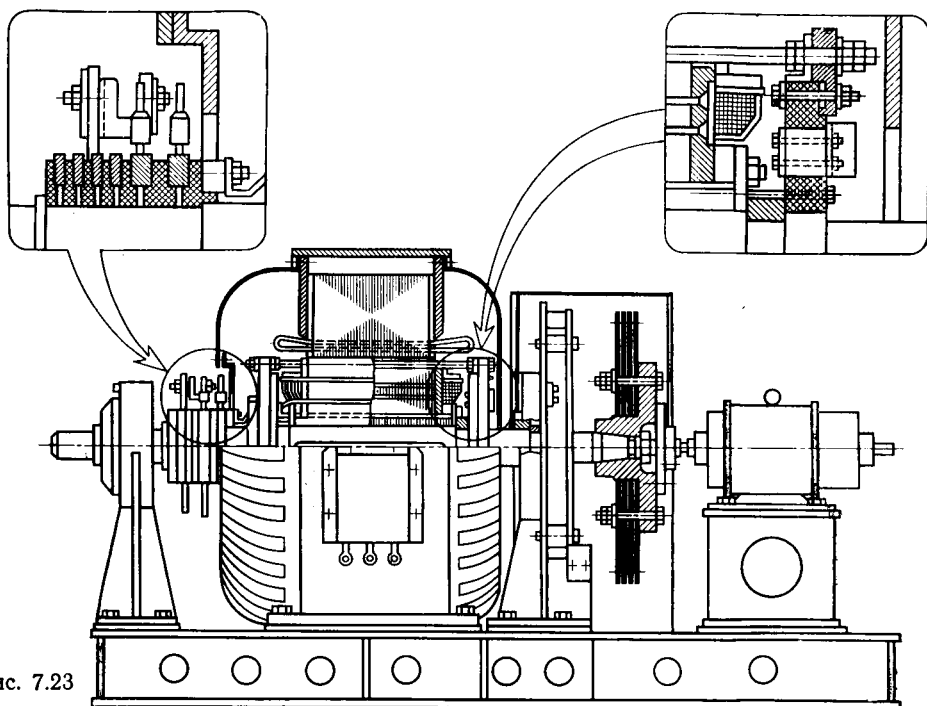


Рис. 7.23

(натурные). Однако условия работы модели накладывают определенные ограничения на свойства присоединяемых регуляторов. Эти ограничения должны рассматриваться как граничные условия, подобие которых обязательно для возможности установления подобия всей системы, регулируемой данным регулятором. Граничные условия подобия регуляторов могут быть приближенно сведены к требованиям обеспечения подобия на входе и выходе.

В условиях подобия измерительных трансформаторов, присоединенных к регулятору, должно было бы входить требование идентичности постоянных времени первичной и вторичной обмоток трансформаторов:

$$T_{*I} = \text{idem}; T_{*II} = \text{idem}.$$

$$(7.27)$$

систему возбуждения, первичный двигатель и устройства, улучшающие режим и меняющие свои параметры и настройку в зависимости не только от настоящего состояния режима, но и от будущего его протекания, предугаданного анализирующими устройствами кибернетических регуляторов.

Общая полная структурная схема модели синхронного генератора приведена на рис. 7.24, на котором приняты следующие обозначения: 1 — модель первичного двигателя (турбины); 2 — синхронный генератор (модель); 3 — обмотка возбуждения; 4 — дополнительные сопротивления (индуктивности и взаимоиндуктивности) статора; 5 — трансформатор-модель, имеющий переменный коэффициент трансформации K_T ; 6 — дополнительное сопротивление цепи возбуждения возбудителя; 7 — возбудитель; 8 — дополнительная индуктивность; 9 — дополнительное сопротивление; 10 — дополнительное перемещающее устройство для перемещения стали серийного генератора и преобразователя; 11 — якорь серийного генератора; 12 — якорь преобразователя; 13 — двигатель, вращающийся с постоянной скоростью преобразователя и компенсатор; 14 — обмотка возбуждения серийного генератора; 15 — обмотка возбуждения преобразователя; 16 — дополнительные диски для увеличения инерции ротора синхронного генератора; 17 — регулятор; e_v — напряжение возбудителя; ΔL_v — дополнительная индуктивность в цепи возбуждения возбудителя; β — цепи подключения регулятора возбуждения.

§ 7.7. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАГРУЗОК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основными составляющими комплексной нагрузки (%) энергосистем являются: асинхронные двигатели — 45—70, синхронные двигатели — 5—10, печи и ртутные выпрямители — 10—15, освещение и бытовая нагрузка — 20—25, потери — 5—10. Особенности комплексной нагрузки заключаются прежде всего в большом количестве входящих в нее различных составляющих, распределенных по большой территории. Это делает принципиально невозможным представление нагрузки во всех изучаемых режимах одним или несколькими эквивалентными двигателями и нагрузочным реостатом. Поэтому практически наиболее удобной и приемлемой формой представления комплексной нагрузки для большинства исследований является задание ее в виде обобщенных статических и динамических характеристик отдельных узлов. Степень детализации тех или иных характеристик при моделировании нагрузки определяется в каждом конкретном случае в зависимости от поставленной задачи. Например, при исследовании асинхронных режимов наиболее важно воспроизведение характеристик $S = f(t)$ и т. д.

Чтобы получить подобие нагрузки, необходимо рассмотреть ее состав в моделируемой системе и выделить группы нагрузок, однотипных по своим электрическим характеристикам, а для двигателей — и по механическим характеристикам машин-орудий. После этого каждую группу можно моделировать, подбирая параметры ее элементов так, чтобы сделать критерии подобия одинаковыми с критериями

подобия эквивалентных групп оригинала. Подобие требует идентичности зависимостей параметров нагрузки от частоты в системе (угловые скорости двигателей) и от напряжения, подводимого к нагрузке. Для машин-орудий оригинала и модели необходимо потребовать соблюдения соотношения

$$T_{mj}/T_{oj} = \text{idem},$$

или при неизменном масштабе времени $T_{mj} = T_{oj}$ потребовать идентичности относительных характеристик мощностей с учетом механических потерь во всем агрегате

$$(P_{m.m} - \Delta P_{m.t}) / (P_{o.m} - \Delta P_{o.t}) = \varphi(\omega, d\omega/dt) = \text{idem},$$

где $\Delta P_{m.m}$ и $\Delta P_{o.m}$ — мощность на валу машины-орудия в модели и оригинале; $\Delta P_{m.t}$ и $\Delta P_{o.t}$ — механические потери в асинхронном двигателе машины-орудия.

Последнее соотношение означает идентичность относительных динамических характеристик в модели и оригинале:

$$P_* = \varphi(\omega_*, d\omega_*/dt) = \text{idem}.$$

При исследовании сравнительно малых отклонений и медленных изменений режима в первом приближении, достаточно близко отвечающем действительности, для всех нерегулируемых по скорости машин-орудий можно ограничиться требованием подобия статических характеристик:

$$P_* = \varphi(\omega_*) = \text{idem}.$$

Объясняется это тем, что в большинстве случаев для машины-орудия оригинала известны (и то весьма приближенно) только статические характеристики и суммарные инерционные моменты групп двигателей вместе с механическим приводом.

Подобие динамических характеристик получают, моделируя машину-орудие электрическим генератором, сопряженным с моделью асинхронного двигателя. При моделировании асинхронного двигателя вместе с его механическим приводом можно ориентироваться на идентичность относительных динамических характеристик:

$$M = f(s, ds/dt) = \varphi(u, du/dt),$$

где M — момент вращения двигателя; s — скольжение: $s = \psi(u)$; u — напряжение на зажимах.

Приведенная выше зависимость, изображенная на рис. 7.25 в виде поверхности в координатах $M, s, ds/dt$, при небольших скоростях изменения скольжения оказывается достаточно близкой к статической.

Физически разница между статическим и динамическим моментами определяется тем, что в динамическом процессе при быстрых изменениях скольжения энергия магнитных полей машины, влияющих на характеристику вращающего момента, изменяется. Подобие динамического момента и строгое подобие динамического процесса могут быть, таким образом, обеспечены только при полном подобии эквивалентного двигателя модели и оригинала, когда скорости протекающих и электромагнитных, и электромеханических процессов подобны. При упрощенном подходе к моделированию нагрузки и осуществлению

его, исходя из статических характеристик, необходимы дополнительная проверка и оценка возможной погрешности. Еще одна значительная составляющая нагрузки электрических систем — осветительная нагрузка — может рассматриваться только как зависимость $P_M/P_0 = \varphi(u, du/dt)$; влияние изменений частоты в электрических системах здесь незначительно. Получить зависимость $P_M/P_0 = \varphi(u, du/dt)$ в модели не представляет труда. Это осуществляется установкой в модели ламп того же типа, которые используются в оригинале. Остальные, менее значительные, составляющие нагрузки могут моделироваться аналогично на основании соответствующих критериев. В настоящее время в практике эксплуатации и проектирования энергосистем нагрузка узлов системы характеризуется при расчетах только статическими характеристиками: $P_* = \varphi(f, u)$; $Q_* = \psi(f, u)$.

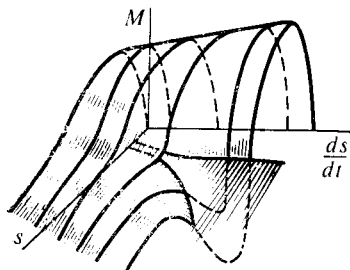


Рис. 7.25

В применяемом сейчас подходе к исследованиям полагают, что подобие динамических процессов будет обеспечено, если:

- 1) статические характеристики каждой составляющей узла воспроизведены правильно, т. е. обеспечено подобие их характеристикам натуральных агрегатов или хотя бы соответствие в точках номинального и критического режимов;
- 2) относительные эквивалентные постоянные инерции модельного двигательного агрегата (или группы агрегатов) соответственно равны эквивалентной постоянной инерции всех двигателей реальной системы с учетом приводных механизмов, т. е. $T_{J\Sigma} = \text{idem}$;
- 3) моментно-скоростные характеристики $P_{mc} = f(s)$ или $m = \varphi(n_*)$ модели соответственно подобны характеристикам оригинала;
- 4) правильно воспроизведено соотношение между реактивностями установившегося и переходного режимов.

При моделировании условий самозапуска двигателей необходимо учитывать, что исследуемые процессы зависят от коэффициентов загрузки двигателей и от вида закона распределения. Поэтому при моделировании следует принять вид закона распределения (нормальный, по Пирсону и т. п.), чтобы получить оценку условий самозапуска двигателей при отсутствии данных относительно параметров закона распределения коэффициентов загрузки двигателей.

Модели нагрузок в простейшем виде осуществляются с помощью лампового реостата и агрегата, состоящего из асинхронного двигателя, вращающего генератор постоянного тока, или двигателя, нагруженного специальным тормозом. Генератор постоянного тока нагружается линейным или нелинейным активным сопротивлением в зависимости от требуемой характеристики момента на валу асинхронного двигателя. Для обеспечения желательной характеристики противодействующего вращающего момента генератор постоянного тока может снабжаться автоматическим регулятором возбуждения, работающим в за-

висимости от изменения скольжения асинхронного двигателя. Схема модели комплексной нагрузки электрической системы представлена на рис. 7.26 и содержит следующие обозначения: 1 — ламповый реостат с широкой регулировкой мощности; 2 — потенциал-регулятор; 3 — асинхронный двигатель; 4 — динамометр; 5 — маховики; 6 — генератор постоянного тока; 7 — регулятор возбуждения; 8 — ламповый реостат; 9 — тахогенератор. Настройкой регулятора изменяется зависимость потребляемой мощности от скорости и, следовательно,

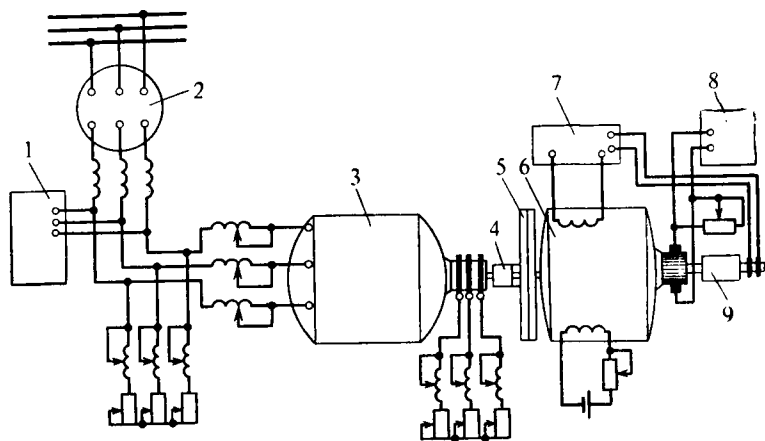


Рис. 7.26

противодействующий вращающий момент на валу двигателя. Так-изменяя число витков шунтовой и серийной обмоток и включая в цепь якоря дополнительную независимую э. д. с., можно получать необходимый вид функциональной зависимости момента от скорости.

§ 7.8. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Линии электропередачи в физических моделях электрических систем можно осуществлять или в виде физически подобных — *пространственных*, уменьшенных моделей, копирующих провода и изоляторы линии-натуры, и следовательно, имеющих распределенные по длине параметры, или в виде квазифизических линий, представленных цепочечными схемами замещения. Критерии подобия, на основании которых ЛЭП можно изобразить геометрически подобной моделью, могут быть получены из общих критериев подобия, отражающих подобие электромагнитных полей.

Построение геометрически подобной модели линии требует увеличения частоты и изменения физических свойств окружающей среды и материалов. Это создает трудности и ограничивает возможности моделирования линий геометрически подобными линиями-моделями.

Однако такие модели создаются. В качестве примера можно привести физическую модель линии напряжением 750—1200 кВ, предназначенную для проводившихся в МЭИ исследований полуразомкнутых управляемых электропередач большой длины (до 2500—3500 км).

Модель состоит из трехфазной линии длиной 21 м с манганиновыми проводами $\varnothing$ 2 мм, расположенными по вершинам равностороннего треугольника со стороной 10 см. В центре треугольника фазных проводов установлен нулевой провод. С одной стороны к линии подсоединен трехфазный ламповый высокочастотный генератор, а с другой — трехфазная симметричная нагрузка.

Трехфазный генератор имеет следующие параметры: частота — 5,73 МГц, междупазное напряжение — 75 В (фазные векторы напряжений сдвинуты относительно друг друга на 120°), мощность — 40 Вт на фазу. Выводы генератора подключены непосредственно к фазам линии, а нулевой вывод — к нулевому проводу линии. В качестве нагрузки использованы активные сопротивления соответствующей мощности, подключаемые непосредственно к проводам линии, соединенным по схеме «звезда». Нулевая точка «звезды» подсоединена к нулевому проводу линии. Кроме упомянутых основных элементов модель обеспечена измерительными устройствами для измерения напряжения и тока вдоль линии. Датчики напряжения и тока основаны соответственно на использовании электростатической и электромагнитной связи, благодаря чему исключаются непосредственный контакт с проводами, а следовательно, уменьшается влияние измерительных приборов на режим электропередачи.

Полный выбор параметров модели и ее конструкции базируется на анализе методами теории подобия электромагнитных характеристик электропередачи-оригинала и получении тождественных характеристик, представленных в относительных единицах.

Обычно в практике исследований модели длинных линий создают в виде цепочечных схем замещения. Физические процессы, происходящие в цепочечной модели, принципиально отличны от процессов, происходящих в линии. Пространство, окружающее линию, и процессы, происходящие в нем, при изображении линии цепочечной схемой не моделируются, и поэтому сравнивать время распространения волн в модели-цепочке с соответствующим временем линии-оригинала, имеющей распределенные по длине параметры, можно только условно. Так, импульс напряжения, поданный на начало цепочечной линии-модели, доходит до конца цепочки практически мгновенно. Однако если под скоростью распространения понимать скорость распространения некоторого среднего значения импульса, *то можно, так же как и для реальной линии, говорить о скорости распространения волн тока и напряжения в реальной линии и ее цепочечной модели.*

При таком подходе на модели-цепочке изображается квазиподобная линия-оригинал, непосредственно отражающая в электрических параметрах цепочки геометрические размеры данной линии, а не ее расчетные сопротивления (Z_1 , Z_0 и др.). Влияние земли в этом случае отражается созданием ряда отдельных цепочек; каждая из них соответствует отражающему проводу. Индуктивно и емкостно они связы-

ваются со всеми цепочками, изображающими провода моделируемой линии, а активно — между собой, образуя пространственную сетку, изображающую землю. Активные сопротивления катушек рассматриваемой цепочки могут зависеть от тока или частоты, имитируя соответствующую зависимость сопротивления земли. Получаемая при этом модель какой-либо сложной многопроводной передачи непосредственно позволяет определить значения эквивалентных сопротивлений на фазу, а также активные, реактивные и полные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей (рис. 7.27).

Критерии подобия линии электропередач при пространственном моделировании можно найти, воспользовавшись выражениями для индуктивности, емкости и проводимости каждого провода моделируемой электропередачи через геометрические размеры линии.

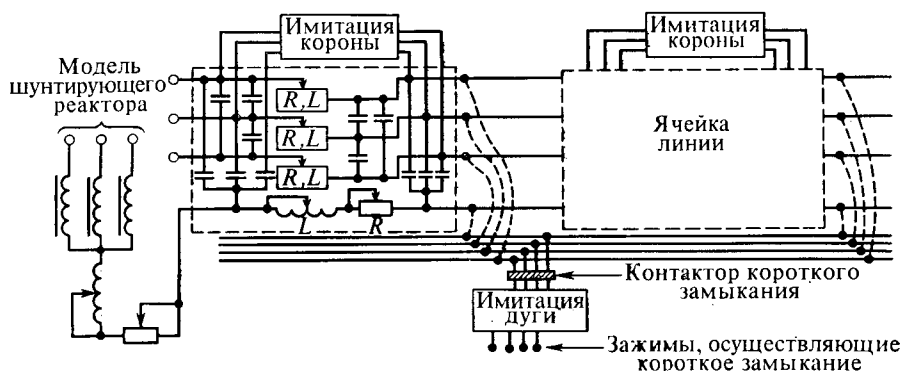


Рис. 7.27

Критерии подобия для линии-цепочки при квазиподобии находят-ся иначе, исходя из значений погонных параметров:

$$\frac{C}{Gt} = \text{idem}; \quad \frac{L}{Rt} = \text{idem}; \quad \frac{M_{ik}}{R_{ik}t} = \text{idem}; \quad RG I_{\Delta}^2 = \text{idem}.$$

Здесь параметры емкости C , индуктивности L , взаимоиндуктивности M_{ik} между проводами i и k , проводимости G в оригинале отнесены к единице длины, а в модели — к соответствующим сосредоточенным элементам, изображающим участок линии длиной l_{Δ} . Элементы эти должны быть сконструированы так, чтобы правильно отразить параметры как прямой, так и нулевой последовательности линии.

Замена ЛЭП цепочечной моделью приводит к некоторым искажениям, которые, вообще говоря, тем меньше, чем большим числом ячеек изображена линия. Изображая ячейками цепочки участки линии длиной 50 км, получаем небольшую погрешность, практически не обнаруживаемую при экспериментальных исследованиях, проводящихся на комплексных моделях электрических систем. При изображении ячейками цепочек участков, больших 100—200 км, иногда целесообразно изменить в K_z раз значение Z_{Δ} и в K_y раз значение Y_{Δ} .

При новых значениях $Z'_\Delta = K_Z Z_\Delta$ и $Y'_\Delta = K_Y Y_\Delta$ поправочные коэффициенты

$$K_Z = \text{sh } \gamma l_\Delta / (\gamma l_\Delta); \quad K_Y = 2 (\text{ch } \gamma_0 l_\Delta - 1) / (\gamma l_\Delta \text{ sh } \gamma l_\Delta).$$

Погрешности модели-цепочки можно устранить корректировкой сопротивлений Z_Δ и Y_Δ . Однако это можно сделать только при вполне определенной частоте — той частоте, применительно к которой определены коэффициенты K_Z и K_Y .

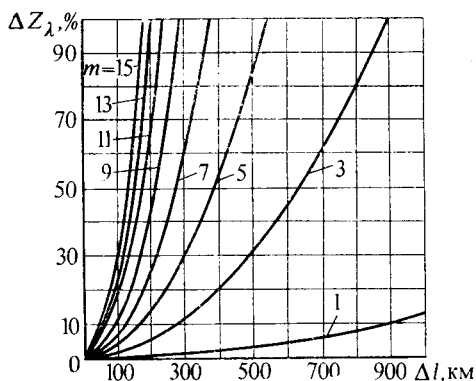


Рис. 7.28

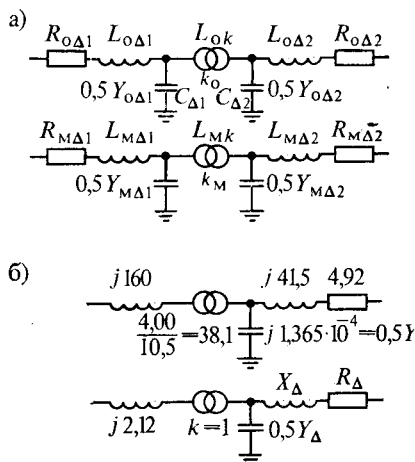


Рис. 7.29

Воспроизведя на модели процессы, приводящие к появлению в токе или напряжении высших гармонических, нужно дополнительно исследовать искажения, которые цепочечная модель внесет в высокие частоты передаваемого спектра. Выбирая параметры цепочки при моделировании процессов, приводящих к возникновению высших гармонических, необходимо удовлетворить критериям подобия для всех интересующих в данном исследовании частот, или, что одно и то же, получить частотную характеристику цепочечной схемы, наиболее близко совпадающую с частотной характеристикой натуральной линии. Искажения, которые при этом возникают, обусловлены расхождением в значениях Z_λ и γl_x в модели и оригинале. Относительно небольшие и при данной частоте легко корректируемые с помощью коэффициентов K_Z и K_Y погрешности ΔZ_λ и $\Delta \gamma l_x$ быстро возрастают с увеличением частоты.

То обстоятельство, что цепочка не является полной физической моделью линии и происходящие в ней процессы не идентичны процессам, происходящим в действительной линии, с ростом частоты начинает сказываться все более заметно. На рис. 7.28 показана зависимость погрешности в значении волнового сопротивления ΔZ_λ от длины участка линии Δl , замещаемого одной ячейкой цепочки для m гармонических напряжений, если за основную частоту принять 50 Гц.

Выше были рассмотрены условия подобия для линий электропередач, рассматриваемых вне связи с их концевыми устройствами (трансформаторами, генераторами, инверторами и т. д.). При моделировании электрической системы возникает вопрос о согласовании параметров генераторов, трансформаторов, реакторов и других элементов оборудования. На рис. 7.29, а показаны две линии системы (для оригинала и модели), связанные трансформатором, и соответственно их схемы замещения (рис. 7.29, б). Объединяя первые звенья цепочечных схем непосредственно с реактивностями рассеяния соответствующих обмоток трансформатора, легко установить, что кроме критериев подобия, обеспечивающих подобие трансформаторов, необходимо выполнить следующие требования:

$$L_{\Delta 1}/L_k = \text{idem}; (L_{\Delta 1}/L_{\Delta 2}) k^2 = \text{idem}; (L_{\Delta 2}/L_k) k^2 = \text{idem}.$$

При этом автоматически выполняется и требование

$$C_{\Delta 2}/(C_{\Delta 1}' k^2) = \text{idem}.$$

Полученными соотношениями удобно пользоваться при подборе параметров подобных схем.

Если на первичной стороне трансформатора включен генератор, то кроме приведенных условий подобия должно также удовлетворяться условие

$$(X_d/X_{\Delta 2}) k^2 = \text{idem},$$

которое справедливо и для других реактивных сопротивлений генератора, поскольку $X_d'/X_d = \text{idem}$; $X_d''/X_d = \text{idem}$ и т. д.

Пример 7.3. Выбрать параметры модели электропередачи. Предположим, что моделируется участок системы, показанной на рис. 7.29, а. Удаленная станция (слева) имеет мощность 800 тыс. кВт при $\cos \varphi = 0,8$. Суммарное сопротивление генератора и трансформатора, отнесенное к стороне напряжения 400 кВ, составляет 160 Ом. Намагничивающий ток трансформатора $I_\mu = 3\%$. Все прочие параметры приведены на рис. 7.29, б.

Для моделирования применяется генератор мощностью 20 кВт, напряжением 230 В, с синхронным реактивным сопротивлением $X_d = 2,12$ Ом. При моделировании отдельная модель трансформатора не предусматривается, однако предполагается изучение явлений, связанных с протеканием токов нулевой последовательности.

Определим, какими сопротивлениями следует моделировать участок линии длиной 100 км. Из соотношения $X_{0\Delta}/X_{0\Delta} = X_{m\Delta}/X_{m\Delta}$ получаем

$$X_{m\Delta} = 41,5 \cdot 2,12/160 = 0,55 \text{ Ом}.$$

На основании критерия $\dot{Z}_0 \dot{Y}_0 I_0^2 = \text{idem}$ найдем, что

$$X_{0\Delta} 0,5 Y_{0\Delta} = X_{m\Delta} 0,5 Y_{m\Delta},$$

откуда

$$0,5 Y_{m\Delta} = 41,5 \cdot 1,365 \cdot 10^{-4}/0,55 = 103 \cdot 10^{-4} \text{ 1/Ом}.$$

Емкость звена модели на фазу, соответствующая емкости линии длиной 100 км,

$$C_{100} = 206 \cdot 10^3/314 = 66 \text{ мкФ}.$$

Натуральные мощности действительной линии и модели

$$P_{o\lambda} = 500^2 / \sqrt{41,5 \cdot 10^4 / 2,73} = 637 \text{ тыс. кВт};$$

$$P_{m\lambda} = 230^2 / \sqrt{0,352 \cdot 10^4 / 322} = 16 \text{ кВт}.$$

Передаваемая мощность, выраженная в долях от натуральной в модели и оригинале, имеет одно и то же значение:

$$P_o / P_{o\lambda} = 800 / 637 = 1,25; \quad P_m / P_{m\lambda} = 20 / 16 = 1,25.$$

Аналогично можно рассчитать любой вариант модели, изображающий ту или иную систему.

Пример 7.4. Определить параметры установки, моделирующей электропередачу Волжская ГЭС — Москва, выполненную проводами АСО — 500. В рассматриваемом случае моделированию подлежал вариант электропередачи, выполненный по связанной схеме, с продольной компенсацией (50% реактивности линии). Принципиальная схема электропередачи-оригинала с указанием параметров показана на рис. 7.30. Параметры линии для прямой последовательности: $x_0 = 0,239 \text{ Ом/км}$; $r_0 = 0,022 \text{ Ом/км}$; $b_1 = 3,93 \cdot 10^{-6} \text{ 1/(Ом} \cdot \text{км)}$; для нулевой последовательности $b_0 = 2,72 \cdot 10^{-6} \text{ 1/(Ом} \cdot \text{км)}$.

Воспользуемся соотношением

$$X_{od} / X_{md} = X_{o\Delta} / X_{m\Delta},$$

на основании которого определим реактивное сопротивление ячейки цепочечной схемы замещения:

$$\Delta X = X_0 l \frac{X_{md} n_{o.r} p_m}{X_{od} m_{\Pi} n_{m.r} p_o} = \frac{X_{m\Delta} U_{m.\text{ном}} (k_{m.T})^2 S_{o.\text{ном}} n_{o.r} p_m}{X_{o\Delta} U_{o.\text{ном}} (k_{o.T})^2 S_{m.\text{ном}} n_{m.r} p_o} X_0 l;$$

где p — число цепей линии; n_r — число генераторов; m_{Π} — число ячеек цепочечной схемы; S — полная мощность генератора.

В данном случае 12 генераторов и двухцепная линия моделируются одним генератором, работающим на цепочечную схему. Так как $X_{od} = X_{o\Delta} 500^2 / 123,5$, то

$$\Delta X = 0,293 \cdot 815 \frac{4,46 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 123,5}{m_{\Pi} \cdot 12 \cdot 500^2 X_{o\Delta}} = \frac{3,15}{X_{o\Delta} m_{\Pi}}.$$

При числе ячеек $m_{\Pi} = 9$ и установлении ответвления на катушке, отвечающего $\Delta X = 0,685 \text{ Ом}$, имеем

$$X_{o\Delta} = 3,15 / (9 \cdot 0,685) = 0,512.$$

Таким образом, одна ячейка изображает $815 / 9 = 90,5 \text{ км}$. Масштаб сопротивлений

$$m_z = \frac{X_0 l p_m}{\Delta X m_{\Pi} p_o} = \frac{0,293 \cdot 815 \cdot 1}{0,685 \cdot 9 \cdot 2} = 19,4 \frac{\text{Ом оригинала}}{\text{Ом модели}}.$$

Параллельная емкость на ячейку определяется из соотношения

$$\Delta C = b_0 l m_z p_o \cdot 10^6 / (p_m m_{\Pi} \omega).$$

Емкость фазы провода на землю в цепочечной схеме

$$\Delta C_0 = 2,72 \cdot 10^{-6} \cdot 815 \cdot 19,4 \cdot 2 \cdot 10^6 / (1 \cdot 9 \cdot 314) = 30,6 \text{ мкФ}.$$

Чтобы найти емкость между фазами $\Delta C'$, определим соответствующую проводимость:

$$b'_1 = (b_1 - b_0) / 3 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/(Ом} \cdot \text{км)},$$

откуда

$$\Delta C' = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 815 \cdot 19,4 \cdot 2 \cdot 10^6 / (1 \cdot 9 \cdot 314) = 4,47 \text{ мкФ}.$$

Емкость последовательно включенных конденсаторов находится из заданной величины компенсации (50%) на фазу модели

$$X_{MC} = K_{\text{комп}} \frac{X_0 l_0 p_M}{2m_z} = 0,5 \frac{0,293 \cdot 815 \cdot 1}{2 \cdot 19,4} = 3,05 \text{ Ом};$$

$$C_{50\%} = 10^6 / (314 \cdot 3,05) = 1045 \text{ мкФ}.$$

Если принять меньшую степень компенсации (30%), то емкость конденсаторов на фазу

$$C_{30\%} = 1045 \cdot 50/30 = 1740 \text{ мкФ}.$$

При выбранном масштабе сопротивления масштаб напряжения может быть выбран произвольно.

Согласно заданию, напряжения на концах передачи $U_1 = U_2 = 500 \text{ кВ}$. Если в линии-модели будут напряжения 380 В, то масштабы напряжения, мощности и тока

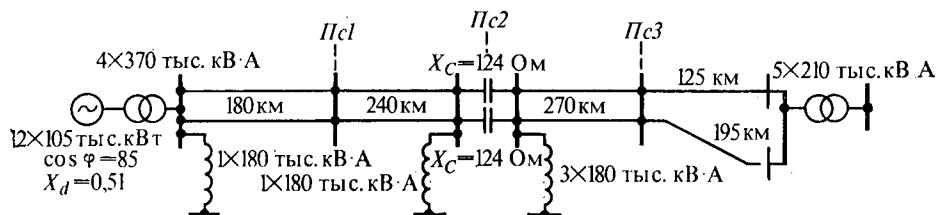


Рис. 7.30

$$m_u = 500 \cdot 10^3 / 380 = 1315 \text{ В оригинала/В модели};$$

$$m_s = m_u^2 / m_z = 1315^2 / 19,4 = 0,9 \cdot 10^5 \text{ кВт оригинала/кВт модели};$$

$$m_i = m_s / m_u = 0,9 \cdot 10^5 / 1315 \approx 68 \text{ А оригинала/А модели}.$$

Если изменить напряжение на трансформаторах модели, имитирующих приемную систему, и на трансформаторах передающей станции, то масштабы m_u , m_s , m_z должны измениться.

Определим параметры трансформаторов и реакторов модели. Мощность трансформаторов модели (передающая станция)

$$S_{M.T1} = S_{0.T} / m_s = 370 \cdot 4 / 90 = 16,5 \text{ кВ·А}.$$

Сопротивление короткого замыкания этих трансформаторов

$$X_{M.T1} = 0,13 \cdot 500^2 / (370 \cdot 4 \cdot 19,4) = 1,14 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление ветви намагничивания подбирается исходя из заданного тока намагничивания ($I_{0\mu} = 33\%$), который в модели должен иметь значение

$$I_{\mu M} = 0,03 \cdot 16,5 \cdot 10^3 / (\sqrt{3} \cdot 380) = 0,75 \text{ А}.$$

Таким образом, реактивное сопротивление ветви намагничивания

$$X_{\mu M} = 380 / (\sqrt{3} \cdot 0,75) = 294 \text{ Ом}.$$

Мощность трансформаторов и сопротивление короткого замыкания приемной системы на модели

$$S_{M.T2} = 270 \cdot 5 / 90 = 15 \text{ кВ·А};$$

$$X_{M.T2} = 0,15 \cdot 200^2 / (5 \cdot 270 \cdot 12,4) = 1,44 \text{ Ом}.$$

Реакторы, имеющие мощность 180 кВт, имитируются реактором-моделью с индуктивным сопротивлением

$$X_{\text{мг}} = 72/3 = 24 \text{ Ом.}$$

Активное сопротивление этих реакторов должно составлять 1—1,5%, что требует применения специальных сердечников.

§ 7.9. МОДЕЛИРУЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

Рассмотренные выше виды моделирования имеют определенные преимущества, проявляющиеся в тех или иных конкретных условиях. Поэтому развитие систем управления энергетикой требует широкого использования моделей, как математических и аналоговых, так и физических. Указанные модели по мере совершенствования, с одной стороны, будут являться средством познания статических, динамических и информационных свойств объекта управления, а с другой стороны, позволят выбрать наиболее эффективную стратегию управления. Основные преимущества аналоговых и математических моделей—универсальность (ЦВМ или АВМ с мощными средствами алгоритмизации и программирования); возможность исследования процесса любой физической природы, включая и такие, которые по каким-либо причинам затруднительно воспроизвести физически; широкие возможности по разработке стратегий оптимальных решений (динамическое и стохастическое программирование, градиентные методы, методы статистических решений и др.).

Необходимость одновременного решения указанного комплекса задач приводит к тому, что для полноценных исследований необходимо объединить эти машины, создав универсальный цифро-аналого-физический комплекс. Можно указать оптимальную структуру комплекса исходя из того, что основными решаемыми с его помощью задачами будут задачи управления режимами электроэнергетической системы в натуральном времени. Структура такого комплекса, представленная на рис. 7.31, состоит из трех основных элементов: модели электроэнергетической системы, управление которой исследуется, управляющей вычислительной машины и устройств управления комплексом. Разнообразные устройства связи между комплексом, пультами операторов и УВМ позволяют проводить управляемые от УВМ эксперименты.

Модель электроэнергетической системы является основной частью комплекса. Степень ее детализации определяется в основном характером исследований и характером решаемых задач управления.

Вместе с тем при осуществлении автоматизированного управления необходимо реализовать управление не только стационарными, но и переходными режимами. При исследовании таких режимов очень эффективна динамическая модель электроэнергетических систем, позволяющая изучить объект с большей степенью детализации, приближая исследователя к условиям эксплуатации реальной электроэнергетической системы. В связи с этим представляется целесообразным при решении задач управления электроэнергетическими системами

строить моделирующий комплекс на базе динамической модели и управляющей ЦВМ.

Независимо от типа используемой модели электроэнергетической системы необходимо ее оснащение устройствами для сопряжения с управляющей частью комплекса: датчиками и исполнительными механизмами. Датчики осуществляют замер контролируемых параметров модели объекта (напряжений, токов, углов, положений коммутационных аппаратов, уставок регулирующих устройств модели

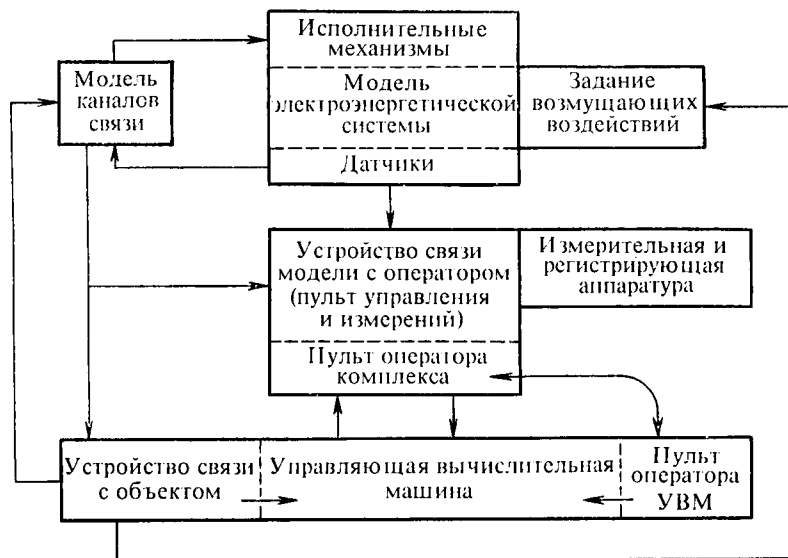


Рис. 7.31

и др.) и преобразование этих замеров в форму, удобную для ввода в управляющую часть. В свою очередь, исполнительные механизмы преобразуют информацию, поступающую от управляющей части, в физически реализуемые управляющие воздействия, посредством которых модель объекта переводится в требуемые состояния в соответствии с законами управления.

Задачи, для решения которых необходимо создание цифро-аналого-физического комплекса, можно разделить на четыре основные группы.

К первой основной группе задач относятся задачи управления режимами электроэнергетической системы в натуральном времени. В настоящее время многие из них находятся лишь в стадии постановки и разработки алгоритмического описания.

Из многочисленных задач первой группы следует выделить три подгруппы задач, отличающихся как постановкой, так и приемами решения. К *первой подгруппе* задач относятся реализация и отработка алгоритмов информационной части системы управления. *Вторую и*

третью подгруппы составляют собственно задачи управления. Во вторую подгруппу целесообразно отнести задачи управления стационарными режимами, а именно использование автоматических систем на базе УВМ для регулирования частоты — активной мощности, экономичного распределения нагрузок, напряжения — реактивной мощности, реализации задач управления обменными потоками мощности, нормальными коммутациями и др. К *третьей подгруппе* относятся задачи управления динамическими режимами, т. е. задачи координации действия защитной аппаратуры, оценки тяжести аварии, ее вероятностного развития и реализации способов локализации и оптимального перераспределения нагрузок в послеаварийном режиме с учетом надежности, аварийного регулирования компонентов электроэнергетической системы.

Решение задач первой группы позволит практически проверить и отработать алгоритмы управления с помощью ЦВМ перед их реализацией в конкретных электроэнергетических системах.

Задачи второй группы непосредственно не связаны с управлением, но позволяют разработать алгоритмы управления с учетом реальных характеристик электроэнергетических объектов. Появление этой группы задач, решаемых комплексом, обусловлено необходимостью проведения экспериментальных исследований на модели электроэнергетической системы для дальнейшего изучения объекта. Сюда относятся задачи проведения экспериментальных исследований на динамической модели с целью получения алгоритмического описания объекта управления.

Уровень автоматизации эксперимента, проводимого на моделях в настоящее время, недостаточен. Используемые на моделях так называемые программные устройства являются элементами, выдающими сигналы управления с заданными временными интервалами в зависимости от заранее выбранной «жесткой» программы. Однако в ряде случаев необходимы логические устройства, которые «выбирают» направление программы и соответствующее «выбранному» направлению время действия тех или иных операций. Таким образом, автоматизация эксперимента предполагает, во-первых, автоматизацию собственно проведения эксперимента и, во-вторых, автоматизацию обработки полученных результатов.

Третья большая группа задач связана с использованием УВМ в качестве универсальной ЦВМ. Это необходимо для проведения расчетов, не связанных непосредственно с решением задач управления в натуральном времени, например, при решении задач планирования и прогнозирования, анализе полученных экспериментальных результатов, проведении работ, связанных с проектированием устройств регулирования и автоматики, и др.

Четвертая группа включает задачи, связанные с подготовкой на моделирующем комплексе высококвалифицированного диспетчерского персонала, обслуживающего автоматизированную систему управления электроэнергетической системой.

Задачи каждой группы предъявляют специфические требования к характеристикам УВМ, используемой в цифро-аналого-физическом

комплексе, как в отношении быстродействия и требуемого объема оперативной памяти, так и в отношении оснащения ее периферийными устройствами.

Использование АВМ в динамической модели электроэнергетической системы имеет большое значение. Их применение прежде всего связано с необходимостью введения в состав модели различного рода компенсирующих и корректирующих устройств. Введение компенсирующих устройств целесообразно для обеспечения необходимого уровня потерь в различных элементах модели (например, в модельных генераторах), а также для получения требующихся характеристик отдельных элементов. Разработанные в настоящее время компенсаторы сопротивлений и проводимостей достаточно полно, точно и надежно функционируют во всех режимах, кроме области низких частот. Однако этот недостаток может быть в ближайшее время устранен с помощью новых схемных и конструктивных решений. Использование такого рода устройств позволит существенно повысить точность и управляемость моделей.

Создание цифро-аналого-физических комплексов для решения задач управления электроэнергетическими системами — актуальная задача электроэнергетики. Ряд комплексов начал работать и дает большой эффект при отработке принципов управления режимами электроэнергетических систем.

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Применения метода моделирования для изучения свойств некоторого объекта (явления) посредством исследования свойств другого, более удобного для экспериментирования объекта — модели — известны давно: первые попытки решения практических задач путем моделирования относятся к середине XV — началу XVI вв. Примерами эффективных научных и инженерных решений и примерами дорогостоящих, а подчас и трагических ошибок, связанных с недооценкой результатов модельных исследований, полна история моделирования; да и не только история ...

Роль моделирования в социальном и техническом прогрессе общества непрерывно растет. По мере развития методологии познания и расширения сферы активной деятельности человека моделирование находит все новые применения, все более разнообразными становятся его формы и способы реализации; совершенствуются технические средства моделирования. Современные методы моделирования многообразны и в своих приложениях: в настоящее время с моделированием, в тех или иных его проявлениях, явно или неявно связаны и научные исследования в естественных, технических и гуманитарных областях знания, и работы инженера по проектированию, конструированию, экспериментальным исследованиям и испытаниям новых технических систем и деятельность руководителя по принятию инженерных и организационно-технических (управленческих) решений.

Учение о подобии и моделировании начало создаваться более четырехсот лет тому назад. Уже в середине XV в. обоснованием методов моделирования занимался Леонардо да Винчи. «Говорят, — пишет он, — что маленькие модели ни в одном своем действии не соответствуют эффекту больших. Здесь я намерен показать, что это заключение ложно ...» Далее он пытается вывести общие аналитические закономерности и приводит многочисленные примеры. Так, рассматривая бурение дерева, он устанавливает соотношения между площадью, силой и количеством дерева, удаляемого буравами разных размеров. Не различая достаточно механического и геометрического подобия, Леонардо в своих работах не получает общих законов подобия, но тем не менее делает серьезные шаги в направлении их создания. Одновременно он пользуется и аналогиями: «Напиши о плавании под водой и получишь летание птицы по воздуху», — рекомендует он, тут же, впрочем, обращая внимание на необходимость проверки: «... движется ли конец крыла птицы так же, как и рука пловца». Он предлагает создавать стеклянные модели глаз, стеклянную модель, позволяющую «наблюдать сквозь стекло, что делает кровь в сердце, когда она сжимает его выходы». В этих же далеко по времени отстоящих от нас работах ставится актуальный и сегодня вопрос о соотношении опыта и теории, о необходимости проверки и обобщения результатов опыта и его роли в познании. «Опыт — посредник между искусной природой и родом человеческим — учит нас тому, что совершает среди смертных природы, понуждаемая необходимостью, и что она не может совершать иначе, как тому учит разум ...»

Вопросы подобия в связи с созданием различных конструкций и их моделированием часто возникают в XVI—XVII вв. Г. Галилей в своем сочинении «Разговоры о двух новых науках» пишет, что учению о подобии стали уделять много внимания в XVII в., когда в Венеции стали сооружать галереи, имевшие большие, чем раньше, размеры. Подпорки, выбранные исходя из геометрического подобия, оказались непрочными, и размеры их пришлось корректировать на основе физических соотношений. «Прочность подобных тел не сохраняет того же отношения, которое существует между величиной тел», — констатировал Г. Галилей. В 1679 г. Э. Мариотт в трактате о соударяющихся телах занимался вопросами теории механического подобия, развивая идеи Леонардо и Галилея.

Первые строгие научные формулировки условий подобия и уточнения этого понятия были даны применительно к механическому движению в конце XVII в. И. Ньютоном в работе «Математические начала натуральной философии». В этой работе рассматриваются движения материальных тел и устанавливаются законы их подобия. Прямая теорема подобия и основные положения подобия, сформулированные И. Ньютоном, заложили основы современного учения о подобии, указав свойства подобных механических систем и критерии, характеризующие движение систем, подобие которых обеспечено (первая теорема подобия). И. Ньютон открыл пути применения подобия и моделирования для обоснования теоретических положений. К этому мысленному, или аналоговому, как его сейчас обычно называют, подобию относятся, например, построения наглядной механической модели для объяснения световых явлений (корпускулярная теория света), математической модели для объяснения явления тяготения и др. Работы И. Ньютона по теории подобия и моделирования долгое время не получали дальнейшего развития и не находили практического применения, хотя в начале XVIII в. во Франции и других странах ставились многочисленные опыты на моделях арок и проверялись различные гипотезы работы их свода.

Одним из первых теоретически обоснованно применил статическое подобие при разработке проекта арочного моста через Неву пролетом 300 м известный русский изобретатель И. П. Кулибин. Исследования он проводил на деревянных моделях в $1/10$ натуральной величины весом свыше 5 тс (модели эти были построены и испытаны в 1775—1776 гг. в Петербурге); в них было впервые учтено, что изменение линейных размеров в k раз меняет собственный вес в k^3 раз, а площади поперечных сечений элементов — в k^2 раз. И. П. Кулибин установил, что модели в $1/k$ натуральной величины имеют напряжения от собственного веса в k раз меньше, чем напряжения в оригинале. Обеспечение подобия влияния собственного веса в модели возможно при некоторой дополнительной нагрузке. Действующая на мост полезная нагрузка должна быть в k^2 раз меньше. Эти положения И. П. Кулибина об условиях подобия были проверены и одобрены Л. Эйлером. Предложенный И. П. Кулибиным метод моделирования собственного веса конструкции соответствует современному способу «догрузки» моделей в центрифугах. В дальнейшем появление новых материалов и конструкций потребовало более точных ответов на многие вопросы, связанные с применением моделей в инженерной практике, и теория подобия получила дальнейшее развитие.

В 1822 г. появилась работа Ж. Фурье «Аналитическая теория теплопроводности», в которой было показано, что члены уравнений, описывающих физические явления, всегда имеют одинаковую размерность. Это свойство получило название правила Фурье или правила размерной однородности уравнений математической физики. В 1848 г. Ж. Л. Ф. Бертран, пользуясь методом подобных преобразований, установил наиболее общие свойства подобных механических движений и указал способы осуществления подобия сложного механического движения, четко сформулировав положение о наличии критериев подобия. Вскоре появился ряд работ, посвященных приложению теории подобия к различным механическим явлениям. Так, О. Л. Коши вывел законы звуковых явлений в геометрически подобных телах из уравнений движений упругих тел; Г. Л. Ф. Гельмгольц получил условия подобия гидродинамических явлений; Филлипс распространил законы колебаний мостов при динамической нагрузке.

В 1874 г. В. Л. Кирпичев опубликовал первую работу, посвященную исследованию упругих явлений в геометрически подобных телах, а несколько позднее сформулировал условия подобия упругих тел (обратная теорема подобия). В 1878 г. Ж. Л. Ф. Бертран показал, что, пользуясь правилом размерной однородности физических уравнений, можно находить математические зависимости между физическими величинами и в тех случаях, когда уравнения связи между этими величинами неизвестны. Математическая зависимость между такими величинами должна быть зависимостью между безразмерными комплексами, составленными из указанных величин. Ж. Л. Ф. Бертран показал, что такие зависимости, полученные для частных случаев, распространяются на группы подобных явлений. Ряд работ, посвященных законам подобия, опубликовал В. Л. Кирпичев, который на основе анализа дифференциальных уравнений установил закон механического подобия при упругих деформациях. Он де-

талько рассмотрел вопросы учета собственного веса конструкций, сил инерции и сформулировал правила моделирования, пригодные в артиллерийском деле и строительстве.

В дальнейшем учение о подобии стало распространяться как на величины и процессы одной физической природы, так на величины и процессы, различающиеся по своей природе, но имеющие определенную аналогию или хотя бы какое-то математическое соответствие. При этом стали различать *подобие математическое* и *аналоговое*. Развитие теории подобия шло двумя путями, основой которых был анализ: 1) уравнений, математически описывающих изучаемые явления; 2) размерностей физических величин, характеризующих эти явления.

Первое направление, разрабатываемое преимущественно в нашей стране, получило название *анализа уравнений*, второе, разрабатываемое за рубежом, *анализа размерностей*. В результате этих исследований условия подобия и закономерности моделирования стали устанавливать на основе анализа уравнений, пользуясь прямой (иначе называемой первой) и обратной теоремами подобия*, а также π -теоремой (иначе называемой второй теоремой подобия). π -Теорема, являющаяся основой анализа размерностей, утверждает, что результаты любого физического эксперимента могут составить некоторые безразмерные комбинации величин, участвующих в изучаемом процессе (они обозначались через π , откуда следует название теоремы). Соотношения и функциональные зависимости, которые характеризуют процесс и представляются в виде безразмерных π -величин — критериев подобия, оказываются при этом справедливыми не только для данного процесса, но и для всех процессов, имеющих численно такие же критерии подобия. π -Теорема строго выведена как следствие из теоремы, которую А. Федерман доказал в 1911 г. Несколько позже, в 1914 г., π -теорема была доказана при некоторых частных предположениях Букингом. Далее в более общем виде π -теорема была сформулирована Т. А. Афанасьевой-Эренфест. Эта же теорема рассмотрена в работе Н. Г. Чеботарева и в ряде работ других авторов.

В 1931 г. М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом сформулирована так называемая обратная (или третья) теорема подобия, устанавливающая условия, необходимые и достаточные для обеспечения подобия групп явлений. О. Рейнольдс, В. Нуссельт и ряд других исследователей предложили методы установления подобия и критериальной обработки результатов исследований применительно к задачам гидромеханики. В 30-х годах нашего столетия М. В. Кирпичев, М. А. Михеев, П. К. Конаков и другие разработали вопросы применения теории подобия в теплотехнике.

В 1943 г. Л. И. Седов выпустил неоднократно переиздававшуюся работу, посвященную применению методов подобия и размерности в механике, в которой касается движения тел в жидкости, движения кораблей и аэростатов, моделирования взрыва и использования теории подобия при решении некоторых задач астрофизики. Применение методов теории подобия и анализа размерностей к электромеханическим задачам освещалось в 30—40-х годах в ряде работ (К. М. Поливанов, С. М. Брагин и др.). В 40—60-х годах в статьях и монографии В. А. Вениковым были рассмотрены особенности применения теории подобия для сложных систем, составленных из отдельных подсистем и систем с параметрами, содержащими нелинейности. В качестве критерия подобия для нелинейных систем было введено новое требование одинаковости относительных характеристик нелинейных процессов.

Теорию подобия с применением предложенных дополнительных положений, распространяющих основные теоремы подобия на системы любой сложности, далее разрабатывали И. М. Кирко, А. В. Иванов-Смоленский, Ю. Н. Астахов, Л. Г. Нагорных, Г. В. Веников, А. М. Кулиев и др.

Исследования, расширяющие возможности теории подобия в задачах экономики, проводились в последнее время Ю. Н. Астаховым, Д. Д. Карасевым и др. Задачи корабельной энергетики решались Л. П. Веретенниковым, И. А. Рябиным и др.

* Применение термина «теоремы» вызывало дискуссии — см. примечание на с. 25.

Работу по обоснованию нелинейного подобия в задачах строительной механики провел В. Б. Геронимус, давший ряд предложений по осуществлению нелинейного подобия. Исследования по моделированию трения и износа провели А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун и др., создав в этой области новое научное направление. Оригинальная постановка задачи о нелинейном подобии и моделировании принадлежит В. М. Брейтману, предполагавшему обойти возникающие при этом трудности, установив сначала условия подобия в «малом», т. е. распространив положения подобия на дифференциальные соотношения, при которых всегда возникает линейность. Далее, проинтегрировав полученные для «малого» критерии подобия, можно создать новые системы (новые пространства), «интегральные в целом», и, исследуя их, получить определенные характеристики исходных нелинейных систем. Метод этот, впрочем, еще не доведен полностью до практических приложений, и области его рационального применения не выявлены.

Высказывались интересные соображения о возможности получения подобия на основе системы физических величин, которая базируется только на двух основных единицах — длине и времени, рассматриваемых каждая в трех координатах (Д. Браун, Ди-Бартини и др.).

В настоящее время актуальнейшей проблемой является развитие теории подобия применительно к задачам больших, сложных, неоднородных систем.

Все сказанное ранее относилось к общей теории подобия и моделирования. Однако следует отметить, что аналоговое моделирование с его особенностями стимулировало самостоятельные теоретические разработки. К ним надо отнести опубликованную еще в 1922 г. Н. Н. Павловским теорию электрогидродинамических аналогов (так называемую теорию ЭГДА). Этой работой были заложены основы математического моделирования различных полей в сплошных средах. Дальнейшему развитию электромоделирования способствовала работа С. А. Гершгорина (1926), предложившего применять электрические сетки для решения большого класса задач гидродинамики, теплопередачи, теории упругости, электрических, магнитных полей и т. д. Теория электрической сетки используется при создании специальных приборов — электроинтеграторов, составленных из пассивных электрических элементов. Большие работы по теории моделирования различных полей проводил начиная с 1936 г. Л. И. Гутенмахер. Много внимания он уделял теории моделей, содержащих активные элементы, источники энергии, усилители. Эти модели основаны на электромеханических аналогиях, которые сначала разрабатывались для внедрения в механику методов, анализа электрических цепей. Далее с помощью электромеханических аналогий стали изучать различные динамические системы. Математическое моделирование основывалось сначала на моделях-аналогах, а затем перешло к структурным моделям. В них, не подыскивая аналога изучаемому процессу, непрерывно воспроизводят отдельные математические операции, соответствующие тем, которые указаны в исходном уравнении. Исследования полей стали проводить на моделях, выполненных в виде твердых или жидких проводников специально подобранной конфигурации. К ним относятся, например, так называемые электролитические ванны, создание которых потребовало разработки конструкций и некоторых теоретических положений. В разработке методов аналогового моделирования участвовали Г. Е. Пухов, М. Ю. Юрьев, Г. А. Гамбурцев, И. М. Тетельбаум, Н. В. Корольков, П. М. Чеголин и др.

Математическое подобие и моделирование, ранее рассматривавшиеся только как синоним аналогового подобия и моделирования, приобрели самостоятельное значение. Здесь одно направление начало развиваться от понятий о подобии дифференциальных уравнений, математически преобразовываемых к одинаковому, или в том или ином смысле эквивалентному, виду. Другое направление было стимулировано развитием техники ЦВМ, потребовавшим установления эквивалентных программ, подобия алгоритмов, критериев объединения групп вычислительных машин в подобные комплексы (А. Н. Лебедев, П. А. Табакс и др.). Начало разрабатываться и сближаться с теорией подобия так называемое условное (эквивалентное) подобие, при котором объекты или явления группируются по некоторым характерным признакам. Эквивалентное подобие алгоритмов и самообучающихся моделей стало связываться с построением управляющих машин (В. Т. Кулик и др.).

При решении ряда физических задач стали применяться различного рода математические приемы, примыкающие к методам моделирования, например конформные отображения, впервые упомянутые как основа для установления подобия еще в работах Д. Максвелла (1881) и позднее нашедшие развитие в работах Н. Е. Жуковского, Н. Н. Павловского, Р. Ферстера, П. Ф. Фильчакова, Ю. Г. Толстова и др. Ряд исследований проводился в отношении методологии математического и аналогового моделирования электрических систем (Д. А. Городский, П. С. Жданов, Д. И. Азарьев, Н. И. Соколов, И. А. Груздев и др.). В результате этих работ появились расчетные столы при различном представлении на них элементов электрических систем. Так, генераторы представляют или в виде источников э. д. с., величина и фаза которых изменяются оператором, или в виде автоматических расчетных моделей (самоуправляющихся станций), иногда неудачно называемых динамическими. В последние годы были созданы новые типы расчетных столов, на которых моделируемая система с ее генераторами и двигателями представляется на структурной аналоговой модели. Весьма удачными оказались установки для изучения переходных процессов, сочетающие принципы аналогового подобия и математического моделирования на ЦВМ. Среди различных конструкций этого типа можно упомянуть установку «Дельта», созданную во ВНИИЭ Я. Н. Лугинским, и др. В связи с этим актуальным стало нахождение лучших способов преобразования уравнений системы, подлежащей исследованию.

В настоящее время в понятия подобия и моделирования стало вкладываться несравненно более широкое содержание, чем это было раньше. В современных научных исследованиях под моделью стали понимать также и совокупности различных гипотез, позволяющих не только получать наглядное описание уже известных качеств изучаемого предмета, но и предсказывать новые. В этом смысле говорят о мысленных моделях, например моделях строения ядра и т. д. Появилось понятие информационного моделирования, не воспроизводящего изучаемый объект, но определенным образом собирающего сведения о нем и систематизирующего их так, чтобы можно было не только описывать известные свойства, но и предсказывать поведение объекта в различных условиях. При таком подходе мозг человека может рассматриваться как универсальная информационная модель. Эта «модель» осуществляет не только статическое усвоение поступающей информации, но и динамически преобразует ее, развивая в соответствии с заложенными в ней возможностями. В ряде работ (В. М. Глушкова и др.) подчеркивается, что в универсальности мозга человека заключается одна из важнейших сторон его способности к безграничному познанию окружающего мира. В этом аспекте современные ЦВМ стали с методологической точки зрения рассматриваться как инструмент информационного моделирования, поскольку в них может накапливаться и динамически перерабатываться любая информация. В последнее время в научном познании все большее значение приобретает кибернетическое моделирование, которое не стремится к выявлению какого-либо сходства в отношении внутренних свойств моделируемых объектов. При таком моделировании, разрабатываемом применительно к большим техническим системам (В. А. Веников, О. А. Суханов, В. А. Щербина и др.), признаком подобия служит наличие изоморфизма, т. е. одинаковых функций на входах и выходах некоего «черного ящика». Модель, так же как и оригинал, при кибернетическом моделировании реагирует на внешние воздействия; исследуемые функциональные зависимости служат определенным выражением сущности объекта, однако внутренний причинный механизм связи явления с его сущностью при кибернетическом моделировании может быть неизвестен.

В ряде общеметодологических работ (И. Б. Новик, В. А. Штофф, Г. Клаус и др.) подчеркивается, что моделирование — определенная ступень в развитии научного познания на пути его углубления от внешнего к внутреннему, от явления к сущности, от явления более простого к явлениям более сложным. Рассмотрение вопросов синтеза знания в свете метода моделей оправдывается тем, что моделирование не только способствует созданию единого языка науки, но и отражает в конечном счете внутреннее содержание моделируемых явлений. А это позволяет подойти к проблеме научных знаний, исходя из материалистического принципа — единства природы.

Теория подобия и моделирования, как это указывалось выше, по сути дела, является методологией эксперимента. Она указывает, как ставить эксперимент и как обрабатывать его данные, чтобы получить результат, не только достоверный в данном частном случае, но и распространяющийся на группу подобных явлений.

Однако теория эксперимента развивалась и развивается еще по двум направлениям.

Первое направление можно назвать *обработкой данных* и определить как методику расчета и построения достоверных характеристик на основе опытных данных, неизбежно имеющих погрешности, отражающиеся, в частности, в «разбросе» опытных точек. Это направление, связанное с именем Ж. Лагранжа и других ученых, развивалось с начала XIX в. При обработке результатов измерений учитывается их статистический характер и обеспечивается наилучшее приближение к истинным значениям параметров по результатам измерений, имеющих различные ошибки, в том числе случайные. Такие ошибки должны исключаться соответствующими методами.

Второе направление, называемое *теорией планирования экспериментов*, можно определить как методику проведения наблюдений за явлениями (пассивный эксперимент) и одновременно такую стимуляцию изучаемых явлений (активный эксперимент), которая позволила бы наиболее быстро, с меньшим числом опытов найти наиболее характерные зависимости или точки (активный — экстремальный эксперимент). Это направление появилось в 40—50-х годах. Начало ему положили работы Фишера, Бокса, Уильсона и многих других исследователей. К их числу надо отнести и ряд работ отечественных авторов (В. В. Налимова, Г. К. Круга, Ю. П. Адлера и др.). В разрабатываемых проблемах центральное место заняли вопросы организации опытов при учете не одного, как это делалось раньше, а многих влияющих факторов.

Такой многофакторный эксперимент должен проводиться согласно четкой схеме, предусматривающей, в частности, экстремальный и вероятностный подходы к исследованиям. *Экстремальный подход*, направленный на быстрое выявление наиболее существенных характеристик и их точек, предполагает проводить опыты в любой сложной, нелинейной системе, сначала находя линейное ее приближение. При этом зависимости, отражающие малые участки изучаемой функции, линеаризуются, экспериментальные точки выбирают и изменяются «под градиенту». Затем учитывается, что выявляемые соотношения в действительности нелинейны и должны представляться полиномами высоких порядков. *Вероятностный подход* к учету влияющих факторов в теории планирования эксперимента оказался существенно отличным от принятого при обработке данных пассивного эксперимента. При активном эксперименте исследователь не преодолевает случайные — вероятностные — ситуации, а, напротив, искусственно создает их. Так сформировалась новая идея расширения возможностей опыта, отраженная в специально разработанных приемах, а также опубликованная в многочисленных трудах по теории эксперимента, называемая *рандомизацией*.

Таким образом, для второго направления оказались наиболее существенными активность эксперимента, его многофакторность, а также стратегия проведения опытов, при которой выявляются характерные для данных явлений точки в условиях искусственно созданных вероятностных ситуаций.

Из сказанного следует, что установление подобия явлений, различные пути их моделирования, обработка результатов экспериментов, планирование экспериментов — все это, по сути дела, единая методология эксперимента. Однако в настоящее время это единство плохо отражено в практике исследователей и в литературе. Так, в работах по теории планирования эксперимента обычно даже не упоминается о теории подобия, о возможности и целесообразности обобщенного представления результатов опытов в виде взаимозависимостей критериев подобия. В свою очередь, несомненно, что постановка исследований с помощью моделей — моделирование — должна была бы при проведении опытов ориентироваться на активные эксперименты, используя теорию их планирования. Необходим синтез этих направлений.

Практика моделирования, в которой эта теория пока недостаточно используется, имеет свою многовековую историю, восходящую к XV в., к уже упо-

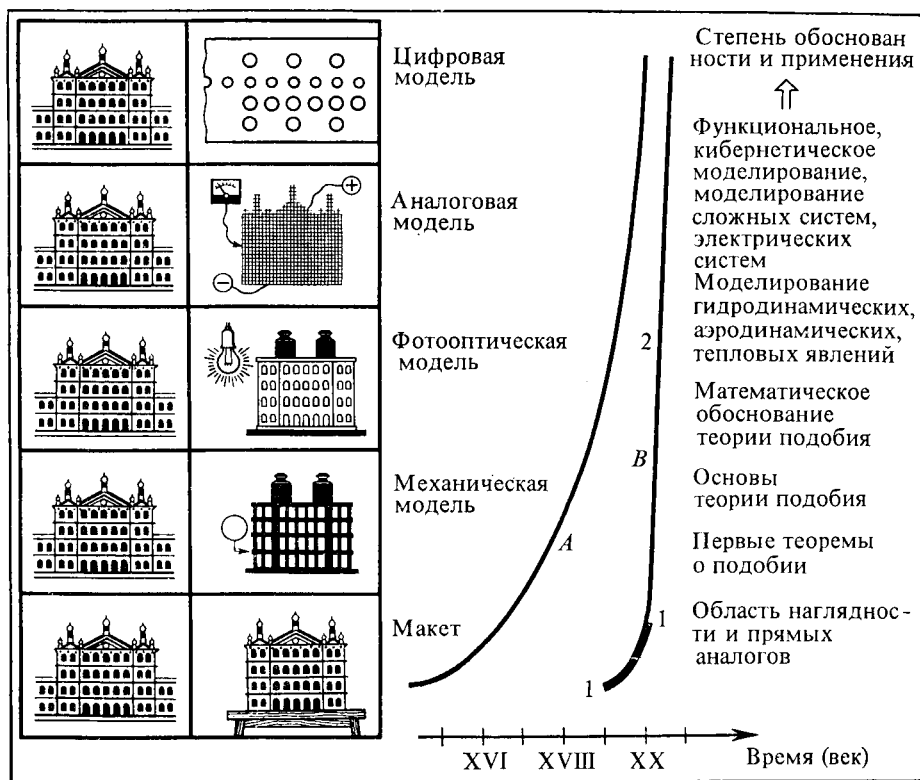


Рис. П.1

минавшимися именам Леонардо да Винчи и Г. Галилея. Эти ученые применяли методы моделирования в самой простейшей форме, обосновывая их прямой аналогией и наглядными соотношениями.

Теоретическая обоснованность методов моделирования непрерывно развивалась (рис. П.1). И. Ньютоном, Ж. Фурье и Ж. Л. Ф. Бертрамом были заложены начала современной теории подобия, сформулированы основные положения, касающиеся постановки опытов на моделях. С середины XIX в. успехи моделирования были связаны с развитием физических, технических, а в последнее время и экономических наук. Проникновение в них методов теории подобия и моделирования можно условно характеризовать кривой *A*, показывающей, как эти методы все больше и больше служили основой экспериментального изучения сложных систем. Однако в ряде научных областей, например в биологии, медицине, химии и др., моделирование не получило пока еще ни достаточно полного теоретического обоснования, ни того широкого развития, в котором эти дисциплины нуждаются. Современное развитие моделирования в этих областях можно характеризовать участком *I—1* кривой *B*. Модель при этом рассматривается пока только как нечто внешне или в лучшем случае функционально похожее на оригинал. Таковы, например, модели мыши и черепахи, созданные Шенноном и Уолтером. Эти кибернетические модели не воспроизводят каких-либо физических или физиологических процессов и не отражают количественных соотношений, но дают внешнюю похожесть функций. Модели, например, отыскивают себе «пищу» (для моделей это магнит или источник света), запоминают к ней дорогу, т. е. ка-

чественно (без количественных соотношений) моделируют не к о т о р ы е функции живого организм. В рассматриваемых моделях Шеннон и Уолтер как бы возвращаются (разумеется, на новом уровне) к представлениям Леонардо да Винчи, воспроизводя в своих моделях некоторые функции живых существ. Модели отражают взаимодействие живого организма с внешней средой, его способность реагировать на те или иные раздражения. Однако реальные живые существа и их поведение значительно сложнее. Они определяются не только внешними условиями и функциональными связями. Живые существа, кроме того, концентрируют, перерабатывают и воспроизводят при размножении поток информации, как приобретенной в ходе индивидуального развития, так и полученной от предков, т. е. информации, накопленной в процессе исторического развития вида.

Метод, который до настоящего времени был основным при моделировании сложных процессов, отличался функциональным подходом к задачам. Однако при моделировании «живого» необходимо учесть, что функциональный подход выделяет только свойства отдельной стороны изучаемого сложного явления. А у последнего имеется множество функций, отраженных в ряде процессов. Можно получить в модели многофункционального явления сходные по отдельным функциям процессы, не имея подобия в целом, подобия во всей совокупности функций.

Но даже при таком ограниченном подходе современное биологическое моделирование все еще несовершенно из-за отсутствия тех количественных характеристик, которые придали бы ему большую определенность, ввели его в общее русло единых и целенаправленных методов моделирования.

К сожалению, изучая живую природу с помощью физических методов, исследователь пока не всегда может найти достаточно надежные математические соотношения между параметрами и зафиксировать с их помощью те физические или физико-химические законы, которые управляют сложной живой системой. Однако не следует делать вывод, что в биологическое моделирование нельзя ввести математические критериальные соотношения. В задачах медицины моделирование с применением вычислительных машин начинает переходить от первых опытов к решению практических задач, при этом выявляются возможности применения моделирования в генетике, во всяком случае в том ее разделе, который называется *инженерной генетикой*. Таким образом, действительно можно ожидать, что аллур кривой В (см. рис. П.1), отражающий моделирование в историческом плане и прогнозирующий его будущее, далее будет очень быстрым (отрезок 1—2).

Рассматривая вновь кривую (см. рис. П.1), можно заметить, что столь успешно и, казалось бы, эффективно совершенствовавшиеся методы моделирования далеко не сразу получили признание; как правило, они встречались сначала недоверием. Здесь поучительным историческим примером недооценки роли моделирования может служить гибель броненосца «Кэптен», построенного в 1870 г. В то время английские ученые-кораблестроители Фруд и Рид создали теорию моделирования кораблей, к стати сказать, потом существенно развитую в нашей стране акад. А. Н. Крыловым. На основе экспериментов на моделях теория происходящих явлений уточнялась и давала полную картину поведения «натуры». Исследования модели показали, что броненосец должен опрокинуться даже при небольшом волнении. Специалисты Адмиралтейства не сочли моделирование серьезным доказательством. При выходе в море «Кэптен» перевернулся и 523 моряка погибли. Мемориальная доска, установленная в Лондоне, символизирует осуждение лордов Адмиралтейства, не поверивших ученым и их опытам с «игрушечной моделью».

Не столь трагичная, но неприятная ошибка, совершенная в наше время, потребовала смены всех окон нового 60-этажного здания в г. Бостоне (США) и обошлась в 7 млн. долл. Как надо передать окна, указали тщательные испытания модели здания в аэродинамической трубе, выявившие особенности ветровых нагрузок на стены и указавшие, как исправить просчет проектировщиков, своевременно не прибегших к моделированию. Однако, несмотря на случаи недоверия, а иногда даже и противодействия внедрению, методы моделирования давно стали применяться во многих областях техники. Их применил, например, при сооружении железнодорожных мостов Д. И. Журавский. Ранее для определения размеров составных частей ферм мостов применялись упрощенные приемы и все раскосы и тяжи каждой фермы моста делались одного и того же размера.

Выводы о том, что их нагрузки неодинаковы, сначала казались неправдоподобными и были проверены на модели из металлической проволоки. На этой модели оказалось возможным, проводя смычком от скрипки по проволокам модели, расположенным вблизи опоры фермы, получать более высокий тон, чем на проволоках, расположенных в середине; оказалось ясно, что первые нужно натянуть значительно сильнее вторых.

Моделирование широко применялось в строительстве и артиллерии (В. Л. Кирпичев), а далее при изучении работы самых различных технических установок, гидравлических сооружений, строительных конструкций. На моделях стали изучать течение водных потоков, различные гидродинамические явления, происходящие при мощных взрывах, и даже явления, происходящие при землетрясениях (имитируя с помощью специальной вибрационной платформы колебания земной поверхности). При этом для отработки антисейсмичности конструкций модель иногда имеет далеко не маленькие размеры: площадь ее достигает 20 м^2 , а масса конструкции доходит до 30 т.

Модель дает возможность наблюдать такие явления, как извержение вулкана, возникновение и исчезновение горных систем. Модели гор при этом выполняются из фотоупругих материалов, которые при сжатии окрашиваются. По цвету того или иного участка можно судить о величинах приложенных сил и их распределении. Такие эксперименты позволяют в ряде случаев получить практически важные сведения, например установить, где заложены полезные ископаемые, и т. д.

Рассматривая моделирование в историческом разрезе, можно заметить, что, хотя теоретическое обоснование условий подобия направлено от физики и физического моделирования, в дальнейшем при развитии аналогового, а затем и математического моделирования об их физическом происхождении стали забывать. Этому способствовало и то обстоятельство, что аналоговые модели стали применяться давно, выступая в качестве некоторых наглядных образов изучаемых объектов. Поскольку именно механические модели обладали наибольшей наглядностью, то появилось стремление все немеханические явления сводить к механическим, более привычным и более изученным. Уже в XVIII в. физики для объяснения электрических и оптических явлений ввели механические модели в виде колебаний некой «эфирной материи». Д. Максвелл, широко применявший модели для объяснения электромагнитных явлений, подчеркивал не только наглядность, которую дает модель, но и ее гипотетические свойства, позволяющие объяснить механические явления до выработки достаточно зрелой теории. Например, такими моделями, основанными на аналогии между свойствами электромагнитных процессов и свойствами несжимаемой жидкости, стали модели и уравнения электромагнитного поля, вытекающие из механических аналогий, и т. д. Э. Резерфорд, экспериментально получив данные о наличии ядра в атомах, выдвинул смелую гипотезу об аналогии атома и солнечной системы, создав свою знаменитую планетарную модель атома и многие другие модели. Можно было бы привести еще много примеров, когда в практике научного исследования наряду с физическими моделями, воспроизводящими протекание процессов в других масштабах, появлялись модели иллюстративно-методические (моделирование жидкостью электромагнитных явлений) и модели эвристические, предназначенные для первоначального, хотя бы и неполного, объяснения физических явлений. Все эти модели в той или иной степени обычно имели сходство в математическом описании происходящих процессов. На таких моделях широко воспроизводились аналогии между законами, выражающими различные физические явления. Например, на электрической модели, представляющей закон Ома, стали изображать закон Фурье для теплового потока и закон Дарси для фильтрации жидкости. Такой подход заложил основы современного аналогового моделирования. В дальнейшем, когда развитие физических знаний пошло по пути все большей математизации и уменьшения наглядности, возможность механического представления физических процессов стала уменьшаться и даже иногда исключаться. Эта ненаглядность стала рассматриваться некоторыми физиками как неизбежная плата за интеллектуальный выигрыш, связанный с пониманием. Точки зрения о научных теориях как логических построениях, основанных на отвлеченных аксиомах, тоже в той или иной мере связаны с концепцией ненаглядности. Однако в действительности это озна-

чает, что не моделирование и не модели становятся ненужными, а подход к их применению требует определенных обобщений. При решении конкретных задач, выдвигаемых научной практикой, и особенно при решении технических задач значение модели не уменьшается, а возрастает. В теоретической (в том числе современной) атомной физике с ее глубокой математизацией аналоговое моделирование оказалось полезнейшим инструментом при изучении ядерных превращений. Так, Н. Бор, изучая механизм передачи энергии в атоме, предложил в качестве модели возбужденного ядра атома подогретую каплю: оказалось, что можно сопоставить испарение и радиоактивность. Ведь в ядре тоже есть силы, цементирующие между собой его части. И прежде чем нейтрон, протон или альфа-частица вылетят наружу, они должны преодолеть эти силы. Так появилась модель атома, которую Н. Бор, стремясь к еще большей наглядности, дополнил моделью вещественной. В чашеобразное углубление стола он поместил стальные шары. Сами собой они не могли оттуда выкатиться. Но если послать в углубление еще один шар, то все остальные начинали очень быстро двигаться в чаше, а иногда один из них выскакивал наружу. Такая модель-аналог, несмотря на простоту, помогла при описании цепной реакции. Пользуясь ею, удалось, например, получить вывод о возможности самопроизвольного распада тяжелых ядер: далее были указаны гипотетические свойства изотопа урана-235 с нечетным числом протонов и нейтронов (вероятность его деления гораздо выше, нежели более распространенного урана-238). Оба предсказания вскоре блестяще подтвердились.

Иногда говорят: «Аналогия — не доказательство». «Модели нельзя верить» ... Но в действительности исследователи никогда и не стремятся только так и м путем доказать что-нибудь. Здесь вполне достаточно того, что увлеченное сходство дает могучий импульс творчеству и указывает, по какому пути идти в поисках решения. Аналогия способна скачком выводить мысль на новые, неизведанные орбиты, и безусловно правильно положение о том, что аналогия, если обращаться с ней с должной осторожностью, — наиболее простой и понятный путь от старого к новому. Но всякая аналогия имеет определенные границы. Истинно новое никогда не содержится в старом, и, познавая законы природы, следует учиться видеть не столько старое в новом, сколько новое в старом.

К настоящему времени, когда вычислительные машины усовершенствовались и стали обладать огромным быстродействием и памятью, математическое моделирование получило мощный инструмент. Появилась возможность решать многие недоступные ранее задачи. Однако, чтобы найти ответы на поставленные вопросы, требуется не одно решение, а целая цепочка промежуточных решений. Пути решения здесь неоднозначны и цели можно достигнуть, только просматривая разные решения. Одних математических методов и совершенной вычислительной техники недостаточно. Неизбежно в сложных ситуациях, таких, как, например, глобальное планирование в масштабах отрасли или государства, планирование военных и политических акций, создание систем социальных мероприятий и т. д., привлечение к решению интуитивного фактора. Поэтому вместе с математическими и экономико-математическими стали развиваться и эвристические методы, цель которых — использование опыта и таланта человека. Объединив возможности, скрытые в человеческом интеллекте, со способностью вычислительной машины быстро выполнять логические и арифметические операции, можно получить так называемую *имитационную математическую модель*. Эта модель представляет собой совокупность математической модели, имитирующей изучаемый (или планируемый) экономический, производственный или какой-либо другой процесс, группы экспертов, участвующих в планировании, и специального математического обеспечения, позволяющего экспертам вести диалог с машиной и между собой.

Математическая цифровая модель может выдавать информацию человеку не только в виде таблиц или лент с записями рядов цифр, но и в удобной, более наглядной форме. Это могут быть, например, графики, объемные представления. Обратная связь машины и человека может осуществляться очень просто и наглядно — с помощью светового пера, что позволяет непрерывно корректировать вводимую в ЦВМ информацию.

Область применения математически формализованных моделей все время расширяется: в экономике, биологии, медицине, исторических и других общественных науках, т. е. в самых разнообразных процессах. Однако оказалось, что, как правило, описание такого рода процессов не замкнуто, в моделях присутствуют «свободные параметры» или функции, которые не определены. Другими словами, такие процессы должны управляться человеком и возникает проблема моделирования комплекса «человек—машина» с отражением в нем «модели человеческих функций». Таким образом, сложность и комплексность объектов, которые могут изучаться методами моделирования в технике, практически не ограничены. Модели этих объектов выполняются физическими и математическими, а также комбинированными. В последнее десятилетие все крупные сооружения исследовались на моделях. Например, гидроэнергетические объекты (плотины, каналы, гидротурбины для таких станций, как Волжская ГЭС им. В. И. Ленина, Волгоградская ГЭС, Братская ГЭС, Красноярская ГЭС, Асуанская ГЭС в АРЕ и др.) исследовались на физических моделях, изображающих в уменьшенном масштабе эти грандиозные сооружения. Большое значение для сооружения электрических систем и дальних электропередач имели исследования их режимов на физических моделях, создаваемых в стадии проектирования и позволяющих проверить теоретические положения, лежащие в основе расчетов, и действие различных регулирующих устройств, аппаратуры, релейной защиты и т. д. При создании и совершенствовании межконтинентальных и космических ракет на физических моделях успешно проводились исследования аэродинамических свойств ракет, влияния ионизации воздуха впереди головной части ракеты и т. д.

Широко распространенные специальные модели, обычно выполняемые в виде сочетания физической и математической моделей с натурными приборами, стали применяться для наладки приборов управления и тренировки персонала, управляющего различными сложными объектами. В первом случае эти модели стали называться *испытательными стендами*, а во втором — *тренажерами*. Тренажеры применяются для обучения различного эксплуатационного персонала; особое значение они имеют при подготовке летчиков, подводников, космонавтов. Несомненно, что в будущем тренажеры должны найти применение и при подготовке персонала для энергосистем.

Обычно приборы и органы управления в тренажерах сохраняются нормальными, применяемыми в практике. Воздействие на эти приборы преобразуется в импульсы, моделирующие поведение управляемого объекта. Например, тренажеры для летчиков воспроизводят у обучаемого все физические ощущения, связанные с полетом в любом направлении, подъемом, спуском.

Моделирование очень важно еще и для того, чтобы опередить практику. В качестве примера такого опережающего действия моделирования можно привести следующие факты. Когда первая в мире электропередача 500 кВ только проектировалась — на модели уже была изучена ее работа, первый пассажирский сверхзвуковой самолет еще только создавался, а его будущие пилоты уже проводили тренировки по управлению машиной. «Водить» еще не построенный самолет они учились на модели-стенде. Он являлся копией кабины летчиков со всеми приборами, устройствами управления и связи. Имелся также пульт, с которого инструктор мог задавать условия «полета» и контролировать действия экипажа. Телевизионная аппаратура, магнитофоны, блоки имитации тряски предназначались для создания соответствующей «летной» обстановки. Мозгом модели-стенда являлась вычислительная машина, решавшая дифференциальные уравнения движения самолета. В процессе работы электронные модели по мере необходимости включали магнитофоны, блоки имитации тряски и т. д.

Многообразно применение моделирования в военной технике. Физическое моделирование военных действий — это хорошо известные маневры, в которых моделируются применение оружия и взаимодействие с противником. В математических моделях для имитации процессов управления войсками применяют вычислительные машины, в которые поступают данные математического описания боевых действий. При этом используются методы теории вероятности, случайных процессов, игр, массового обслуживания, а также линейного и нелинейного программирования.

В последнее время особое значение приобрело моделирование *биологических и физиологических* процессов. Так, создаются протезы тех или иных органов человека, управляемых биотоками. Разрабатываются установки, моделирующие условия, необходимые для развития живых тканей и организмов.

Некоторые функции человеческого мозга и нервной системы моделируются с помощью специальных моделей (функциональных или, как их иначе называют, кибернетических). Не отражая внутренней структуры объекта, такие модели в определенных условиях воспроизводят его функции. Например, модели сердца и легких, выполняющие некоторые функции этих органов, применяются во время операций.

Большое развитие получает новая наука — бионика, в которой значительную роль играет *кибернетическое — функциональное — моделирование живых организмов*, осуществляемое средствами современной электроники.

Интересной возможностью физического моделирования является использование в качестве модели живого организма быстроразмножающихся организмов, например на мухах можно проследить влияние космического полета на условия жизни и, сопоставив эти условия с родственным поколением, находящимся на Земле, получить модель для проверки так называемой биологической теории относительности.

Перечень осуществленных моделей и возможностей моделирования можно было бы еще расширить. Однако это не входит в задачи настоящего раздела. в котором краткая характеристика развития методов теории подобия и осуществления различных моделей давалась преимущественно в историческом плане для общей оценки состояния и возможностей метода.

В заключение еще раз подчеркнем *познавательную роль модели и моделирования* при решении задач, связанных с синтезом наук. Моделирование, рассматриваемое в гносеологическом плане, не только отражает *общность единичных явлений* внутри какой-либо области исследований, но помогает найти и отразить то общее, что имеется в разных областях, и объединить эти различные области. Модель, моделирование и теория подобия являются важными факторами в процессе построения общей теории (основанной на базе отдельных гипотез и теорий) и в конечном счете создания научной дисциплины.

Моделирование, теория подобия, таким образом, могут существенно облегчать выявление того общего, что имеется в разных науках. По мере развития метода моделирования формы моделей видоизменяются и обобщается трактовка получаемых с их помощью результатов.

Сказанное подтверждает определение моделирования, как *любого метода опосредствованного практического или теоретического, мысленного или опытного оперирования объектом*. При этом используется вспомогательный промежуточный искусственный или естественный «квазиобъект», находящийся в каком-либо объективном соответствии с познаваемым объектом и называемый моделью. Основным свойством и характерным признаком модели является то, что она способна *замещать объект на определенных этапах* и давать при исследовании информацию о нем.

Моделирование, таким образом, требует объективного соответствия с изучаемым объектом и возможности замещения его не всегда и во всем, а только на определенных этапах исследования. Модель, какой бы она ни была, должна обладать способностью в ходе исследования давать некоторую, допускающую проверку информацию. Моделирование требует формулировки некоторых правил перевода информации, полученной при изучении на модели, в информацию о самом моделируемом объекте. Эти правила в конечном счете ведут к требованию соответствия математических соотношений (критериев подобия) у модели и оригинала.

ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ, ПРИМЕНЯЕМАЯ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ ВОПРОСОВ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Анализатор — специальная установка, комбинирующая принципы физического и математического моделирования для исследования какого-либо процесса.

Аналогия — метод суждения, позволяющий по какому-либо частному сходству рассматриваемых объектов в каком-либо отношении сделать выводы о их сходстве в других отношениях, т. е. переносить информацию об одном объекте (модели) на другой объект (оригинал). Аналогия является средством связи гипотезы с опытными данными.

Граничные условия — условия, принципиально определяющие параметры режима на границе модели.

Информация — особая форма связи взаимодействующих систем или системы и внешней среды, возникающая при достижении определенной степени организации систем, используемая ими для управления своим поведением в изменяющихся условиях взаимодействия или воздействия на систему внешней среды.

Линии электропередачи модели — экспериментальные линии передачи, имеющие при уменьшенных размерах параметры, соответствующие линиям больших размеров и большой мощности. Линии-модели разделяются на: а) геометрически и физически подобные, б) физически подобные с нарушением геометрического подобия, но с сохранением аффинного подобия, в) цепочечные линии-модели, выполненные в виде ячеек, каждая из которых замещает определенный участок линии. В цепочечных схемах подобие распространения волны в пространстве имеет условный характер: длина определяется номером ячейки, скорость распространения — средней точкой фронта волны.

Масштаб — отношение между параметрами, характеризующими систему или процесс. Масштаб обычно не изменен для данного явления, однако иногда применяют переменные масштабы.

Модель — промежуточный объект мысленный (представленный умозрительно, или описанный математически), а также материальное сооружение, установка, устройство или комбинация каких-либо элементов сооружения, подобные другому объекту (оригиналу).

Модель-аналог — модель, непрерывно воспроизводящая все течение изучаемого процесса каким-либо другим процессом, имеющим другую физическую природу.

Модель геометрическая, или макет, — модель, дающая геометрическое подобие и не отражающая природы происходящих явлений.

Модель динамическая — модель электрической системы, построенная частично как физическая — при неполном моделировании, а частично как аналоговая, дающая подобие протекания во времени электрических и электромеханических процессов в электрических машинах и сетях без сохранения подобия полей.

Модель математическая — установка, воспроизводящая главные процессы изучаемого явления с помощью явлений другой физической природы, специально воспроизведенных для реализации математического моделирования. Это может быть модель-аналог, или цифровая модель, дискретно представляющая изучаемый процесс в виде дифференциального уравнения, алгоритма и программы, реализуемой на ЦВМ.

Модель машины — специальные электрические машины (синхронные, асинхронные, трансформаторы и т. д.), имеющие не обычные для машин данной мощности и размера параметры и предназначенные для воспроизведения на моделях характеристик машин другой мощности и других размеров.

Модель мысленная (логическая) — модель, умозрительно воспроизводящая в той или иной форме представление о процессе без экспериментального воспроизведения всего процесса.

Модель неполная — модель, осуществляющая неполное подобие.

Модель полная — модель, осуществляющая полное подобие.

Модель приближенная — модель, заведомо содержащая некоторые оцененные отклонения от подобия изучаемого явления.

Модель статическая — модель электрической системы (расчетная) — установка для расчета режимов, являющаяся физической моделью электрической сети (при заданных э. д. с.) и математической структурной моделью электрической системы. Установившиеся режимы в электрической сети отражены физически подобными процессами, переходные электромеханические процессы — процессами математически подобными. Различают статические модели переменного тока, т. е. модели, содержащие источники переменного тока и цепи с полными сопротивлениями, статические модели постоянного тока, содержащие модели электрических сетей, изображенные только активными сопротивлениями. Другими названиями являются: расчетный стол, расчетный стол постоянного тока, расчетный стол переменного тока, расчетная модель, расчетный щит, динамическая модель, расчетная динамическая модель.

Модель структурная — установка, воспроизводящая на основе уравнений отдельные звенья моделируемой системы и после соединения их дающая воспроизведение процесса.

Модель физическая — модель, воспроизводящая главные процессы изучаемого явления с сохранением его природы и основных влияющих факторов.

Моделирование — метод исследования, проводимого при помощи модели, т. е. некоторого вспомогательного искусственного или естественного объекта (промежуточного), обладающего способностью в том или ином смысле заменять исследуемый объект.

Моделирование аналоговое математическое — основано на непосредственной аналогии между отдельными физическими процессами и величинами, присутствии одному явлению, но аналогичными в другом явлении.

Моделирование математическое — исследование, проводимое на установке, воспроизводящей процессы другой физической природы, чем изучаемые процессы, происходящие в оригинале. Моделирование при этом основано на изоморфизме уравнений, т. е. способности их описывать различные по природе явления и выявлять различные функциональные связи, используя изоморфизм уравнений, т. е. способность описывать определенные отдельные стороны поведения системы.

Моделирование натурное (натуральное) — специально поставленный эксперимент «на натуре» (в природе, на производстве) при специально подобранных или созданных условиях, отвечающих критериям подобия, но без искусственных изменений параметров натурального объекта (без создания специальных установок и т. д.).

Моделирования погрешности вторичные — погрешности, обусловленные неточным воспроизведением на модели расчетных значений моделируемых величин, и погрешности, обусловленные неточностью измерений.

Моделирования погрешности первичные — расхождение между истинным значением какой-либо величины в натуре и значением ее, принятым для осуществления на модели (расчетным).

Моделирования погрешности принципиальные — неточности, обусловленные неполным учетом в модели факторов, заведомо влияющих на изучаемые процессы, т. е. погрешности, вызванные осуществлением вместо точного моделирования приближенного.

Моделирование физическое — исследование физически подобных процессов на установках, сохраняющих физическую природу явлений, но воспроизводящих их в других размерах в смысле геометрическом или физическом.

Оригинал (натура или прототип) — объект, подлежащий исследованию методами моделирования.

Подобие динамическое — подобие движения и сил, вызывающих подобное движение.

Подобие имитационное — подобие процессов в модели, процесса в натуре при одновременно подобном участии человека (эксперта) в изучении данного явления.

Подобия критерии — отвлеченные (не именованные) числа, содержащие комбинации физических величин. Постоянство критериев, одинаковых для группы явлений, является признаком подобия этих явлений.

Подобие материальное — подобие физически реальных, экспериментально воспроизводимых элементов в какой-либо системе.

Подобие механическое — сочетание подобия кинематического, материального и динамического.

Подобие неполное — подобие, устанавливаемое между отдельными сторонами изучаемого явления (например, может изучаться отдельно протекание процессов только во времени или только в пространстве). При этом, однако, отсутствие полного подобия не должно приводить к искажению той стороны явлений и тех процессов, которые изучаются.

Подобие полей — частный случай неполного подобия, при котором устанавливаются только подобные соотношения при распределении электрических, магнитных, тепловых и других полей в пространстве. При этом протекание процессов во времени может быть не подобным.

Подобие полное — подобие явлений, при котором подобны все процессы, непосредственно связанные с изучаемым явлением, рассматриваемым как во времени, так и в пространстве.

Подобие приближенное — подобие явлений, заведомо допускающее некоторые искажения, заранее известные и оцениваемые количественно на основании аналитических или экспериментальных исследований.

Подобия теория — теория, устанавливающая наличие и возможности подобия явлений, указывающая, как по заданным характеристикам одного явления судить о характеристиках группы других явлений и получать их простым пересчетом. Теория подобия основывается на анализе размерности физических величин или уравнений процесса и устанавливает условия подобия, выражаемые критериями подобия.

Подобие цепей — частный случай неполного подобия, при котором установившиеся режимы и переходные процессы в электрических цепях считаются подобными, но подобие полей при этом может не осуществляться.

Подобие функциональное и кибернетическое — подобие, не требующее фиксации количественных соотношений между всеми сторонами происходящих явлений и ограничивающееся только наличием в двух явлениях качественно одинаковых функций и одинакового взаимодействия с окружающей средой.

Подобие экономическое — подобие математически представленных наиболее существенных связей интегрально описанного экономического процесса в большой экономической системе. На основе такого подобия строится экономическая макромодель.

Подобие электрическое — подобие электрических и магнитных полей и цепей у соответствующих элементов электрических систем.

Подобие эргатическое — подобие процессов, в протекании которых участвует человек и соответственно физические или математические модели, предусматривающие участие человека в их функционировании (по существу то же, что и имитационное моделирование).

Сигнал — часть информации, принятой системой и используемой в том или ином смысле моделью источника информации.

Система — совокупность элементов, связанных в единое целое, способная изменять свое состояние и обладающая свойствами, отличными от свойств элементов, образующих систему. Подсистема — часть системы, в том или ином смысле рассматриваемая как самостоятельная система, группа элементов, выделенных из системы, существующая с точки зрения изучаемых процессов.

Системность (эмерджентность) — наличие в системе таких свойств, которые не присущи ее отдельным составляющим (подсистемам, элементам).

Соотношение систем гомоморфное — наличие однозначного соответствия между параметрами систем и параметрами процессов с известными функциями перехода от характеристик одной системы к характеристикам другой.

Стенд испытательный — установка для исследования натурального оборудования в условиях, приближенных к работе, при частичном моделировании некоторых функциональных связей.

Структура — общий качественно определенный и относительно устойчивый порядок внутренних отношений между элементами системы, или подсистемами, образующими систему.

Тренажер — разновидность модели, специально приспособленной для тренировки (обучения) инженерно-технического персонала.

Эксперимент мысленный — неосуществленный или неосуществимый процесс, являющийся некоторой аналогией реальных фактов и выявляющий соотношения их взаимодействия между объектами изучения, но воспроизводимый мысленно без реального эксперимента.

Эксперимент производственный — эксперимент, проводимый во время производственного процесса на действующем предприятии, поставленный и обработанный так, чтобы отвечать условиям подобия и одновременно конкретным задачам материального производства.

Элемент — простейшая, не подлежащая дальнейшему анализу при данном подходе к рассматриваемой проблеме часть изучаемого объекта.

Явление — совокупность многообразных внешних подвижных свойств и отношений предмета-объекта; изучение этих свойств посредством эксперимента и аналитическое его описание позволяют обнаружить его сущность. Явление состоит из процессов — закономерного последовательного изменения свойств объекта.

Явленный подобие — такое протекание всех или наиболее существенных при исследовании процессов в двух или нескольких явлениях, когда по величинам, характеризующим процесс (параметрам процесса, иначе называемым параметрами режима), можно судить о параметрах процесса любого другого подобного явления. Количественно подобие характеризуется тем, что в любой момент времени и в любой точке пространства у подобных явлений сходственные величины изменяются одинаково, различаясь только значениями. Отношение между ними дает некоторое определенное число, называемое масштабом.

Явления, подобные математически, — явления, имеющие различную физическую природу, но описанные буквенно одинаковыми (одинаково записанными) уравнениями, причем каждому параметру, входящему в уравнение, отвечает соответствующий параметр другого (подобного) явления, а каждой переменной величине — переменная величина в другом явлении. Это соответствие устанавливается между величинами, имеющими различную физическую природу.

Явления, подобные физически, — явления, полностью или в основном имеющие одинаковую физическую природу. По характеристикам одного из этих явлений можно получать все характеристики другого явления простым умножением на коэффициенты, постоянные для каждой пары подобных явлений (масштабы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Введение

- Энгельс Ф.* Диалектика природы. — М.: Госполитиздат, 1965, 358 с.
Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18.
Закономерности развития сложных систем/ Под ред. К. О. Кратца и
Э. Н. Елисеева. — Л.: Наука, 342 с.
Карцев В. П. Эксперимент и практика. — М.: Знание, 1974, 64 с.
Кирпичев М. В. Теория подобия. — Изд. АН СССР, 1953, 94 с.
Новик И. Б. О моделировании сложных систем. — М.: Мысль, 1965, 325 с.

Глава 1

- Алабузжев П. М.* Лекции по основам теории подобия и моделирования. — Новосибирск: НЭТИ, 1968, 35 с.
Веников В. А. Применение теории подобия и физического моделирования в электротехнике. — М.: ГЭИ, 1949, 196 с.
Веретенников Л. П., Потапкин А. И., Раимов М. М. Моделирование, вычислительная техника и переходные процессы в судовых электроэнергетических системах. — Л.: Судостроение, 1964, 382 с.
Клайн Д. С. Подобие и приближенные методы. — М.: Мир, 1968, 302 с.

Глава 2

- Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем. — М.: Наука, 1968, 356 с.
Веников В. А. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1976, 479 с.
Гухман А. А. Введение в теорию подобия. — М.: Высшая школа, 1973, 296 с.
Кирпичев М. В., Конаков П. К. Математические основы теории подобия. — М.: ГЭИ, 1949.
Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. — М.: Наука, 1972, 440 с.

Глава 3

- Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.* Планирование промышленных экспериментов. — М.: Металлургия, 1978, 112 с.
Ильинский Н. Ф. Элементы теории эксперимента. — Тр.: МЭИ, 1980, 90 с.
Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. — М.: Наука, 1964, 183 с.
Разоренов Г. И. Выбор масштабов при моделировании. — М.: Советское радио, 1973, 160 с.

Глава 4

- Бусленко Н. П.* Моделирование производственных процессов. — М.: Наука, 1965, 380 с.
Налимов В. В. Теория эксперимента. — М.: Наука, 1971, 207 с.
Шаракианц А. С., Железнов И. Г. Испытания сложных систем. — М.: Высшая школа, 1974, 180 с.
Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. — М.: Мир, 1972, 380 с.

Глава 5

- Браун Э. Д.* Научные основы оценки трения и изнашивания фрикционных устройств на базе моделирования эксплуатационных условий. Автореферат дисс. на соискание ученой степени доктора технических наук. — М.: Институт машиноведения АН СССР, 1982, 37 с.
Варламов Р. Г. Использование общей методологии моделирования в теории радиоаппаратостроения. — В сб.: «Кибернетику — на службу коммунизму», т. 7, Энергия, 1973, с. 228—231.

Веников В. А., Иванов-Смоленский А. В. Физическое моделирование электрических систем. — М.: ГЭИ, 1956.

Кирпичев М. В., Михеев М. А. Моделирование тепловых устройств. — М.: Изд. АН СССР, 1936.

Мастаченко В. Н. Надежность моделирования строительных конструкций. — М.: Стройиздат, 1974, 84 с.

Математические методы моделирования в космических исследованиях/ Под ред. Ходарева Ю. Х. — М.: Наука, 1971, 254 с.

Миросецкий Н. Б. Моделирование процессов создания и выпуска новой продукции. — Новосибирск: Наука, 1976, 166 с.

Моделирование и испытания радиооборудования/ Бескит П. П., Виноградов Е. М., Винокуров В. И. и др. — Л.: Судостроение, 1981, 302 с.

Щелованов Л. Н. Моделирование элементов телевизионных систем. — М.: Радио и связь, 1981, 150 с.

Электродинамическое моделирование энергетических систем/ Под ред. Костенко М. П. — Л.: Изд. АН СССР, 1959.

Глава 6

Голушкин А. И., Зотов Ю. Н., Шикуню Ю. А. Оперативная обработка экспериментальной информации. — М.: Энергия, 1972.

ГОСТ 8.011—72. Показатели точности измерений и формы представлений результатов измерений.

Натурный эксперимент (информационное обеспечение экспериментальных исследований)/ Баклашов Н. И., Белюнов А. Н., Солодихин Г. М. и др. — М.: Радио и связь, 1982, 300 с.

Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974, 222 с.

Тьюки Д. В. Анализ результатов наблюдений (разведочный анализ). — М.: Мир, 1981, 693 с.

Глава 7

Баранов Г. Л., Жаркин В. Ф. Комплексное моделирование режимов электроэнергетических систем. — Киев: Наукова думка, 1979, 237 с.

Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1977, 239 с.

Веников В. А., Суханов О. А. Кибернетические модели электрических систем. — М.: Энергоиздат, 1982, 326 с.

Динамическое моделирование и испытания технических систем/ Кочубиевский И. Д., Стражмейстер В. А., Калиновская Л. В., Матвеев П. А. — М.: Энергия, 1978, 302 с.

Зигель А., Вольф Д. Модели группового поведения в системе человек-машина (с учетом психосоциальных и производственных факторов). — М.: Мир, 1973, 261 с.

Имитационная модель системы обработки данных в реальном масштабе времени/ Котюжанский Г. А., Мисевич Л. Б., Попова Л. И. и др. — М.: ИПУ, 1972, 137 с.

Копылов И. П., Мамедов Ф. А., Беспалов В. Я. Математическое моделирование асинхронных машин. — М.: Энергия, 1969, 97 с.

Пухов Г. Е., Кулик М. Н. Гибридное моделирование в энергетике. — Киев: Наукова думка, 1977, 148 с.

Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. — Киев: Наукова думка, 1980, 415 с.

Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. — Киев: Наукова думка, 1967, 567 с.

Сипайлов Г. А., Лоос А. В. Математическое моделирование электрических машин. — М.: Высшая школа, 1980, 175 с.

Трембач В. В. Физическое и математическое моделирование световых приборов. — М.: Энергия, 1977, 144 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельность 76

—, признак 77, 78

—, процессов 77

Адекватность, критерий согласия 109, 115

—, модели 141, 178

—, программы 372

—, уравнения регрессии 115, 141

Алгоритм 372

—, подобие 335, 419

Анализ дисперсионный 128

—, корреляционный 106, 309

—, размерностей 24, 41, 45, 418

—, регрессионный 106, 111

—, статистический, уравнения регрессии 141

Аналог интегральный 24, 32

—, способ определения 24, 32, 37

—, наглядный 185

—, природный 283

Аналогия 175, 425, 428

Аппроксимация, формула эмпирическая 118

Апробация модели 171

—, программы 372

Величина базисная 68, 86, 148

—, сходственная 14

—, физическая безразмерная, одноименная, однородная 43

Гипотеза мысленная 174, 185

—, об адекватности модели 109, 127, 141

—, об однородности дисперсий 140

Группа условно подобная 343

Группирование подобных объектов, критерий 343

Дисперсия неадекватности 167

—, однородность 140

Дополнительное положение подобия — см.

Положение подобия дополнительное

Допущение при построении модели 168

Единица физической величины основная, производная 42

—, система 42

—, относительная 68

Значимость статистическая, критерий 117, 127

Инвариант подобия 33

Индикатор подобия 33

Интервал доверительный 139

Информация 180, 428

—, обобщение 181

Квазианалог 325

Квазиподобие 17, 331

Кибернетика 5

Комплекс моделирующий 412

—, степенной параметров процесса 33

Контраст определяющий 138

Координата обобщенная 9

Коэффициент ассоциации 343

—, масштабный 11

—, корреляции при установлении подобия 341

—, регрессии 110, 113, 139

—, интервал доверительный 140

Критерий адекватности 109, 115

—, гомохронности 197

—, группирования подобных объектов 343

—, значимости статистический 117, 127

—, интегральный, подобия 347

—, квазиподобия 341

—, Коши 197

—, Нуссельта 198

—, Ньютона 197

—, Пекле 199

—, подобия 14, 22, 33, 429

—, вариации случайные 162, 306, 314, 322

—, гистограмма 322

—, зависимый 65

—, закон распределения 322

—, интегрального 345

—, информационного 352

—, независимый 65

—, определение анализом размерностей 24, 41

—, — на основе пи-теоремы 24, 41

—, — преобразованием уравнения 22, 28, 36

—, — системой относительных единиц 68

—, — определяющий 298

—, погрешности воспроизведения 305, 311, 322

—, преобразование тождественное 36

—, случайные вариации 162, 306, 314, 322

—, способы определения 36, 41, 68

—, формы записи 35, 37, 51

—, характер кривых распределения 322

—, эквивалентного 325

—, Прандтля 199

—, Рейнольдса 198

—, согласия 109, 115

—, Фруда 197

—, Фурье 199

—, Эйлера 198

—, эквивалентности модели 325

Макет 185, 428

Макетирование 185

Максимум правдоподобия, принцип 116

Масштаб 11, 185, 428

Масштабный коэффициент 11

Масштабы аналогового моделирования, выбор 366, 369

Матрица корреляционная, при установлении подобия 341

—, ортогональная 110

—, планирования эксперимента 128, 135

—, —, дробного факторного 136

—, —, ортогональности 128, 134

—, —, полного факторного 135

—, —, ротатбельности 128, 135

—, попарного подобия 343

—, размерностей 45

Метод анализа размерностей 24, 41, 45, 418

—, группирования как форма подобия 341

—, моделирования — см. Моделирование

—, подобия — см. Подобие

Многочлен аппроксимирующий 119

Множество нечеткое, размытое 337

Моделирование 5, 8, 168, 180, 297, 429

—, аналоговое 191, 355, 369, 429

—, вероятностный подход 324

—, гибридное 192, 374

—, гнессологическая рсль 180, 420, 427

—, динамическое 390, 420

—, знаковое 186

—, интегральное 196

—, информационное 352

—, квазианалоговое 325

—, кибернетическое 192, 352, 385, 420

—, классификация 182

—, математическое 187, 191, 371, 419, 425, 429

—, материальное 180, 184

—, мысленное 180, 184, 420

—, наглядное 185

—, натурное 188, 429

—, неполное 184

—, обобщенное 196

—, погрешности 149, 299, 305, 309, 322, 429

—, полное 184, 305

—, приближенное 149, 184, 309

- , применение — см. Приложения теории подобия и моделирования
- , развитие 416
- , символическое 186
- , сопоставление результатов на различных моделях 324
- , структурное 188, 191, 355, 366
- , физическое 149, 190, 390, 429
- , функциональное 192
- , цифровое 192
- , эквивалентное 196
- , электродинамическое 390
- Модель 10, 175, 428
- , адекватность 141, 178
- , аналоговая 191, 355, 363, 365, 369, 419, 428
- , выбор масштабов 366
- , устойчивость 317
- , взаимодействие различных видов 170
- , геометрическая 428
- , гибридная 192, 374
- , динамическая 390, 420, 428
- , знаковая 186
- , кибернетическая 192, 385
- , классификация 182
- , конформная 226
- , логическая 428
- , макет 185, 428
- , математическая 21, 127, 170, 187, 191, 425, 428
- , мысленная 420, 428
- , наглядная 185
- , натурная 188, 284
- , неполная 428
- , описательная 170
- , погрешности 299, 305, 309
- , полная 428
- , последовательность построения 354, 391
- , построение 168, 172, 300, 354
- , приближенная 429
- , приложения — см. Приложения теории подобия и моделирования
- , природная 190
- , прямой аналогии 355
- , сеточная 223
- , символическая 186
- , статическая 429
- , структурная 188, 191, 355, 366, 419, 429
- , тождественность оригиналу 299, 308, 316
- , точность 301, 316
- , условия подобия 25—27, 40, 71, 300
- , — построения 300
- , — существования 10, 26, 71, 300
- , физическая 190, 390, 429
- , функциональная 192
- , цифровая 192, 373
- , электродинамическая 390
- , эргатическая 374

- Направление поиска при планировании экспериментов 131
- Независимость параметров, признак 43
- Неопределенность статистическая 123
- Неточность описания процесса, явления 15, 45, 168
- Обобщение информации 181
- результатов расчетов 18
- производственного опыта 190
- экспериментальных данных 18, 36, 88, 117, 125, 145, 253
- Обработка критериальная экспериментальных данных 19, 36, 88, 118, 125, 145, 253
- Однородность дисперсии 140
- Описание математическое 170
- , рациональная полнота 173, 302
- Оригинал 8, 429
- Ортогональность матрицы планирования экспериментов 110, 128, 134
- Отклик 105
- , поверхность 111
- Отклонение абсолютное 120

- Ошибка среднеквадратическая 120
- Параметр зависимый 43
- независимый 43
- оптимизации при планировании эксперимента, выбор 131
- , признак независимости размерности 43, 47
- , пропорциональность 14
- , процесса 9
- с зависимой размерностью 43
- с независимой размерностью 43
- , системы 9
- , сходственный 17
- Переменная текущая 9
- План эксперимента 104, 108
- , линейный 135
- , неполный 106
- , ортогональный 109
- , полный 106
- , факторный неполный, полный 105
- Планирование эксперимента 105, 421
- , критериальное 125, 144
- , матрица 128, 135
- , оптимальное 138
- Поверхность отклика 141
- Повторяемость результатов моделирования 322
- Погрешность измерений 312
- моделирования 299, 429
- , критерия подобия 305, 309, 311, 322
- , обработки результата 120
- , опыта 123
- , полная 313
- , систематическая 312
- , случайная 312
- Подобие 14
- , абсолютное 14
- , алгоритмов 335
- , аналоговое 417
- , аффинное 12, 94
- , вероятностное 27, 95
- , геометрическое 11
- , гносеологическая роль 179
- , группы условно подобные 341
- , динамические 429,
- , дополнительные положения 26, 81, 84, 93, 95, 301
- , имитационное 429
- , инвариант 33
- , индикатор 33
- , интегральное 17, 344
- , информационное 335, 352
- , кибернетическое 17, 352, 430
- , классификация 182
- , коэффициент 12
- , критерий — см. Критерий подобия
- , математическое 16, 371
- , материальное 430
- , механическое 430
- , мысленное 417
- , нелинейное 84, 91, 301
- , неполное 16, 184, 430
- , особые виды 17, 331, 335, 337, 341, 344, 352
- , полное 15, 184, 430
- , положения дополнительные 26, 81, 84, 93, 95, 301
- , парное, матрица 343
- , практическое 15
- , приближенное 16, 184, 430
- , приложения — см. Приложения теории подобия и моделирования
- , процессов 13
- , размытое 337
- , систем анизотропных 27, 93
- , вероятностных 27, 95
- , геометрически не подобных 27, 93
- , детерминированно определенных 27
- , изотропных 27
- , линейных 27, 272
- , нелинейных 27, 84, 91

- неоднородных 27, 93
- однородных 27
- сложных 27, 81
- статистически определенных 27, 95
- , теоремы 25—27, 40, 71, 300
- , теория 17, 174, 421, 430
- , условия 25—27, 40, 71, 300
- условное 341, 419
- физическое 13, 16
- функциональное 17, 430
- эквивалентное 17, 331, 335, 419
- экономическое 430
- электрическое 430
- электродинамическое 16, 101
- явлений 431
- Подсистема 8, 168
- Поиск, направление при планировании эксперимента 131
- Положение подобия дополнительное 26, 418
- — — второе 27, 84, 301
- — — первое 27, 81
- — — пятое 27, 95
- — — третье 27, 93
- — — четвертое 27, 93
- Построение модели 168, 172, 300, 354, 391
- Правдоподобие внешнее, внутреннее 172
- , принцип максимума 116
- Правило интегральных аналогов 24, 36
- преобразования критериев подобия 36
- трех сигма 313
- Преобразование аффинное 13, 94
- геометрически подобное 92
- изотропирующее 328
- конформное 334
- нелинейное подобное 91
- уравнений методами теории подобия 22, 28, 35, 74, 327, 335
- Признак автономности 77
- независимости параметров, размерностей 43, 47
- Приложения теории подобия и моделирования
- , автоматическое регулирование 272
- , антенна 267
- , аппарат электромагнитный 232
- , аппаратура радиоэлектронная 270
- , асинхронный двигатель 403
- , атмосферный процесс 283
- , биологическая система 293
- , газ ионизированный в электрическом поле 247, 252
- , географические задачи 279
- , география экономическая 281
- , геологический процесс 283
- , гидромеханический процесс 198
- , задачи исследования и обучения 179
- , заземлитель 242
- , излучение энергии 260
- , импульс электромагнитный 156, 158
- , ионизирующее излучение 247
- , кабель, тепловой процесс 203
- , котел 396
- , ЛЭП, корона 252, 362
- , механический процесс в опорах 201
- , передача энергии 168
- , тепловой процесс в проводах 203
- , экономический интервал мощности 288
- , физическая модель 405, 428
- , магнит переменного тока 231
- , постоянный 230, 233
- , материал немагнитный 235
- , с потерями 267
- , механический процесс 38, 39, 57, 77, 88, 92, 197, 201
- , нагрев 199, 203, 205, 243
- , напряжения механические 92, 201
- , немагнитный материал 235
- , обобщение данных 18, 181, 252
- , оптическое устройство 260
- , парогенератор 396
- , полупроводниковый элемент 246, 250, 255
- , провод из немагнитного материала 235
- , радиоизлучение 264, 268
- , радиотехническая система 267
- , радиоэлектронная аппаратура, энергетические процессы 270
- , распределение температуры 199, 203, 205, 243
- , распространение радиоволн 268
- , регулятор возбуждения 400
- , скорости турбины 395
- , САУ 272
- , светотехническое устройство 260
- , система автоматического регулирования 272
- , система электрическая, электроэнергетическая — см. Электрическая система
- , термистор 259
- , термоэлектронная эмиссия 246
- , тепловой процесс 199, 203, 205, 243
- , токопровод 101, 235, 238
- , трансформатор 219, 428
- , измерительный 400
- , трение 205
- , устройство автоматического регулирования 272
- , — радиоаппаратное 270
- , — оптическое 260
- , — светотехническое 260
- , — электромагнитное 232
- , циркуляция земной атмосферы 283
- , экономика 58, 188, 287
- , экономический интервал мощности 58, 288
- , электрическая машина 101, 209, 397, 428
- , —, квазистационарные поля 222
- , —, коллекторная 210
- , —, модель конформная 226
- , —, повышенной частоты 217
- , —, сеточная 223
- , —, физическая 398
- , —, нелинейность, учет 222
- , —, синхронная 210, 218, 399
- , —, тепловые процессы 205
- , —, электромагнитные поля 101, 221
- , электрическая система, моделирование кибернетическое 385
- , —, математическое 390
- , —, цифровое 376
- , —, физическое 390
- , —, моделирующий комплекс 472
- , —, модель прямой аналогии 356
- , —, расчетная переменного и постоянного тока 356
- , —, статическая 429
- , —, физическая 390
- , —, электродинамическая 101, 390
- , —, нагрузка 402
- , —, переходный процесс 361, 377
- , —, подобие математическое 371
- , —, устойчивость 152, 160, 367
- , электрическая цепь магнитосвязанная с неподвижными контурами 40, 83
- , — с подвижными контурами 88, 90, 211
- , — неразветвленная 23, 29, 39, 56, 71, 76, 78, 156
- , — разветвленная 84, 228
- , — с распределенными параметрами 39, 65, 240
- , — с сосредоточенными параметрами 23, 29, 40, 56, 71, 76, 78, 83, 84, 88, 90, 156, 228
- , электромагнит 231
- , электромагнитная цепь неразветвленная 86
- , — разветвленная 228
- , электромагнитный аппарат 232
- , электромагнитный импульс 156, 158
- , электромагнитное поле в анизотропной среде 98

- , — в движущейся среде 101, 221
- , — в изотропной среде 96
- , — в ионизированном газе 247, 252
- , — в неоднородной среде 98
- , — в однородной среде 96
- , электронная аппаратура, энергетические процессы 270
- , электроэнергетическая система — см. Электрическая система
- , эмиссия термоэлектронная 247
- , энергетические процессы в радиоэлектронной аппаратуре 270
- Принцип максимума правдоподобия 116
- , экстраполяция 279
- Проецирование объемное 185
- , цветное 186
- Проекция стереографическая 334
- Пространство факторное 13, 45
- , критерияльное 146
- Процесс автоматический 77
- , параметр 9

Размерность 42

- , анализ при определении критериев подобия 44, 418
- , матрица 45
- , формула 42
- Рандомизация эксперимента 128, 421
- Регрессия, коэффициенты 110
- , уравнение 109, 119
- , критерияльное 122
- , расчет коэффициентов 113, 120, 139
- , статистический анализ 127, 139, 141
- Режим переходный, установившийся 9
- Реплика дробная 130, 137
- , разрешающая способность 137, 142
- Ротатабельность матрицы планирования эксперимента 128, 135

Симплекс 43

Система 8, 168, 430

- единиц 42
- линейная 9
- моделей 170
- нелинейная 9
- сложная 9
- , параметр 9
- простая 9
- Системность 430
- Согласия критерий 109, 115
- Соотношение генерирующее при планировании эксперимента 137
- пропорциональности 31
- Способность разрешающая дробных реплика 137
- планов экспериментов 142
- Стенд испытательный 426, 430
- Степень свободы 124, 130
- Стол расчетный переменного и постоянного тока 356, 420
- Структура 430
- Схема замещения 9, 187

Теорема подобия Букингема 26, 418

- , — вторая 26, 40, 418
- , — Ньютона 25, 417
- , — Ньютона-Бертрана 25
- , — Кирпичева-Гухмана 26, 418
- , — первая 25, 27, 417
- , — пн-теорема 26, 40, 418
- , — третья 26, 71, 300, 418
- , — Федермана 26, 418
- , — Эренфест-Афанасьевой 26, 418
- Теория моделирования 174, 421
- подобия 17, 174, 421, 430
- эксперимента 19, 125, 421
- Тренажер 386, 426, 431
- Тождество модели и оригинала 299, 308, 316
- Точки сходственные 14, 33
- Точность вычислений 171, 302

- измерений 123, 171
- исследований 297
- модели 299, 301
- моделирования 301, 306
- подобия 306

Уравнение дифференциальное 20, 74, 182

- , — рациональная точность 304
- , критерияльное 36, 55, 64, 118
- , преобразование методами теории подобия 22, 28, 35, 74, 327, 335
- , регрессии (регрессионное) 119, 120, 127, 139, 141
- , — критерияльное 122
- , —, расчет коэффициентов 120
- , — физическое неполное, полное 41
- Уровень допущений при построении модели 170
- фактора, варьирование 105, 133
- , — кодирование 133
- Условия граничные 21, 72, 428
- красивые 21, 72
- начальные 72
- однозначности 21, 72, 300
- подобия необходимые 25, 27, 40
- , — необходимые и достаточные 26, 71, 300
- Установка модельная 354

Фактор 104, 108

- , — выбор при планировании эксперимента 132
- , — кодирование при планировании эксперимента 133
- , — незначимый (несущественный) 45, 132
- , — неуправляемый 105
- , — случайный 109
- , — отсеивание 132
- , — управляемый 105, 108
- , — уровень 105, 132
- Формула размерности 42
- эмпирическая 118
- Функционал 345
- Функция принадлежности 339
- целевая (цели) 108

Характеристика нелинейная 84

- , — относительная 84, 301

Эквивалент энергетический процессов различной природы 282

Эквивалентность модели 299, 308, 325

Эксперимент 104, 175

- , — активный 108, 175
- , — интерполяционный 108
- , — матрица планирования 128
- , — многофакторный 105, 421
- , — мысленный 175, 431
- , — обобщение результатов 5, 190
- , — однофакторный 104
- , — оптимизационный 108
- , — пассивный 108, 175
- , — погрешность 123
- , — планирование 105, 131
- , — производственный 189, 431
- , — рандомизация 128, 421
- , — теория, развитие 416, 421
- , — управление оптимальное 128
- , — факторный 104
- , — дробный 136
- , — полный 107, 137
- , —, — матрица планирования 135
- , —, — свойства 134
- , — физический 177
- , — центральный композиционный 108
- , — экстремальный 105, 126, 421
- Экстраполяция, принцип 279
- Элемент системы 8, 168, 431
- Эмерджентность 430

Явление 9, 168, 431

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	3
Введение	5
Глава 1. Теоремы теории подобия и их применение при установлении условий подобия	8
§ 1.1. Основные понятия теории подобия и моделирования	8
§ 1.2. Основные положения и задачи теории подобия как основы научно-технического эксперимента	18
§ 1.3. Применение первой теоремы подобия при определении критериев подобия	27
§ 1.4. Применение второй теоремы подобия при определении критериев подобия	40
§ 1.5. Обоснование методики определения критериев подобия на основе анализа размерностей параметров	59
§ 1.6. Определение критериев подобия применением систем относительных единиц*	68
§ 1.7. Третья теорема подобия и ее применение при установлении условий подобия	71
Глава 2. Дополнительные положения о подоби и их применение при установлении условий подобия	81
§ 2.1. Первое дополнительное положение	81
§ 2.2. Второе дополнительное положение	84
§ 2.3. Третье, четвертое и пятое дополнительные положения	93
§ 2.4. Определение условий подобия электромагнитных полей в однородной и изотропной, неоднородных и анизотропных средах	96
Глава 3. Постановка эксперимента и обработка его результатов	104
§ 3.1. Основные понятия и определения	104
§ 3.2. Регрессионный анализ как математическая основа постановки и обработки эксперимента	111
§ 3.3. Простейшая обработка результатов эксперимента	117
§ 3.4. Практический подход к планированию эксперимента	125
§ 3.5. Полный и дробный факторные эксперименты	131
§ 3.6. Критериальное планирование и обработка экспериментов	144
Глава 4. Постановка модельных исследований в задачах научно-технического эксперимента	168
§ 4.1. Построение и взаимодействие моделей	168
§ 4.2. Теория и эксперимент в познании	174
§ 4.3. Подобие и моделирование в научно-технических исследованиях	178
§ 4.4. Классификация видов подобия и моделирования	182
Глава 5. Подобие и моделирование физических явлений в электротехническом оборудовании, сооружениях и системах	197
§ 5.1. Подобие и моделирование механических и тепловых процессов в конструкциях электротехнического оборудования и сооружений	197
§ 5.2. Подобие и моделирование процессов в электрических машинах	209
§ 5.3. Подобие и моделирование процессов в электромагнитных устройствах, проводах и шинах	228
§ 5.4. Подобие и моделирование электронно-ионных процессов и процессов в полупроводниковых устройствах	246

§ 5.5. Подобие и моделирование процессов излучения энергии . . .	260
§ 5.6. Подобие и моделирование динамических характеристик устройств автоматического регулирования	272
§ 5.7. Подобие и моделирование процессов, смежных с энергетическими	279
Глава 6. Достоверность моделирования	297
§ 6.1. Условия получения подобия моделей	297
§ 6.2. Точность воспроизведения критериев подобия	305
§ 6.3. Погрешности воспроизведения отдельных параметров, входящих в критерии подобия	311
§ 6.4. Квазианалоговые модели*	325
§ 6.5. Применение подобия и моделирования в некоторых особых случаях	331
Глава 7. Моделирующие установки	354
§ 7.1. Применение моделей, стендов и тренажеров	354
§ 7.2. Аналоговые модели	355
§ 7.3. Математическое подобие и моделирование в электроэнергетических задачах	371
§ 7.4. Цифровое кибернетическое моделирование сложных электрических систем	376
§ 7.5. Тренажеры	386
§ 7.6. Физические (электродинамические) модели электроэнергетических систем.	390
§ 7.7. Физические модели нагрузок электрических систем	402
§ 7.8. Физические модели линий передач переменного тока . . .	405
§ 7.9. Моделирующие комплексы	412
Приложение 1. Развитие методов моделирования и теории эксперимента	416
Приложение 2. Основная терминология, применяемая при изложении вопросов подобия и моделирования	428
Список литературы	432
Предметный указатель	434

Валентин Андреевич Веников
Георгий Валентинович Веников

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЯ (ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К ЗАДАЧАМ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ)

Заведующая редакцией Н. И. Хрусталева. Редактор С. М. Оводова.
Художник А. А. Акимов. Художественный редактор В. И. Мешалкин.
Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор В. В. Кожуткина

ИБ № 4337

Изд. № СТД-410 Сдано в набор 22.06.83. Подп. в печать 19.01.84. Т-03246
Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 27,5
усл. печ. л. Усл. кр.-отг. 28. Уч.-изд. л. 31,30. Тираж 6000 экз. Зак. № 1677 Цена 1 р. 50 к.
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46