Л. А. Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электромагнитное поле

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего
и среднего
специального
образования СССР
в качестве учебника для студентов
электротехнических, энергетических
и приборостроительных специальностей
вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1986

ББК 31.21
Б53
УДК 621.3.01

Рецензент — кафедра «Теоретические основы электротехники» Северо-Западного заочного политехнического института

Бессонов Л. А.

Б53 Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. — 8-е изд., перераб. и доп. — М:. Высш. шк., 1986. — 263 с.: ил.

В книге рассмотрены вопросы теории электромагнитного поля, предусмотренные программой курса ТОЭ. Все главы 8-го издания (7-е издание вышло в 1978 г.) переработаны и дополнены; включен новый материал: поле двойного заряженного слоя, расчет полей с электретами, поле двойного токового слоя, определение силы воздействия на диэлектрические и проводящие тела, переходные процессы, устранение отражений, теорема взаимности и др.

Б $\frac{2302010000-504}{001(01)-86}$ КБ—18—14—86

ББК 31.21
6П2.1

Часть III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник по теоретическим основам электротехники выходит в свет в двух книгах. В первой книге рассмотрены вопросы теории линейных и нелинейных электрических цепей (т. е. I и II части курса ТОЭ), во второй — вопросы теории электромагнитного поля (III часть курса ТОЭ).

Основной материал, обязательный для изучения студентами всех специальностей, в книге набран корпусом, а материал, в неодинаковой степени обязательный для студентов различных специальностей,— петитом. Какую часть набранного петитом материала следует изучить студенту, должна указать кафедра ТОЭ соответствующего вуза. По сравнению с предыдущим изданием книга подверглась переработке.

Рассмотрены следующие новые вопросы, отсутствовавшие в предыдущем издании: поле двойного заряженного слоя, определение силы воздействия неравномерного электрического поля на диэлектрические и проводящие тела, помещенные в это поле, свойства электретов и создаваемые ими поля, дуальные модели, построение эквипотенциалей магнитного поля путем использования принципа наложения, магнитное поле двойного токового слоя, переходный процесс при проникновении электромагнитного поля в однородное проводящее полупространство, теорема взаимности для электрических излучателей, устранение отражения электромагнитных волн. Написана новая глава — сверхпроводящие тела в электромагнитных полях. Полностью переработаны вопросы и задачи для самопроверки по всем главам III части курса и Приложение об истории развития электротехники и становления курса ТОЭ. Последнее охватывает теорию цепей и теорию электромагнитного поля. Часть справочного материала (таблицы функций e^x, e^{-x}, $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$) помещена в первой книге. Остальной справочный материал (таблицы функций Бесселя комплексного аргумента, свойства проводниковых и диэлектрических материалов) помещен во второй книге.

При подготовке второго тома к переизданию были учтены пожелания, высказанные товарищами по кафедре ТОЭ МИРЭА д-р техн. наук, проф. М. Е. Заруди, канд. техн. наук, доц. И. Г. Демидовой. Канд. техн. наук, доц. В. И. Цыганов оказал помощь при чтении корректур.

Пожелания и замечания по книге просим направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Под *электромагнитным полем* понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обусловливающих друг друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи положено в основу определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле — напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$.

Значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ как взаимно связанных характеристик единого электромагнитного поля зависят от условий наблюдения этого поля. Они оказываются различными в неподвижной и в подвижной системах координат.

Электромагнитное поле может самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн в вакууме. Это свидетельствует о том, что поле, являясь формой материи, может существовать при отсутствии другой формы материи — вещества. Наряду с этим электромагнитное поле обладает такими характеристиками, которые присущи веществу, а именно: энергией, массой и количеством движения.

Масса электромагнитного поля в единице объема определяется как частное от деления энергии поля в единице объема на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме, равной скорости света. Количество движения электромагнитного поля, отнесенное к единице объема, равно произведению массы поля в единице объема на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

При распространении электромагнитного поля одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит движение массы поля и количества движения.

Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ. Даже при максимально достижимых в настоящее время значениях напряженностей электрического и магнитного полей масса поля в единице объема оказывается равной 10^{-17} — 10^{-12} кг/м^3. Тем не менее наличие массы поля имеет принципиальное значение, поскольку в этом отражена известная инерционность процессов в электромагнитном поле. В одних случаях электромагнитное поле распределено в пространстве непрерывно, в других обнаруживает дискретную структуру, проявляющуюся в виде квантов излученного поля. Электромагнитное поле может превращаться в вещество, а вещество в поле. Так электрон и позитрон превращаются в два кванта электромагнитного излучения, а при исчезновении фотона возникает пара электрон и позитрон. Превращение поля в вещество, а вещества в поле соответствует превращению одного вида материи в другой. Пространство и время являются формами существования электромагнитного поля.

Изучение теории электромагнитного поля расширяет общеобразовательную подготовку и способствует формированию у студентов материалистического мировоззрения.

Теория электромагнитного поля является той основой, которая позволяет понять принципы работы различных электромагнитных и электрических устройств и спроектировать и рассчитать их на заданные условия работы. К числу таких устройств, широко распространенных на практике, могут быть отнесены электромагнитные элементы автоматики, электрические машины, магнитные и электрические элементы вычислительной техники, электронные, радиотехнические, криогенные, сверхпроводящие, голографические и другие устройства.

При рассмотрении теории поля будем пользоваться индуктивным методом, т. е. переходить от частного (от менее совершенной структуры) к общему (к более совершенной структуре). В соответствии с этим сначала рассмотрим поля, неизменные во времени, когда электрическое и магнитное поля можно рассматривать раздельно. Изложение начнем с электростатического поля.

Глава девятнадцатая

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 19.1. Определение электростатического поля. *Электростатическое поле* — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Из курса физики известно, что любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.

Элементарные заряды (заряды электрона и протона) характеризуются связью с собственным и взаимодействием с внешними электрическими полями. В любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности, в пространстве всегда имеется неодинаковость расположения элементарных зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля осредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, т. е. рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь одну электрическую компоненту электромагнитного поля.

Под *зарядом* (зарядом тела) понимают скалярную величину, равную алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в этом теле.

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной средах, т. е. в таких, электрические свойства которых одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае сделаны соответствующие оговорки.

Электростатическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

§ 19.2. Закон Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой $\vec{F}$, прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 19.1). Заряды, имеющие одинаковые знаки, стремятся оттолкнуться друг от друга, а заряды противоположных знаков стремятся сблизиться:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \qquad (19.1)$$

где $\vec{R}_0$ — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (см. рис. 19.1)*.

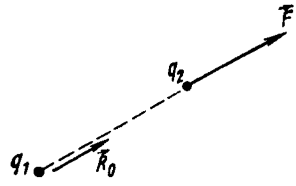


Рис. 19.1

При использовании СИ и кратных долей единиц этой системы расстояние R измеряют в метрах (м), заряды — в кулонах (Кл), электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ — в фарадах на метр (Ф/м); тогда силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: *линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами*.

§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля. Любое поле характеризуется некоторыми основными величинами. Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке и величиной и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменения $\vec{E}$ или φ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (19.1a)$$

Таким образом, $\vec{E}$—это *силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не исказил поля, существовавшего до внесения этого заряда*. Отсюда следует, что сила $\vec{f}$, действующая на конечной величины точечный заряд q, внесенный в поле, будет равна $\vec{f} = q\vec{E}$, а *напряженность численно равна силе, действующей на заряд, по величине равный единице*.

* Стрелка над буквой означает вектор в пространстве.

Если поле создается несколькими зарядами (q_1, q_2, q_3,...), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$, т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда, и о связанных с работой понятиях потенциала и разности потенциалов.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q. На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки *1* переместился в точку *2* по пути *132* (рис. 19.2). Так как направление силы $q\vec{E}$, воздействующей на заряд в каждой точке пути, может не совпадать с элементом пути $\vec{dl}$, то работа на перемещение заряда на пути $\vec{dl}$ определится скалярным произведением силы на элемент пути $q\vec{E}\,\vec{dl}$. Работа, затраченная на перенос заряда из точки *1* в точку *2* по пути *132*, определится как сумма элементарных работ $q\vec{E}\,\vec{dl}$. Эту сумму можно записать в виде линейного интеграла $q\int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl}$.

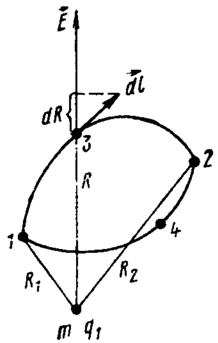


Рис. 19.2

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). *Под разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки *1* в конечную точку *2*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl}. \qquad (19.2)$$

Формула (19.2) позволяет определить разность потенциалов точек *1* и *2* как линейный интеграл от напряженности поля.

Если бы потенциал конечной точки пути *2* был равен нулю, то потенциал точки *1* определился бы так (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl},$$

т.е. *потенциал произвольной точки поля 1 можно определить как работу, совершаемую силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.*

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются единственным образом.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при пе-переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность: $\varphi_1 = \int_1^\infty \vec{E}\,d\vec{l}$.

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако это не имеет существенного значения, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

При составлении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой определяют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На величине производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное. Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке m рис. 19.2 находится положительный точечный заряд q_1, создающий поле, а из точки *1* в точку *2* через промежуточную точку *3* перемещается единичный положительный заряд $q = 1$.

Обозначим: R_1— расстояние от точки m до исходной точки *1*; R_2— расстояние от точки m до конечной точки *2*; R — расстояние от точки m до произвольной токи *3* на пути *132*. Направление напряженности поля $\vec{E}$ и направление элемента пути $d\vec{l}$ в промежуточной точке *3* показано на рис. 19.2. Скалярное произведение $\vec{E}\,d\vec{l} = EdR$, где dR — проекция элемента пути $d\vec{l}$ на направление радиуса, соединяющего точку m с точкой *3*.

В соответствии с определением напряженность поля $\vec{E} = \vec{F}/q$. По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда

$$E = q_1/(4\pi\varepsilon_0 R^2).$$

Подставив в формулу (19.2) вместо $\vec{E}d\vec{l}$ значение $q_1/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 EdR = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (19.2\text{a})$$

Таким образом, *разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из исходной точки в конечную*. Другими словами, если перемещение из точки *1* в точку *2* будет происходить по какому-то другому пути, например по пути *142*, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при перемещении из точки *1* в точку *2* по пути *132*.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то этот вывод справедлив для поля, созданного каждым из точечных зарядов в отдельности. А так как для электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике справедлив принцип наложения, то вывод о независимости величины разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от пути, по которому происходило перемещение из точки *1* в точку *2*, справедлив и для электрического поля, созданного совокупностью точечных зарядов.

Если пройти по замкнутому пути *13241* (см. рис. 19.2), то исходная точка пути *1* и конечная точка пути *2* совпадут, и тогда левая и правая части формулы (19.2) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E} d\vec{l}\,. \tag{19.3}$$

(Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру).

Соотношение (19.3) свидетельствует о том, что в *электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю*.

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля.

Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а совершенную против сил поля — отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

Равенство (19.3) можно трактовать и так: циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические, но и все гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии. Электростатическое поле можно характеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой точке ее дает направление напряженности поля $\vec{E}$ в этой точке. Вдоль силовой линии передвигался бы весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться в поле и если бы он не обладал инерцией. Таким образом, силовые линии имеют начало (на положительно заряженном теле) и конец (на отрицательно заряженном теле). Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то силовые линии электрического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В электростатическом поле можно провести эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под *эквипотенциальной поверхностью* понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно рассечь электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют *эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалями). Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Точно так же и перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала.

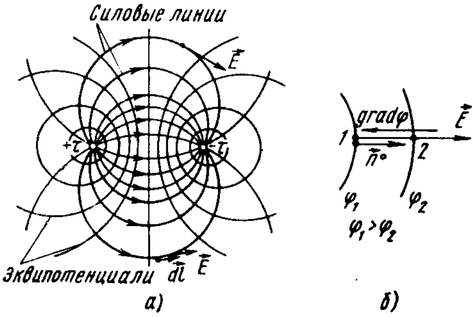


Рис. 19.3

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом. На рис. 19.3, *а* изображены два заряженных тела и проведено несколько силовых и эквипотенциальных линий.

В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя. Как уже говорилось, между напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и потенциалом φ существует связь интегрального вида (19.2). Кроме нее, между $\vec{E}$ и φ существует и связь дифференциального вида.

§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала. Электростатическое поле, как отмечалось ранее, является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов.

Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученная величина будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

В курсе математики пользуются понятием градиента скалярной функции. *Градиентом скалярной функции* называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания. В определении градиента существенны два положения: 1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальна; 2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает).

На рис. 19.3, *б* изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1, другая — φ_2. Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда, в соответствии с приведенным определением, градиент изобразим на рис. 19.3, *б* вектором, перпендикулярным эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Если через dn обозначить расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями, а через $\vec{dn}$ — вектор, совпадающий с направлением $\vec{E}$: $\overrightarrow{dn} = \vec{n}^\circ dn$ (здесь $\vec{n}^\circ$ — единичный вектор по направлению $d\vec{n}$), то на основании соотношения (19.2) можно записать выражение:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \approx \vec{E}\vec{dn} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — приращение потенциала при переходе от точки *1* к точке *2*.

Так как векторы $\vec{E}$ и $\overrightarrow{dn}$ совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E}\overrightarrow{dn}$ равно произведению модуля $\vec{E}$ на модуль $\vec{dn}$ ($\vec{E}\vec{dn} = Edn$).

Таким образом, $Edn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля $E = -d\varphi/dn$. Вектор напряженности поля $\vec{E} = E\vec{n}^\circ$. Следовательно,

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}^\circ. \tag{19.4}$$

Из определения градиента следует, что

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn}(-\vec{n}^\circ) = \frac{-d\varphi}{dn}(-\vec{n}^\circ). \tag{19.5}$$

Сопоставляя (19.4) и (19.5), замечаем, что

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{19.6}$$

Соотношение (19.6) можно истолковать следующим образом: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление $\vec{E}$ и направление grad φ противоположны (см. рис. 19.3, *б*).

Нормаль $\overrightarrow{dn}$ в общем случае может быть расположена так, что не совпадет с направлением какой-либо координатной оси, и потому градиент потенциала в общем случае можно представить в виде суммы трех проекций по координатным осям. Например, в декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad}\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad (19.7)$$

где $\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ — скорость изменения φ в направлении оси x; $d\varphi/dx$ — числовое значение (модуль) скорости (скорость — величина векторная); $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты соответственно по осям x, y, z декартовой системы.

Вектор напряженности $\vec{E}=\vec{i}\,E_x+\vec{j}\,E_y+\vec{k}\,E_z$. Таким образом,

$$\vec{i}E_x+\vec{j}E_y+\vec{k}E_z=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Два вектора равны только тогда, когда равны друг другу их соответствующие проекции. Следовательно,

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (19.8)$$

Соотношения (19.8) следует понимать так: проекция напряженности поля на ось x равна проекции скорости изменения потенциала вдоль оси x, взятой с обратным знаком, и т. д.

§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла). Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляют дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла).

Под *дифференциальным оператором Гамильтона* понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Он сочетает в себе векторные и дифференцирующие свойства и может быть применен к скалярным и векторным функциям. Ту функцию, действие над которой хотят произвести (дифференцирование ее по координатам, или «пространственное» дифференцирование), пишут справа от оператора набла.

Применением оператор ∇ к потенциалу φ. С этой целью запишем

$$\nabla\varphi=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Если сравнить последнее выражение с (19.7), то можно заметить, что правые части у них одинаковы. Следовательно, равны и левые: $\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi$, т. е. запись $\nabla\varphi$ эквивалентна записи $\operatorname{grad}\varphi$, а приписывание слева к какой-либо скалярной функции (в рассматриваемом случае к φ) оператора ∇ означает взятие градиента от этой скалярной функции.

§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (обозначения см. на рис. 19.4, *а*):

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{r}^{\circ}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}_0\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{z}^{\circ}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{19.9}$$

В сферической системе (обозначения см. на рис. 19.4, *б*):

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{R}^{\circ}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \vec{\theta}^{\circ}\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{\alpha}^{\circ}\frac{1}{R\sin\theta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}. \tag{19.10}$$

§ 19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность. Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$) есть некоторый элемент поверх-

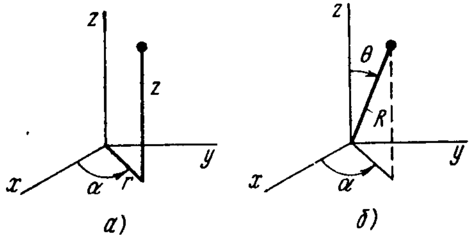


Рис. 19.4

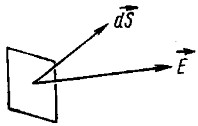


Рис. 19.5

ности, площадь которого с одной стороны численно равна dS. Выберем положительное направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Вектор $d\vec{S}$ в некотором масштабе на рис. 19.5 равен площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направлением нормали. Будем полагать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор $\vec{E}$ можно было считать одним и тем же во всех точках.

Если бы $\vec{E}$ было перпендикулярно $d\vec{S}$, то вектор $\vec{E}$ не пронизывал бы элемент поверхности, если $\vec{E}$ направлено по $d\vec{S}$, то через данный элемент поверхности будет проходить максимальный поток вектора $\vec{E}$. В общем случае поток вектора $\vec{E}$ через элемент поверхности определится скалярным произведением $\vec{E}d\vec{S}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E}d\vec{S}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока $\vec{E}d\vec{S}$ означает, что он направлен в сторону $d\vec{S}$, отрицательное его значение, что он направлен в обратную сторону.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, велика, то тогда нельзя считать, что во всех ее точках $\vec{E}$ одна и та же. В этом случае поверхность подразделяют на отдельные элементы малых размеров, и полный поток вектора через поверхность равняется алгебраической сумме потоков через все элементы поверхности. Сумму потоков можно записать в виде интеграла: $\int\limits_s \vec{E}\, d\vec{S}$.

Значок s под знаком интеграла означает, что суммирование производится по элементам поверхности.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, замкнутая, то на знаке интеграла ставят кружок: $\oint \vec{E} d\vec{S}$.

§ 19.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества. *Свободными* называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под *связанными* понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с данным веществом, неотделимы от него. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под *поляризацией* понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что отрицательные связанные заряды в теле переместятся в направлении более высокого потенциала, а положительные—в сторону более низкого потенциала. Заряды сместятся настолько, что силы воздействия электрического поля на связанные заряды уравновесятся внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды.

§ 19.11. Поляризованность. Произведение $q\vec{l}$ называют электрическим моментом двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся друг от друга на расстоянии l (диполя). Это векторная величина, направленная от заряда $-q$ к заряду $+q$ (рис. 19.6, *а*).

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой диполи. Под действием внешнего электрического поля диполи стремятся ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы электрический момент их был направлен параллельно вектору напряженности электрического поля. Практический интерес представляет электрический момент не одной молекулы, не одной пары зарядов, а суммы диполей, находящихся в единице объема вещества. Электрический момент суммы диполей, находящихся в объеме вещества V, отнесенный к объему V при стремлении V к нулю, называют *поляризованностью* (вектором поляризации) и обозначают P:

$$\vec{P} = \lim_{V \to 0} \frac{\Sigma q \vec{l}}{V}. \qquad (19.11)$$

Для большинства диэлектриков $\vec{P}$ пропорционально напряженности электрического поля $\vec{E}$. Коэффициент пропорциональности между ними $\varkappa = \varepsilon_0 \chi$ (χ — электрическая восприимчивость):

$$\vec{P} = \varkappa \vec{E}. \qquad (19.12)$$

Диэлектрики в зависимости от происходящих в них процессов при поляризации можно подразделить на две группы.

В первую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля электрически нейтральны, т. е. в них центры действия положительных и отрицательных зарядов совпадают. К числу таких диэлектриков относятся водород, азот, парафин и др.

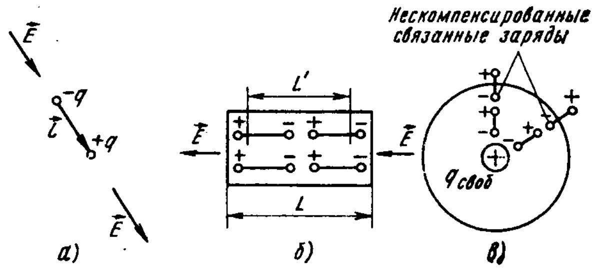


Рис. 19.6

Поляризация в диэлектриках первой группы заключается в том, что под действием внешнего электрического поля центр действия положительного заряда молекулы смещается по внешнему полю, а центр действия отрицательных зарядов (электронная орбита) — против поля. В результате молекула становится диполем.

Это смещение зарядов молекулы пропорционально величине напряженности внешнего поля. Смещению противодействуют внутримолекулярные силы.

Во вторую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля представляют собой диполи, т. е. центры действия положительных и отрицательных зарядов этих молекул при отсутствии внешнего электрического поля не совпадают (полярные молекулы). Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород.

Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются.

Поляризация в диэлектриках второй группы состоит в том, что полярные молекулы стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент был направлен по внешнему электрическому полю.

Поляризацию диэлектриков первой группы иллюстрирует рис. 19.7, *а* и *б*; второй группы — рис. 19.7, *в* и *г*. Рис. 19.7, *а* и *в* в соответствуют случаю, когда внешнее поле отсутствует; рис. 19.7, *б* и *г* — при наличии внешнего поля.

§ 19.12. Вектор электрической индукции $\vec{D}$. Кроме вектора $\vec{E}$ и $\vec{P}$ в электротехнических расчетах используют еще вектор электрической индукции, или вектор электрического смещения $\vec{D}$.

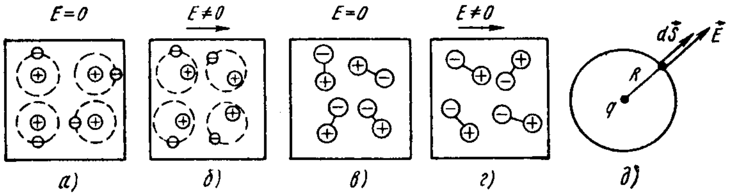


Рис. 19.7

Вектор $\vec{D}$ равен сумме двух векторов: вектора $\varepsilon_0\vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и поляризованности $\vec{P}$, характеризующей способность диэлектрика в рассматриваемой точке поля поляризоваться: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

Так как

$$\vec{P} = \varkappa\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}\frac{\varkappa}{\varepsilon_0}, \tag{19.13}$$

то

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}\left(1 + \frac{\varkappa}{\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_a\vec{E}, \tag{19.14}$$

где

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon_r; \quad \varepsilon_r = 1 + \chi. \tag{19.15}$$

Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r имеет нулевую размерность; она показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества (ε_a) больше, чем электрическая постоянная ε_0, характеризующая электрические свойства вакуума.

В системе СИ $[D] = [P] =$ Кл/м².

§ 19.13. Теорема Гаусса в интегральной форме. Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать тремя способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, окружающую некоторый объем, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}}. \tag{19.16}$$

Из формулы (19.16) следует, что вектор $\vec{D}$ является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях не зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ε_r).

2. Так как $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$, то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать и в такой форме:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{\Sigma q_{своб}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}, \qquad (19.17)$$

т. е. поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, разделенной на произведение $\varepsilon_0\varepsilon_r$.

Из формулы (19.17) следует, что вектор $\vec{E}$ представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора $\vec{D}$ при прочих равных условиях зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ε_r).

Поток вектора $\vec{D}$ определяется лишь суммой зарядов и не зависит от их расположения внутри замкнутой поверхности *.

3. Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность создается не только суммой свободных зарядов ($\Sigma q_{своб}$), но и суммой связанных зарядов ($\Sigma q_{связ}$), находящихся внутри поверхности.

Из курса физики известно, что поток вектора поляризации сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\Sigma q_{связ} = -\oint \vec{P}d\vec{S}.$$

Напомним вывод этой формулы. С этой целью покажем, что плотность поверхностных связанных зарядов на поверхности раздела поляризованного диэлектрика и вакуума равна модулю вектора поляризации.

На рис. 19.6, *б* показано расположение диполей в поляризованном диэлектрике длиной L, сечением S. На торцах диэлектрика образуются связанные заряды. Поверхностную плотность их обозначим через σ. На длине L' положительные и отрицательные заряды взаимно компенсируют друг друга. Поэтому поляризованный диэлектрик (см. рис. 19.6, *б*) можно рассматривать как диполь длиной L с сосредоточенными на концах зарядами σS.

Электрический момент всего диэлектрика длиной L равен σSL. Электрический момент единицы объема диэлектрика: $P = (\sigma SL)/V = (\sigma SL)/SL = \sigma$.

Таким образом, плотность связанных зарядов на торцах поляризованного диэлектрика равна модулю вектора $\vec{P}$ (вектор перпендикулярен торцам). На рис. 19.6, *в* изображен свободный положительный заряд, вызвавший поляризацию окружающего его диэлектрика.

---

* Теорема Гаусса [формула (19.16) или (19.17)] применима не только к электростатическому полю, но и к переменному электромагнитному полю при условии, что расстояние от заряда, создающего поле, до точки, в которой определяют напряженность, должно быть много меньше длины электромагнитной волны (подробнее см. § 26.6).

Распространил теорему Гаусса на переменное электромагнитное поле (постулировал возможность ее применения) Д. Максвелл. Поэтому теорему Гаусса в применении к переменному электромагнитному полю в литературе называют *постулатом Максвелла*.

Окружим заряд сферой и подсчитаем нескомпенсированные связанные заряды, попавшие внутрь сферы. Нескомпенсированными связанными зарядами оказываются заряды диполей, пересекаемых поверхностью S.

Так как поверхностная плотность их равна σ, то

$$\Sigma q_{\text{связ}} = -\oint \sigma dS = -\oint \vec{P} d\vec{S}.$$

Знак минус появился вследствие того, что знак нескомпенсированных связанных зарядов противоположен знаку свободного заряда (см. рис. 19.6, *в*).

Формулу (19.16) можно переписать следующим образом:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\, d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} + \oint \vec{P} d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}} - \oint \vec{P} d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}} + \Sigma q_{\text{связ}}$$

или

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\Sigma q_{\text{своб}} + \Sigma q_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}. \qquad (19.17\text{a})$$

Формулы (19.17) и (19.17а) отличаются своими правыми частями.

§ 19.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда. Теорему Гаусса в интегральной форме можно использовать для нахождения напряженности или электрического смещения в какой-либо точке поля, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, что все ее точки будут в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности.

Такой поверхностью является обычно сфера (если заряд точечный) или боковая поверхность цилиндра (если заряд линейный). При этом в силу симметричного расположения всех точек поверхности относительно заряда числовое значение напряженности поля в различных точках этой поверхности будет одинаковым.

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом в точке, удаленной на расстоянии R от заряда. С этой целью через заданную точку проведем сферическую поверхность радиусом R, полагая, что заряд находится в центре сферы, и применим к этой сфере теорему Гаусса (см. рис. 19.7, *д*).

Элемент поверхности сферы $d\vec{S}$ перпендикулярен поверхности сферы* и направлен в сторону внешней (по отношению к объему внутри поверхности) нормали.

В данном примере в каждой точке сферы $\vec{E}$ и $\overrightarrow{dS}$ совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. Если учесть, что число-

* Имеется в виду вектор, изображающий элемент поверхности сферы.

вое значение $\vec{E}$ во всех точках сферы одно и то же, то E можно вынести из-под интеграла:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint EdS\cos 0^\circ = E\oint dS = E4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии R от него,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R^2}. \tag{19.18}$$

В силу сферической симметрии напряженность поля имеет только одну R-ю составляющую в сферической системе координат. Значит,

$$E = E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}.$$

Отсюда

$$\varphi = -\int EdR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} + C. \tag{19.19}$$

Таким образом, потенциал в поле точечного заряда обратно пропорционален первой степени расстояния R от точечного заряда до точки, в которой определяется потенциал; C представляет собой постоянную интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал. Напомним, что аналогичные выражения для E и φ были получены в § 19.4 при использовании закона Кулона.

§ 19.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Теорема Гаусса в интегральной форме выражает связь между потоком вектора $\vec{D}$ через поверхность S, ограничивающую некоторый объем, и алгебраической суммой зарядов, находящихся внутри этого объема. С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме нельзя определить, как связан исток линий $\vec{D}$ в данной точке поля с плотностью свободных зарядов в той же точке поля. Ответ на этот вопрос дает дифференциальная форма теоремы Гаусса. Чтобы прийти к ней, разделим обе части уравнения (19.16) на одну и ту же скалярную величину — на объем V, находящийся внутри замкнутой поверхности S:

$$\oint \vec{D}d\vec{S}/V = \Sigma q_{своб}/V. \tag{а}$$

Выражение (а) остается справедливым для объема V любой величины. Устремим объем к нулю:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint \vec{D}d\vec{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\Sigma q_{своб}}{V}. \tag{б}$$

При стремлении объема к нулю $\oint \vec{D}\, d\vec{S}$ также стремится к нулю, но отношение двух бесконечно малых величин $\oint \vec{D}\, d\vec{S}$ и V есть величина конечная *. Предел отношения потока векторной величины сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V называют *дивергенцией вектора* $\vec{D}$ ($\operatorname{div} \vec{D}$). Часто вместо термина «дивергенция» употребляют термин «расхождение» или «исток» вектора $\vec{D}$.

В правой части выражения (*б*) находится объемная плотность свободного заряда, ее обозначают $\rho_{своб}$.

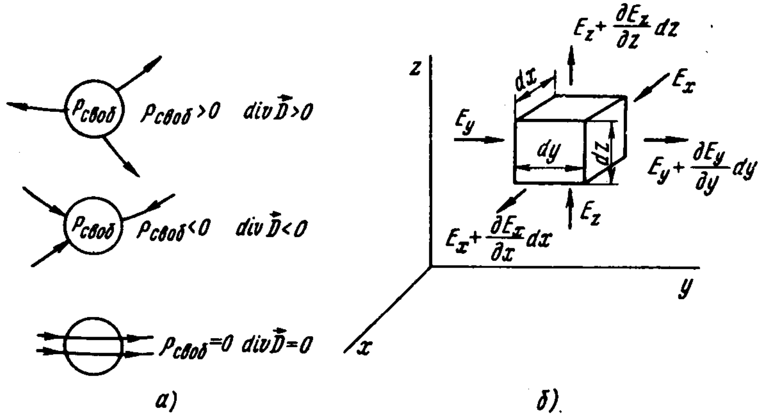


Рис. 19.8

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме записывают следующим образом (*первая* форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{своб}, \tag{19.20}$$

т. е. исток линий $\vec{D}$ в данной точке поля определяется величиной плотности свободных зарядов в этой точке. Если объемная плотность зарядов в данной точке положительна ($\rho_{своб} > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора $\vec{D}$ исходят (исток положителен, рис. 19.8, *а*). Если в данной точке поля $\rho_{своб} < 0$, то в бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора $\vec{D}$ входят. И, наконец, если в какой-либо точке поля $\rho_{своб} = 0$, то в данной точке поля нет ни истока, ни стока линий $\vec{D}$, т. е. в данной точке линии вектора $\vec{D}$ не начинаются и не заканчиваются.

---

* В ч. III учебника неоднократно использованы величины, которые определяются при стремлении рассматриваемого объема или площади к нулю.

Стремление к нулю не следует понимать дословно: речь идет о таком уменьшении линейных размеров объема или площади, при котором еще не сказывается дискретность материи.

Если среда однородна и изотропна, то ее $\varepsilon_a = \text{const}$. Вместо (19.20) запишем выражение: $\operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} = \rho_{своб}$.

Вынесем ε_a за знак дивергенции:

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{своб};$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{своб}/\varepsilon_a. \tag{19.21}$$

Формула (19.21) представляет собой *вторую* форму записи теоремы Гаусса. Она справедлива только для однородной и изотропной сред. Для неоднородной среды ε_a является функцией координат и потому она не может быть вынесена за знак дивергенции.

Уравнение (19.17а) в дифференциальной форме записывают так (*третья* форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\rho_{своб} + \rho_{связ})/\varepsilon_0. \tag{19.21а}$$

Следовательно, истоком вектора $\vec{E}$ в отличие от истока вектора $\vec{D}$ являются не только свободные, но и связанные заряды.

В различных системах координат $\operatorname{div} \vec{E}$ раскрывается по-своему.

§ 19.16. Вывод выражения для $\operatorname{div} \vec{E}$ в декартовой системе координат. Выделим в пространстве весьма малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz. Расположим ребра параллелепипеда параллельно осям декартовой системы (рис. 19.8, *б*). Для нахождения истока вектора $\vec{E}$ из данного объема составим разность потоков, выходящих из объема и входящих в него, и разделим разность потоков на величину объема параллелепипеда, равную $dxdydz$.

Левую грань площадью $dxdz$ пронизывает только одна составляющая вектора $\vec{E}$, т. е. составляющая $\vec{j}E_y$, остальные ($\vec{i}E_x$ и $\vec{k}E_z$) скользят по грани. Поток вектора $\vec{E}$, входящий в эту грань, равен $E_y dxdz$.

Так как $\vec{E}$ есть функция координат, то и ее составляющие также являются функциями координат. Правая грань площадью $dxdz$ отстоит от левой грани на расстоянии dy. Проекция вектора $\vec{E}$ на ось y для нее равна $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$, где $\partial E_y/\partial y$ — скорость изменения E_y в направлении оси y; $\frac{\partial E_y}{\partial y} dy$ — приращение «игрековой» составляющей напряженности поля на пути dy.

Поток, выходящий из правой грани площадью $dxdz$, равен $(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy)\, dxdz$. Исток через грани площадью $dxdz$ равен $\frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz$. Таким же путем получим разность потоков через грани площадью $dydz$: $\frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$.

Разность потоков через грани $dxdy$ (верхнюю и нижнюю стенки объема) равна $\frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz$.

Для нахождения div $\vec{E}$ сложим разности потоков через все грани и поделим на объем параллелепипеда $dxdydz$, получим

$$\operatorname{div}\vec{E} = \partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z. \tag{19.22}$$

§ 19.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции. Ранее было показано, что умножение оператора ∇ на скалярную функцию равносильно взятию градиента от этой скалярной функции. Покажем, что скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию, например на функцию $\vec{E}$, означает взятие дивергенции от этой векторной функции.

Произведение $\nabla\vec{E}$ можно записать так:

$$\nabla\vec{E} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\right)^* =$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{19.23}$$

Правые части (19.22) и (19.23) равны; следовательно, должны быть равны и левые. Поэтому $\nabla\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E}$, т. е., действительно, умножение оператора ∇ на вектор $\vec{E}$ означает взятие дивергенции от этого вектора.

§ 19.18. Выражение div $\vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода запишем выражение div E:

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \tag{19.24}$$

в сферической системе кооординат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}(R^2E_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) +$$

$$+ \frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}. \tag{19.25}$$

§ 19.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа. Эти уравнения являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Действительно, известно, что $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. В то же время согласно теореме Гаусса (19.21): $\operatorname{div}\vec{E} = \rho_{своб}/\varepsilon_a$.

---

* Почленно умножаем слагаемые первой скобки на слагаемые второй скобки. Учитываем, что скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а разноименных равно нулю: $\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1\cdot1\cdot\cos 0^\circ = 1$; $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 1\cdot1\cdot\cos 90^\circ = 0$.

Подставив в (19.21) $\vec{E}$ из (19.6), получим

$$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_a}.$$

Вынесем минус за знак дивергенции:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho_{своб}/\varepsilon_a.$$

Вместо grad φ запишем его эквивалент $\nabla\varphi$; вместо div напишем ∇. Тогда

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\rho_{своб}/\varepsilon_a, \tag{19.26а}$$

или

$$\nabla^2\varphi = -\rho_{своб}/\varepsilon_a. \tag{19.26}$$

Уравнение (19.26) называют *уравнением Пуассона*. Частный вид уравнения Пуассона, когда $\rho_{своб} = 0$, называют *уравнением Лапласа*. Уравнение Лапласа записывают так:

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{19.27}$$

Оператор $\nabla^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ называют *оператором Лапласа*, или *лапласианом*, и иногда обозначают еще символом Δ. Поэтому можно встретить и такую форму записи уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\rho_{своб}/\varepsilon_a.$$

Раскроем $\nabla^2\varphi$ в декартовой системе координат. С этой целью произведение двух множителей ∇ и $\nabla\varphi$ запишем в развернутом виде:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = -\rho_{своб}/\varepsilon_a. \tag{19.28}$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \tag{19.29}$$

Приведем без вывода выражения $\nabla^2\varphi$:
в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{19.30}$$

в сферической системе координат

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}. \tag{19.31}$$

Уравнение Пуассона выражает связь между частными производными второго порядка от φ в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой точке поля. В то же время потенциал в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от величины свободного заряда, находящегося в данной точке. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных) с 1812 г.

Уравнение Лапласа (1782 г.) первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии использовано для описания электрических полей.

Рассмотрим вопрос о том, как в общем виде можно записать решение уравнения Пуассона.

Положим, что в объеме V есть объемные (ρ), поверхностные (σ) и линейные (τ) заряды. Эти заряды представим в виде совокупностей точечных зарядов: ρdV, σdS, τdl; dV — элемент объема; dS — элемент заряженной поверхности; dl — элемент длины заряженной оси. Составляющая потенциала $d\varphi$ в некоторой точке пространства, удаленной от ρdV на расстояние R, в соответствии с формулой (19.19) равна

$$\frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a R}.$$

Составляющие потенциала от поверхностного и линейного зарядов, если рассматривать их как точечные, определим аналогичным образом:

$$\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_a R} \text{ и } \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_a R}.$$

Полное значение φ определим как сумму (интеграл) составляющих потенциала от всех зарядов в поле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_S \frac{\sigma dS}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_l \frac{\tau dl}{R}. \qquad (19.31а)$$

В формуле (19.31а) ρ, σ и τ есть функции радиуса R. Практически формулой (19.31а) пользуются сравнительно редко, так как распределение σ по поверхности, τ по длине и ρ по объему зависит от конфигурации электродов и, как правило, перед проведением расчета неизвестно. Поэтому интегрирование произвести затруднительно, так как обычно неизвестно, какова зависимость ρ, σ и τ от радиуса R.

При использовании формулы (19.31а) предполагается, что потенциал на бесконечности равен нулю и что заряды, создающие поле, распределены в ограниченной (не бесконечно протяженной) области (иначе интеграл может оказаться расходящимся).

§ 19.20. Граничные условия. *Под граничными условиями* понимают условия, которым подчиняется поле на границах раздела сред с разными электрическими свойствами.

При изучении раздела «Переходные процессы» большое значение имел вопрос о начальных условиях и законах коммутации, которые позволяли определить постоянные интегрирования при решении задач классическим методом. В классическом методе они использовались в явном виде, в операторном — в скрытом. Без использования их нельзя решить ни одной задачи на переходные процессы.

Можно провести параллель между ролью граничных условий в электрическом (или в любом другом) поле и ролью начальных условий и законов коммутации при переходных процессах.

При интегрировании уравнения Лапласа (или Пуассона) в решение входят постоянные интегрирования. Их определяют, исходя из граничных условий. Прежде чем перейти к подробному обсуждению граничных условий, рассмотрим вопрос о поле внутри проводящего тела в условиях электростатики.

§ 19.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики. В проводящем теле, находящемся в электростатическом поле, вследствие явления электростатической индукции происходит разделение зарядов. Отрицательные заряды смещаются на поверхность тела, обращенную в сторону более высокого потенциала, положительные — в противоположную сторону (рис. 19.9).

Рис. 19.9

Все точки тела будут иметь одинаковый потенциал. Если между какими-либо точками возникла бы разность потенциалов, то под ее действием появилось бы упорядоченное движение зарядов, что противоречит понятию электростатического поля.

Поверхность тела эквипотенциальна. Вектор напряженности внешнего поля в любой точке поверхности подходит к ней под прямым углом. *Внутри проводящего тела напряженность поля равна нулю*, так как внешнее поле компенсируется полем зарядов, расположившихся на поверхности тела.

§ 19.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика. На границе проводящее тело — диэлектрик при отсутствии тока по проводящему телу выполняются два условия:

1) отсутствует тангенциальная (касательная к поверхности) составляющая напряженности поля:

$$E_t = 0; \tag{19.32}$$

2) вектор электрического смещения $\vec{D}$ в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда σ на поверхности проводящего тела в этой точке:

$$D = \sigma. \tag{19.33}$$

Рассмотрим первое условие. Все точки поверхности проводящего тела имеют один и тот же потенциал. Следовательно, между двумя любыми весьма близко расположенными друг к другу точками поверхности приращение потенциала $d\varphi = 0$, но $d\varphi = E_t dl$, следовательно, $E_t dl = 0$. как. так рав. 0 E_t $l \neq 0$

Так как элемент пути dl между точками на поверхности не равен нулю, то равно нулю E_t.

Для доказательства второго условия мысленно выделим бесконечно малый параллелепипед (рис. 19.10). Верхняя грань его параллельна поверхности проводящего тела и расположена в диэлектрике. Нижняя грань находится в проводящем теле. Высоту параллелепипеда возьмем весьма малой (сплющим его). Применим к нему теорему Гаусса. В силу малости линейных размеров можно принять, что плотность заряда σ во всех точках на поверхности dS проводящего тела, попавшей внутрь параллелепипеда, одна и та же. Полный заряд внутри рассматриваемого объема равен σdS.

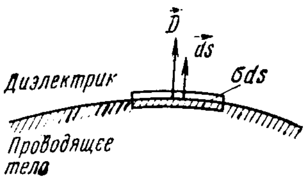


Рис. 19.10

Поток вектора $\vec{D}$ через верхнюю грань объема $\vec{D}\vec{dS} = DdS$. Потока вектора $\vec{D}$ через боковые грани объема ввиду малости последнего и того, что вектор $\vec{D}$ скользит по ним, нет. Через «дно» объема поток также отсутствует, так как внутри проводящего тела $E = 0$ и $D = 0$ (ε_a проводящего тела есть величина конечная). Таким образом, поток вектора $\vec{D}$ из объема равен $DdS = \sigma dS$ или $D = \sigma$.

§ 19.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков. На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются два следующих условия:

1) равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t}; \qquad (19.34)$$

2) равны нормальные составляющие электрической индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}. \qquad (19.35)$$

Индекс *1* относится к первому диэлектрику, индекс *2* — ко второму.

Первое условие вытекает из того, что в потенциальном поле $\oint \vec{E}\,\vec{dl} = 0$ по любому замкнутому контуру; второе представляет собой следствие теоремы Гаусса.

Докажем справедливость первого условия. С этой целью выделим плоский замкнутый контур *mnpqm* (рис. 19.11) и составим вдоль него циркуляцию вектора напряженности электрического поля. Верхняя сторона контура расположена в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε_2, нижняя — в диэлектрике с ε_1. Длину стороны *mn*, равную длине стороны *pq*, обозначим dl. Контур возьмем так, что размеры *np* и *qm* будут бесконечно малы по сравнению с dl. Поэтому составляющими интеграла $\oint \vec{E}_1\,\vec{dl}$ вдоль вертикальных сторон в силу их малости пренебрежем. Составляющая $\oint \vec{E}\,\vec{dl}$ на пути *mn* равна $\vec{E}_2\vec{dl}_2 = E_{2t}dl$, по пути *pq* равна $\vec{E}_1\vec{dl}_1 = - E_{1t}dl$. Знак минус появился потому, что элемент длины на пути *pq* и касательная составляющая вектора $\vec{E}_1$ направлены в противоположные стороны ($\cos 180° = -1$). Таким образом, $\oint \vec{E}\,\vec{dl} = E_{2t}dl - E_{1t}dl = 0$ или $E_{1t} = E_{2t}$.

Убедимся в справедливости второго условия. С этой целью на границе раздела двух сред выделим очень малых размеров параллелепипед (рис. 19.12). Внутри выделенного объема есть связанные заряды и нет свободных (случай наличия свободных зарядов на границе раздела рассмотрим отдельно), поэтому $\oint \vec{D} d\vec{S} = 0$.

Поток вектора $\vec{D}$:

через верхнюю грань площадью dS: $\vec{D}_2 d\vec{S}_2 = D_{2n} dS_2$;

через нижнюю грань: $\vec{D}_1 d\vec{S}_1 = D_1\, dS_1 \cos 180° = -D_{1n} dS$; $|d\vec{S}_1| = |dS_2| = dS$.

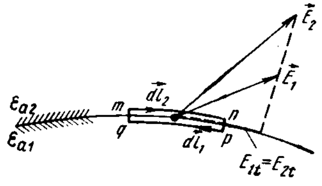


Рис. 19.11

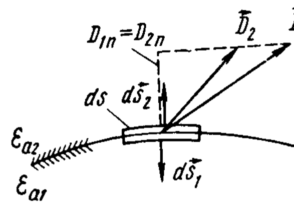


Рис. 19.12

Следовательно, $\oint \vec{D}\, d\vec{S} = -D_{1n} dS + D_{2n} dS = 0$ или $D_{1n} = D_{2n}$.

При наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов с плотностью σ (это встречается редко): $\oint \vec{D}\; d\vec{S} = D_{2n} dS - D_{1n} dS = \sigma dS$, при этом

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \tag{19.36}$$

т. е. при наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ скачком изменяется на величину плотности свободных зарядов на границе раздела.

Из § 19.3 известно, что потенциалу придается смысл работы при переносе единичного заряда. При переходе через границу, отделяющую один диэлектрик от другого, например при переходе от точки n к точке p на рис. 19.11, нормальная составляющая напряженности является величиной конечной, а длина пути np стремится к нулю. Произведение их равно нулю. Поэтому при *переходе через границу раздела двух диэлектриков потенциал не претерпевает скачков.*

§ 19.24. Теорема единственности решения. Электрическое поле описывается уравнением Лапласа или Пуассона. Оба они являются уравнениями в частных производных. Уравнения в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений имеют в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. В любой же конкретной практической задаче есть единственная картина поля, т. е. единственное решение. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа — Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий.

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа — Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Это положение называют *теоремой единственности решения*. Докажем ее. Допустим, что есть два решения (φ' и φ'', $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$). На поверхности каждого k-го проводящего тела с зарядом $q_к$ потенциал $\varphi_k' = \varphi_k''$. Во всех точках разностное поле ($\varphi = \varphi' - \varphi''$ и $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}''$) отсутствует, так как его энергия $\int\limits_V \frac{1}{2}\varepsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2}\Sigma\varphi_к q_к = 0$ [§ 19.43; на поверхности проводника $\varphi_k = \varphi_k' - \varphi_k'' = 0$].

§ 19.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения. В зависимости от того, что задано и что определяют, задачи электростатики можно подразделить на три типа.

Задача первого типа. По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$ найти распределение свободных зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи можно решать с помощью уравнения Пуассона. Это наиболее простой тип задач; $-\sigma_{своб}/\varepsilon_a$ в данной точке поля согласно уравнению Пуассона равняется сумме частных производных второго порядка от φ, в которую подставляют координаты данной точки поля. Одна из задач первого типа рассмотрена в примере 193.

Близкой к задачам первого типа является задача, в которой известно выражение для потенциала φ как функции координат и требуется найти распределение поверхностных или линейных зарядов, создающих поле, когда объемные заряды в поле отсутствуют. Если заряды расположены на поверхностях проводящих тел, то в соответствии с формулой (19.33) плотность заряда $\sigma = \varepsilon E_n$, где $E_n = -\partial\varphi/\partial n$. Индекс n означает направление, нормальное к поверхности тела.

Задача второго типа. Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho_{своб}(x, y, z)$. Найти закон изменения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$. Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона относительно φ, т. е. в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Задачи второго типа рассмотрены в примерах 188—189.

Задачи первого и второго типов практически встречаются редко, чаще имеют дело с задачами третьего типа.

Задача третьего типа. Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения E или φ во всех точках поля. Несколько задач третьего типа рассмотрено в § 19.37—19.40 и в примерах 181б, 187, 194.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области отдельно. Основная трудность задачи состоит в том, что хотя полные заряды тел и известны, но плотность распределения зарядов на отдельных участках заряженного тела неизвестна. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными ε_a должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа можно решать аналитически или графически, либо путем моделирования.

В данном параграфе приведена лишь краткая характеристика этих методов. Подробное изложение их дано в дальнейшем на конкретных примерах.

В простых случаях задачи на аналитический расчет полей решают путем использования теоремы Гаусса в интегральной форме (см. § 19.13). В более сложных аналитическое решение задач третьей группы производят, используя уравнение Лапласа.

Аналитические методы решения задач третьей группы можно подразделить на две подгруппы. В первой производят интегрирование уравнения Лапласа без использования вспомогательных (искусственных) приемов. Во второй используют искусственный прием — метод зеркальных изображений*.

По методу зеркальных изображений решение проводят путем введения вспомогательного заряда или зарядов, которые в расчетном отношении заменяют связанные заряды, выявившиеся на границах тел или сред в результате их поляризации или электростатической индукции (см. § 19.30—19.33).

В тех случаях, когда потенциал φ является функцией только одной координаты выбранной системы координат, уравнение Лапласа из уравнения в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое интегрируется без затруднений (см. примеры 186—187).

Если же потенциал φ является функцией двух или трех координат, то, для того чтобы проинтегрировать уравнение Лапласа, применяют метод Фурье, позволяющий перейти от уравнения в частных производных к эквивалентной ему совокупности двух или соответственно трех обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 19.39).

Графический метод анализа и расчета задач третьей группы представляет собой метод, в котором по определенным правилам производят построение семейств силовых и эквипотенциальных линий, используя некоторые заранее известные свойства исследуемого поля. Эти правила практически одни и те же для всех неизменных во времени полей, т.е. для электростатического поля, электрического поля постоянного тока в проводящей среде (см. гл. 20) и для магнитного поля постоянного тока (см. гл. 21).

В основу анализа и расчета электростатических полей методом моделирования положена аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока в проводящей среде. Метод моделирования основан на сопоставлении задачи электростатики и сходной задачи на электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, в которой совокупность силовых и эквипотенциальных линий практически такая же. Это дает возможность воспользоваться результатами

* См. также метод конформных преобразований в приложении М.

экспериментального исследования поля в проводящей среде при решении родственной электростатической задачи. Подробно об этом говорится в §24.7—24.9. Следует заметить, что при расчетах полей широко применяют метод наложения.

В заключение отметим, что в задачах электростатики расчет можно производить для определения либо точечной характеристики поля (напряженности или потенциала в заданной точке), либо интегральной характеристики данного поля, например емкости или разности потенциалов.

В приложениях И, К, Л, М к ч. III рассмотрены основные положения ряда аналитических методов расчета полей, которые рекомендуется изучить студентам специальностей ТВН, электронной техники, электрических машин и аппаратов.

Перейдем к рассмотрению некоторых простейших электростатических задач.

§ 19.26. Поле заряженной оси. *Под заряженной осью* понимают тонкий теоретически бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволока). Заряд на единицу длины ее принято обозначать через τ. Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ε_a. Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси (рис. 19.13), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, что ось цилиндрической поверхности совпадет с заряженной осью.

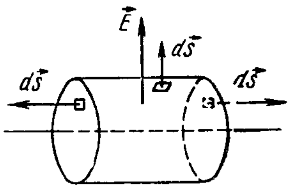


Рис. 19.13

Используем теорему Гаусса, которая применима к замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае последняя образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его донышками. Поток вектора $\vec{E}$ имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через донышки поток вектора $\vec{E}$ отсутствует, так как элемент поверхности $d\vec{S}$ каждого донышка перпендикулярен $\vec{E}$.

Элементы $\overrightarrow{dS}$ боковой поверхности и напряженность электрического поля $\vec{E}$ в любой точке цилиндрической поверхности по направлению совпадают, поэтому

$$E \cdot 2\pi r \cdot 1 = \tau/\varepsilon_a \text{ или } E = \tau/(2\pi\varepsilon_a r). \tag{19.37}$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси. Потенциал

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r} dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C \tag{19.38}$$

изменяется по логарифмическому закону*.

* Единица, находящаяся под знаком логарифма в (19.38), имеет смысл единичного радиуса (единицы измерения), поэтому логарифм берется от величины с нулевой размерностью.

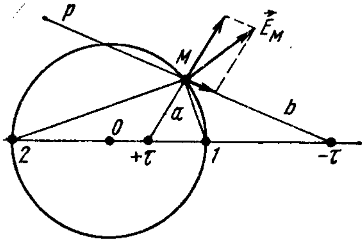


Рис. 19.14

§ 19.27. Поле двух параллельных заряженных осей. Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая — заряд $-\tau$. Возьмем в поле некоторую произвольную точку M (рис. 19.14). Результирующая напряженность поля в ней $\vec{E}_M$ равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние точки M до положительно заряженной оси обозначим через a, до отрицательно заряженной оси — через b. Потенциал есть функция скалярная. Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b}{a} + C. \quad (19.39)$$

Уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является выражение $b/a = \text{const}$.

Эквипотенциаль представляет собой совокупность точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

В геометрии известна теорема Аполлония. Согласно этой теореме геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциаль в поле двух заряженных осей есть окружность. Рассмотрим, как ее можно построить. Соединим точку M с осями. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего (pMa) углов. Точки *1* и *2* пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности.

Для нахождения положения центра окружности (точки O) разделим пополам расстояние между точками *1* и *2*.

§ 19.28. Поле двухпроводной линии. Расстояние между осями двух проводов линии (рис. 19.15, *а*) обозначим через d, радиус каждого провода — через r. Если левому проводу будет сообщен, например, заряд $+\tau$ на единицу длины, а правому—заряд— τ, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью.

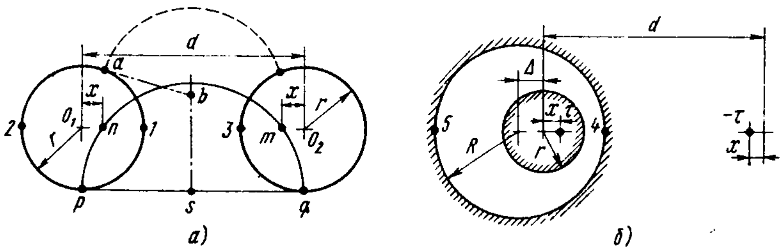


Рис. 19.15

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциалью. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей. (Картину поля двух заряженных осей см. на рис. 19.3, *а*). Расположим две заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов. Пусть заряженные оси будут расположены в точках m и n. Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек *1* и *2* левого провода. Отношение b/a для точки *1* есть $\frac{d-r-x}{r-x}$; отношение b/a для точки *2* равно $\frac{d+r-x}{r+x}$.

Из равенства $\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$ получим

$$x = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - r^2}. \qquad (19.40)$$

В последнем выражении знак минус перед радикалом соответствует положению точки n, знак плюс — точке m.

Положение заряженных осей (часто их называют *электрическими осями* проводов) вместо подсчета по формуле (19.40) находят путем следующих графических построений.

Проводят общую касательную к проводам (прямая pq на рис. 19.15, *а*), делят расстояние между точками касания пополам (точка s) и проводят окружность радиусом ps. Точки пересечения (m и n) окружности с линией O_1O_2 дают положения электрических осей, т. е. таких осей, на которых надо было бы мысленно сосредоточить заряды проводов, чтобы поверхности проводов являлись эквипотенциалями. Так как поле от двух заряженных осей вне проводов удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворены граничные условия (поверхность каждого провода является эквипотенциалью, на ней $E_t = 0$), то на основании теоремы единственности полученное решение истинно.

Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg r$, то x становится много меньше r. При этом электрические и геометрические оси практически совпадают.

Для построения силовой линии (дуги окружности), выходящей из произвольной точки a на поверхности левого провода (см. рис. 19. 15,*а*), надо найти положение центра этой окружности (точки b). Точка b находится на пересечении касательной к поверхности левого провода в точке a с перпендикуляром к линии центров O_1O_2 в ее середине (построения показаны пунктиром).

Рассмотренную методику определения положения электрических осей можно применить и в том случае, когда заданы два цилиндрических электрода неравных радиусов, следы поверхности которых совпадают с какими-либо двумя эквипотенциальными линиями на рис. 19.3, *а*.

Например, поле в пространстве между двумя цилиндрическими электродами, один из которых находится внутри другого [см. рис. 19.15, *б*] (заданы радиусы r, R и смещение между осями Δ), найдем как поле от двух заряженных осей с зарядами τ и $-\tau$. Положение осей определено значениями x и d. Для подсчета значений x и d следует воспользоваться уравнением (19.40) и уравнением, выражающим равенство потенциалов точек *4* и *5* окружности радиусом R.

§ 19.29. **Емкость**. Если два каких-либо проводящих тела разделены диэлектриком и несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды Q, то в пространстве между ними создается электрическое поле. Пусть разность потенциалов между телами, обусловленная этими зарядами, равна U.

Под *емкостью C между двумя телами*, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютную величину отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами:

$$C = Q/U. \tag{19.41}$$

Из определения емкости следует единица ее размерности 1 кулон/вольт = 1 фарад (Ф). Это очень крупная единица и поэтому на практике пользуются более мелкими кратными ей единицами: микрофарад (мкФ) и пикофарад (пФ); 1 мкФ = 10^{-6} Ф, 1 пФ = 10^{-12} Ф.

Устройства для получения определенной величины емкости называют *конденсаторами*. Однако не следует думать, что емкостью обладают только специально созданные для ее получения устройства. Можно говорить о емкости двух любых проводящих тел, разделенных диэлектриком.

В литературе также можно встретить термин *емкость уединенного тела*. Под ней понимают отношение заряда на этом теле к его потенциалу, полагая, что второе тело удалено в бесконечность и что потенциал его равен нулю. В приведенном определении емкости между двумя проводящими телами и емкости уединенного тела имеется в виду, что если в электростатическом поле есть и другие проводящие тела, то они не заряжены; в противном случае заряды этих тел влияли бы на величину разности потенциалов между рассматриваемыми телами (на величину потенциала тела).

Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле может быть линейно выражено через заряд Q (исключение составляют только устройства, в которых используются сегнетодиэлектрики — вещества, у которых ε является функцией E), то отношение Q/U оказывается не зависящим ни от величины Q, ни от величины U.

Емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, электрических свойств диэлектрика (величины ε_r).

Рассмотрим определение *емкости двухпроводной линии*. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Точка *1* (см. рис. 19.15, *а*) принадлежит поверхности левого провода, точка *3* — поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними: $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}$.

При $d \gg r$ $x \ll r$, поэтому

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} 2 \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \tag{19.42}$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$:

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi \varepsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \tag{19.43}$$

Она, действительно, зависит только от геометрических размеров и свойств среды и не зависит от величины заряда τ и величины напряжения U_{13}. Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться.

§ 19.30. **Метод зеркальных изображений.** Для расчета электростатических полей, ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяют метод зеркальных изображений.

Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных зарядов вводят еще дополнительные, величины и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Территориально заряды помещают там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода и правильности даваемого им решения является теорема единственности.

Рассмотрим два примера на метод зеркальных изображений.

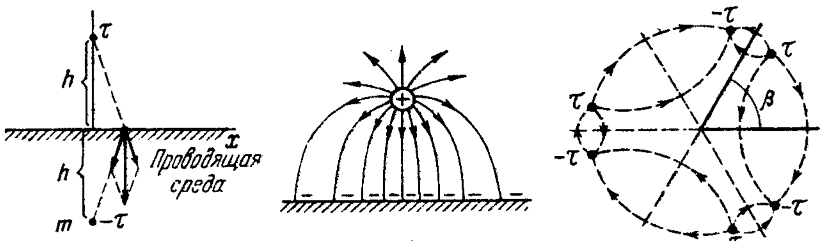


Рис. 19.16

§ 19.31. **Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости.** Заряженная ось (τ — заряд на единицу длины) расположена в диэлектрике параллельно поверхности проводящей среды (рис. 19.16, *а*). Проводящей средой может быть какая-либо металлическая стенка или, например, земля. Требуется определить характер поля в верхней полуплоскости (диэлектрике).

В результате электростатической индукции на поверхности проводящего тела выступают заряды. Плотность их меняется с изменением координаты x. Поле в диэлектрике создается не только заряженной осью, но и зарядами, выступившими на поверхности проводящего тела вследствие электростатической индукции. Несмотря на то что распределение плотности зарядов на поверхности проводящей среды неизвестно, данную задачу сравнительно легко можно решить по методу зеркальных изображений.

Поместим в точке m фиктивный заряд обратного знака ($-\tau$) по отношению к заданному заряду τ. Расстояние h от точки m до плоскости раздела сред такое же, как и расстояние от действительного заряда до плоскости раздела. В этом смысле осуществлено зеркальное изображение. В данной задаче фиктивный заряд численно равен заданному, но имеет обратный знак. Так будет не всегда, т. е. не во всех задачах искусственно введенный заряд будет численно равен заданному и иметь противоположный знак.

Убедимся, что напряженность поля от двух зарядов (τ и $-\tau$) в любой точке границы раздела имеет только нормальную к границе составляющую и не имеет тангенциальной составляющей (см. построения на рис. 19.16, *а*). Действительно, тангенциальные составляющие от обоих зарядов имеют противоположные направления и в сумме дают нуль в любой точке поверхности.

Можно убедиться в том, что потенциал от каждой из осей, определяемый формулой (19.38), удовлетворяет уравнению Лапласа [формуле (19.30)]. Для проверки следует подставить правую часть формулы (19.38) в формулу (19.30) и убедиться в том, что $\nabla^2\varphi$ будет равно нулю:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0.$$

Так как потенциал от каждой из осей удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворено граничное условие, то на основании теоремы единственности полученное решение является истинным.

Картина поля заряженной оси, расположенной параллельно проводящей плоскости, изображена на рис. 19.16, *б*. Силовые линии перпендикулярны поверхности провода и поверхности проводящей плоскости. Знаки минус на поверхности проводящей плоскости означают отрицательные заряды, выявившиеся на ее поверхности в результате электростатической индукции.

Многократные зеркальные отражения. Если заряд τ находится в диэлектрике внутри двугранного угла $\beta = \pi/n$ (n — целое число), а границами угла являются проводящие стенки (на рис. 19.16, *в* $n = 3$), то поле внутри двугранного угла определится как поле от знакочередующихся $2n$ зарядов $\pm\tau$, расположенных зеркально по отношению друг к другу. На каждой стороне двугранного угла тангенциальная составляющая напряженности поля равна нулю.

§ 19.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями. Как показано на рис. 19.17, *а*, верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_{1a}, нижнее — диэлектриком с ε_{2a}; ab — граница раздела двух сред. В верхнем полупространстве параллельно границе раздела сред находится заряженная ось с зарядом τ_1. Вследствие поляризации диэлектриков на границе раздела выявятся связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах. Учет влияния их на поле проводят путем введения двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2 и τ_3 в отличие от задачи, где вводился один заряд. В ней надо было удовлетворить только одному условию ($E_t = 0$), и это можно было сделать с помощью одного заряда. В данной же задаче надо удовлетворить двум граничным условиям, что возможно только с помощью двух пока неизвестных зарядов τ_2 и τ_3.

Расчет поля в любой точке *верхнего* полупространства (полуплоскости) производят от двух зарядов: заданного τ_1 и дополнительного τ_2. Причем не только верхнее, но и нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_{a1} (рис. 19.17, *б*).

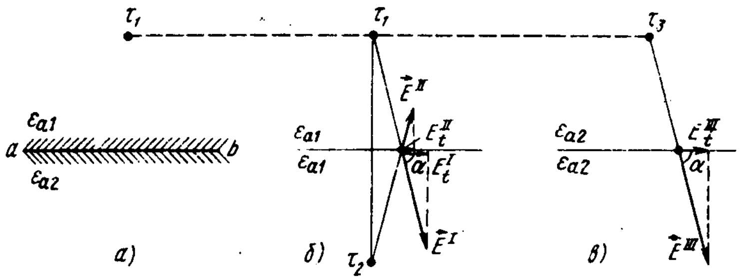


Рис. 19.17

Поле в любой точке *нижнего* полупространства определяют как поле от некоторого дополнительного заряда τ_3, расположенного в той же точке, где находился заряд τ_1. В этом случае не только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_{a2} (рис. 19.17, *в*).

Составим два уравнения для определения пока неизвестных τ_2 и τ_3.

Из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела следует, что $E_t^{I} + E_t^{II} = E_t^{III}$ или

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_{a1} r}[\tau_1 + \tau_2]\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{a2} r}\tau_3\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}. \tag{19.44}$$

Из условия равенства нормальных составляющих вектора D на границе раздела, приняв за положительное направление для нормали направление вниз, имеем $D_n^{I} - D_n^{II} = D_n^{III}$. Запишем последнюю строку в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi r}(\tau_1 - \tau_2)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi r}\tau_3\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \tag{19.45}$$

Решая совместно (19.44) и (19.45), получим

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1 \tag{19.46}$$

и

$$\tau_3 = \frac{2\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1. \tag{19.47}$$

Знак заряда τ_2 совпадает со знаком заряда τ_1, если $\varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$. Знак τ_3 всегда тот же, что и знак τ_1.

Если поле будет создаваться не заряженной осью, а точечным зарядом, то вся методика сохраняется и формулы (19.46) и (19.47) годятся и для точечных зарядов. Но под τ теперь следует понимать величину точечного заряда.

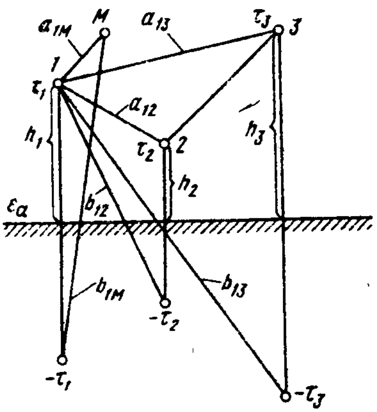


Рис. 19.18

§ 19.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости.

В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из n весьма длинных проводов с зарядом τ_k на единицу длины (индексу заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно проводящей поверхности (например, поверхности земли). Высота подвеса и радиус каждого провода известны, а также известна электрическая проницаемость ε_a среды, окружающей провода.

Возьмем в диэлектрике некоторую произвольную точку M (рис. 19.18) и найдем ее потенциал. Потенциал точки M будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым проводом и его зеркальным изображением. Составляющую потенциала точки M от провода 1 и его зеркального изображения в соответствии с формулой (19.39) можно записать следующим образом (постоянную, с точностью до которой определяется потенциал, опускаем):

$$\varphi_{M1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

где b_{1M} — расстояние точки M до зеркального изображения первого провода; a_{1M} — расстояние точки M до первого провода.

Будем полагать, что высота подвеса каждого провода над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадут с геометрическими.

Составляющая потенциала точки M от второго провода и его зеркального изображения:

$$\varphi_{M2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Таким образом,

$$\varphi_M = \varphi_M1 + \varphi_M2 + \varphi_M3 + \ldots = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} +$$

$$+ \tau_2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}} + \ldots$$

19.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла. Точку M можно поместить на поверхность первого провода. При этом $\varphi_M = \varphi_1$; $b_M1 = 2h_1$; $a_M1 = r_1$; $b_M2 = b_{12}$ — расстояние первого провода до зеркального изображения второго провода; $a_{M_2} = a_{12}$ — расстояние первого провода до второго и т. д.:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} + \ldots \quad (19.48а)$$

Коэффициенты при зарядах τ_1, τ_2 и других зависят только от геометрических размеров тел, взаимного их расположения и от свойств среды. Они не зависят ни от величины, ни от знаков зарядов и потенциалов.

Для сокращения записи выражение (19.48а) и другие, аналогичные ему, запишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \ldots \\ \varphi_2 &= \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \ldots \\ \varphi_3 &= \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (19.48)$$

Здесь

$$\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}, \; \alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{2h_k}{r_k}. \quad (19.48б)$$

Коэффициенты $\alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{mk}}{a_{mk}}$. Так как $b_{mk} = b_{km}$ и $a_{mk} = a_{km}$, то $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$. Систему уравнений (19.48) принято называть *первой группой формул Максвелла* (ее не следует смешивать с первым уравнением Максвелла, о котором идет речь в § 22.2).

Коэффициенты α называют *потенциальными коэффициентами*. Размерность их равна размерности единицы длины, разделенной на фараду. Так как у всех коэффицентов α под знаком логарифма находится дробь, числитель которой всегда больше знаменателя, то все коэффициенты α положительны.

Коэффициентам α может быть дано следующее толкование. Пусть заряды всех проводов, кроме первого, равны нулю: $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \ldots = 0$, а $\tau_1 = 1$; тогда $\varphi_1 = \alpha_{11}$, т. е. α_{11} численно равно потенциалу первого провода, если на первом проводе находится единичный заряд, а заряды на остальных проводах отсутствуют. Аналогично, α_{21} численно равно потенциалу второго провода в тех же условиях. Система (19.48) позволяет подсчитать потенциалы заряженных тел по известным общим зарядам тел.

Может встретиться и обратная задача: по известным потенциалам тел найти заряды тел.

§ 19.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла. Решим систему (19.48) относительно зарядов, полагая потенциалы φ и коэффициенты α известными:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{19.49}$$

Коэффициенты $\beta_{kn} = \Delta_{kn}/\Delta$. Здесь через Δ обозначен определитель системы (19.48):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение Δ_{kn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания k-строки и n-столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{k+n}$.

Система (19.49) является *второй группой формул Максвелла.*

Коэффициенты β называют *емкостными коэффициентами*. Размерность их обратна размерности коэффициента α. Так как определитель системы Δ симметричен относительно главной диагонали, то $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$ и потому $\beta_{kn} = \beta_{nk}$. Все β с одинаковыми индексами положительны, а с разными индексами отрицательны.

Убедимся, например, в том, что β_{11} положительно, а β_{21} и β_{31} отрицательны. С этой целью все провода, кроме первого, соединим тонкими (чтобы не искажать поля) проводниками с землей. Потенциал земли примем равным нулю. При этом из (19.49) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1, \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1, \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{19.49a}$$

Придадим первому проводу положительный по отношению к земле потенциал, соединив его с землей, например через батарею (рис. 19.19, *а*). Заряд первого провода положителен и потенциал первого провода положителен ($\varphi_1 > 0$; $\tau_1 > 0$). Отрицательный заряд растечется по земле и всем телам, с ней электрически соединенными. Все провода, кроме первого, поскольку они электрически соединены с землей, приобретут отрицательные заряды:

$$\varphi_2 = 0,\ \tau_2 < 0;$$
$$\varphi_3 = 0,\ \tau_3 < 0.$$

Из системы (19.49a) следует, что

$$\beta_{11} = \tau_1/\varphi_1 > 0,\ \text{а}\ \beta_{21} = \tau_2/\varphi_1 < 0\ \text{и}\ \beta_{31} = \tau_3/\varphi_1 < 0.$$

Отсюда вытекает методика определения опытным путем коэффициентов β_{11} и β_{21}.

Если после зарядки провода *1* (ключ K на рис. 19.19, *а* включен) до известного потенциала φ_1 ключ K разомкнуть, убрать батарею, включить гальванометры G_1 и G_2 (рис. 19.18, *б*), а затем замкнуть ключ K, то система разрядится; G_1 измерит заряд τ_1, а G_2 — заряд τ_2 провода *2* и т. д. Далее находим $\beta_{11} = \tau_1/\varphi_1$ и $\beta_{21} = \tau_2/\varphi_1$.

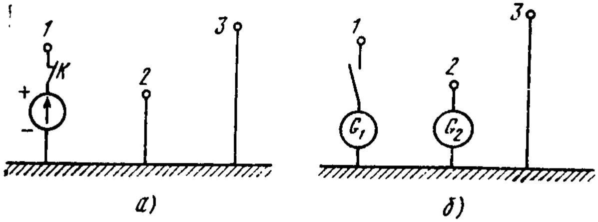


Рис. 19.19

§ 19.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла. Систему (19.49) принято записывать и в иной форме, так чтобы в правой части каждой строчки были не потенциалы, а разности потенциалов между данным телом и всеми остальными, в том числе и землей.

В соответствии с (19.49) заряд k-тела:

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{m=n} \beta_{km}\varphi_m.$$

Слагаемое $\beta_{km}\varphi_m = \beta_{km}(\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km}U_{km} + \beta_{km}\varphi_k$. Поэтому

$$\tau_k = \varphi_k\beta_{kk} + \varphi_k\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{m=n}\beta_{km} - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{m=n}\beta_{km}U_{km} = \varphi_k\sum_{m=1}^{m=n}\beta_{km} + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{m=n}(-\beta_{km})U_{km}.$$

Обозначим:

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n}\beta_{km} \tag{19.50}$$

и

$$C_{km} = -\beta_{km}. \tag{19.51}$$

Тогда

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1}C_{k1} + U_{k2}C_{k2} + \ldots = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{m=n} U_{km}C_{km}. \tag{19.52}$$

Если придать k значения 1, 2, 3, ..., то получим

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = \varphi_1 C_{11} + U_{12}C_{12} + U_{13}C_{13} + \ldots \\ \tau_2 = \varphi_2 C_{22} + U_{21}C_{21} + U_{23}C_{23} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{19.53}$$

Система (19.53) является *третьей группой формул Максвелла*. Коэффициенты C_{kk} называют *собственными частичными емкостями*, а коэффициенты C_{km} — *взаимными частичными емкостями*. (Часто слова «собственная» и «взаимная» опускают.) Так как $\beta_{km} = \beta_{mk}$, то и $C_{km} = C_{mk}$.

Размерность частичных емкостей та же, что и размерность емкостных коэффициентов β. Все частичные емкости положительны. Так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$, то очевидно, что $C_{km} > 0$. Чтобы убедиться, что C_{kk} положительно, проведем следующий опыт: соединим тонкими проводниками все провода с k-проводом. При этом все $U_{km} = 0$, и из (19.52) следует, что $\tau_k = \varphi_k C_{kk}$.

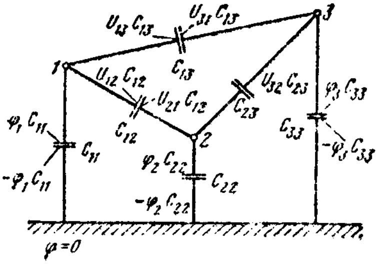


Рис. 19.20

Если k-проводу сообщить положительный по отношению к земле потенциал (потенциал земли принят равным нулю), соединив его с плюсом батареи, минус которой соединен с землей, то τ_k и φ_k будут положительными и $C_{kk} = \tau_k/\varphi_k > 0$.

Емкость C_{kk} оказывается положительной, несмотря на то что в состав ее [см. формулу (19.50)] может входить большое число отрицательных коэффициентов β_{km} (коэффициент $\beta_{kk} > \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}$. Согласно (19.53), полный заряд k-тела равен сумме зарядов. Заряд $\varphi_k C_{kk}$ обусловлен разностью потенциалов между k-телом и землей; $U_{km}C_{km}$ есть заряд, обусловленный разностью потенциалов между k- и m-телами. Поэтому частичной емкости C_{km} между k- и m-телами можно дать следующее толкование: C_{km} есть отношение составляющей заряда k-тела, обусловленной разностью потенциалов U_{km} между k-и m-телами, к величине этой разности потенциалов.

Для более наглядной иллюстрации системы (19.53) можно представить, что в системе трех проводов (рис. 19.20) первый провод как бы соединен с обкладками трех конденсаторов C_{11}, C_{12} и C_{13}.

Заряды на обкладках этих конденсаторов, обращенных к проводу 1, соответственно равны $\varphi_1 C_{11}$; $U_{12}C_{12}$; $U_{13}C_{13}$. Заряды на других обкладках записаны на рис. 19.20.

Три группы формул Максвелла справедливы для системы заряженных тел любой формы. Однако, если тела имеют произвольную форму, то потенциальные коэффициенты уже нельзя определять по формулам (19.48 б), справедливым только для системы линейных параллельных достаточно длинных проводов.

Определение емкостных коэффициентов и частичных емкостей в этом случае производят опытным путем.

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, но и при расчетах быстро протекающих процессов в электрических цепях, а также процессов, в основу которых положено использование частичных емкостей, например при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. Частичные емкости между электродами электронных ламп, между электродами транзисторов учитывают при расчетах быстро протекающих процессов (см., например, гл. 9).

§ 19.37. Поле точечного заряда, расположенного вблизи проводящей сферы. Рассмотрим три родственные задачи на изображение в сфере. *а*. В диэлектрике с известной ε_a на расстоянии b от центра проводящего предварительно (до заземления) не заряженного шара радиуса a (см. рис. 19.21, *а*) поместим точечный заряд q. Внутри шара поле известно ($\varphi = 0$ и $E = 0$). Определим поле в пространст-

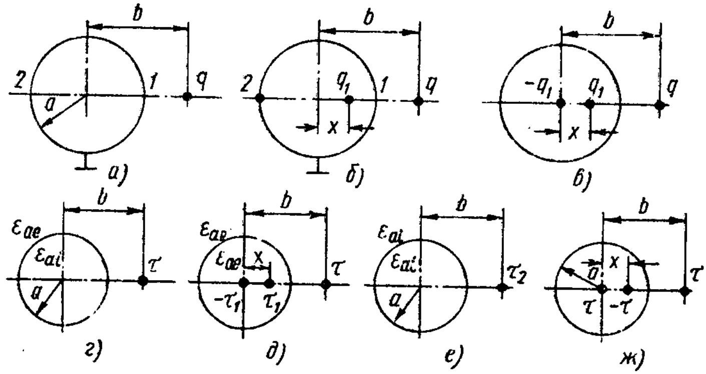


Рис. 19.21

ве вне шара. С этой целью на расстоянии x от центра шара поместим заряд q_1 (рис. 19.21, *б*), составим выражения для потенциалов точек *1* и *2* шара и приравняем их нулю (шар заземлен):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a(a-x)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_a(b-a)} = 0; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a(a+x)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_a(b+a)} = 0.$$

Откуда $x = a^2/b$ и $q_1 = -qa/b$.

б. Если точечный заряд q поместить вблизи незаряженного незаземленного шара радиуса a, то поле вне шара определим как поле от трех зарядов (рис. 19.21, *в*): заданного заряда q, заряда зеркального изображения $q_1 = -q\frac{a}{b}$, расположенного на расстоянии $x = a^2/b$ от центра шара и заряда $-q_1 = q\frac{a}{b}$, помещенного в центре шара. При этом суммарный заряд шара равен нулю, а

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{q\frac{a}{b}}{4\pi\varepsilon_a a} + C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a b} + C.$$

в. Если точечный заряд q поместить вблизи незаземленного шара с зарядом Q, то поле вне шара определится как поле от трех зарядов: q, $q_1 = -q\frac{a}{b}$ и $q_2 = Q + q\frac{a}{b}$. Заряд q_1 помещен на расстоянии x от центра шара, а q_2 — в центре шара.

§ 19.38. Поле заряженной оси, расположенной параллельно цилиндру. Рассмотрим две родственные задачи на изображение в диэлектрическом и проводящем цилиндрах.

а. В диэлектрике с электрической проницаемостью ε_{ae} находится цилиндр, проницаемость которого ε_{ai}. Параллельно ему на расстоянии b от оси цилиндра расположена ось с зарядом τ на единицу длины (рис. 19.21, *г*). Поле вне цилиндра определяем по рис. 19.21, *д*. И цилиндр и окружающее его пространство заполнены средой с проницаемостью ε_{ae}. Поле создается тремя зарядами: заданным τ, зеркальным $\tau_1 = \tau \frac{\varepsilon_{ae} - \varepsilon_{ai}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}}$, расположенным на расстоянии $x = a^2/b$ от оси цилиндра, и зарядом $-\tau_1$, помещенным на оси цилиндра. Поле внутри цилиндра определим по рис. 19.21, *е* как поле, создаваемое зарядом $\tau_2 = \tau \frac{2\varepsilon_{ai}}{\varepsilon_{ai} + \varepsilon_{ae}}$, когда и цилиндр и окружающее его пространство заполнены средой с проницаемостью ε_{ai}.

б. Если цилиндр проводящий и не заряжен, то предельным переходом, устремив $\varepsilon_{ai} \to \infty$, найдем $\tau_1 = -\tau$. Поле вне цилиндра создается тремя зарядами, изображенными на рис. 19.21, *ж*.

§ 19.39. Шар в равномерном поле. Если в равномерное поле (направлено сверху вниз; вдоль оси $-z$), напряженность которого равна E_0 (рис. 19.22), внести металлический или диэлектрический шар (ε_a шара отлично от ε_a окружающей среды), то электрическое поле, особенно вблизи шара, исказится, перестанет быть равномерным. Характер искажения поля зависит от размеров шара, его ε_r и величины заряда на шаре.

Если шар металлический (проводящий), то силовые линии должны подходить к его поверхности под прямым углом. Если металлический шар не заряжен, то на нем вследствие явления электростатической индукции произойдет разделение зарядов. Силовые линии будут заканчиваться или начинаться на них.

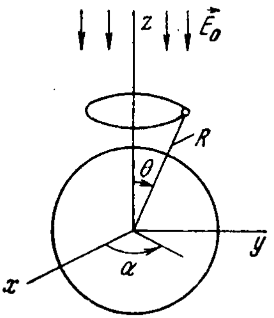


Рис. 19.22

Металлический шар может быть и заряжен, т. е. нести на себе избыточный заряд, который также расположится на поверхности.

Если шар из диэлектрика, то под влиянием внешнего по отношению к нему поля шар поляризуется. Заряды, выявившиеся на шаре вследствие поляризации, исказят прежде (до внесения шара) равномерное поле. Силовые линии подходят к поверхности шара так, что выполняются два граничных условия (см. § 19.23).

Если шар металлический, то внутри шара $E = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Независимо от того, металлический шар или диэлектрический, во внешней по отношению к шару области нет свободных зарядов и потому поле в наружной по отношению к шару области описывается уравнением Лапласа. Если шар из диэлектрика и свободный заряд на нем равен нулю, то поле внутри шара описывается также уравнением Лапласа.

Таким образом, для решения той и другой задачи необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Это одна из наиболее типичных классических задач электростатики. Для любой конкретной задачи в качестве первого этапа необходимо правильно выбрать систему координат. Систему координат выбирают таким образом, чтобы граничные поверхности в поле описывались наиболее удобно. В данной задаче граничная поверхность — сфера, наиболее удобно описываемая в сферической системе координат. Поэтому будем пользоваться этой системой.

Вторым этапом решения является выяснение вопроса о том, не обладает ли изучаемое поле тем или иным видом симметрии. Условия симметрии поля часто в значительной мере облегчают решение задачи. В рассматриваемой задаче поле не зависит от координаты α. Чтобы убедиться в этом, мысленно рассечем поле плоскостью, перпендикулярной оси z декартовой системы, и проведем в этой плоскости окружность так, чтобы центр ее лежал на оси z. Все точки этой окружности имеют одно и то же значение радиуса R, соединяющего точку на этой окружности с началом координат. Кроме того, угол θ в меридианной плоскости между радиусом R и осью z один и тот же.

Все точки окружности находятся в поле в одинаковых условиях. Поэтому потенциал их один и тот же. Но значение угла α, характеризующего положения точек этой окружности, различно. Если для совокупности точек, обладающих $R = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ и разными значениями угла α, φ одно и то же, то это означает, что в данном поле φ не зависит от угла α. Поэтому поле будет описываться уравнением [см. уравнение (19.31)]:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (19.54)$$

(составляющая $\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$ выпала, так как φ не зависит от α). Выражение (19.54) представляет собой уравнение в частных производных. Для интегрирования уравнений в частных производных применяют метод Фурье, согласно которому искомую функцию (в данном случае φ) полагают в виде произведения двух пока неизвестных функций M и N, одна из которых (M) зависит только от R, а другая (N) — только от θ:

$$\varphi = M(R)\,N(\theta) = MN. \qquad (19.55)$$

Вид функций M и N подлежит определению. Определение функции φ в виде произведения двух функций (19.55) позволяет разбить уравнение в частных производных (19.54) на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых одно будет составлено относительно M, другое — относительно N.

Подставим (19.55) в (19.54), учтя, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}=N\frac{\partial M}{\partial R};\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=M\frac{\partial N}{\partial\theta}.$$

Поэтому

$$\frac{N}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)+\frac{M}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (19.56)$$

Умножим (19.56) на $\frac{R^2}{MN}$:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)+\frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (19.57)$$

Особенностью уравнения (19.57) является то, что первое слагаемое в нем представляет собой функцию только R, а второе—функцию θ. Сумма двух функций, из которых одна зависит только от R, а другая — от θ, равна нулю для бесчисленного множества пар значений R и θ [уравнение (19.57) годится для всех точек поля]. Это возможно тогда, когда каждая из данных функций равна нулю

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)=0 \text{ и } \frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=0, \qquad (19.57а)$$

либо когда

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)=p \text{ и } \frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=-p. \qquad (19.57б)$$

Здесь p есть некоторое число, пока неизвестное.

Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнений (19.57а) и (19.57б). Общее решение для φ согласно (19.55) равно произведению решений уравнений (19.57а) плюс произведение решений для M и N по уравнениям (19.57б). Найдем решение уравнений (19.57а). Так как в (19.57а) M зависит только от R, а N—только от θ, то от частных производных можно перейти к простым (обыкновенным):

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=0; \quad \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dN}{d\theta}\right)=0.$$

Интеграл первого из них:

$$M=A_1/R+A_2. \qquad (19.58)$$

Найдем интеграл второго уравнения:

$$\sin\theta\frac{dN}{d\theta}=A_3; \quad \frac{dN}{d\theta}=\frac{A_3}{\sin\theta} \text{ или } N=A_3\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+A_4. \qquad (19.59)$$

Покажем, что A_3 непременно должно равняться нулю, так как только в этом случае в решении отсутствует слагаемое $A_3\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

Потенциал есть функция непрерывная и на конечном отрезке он не может измениться на бесконечно большую величину. Из физических соображений ясно, что потенциал точек оси z вблизи шара не может быть равен бесконечности. Между тем, если бы $A_3\neq 0$, то в решении для потенциала присутствовало бы слагаемое $A_3\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, равное $-\infty$ для всех точек, у которых $\theta=0$ (при $\theta=0$ $\operatorname{tg}\theta=0$; $\ln\operatorname{tg}\theta\underset{\text{при }\theta=0}{=}-\infty$).

Таким образом, частное решение для φ, вытекающее из (19.57а), следующее:

$$\varphi=C_1/R+C_2\,(C_1=A_1A_4;\quad C_2=A_2A_4). \qquad (19.60)$$

Найдем решение уравнений (19.57 б):

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=p$$

или

$$2R\frac{dM}{dR}+R^2\frac{d^2M}{dR^2}=pM.$$

Применим подстановку Эйлера $M = CR^n$: $dM/dR = nCR^{n-1}$; $\frac{d^2M}{dR^2} = n(n-1)CR^{n-2}$.

Подставим производные в уравнение: $2RnCR^{n-2} + R^2(n-1) \times \times nCR^{n-2} = pCR^n$ или $n^2 + n - p = 0$.

Найдем корни квадратного уравнения:

$$n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}. \tag{19.61}$$

Значение p определим при интегрировании второго уравнения (19.57 б):

$$\frac{1}{N \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dN}{d\theta}\right) = -p.$$

Решение его можно записать в виде $N = B\cos\theta$. Убедимся в этом путем подстановки и одновременно найдем значение p:

$$\frac{dN}{d\theta} = -B\sin\theta; \sin\theta\frac{dN}{d\theta} = -B\sin^2\theta;$$

$$\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dN}{d\theta}\right) = \frac{-2B\sin\theta\cos\theta}{B\cos\theta\sin\theta} = -2 = -p.$$

Следовательно, $p = 2$.

После нахождения числа p подставим его в (19.61) и найдем $n_1 = 1$ и $n_2 = -2$. Таким образом, совместное решение уравнений (19.57б) дает следующее выражение для φ: $\varphi = (C_3 R + C_4/R^2)\cos\theta$.

Полное решение:

$$\varphi = C_1/R + C_2 + (C_3 R + C_4/R^2)\cos\theta. \tag{19.62}$$

В (19.62) присутствуют четыре неизвестных постоянных: C_1, C_2, C_3 и C_4. Значения постоянных зависят от того, какой шар (проводящий или диэлектрический) внесен в поле*.

§ 19.40. Проводящий шар в равномерном поле. Для определения четырех постоянных необходимо учесть не только условие на поверхности шара, но и условия на большом удалении от него, теоретически на бесконечно большом удалении от шара, или, как принято говорить, условия на бесконечности.

Совокупность весьма удаленных от шара точек в условном смысле рассматривается при этом как бесконечность. Если шар не заряжен, то все точки плоскости xOy, проходящей через центр шара, имеют один и тот же потенциал. Обозначим его φ_0.

При удалении от шара на большое расстояние $z = R\cos\theta$, по сравнению с которым радиус шара a весьма мал, возмущающее действие шара на поле либо вовсе не проявится (если суммарный заряд шара будет равен нулю), либо проявится как возмущение от точечного заряда

* Задачи теории поля, в которых приходится решать уравнения в частных производных и из большого числа выбирать решения, удовлетворяющие граничным условиям, в математических работах принято называть *краевыми задачами*.

(если шар будет иметь на себе суммарный свободный заряд Q). Потенциал φ на бесконечности определим так:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 R \cos\theta. \qquad (19.63)$$

Первое слагаемое правой части (19.63) дает составляющую потенциала от заряда шара Q, слагаемое $E_0 R\cos\theta$ учитывает прирост потенциала от напряженности равномерного поля E_0 на пути $z = R\cos\theta$. Так как решение (19.62) годится и для точек поля, весьма далеко (бесконечно далеко) удаленных от шара, то можно сопоставить выражения (19.62) и (19.63). Они должны давать один и тот же результат. Это будет только в том случае, когда соответствующие слагаемые в обоих выражениях равны. Из сопоставления следует, что $C_2 = \varphi_0$; $C_1 = Q/(4\pi\varepsilon_a)$; $C_3 = E_0$.

Сопоставление на бесконечности не дает возможности найти величину C_4, так как в (19.63) нет слагаемого, изменяющегося обратно пропорционально второй степени R. Для нахождения C_4 воспользуемся тем, что в условиях электростатики все точки поверхности шара имеют один и тот же потенциал. Это условие равносильно тому, что тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности шара равна нулю. При $R = a$:

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a a} + (E_0 a + C_4/a^2)\cos\theta + \varphi_0.$$

Правая часть будет постоянной с изменением θ только при условии, что $(E_0 a + C_4/a^2) = 0$. Отсюда $C_4 = -E_0 a^3$.

Таким образом, для всех точек диэлектрика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 \ (R - a^3/R^2)\cos\theta. \qquad (19.64)$$

Так как потенциал зависит только от R и θ, напряженность электрического поля имеет только две составляющих (см. § 19.8):

$$\left.\begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a R^2} - E_0(1 + 2a^3/R^3)\cos\theta; \\ E_\theta &= -\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} = E_0(1 - a^3/R^3)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (19.64а)$$

Если $Q = 0$, то на поверхности шара (при $R = a$) $E_R = -3E_0\cos\theta$.

При $\theta = 0$ напряженность $E_R = -3E_0$, при $\theta = 180°$ $E_R = 3E_0$, т. е. в этих точках напряженность поля стала в три раза больше напряженности равномерного поля E_0, в которое был внесен шар. На «экваторе» при $\theta = 90°$ напряженность, напротив, стала равной нулю.

Таким образом, капелька воды, попав в бак трансформатора с масляным заполнением, вызовет значительное местное увеличение напряженности поля.

§ 19.41. Диэлектрический шар в равномерном поле. Если в равномерное поле помещен незаряженный *диэлектричесяий шар*, то как внутри шара, так и вне его нет свободных зарядов и потому поле описывается уравнением Лапласа. Полное решение (19.62) пригодно и для данной задачи. Величины, служащие для описания поля внутри шара, обозначим с индексом i, а величины, с помощью которых записывается потенциал во внешней по отношению к шару области, — с индексом e. Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = C_{1i}/R + C_{2i} + (C_{3i}R + C_{4i}/R^2)\cos\theta, \tag{19.65}$$

для внешней области

$$\varphi_e = C_{1e}/R + C_{2e} + (C_{3e}R + C_{4e}/R^2)\cos\theta. \tag{19.66}$$

Надо найти 8 постоянных интегрирования. Потенциал на бесконечности в этом случае $\varphi = \varphi_0 + E_0 R \cos\theta$.

Сопоставим последнее выражение с (19.66): $C_{2e} = \varphi_0$ и $C_{3e} = E_0$.

В § 19.14 было рассмотрено поле точечного заряда. Там было показано, что потенциал в поле точечного заряда изменяется обратно пропорционально R. Поэтому C_{1e}/R есть составляющая потенциала от суммарного заряда шара, рассматриваемого как точечный заряд. Так как суммарный заряд шара равен нулю, то в выражении для φ_e эта составляющая должна выпасть, т. е. $C_{1e} = 0$.

Следовательно,

$$\varphi_e = \varphi_0 + (E_0 R + C_{4e}/R^2)\cos\theta. \tag{19.66а}$$

В выражении (19.66) осталась неизвестной лишь постоянная C_{4e}.

Рассмотрим выражение потенциала φ_i для внутренней области. Оно должно давать конечное значение для всех точек внутри шара. Это возможно только тогда, когда $C_{1i} = 0$ и $C_{4i} = 0$ (если бы $C_{i1} \neq 0$, то слагаемое C_{1i}/R в центре шара при $R = 0$ давало бы бесконечно большое значение). Постоянная, с точностью до которой определяется потенциал в рассматриваемом поле, равна аналогичной постоянной $C_{2e} = \varphi_0$ для внешней области.

Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \varphi_0 + C_{3i} R\cos\theta. \tag{19.66б}$$

Оставшиеся неизвестными постоянные C_{4e} и C_{3i} найдем из граничных условий.

Из равенства потенциалов φ_i и φ_e при $R = a$ (это условие, как нетрудно убедиться, эквивалентно условию $E_{1t} = E_{2t}$) следует, что $C_{3i}a = E_0 a + C_{4e}/a^2$.

Из равенства нормальных составляющих вектора $\vec{D}$ на границе следует, что

$$\varepsilon_{ai}(\partial\varphi_i/\partial R)_{R=a} = \varepsilon_{ae}(\partial\varphi_e/\partial R)_{R=a},$$

т. е.

$$\varepsilon_{ai}C_{3i} = \varepsilon_{ae}(E_0 - 2C_{4e}/a^3).$$

Совместное решение двух последних уравнений дает:

$$C_{3i}=E_0\frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}},\quad C_{4i}=a^3E_0\frac{\varepsilon_{ae}-\varepsilon_{ai}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}}.$$

Потенциалы областей:
внутренней

$$\varphi_i=\varphi_0+E_0R\frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}}\cos\theta=\varphi_0+E_0\frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_i}z;\quad z=R\cos\theta, \tag{19.67}$$

внешней

$$\varphi_e=\varphi_0+E_0\left(R+\frac{a^3}{R^2}\frac{\varepsilon_{ae}-\varepsilon_{ai}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}}\right)\cos\theta. \tag{19.68}$$

Напряженность поля внутри шара:

$$E_z=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=-E_0\frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}}. \tag{19.69}$$

Напряженность $\vec{E}$ направлена вдоль оси — z и не зависит от координат точки. Это означает, что поле внутри шара однородное.

На рис. 19.23 изображены линии вектора $\vec{D}$ и эквипотенциальные линии (картина поля) для трех случаев:

а) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен незаряженный проводящий шар (рис. 19.23, *а*);

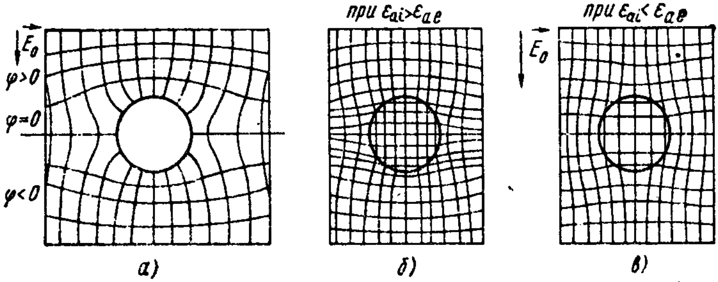


Рис. 19.23

б) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен диэлектрический шар, ε_{ai} которого больше ε_{ae} окружающей среды (рис. 19.23, *б*);

в) когда ε_{ai} диэлектрического шара меньше ε_{ae} окружающей среды (рис. 19.23, *в*).

Как известно из § 19.15, линии вектора $\vec{D}$ начинаются на свободных зарядах. Эти линии прерываются на поверхности металлического шара (см. рис. 19.23, *а*) и проходят, не прерываясь, через диэлектрический шар (см. рис. 19.23, *б* и *в*).

Если на рис. 19.23, *б* и *в* вместо линий вектора $\vec{D}$ изобразить линии вектора напряженности поля $\vec{E}$, то линии $\vec{E}$ частично претерпевали бы разрыв на поверхности шаров, так как истоком для $\vec{E}$ являются не только свободные, но и связанные заряды [см. формулу (19.21a)].

§ 19.42. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле. Аналогично формулам § 19.41 выводятся формулы, позволяющие определить потенциал и напряженность равномерного поля, возмущенного внесением в него диэлектрического цилиндра (ось цилиндра перпендикулярна $\vec{E}_0$).

Пусть напряженность $\vec{E}_0$ равномерного (до внесения цилиндра) поля направлена параллельно оси x декартовой системы (рис. 19.24, *а*). Поместим в это поле *диэлектрический цилиндр* так, чтобы ось цилиндра совпала с осью z.

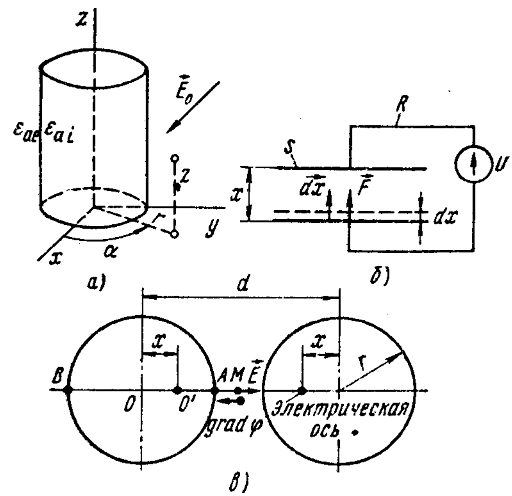


Рис. 19.24

Решая уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат, получим следующие формулы для определения потенциала внутри цилиндра (φ_i) и вне цилиндра (φ_e):

$$\varphi_i = -\frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ai}+\varepsilon_{ae}} E_0 r\cos\alpha = -\frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ai}+\varepsilon_{ae}} E_0 x; \quad (19.70)$$

$$\varphi_e = E_0\left(\frac{\varepsilon_{ai}-\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ai}+\varepsilon_{ae}}\,\frac{a^2}{r} - r\right)\cos\alpha. \quad (19.71)$$

Напряженность равномерного поля внутри цилиндра, направленная по оси x,

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ai}+\varepsilon_{ae}} E_0. \quad (19.72)$$

В заключение отметим, что если в равномерное поле напряженностью E_0 внести *проводящий цилиндр* радиусом a, расположив его так, что продольная ось его будет перпендикулярна E, то потенциал в области вне цилиндра $\varphi_e = E_0\,(a^2/r - r)\cos\alpha$.

§ 19.43. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях. В литературе можно встретить термины «плоскопараллельное», «плоскомеридианное» и «равномерное» поля *.

* Физики и математики в термин «поле» вкладывают свое («профессиональное») содержание. Когда говорят о поле в физическом смысле (электромагнитном, гравитационном, тепловом, поле ядерных сил), то под ним понимают вид материи. Когда о поле говорится в математическом смысле, то имеется в виду поле величины, которой оно описывается. С чисто математической точки зрения поля могут быть векторные и скалярные, вихревые и безвихревые, плоскопараллельные, плоскомеридианные, осесимметричные и др.

Под *плоскопараллельным полем* понимают поле, картина которого (т. е. совокупность силовых и эквипотенциальных линий) повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных какой-либо одной оси декартовой системы координат, т. е. в плоскопараллельном поле картина поля не зависит от какой-либо одной координаты декартовой системы.

В качестве примера плоскопараллельного поля можно назвать поле двухпроводной линии (двух параллельных проводов). Если ось z декартовой системы направить вдоль оси одного из проводов, то потенциал φ не будет зависеть от координаты z.

Под *плоскомеридианным полем* понимают поле, картина которого повторяется во всех меридианных плоскостях, т. е. картина поля не зависит от координаты α цилиндрической или сферической системы координат. В литературе встречается еще определение плоскомеридианного поля как поля, образованного телами вращения с общей осью.

В качестве примера плоскомеридианного поля можно назвать поле, образованное внесением металлического шара в равномерное до внесения шара поле (см. рис. 19.23), или поле диполя, о котором идет речь в примере 197. В обоих случаях потенциал зависит только от радиуса R и угла θ сферической системы координат, но не зависит от угла α.

Частным случаем плоскомеридианного поля является поле, в котором потенциал зависит только от какой-либо одной координаты сферической или цилиндрической системы координат.

В *равномерном поле* напряженность одинакова во всех точках поля, т. е. величина ее не зависит от координат точки.

Равномерное поле образуется, например, между обкладками плоского конденсатора, если в пространстве между ними отсутствуют свободные заряды и если пренебречь искажающим влиянием краев конденсатора.

Следует иметь в виду, что большинство встречающихся на практике полей не обладает ни одним из перечисленных видов симметрии и потому не может быть отнесено ни к плоскопараллельному, ни к плоскомеридианному, ни к равномерному полям.

§ 19.44. Графическое построение картины плоскопараллельного поля. Аналитический расчет полей часто вызывает затруднения, например, когда поверхности электродов имеют сложную форму.

В этом случае картину поля строят графически. С этой целью сначала выясняют, не обладает ли изучаемое поле симметрией. Если она имеется, то картину поля строят только для одной из областей симметрии. Так, картина поля, образованного двумя проводящими взаимно перпендикулярными относительно тонкими пластинками (электродами), построена на рис. 19.25, *а* только для верхней полуплоскости (в нижней полуплоскости картина повторяется).

При построении руководствуются следующими правилами: 1) силовые линии должны подходить к поверхностям электродов перпендикулярно; 2) силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны и образовывать подобные ячейки поля (криволинейные прямоугольники), для которых отношение средней длины ячейки a к средней ширине этой ячейки b для всех ячеек должно быть приблизительно одинаковым, т. е. $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots$.

Если число ячеек в силовой трубке обозначить n, а число трубок m (в примере $n = 8$, $m = 2\times 10$), то при соблюдении перечисленных правил разность потенциалов между соседними эквипотенциалями будет одинакова и равна $\Delta U = U/n$, где U — напряжение между электродами, а поток ΔN вектора $\vec{D}$ в каждой силовой трубке будет такой же, что и в соседней. Обозначим длину электродов в направлении, перпендикулярном рисунку, через l. Тогда

$$\Delta N = b_1 l E_1 \varepsilon_a = b_2 l E_2 \varepsilon_a = \ldots = b_n l E_n \varepsilon_a.$$

Отсюда

$$E_1 = \frac{\Delta N}{b_1 l \varepsilon_a}; \quad E_2 = \frac{\Delta N}{b_2 l \varepsilon_a} \ldots$$

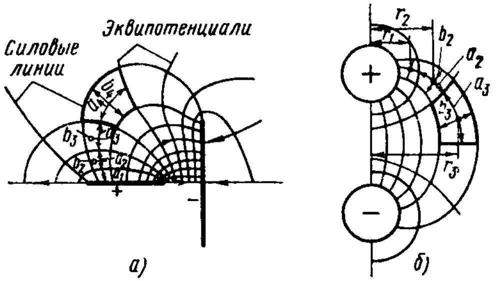


Рис. 19.25

Напряжение между электродами $U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \ldots + E_n a_n$. Подставим в последнее выражение значения напряженностей поля $E_1 \div E_n$ и учтем, что по построению $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_n/b_n = a/b$. Получим $U = \frac{\Delta N}{\varepsilon_a l}\frac{an}{b}$.

Поток в одной силовой трубке $\Delta N = \frac{U\varepsilon_a lb}{an}$.

Правая часть формулы для ΔN одинакова для всех силовых трубок, поэтому одинаковы и потоки вектора $\vec{D}$ во всех силовых трубках. Через все m силовых трубок поток вектора $\vec{D}$ будет в m раз больше и по теореме Гаусса он должен быть равен заряду Q на электроде $Q = m\,\Delta N = \frac{U\varepsilon_a lbm}{an}$. Емкость между электродами $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_a lbm}{an}$.

§ 19.45. Графическое построение картины плоскомеридианного поля. В плоскомеридианном поле силовые линии также должны подходить к поверхностям электродов под прямым углом, а силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны. Однако в отличие от плоскопараллельного поля в образующихся при построении ячейках поля в меридианной плоскости отношение a_k к b_k неодинаково для всех ячеек, а зависит от расстояния r_k центра этой ячейки до оси вращения.

На рис. 19.25, *б* изображена часть картины поля между двумя шарами. Каждая силовая линия при вращении вокруг общей оси образует поверхность вращения, а каждая силовая трубка занимает пространство между смежными поверхностями вращения.

Обозначим: a_k —длина ячейки вдоль силовой трубки; b_k — ширина ячейки; n — число ячеек вдоль силовой трубки; m — число силовых трубок. Запишем условие равенства потока вектора $\vec{D}$ через ячейки силовой трубки: $\Delta N = 2\pi r_1 \times b_1 \varepsilon_a E_1 = 2\pi r_2 b_2 \varepsilon_a E_2 = \ldots$ Напряжение между электродами $U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \ldots + E_n a_n = \frac{\Delta N}{2\pi\varepsilon_a}[a_1/(b_1 r_1) + a_2/(b_2 r_2) \ldots + a_n/(b_n r_n)]$.

Для того чтобы слагаемые в скобке по величине были одинаковы, при построении должно быть выдержано соотношение $\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}r_{k-1}}=\frac{a_k}{b_k r_k}$, т. е. с увеличением расстояния центра ячейки от оси вращения отношение a_k/b_k должно возрастать. Если это соотношение выдержано, то

$$U=\frac{\Delta N}{2\pi\varepsilon_a}\,\frac{a_k n}{b_k r_k};\quad \Delta N=\frac{2\pi\varepsilon_a U b_k r_k}{n a_k}.$$

Полный поток $N = m\Delta N = Q$, где Q — заряд на одном теле. Емкость между телами $C = Q/U = N/U = \frac{m b_k}{n a_k} r_k 2\pi\varepsilon_a$.

§ 19.46 Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате. Положим, что в некоторый момент времени напряжение на конденсаторе равно u. При увеличении напряжения на конденсаторе на du заряд на одной из пластин конденсатора увеличится на dQ, а на другой — на значение— dQ; $dQ = Cdu$, где C — емкость конденсатора.

Для переноса заряда dQ источник энергии должен совершить работу, равную $udQ = Cudu$, которая затрачивается на создание электрического поля в конденсаторе.

Энергия, доставленная источником при заряде конденсатора от напряжения $u = 0$ до напряжения $u = U$ и перешедшая в энергию электрического поля конденсатора, $W_э = C\int\limits_0^U udu = CU^2/2 = Q^2/2C$.

Рассмотрим вопрос об объемной плотности энергии электрического поля. Для этого возьмем плоский конденсатор и положим, что расстояние между пластинами его равно x, а площадь каждой пластины с одной стороны равна S. Диэлектрическая проницаемость среды между пластинами ε_a. Напряжение между пластинами U. Пренебрежем искажающим влиянием краев конденсатора на поле между пластинами. При этом условии поле можно считать равномерным. Напряженность электрического поля по модулю $E = U/x$. Вектор электрической индукции по модулю $D = \varepsilon_a E = Q/S$. Емкость плоского конденсатора $C = (\varepsilon_a S)/x$. Для нахождения объемной плотности энергии электрического поля разделим энергию $W_э = CU^2/2 = (\varepsilon_a S U^2)/2x$ на объем $V = Sx$, «занятый полем». Получим $W_э/V = \varepsilon_a E^2/2 = ED/2$.

Таким образом, объемная плотность энергии электрического поля равна $\frac{\varepsilon_a E^2}{2}$.

Если поле неравномерно, то напряженность будет изменяться при переходе от одной точки поля к соседней, но объемная плотность энергии поля будет по-прежнему равна $\varepsilon_a E^2/2$, так как в пределах бесконечно малого объема поле можно считать равномерным.

Выделим в поле элементарный объем dV. Энергия в этом объеме равна $\frac{\varepsilon_a E^2}{2}dV$. Энергия, заключенная в объеме V любых размеров, равна $\int\limits_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2}dV$.

В электрическом поле между заряженными телами действуют механические силы и их можно выразить в виде производной от энергии поля по изменяющейся координате. На рис. 19.24, *б* изображен плоский конденсатор, который присоединен к источнику напряжения U. В соответствии с предыдущим расстояние между пластинами назовем x, а площадь пластины — S. На каждую пластину конденсатора действует сила F. Под действием этих сил пластины конденсатора стремятся сблизиться. Сила, действующая на нижнюю пластину, направлена вверх, на верхнюю пластину — вниз.

Положим, что под действием силы F нижняя пластина медленно, теоретически бесконечно медленно, переместилась вверх на расстояние dx и приняла положение, показанное пунктиром на рис. 19.24, *б*. Составим уравнение для баланса энергии при таком перемещении пластин. На основании закона сохранения энергии доставленная источником питания энергия $dW_и$ должна равняться сумме трех слагаемых: 1) работе силы F на расстоянии dx: $\vec{F}\,\vec{dx} = F dx$; 2) изменению энергии электрического поля конденсатора $dW_э$; 3) тепловым потерям от тока i, который протекает по проводам сопротивлением R в течение времени от 0 до ∞:

$$dW_и = F\,dx + dW_э + \int_0^\infty Ri^2\,dt.$$

Так как по условию проведения эксперимента пластина конденсатора перемещается вверх теоретически бесконечно медленно, то изменение зарядов на пластинах также происходит весьма медленно, а следовательно, и проходящий через конденсатор ток смещения бесконечно мал. Другими словами, тепловыми потерями $\int_0^\infty Ri^2 dt$ в силу их малости в уравнении энергетического баланса можно пренебречь и тогда $dW_и = Fdx + dW_э$. Отсюда сила $F = \dfrac{d\,(W_и - W_э)}{dx}$.

Таким образом, силу можно выразить в виде производной от разности энергий $(W_и - W_э)$ по изменяющейся координате x.

В общем случае при перемещении пластины могут измениться и напряжение между пластинами U и заряд Q.

Рассмотрим теперь два характерных частных случая перемещения пластины конденсатора. В первом конденсатор отсоединен от источника напряжения и перемещение пластины происходит при неизменных зарядах на пластинах. Во втором перемещении пластины происходит при неизменном напряжении U между пластинами (конденсатор присоединен к источнику неизменного напряжения U).

Первый случай. Так как конденсатор отсоединен от источника энергии, то последний энергии не доставляет и потому $dW_и = 0$. При этом $F = -\dfrac{dW_и}{dx}$.

Таким образом, сила, действующая на пластину, равна взятой с обратным знаком производной от энергии электрического поля конденсатора по изменяющейся координате. Знак «—» свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае работа силы производится за счет убыли энергии в электрическом поле конденсатора.

Если учесть, что энергия электрического поля конденсатора $W_э = Q^2/2C = Q^2x/(2\varepsilon_a S)$, то сила F по модулю $(dW_э)/dx = Q^2/(2\varepsilon_a S) = \varepsilon_a\ E^2S/2$.

Второй случай. Энергия, доставляемая источником питания при $U = \text{const}$ $dW_и = UdQ = U^2dC$, где dC — приращение емкости, вызванное уменьшением расстояния между пластинами на величину dx.

Изменение энергии электрического поля конденсатора $dW_э = d\left(\dfrac{CU^2}{2}\right) = \dfrac{U^2}{2}dC$. Разность $dW_и - dW_э = U^2dC - \dfrac{(U^2dC)}{2} = dW_э$.

Поэтому во втором случае $F = \dfrac{dW_э}{dx} = \dfrac{1}{2}\,U^2\dfrac{dC}{dx}$. Таким образом и во втором случае сила равна производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате.

Емкость $C = \varepsilon_a\ S/x$, поэтому $\dfrac{dC}{dx} = -\dfrac{\varepsilon_a S}{x^2}$; $F = \dfrac{1}{2}\ \varepsilon_a S\left(\dfrac{U}{x}\right)^2 = \dfrac{(\varepsilon_a ES)}{2}$.

Сила, действующая на пластину конденсатора во втором случае, равна силе, действующей на пластину конденсатора в первом случае. На единицу поверхности конденсатора действует сила $F/s = \varepsilon_a E^2/2$. Обратим внимание на то, что величина $\varepsilon_a E^2/2$ выражает собой не только плотность энергии электрического поля, но и численно равна силе, действующей на единицу поверхности пластины конденсатора. Действующие на пластины конденсатора силы можно рассматривать как результат проявления сил продольного сжатия (вдоль силовых трубок) и сил бокового распора (поперек силовых трубок). Силы продольного сжатия стремятся укоротить силовую трубку, а силы бокового распора — расширить ее. На единицу боковой поверхности силовой трубки действует сила, численно равная $\varepsilon_a E^2/2$. Эти силы проявляются не только в виде сил, действующих на пластины конденсатора, но также в виде сил на границе раздела двух диэлектриков. В этом случае на границе раздела действует сила, направленная в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

§ 19.47. Энергия поля системы заряженных тел. Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ и заряды $q_1 \ldots q_n$:

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi_k. \tag{а}$$

Вывод формулы основан на том, что энергия поля равна работе внешних сил, затраченной на перенос зарядов из бесконечности (где $\varphi = 0$) в точки поля, в которых они будут находиться, и на принципе наложения. Используя формулу (19.48), сначала находим работу при переносе заряда q_1, полагая, что заряды всех остальных тел равны нулю. Затем находим работу при переносе заряда q_2, полагая $q_1 = \text{const}$ и $q_3 = q_4 = q_n = 0$ и т. д. Суммируя все работы, получаем формулу (а).

Заметим, что заряды на проводящих телах, находящихся в диэлектрике, всегда распределяются по поверхностям этих тел так, что энергия образовавшегося между этими телами электрического поля минимальна (теорема Томсона).

Пример 181. Два провода диаметром 10 мм расположены в воздухе параллельно друг другу (см. рис. 19.24, *в*). Расстояние между осями проводов $d = 20$ мм. Заряд каждого провода на метр длины 10^{-8} Кл. Левый провод несет положительный заряд, правый — отрицательный. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на поверхности провода.

Решение. Находим положение электрических осей: $x = 1{,}35$ мм. Плотность заряда на поверхности металла $\sigma = D = \varepsilon_a^* E$. Следовательно, σ будет больше там, где E больше.

Если учесть, что напряженность поля, создаваемая положительным зарядом, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемая отрицательным зарядом, направлена к заряду, то ясно, что наибольшая напряженность поля будет в точке A, наименьшая — в точке B. Напряженность поля в точке A равна сумме напряженности от обоих зарядов, а в точке B — разности напряженностей:

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_a l (r - x)} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_a l (d - r - x)};$$

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_a l}\left(\frac{1}{r + x} - \frac{1}{d + r - x}\right).$$

Отсюда $D_A = \sigma_A = \varepsilon_a E = 0{,}544$ мкК/м², $D_B = \sigma_B = \varepsilon_a E_B = 0{,}186$ мкК/м².

Таким образом, плотность заряда в точке A в 2,92 раза больше, чем плотность заряда в точке B.

---

* Для воздуха $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ($\varepsilon_r = 1$).

Найдем градиент потенциала в точке M (расположенной посередине между проводами на линии, соединяющей их центры).

Решение. Так как $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то модуль $\operatorname{grad}\varphi$ равен модулю E, а направление $\operatorname{grad}\varphi$ противоположно направлению $\vec{E}$. В точке M

$$\dot{E}_M = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_a l}\left(\frac{1}{d/2-x}+\frac{1}{d/2-x}\right) = \frac{10^{-8}\cdot 2}{2\pi\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 0{,}00865} = $$
$$= 41\,600 \text{ В/м}.$$

Направления $\vec{E}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ даны на рис. 19.24, *в*.

Пример 182. Определить частичные емкости на один метр длины двухпроводной линии и вывести формулу для определения емкости между проводами *1* и *2*. Геометрические размеры (в метрах) см. на рис. 19.26, *а*. Радиусы проводов 6 мм.

Решение. В соответствии с формулой (19.48):

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2; \quad \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_1\beta_{11} + \varphi_2\beta_{12}.$$

Здесь

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = U_1(\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12}U_{12} =$$
$$= U_1 C_{11} + U_{12} C_{12} \quad (\varphi_1 = U_1).$$

Следовательно, для двухпроводной линии:

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = (\alpha_{22} - \alpha_{12})/\Delta; \quad C_{12} = -\beta_{12} = \alpha_{12}/\Delta.$$

Аналогичным путем найдем:

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = (\alpha_{11} - \alpha_{12})/\Delta.$$

По формуле (19.48а) найдем:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2h_1}{r} = 12{,}4\cdot 10^{-10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2h_2}{r} = 12{,}9\cdot 10^{-10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}} = 2{,}9\cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 151{,}6\cdot 10^{20} \text{ м}^2/\text{Ф}^2;$$

$$C_{11}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\Delta}=0{,}659\cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м};$$

$$C_{22}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\Delta}=0{,}626\cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м};$$

$$C_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\Delta}=0{,}191\cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м}.$$

Рабочая емкость между проводами *1* и *2* $C_p=C_{12}+\dfrac{C_{11}C_{22}}{C_{11}+C_{22}}$.

Пример 183. Провод *1* примера 182 соединен с землей через источник э. д. с. $E = 127$ В. Провод *2* соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю (рис. 19.26, *в*). Определить заряды на проводах *1* и *2* на один погонный метр.

Решение. Из формулы (19.49) при $\varphi_2 = 0$ следует, что

$$\tau_1=\varphi_1\beta_{11}\ \text{ и }\ \tau_2=\varphi_1\beta_{12};\ \beta_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\Delta}=\frac{12{,}9\cdot 10^{10}}{151{,}6\cdot 10^{20}}=0{,}852\cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м};$$

$$\beta_{12}=-C_{12}=-0{,}191\cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м}.$$

Заряд первого провода $\tau_1 = 127\cdot 0{,}852\cdot 10^{-11} = 1{,}08\cdot 10^{-9}$ Кл/м.
Заряд второго провода $\tau_2 = -0{,}191\cdot 10^{-11}\cdot 127 = -0{,}242\cdot 10^{-9}$ Кл/м.

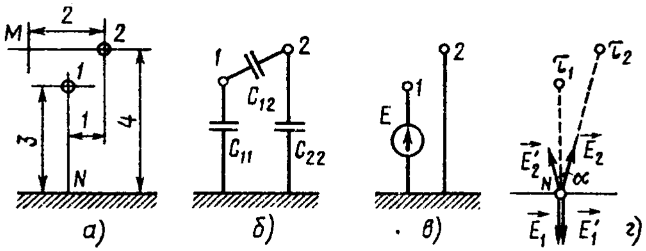


Рис. 19.26

Пример 184. Заряд τ_1 на единицу длины провода *1* (см. рис. 19.26, *а*) равен $2\cdot 10^{-9}$ Кл/м. Заряд τ_2 на единицу длины провода *2* равен 10^{-9} Кл/м. Определить потенциал точки *M*, полагая потенциал земли равным нулю.

Решение.

$$\varphi_M=\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{1M}}{a_{1M}}+\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{2M}}{a_{2M}}=\frac{2\cdot 10^{-9}}{2\pi\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{7^2+1^2}}{\sqrt{2}}-$$

$$-\frac{10^{-9}}{2\pi\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{8^2+2^2}}{2}=30{,}6\ \text{В}.$$

Пример 185. Определить плотность наведенного заряда на поверхности земли в точке *N* (рис. 19.26, *а*), полагая, что заряды на проводах такие же, как и в примере 184.

Решение. В соответствии с формулой (19.33) плотность заряда на поверхности проводника равна напряженности в этой точке, умноженной на $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Напряженность поля в точке N (рис. 19.26, *г*) равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов — от заряда τ_1 (обозначим ее E_1), от заряда τ_2 (E_2) и зеркальных изображений этих зарядов (E_1' и E_2'): $\vec{E}\,\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_1' + \vec{E}_2'$.

Напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_1'$ направлены по одной прямой (по вертикали). Для нахождения проекций $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_2'$ на вертикаль умножаем E_2 и E_2' на $\cos\alpha$. Плотность заряда

$$\sigma = 2\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_a h_1}\varepsilon_a - 2\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_a\sqrt{h_2^2+a^2}}\varepsilon_a\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+a^2}} = 0{,}1375\cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}^2.$$

$$a = 1;\quad h_2 = 4\ \text{м}.$$

Пример 186. Две металлические пластинки (теоретически бесконечной протяженности), находясь в воздухе (рис. 19.27, *а*), образуют, не соприкасаясь, двугранный угол α_2. Потенциал первой пластины φ_1, второй φ_2. Вывести формулы для определения φ и E в любой точке поля внутри двугранного угла, а также формулу для определения плотности заряда на пластинках. Дать числовой ответ при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 100$ В, $\alpha_2 = 30°$.

Решение. Поскольку граничные поверхности проще всего можно описать в цилиндрической системе координат, то решение будем проводить именно в этой системе. В пространстве между пластинами отсутствуют свободные заряды, поэтому поле подчиняется уравнению Лапласа [см. уравнение (19.30)].

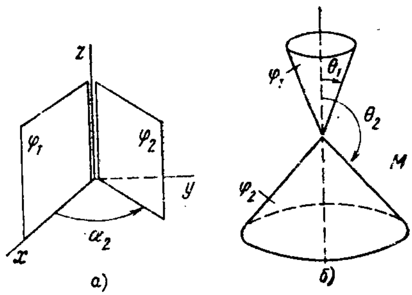


Рис. 19.27

Потенциал φ зависит только от угла α и из условий симметрии не зависит от координаты z и радиуса r цилиндрической системы координат. Поэтому $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0$.

Согласно этому уравнению, $\varphi = C_1\alpha + C_2$. По условию, при $\alpha = 0$ $\varphi = \varphi_1 = 0$, а при $\alpha = \alpha_2$ $\varphi = \varphi_2 = 100$ В. Следовательно, $C_2 = 0$; $C_1 = \frac{100}{\pi/6} = 600\,\pi$ и $\varphi = \frac{600}{\pi\alpha}$.

Напряженность поля имеет только одну альфовую составляющую: $E_\alpha = -\frac{d\varphi}{r\,d\alpha} = -\frac{C_1}{r} = -\frac{600}{\pi r}$ В/м.

Плотность заряда $\sigma = D = \varepsilon_0 E_a = -\frac{600\varepsilon_0}{\pi r}$. Например, при $r = 2$ см; $\sigma = D = -8{,}48\cdot 10^{-8}$ Кл/м^2.

Пример 187. Две металлические конусообразные воронки находятся в воздухе, обращены остриями друг к другу и не соприкасаются (рис. 19.27, *б*). Угол $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 135°$, потенциал первой воронки $\varphi_1 = 0$, потенциал второй воронки $\varphi_2 = 1000$ В. Вывести формулу для определения φ и E в пространстве между воронками и найти по ним E и φ в точке M с координатами $R = 2$ см и $\theta = 120°$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся сферической системой координат, поскольку поверхности воронок проще всего описываются именно в этой системе. В пространстве между воронками отсутствует объемный заряд, поэтому поле описывается уравнением Лапласа [см. формулу (19.31)].

В силу симметрии φ зависит только от угла θ и не зависит от радиуса R и угла α — двух остальных координат сферической системы. Таким образом, $\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta}\right) = 0$, откуда $\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C_1$, $\varphi = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$.

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2. При $\theta = 30°$ $\varphi = 0$, при $\theta = 135°$ $\varphi = 1000$ В. Следовательно, $0 = C_1 \ln \operatorname{tg} 15° + C_2$; $1000 = C_1 \ln \operatorname{tg} 67°30' + C_2$. Отсюда $C_1 = 461$ В, $C_2 = 608$ В. Потенциал точки M: $\varphi_M = 461 \ln \operatorname{tg} 60° + 608 = 856{,}5$ В. Напряженность поля имеет только θ-составляющую:

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{R d\theta} = -\frac{C_1}{R \sin\theta}.$$

Напряженность в точке M: $E_{\theta M} = -\frac{461}{0{,}02 \sin 120°} = -26{,}6$ кВ/м.

Пример 188. В вакууме на расстоянии 2 см друг от друга расположены два плоских электрода (рис. 19.28). Правый электрод заземлен, а левый соединен с плюсом батареи, э. д. с. которой 220 В; отрицательный зажим батареи заземлен. В пространстве между электродами распределен объемный заряд с плотностью $\rho = -a\varepsilon_0 x$, где $a = 30$ кВ/см^3; x — расстояние от левой пластины (см. рис. 19.28). Требуется найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами.

Р е ш е н и е. Полагаем, что размеры электродов много больше расстояния между ними. Направляем ось x, как показано на рис. 19.28.

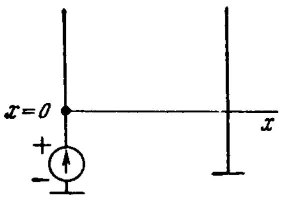


Рис. 19.28

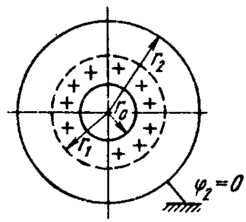


Рис. 19.29

Потенциал зависит только от x; от y и z он в данной задаче не зависит. Следовательно, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = ax$.

Производим двукратное интегрирование по x: $d\varphi/dx = ax^2/2 + C_1$ и $\varphi = ax^3/6 + C_1 x + C_2$. Определим постоянные интегрирования из граничных условий: при $x = 0$ $\varphi = 200 = C_2$; при $x = 2$ $\varphi = 0 = 200 + 2C_1 + (30 \cdot 8 \cdot 10^3)/6$; $C_1 = -20\,100$ В/см.

Следовательно, $\varphi = (30 \cdot 10^3\ x^3)/6 - 20\,100x + 200 = 5000x^3 - 20\,100x + 200$ В.

Пример 189. В цилиндрическом конденсаторе с воздушной изоляцией вокруг внутреннего электрода радиусом r_0 располагается заряд короны с объемной плотностью ρ К/см³. Наружный радиус короны r_1 (рис. 19.29). Радиус наружного электрода r_2. Потенциал внутреннего электрода φ_0, потенциал наружного электрода φ_2.

Вывести формулу для определения φ в пространстве, занятом объемными зарядами (назовем его областью I), и в пространстве, не занятом свободными зарядами (область II).

Решение. В области I:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_{\text{I}}}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Двукратное интегрирование по r дает

$$\varphi_{\text{I}}=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}+C_1\ln r+C_2.$$

В области II:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_{\text{II}}}{dr}\right)=0 \text{ и } \varphi_{\text{II}}=C_3\ln r+C_4.$$

Составим четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4).

При $r=r_0$ $\varphi_{\text{I}}=\varphi_0$; поэтому

$$\varphi_0=-\frac{\rho r_0^2}{4\varepsilon_0}+C_1\ln r_0+C_2. \tag{а}$$

При $r=r_1$ $\varphi_{\text{I}}=\varphi_{\text{II}}$, следовательно,

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\varepsilon_0}+C_1\ln r_1+C_2=C_3\ln r_1+C_4. \tag{б}$$

При $r=r_2$ $\varphi_{\text{II}}=0$; тогда

$$0=C_3\ln r_2+C_4. \tag{в}$$

При $r=r_1$ равны нормальные составляющие вектора электрического смещения D:

$$\varepsilon_0(d\varphi_{\text{I}}/dr)_{r=r_1}=\varepsilon_0(d\varphi_{\text{II}}/dr)_{r=r_0} \text{ или}$$

$$C_3=C_1-\rho r_1^2/2\varepsilon_0. \tag{г}$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в), (г), которое опущено, дает

$$C_1=\left[\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(r_1^2-r_0^2)+\frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}-\varphi_0\right]\Big/\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Далее определяем C_3 из уравнения (г), C_4 из (в) и C_2 из (а).

Пример 190. Над поверхностью земли расположилось положительно заряженное грозовое облако. Пространство между облаком и землей можно рассматривать как огромных размеров плоский конденсатор. Напряженность поля $\vec{E}$ в нем направлена от облака к земле. Найти потенциал точки A, расположенной на расстоянии 8 м от поверхности земли, в двух случаях: 1) когда над поверхностью земли не протянут заземленный трос (рис. 19.30) и 2) когда над поверхностью земли над точкой A на высоте 10 м от земли протянут заземленный стальной трос диаметром 10 мм (рис. 19.31).

Решение. В случае отсутствия троса (режим I): $\varphi_A^{\text{I}} = Eh_A$, где $h_A = 8$ м.

При наличии троса (режим II) потенциал в точке A создается не только равномерным полем «плоского конденсатора», но и зарядом на тросе $q_{\text{тр}}$: $\varphi_A^{\text{II}} = Eh_A + q_{\text{тр}}\alpha_{12}$.

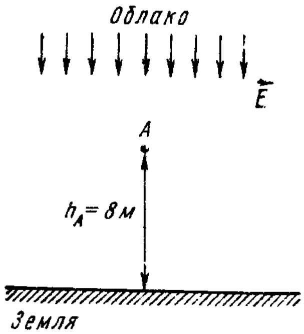


Рис. 19.30

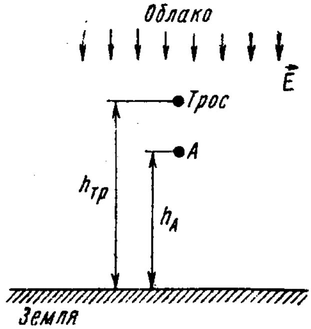


Рис. 19.31

Здесь через α_{12} обозначен потенциальный коэффициент: $\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{10+8}{2}$.

Составим уравнение для определения заряда троса: $\varphi_{\text{тр}} = Eh_{\text{тр}} + q_{\text{тр}}\alpha_{11} = 0$. Следовательно, $q_{\text{тр}} = -\frac{Eh_{\text{тр}}}{\alpha_{11}}$ и $\varphi_A^{\text{II}} = E\left(h_A - h_{\text{тр}}\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)$.

Изменение потенциала в точке A, отнесенное к значению потенциала в точке A до появления троса:

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_A^{\text{I}}} = \frac{\varphi_A^{\text{I}} - \varphi_A^{\text{II}}}{\varphi_A^{\text{I}}} = \frac{E\left\{h_A - \left(h_A - h_{\text{тр}}\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)\right\}}{Eh_A} = \frac{10\cdot 0{,}251}{8} = 0{,}313;$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln\frac{18}{2}}{\ln 4000} = \frac{2{,}08}{8{,}3} = 0{,}251.$$

Пример 191. В равномерное поле с напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м внесен незаряженный металлический шар радиусом $a = 1$ см. Найти E_R и E_θ в точке A. Координаты точки A : $R = 2$ см и $\theta = 30°$.

Решение. В соответствии с формулами § 19.40 имеем:

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -E_0\cos\theta\,(1 + 2a^3/R^3) =$$
$$= -10^6\cdot 0{,}866\,(1 + 2/8) = -1{,}082\cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} = E_0\sin\theta\,(1 - a^3/R^3) = 10^6\cdot\frac{1}{2}(1 - 1/8) = 0{,}4375\cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Результирующая напряженность поля по модулю:

$$E=\sqrt{E_R^2+E_\theta^2}=1{,}168\cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Пример 192. В воздухе создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м. В это поле поместили диэлектрический цилиндр ($\varepsilon_{ai} = 4\varepsilon_0$) так, что его ось перпендикулярна полю. Найти напряженность поля E_i внутри цилиндра.

Решение. Воспользуемся формулой (19.72):

$$E_i=E_0\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_{ai}+\varepsilon_0}=10^3\frac{2\cdot 1}{4+1}=4\cdot 10^2 \text{ кВ/м}.$$

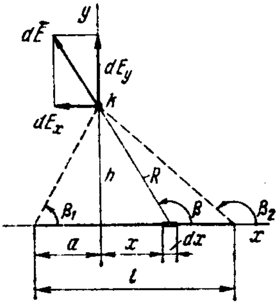


Рис. 19.32

Пример 193. В некоторой области пространства имеется поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы: $\varphi = 5x^3 - 60x^2$.

Найти закон изменения плотности свободных зарядов в этом поле.

Решение. Уравнение Пуассона, описывающее поле, можно записать так: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_a}$. Дважды дифференцируем φ по x:

$$\frac{d\varphi}{dx}=15x^2-120x;\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=30x-120.$$

Следовательно, $\rho_{своб} = (-30x + 120)\,\varepsilon_a$.

Пример 194. Вывести формулу для определения напряженности и потенциала поля, создаваемого заряженной осью длиной l (рис. 19.32). Заряд на единицу длины оси равен τ.

Решение. Определим E и φ в произвольной точке k. Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рис. 19.32. Выделим отрезок оси длиной dx, на нем будет заряд τdx. В силу малости dx будем считать этот заряд точечным и по теореме Гаусса найдем создаваемую им напряженность поля в точке k: $dE = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_a R^2}$. Проекция $d\vec{E}$ на ось x $dE_x = dE\cos(180-\beta) = \frac{-\tau\cos\beta dx}{4\pi\varepsilon_a R^2}$.

Угол β отсчитываем от положительного направления dx к положительному направлению радиуса R (последний направлен от dx к точке k).

Проекция $d\vec{E}$ на ось y: $dE_y = dE\sin(180-\beta) = \frac{\tau\sin\beta dx}{4\pi\varepsilon_a R^2}$. Заменим:

$$R=\frac{h}{\sin\beta};\quad x=-h\operatorname{ctg}\beta;\quad dx=\frac{h d\beta}{\sin^2\beta};$$

$$E_x=\frac{-\tau}{4\pi\varepsilon_a h}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta d\beta=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a h}(\sin\beta_1-\sin\beta_2);$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a h} \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a h} (\cos\beta_1 - \cos\beta_2);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Составляющая потенциала в точке k от точечного заряда τdx:

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_a R} = \frac{\tau d\beta}{4\pi\varepsilon_a \sin\beta};$$

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sin\beta} = -\mathrm{Arsh}(\mathrm{ctg}\,\beta)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a}\left(\mathrm{Arsh}\frac{l-a}{h} + \mathrm{Arsh}\frac{a}{h}\right).$$

§ 19.48. Метод средних потенциалов. Как уже говорилось, в электростатическом поле, образованном системой заряженных проводящих тел, все точки поверхности каждого тела имеют одинаковый потенциал, а поверхностная плотность зарядов τ в общем случае изменяется от точки к точке.

В тех случаях, когда неравномерность распределения зарядов по поверхности тела невелика, для подсчета емкостей иногда пользуются методом средних потенциалов (приближенный метод). В его основу положено заведомо неправильное предположение, что на поверхности каждого тела заряды распределены с одинаковой плотностью, а различные точки одного и того же проводящего тела имеют неодинаковые потенциалы. Это предположение дает возможность относительно легко найти среднее значение потенциала $\varphi_{ср}$ тела и по известному заряду тела найти его емкость. Результат оказывается близким к истинному.

Пример 195. Определить емкость уединенного прямого проводника длиной l и радиусом r.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для потенциалов произвольной точки k, полученной в примере 194. Сосредоточим заряд на оси провода с плотностью τ на единицу длины и поместим точку k (рис. 19.32) на поверхность провода (т. е. примем $h = r$). Тогда

$$\varphi_{ср} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a}\frac{1}{l}\int\limits_0^l \left(\mathrm{Arsh}\frac{l-a}{r} + \mathrm{Arsh}\frac{a}{r}\right)da = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\frac{1}{l}\int\limits_0^l \mathrm{Arsh}\frac{a}{r}\,da.$$

$$\int \mathrm{Arsh}\,x dx = x\,\mathrm{Arsh}\,x - \sqrt{1+x^2};$$

$$\varphi_{ср} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\left[\mathrm{Arsh}\frac{l}{r} - \sqrt{1+(r/l)^2} + r/l\right].$$

По определению (см. § 12.29), заряд уединенного тела $\tau l = \varphi_{ср} C$. Поэтому емкость уединенного цилиндрического провода: $C = 2\pi\varepsilon_a l\left[\mathrm{Arch}\frac{l}{r} - \sqrt{1+\left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l}\right]^{-1}$. Выражение в квадратных скобках можно упростить. Так как $\mathrm{Arsh}\,x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, а при $x \gg 1$ $\mathrm{Arsh}\,x \approx \ln 2x$, то при $l/r \gg 1$ скобка равна $\ln\frac{l}{r} + \ln 2 - 1$. Отсюда $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_a l}{\ln\frac{l}{r} - 0{,}307}$.

Пример 196. Вследствие неравномерного нагрева диэлектрическая проницаемость изоляции коаксиального кабеля (см. рис. 19.33) изменяется в функции радиуса r следующим образом: $\varepsilon_a = m/r$. Вывести формулы для определения напряженности электрического поля E и смещения D. Радиус жилы кабеля r_1, внутренний радиус оболочки r_2, напряжение между жилой и оболочкой U. Объемный заряд отсутствует.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой Гаусса [формула (19.20)] в дифференциальной форме [применять уравнение Лапласа в данном случае нельзя, так как оно выведено при условии, что $\varepsilon_a = \text{const}$ (см. § 19.19)]. В формуле (19.24) заменим $\vec{E}$ на $\vec{D}$ и учтем, что $\vec{D}$ имеет только одну r-составляющую и в силу симметрии не зависит от координат r и α. Будем иметь $\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rD_r) = 0$. Отсюда следует, что $rD_r = rD = C$; $D = C/r$, где C — некоторая постоянная. Таким

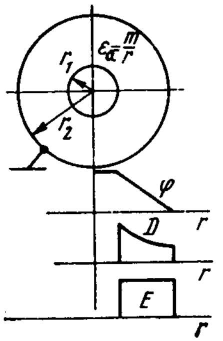


Рис. 19.33

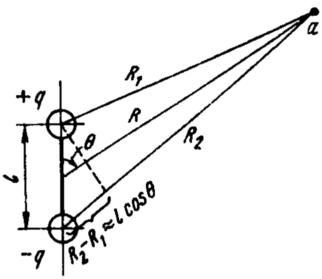


Рис. 19.34

образом, D изменяется обратно пропорционально радиусу. Напряженность поля $E = D/\varepsilon_a = C/m$ т. е. напряженность поля — величина постоянная. Определим постоянную C. Для этого воспользуемся тем, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} E dr = U \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{C}{m} dr = \frac{C}{m}(r_2 - r_1)$, отсюда $C = (mU)/(r_2 - r_1)$. Графики изменения E, D и φ см. на рис. 19.33.

Обратим внимание на то, что если бы диэлектрическая проницаемость ε_a изоляции коаксиального кабеля примера 196 была постоянной величиной (не являлась бы функцией r), то имели бы место следующие зависимости:

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad D = \varepsilon_a E; \quad \varphi = \frac{U \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

т. е. в этом случае напряженность поля была бы не постоянна, а изменялась обратно пропорционально радиусу, потенциал φ изменялся бы не линейно в функции r, а по логарифмическому закону.

Пример 197. Вывести формулы для расчета поля диполя.

Р е ш е н и е. Диполь изображен на рис. 19.34. Расстояние между зарядами обозначим через l. При решении воспользуемся сферической системой координат. Обозначим расстояние от произвольной точки a до заряда $+q$ через R_1, до заряда $-q$ — через R_2 и до середины диполя — через R. Угол между вертикалью и радиусом R равен θ. Потенциал точки a определим как потенциал в поле двух точечных зарядов:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Если $R \gg l$, то $R_1 \cdot R_2 \approx R^2$, а $R_2 - R_1 \approx l \cos\theta$; поэтому

$$\varphi \approx \frac{ql \cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2}. \tag{19.73}$$

По формулам § 19.10 найдем:

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon_a R^3}; \tag{19.74}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} = \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_a R^3}, \tag{19.75}$$

$$E_\alpha = 0;$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_a R^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \tag{19.76}$$

Таким образом, в поле диполя при $R \gg l$ потенциал φ изменяется обратно пропорционально второй, а напряженность — обратно пропорционально третьей степени расстояния R рассматриваемой точки до диполя; φ и E являются функциями угла θ.

Картина поля диполя изображена на рис. 19.35. Напряженность поля в некоторой произвольной точке a равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ от зарядов $+q$ и $-q$. Если воспользуемся сферической системой координат, то напряженность поля в той же точке a можно представить в виде суммы напряженностей $\vec{E}_R$ и $\vec{E}_\theta$; $\vec{E}_R$ направлена вдоль радиуса R; а $\vec{E}_\theta$ имеет направление θ.

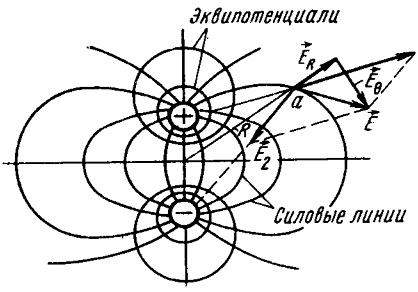


Рис. 19.35

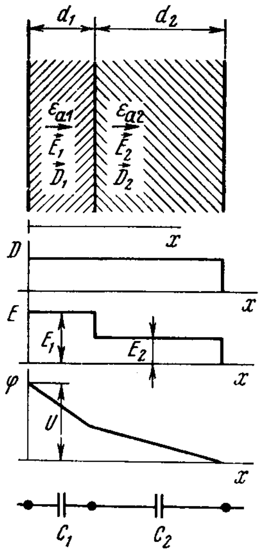


Рис. 19.36

Пример 198. Вывести формулы для определения величины напряженности поля и емкости двухслойного плоского конденсатора рис. 19.36, а также построить графики изменения модуля вектора напряженности электрического поля E, модуля вектора электрической индукции D и потенциала φ в функции расстояния x.

Толщина первого слоя диэлектрика d_1, второго — d_2. Абсолютная диэлектрическая проницаемость первого слоя ε_{a1}, второго слоя ε_{a2}. Принять $\varepsilon_{a1} = 2\varepsilon_{a2}$ и $d_2 = 1{,}5d_1$.

Решение. Все величины, относящиеся к первому слою, обозначим индексом *1*, а ко второму слою — индексом *2*. Положим, что разность потенциалов между обкладками конденсатора равна U.

Искажающее влияние краев конденсатора на поле учитывать не будем. При этом условии в каждом слое поле будет равномерным. В силу того что нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ непрерывна, имеем $D_{1n} = D_{2n}$.

Но $D_{1n} = \varepsilon_{a1}E_1$; $D_{2n} = \varepsilon_{a2}E_2$. Следовательно,

$$\varepsilon_{a1} E_1 = \varepsilon_{a2} E_2. \qquad \text{(а)}$$

Таким образом, отношение напряженностей обратно пропорционально отношению электрических проницаемостей.

Уравнение (а) связывает две пока неизвестные величины E_1 и E_2, а уравнение относительно E_1 и E_2 составим, исходя из того, что

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 \, d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \, d\vec{x} = U$$

или

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \qquad \text{(б)}$$

Совместное решение (а) и (б) дает $E_1 = \dfrac{U}{d_1 + \dfrac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} d_2}$.

Графики зависимостей D, E и φ от расстояния x изображены на рис. 19.36.

Для нормальной работы конденсатора необходимо, чтобы напряженность электрического поля ни в первом, ни во втором слоях конденсатора не достигла значения напряженности, при котором происходит пробой данного диэлектрика.

Напряженность равномерного поля, при которой происходит пробой данного диэлектрика, принято называть *электрической прочностью*. Электрическая прочность диэлектриков, особенно газообразных, сильно зависит от температуры и давления. Для воздуха она равна 30 кВ/см при нормальном атмосферном давлении и температуре 18 °С.

При выводе формулы для емкости двухслойного плоского конденсатора на границу раздела двух диэлектриков мысленно поместим бесконечно тонкий металлический листок. Эта операция вполне допустима, так как поверхность раздела диэлектриков как была эквипотенциальной поверхностью до помещения листка, так и остается ею после помещения на нее листка; причем значение потенциала ее при этом не изменится.

После проведения такой операции (ее иногда называют *способом отвердения*) емкость двухслойного конденсатора можно подсчитать как емкость двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2; C_1 — емкость первого слоя конденсатора, C_2 — емкость второго слоя конденсатора: $C_1 = \varepsilon_{a1}S/d_1$; $C_2 = \varepsilon_{a2}S/d_2$, где S — площадь одной пластины конденсатора с одной стороны.

Емкость двух последовательно включенных конденсаторов

$$C = C_1 C_2/(C_1 + C_2) = \frac{S}{d_2/\varepsilon_{a2} + d_1/\varepsilon_{a1}}.$$

§ 19.49. Электреты. *Электреты* — это поляризованные или электризованные внешним полем твердые диэлектрики, сохраняющие поляризованность или электризацию после снятия этого поля. Во внешней по отношению к ним среде они могут создавать электрическое поле, подобно тому как постоянные магниты создают магнитное поле.

Чтобы электреты по возможности дольше сохраняли свои свойства (для затруднения саморазряда), их удельное сопротивление должно быть очень велико, порядка $10^{12} - 10^{16}$ Ом·м.

Электреты изготовляют либо из неполярных диэлектриков, либо из полярных. Неполярный диэлектрик (например, пленку из политетрафторэтилена толщиной 5—20 мкм) подвергают в вакууме электронной бомбардировке (электризация внешним полем), при которой электроны внедряются в диэлектрик и захватываются там на ловушках.

Электреты из полярных диэлектриков (например, из полиметилметакрилата) получают часто термоэлектрическим способом, помещая нагретый до температуры размягчения диэлектрик во внешнее электрическое поле, а затем охлаждая его. Размягченное состояние диэлектрика способствует расположению диполей по внешнему полю.

Электреты подразделяют на электреты с гомозарядом и на электреты с гетерозарядом.

Если знак заряда на поверхности электрета, обращенной к формирующему электроду, такой же, что и у формирующего электрода, то такой заряд называют *гомозарядом*, если противоположный — *гетерозарядом*. Так как с течением времени заряды освобождаются из неглубоких ловушек, а поляризационные заряды частично компенсируются зарядами, натекающими извне, то поверхностная плотность зарядов σ со временем все же уменьшается, т. е. происходит процесс старения электретов, подобный старению постоянных магнитов. Несмотря на это, поверхностная плотность σ у упомянутых типов электретов достигает достаточно больших значений порядка 80 мкКл/м^2. При практическом использовании электретов в ксерографии, в микрофонных и телефонных цепях и при других применениях стремятся создать такие условия для их работы, чтобы линейный размер области, внешней по отношению к электрету (в которой создается им электрическое поле), был соизмерим с толщиной электретной пленки или пластинки керамического электрета. Если этого не сделать, то внешнее поле оказывается недостаточно сильным. Например, поле отдельно взятого, находящегося в воздухе электрета площадью S, толщиной a с поверхностной плотностью заряда σ определится как поле электрического диполя с электрическим моментом $\sigma S a$ и при расстояниях R от оси диполя ($R \gg \sqrt{S}$ и $R \gg a$) может быть подсчитано по формулам 19.73 — — 19,76.

В качестве иллюстрации применения электрета рассмотрим принцип работы электретного микрофона рис. 19.37, в цепи которого нет внешнего источника э.д.с.

На расстоянии b от тонкой пластинки керамического электрета (толщина ее a, площадь S и электрическая проницаемость ε_{ai}, нижняя поверхность ее металлизирована) находится тонкая проводящая мембрана площадью S. Под действием звуковой волны мембрана может колебаться в поле электрета. Заряд $q_и$, возникающий на мембране вследствие электрической индукции, изменяется при колебании мембраны и потому по контуру электрет — воздушный зазор — мембрана — соединительные провода и нагрузка (в примере нагрузка отсутствует) будет при этом протекать ток, равный $dq_и/dt$.

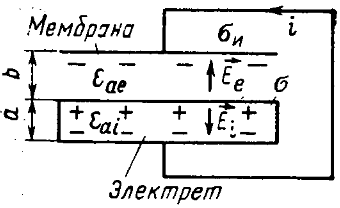


Рис. 19.37

Плотность заряда, индуцированного на мембране, обозначим $\sigma_и$, поверхностную плотность заряда на верхней стороне электрета обозначим σ. Напряженность электрического поля в электрете E_i в воздушном промежутке E_e. Электрическая проницаемость воздушного промежутка ε_{ae}.

Так как для потенциального поля $\oint \vec{E}d\vec{l}=0$, то, полагая сопротивление соединительных проводов малым и учитывая направления векторов $\vec{E}_i$ и $\vec{E}_e$, указанные на рисунке, имеем

$$E_i a - E_e b = 0. \qquad (1)$$

Заряд на верхней грани электрета численно равен заряду на нижней грани электрета плюс заряд, индуцированный на мембране. Если учесть, что плотность заряда на проводящей поверхности равна произведению напряженности поля в точке диэлектрика, граничащей с проводящей поверхностью, на электрическую проницаемость диэлектрика, то получим

$$\varepsilon_{ai} E_i + \varepsilon_{ae} E_e = \sigma. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что плотность заряда, индуцированного на мембране,

$$\sigma_и = \varepsilon_{ae} E_e = \sigma \frac{\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}\dfrac{b}{a}} \qquad (3)$$

Полный заряд на мембране $q_и = \sigma_и S$. При изменении расстояния b во времени ток через микрофон

$$i = \frac{dq_и}{dt} = -\frac{\sigma S \varepsilon_{ai}}{a\varepsilon_{ai}\left(1 + \dfrac{b\varepsilon_{ai}}{a\varepsilon_{ae}}\right)^2}\frac{db}{dt}.$$

§ 19.50. **Изменение заряда (напряжения) на конденсаторе, вызванное помещенным в него диэлектрическим телом, имеющим остаточную поляризацию.** Между электродами 1 и 4 конденсатора емкостью C приложено напряжение U (рис. 19.38, *а*). Электрод 4 заземлен. Заряд на электроде 1 обозначим q_1. Разность потенциалов между двумя близко расположенными точками 2 и 3 $\varphi_2 - \varphi_3 = \vec{E}\Delta\vec{l}$. Внесем в конденсатор между точками 2 и 3 кусочек диэлектрической пленки высотой Δl, площадью ΔS, имеющей остаточную поляризацию $\vec{P}$ (рис. 19.38, *б*). Заменим эту пленку диполем с зарядами $\pm q_2$ на поверхностях ΔS, проходящих через точки 2 и 3 и расположенных на расстоянии Δl (рис. 19.38, *в*). Электрический момент кусочка пленки и диполя одинаков $\vec{P}\Delta V = \vec{P}\Delta\vec{l}\Delta\vec{S} = q_2\Delta\vec{l}$. Отсюда

$$q_2 = \vec{P}\Delta\vec{S}. \tag{а}$$

Используя потенциальные коэффициенты по формулам Максвелла, определим потенциалы электрода *1* (φ_1) и элементарных поверхностей ΔS, проходящих через точки *2* и *3* (φ_2 и φ_3) в поле зарядов q_1, q_2, $-q_2$, и их зеркальных изображений при заземленном электроде *4*:

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 - \alpha_{13} q_2, \tag{б}$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 - \alpha_{23} q_2, \tag{в}$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2 - \alpha_{33} q_2. \tag{г}$$

Используем формулы (а)—(г) для решения двух задач.

1. Выясним, на сколько (ΔU) изменится напряжение между разомкнутыми электродами *1* и *4* конденсатора, если внутрь его поме-

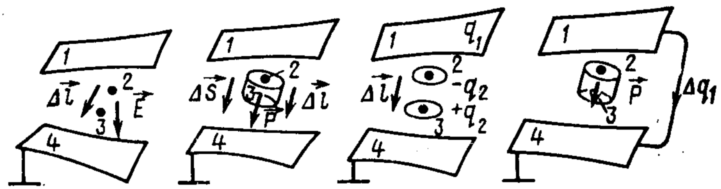


Рис. 19.38

стить кусочек поляризованной пленки. До помещения пленки при $\varphi_1 = U$ напряженность поля между точками *2* и *3* равна $\vec{E}$. По формулам (б)—(г)

$$\varphi_1 = U = q_1\alpha_{11} = q_1/C, \tag{д}$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = q_1(\alpha_{21} - \alpha_{31}) = \vec{E}\Delta\vec{l}.$$

Отсюда

$$\alpha_{21} - \alpha_{31} = \vec{E}\Delta\vec{l}/q_1. \tag{е}$$

После внесения пленки заряд q_1 на электроде *1* не изменится (так как электроды разомкнуты), а потенциал электрода *1* станет равным $U + \Delta U$. По формуле (б)

$$U + \Delta U = \alpha_{11} q_1 + q_2(\alpha_{12} - \alpha_{13}). \tag{ж}$$

Учтем, что $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$ и из (е), (д), (ж) определим

$$\Delta U = q_2(\alpha_{12} - \alpha_{13}) = \frac{\vec{P}\Delta\vec{S}\vec{E}\Delta\vec{l}}{q_1} = \frac{\vec{P}\vec{E}\Delta V}{CU}. \tag{з}$$

2. Подсчитаем величину заряда Δq_1, который пройдет с электрода *1* на электрод *4* по проводу, накоротко замыкающему их (рис. 19.38, *г*), если внутрь конденсатора внести кусочек поляризованной пленки. При решении полагаем известной напряженность поля $\vec{E}$ в интервале между точками *2* и *3* до внесения пленки при напряжении U между разомкнутыми электродами *1* и *4*.

До внесения пленки при короткозамкнутых электродах $q_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$. После внесения пленки $\varphi_1 = 0 = \alpha_{11}\Delta q_1 + q_2(\alpha_{12} - \alpha_{13})$. Имея в виду, что $\alpha_{11} = 1/C$, $q_2 = \vec{P}\Delta\vec{S}$ и $\alpha_{12} - \alpha_{13} = \dfrac{\vec{E}\Delta\vec{l}}{q_{1\,\text{разомк}}}$, где $q_{1\,\text{разомк}}$—заряд на электроде *1* при разомкнутых электродах и напряжении между ними U, находим

$$\Delta q_1 = -q_2\frac{\alpha_{12}-\alpha_{13}}{\alpha_{11}} = -\frac{\vec{P}\Delta\vec{S}\,\vec{E}\Delta\vec{l}C}{CU} = -\frac{\vec{P}\vec{E}\Delta V}{U}. \tag{и}$$

Если на расстояниях Δl и $\sqrt{\Delta S}$ напряженность поля нельзя принять даже приблизительно неизменной, то в формулах (з) и (и) $\vec{P}\vec{E}\Delta V$ следует заменить на $\int\limits_V \vec{P}\vec{E}dV$. Интеграл берется по объему, занятому пленкой.

§ 19.51. Электрическое поле двойного заряженного слоя. *Двойным заряженным слоем* называют слой положительных и слой отрицательных зарядов, расположенных на весьма малом (теоретически на бесконечно малом) расстоянии друг от друга.

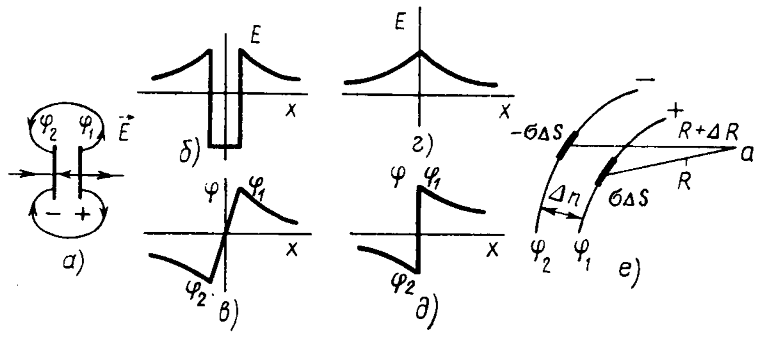


Рис. 19.39

На рис. 19.39, *а* изображено поле плоского конденсатора внутри и вне пластин. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ внутри и вне пластин направлена в противоположные стороны. В соответствии с этим на рис. 19.39, *б* вне конденсатора E положительна, внутри конденсатора — отрицательна (за положительное направление для $\vec{E}$ принято направление слева направо). График зависимости потенциала φ в функции расстояния изображен на рис. 19.39, *в*.

Если расстояние между пластинами конденсатора по нормали $\Delta n \to 0$, то графики E и φ примут вид кривых, изображенных на рис. 19.39, *г* и *д*. Существенно, что *потенциал φ при переходе через двойной заряженный слой изменяется скачком*. Две пластины конденсатора единичной площади, расположенные на расстоянии Δn друг от друга, несут заряды $\pm\sigma$ и обладают электрическим моментом $p_э = \sigma\Delta n$. Отсюда $\sigma = p_э/\Delta n$.

Если пластины имеют площадь ΔS, то на них будут заряды $\pm\sigma\Delta S$, где $\sigma\Delta S = \frac{p_э \Delta S}{\Delta n}$.

Запишем составляющую потенциала произвольной точки a, находящуюся вне конденсатора, от зарядов $\pm\sigma\Delta S$. Полагаем, что эта точка удалена от заряда $\sigma\Delta S$ на расстояние R и от заряда $-\sigma\Delta S$ — на $R + \Delta R$ (рис. 19.39, *е*)

$$\frac{\sigma\Delta S}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\sigma\Delta S}{4\pi\varepsilon_0 (R+\Delta R)} = \frac{p_э \Delta S}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta (1/R)}{\Delta n}.$$

Здесь $\Delta (1/R) = 1/R - 1/(R + \Delta R)$. Устремим $\Delta n \to 0$, заменим $\frac{\Delta (1/R)}{\Delta n}$ на $\frac{\partial (1/R)}{\partial n}$ и ΔS на dS. Просуммировав потенциалы от всех площадок, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S p_э \frac{\partial (1/R)}{\partial n} dS.$$

§ 19.52. Силовое воздействие неравномерного электрического поля на незаряженные диэлектрические и проводящие тела, находящиеся в этом поле. Если незаряженное диэлектрическое тело малых размеров поместить в электрическое поле, то оно поляризуется и будет представлять собой диполь с диэлектрическим моментом $\vec{p} = q\Delta\vec{l}$, где q — заряд, $\Delta\vec{l}$ — расстояние между зарядами диполя, $\Delta\vec{l}$ направлено от $-q$ к $+q$.

В проводящем теле, помещенном в электрическое поле, вследствие электростатической индукции произойдет разделение зарядов, и оно также будет представлять собой диполь с некоторым электрическим моментом $\vec{P}$.

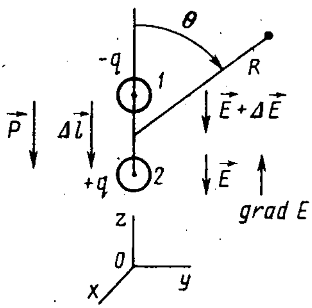


Рис. 19.40

Положим, что электрическое поле в окрестности диполя неравномерно, так что в точке 2 рис. 19.40 напряженность поля равна $\vec{E}$, а в точке 1 равна $\vec{E} + \Delta\vec{E}$. На диполь будет действовать сила $\vec{F}$ (за положительное направление отсчета для нее примем направление вдоль оси $-z$):

$$\vec{F} = q\vec{E} - q(\vec{E} + \Delta\vec{E}) = -q\Delta\vec{E} = -q\Delta l \frac{\Delta\vec{E}}{\Delta l}.$$

В общем случае силу можно записать так:

$$\vec{F} = P \operatorname{grad} E. \qquad (а)$$

Знак минус вошел в grad E.

В рассматриваемом примере сила будет направлена вдоль оси z. Тело будет втягиваться в область более сильного поля*.

Для того чтобы по формуле (а) подсчитать силу, действующую на тело, надо сначала определить электрический момент P этого тела. Его определяют, полагая, что при расстояниях, равных геометрическим размерам тела, в действительности неравномерное поле приближенно можно считать равномерным, и потому электрический момент тела может быть взять таким же, что и в равномерном (однородном) поле.

---

* Если направление электрического момента диполя $q\Delta\vec{l}$ не совпадает с направлением $\vec{E}$ в точках расположения диполя, то сила $\vec{F} = q(\Delta\vec{l}\nabla)\vec{E}$. При раскрытии последнего выражения сначала элемент длины $\Delta\vec{l}$ скалярно умножают на оператор ∇, а затем дифференцируют $\vec{E}$.

В примере 197 выведена формула (19.73) для потенциала поля диполя в сферической системе координат. Запишем эту формулу со знаком минус в правой части, так как расположение зарядов на рис. 19.40 противоположно расположению их на рис. 19.34.

$$\varphi = -\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2} = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2}. \tag{б}$$

Для диэлектрического шара радиуса a, помещенного в равномерное поле напряженности E_0, составляющая потенциала во внешней по отношению к шару области, обусловленная его электрическим моментом, в соответствии с формулой (19.68) равна

$$E_0 \frac{a^3}{R^2} \frac{\varepsilon_{ae}-\varepsilon_{ai}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}} \cos\theta. \tag{в}$$

Здесь ε_{ai} и ε_{ae} — абсолютные диэлектрические проницаемости шара и окружающей среды соответственно; R — расстояние от центра диполя до произвольной точки поля; θ — угол в меридианной плоскости (см. рис. 19.22). Сопоставляя (б) и (в), находим

$$P = 4\pi\varepsilon_{ae} \frac{\varepsilon_{ai}-\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}} a^3 E_0. \tag{г}$$

Формулу для электрического момента P проводящего шара получим из формулы (г), положив в ней $\varepsilon_{ai} \to \infty$:

$$P = 4\pi\varepsilon_{ae} a^3 E_0. \tag{д}$$

При подсчетах силы по формуле (а) в формулах (г) и (д) следует принять $E_0 = E$.

С помощью формулы (а) можно подсчитать, например, силы, действующие на частички золы в устройствах электрической очистки газов.

Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте понятие «электростатическое поле». 2. Какой физический смысл придается $\vec{E}$ и φ? Какая интегральная и дифференциальная связь существует между ними? 3. В чем смысл знака минус в формуле $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$? 4. Какие поля называют потенциальными? 5. Что понимают под силовой линией и что под эквипотенциальной поверхностью? 6. Могут ли быть замкнутыми силовые линии в электростатическом поле? 7. Каким свойством обладает силовая трубка? 8. Какие характеристики поля называют точечными, какие интегральными? 9. Что понимают под картиной поля? 10. Изложите основные принципы графического построения картины поля. 11. В чем отличие свободных зарядов от связанных? 12. В чем заключается явление электростатической индукции? 13. Каков смысл вектора $\vec{P}$? 14. Что послужило основанием для введения вектора $\vec{D}$? 15. Прокомментируйте три формы записи теоремы Гаусса в интегральном и дифференциальном виде. 16. Линейный заряд (заряженная нить) окружен коаксиальным с ним металлическим цилиндром внешним радиусом r_0. Будет ли существовать электрическое поле в области $r > r_0$, когда цилиндр: а) не заземлен; б) заземлен? 17. Дайте физическое толкование понятиям градиента и дивергенции. 18. Могут ли при переходе через границу раздела двух сред с различными ε_r полные значения $\vec{E}$ и $\vec{D}$ изменяться скачками? 19. Охарактеризуйте поле точечного и линейного зарядов и поле диполя. 20. Как определить плотность связанных зарядов на границе раздела двух диэлектриков, полагая известными вектор $\vec{D}$ на границе и значения ε_{r1} и ε_{r2} диэлектриков? 21. Дайте определение емкости между двумя телами и емкости уединенного тела. 22. Как можно определить энергию поля системы заряженных тел через их заряды и потенциалы? 23. Докажите теорему единственности решения задач электростатики. 24. Дайте обоснование методу зеркальных изображений. 25. Что определяют потенциальные и

емкостные коэффициенты и частичные емкости? **26**. Как опытным путем определить частичные емкости? **27**. Дайте примеры плоскопараллельного, плоскомеридианного и равномерного полей. **28**. Охарактеризуйте идею и этапы решения уравнений в частных производных методом разделения переменных. **29**. Какое допущение принято в методе средних потенциалов? **30**. Тонкое кольцо радиуса a заряжено с плотностью τ и находится в воздухе; определите создаваемую им напряженность E в точке на оси на расстоянии h от кольца. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{a\tau h}{2\varepsilon_a (h^2+a^2)^{3/2}}\right)$.

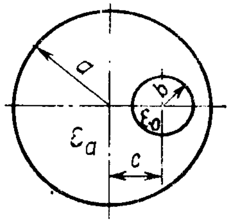


Рис. 19.41

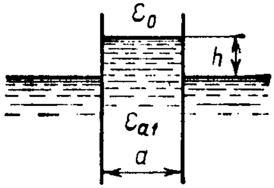


Рис. 19.42

31. Диэлектрический шар радиуса a и электрической проницаемостью ε_a заряжен с объемной плотностью ρ. В этом шаре имеется незаряженная сферическая область радиуса b. Центр шара и центр незаряженной сферической области смещены на расстояние c (рис. 19.41) ($c < b < a$). Покажите, что поле внутри незаряженной сферической области однородно и напряженность его равна $\rho c/(3\varepsilon_0\varepsilon_r)$.

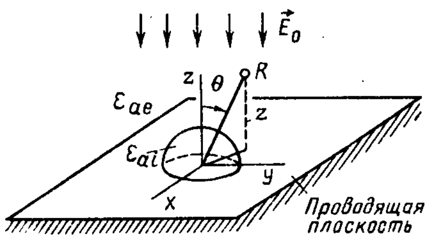


Рис. 19.43

32. Пластинки плоского конденсатора частично погружены в жидкий диэлектрик плотностью d и относительной электрической проницаемостью ε_{r1}. Над жидким диэлектриком находится воздух (рис. 19.42). Расстояние между пластинками a. К конденсатору подведено постоянное напряжение U. Вывести формулу для определения ε_{r1}, если уровень жидкого диэлектрика между пластинами на величину h превышает уровень диэлектрика вне пластин. (*Ответ*: $\varepsilon_{r1} = 1 + \dfrac{2a^2hd}{\varepsilon_0 U^2}$.) **33**. Охарактеризуйте свойства электретов. Поясните, как рассчитывают электрические поля, создаваемые ими. **34**. Что понимают под двойным заряженным слоем? Покажите, что при прохождении через двойной заряженный слой потенциал изменяется скачком. **35**. Как подсчитать силу, действующую на незаряженную пылинку в неравномерном электрическом поле? **36**. В равномерное поле напряженностью $\vec{E}_0$, созданное в диэлектрике с электрической проницаемостью ε_{ae}, поместили на поверхность проводящей плоскости, совпадающей с плоскостью xOy, половинку диэлектрического шара радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_{ai} (рис. 19.43). Определите потенциал в произвольной точке диэлектрика вне шара при $R > a$, полагая, что центр шара совпадает с началом сферической (и прямоугольной) систем координат и что проводящая плоскость имеет нулевой потенциал. $\left(\textit{Ответ}: \varphi = E_0 z + \dfrac{\varepsilon_{ae}-\varepsilon_{ai}}{2\varepsilon_{ae}+\varepsilon_{ai}} a^3 \dfrac{E_0 \cos\theta}{R^2}\right)$. **37**. Решите задачи из сборника задач [21]: 19.3; 19.5; 19.12; 19.17; 19.24; 19.26; 19.28; 19.32; 19.39; 19.45; 19.51.

Глава двадцатая

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 20.1. Плотность тока и ток. Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток.

Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля принято называть *током проводимости*.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождению тока.

Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называют *удельной проводимостью* γ. Удельная проводимость γ, зависящая от физических свойств проводящего материала и температуры, измеряется в $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1} = \text{См}\cdot\text{м}$.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока $\vec{\delta}$. Это векторная величина, направленная по напряженности электрического поля. Она численно равна отношению тока Δi, протекающего через элемент поверхности ΔS (перпендикулярный направлению напряженности поля в данной точке), к величине ΔS этой поверхности.

Если поверхность имеет конечные размеры, то направление вектора плотности тока во всех элементах, на которые может быть разбита эта поверхность, и направление элементов поверхности могут быть различны, и ток определяют так: $I = \int\limits_S \vec{\delta}d\vec{S}$.

Таким образом, *ток есть поток вектора плотности тока*.

Ток в отличие от плотности тока является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существуют постоянные магнитные поля. Так как эти поля неизменны во времени, то в поле не возникает явления электромагнитной индукции, т. е. магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое поле постоянного тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать раздельно.

Магнитное поле постоянного тока рассмотрено в гл. 21.

§ 20.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме. Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед объемом ΔV. Длина ребра параллелепипеда Δl, площадь поперечного сечения ΔS. Расположим этот параллелепипед так, чтобы напряженность поля в нем была направлена параллельно ребру (рис. 20.1, *а*). В силу малости объема можно считать, что напряженность электрического поля $\vec{E}$ одна и та же во всем элементарном объеме; $\vec{\Delta l} = \Delta l \vec{n}^\circ$; $\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}^\circ$, где $\vec{n}^\circ$ — единичный вектор по направлению $\vec{\Delta l}$, $\vec{\Delta S}$ и $\vec{E}$. Ток $I = \int \vec{\delta} d\vec{S} = \vec{\delta} \Delta \vec{S}$. Напряжение на элементе объема $U = \vec{E} \Delta \vec{l} = RI$. Сопротивление элемента объема $R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}$.

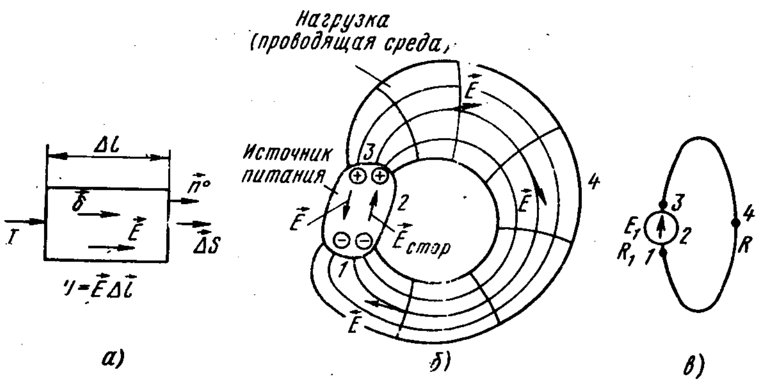


Рис. 20.1

Подставив в выражение $RI = \vec{E}\Delta\vec{l}$ эквиваленты R и I, получим

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \vec{\delta} \Delta S \vec{n}^\circ = \vec{E} \Delta l \vec{n}^\circ,$$

откуда

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \tag{20.1}$$

Соотношение (20.1) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (20.1) справедливо для областей вне источников э. д. с. В областях, занятых источниками э. д. с., кроме кулонова (электростатического) поля существует еще так называемое стороннее электрическое поле, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под *сторонним электрическим полем* понимают электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.

Напряженность стороннего поля обозначают $\vec{E}_{стор}$. В областях, занятых источниками э. д. с., полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженности кулонова и стороннего полей $\vec{E} + \vec{E}_{стор}$.

На рис. 20.1, *б* схематически изображена электрическая цепь постоянного тока, состоящая из источника питания и нагрузки.

Источник сторонней э. д. с. создает внутри источника питания стороннюю напряженность поля $\vec{E}_{\text{стор}}$.

Линейный интеграл от сторонней напряженности поля внутри источника называется э. д. с. источника (E_1):

$$\int_1^3 \vec{E}_{\text{стор}}\, d\vec{l} = E_1. \qquad (20.2)$$

Под действием стороннего поля в источнике непрерывно происходит разделение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются к плюсу источника, а отрицательные — к минусу.

Эти заряды в области внутри и вне источника создают электрическое поле, напряженность которого, как и напряженность электростатического (кулонова) поля, направлена от положительных зарядов к отрицательным.

При протекании постоянного тока по цепи одни электрические заряды непрерывно сменяются другими, такими же, как и в предыдущие моменты времени. Таким образом, картина поля в макроскопическом смысле повторяется в смежные моменты времени. Поле носит как бы статический характер. Это и послужило основанием для того, чтобы поле, созданное в проводящей среде разделившимися зарядами, назвать *кулоновым полем*, а его напряженность E — *напряженностью кулонова поля.*

Внутри источника кулоново поле направлено навстречу стороннему. Полное значение напряженности поля внутри источника равно $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$. Вне источника кулоново поле направлено от положительного электрода к отрицательному. Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение зарядов в области вне источника. При протекании тока по цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| > |\vec{E}|$. При разомкнутой цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| = |\vec{E}|$.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками э. д. с., записывают следующим образом:

$$\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \qquad (20.3)$$

Уравнение (20.3) называют *обобщенным законом Ома в дифференциальной форме.*

Если от обеих частей уравнения (20.3) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник э. д. с. , то из уравнения (20.3) будет получен второй закон Кирхгофа. Поэтому уравнение (20.3) называют также *вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.*

На рис. 20.1, *в* изображен замкнутый контур, по которому течет ток I. На участке *123* имеется источник сторонней э. д. с. На участке *341* нет источников сторонней э. д. с. Обозначим через R_1 сопротивление участка 123 и через R — сопротивление участка *341*. Примем, что площадь поперечного сечения всех участков замкнутого контура достаточно мала для того, чтобы можно было считать направление плотности тока и напряженности поля в некоторой точке совпадающим с направлением элемента пути $d\vec{l}$ в той же точке.

Умножим обе части (20.3) на $\frac{d\vec{l}}{\gamma}$, составим циркуляцию вдоль замкнутого контура 12341 (рис. 20.1, *в*):

$$\oint \frac{\vec{\delta}\, d\vec{l}}{\gamma} = \oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})\, d\vec{l}.$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов. Поэтому

$$\oint (\vec{E}+\vec{E}_{стор})\vec{dl}=\oint \vec{E}\vec{dl}+\oint \vec{E}_{стор}\,\vec{dl}.$$

$\oint \vec{E}\,\vec{dl}=0$ в силу потенциального характера кулонова поля.

В свою очередь, $\oint \vec{E}_{стор}\,\vec{dl}=\int\limits_{123}\vec{E}_{стор}\,\vec{dl}+\int\limits_{341}\vec{E}_{стор}\,\vec{dl}$, но $\int\limits_{123}\vec{E}_{стор}\,\vec{dl}$ равен сторонней э. д. с. E_1, а $\int\limits_{341}\vec{E}_{стор}\,\vec{dl}=0$, так как на участке *341* нет сторонней э.д.с.

Для подсчета величины $\oint \frac{\vec{\delta}\,\vec{dl}}{\gamma}$ умножим и разделим подынтегральное выражение на площадь поперечного сечения S, от плотности тока $\vec{\delta}$ перейдем к току I и заменим $\frac{dl}{\gamma S}$ на сопротивление участка пути dR. Получим:

$$\frac{\vec{\delta}\vec{dl}}{\gamma}\,\frac{S}{S}=I\,\frac{dl}{\gamma S}=IdR.$$

$$\oint\frac{\vec{\delta}\vec{dl}}{\gamma}=I\oint dR=I\int\limits_{123}dR+I\int\limits_{341}dR=I\,(R_1+R).$$

Таким образом, из уравнения (20.3) образовано уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа.

§ 20.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме. Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из него, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов записывают так:

$$\oint \vec{\delta}d\vec{S}=0. \qquad (20.4)$$

Если разделить и левую и правую части (20.4) на одно и то же число (на объем, о котором шла речь), то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta}d\vec{S}}{V}=0.$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объем, находящийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint \vec{\delta}d\vec{S}}{V}=\operatorname{div}\vec{\delta}=0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде:

$$\operatorname{div}\vec{\delta}=0. \qquad (20.5)$$

Это соотношение называют *первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\vec{\delta}$.

§ 20.4. Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца. В гл. 1 отмечалось, что если по какому-либо проводнику сопротивлением R протекает постоянный ток I, то в единицу времени (в секунду) в нем выделяется энергия, равная I^2R. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды (с этой целью воспользуемся рис. 20.1, *а*):

$$\frac{I^2 R}{V}=\frac{(\delta\Delta S)^2}{\Delta l\Delta S}\left(\frac{\Delta l}{\gamma\Delta S}\right)=\frac{\delta^2}{\gamma}=\gamma E^2. \tag{20.6}$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды в единицу времени выделяется энергия, численно равная γE^2.

§ 20.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде. Так же как и в электростатическом поле, напряженность электрического поля в проводящей среде $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В неизменном во времени поле

$$\operatorname{div}\vec{\delta}=\operatorname{div}\gamma\vec{E}=0. \tag{20.7}$$

Если γ среды не изменяется от точки к точке, т. е. если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, вместо $\operatorname{div}\gamma\vec{E}=0$ можно написать $\gamma \operatorname{div}\vec{E} = 0$ или

$$\operatorname{div}\vec{E}=0, \tag{20.8}$$

т. е.

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi)=0$$

или

$$\nabla^2\varphi=0. \tag{20.9}$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным. В нем, в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$.

§ 20.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2. Граничные условия. Выясним, какие граничные условия выполняются при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью.

На рис. 20.2 линия *OO* есть граница раздела сред. Возьмем на границе плоский замкнутый контур *1234*. Составим циркуляцию вдоль этого контура. Стороны *12* и *34* его весьма малы по сравнению со сторонами *23* и *41* (длину последних обозначим dl).

Так как $\oint \vec{E}\,d\vec{l}$ вдоль любого замкнутого контура равно нулю, то оно равно нулю и для контура *1234*.

В силу малости отрезков *12* и *34* пренебрежем составляющими интеграла вдоль этих путей и тогда

$$E_{1t}\,dl - E_{2t}\,dl = 0 \text{ или } E_{1t} = E_{2t}. \qquad (20.10)$$

Это соотношение совпадает с соотношением (19.34).

На границе раздела равны нормальные составляющие плотностей токов. Докажем это.

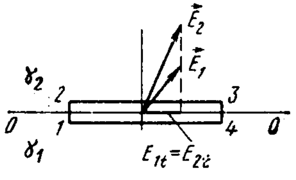


Рис. 20.2

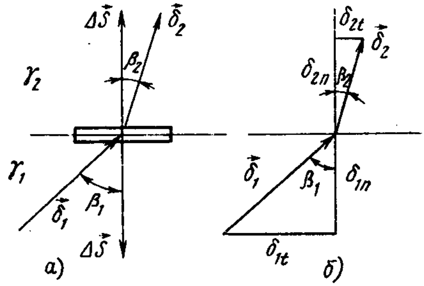


Рис. 20.3

На границе раздела выделим сплющенный параллелепипед (рис. 20.3, *а*). Поток вектора $\vec{\delta}$, втекающий в объем через нижнюю грань, равен $-\delta_{1n}\Delta S$; поток вектора $\vec{\delta}$, вытекающий из объема через верхнюю грань, $\delta_{2n}\Delta S$. Так как $\oint \vec{\delta}\,d\vec{S} = 0$, то

$$-\delta_{1n}\,\Delta S + \delta_{2n}\,\Delta S = 0;\quad \delta_{1n} = \delta_{2n}. \qquad (20.11)$$

Следовательно, при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью непрерывна тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$, т. е. $E_{1t} = E_{2t}$ (но $E_{1n} \neq E_{2n}$), и непрерывна нормальная составляющая плотности тока $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (но $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$).

Отсюда следует, что полные значения вектора $\vec{E}$ и вектора $\vec{\delta}$ в общем случае меняются скачком на границе раздела.

Найдем связь между углом падения β_1 и углом преломления β_2. В соответствии с рис. 20.3, *б*:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t}\gamma_1}{\delta_{1n}};$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t}\gamma_2}{\delta_{2n}}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \qquad (20.12)$$

Если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой (например, в землю), то тангенс угла преломления $\operatorname{tg}\beta_2 = \operatorname{tg}\beta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ меньше тангенса угла падения и, следовательно, угол β_2 будет меньше угла β_1. Если γ_2 весьма мало, то угол $\beta_2 \to 0$.

§ 20.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем. По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле в проводящей среде — это поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями можно провести определенную формальную аналогию.

Действительно, электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне сторонних источников также ему удовлетворяет. В обоих полях имеют дело с вектором напряженности поля $\vec{E}$. С вектором электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_a\vec{E}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$. С потоком вектора $\vec{D}$ (обозначим его буквой Ψ) $\Psi = \int\limits_S \vec{D}\vec{ds}$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int\limits_S \vec{\delta}\,\vec{dS}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков: $E_{1t} = E_{2t}$ и $D_{1n} = D_{2n}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различной проводимостью $E_{1t} = E_{2t}$ и $\delta_{1n} = \delta_{2n}$.

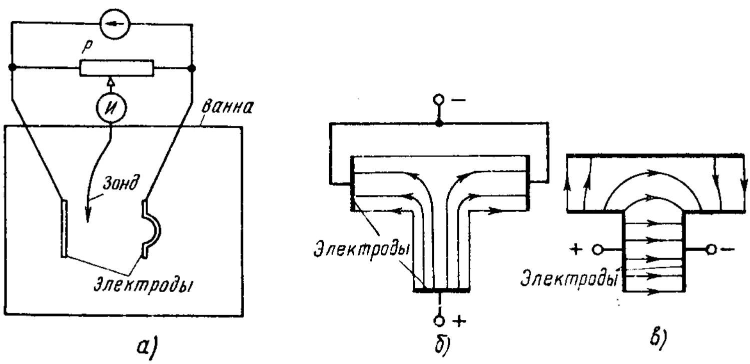
Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях (т. е. картина поля) будет одинаковой.

Эта формальная аналогия широко используется на практике. Так, например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о нем могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

§ 20.8. Экспериментальное исследование полей. Если форма граничных поверхностей (электродов) сложна, то аналитический расчет поля осуществить довольно трудно. Непосредственно же определить потенциалы точек электростатического поля, помещая в них зонды, обычно также не удается, потому что зонды даже при малой мощности, потребляемой индикаторами, своим присутствием искажают поле.

В этом случае поле исследуют экспериментально на модели, т. е. прибегают к моделированию, либо в электролитической ванне, либо на твердой модели. Рассмотрим, как производится моделирование двухмерного поля в электролитической ванне*.

В ванну с электролитом (например, с подкисленной водой) помещают электроды (рис. 20.4, *а*). Форма и их взаимное расположение должны быть точно такими же, как и в изучаемом электростатическом поле. Для того чтобы стенки ванны меньше искажали исследуемое поле, линейные размеры ванны должны в несколько раз превышать соответствующие линейные размеры исследуемого участка поля.



а) б) в)

Рис. 20.4

Электроды соединяют с источником э. д. с. низкой частоты (обычно 50 Гц). Использовать в качестве источника питания э. д. с. постоянного тока нельзя, так как при постоянном токе будет происходить электролиз подкисленной воды и пузырьки газа, осаждаясь на электродах, будут искажать исследуемое поле. По электролиту проходит переменный ток.

С помощью вспомогательного реостата *Р*, зонда и индикатора нуля *И* можно снять семейство эквипотенциальных линий в поле. Для этого движок реостата устанавливают в каком-либо фиксированном положении и, перемещая зонд так, чтобы индикатор показывал нуль, находят совокупность точек, потенциал которых равен потенциалу движка реостата. Далее перемещают движок реостата в новое положение и определяют координаты точек второй эквипотенциали и т. д. Затем по семейству эквипотенциалей строят сетку силовых линий . При построении последней руководствуются тем, что силовые линии в любой точке поля должны быть перпендикулярны экипотенциалям, в том числе и поверхностям электродов.

В электростатическом поле силовые линии перпендикулярны поверхностям электродов. В поле проводящей среды силовые линии, строго говоря, не совсем перпендикулярны поверхностям электродов. Но

* В приложении *Е* рассматриваются основы другого метода моделирования полей — с помощью электрических сеток.

если проводимость электродов будет во много раз больше проводимости электролита, то [см. формулу (20.12)] с большой степенью точности можно считать, что силовые линии будут подходить к поверхностям электродов практически под прямым углом.

С помощью электролитической ванны можно моделировать и трехмерные поля. В этом случае ванну выполняют в виде куба или параллелепипеда, заполняют ее слабо проводящей жидкостью, а перемещение зонда в трех взаимно перпендикулярных направлениях обеспечивают специальным механическим приспособлением, находящимся вне ванны.

Моделирование с помощью электролитической ванны имеет известные недостатки — электролит загрязняется пылью из воздуха, испаряется, ванна может дать течь и т. п. Поэтому для моделирования более предпочтительны твердые модели, которые лишены этих недостатков. Твердая модель для моделирования двухмерных полей представляет собой лист электропроводной бумаги (в обычную бумагу при ее изготовлении добавлена сажа или графит), на которую ставят металлические электроды, и к ним подводят постоянное или синусоидальное напряжение. Ток проходит по бумаге от одного электрода к другому.

Семейство эквипотенциалей получают так же, как и в ванне. Бумага характеризуется своей удельной поверхностной проводимостью на единицу длины и ширины, которая много меньше удельной проводимости металлических электродов.

На практике используют твердые модели двух типов, один из них назовем *исходным* (в нем расположение электродов соответствует расположению электродов в исследуемом электростатическом поле) и другой — *дуальным* или *обращенным* (в нем электроды располагают по граничным силовым линиям исходной модели).

Силовые и эквипотенциальные линии в исходной и дуальной моделях меняются местами.

В качестве примера на рис. 20.4, *б* показана картина поля в исходной твердой модели. Электроды показаны утолщенными линиями. На рис. 20.4, *в* — картина поля для дуальной модели. В верхней части дуальной модели на рис. 20.4, *в* помещена узкая металлическая полоска, выполняющая роль эквипотенциальной линии. Если в поле имеется симметрия, то она должна быть обеспечена и в дуальной модели.

§ 20.9. Соотношение между проводимостью и емкостью. Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику э. д. с., то в проводящей среде пойдет ток. Если напряжение между электродами *1* и *2* равно U_{12} и по среде проходит ток I, то проводимость между электродами *1* и *2* $G = I/U_{12}$.

Так как ток $I = \int \vec{\delta}\, d\vec{S} = \gamma \int \vec{E}\, d\vec{S}$ и $U_{12} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}$, то

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}. \qquad (20.13)$$

В свою очередь, в электрическом поле с электродами такой же конфигурации емкость между двумя частями электродов, на которых расположены одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды Q, создающие поток ψ вектора электрической индукции $\vec{D}$ $\psi = Q = \int \vec{D} d\vec{S}$, будет

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_a \int \vec{E} d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}. \qquad (20.14)$$

Если разделить (20.14) на (20.13), то после сокращения получим

$$C/G = \varepsilon_a/\gamma, \qquad (20.15)$$

т. е. емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a, так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ, как ε_a относится к γ.

Соотношение (20.15) позволяет по известному выражению емкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{\pi \varepsilon_a l}{\ln (d/r)}, \qquad (20.16)$$

где l — длина проводов; d — расстояние между осями проводов; r — радиус провода.

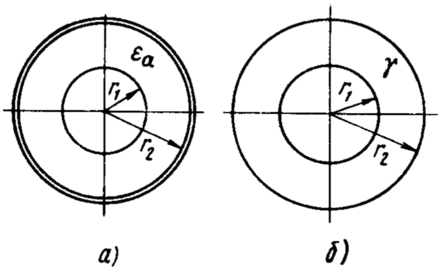


Рис. 20.5

Чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами), погруженными в среду с проводимостью γ, надо в соответствии с (20.15) заменить в (20.16) ε_a на γ. Тогда получим

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln (d/r)}. \qquad (20.17)$$

Или другой пример. Емкость коаксиального кабеля (рис. 20.5, *а*)

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_a l}{\ln (r_2/r_1)}.$$

Проводимость между двумя соосными цилиндрами длиной l, которые разделены средой с проводимостью γ (рис. 20.5, *б*),

$$G = \frac{2\pi \gamma l}{\ln (r_2/r_1)}.$$

Аналогию можно распространить и на более сложные поля. Например, если в равномерное поле, созданное в среде с проводимостью γ_e, поместить шар с проводимостью γ_i, то в соответствии с (19.67) потенциал внутри шара определим следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\gamma_e}{2\gamma_e + \gamma_i} z.$$

§ 20.10. Общая характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения. Так же как и задачи электростатики, задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно классифицировать по характеру величины, которая определяется в результате расчета, на задачи, у которых определяют точечные характеристики (плотность тока, потенциал), и задачи, в которых находят интегральные характеристики поля, например сопротивление между электродами или напряжение между некоторыми точками.

В зависимости от того, что задано и что определяется, все задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно разделить на два основных типа.

В первом — заданы форма и расположение электродов (геометрия поля), свойства среды и интенсивность источников, создающих поле. Требуется найти либо точечные, либо интегральные характеристики поля.

Второй тип задачи является обратным по отношению к первому. Одной из задач второго типа может быть, например, следующая: при заданной точечной характеристике поля, заданных форме, расположении электродов и свойствах среды найти интенсивность источников, создающих это поле.

Задачи расчета электрического поля в проводящей среде могут быть решены: 1) непосредственным интегрированием уравнений, описывающих поле (см. примеры 200 и 202); 2) использованием аналитических решений для других статических невихревых полей (см. примеры 204 и 203); 3) экспериментальным (см. § 20.8) или графическим путем; графический метод построения картины поля применительно к плоскопараллельному электростатическому полю рассмотрен в § 19.44, а к плоскомеридианному полю — в § 19.45; изложенная в этих параграфах методика пригодна и для построения картины плоскопараллельного и плоскомеридианного электрического полей в проводящей среде; 4) методом зеркальных изображений в соответствии с аналогией, рассмотренной в § 20.7. Формулы для расчетных токов I_2 и I_3 в задаче, дуальной задаче § 19.32, следуют из формул для τ_2 и τ_3, если в них ε_{a1} заменить на γ_1, а ε_{a2} — на γ_2. Метод применим и в том случае, когда проводимость $\gamma_2 = 0$. Применительно к электрическому полю проводящей среды вводят понятия собственных и взаимных проводимостей тел, определяемых по аналогии с собственными и взаимными емкостями тел (частичными емкостями — см. § 19.34); 5) методом конформных преобразований (см. приложение М).

§ 20.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами. Принято считать, что *картина электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами, тождественна картине электрического поля в условиях электростатики.*

Это верно лишь приближенно, так как в условиях электростатики тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводящего тела равна нулю, тогда как при протекании постоянного тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника, хотя и очень мала по сравнению с нормальной составляющей напряженности в той же точке, но не равна нулю. На числовом примере убедимся в том, что тангенциальная составляющая напряженности поля E_t во много раз меньше нормальной составляющей напряженности поля E_n.

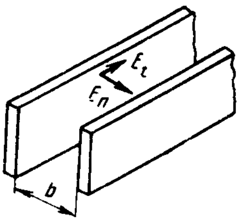


Рис. 20.6

Положим, что разность потенциалов U между двумя параллельными токонесущими медными шинами (рис. 20.6) равна 100 В, расстояние b между шинами 2 см, плотность тока $\delta = 2{,}5\cdot 10^6$ А/м², $\gamma = 5{,}6\cdot 10^7$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$. Тогда $E_t = \delta/\gamma = 4{,}46\cdot 10^{-2}$ В/м; $E_n = U/b = 5\cdot 10^3$ В/м; $E_n/E_t \approx 1{,}12\cdot 10^5$.

Пример 199. Определить ток утечки коаксиального кабеля на 1 км длины. Пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком, который обладает проводимостью $\gamma = 10^{-8}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$. Радиус жилы r_1, радиус оболочки $r_2 = er_1$, где e — основание натуральных логарифмов. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

Р е ш е н и е. Ток утечки $I = UG$. Проводимость

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi\cdot 10^{-8}\cdot 10^3}{1} = 6{,}28\cdot 10^{-5}\ \text{См}.$$

Ток утечки через несовершенную изоляцию $I = 10^4\cdot 0{,}628\cdot 10^{-4} = 0{,}628$ А/км.

Пример 200. Рассмотрим простейшую задачу расчета поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлений. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по ее толще, с тем чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

Если погрузить в землю металлическую полусферу, через которую в землю стекает ток I (рис. 20.7), и принять, что второй электрод, к которому будет подтекать ток, находится очень далеко, то плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом R будет $\delta = I/2\pi R^2$ (поверхность сферы $4\pi R^2$, поверхность полусферы $2\pi R^2$). Напряженность поля: $E = \delta/\gamma = I/(2\pi\gamma R^2)$.

Напряжение между двумя точками на поверхности земли (точки *1* и *2*):

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2} E dR=\frac{I}{2\pi\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2}=-\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=$$

$$=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

На рис. 20.7 изображена кривая изменения потенциала на поверхности земли. Найдем напряжение между точками *1* и *2*, расположенными на расстоянии, примерно равном шагу человека ($R_1 = 22$ м,

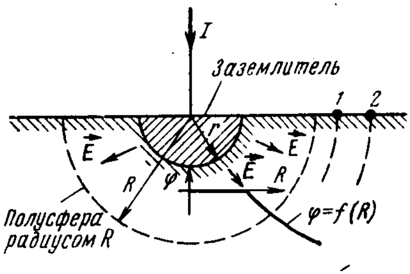


Рис. 20.7

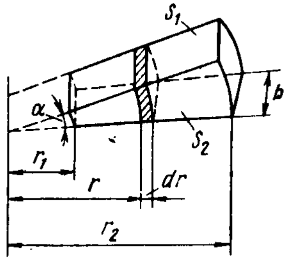


Рис. 20.8

$R_2 = 23$ м). Через заземлитель стекает ток $I = 1000$ А (ток короткого замыкания), проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$:

$$U_{12}=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{10^3}{2\pi\cdot 10^{-2}}\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{23}\right)\approx 31{,}9 \text{ В}.$$

Пример 201. В морскую воду при $\gamma = 0{,}1$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ вертикально опущены две металлические трубы наружным диаметром 5 см и длиной 3 м. Найти проводимость G между трубами. Оси труб удалены на расстояние $d = 25$ м.

Решение.

$$G=\frac{\pi\gamma l}{\ln(d/r)}=\frac{\pi\cdot 10^{-1}\cdot 3}{\ln(25/0{,}025)}=\frac{\pi\cdot 0{,}3}{6{,}907}=0{,}130 \text{ См}.$$

Пример 202. Вывести формулу для определения проводимости G между плоскостями S_1 и S_2 проводящего тела проводимостью γ, имеющего форму клина (рис. 20.8).

Решение. Проводимость заштрихованного пояска высотой $r\alpha$, толщиной dr и шириной b:

$$dG=\frac{\gamma b dr}{\alpha r}.$$

Проводимость

$$G=\frac{\gamma b}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{\gamma b}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 203. В пластинке из алюминия ($\gamma_e = 3{,}57 \cdot 10^7$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$) создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 0{,}1$ В/м. Определить плотность тока в медном теле ($\gamma_i = 5{,}6 \cdot 10^7$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$), имеющем цилиндрическую форму и расположенном перпендикулярно полюсу.

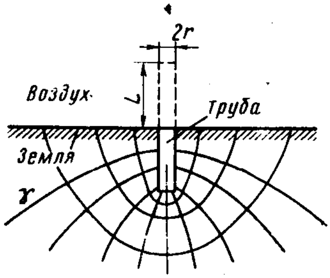


Рис. 20.9

Решение. Воспользуемся формулой (19.72) и аналогией, рассмотренной в § 20.7:

$$E_i = E_0 \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3{,}57}{3{,}57 + 5{,}6} = 0{,}78 \cdot 10^{-1} \text{ В/м};$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5{,}6 \cdot 10^7 \cdot 0{,}78 \cdot 10^{-1} = 436 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2.$$

Пример 204. Используя результат примера 195, вывести формулу для определения проводимости заземления, выполненного в виде стальной трубы длиной l, радиусом r, забитой в землю перпендикулярно ее поверхности. Полагать, как и в примере 200, что второй электрод находится в бесконечности, удельная проводимость земли γ, $L/r \gg 1$.

Решение. Картина поля заземлителя показана на рис. 20.9. Труба длиной L, находящаяся в земле, на рисунке дополнена такой же трубой, находящейся в воздухе. Проводимость заземления равна половине проводимости трубы длиной $2L$. В соответствии с примером 195

$$G \approx \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{2L}{r} - 0{,}307}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под сторонней напряженностью поля? 2. Почему уравнение $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$ называют обобщенным законом Ома, а также вторым законом Кирхгофа? 3. Правильно ли утверждение, что на границе раздела сред с проводимостями γ_1 и γ_2 условие непрерывности потенциала эквивалентно условию $E_{1t} = E_{2t}$? 4. Обоснуйте возможность моделирования электростатического поля полем постоянного тока в проводящей среде. 5. Каким образом можно приспособить аналитические решения задач электростатики для решения родственных задач в поле проводящей среды? Приведите примеры. 6. Составьте аналоги трем группам формул Максвелла для поля постоянного тока в проводящей среде. 7. Две металлические пластинки помещены в среду с проводимостью γ и расположены по отношению друг к другу аналогично тому, как показано на рис. 19.25, *а*. По картине поля определите проводимость G между пластинками на единицу длины. (*Ответ*: $G \approx 2{,}5\gamma$). 8. Металлический шарик радиуса R окружен бесконечно протяженной проводящей средой с проводимостью γ; с шарика в среду стекает ток (второй электрод в бесконечности); определите энергию в единицу времени, доставляемую источником. (*Ответ*: $I^2/4\pi\gamma R$). 9. Проводящая среда проводимостью γ занимает 1/4 полупространства, остальные 3/4 — воздух (рис. 20.10). В точке m двугранного угла находится металлический шарик, с которого в проводящую среду стекает ток I. Определите разность потенциалов между точками *1* и *2*, находящимися на поверхности проводящей среды. Точки *1*, *2* и центр шарика находятся в плоскости рисунка. Расстояния указаны на рисун-

ке. При решении рекомендуется воспользоваться аналогией между электростатическим полем и полем в проводящей среде, методом зеркальных изображений и принципом наложения. (*Ответ*: $U_{12} = \frac{I}{2\pi \sqrt{10}\, \gamma_a} (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} + 1)$. **10.** В каких случаях в электрическом поле постоянного тока в изотропной проводящей среде возможно накопление объемных зарядов? (*Ответ*: когда ε_r (или) γ являются функцией координат и $\varepsilon_r/\gamma \neq \text{const}$). **11.** В неоднородной проводящей среде с проводимостью $\gamma(x, y, z)$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_a(x, y, z)$ обеспечивается неизменное распределение плотности тока $\delta(x, y, z)$. Определите объемное распределение зарядов $\rho_{своб}$.

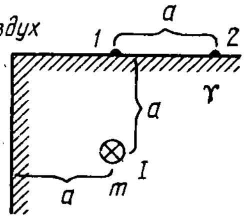


Рис. 20.10

(*Ответ*: $\rho_{своб} = \frac{\vec{\delta}}{\gamma}\left(\operatorname{grad} \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a}{\gamma} \operatorname{grad} \gamma\right)$, (см. § 24. 4). **12.** Решите задачи 20.2; 20.6; 20.8; 20.11; 20.14; 20.17; 20.24.

Глава двадцать первая

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 21.1. Связь основных величин, характеризующих магнитное поле. Механические силы в магнитном поле. Магнитное поле постоянного тока—это одна из компонент электромагнитного поля, не изменяющегося во времени. Оно создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. Хотя при протекании постоянных токов имеется и вторая компонента электромагнитного поля, а именно электрическое поле, но оно во времени не изменяется и потому не влияет на магнитное поле. Поэтому магнитное поле постоянного тока можно рассматривать независимо от электрического.

Магнитное поле характеризуется индукцией $\vec{B}$, намагниченностью $\vec{J}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. Эти три величины связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}^*, \tag{21.1}$$

где μ_0 — магнитная постоянная, в СИ равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; μ_a — абсолютная и μ_r — относительная магнитная проницаемости.

Одним из основных проявлений магнитного поля является воздействие его на проводник с током, помещенный в это поле**. Опыт показывает, что сила $\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника длиной $\vec{dl}$ с током I, определяется следующим образом:

$$\vec{F} = I[\vec{dl}\,\vec{B}]. \tag{21.2}$$

Эта сила направлена перпендикулярно индукции в данной точке поля и перпендикулярна элементу току $I\vec{dl}$ (рис. 21.1, *а*).

* Пояснения к формуле (21.1) см. § 14. 24.

** А в более общем случае воздействие его на движущийся заряд (§ 2.30).

Если индукция $\vec{B}$ и элемент длиной $\vec{dl}$ параллельны, то элемент тока не испытывает механического воздействия со стороны магнитного поля. Воздействие на элемент тока максимально, когда $\vec{B}$ и $\vec{dl}$ взаимно перпендикулярны.

Из (21.2) следует, что индукция — это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля элемент тока $I\vec{dl}$, расположенный перпендикулярно $\vec{B}$, не исказил магнитного поля, существовавшего до внесения в эту точку элемента тока. Другими словами, при оговоренном расположении элемента тока индукция численно определяется так: $B = \lim \frac{F}{Idl}{}_{(Idl)\to 0}$. Имея в виду это условие неискажения поля внесением элемента тока

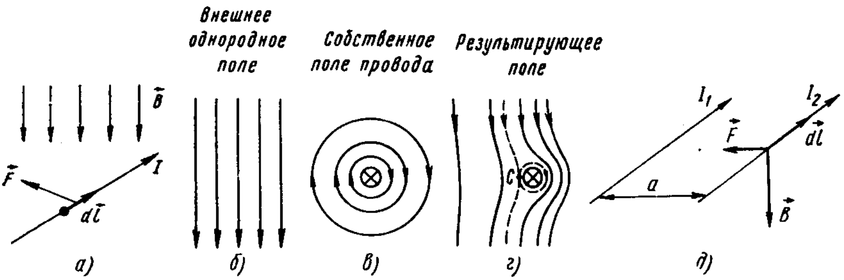


Рис. 21.1

в соответствии с (21.2) говорят также, что индукцию можно определить, как силу, действующую на проводник длиной dl, равной единице, если по нему протекает ток I, равный единице.

В СИ единицей индукции является тесла (1 Тл = 1 В·с/м^2) (в системе СГСМ — гаусс — Гс).

Механическое воздействие магнитного поля на ток можно пояснить, исходя из представления о деформации силовых линий магнитного поля или из понятия о силах Лоренца. Деформация силовых линий иллюстрируется рис. 21.1, *б—г*. На рис. 21.1 изображены: *б* — силовые линии равномерного магнитного поля до внесения в него провода с током; *в* — силовые линии уединенного провода с током; *г* — силовые линии результирующего поля. Слева от провода силовые линии собственного поля провода направлены встречно силовым линиям внешнего равномерного поля, а справа — согласно с ним. Поэтому результирующее поле слева от провода разрежено, а справа —сгущено. Силовые линии, стремясь выпрямиться, производят давление на провод справа налево.

Обратим внимание на то, что силовая линия, показанная пунктиром на рис. 21.1, *г*, является как бы граничной между силовыми линиями, расположенными справа и слева от провода. В точке *с* этой линии магнитная индукция равна нулю.

При взаимно перпендикулярном расположении магнитного поля и провода с током направление действия силы часто определяют по мнемоническому правилу, получившему название *правила левой руки*; если расположить левую руку таким образом, что силовые линии будут входить в ладонь, вытянутые пальцы направить по току, то отогнутый большой палец покажет направление действующей силы.

Взаимодействие поля с током имеет место независимо от причин возникновения магнитного поля, в результате ли протекания макротоков в электрических контурах или вследствие протекания микротоков в ферромагнитных материалах или потока электронов в вакуумном приборе и т. п. Оно наблюдается как в постоянном, так и в изменяющемся во времени поле*.

Пример 205. На рис. 21.1, *д* изображены два параллельных провода, расстояние между которыми $a = 10$ см. По первому проводу течет ток $I_1 = 1000$ А, по второму $I_2 = 500$ А (направления токов показаны стрелками). Определить силу взаимодействия между проводами на длине 1 м.

Решение. Воспользуемся формулой (21.2). Учтем, что угол между элементом длины второго провода $\vec{dl}$ и индукцией $\vec{B}$ от левого провода равен 90°. Поэтому модуль векторного произведения $[\vec{dl}\vec{B}]$ равен $dlB \sin 90° = dl\, B$.

Магнитная индукция, создаваемая первым проводом в точках, где расположен второй провод, по закону полного тока $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Сила

$$F = I_2 dlB = \frac{I_1 I_2 \mu_0 dl}{2\pi a} \quad \text{или} \quad F = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2\pi \cdot 0{,}1} \approx 1 \text{ Н}.$$

Под действием силы провода стремятся сблизиться.

§ 21.2. Интегральная форма закона полного тока. Количественная связь между циркуляцией вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру и током внутри контура определяется законом полного тока в интегральной форме — линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур:

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = I. \tag{21.3}$$

Под *полным током* понимают весь ток (ток проводимости и ток смещения), пронизывающий контур интегрирования.

Интегральную форму закона полного тока применяют, когда может быть использована симметрия в поле. Так, например, напряженность поля в некоторой точке A в поле уединенного прямого провода с током I (рис. 21.2) по закону полного тока определяют следующим образом. Проведем через точку A окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной оси провода, так что центр ее находится на этой оси. В силу симметрии напряженность поля во всех точках окружности числен-

* В § 21.28 показано, что силу можно определить как производную от энергии магнитного поля по изменяющейся координате контура с током.

но одна и та же. Направление напряженности совпадает с касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \oint H dl \cos 0° = H \oint dl = H 2\pi R = I; \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

С увеличением радиуса R напряженность магнитного поля убывает по гиперболическому закону.

Если какое-либо поле имеет сложный характер и не удается составить замкнутый контур, все точки которого находились бы в симметричных условиях, то хотя интегральная форма записи закона полного то-

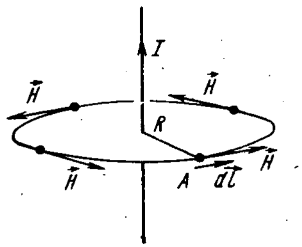


Рис. 21.2

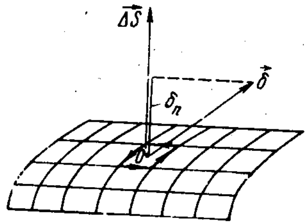


Рис. 21.3

ка справедлива и для такого контура, использовать ее для нахождения напряженности в любой точке поля так просто не удается (H нельзя вынести из-под знака интеграла).

§ 21.3. Дифференциальная форма закона полного тока. Соотношение (21.3) пригодно для контура любых размеров, в том числе и для весьма малого.

Выделим в какой-либо среде небольшой контур («жирно» обведен на рис. 21.3) и составим вдоль него циркуляцию вектора $\vec{H}$. Циркуляция напряженности поля вдоль этого контура равна току, пронизывающему обведенную площадь.

Если площадь мала, то можно полагать, что плотность тока $\vec{\delta}$ в пределах этой площади одинакова и тогда ток, пронизывающий площадь, $\Delta i = \vec{\delta}\Delta\vec{S} = \delta_n \Delta S$. Здесь δ_n — проекция вектора плотности тока $\vec{\delta}$ на нормаль к площади, т. е. на направление $\Delta\vec{S}$; $\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \delta_n \Delta S$.

За положительное направление нормали к площади принимают направление движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении, принятом за положительное при обходе контура и составлении циркуляции.

Разделим обе части равенства на ΔS и устремим ΔS к нулю. Это будет соответствовать стягиванию рассматриваемой площади к нулю. Предел полученного отношения

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{H}\,\vec{dl}}{\Delta S} = \delta_n.$$

В левой части равенства находится величина, являющаяся проекцией ротора $\vec{H}$ на направление нормали к площади ΔS. Следовательно, $\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n$.

Если площадь ΔS ориентировать в пространстве так, что направление нормали к ней совпадет с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$ в данной точке поля, то тогда вместо равенства проекций двух векторов ($\text{rot}_n \vec{H}$ и δ_n) можно записать равенство самих векторов

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}. \qquad (21.4)$$

Формула (21.4) *и представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.*

Ротор —это функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

Уравнение (21.4) записано в общей форме безотносительно к системе координат, и в каждой конкретной системе координат оно раскрывается по-своему.

§ 21.4. Раскрытие выражения $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}$ в декартовой системе координат. Равенство двух векторов rot H и $\vec{\delta}$ означает, что равны проекции их на ось x, проекции на ось y и проекции на ось z. Проекция $\text{rot}\,\vec{H}$ на ось z равна $\text{rot}_z \vec{H}_{\Delta S_z \to 0} = \dfrac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S_z}$, проекция вектора $\vec{\delta}$ на ось z есть δ_z и т. д.

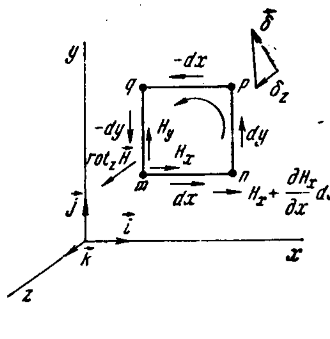


Рис. 21.4

На рис. 21.4 в декартовой системе координат изображен малый прямоугольный контур $mnpq$. Обойдем этот контур против часовой стрелки и составим циркуляцию вектора $\vec{H}$; при ее составлении необходимо учесть изменение вектора $\vec{H}$ от точки к точке. Обозначим проекции $\vec{H}$ на оси x и y в точке m соответственно через H_x и H_y.

В точке n проекция на ось x изменится по сравнению с проекцией в точке m и будет равной $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$; проекция на ось y будет $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$.

В точке q

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \text{ и } H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy.$$

В точке p

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \text{ и } H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

При составлении циркуляции на участках mn и pq необходимо принимать во внимание лишь «иксовые» составляющие $\vec{H}$ («игрековые» составляющие перпендикулярны элементу пути).

Составляющую $\oint \vec{H}d\vec{l}$ на участке mn находят как произведение среднего значения «иксовой» составляющей напряженности на этом участке на длину пути dx:

$$\frac{H_x+\left(H_x+\frac{\partial H_x}{\partial x}dx\right)}{2}dx=\left(H_x+\frac{1}{2}\frac{\partial H_x}{\partial x}dx\right)dx;$$

на участке np

$$\left(H_y+\frac{\partial H_y}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\frac{\partial H_y}{\partial y}dy\right)dy;$$

на участке pq

$$\left(H_x+\frac{\partial H_x}{\partial y}dy+\frac{1}{2}\frac{\partial H_x}{\partial x}dx\right)(-dx);$$

на участке qm

$$\left(H_y+\frac{1}{2}\frac{\partial H_y}{\partial y}dy\right)(-dy).$$

Если просуммировать все составляющие циркуляции вдоль контура $mnpq$, то получим

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)dxdy.$$

В соответствии с определением проекции ротора на ось z разделим циркуляцию на площадь $dS_z = dxdy$, после чего проекция ротора на направление оси z:

$$\mathrm{rot}_z\vec{H}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\delta_z.$$

Аналогично,

$$\mathrm{rot}_x\vec{H}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\delta_x \quad \text{и} \quad \mathrm{rot}_y\vec{H}=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\delta_y.$$

Таким образом,

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right). \quad (21.5)$$

§ 21.5. Запись ротора в виде векторного произведения. Формально $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ можно представить в виде векторного произведения оператора пространственного дифференцирования ∇ на вектор $\vec{H}$, т. е. $\mathrm{rot}\,\vec{H} = [\nabla\vec{H}]$.

В этом нетрудно убедиться путем непосредственного умножения ∇ на $\vec{H}$:

$$\left[\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}H_x+\vec{j}H_y+\vec{k}H_z)\right]=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right).$$

§ 21.6. Раскрытие rot $\vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе. Ротор любого вектора, используемого в теории электромагнитного поля, можно представить в виде определителя третьего порядка.

Так, rot $\vec{H}$ в декартовой системе записывают в виде следующего определителя:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}. \qquad (21.6)$$

Непосредственное раскрытие определителя показывает, что получается выражение (21.5).

§ 21.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода приведем выражение проекций ротора $\vec{H}$:

в цилиндрической системе координат:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}_r\vec{H}&=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\alpha}-\frac{\partial H_\alpha}{\partial z};\\ \operatorname{rot}_\alpha\vec{H}&=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r};\\ \operatorname{rot}_z\vec{H}&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha)-\frac{\partial H_r}{\partial\alpha}\right];\end{aligned}\right\} \qquad (21.7)$$

в сферической системе координат:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}_R\vec{H}&=\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\alpha)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\alpha}\right];\\ \operatorname{rot}_\theta\vec{H}&=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial H_R}{\partial\alpha}-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\alpha);\\ \operatorname{rot}_\alpha\vec{H}&=\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RH_\theta)-\frac{\partial H_R}{\partial\theta}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (21.8)$$

§ 21.8. Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме. Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность: $\Phi=\int\limits_S\vec{B}d\vec{S}$.

Индекс S под знаком интеграла свидетельствует о том, что интеграл взят по поверхности S. Если поверхность замкнута сама на себя (например, поверхность шара), то поток, пронизывающий замкнутую поверхность, $\Phi = \oint \vec{B}\,\vec{dS}$.

Опыт показывает, что вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того же объема.

Следовательно, алгебраическая сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема потоков равна нулю:

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (21.9)$$

Выражение (21.9) представляет собой математическую запись принципа непрерывности магнитного потока.

Разделим обе части (21.9) на объем V, находящийся внутри замкнутой поверхности S, и найдем предел отношения, когда объем V стремится к нулю:

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{B}d\vec{S}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \qquad (21.10)$$

Соотношение (21.10) можно трактовать как дифференциальную форму принципа непрерывности магнитного потока. Оно пригодно для любой точки магнитного поля. Следовательно, в любой точке этого поля нет ни истока, ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии вектора $\vec{B}$ нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии (окружность — пример замкнутой на себя линии).

Но линии $\vec{H}$ в точках, где изменяется $\vec{J}$ (например, на границах сред с разными μ_r) прерывны. Это следует из (21.10): $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = 0$. Отсюда $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}$. Сопоставьте с прерывностью линий $\vec{E}$ и непрерывностью линий $\vec{D}$ в электрическом поле (см. § 19.39).

§ 21.9. Магнитное поле в областях «занятых» и «не занятых» постоянным током. *Вихревыми* принято называть поля, в которых ротор векторной величины, описывающей поле, отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, то во всех точках пространства, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора $\vec{H}$ является вихревым. В областях пространства, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как *потенциальное*.

§ 21.10. Скалярный потенциал магнитного поля. Для совокупности точек, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, т. е. как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал $\varphi_м$. Следовательно, для таких областей можно принять

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_м. \qquad (21.11)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0$, то при $\mu_a = \text{const}$ $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Подставив в последнее выражение — $\operatorname{grad} \varphi_м$, вместо $\vec{H}$, получим $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_м = 0$.

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля $\varphi_м$, о котором может идти речь только для областей, не занятых током, подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_м = 0. \qquad (21.12)$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками *1* и *2* называют *падением магнитного напряжения* между точками *1* и *2* (см. § 14.11):

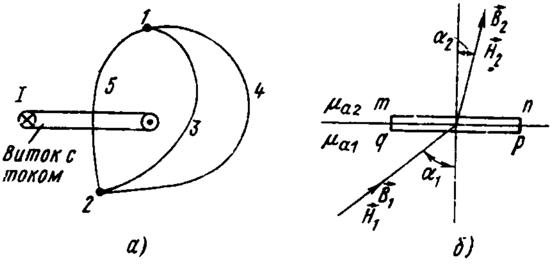


Рис. 21.5

Падение магнитного напряжения между точками *1* и *2* по какому-то одному пути (например, по пути *132*, рис. 21.5, *а*) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по какому-то другому пути (например, по пути *142*) в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

Если же замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый не равный нулю ток, то падение магнитного напряжения по первому пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути — они будут различаться на величину тока, охваченного контуром. Последнее вытекает из закона полного тока. Так, применительно к рис. 21.5, *а* $\int\limits_{152} \vec{H} d\vec{l} \neq \int\limits_{132} \vec{H} d\vec{l}$ (ибо из закона полного тока следует, что $\int\limits_{132} \vec{H} d\vec{l} + \int\limits_{251} \vec{H} d\vec{l} = -I$, или $\int\limits_{132} \vec{H} d\vec{l} = -I + \int\limits_{152} \vec{H} d\vec{l}$).

Следовательно, для того чтобы разность магнитных потенциалов между двумя точками магнитного поля не зависела от пути, надо наложить запрет на прохождение через контур (виток) с током, мысленно натянув на этот контур некоторую пленку. При прохождении через эту пленку $\varphi_м$ изменяется скачком на величину тока в контуре.

Следует различать понятия «падение магнитного напряжения» и «магнитное напряжение». Первое определяется только линейным интегралом от $\vec{H}$ на $d\vec{l}$ по выбранному пути. Второе — не только этим интегралом, но и магнитодвижущей силой (м. д. с.), имеющейся на пути. Здесь имеется полная аналогия с понятиями «падение напряжения» и «напряжение» в электрической цепи.

§ 21.11. Граничные условия. Подобно тому как в электростатическом поле и в поле проводящей среды выполнялись определенные граничные условия в магнитном поле также имеют место аналогичные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}; \tag{21.13}$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{21.14}$$

Условие (21.13) означает, что на границе раздела двух однородных и изотропных сред, различных в магнитном отношении (различные μ_r), равны тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля.

Условие (21.14) свидетельствует о равенстве нормальных составляющих векторов магнитных индукций на границе раздела.

Условие (21.13) выводят путем составления линейного интеграла $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$ по плоскому контуру *mnpq* (рис. 21.5, *б*) и приравнивания его нулю (так как он не охватывает тока). Стороны *np* и *qm* ничтожно малы по сравнению со сторонами *mn* и *pq*. Длину стороны *mn* и равную ей по величине длину стороны *pq* обозначим через dl. Тогда $H_1 \sin \alpha_1\, dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = 0$, но $H_1 \sin \alpha_1 = H_{1t}$, $H_2 \sin \alpha_2 = H_{2t}$, следовательно $H_{1t} = H_{2t}$.

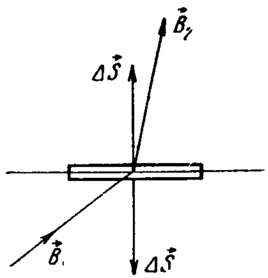


Рис. 21.6

Условие (21.13) не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый *поверхностный ток*. Под ним понимают ток, протекающий по бесконечно тонкому плоскому проводнику, помещенному на границе раздела.

В этом случае $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$ будет равняться не нулю, а поверхностному току σdl, (σ — линейная плотность тока), который оказался внутри замкнутого контура: $H_1 \sin \alpha_1\, dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = \sigma dl$ и в силу этого $H_{1t} - H_{2t} = \sigma$. Этот ток направлен перпендикулярно плоскости, в которой находится контур интегрирования, и знак его должен быть взят в соответствии с правилом правого винта.

Другими словами, при наличии поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряженности поля терпит разрыв. Как правило, поверхностный ток отсутствует, и условие (21.13) выполняется.

Равенство нормальных составляющих векторов магнитной индукции следует из принципа непрерывности магнитного потока: $\oint \vec{B}\vec{dS} = 0$.

Для того чтобы убедиться в справедливости (21.14), на границе раздела выделим небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора $\vec{B}$ через нижнюю грань (рис. 21.6) — $B_{1n}\Delta S$ и верхнюю $B_{2n}\Delta S$.

Сумма потоков равна нулю: $-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S = 0$. Следовательно, $B_{1n} = B_{2n}$.

Из (21.13) и (21.14) вытекает соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \tag{21.15}$$

Оно дает связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2 (см. рис. 21.5, *б*). Если магнитные силовые линии выходят из среды с большой магнитной проницаемостью, например, $\mu_{a1} = 10^4\mu_0$, в среду с малой магнитной проницаемостью, например, в воздух $\mu_{a2} = \mu_0$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = 10^4$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = 10^{-4}\operatorname{tg}\alpha_1$.

Следовательно, угол α_2 много меньше угла α_1.

Пример 206. Найти угол α_2, под которым силовые линии выходят в среду с магнитной проницаемостью μ_{a2}, если угол $\alpha_1 = 89°$; $\mu_{a1} = 10^4\ \mu_0$, $\mu_{a2} = \mu_0$.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg} 89° = 57{,}29$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\operatorname{tg}\alpha_1 = 10^{-4} \times \times \operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}005729$; $\alpha_2 = 20'$.

§ 21.12. Векторный потенциал магнитного поля. Для расчета магнитных полей широко используют векторный потенциал, или вектор-потенциал магнитного поля. Его обозначают $\vec{A}$. Это векторная величина, плавно изменяющаяся от точки к точке, ротор которой равен магнитной индукции:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (21.16)$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора-потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю.

Известно, что в магнитном поле $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Подстановка в это равенство $\operatorname{rot}\vec{A}$ вместо $\vec{B}$ дает выражение, тождественно равное нулю: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$.

Равенство нулю $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}$ можно пояснить с помощью оператора ∇. С этой целью вместо $\operatorname{rot}\vec{A}$ запишем $[\nabla\vec{A}]$. Тогда $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla[\nabla\vec{A}]$. Векторное произведение $[\nabla\vec{A}]$ перпендикулярно и к ∇ и к $\vec{A}$. Скалярное произведение ∇ на $[\nabla\vec{A}]$, т. е. $\nabla[\nabla\vec{A}]$, равно нулю потому, что равен нулю косинус угла между ∇ и $[\nabla\vec{A}]$.

Если вектор-потенциал как функция координат известен, то индукцию в любой точке поля определяют путем нахождения ротора от вектора-потенциала в соответствии с (21.16). В отличие от скалярного магнитного потенциала $\varphi_м$, пользоваться которым можно только для областей, не занятых током (см. § 21.10), векторным потенциалом можно пользоваться как для областей, не занятых током, так и для областей, занятых током.

В электротехнических расчетах векторный потенциал применяют для *двух целей*: 1) определения магнитной индукции с помощью формулы (21.16); 2) определения магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (см. § 21.14).

Векторный потенциал в произвольной точке поля связан с плотностью тока в этой же точке уравнением Пуассона.

§ 21.13. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала. Умножим обе части (21.4) на магнитную проницаемость среды μ_a: $\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_a \vec{\delta}$.

Условимся, что будем иметь дело с полями, которые можно подразделить на отдельные области, так что магнитные проницаемости μ_a в каждой отдельной области постоянны. Если μ_a постоянна, то ее можно подвести под знак ротора:

$$\operatorname{rot} \mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}. \tag{21.17}$$

В (21.17) вместо $\vec{B}$ подставим $\operatorname{rot} \vec{A}$, тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \tag{21.18}$$

Операция взятия ротора от ротора есть операция раскрытия двойного векторного произведения и выполняется так:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \tag{21.19}$$

Из курса математики известно, что двойное векторное произведение раскрывается следующим образом: $[\vec{a}\, [\vec{b}\, \vec{c}]] = \vec{b}\, (\vec{a}\, \vec{c}) - \vec{c}\, (\vec{a}\, \vec{b})$. В данном случае роль векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ играет оператор ∇, а роль вектора $\vec{c}$ вектор-потенциал $\vec{A}$. Таким образом $[\nabla [\nabla \vec{A}]] = \nabla (\nabla \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$.

До сих пор к вектору-потенциалу никаких дополнительных требований не предъявлялось, если не считать того, что он должен быть функцией, имеющей пространственные производные. Так как $\vec{A}$ есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{21.20}$$

Это требование означает, что линии вектора $\vec{A}$ есть замкнутые сами на себя линии. С учетом (21.20) уравнение (21.19) приобретает вид:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \tag{21.21}$$

Уравнение (21.21) представляет собой уравнение Пуассона. В отличие от (19.26), составленного относительно скалярной величины φ, уравнение (21.21) составлено относительно векторной величины. Вместо $\vec{A}$ в (21.21) подставим $\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$ и плотность тока заменим на $\vec{i} \delta_x + \vec{j} \delta_y + \vec{k} \delta_z$:

$$\nabla^2 \vec{i} A_x + \nabla^2 \vec{j} A_y + \nabla^2 \vec{k} A_z = -\mu_a \vec{i} \delta_x - \mu_a \vec{i} \delta_y - \mu_a \vec{k} \delta_z.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения, составленные относительно скалярных величин A_x, A_y, A_{za}:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \delta_x;$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu_a \delta_y;$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_a \delta_z.$$

Общее решение их по аналогии с решением уравнения (19.26) записывают так:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\delta_x\,dV}{R}; \tag{21.22}$$

$$A_y = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\delta_y\,dV}{R}; \tag{21.22а}$$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\delta_z\,dV}{R}. \tag{21.22б}$$

Если (21.22) умножить на $\vec{i}$, (21. 22а) — на $\vec{j}$ и (21.22б) — на $\vec{k}$ и сложить, то получим

$$\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{(\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z)\,dV}{R},$$

$$\text{или } \vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{\delta}\,dV}{R}, \tag{21.23}$$

Единицей измерения для A является В·с/м.

Формула (21.23) дает общее решение уравнения (21.21). Вектор-потенциал в любой точке поля можно определить вычислением объемного интеграла (21.23). Последний должен быть взят по всем областям, занятым током.

Несмотря на то что формула (21.23) дает общее решение, пользоваться ею в дальнейшем будем редко ввиду того, что взятие интеграла правой части формулы сопряжено обычно со значительными математическими выкладками.

§ 21.14. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала. Магнитный поток, пронизывающий какую-либо поверхность S,

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S}. \tag{21.24}$$

Так как

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \text{ то } \Phi = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{S}. \tag{21.24}$$

На основании теоремы Стокса поверхностный интеграл может быть преобразован в линейный:

$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{S} = \oint \vec{A}d\vec{l}. \tag{21.25}$$

Таким образом,

$$\Phi = \oint \vec{A}d\vec{l}. \tag{21.26}$$

Другими словами, для определения магнитного потока, пронизывающего некоторую площадь (поверхность) S, необходимо подсчитать циркуляцию вектора потенциала по замкнутому контуру, на который опирается поверхность S.

Определение потока по (21.26) часто имеет преимущества по сравнению с определением потока через магнитную индукцию по (21.24).

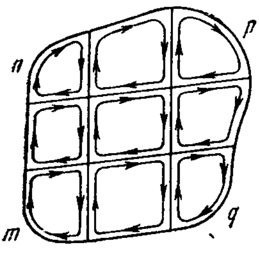


Рис. 21.7

Соотношением (21.24) можно пользоваться в том случае, когда известно значение $\vec{B}$ в любой точке поверхности S, тогда как для вычисления потока с помощью соотношения (21.26) достаточно знать значение $\vec{A}$ на контуре и не требуется знания $\vec{A}$ в точках внутри контура.

Переход от $\int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{S}$ к интегралу $\oint \vec{A}\, d\vec{l}$ можно пояснить следующим образом.

Разобьем площадь S на элементарные площадки (рис. 21.7). Заменим интеграл суммой и под интегралом вместо $\operatorname{rot} \vec{A}$ подставим в соответствии с определением ротора $\oint \frac{\vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta S}$ (предел опущен), тогда

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{S} \approx \sum \frac{\oint \vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta S} \Delta S = \sum \oint \vec{A}\, d\vec{l}.$$

Таким образом, для вычисления $\int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{S}$ необходимо найти составляющие циркуляции вектора $\vec{A}$ по контурам всех элементарных площадок и затем сложить их. Так как при составлении циркуляции обход участков, являющихся смежными между какими-либо двумя соседними площадками, совершается дважды и притом в противоположных направлениях, то составляющие циркуляции на всех смежных участках взаимно уничтожаются и остается циркуляция только по периферийному контуру $mnpq$:

$$\sum \oint \vec{A}\, d\vec{l} = \oint \vec{A}\, d\vec{l} \text{ по контуру } mnpq.$$

Рассмотрим граничные условия для векторного потенциала.

Если к плоскому контуру на границе раздела двух сред (подобно изображенному на рис. 21.5, *б* и у которого размер $np \to 0$) применить (21.26) и учесть, что поток через этот контур равен нулю, то получим *граничное условие для тангенциальной составляющей вектора* $\vec{A}$ $A_{1t} = A_{2t}$*.

Нормальная составляющая вектора $\vec{A}$ в постоянном магнитном поле тоже непрерывна, т. е. $A_{1n} = A_{2n}$. Это следует из того, что для этого поля $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

* Однако, если на границе раздела двух сред имеется двойной токовый слой (см. § 21.30), то тангенциальная составляющая вектора $\vec{A}$ при переходе через него претерпевает разрыв.

Но для *переменного* электромагнитного поля $\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ [см. формулу (25.12)], поэтому для синусоидального поля при использовании нормировки Лоренца: $\dot{A}_{1n} - \dot{A}_{2n} = -\frac{j\omega}{v^2}\dot{\varphi}$.

§ 21.15. Векторный потенциал элемента тока. Определим величину и направление составляющей векторного потенциала $\vec{A}$, создаваемой током i, протекающим по элементу линейного проводника длиной dl. Пусть расстояние от элемента тока до произвольной точки пространства обозначено через R (рис. 21.8) ($R \gg dl$). В соответствии с общим выражением

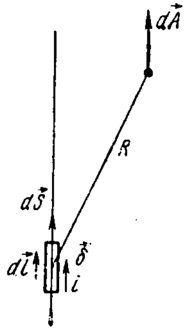


Рис. 21.8

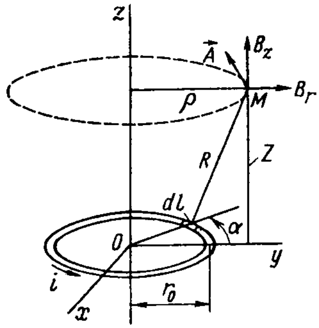


Рис. 21.9

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} dV}{4\pi R}, \text{ но } \vec{\delta} dV = \vec{\delta} d\vec{S} d\vec{l} = i d\vec{l},$$

где dS — площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a i d\vec{l}}{4\pi R}. \tag{21.27}$$

Составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет *такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника.*

Пример 207. Вывести формулы для определения $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в поле кругового витка (рис. 21.9) радиусом r_0 с током i, находящегося в плоскости xoy.

Решение. От элемента тока $id\vec{l}$ (он составляет угол α с осью y) в произвольной точке M, удаленной от оси z на расстояние ρ и на Z от плоскости xoy, если полагать, что расстояние R велико по сравнению с линейными размерами поперечного сечения проводника, составляющая векторного потенциала определится формулой (21.27).

Полное значение

$$\vec{A} = \frac{\mu_a i}{4\pi}\oint\frac{d\vec{l}}{R}.$$

Разложив $\vec{dl}$ на две проекции: $dl_1 = dl \sin\alpha$ и $dl_2 = dl \cos\alpha$ и учитывая, что $dl = r_0 d\alpha$ и что синус—функция нечетная, а косинус—четная, убеждаемся в наличии у A только α-компоненты:

$$\vec{A} = \vec{\alpha}_0 A_\alpha = \vec{\alpha}_0 \frac{\mu_a i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\alpha dl}{R};$$

$$R = (Z^2 + r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos\alpha)^{1/2};$$

$$A_\alpha = \frac{\mu_a i}{\pi k} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{1/2} [(1 - 0{,}5k^2) K - N].$$

Здесь K и N — полные эллиптические интегралы первого и второго рода — функции табулированные:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - k^2 \sin^2\beta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}(1 + 2a + 9a^2 + 50a^3 + 0{,}25 \cdot 1225a^4 + \ldots) = f_1(k);$$

$$N = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\beta)^{1/2} d\beta = \frac{\pi}{2}(1 - 2a - 3a^2 - 10a^3 -$$

$$- 0{,}25 \cdot 175a^4 - \ldots) = f_2(k);$$

$$k^2 = \frac{4\rho r_0}{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}; \quad \beta = 0{,}5(\pi - \alpha); \quad a = k^2/8.$$

На основании формул (21.16) и (21.7), заменив в них H на A и опустив выкладки, получим проекции индукции $\vec{B}$ в точке M цилиндрической системы координат

$$B_\alpha = 0; \quad B_r = \frac{i\mu_a}{2\pi\rho} \frac{Z}{[(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[-K + \frac{r_0^2 + \rho^2 + Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N\right];$$

$$B_z = \frac{i\mu_a}{2\pi [(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[K + \frac{r_0^2 - \rho^2 - Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N\right].$$

§ 21.16. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей. Между картинами электростатического и магнитного полей постоянного тока в областях, не занятых током, может быть соответствие двух типов.

Первый тип — когда одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля (сетка поля) подобна картине соответствующего электростатического поля. Отличие состоит лишь в том, что силовым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалям электростатического поля — силовые линии магнитного.

В качестве примера на рис. 21.10, *а* изображена картина электрического поля, образованного уединенным линейным зарядом $+\tau$, а на рис. 21.10, *б* — картина магнитного поля уединенного проводника с током (для области вне проводника).

Второй тип — когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом и магнитном полях постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно *одинаковой*.

Соответствие второго типа показано на рис. 21.10, *в*. На нем изображена картина магнитного поля в воздушном промежутке между полюсом и якорем машины постоянного тока (обмотки не показаны). Если допустить, что полюс и якорь этой машины используются в качестве электродов некоторого конденсатора, то картина электрического поля в воздушном промежутке между электродами соответствовала

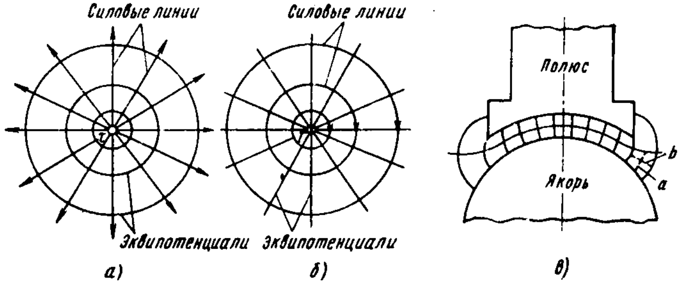


Рис. 21.10

бы картине магнитного поля — в обоих случаях силовые линии выходили бы из полюса и входили бы в якорь нормально к поверхности полюса и якоря.

§ 21.17. Задачи расчета магнитных полей. Рассмотрим некоторые типы задач расчета магнитный полей.

Первый тип — определение индуктивности какого-либо контура или взаимной индуктивности двух контуров.

Второй тип — определение сил, действующих в магнитном поле на движущийся электрон, неподвижный проводник с током, ферромагнитные массы в магнитном поле.

Третий тип — расчет поля, создаваемого заданным распределением токов в пространстве.

Четвертый тип — расчет магнитных экранов. *Магнитными экранами* называют устройства, предназначенные для ослабления магнитного поля в заданной области пространства по сравнению с магнитным полем вне экрана. К магнитной экранировке прибегают, например, для защиты чувствительных приборов от влияния посторонних магнитных полей, в частности от влияния магнитного поля Земли.

Пятый тип — нахождение распределения токов в некотором объеме для получения заданной картины магнитного поля. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей: корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле Земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом расстоянии. Соответствующие индикаторы на возмущение магнитного поля Земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (имеются в виду условия военного времени), и в результате корабль может оказаться подорванным. Чтобы этого не случилось, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, которые располагают таким образом, чтобы скомпенсировать возмущение магнитного поля Земли вблизи корабля.

Много различных задач на расчет магнитных полей возникает при магнитной записи звука, а также при магнитной дефектоскопии. Магнитная дефектоскопия позволяет по картине магнитного поля судить о наличии раковин, трещин и других дефектов в изделях из ферромагнитных материалов. Широко распространена она на железнодорожном транспорте при контроле целостности рельсов железнодорожного пути. Это объясняется ее экономичностью и быстротой осуществления контроля.

§ 21.18. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей. Методы расчета и исследования магнитных полей можно подразделить на три группы: аналитическую, графическую и экспериментальную.

Группу аналитических методов объединяет все чисто аналитического порядка приемы интегрирования уравнения Пуассона (для областей, занятых током), уравнения Лапласа (для областей, не занятых током), применение методов зеркальных и конформных отображений и др.

В силу трудностей математического характера классические аналитические методы позволяют решать относительно небольшой круг задач.

В тех случаях, когда расчет поля аналитическими методами вызывает затруднения, прибегают к графическому методу построения картины поля или к исследованию магнитного поля на модели. Графические методы построения картины поля применимы к двухмерным безвихревым полям.

За последние годы применяют также метод интегральных уравнений (см. приложение З), предполагающий использование ЭВМ и значительно расширяющий круг решаемых задач.

§ 21.19. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления. Рассмотрим методику графического построения картины плоскопараллельного магнитного поля на конкретном примере.

На рис. 21.10, *в* изображены часть полюса и якоря машины постоянного тока (на которых не размещены обмотки с током). Размер, перпендикулярный рисунку, принят достаточно большим — только при этом условии поле можно считать плоскопараллельным. Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, то магнитные силовые линии практически перпендикулярны поверхности полюса и якоря. Следовательно, их поверхности являются эквипотенциальными. Построение семейства силовых и эквипотенциальных линий производят «на глаз», руководствуясь следующим: силовые линии должны быть перпендикулярны поверхностям полюса и якоря и так расположены по отношению друг к другу, чтобы после проведения эквипотенциалей образовались криволинейные прямоугольники, для которых *отношение* средней ширины b к средней длине a было приблизительно одинаково для всех прямоугольников. При первом построении это, возможно, не удастся сделать достаточно хорошо, но после нескольких попыток, особенно при наличии некоторого навыка и с учетом симметрии в поле (если она имеется), удается построить сетку поля так, что $b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3 = \ldots$

При этом потоки во всех силовых трубках одинаковы. Это облегчает подсчет магнитного сопротивления.

Пусть число криволинейных прямоугольников в силовой трубке равно n, а число трубок — m (для рис. 21.10, *в* $n = 2$ и $m = 11$). Магнитное напряжение между полюсом и якорем:

$$U_м = \int \vec{H} d\vec{l} \approx H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_3 a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} H_k a_k.$$

Поток в одной силовой трубке:

$$\Delta\Phi = lb_1 \mu_a H_1 = lb_2 \mu_a H_2 = \ldots,$$

где l — размер в направлении, перпендикулярном чертежу; μ_a — магнитная проницаемость воздуха (равна μ_0).

Следовательно,

$$H_1 = \frac{\Delta\Phi}{lb_1 \mu_a}, \quad H_2 = \frac{\Delta\Phi}{lb_2 \mu_a} \text{ и т.д.}$$

Магнитное напряжение

$$U_м = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots\right).$$

По построению все слагаемые (a_1/b_1, a_2/b_2 и т. д.) одинаковы. Число слагаемых равно n. Поэтому

$$U_м = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \frac{a}{b} n.$$

Отсюда

$$\Delta\Phi = \frac{U_м \mu_a lb}{na}.$$

Поскольку для всех прямоугольников $b/a \approx \text{const}$, то построения осуществлены так, что потоки $\Delta\Phi$ во всех силовых трубках одинаковы. Полный поток с якоря на полюс: $\Phi = m\Delta\Phi = U_м \mu_a l \frac{b}{a} \frac{m}{n}$, где m — число силовых трубок.

Магнитное сопротивление

$$R_м = \frac{U_м}{\Phi} = \frac{an}{\mu_a lbm}. \tag{21.28}$$

Магнитная проводимость

$$G_м = \frac{\mu_a lbm}{an}. \tag{21.29}$$

Графический метод построения картины поля применяют *не только* для расчета магнитных полей, но и для других безвихревых полей: для расчета электростатического поля и поля постоянного тока в проводящей среде. Так, электрическую проводимость G между двумя телами определяют по формуле (21.30), которую получают из формулы (21.29), заменив μ_a на γ:

$$G = \frac{\gamma l b m}{a n}. \qquad (21.30)$$

Емкость между двумя телами в плоскопараллельном поле (см. § 19.44):

$$C = \frac{\varepsilon_a l b m}{a n}. \qquad (21.31)$$

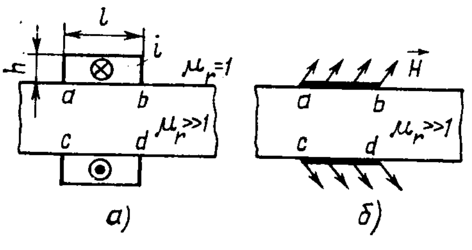


Рис. 21.11

Если на некотором участке магнитной цепи, на котором $\mu_r \gg 1$ — рис. 21.11, *а* — расположена обмотка с током i, числом витков w, шириной l и высотой h ($h/l < 0{,}5$), то для приближенного графического построения поля в воздухе вблизи ферромагнитной поверхности обмотку с током заменяют бесконечно тонким токовым слоем шириной l с линейной плотностью $\sigma = iw/l$ (рис.21.11, *б*). Линии $\vec{H}$ должны отходить от участков поверхности ab и cd так, что тангенциальная составляющая их H_t должна быть численно равна σ (в соответствии с § 21.11).

§ 21.20. Опытное исследование картины магнитного поля. Опытное исследование картины магнитного поля производят различными методами.

Первый метод основан на явлении электромагнитной индукции и состоит в следующем. Плоскую очень малых размеров рамку с намотанной на нее обмоткой помещают в исследуемую область поля и соединяют с баллистическим гальванометром. При коммутации тока в обмотках аппарата (или машины), поле в воздушном зазоре которого исследуется, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключают), измеряют количество электричества, протекшее по баллистическому гальванометру, и по нему судят о среднем значении индукции в рамке. Затем рамку помещают в другую точку поля и снова определяют индукцию и т. д. Этот метод дает возможность исследовать магнитные поля практически любой конфигурации в пространстве вне ферромагнетиков.

Второй метод исследования безвихревого поля — метод моделирования полями тока в проводящей среде — основан на аналогии между полем в проводящей среде и магнитным безвихревым полем. Он состоит в следующем. Для снятия картины плоскопараллельного поля в воздушном зазоре какого-либо аппарата или машины из листа металла (например, из стального листа) изготовляют увеличенную модель исследуемого участка поля. Так, на рис. 21.12 изображена модель *mpqrstn* для исследования поля рассеяния между полюсами машины постоянного тока.

Линия *mpqr* модели — это очертание края полюса, *rs* — очертание нижней части ярма, пунктирная линия *abc* — очертание верхней части ярма, *st* — линия симметрии в поле. Так как м. д. с. распределена по высоте полюса, то подвод тока к краю полюса (линии *qr*) производится от нескольких припаянных к листу проводов. Токи в них могут регулироваться и этим может задаваться закон распределения м. д. с. по высоте полюса. Отвод тока от линии *mn*, являющейся эквипотенциальной, производится с помощью массивной проводящей колодки.

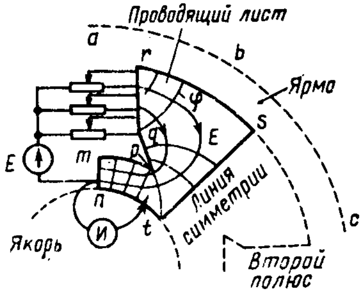


Рис. 21.12

Щуп и индикатор *И* (гальванометр) служат для построения эквипотенциалей в поле проводящей среды.

Линии *mpq* и *rstn* эквипотенциальные. К ним линии $\vec{E}$ подходят под прямым углом. Линия *rp* в общем случае не является эквипотенциальной, поэтому к ней линии $\vec{E}$ подходят не под прямым углом. Тангенциальная составляющая $\vec{E}$ в точке на линии *rq* равна тангенциальной составляющей плотности тока в этой точке, поделенной на проводимость γ модели. Линиям *E* и φ модели соответствуют линии $\varphi_м$ и *H* исследуемого участка магнитного поля.

Третий метод — применение преобразователей Холла кристаллических или пленочных. Они дают возможность измерять индукцию в диапазоне примерно от 1 мТл до нескольких Тл. Для примера укажем, что преобразователь типа П × Э — 606 имеет размеры 0,7 × 0,7 × × 0,15 мм и чувствительность $\gamma = 1$ *В*/(ТлА).

Качественное исследование магнитного поля часто производят с помощью стальных опилок, которые насыпают на плоский лист из неферромагнитного материала, помещают в магнитное поле и слегка по листу постукивают. Опилки расположатся вдоль силовых линий. По густоте силовых линий можно качественно судить об интенсивности магнитного поля.

Вместо опилок нередко используют мельчайшие порошки окислов железа, находящихся во взвешенном состоянии в какой-либо жидкости, например керосине. Этот способ широко применяют при магнитной дефектоскопии изделий из ферромагнитных материалов.

§ 21.21. Построение эквипотенциалей магнитного поля путем использования принципа наложения. Магнитный потенциал $\varphi_м$ является функцией скалярной (не векторной). На основании принципа наложения значение его в какой-либо точке поля равно сумме значений потенциалов в этой точке от каждого из источников, создающих поле.

На рис. 21.13, *а* изображены два линейных тока: левый $I_1 = 20$ А направлен от читателя, правый $I_2 = 40$ А — к читателю. Еще один ток $I_3 = 20$ А, направленный от читателя, находится в бесконечности на линии центров проводов слева от первого провода. Требуется построить семейство эквипотенциалей. На рис. 21.13, *б* построено семейство эквипотенциалей φ_{M1} от первого провода в верхней полуплоскости (10 радиальных прямых). Значения φ_{M1} в амперах записаны рядом с соответствующей эквипотенциалью. При построении принято, что нулевой потенциал имеет правая полупрямая и что φ_M возрастает при перемещении против напряженности поля $\vec{H}$. На рис. 21.13 *в* изображены эквипотенциали в верхней полуплоскости от второго (правого) провода. При построении учтено, что ток I_2 направлен в противоположную сторону по сравнению с током I_1. Нулевой потенциал по-прежнему имеет правая полупрямая. На рис. 21.13, *г* построено семейство эквипотенциалей от трех проводов. В верхней полуплоско-

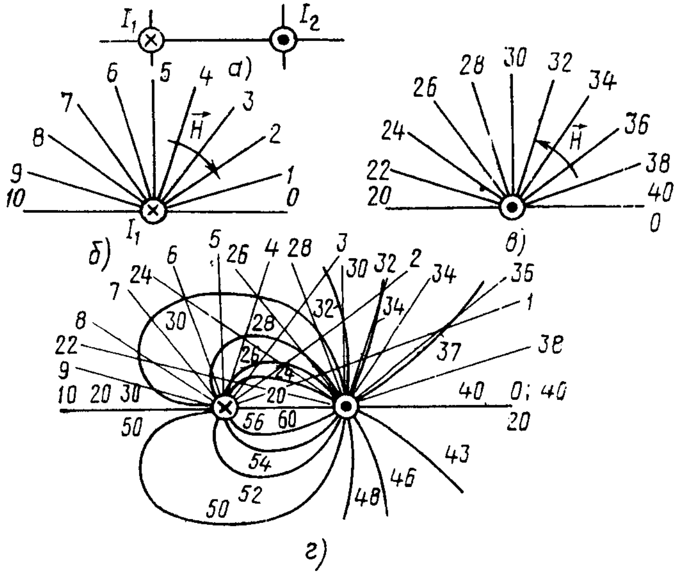


Рис. 21.13

сти по точкам пересечения эквипотенциалей φ_{M1} и φ_{M2} построены кривые $\varphi_M = \varphi_{M1} + \varphi_{M2} = \text{const}$. При построении учтено, что ток I_3, направленный от читателя и находящийся в бесконечности слева от тока I_1, не изменяя потенциалов точек верхней полуплоскости, увеличивает потенциал точек нижней полуплоскости на 20 А. На линии, соединяющей оси *1* и *2* проводов (в пространстве между ними) φ_M изменяются скачком от 20 до 60 А, а на линии, соединяющей оси *3* и *1* проводов — скачком от 30 до 50 А. Располагая семейством эквипотенциалей можно построить семейство силовых линий.

§ 21.22. Магнитное экранирование. Положим, что в равномерном магнитном поле напряженностью H_0 надо заэкранировать некоторую область пространства, например цилиндрическую, так, чтобы напряженность поля в ней была во много раз меньше, чем напряженность внешнего поля.

Цилиндрический экран внутренним радиусом a и наружным b имеет относительную магнитную проницаемость μ_{r2} (см. рис. 21.14,*а*). Внутреннюю область обозначим I, область тела экрана—II, область снаружи экрана — III.

В областях I и III относительная магнитная проницаемость равна единице. Так как во всех трех областях нет тока, то магнитное поле в них описывается уравнением Лапласа $\nabla^2\varphi_м = 0$. Экран будем полагать достаточно протяженным вдоль оси z (ось z перпендикулярна чертежу); $\varphi_м$ зависит только от координат r и α цилиндрической системы. Раскроем уравнение $\nabla^2\varphi_м = 0$ в цилиндрической системе:

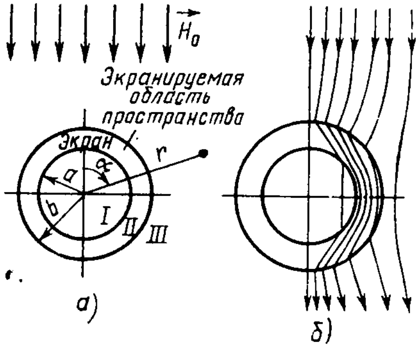


Рис. 21.14

$$\nabla^2 \varphi_м = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_м}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi_м}{r^2\partial\alpha^2} = 0.$$

Решение его методом Фурье (см. § 19.39) дает:

для первой области

$$\varphi_м^{I} = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)\cos\alpha;$$

для второй области

$$\varphi_м^{II} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r}\right)\cos\alpha;$$

для третьей области

$$\varphi_м^{III} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r}\right)\cos\alpha.$$

Постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал, принята здесь равной нулю.

Для определения шести постоянных (C_1—C_6) составим шесть уравнений.

1. Сопоставим $\varphi_м^{III}$ с выражением «на бесконечности» $\varphi_м = H_0 r \times \times \cos\alpha$. Из сопоставления находим, что $C_5 = H_0$. 2.

В первой области при $r = 0$ $\varphi_м$ должно оставаться конечным. Это может быть только в том случае, если в выражении будет отсутствовать слагаемое C_2/r. Оно будет отсутствовать при $C_2 = 0$.

3. Равенство $\varphi_м^{I}$ и $\varphi_м^{II}$ при $r = a$ дает уравнение: $C_1 a = C_3 a + \frac{C_4}{a}$.

Нетрудно убедиться в том, что условие непрерывности потенциала эквивалентно условию равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела при $r = a$. Действительно*,

$$H_\alpha = -\frac{\partial\varphi_м}{r\partial\alpha}.$$

* Напомним, что $\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_м$. Формулы, позволяющие определить H_α и H_r через $\varphi_м$ следуют из соотношения (19.9).

Следовательно, $\left. H_\alpha^{\mathrm{I}} \right|_{r=a} = -C_1 \sin\alpha$ и $\left. H_\alpha^{\mathrm{II}} \right|_{r=a} = -\sin\alpha\,(C_3 + C_4/a^2)$. Таким образом, $C_1 = C_3 + C_4/a^2$. Последнее уравнение совпадает с полученным ранее.

4. Равенство $\varphi_{\text{м}}$ на границе между второй и третьей (при $r = b$) областями приводит к уравнению

$$C_5 b + \frac{C_6}{b} = C_3 b + \frac{C_4}{b}.$$

5. Равенство нормальных составляющих индукции: $B_r = -\mu_a \dfrac{\partial \varphi_{\text{м}}}{\partial r}$ на границе между первой и второй областями (при $r = a$):

$$C_1 = \left(C_3 - \frac{C_4}{a^2}\right)\mu_{r2}.$$

6. Равенство нормальных составляющих индукции при $r = b$ дает уравнение

$$C_5 - \frac{C_6}{b^2} = \left(C_3 - \frac{C_4}{b^2}\right)\mu_{r2}.$$

Совместное решение всех уравнений приводит к выражению потенциала в первой области:

$$\varphi_{\text{м}}^{\mathrm{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos\alpha,$$

или при переходе к декартовой системе координат (ось x направлена вверх, $x = r\cos\alpha$):

$$\varphi_{\text{м}}^{\mathrm{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \tag{21.32}$$

Здесь

$$q = \frac{2\mu_{r2}}{(1+\mu_{r2})^2} \approx \frac{2}{\mu_{r2}},\quad \Delta = b^2 - \beta^2 a^2,\quad \beta = \frac{\mu_{r2}-1}{\mu_{r2}+1} \approx 1.$$

Напряженность поля в первой области (по модулю):

$$H^{\mathrm{I}} = \frac{\partial \varphi_{\text{м}}^{\mathrm{I}}}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \tag{21.33}$$

Если экран разъемный (выполнен из двух половинок, разрезы по образующим цилиндра), то для лучшего экранирования в постоянном магнитном поле щель между половинками экрана следует расположить параллельно линиям внешнего магнитного поля. Если щель расположить перпендикулярно линиям внешнего магнитного поля, то экранирование ухудшится, так как щель создает значительное магнитное сопротивление для прохождения магнитного потока.

Отношение напряженности поля внутри экрана к напряженности внешнего поля H_0:

$$\frac{H^{\mathrm{I}}}{H_0} = \frac{2qb^2}{\Delta} \approx \frac{4}{\mu_{r2}} \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \tag{21.34}$$

Формула (21.34) приближенна (принято $\beta = 1$ и $q = 2/\mu_{r2}$). Из нее можно заключить, что чем больше μ_{r2} и чем толще стенка экрана, тем сильнее его экранирующее действие.

На рис. 21.14, *б* качественно показана картина линий магнитной индукции при наличии экрана. Из рисунка видно, что силовые линии магнитного поля в большинстве стремятся пройти по стенкам экрана и лишь небольшая часть их заходит в экранируемую область.

Коэффициентом экранирования магнитного экрана называют отношение $k = H_0/H^1$, для цилиндрического экрана $k = \frac{\mu_{r2}(b^2 - a^2)}{4b^2}$.

Пример 208. $\mu_{r2} = 10^4$; $a = 5$ см; $b = 5{,}5$ см. Найти отношение H^1/H_0.

Решение.

$$\frac{H^1}{H_0} = \frac{4}{10^4}\frac{5{,}5^2}{5{,}5^2 - 5^2} = 0{,}0023,$$

т. е. напряженность поля внутри экрана составляет всего 0,23 % от напряженности H_0 и $k = 434$.

При μ_{r2} соизмеримой с 1 вместо формулы (21.34) следует пользоваться более общей формулой (21.34, а)

$$\frac{H^1}{H_0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right)\left(\mu_{r2} + \frac{1}{\mu_{r2}} - 2\right)}. \qquad (21.34,\text{а})$$

Без вывода запишем формулу для определения отношения напряженности поля внутри *сферического экрана* к напряженности равномерного поля H_0, в которое помещен экран, полагая, что внутренний радиус экрана R_1, наружный R_2 и экран имеет относительную проницаемость μ_{r2}, а снаружи экрана $\mu_a = \mu_0$:

$$\frac{H_i}{H_0} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]\left(\frac{1}{\mu_{r2}} + \mu_{r2} - 2\right)}.$$

§ 21.23. Эллипсоид во внешнем однородном поле. Коэффициент размагничивания. Поместим в однородное магнитное поле напряженностью H_e ферромагнитный эллипсоид относительной магнитной проницаемостью μ_r. Поле в нем будет однородным. Напряженность поля в эллипсоиде H_i, можно определить на основании принципа наложения как разность напряженности внешнего поля H_e и напряженности поля расчетных магнитных зарядов на поверхности эллипсоида, равной NJ (подобно тому, как в поляризованном диэлектрике поверхностная плотность заряда равна поляризованности P (см. § 19.13):

$$H_i = H_e - NJ, \qquad (21.35)$$

где N — некоторый коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом размагничивания*.

Оси эллипсоида обозначим a, b, c. Вдоль направления каждой оси свой коэффициент: N_a — вдоль оси a; N_b — вдоль оси b, N_c — вдоль оси c. Между ними имеет место зависимость $N_a + N_b + N_c = 1$. Для шара $N_a = N_b = N_c = 1/3$.

Положим, что H_e направлена вдоль оси a (эллипсоид вращения, ось вращения a), а размеры осей b и c одинаковы, тогда

$$\vec{H}_i = \vec{H}_e - N_a\vec{J}. \qquad (21.35\text{а})$$

Но из соотношения $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{J}) = \mu_0\mu_r\vec{H}_i$ следует, что

$$\vec{J} = (\mu_r - 1)\vec{H}_i. \qquad (21.36)$$

Подставим (21.36) в (21.35)

$$H_i = \frac{H_e}{1+(\mu_r-1)N_a}. \tag{21.37}$$

Когда ось a эллипсоида ($b = c$) расположена вдоль внешнего поля,

$$N_a = \frac{1-m^2}{m^2}\left(\frac{1}{2m}\ln\frac{1+m}{1-m}-1\right),$$

$$\text{где } m = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Если эллипсоид ($b = c$) сплюснут вдоль оси вращения a ($b/a > 1$), то

$$N_a = \frac{1+n^2}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\operatorname{arctg} n\right),$$

$$\text{где } n = \sqrt{b^2/a^2-1}.$$

Вывод формул N_a дан в [20].

§ 21.24. Применение метода зеркальных изображений. Для расчета магнитных полей, создаваемых линейными токами, протекающими вблизи стальных масс, широко применяют метод зеркальных изображений. Допустим, что в воздухе или в какой-либо другой среде (назовем ее первой средой) с магнитной проницаемостью μ_{a1} параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 (рис. 21.15, *а*).

Пусть вторая среда имеет магнитную проницаемость μ_{a2}. Требуется найти напряженность поля в любой точке первой и второй сред.

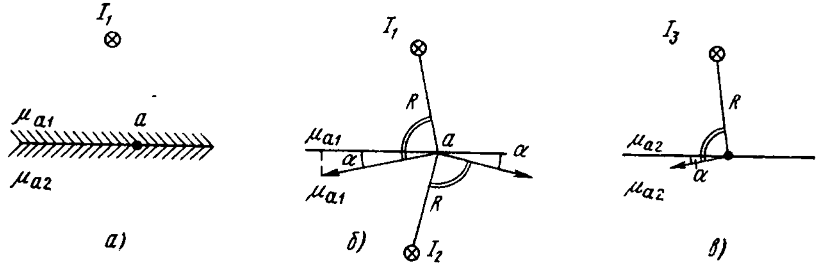


Рис. 21.15

С этой целью в расчет вводят фиктивные или расчетные токи I_2 и I_3. Провод с током I_2, помещают зеркально по отношению к проводу с заданным током I_1, а провод с током I_3 помещают там, где расположен провод с током I_1.

Двумя пока неизвестными токами I_2 и I_3 распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить двум граничным условиям на границе раздела сред.

Поле в верхнем полупространстве (там, где расположен ток I_1 — рис. 21.15, *б*) определится от двух токов: от заданного I_1 и фиктивного I_2, причем и верхнее и нижнее пролупространства при этом заполняет среда с магнитной проницаемостью μ_{a1}. *Поле* в любой точке *нижнего* *полупространства* определится током I_3, а верхнее и нижнее пространство имеют $\mu_a = \mu_{a2}$ (рис. 21.15, *в*). Составим уравнения для определения токов I_2 и I_3. Если взять произвольную точку a на границе раздела сред, то ее можно считать принадлежащей как первой, так и второй средам. Если считать ее принадлежащей первой среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней будет соответствовать левой части уравнения (21.38 а), а если второй среде, то правой части (21.38 а):

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R}\right)\cos\alpha = \frac{I_3}{2\pi R}\cos\alpha. \qquad (21.38а)$$

Отсюда получим первую связь между токами: $I_1 - I_2 = I_3$.

Для получения второй связи составим уравнение, выражающее собой равенство нормальных составляющих магнитной индукции в произвольной точке a на границе раздела:

$$\left(\frac{I_2}{2\pi R} + \frac{I_1}{2\pi R}\right)\mu_{a1}\sin\alpha = \frac{I_3}{2\pi R}\mu_{a2}\sin\alpha,$$

$$\text{т.е. } I_1 + I_2 = I_3\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \qquad (21.38\ б)$$

Совместное решение дает:

$$I_2 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1.$$

Пример 209. Найти напряженности поля в точках m и n (рис. 21.16, *а*). Геометрические размеры в сантиметрах даны на рисунке. Магнитные проницаемости $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = 999$; $I_1 = 10$ А.

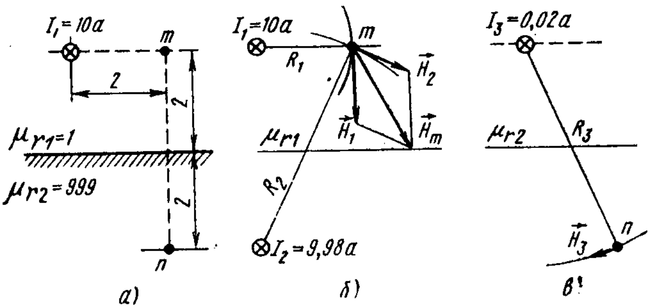


Рис. 21.16

Решение. По формулам § 21.23 находим:

$$I_2 = \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1 = 9{,}98\ \text{А}; \quad I_3 = \frac{2\mu_{r1}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1 = 0{,}02\ \text{А}.$$

Для определения напряженности поля в точке m, расположенной в том же полупространстве (среде) что и ток I_1, служит рис. 21.16, *б*: $\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$.

По закону полного тока

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0{,}02} = 79{,}5\ \text{А/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9{,}98}{2\pi \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 35{,}4\ \text{А/м}.$$

Графическим путем находим $H_m = 101$ А/м. Напряженность поля в точке n (рис. 21.16, *в*):

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0{,}02}{2\pi \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 0{,}0715\ \text{А/м}.$$

На рис. 21.17, *а* качественно изображена картина линий магнитной индукции B для случая, когда провод с током проходит в воздухе

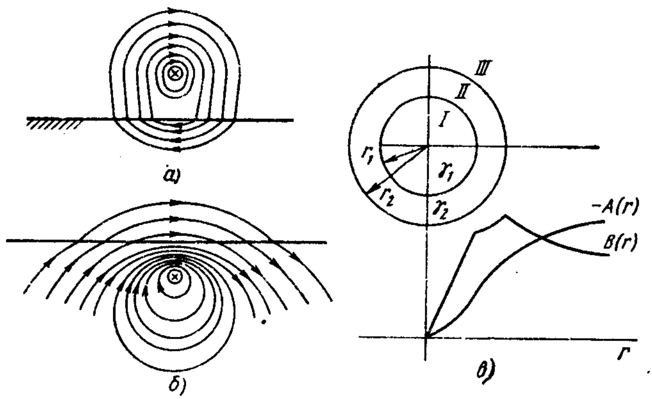


Рис. 21.17

параллельно поверхности стальной плиты; на рис. 21.17, *б* — когда провод с током проходит через узкий канал в стальной плите параллельно поверхности плиты.

Пример 210. По длинному биметаллическому проводу (рис. 21.17, *в*) протекает постоянный ток I. Радиус внутреннего провода r_1, наружного — r_2. Проводимость внутреннего γ_1, наружного — γ_2. Определить закон изменения векторного потенциала $\vec{A}$ и магнитной индукции внутри провода (во внутренней I и наружной II областях и вне провода — область III).

Решение. Определим плотности тока в первой δ_1 и во второй δ_2 областях. Так как $E_{1t} = E_{2t}$, то $\delta_1/\gamma_1 = \delta_2/\gamma_2$. Кроме того

$$\delta_1 \pi r_1^2 + \delta_2 (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = I.$$

Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_1^2 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

При раскрытии выражения $\nabla^2\vec{A}$ в цилиндрической системе координат учтем, что в данной задаче $\vec{A}$ имеет только одну составляющую $\vec{A} = \vec{z}^0 A_z = \vec{z}^0 A$, направленную по оси провода (по оси z), и эта составляющая зависит только от r:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = \begin{cases} -\mu_{a1}\delta_1 \text{ для первой области;} \\ -\mu_{a2}\delta_2 \text{ для второй области;} \\ 0 \text{ для третьей области.} \end{cases}$$

Двукратное интегрирование по r дает:

$$A_{\rm I} = -\frac{\mu_{a1}\delta_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2; \quad A_{\rm II} = -\frac{\mu_{a2}\delta_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4;$$

$$A_{\rm III} = C_5 \ln r + C_6.$$

Слагаемое $C_1 \ln r$ должно отсутствовать, так как A не может принимать бесконечно больших значений при $r = 0$; отсюда следует, что $C_1 = 0$.

Вектор-потенциал определяется с точностью до постоянной. Примем эту постоянную равной нулю: $C = 0$. При этом на оси провода $A = 0$. Из граничных условий составим уравнения для определения оставшихся четырех постоянных.

1. При $r = r_1$ $A_{\rm I} = A_{\rm II}$ следовательно,

$$-\frac{\mu_{a1}\delta_1 r_1^2}{4} = -\frac{\mu_{a2}\delta_2 r_1^2}{4} + C_3 \ln r_1 + C_4.$$

2. При $r = r_2$ $A_{\rm II} = A_{\rm III}$, т. е.

$$-\frac{\mu_{a2}\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 = C_5 \ln r_2 + C_6.$$

3. При $r = r_1$ $H_{1t} = H_{2t}$ или $\frac{1}{\mu_{a1}}\frac{dA_{\rm I}}{dr} = -\frac{1}{\mu_{a2}}\frac{dA_{\rm II}}{dr}$, т. е. $\frac{\delta_1 r_1}{2} = \frac{\delta_2 r_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_{ar} r_1}$.

4. При $r = r_2$ должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$\frac{\delta_2 r_2}{2} - \frac{C_3}{\mu_{a2} r_2} = -\frac{C_5}{\mu_{a3} r_2}.$$

Имеем

$$C_3 = \frac{\mu_{a2} r_1^2}{2}(\delta_2 - \delta_1); \quad -C_5 = \frac{\delta_2(r_2^2 - r_1^2) + \delta_1 r_1^2}{2}\mu_{a3};$$

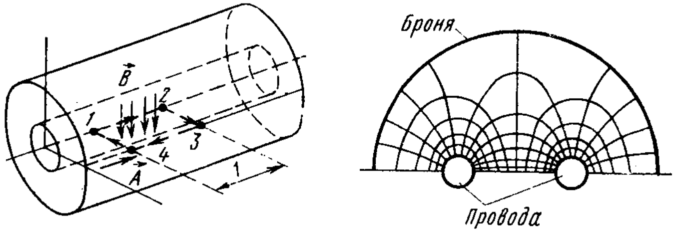
$$C_4 = -\frac{\mu_{a1}\delta_1 r_1^2}{4} + \frac{\mu_{a2}\delta_2 r_1^2}{4} - C_3 \ln r_1;$$

$$C_6 = -\frac{\mu_{a2}\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 - C_5 \ln r_2.$$

На рис. 21.17, *б* одна кривая характеризует изменение — $A = f(r)$, другая — изменение $B = f(r)$ при $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{5{,}7}{3{,}5}$ и $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_{a3}$.

Пример 211. Воспользоваться выражением $\Phi = \oint \vec{A}d\vec{l}$ и данными примера 210 и найти магнитный поток, пронизывающий биметаллический провод примера 210 на длине $l = 1$ м.

Решение. Разобьем путь интегрирования $\Phi = \oint \vec{A}d\vec{l}$ на четыре участка: первый участок от точки *1* до точки *2* (рис. 21.18, *а*);



а) *б)*

Рис. 21.18

второй — от *2* до *3*; третий — от *3* до *4*; четвертый — от *4* до *1*. В соответствии с этим

$$\oint \vec{A}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{A}d\vec{l} + \int_2^3 \vec{A}d\vec{l} + \int_3^4 \vec{A}d\vec{l} + \int_4^1 \vec{A}d\vec{l}.$$

Но $\int_1^2 \vec{A}d\vec{l}$ равен нулю, так как значение $\vec{A}$ при $r = 0$ равно нулю.

На втором и четвертом участках $\int \vec{A}\, d\vec{l}$ также равен нулю, так как угол между $\vec{A}$ и $d\vec{l}$ равен $\pm 90°$, а $\cos 90° = 0$. $\int \vec{A}\, d\vec{l}$ не равен нулю только на третьем участке, где

$$\underset{r=r_2}{A} = -\frac{\mu_a \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

а угол между $\vec{A}$ и $d\vec{l}$ равен 180° ($\cos 180° = -1$). Поэтому

$$\Phi = \int_3^4 \underset{r=r_2}{\vec{A}}\, d\vec{l} = -\underset{r=r_2}{A} \cdot 1.$$

Пример 212. Воспользоваться построениями рис. 21.11 и определить магнитную проводимость воздушного зазора между полюсом и якорем машины постоянного тока на единицу длины якоря (1 м).

Решение. В соответствии с рис. 21.11 $n = 2$ и $m = 11$; $b/a = 0{,}9$. По формуле (21.29) подсчитаем:

$$G_м = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 0{,}9 \cdot 11}{2} = 6{,}63 \cdot 10^{-6}\ Гн.$$

Пример 213. Определить емкость и индуктивность на 1 м длины кабельной двухпроводной линии с цилиндрической проводящей броней. Картина поля в сечении кабельной линии дана на рис. 21.18, *б* ($\varepsilon_r = 2{,}5$).

Р е ш е н и е. Изображенная на рис. 21.18, *б* картина поля справедлива для электрического и магнитного полей. Причем, согласно § 21.20, силовым линиям электрического поля соответствуют эквипотенциали магнитного поля.

Число силовых трубок электрического поля $m = 10{,}5 \cdot 2 = 21$. Число ячеек в трубке $n = 10$ (пять от провода до брони, пять от брони до провода). Отношение $b/a \approx 1$. Число силовых трубок магнитного поля $m = 10$, число ячеек в трубке $n = 21$. По формуле (21.31) найдем емкость на 1 м длины кабеля ($l = 1$ м):

$$C = \frac{2{,}5 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12}\,\Phi.$$

По определению, индуктивность L равна отношению потокосцепления к создающему его току $L = \psi/I$. В данной задаче имеется всего один виток (прямой и обратный провода). Поэтому потокосцепление ψ равно потоку Φ между проводами (индуктивностью, обусловленной потокосцеплением в теле проводов, в силу его малости пренебрегаем).

По закону полного тока, ток I может быть заменен на $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$ по замкнутому контуру, окружающему провод. В свою очередь $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$ представляет собой падение магнитного напряжения $U_{\text{м}}$ по этому контуру. Следовательно,

$$L = \frac{\psi}{I} \approx \frac{\Phi}{\oint \vec{H}\vec{dl}} = \frac{\Phi}{U_{\text{м}}} = G_{\text{м}}.$$

Таким образом, индуктивность L в данном примере равна магнитной проводимости $G_{\text{м}}$. Для определения последней воспользуемся формулой (21.29)*.

$$G_{\text{м}} = L = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7}\,\text{Гн}.$$

Пример 214. Найти разность скалярных магнитных потенциалов (магнитное напряжение) между точками A и B, расположенными в магнитном поле линейного тока $I = 10$ А (рис. 21.19).

Р е ш е н и е

$$U_{\text{м}AB} = \int_A^B \vec{H}\vec{dl} = \int\limits_{\text{по пути } AmC} \vec{H}\vec{dl} + \int\limits_{\text{по пути } CnB} \vec{H}\vec{dl};$$

$$\int\limits_{\text{по пути } AmC} \vec{H}\vec{dl} = H\int dl = \frac{I}{2\pi R_A}\,\frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4}; \quad \int\limits_{\text{по пути } CnB} \vec{H}\vec{dl} = 0,$$

---

* При вычислении L по формуле для $G_{\text{м}}$ число ячеек в силовой трубке должно быть взято по замкнутому контуру.

так как на этом участке угол между $\vec{H}$ и $\vec{dl}$ равен 90°. Следовательно, $U_{\text{м}AB} = I/4 = 2{,}5$ А.

Пример 215. В воздухе создано равномерное магнитное поле напряженностью $H_0 = 240$ А/м. В это поле поместили ферромагнитный шарик, относительная магнитная проницаемость которого $\mu_{ri} = 20$. Найти индукцию в шарике.

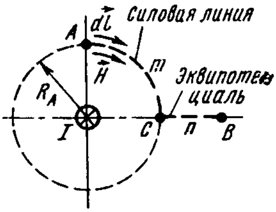


Рис. 21.19

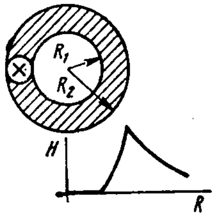


Рис. 21.20

Р е ш е н и е. Воспользуемся аналогией между электростатическим и безвихревым магнитным полями. В формуле (19.69) заменим E_0 на H_0 и ε_a на μ_a. Получим

$$H_i = H_0 \frac{3\mu_{re}}{2\mu_{re} + \mu_{ri}} = 240 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2+20} = 32{,}7 \text{ А/м}.$$

Индукция в шарике

$$B_i = 20 \cdot 32{,}7 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} = 8{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ Т}.$$

Пример 216. Вдоль трубы с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 (рис. 21.20) протекает постоянный ток I. Вывести формулы для определения напряженности поля H внутри трубы, в теле ее и снаружи трубы.

Р е ш е н и е. Напряженность поля в любой из указанных областей найдем по закону полного тока ($R = r$).

Если провести окружность радиусом $r < r_1$ с центром на оси трубы, то эта окружность не охватит тока. Поэтому при $r \leqslant r_1$ $H = 0$, т. е. во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует. Плотность тока в трубе: $\delta = \dfrac{I}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$.

Окружность радиусом $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ охватывает ток $\delta\pi (r^2 - r_1^2)$. Поэтому в этом интервале изменений r

$$H = \frac{I (r^2 - r_1^2)}{2\pi r \, (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Снаружи трубы при $r \geqslant r_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону $H = I/(2\pi r)$. График $H = f(r)$ изображен на рис. 21.20.

§ 21.25. Закон Био—Савара—Лапласа. Согласно известному из курса физики закону Био—Савара—Лапласа, при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода $\vec{dl}$, по которому течет ток I в направлении $\vec{dl}$, в точке, удаленной на расстояние R от элемента тока, создает магнитную индукцию, определяемую следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\vec{dl}\,\vec{R}_0]}{R^2}, \tag{21.39}$$

где $\vec{R}_0$ — единичный вектор, проведенный от $\vec{dl}$ к точке, в которой подсчитываем магнитную индукцию (рис. 21.21). Результирующая индукция в этой точке

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint\limits_l \frac{[\vec{dl}\,\vec{R}_0]}{R^2}. \tag{21.40}$$

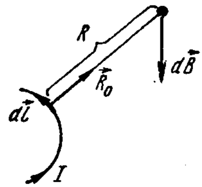


Рис. 21.21

В этой формуле интегрирование производят по всей длине замкнутого контура с током.

Формула (21.39) следует из (21.27), если учесть, что $\vec{dB} = \operatorname{rot} \vec{dA}$. Действительно, из (21.27) находим $\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{dl}}{R}\right)$. Но $\frac{1}{R}\vec{dl}$ — это есть произведение скаляра $1/R$ на вектор $\vec{dl}$, поэтому $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{R}\vec{dl}\right) = \frac{1}{R}\operatorname{rot}\vec{dl} + \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\,\vec{dl}\right]$. Поскольку $\vec{dl}$ не зависит от положения точки, в которой определяется $\vec{B}$, то $\operatorname{rot}\vec{dl} = 0$, и первое слагаемое правой части последней строки выпадает. В соответствии с формулой (19.10) $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \vec{R}_0 \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\right) = \vec{R}_0\left(-\frac{1}{R^2}\right)$. Следовательно, $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{R}\vec{dl}\right) = \frac{[\vec{dl}\,\vec{R}_0]}{R^2}$ и $\vec{dB} = \frac{\mu_0 I\,[\vec{dl}\,\vec{R}_0]}{4\pi R^2}$.

Если в формуле (21.39) ток I как постоянную величину ввести в векторное произведение и заменить $I\,\vec{dl}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV — элемент объема проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$, то

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta}\,\vec{R}_0]\,dV}{R^2}; \tag{21.41}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\vec{\delta}\,\vec{R}_0]}{R^2}\,dV. \tag{21.42}$$

Формула (21.41) — вторая форма записи закона. В формуле (21.42) интегрирование производят по объему, занятому током. Обратим внимание на два положения.

1. Структура формул (21.39) и (21.41) в известной мере сходна со структурой формулы для напряженности электрического поля точечного заряда, полученной в § 19.4 из закона Кулона.

2. Полезно сопоставить закон полного тока с законом Био—Савара—Лапласа. Оба эти закона позволяют определять магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон полного тока применим только к замкнутым контурам с токами, тогда как закон Био—Савара—Лапласа применим не только к замкнутым контурам с токами, но и к отрезкам проводников с токами (к элементам тока). Поэтому закон Био—Савара—Лапласа более универсален.

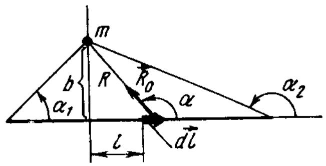


Рис. 21.22

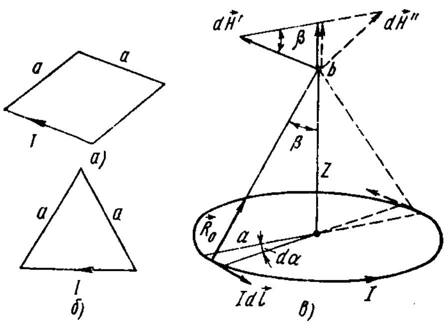


Рис. 21.23

Пример 217. С помощью формулы (21.40) определить магнитную индукцию в точке m, создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 21.22). Точка m удалена от провода на расстояние b.

Р е ш е н и е. Угол между $\vec{dl}$ и $\vec{R}_0$ обозначим α. Из геометрических соображений имеем

$$R = b/\sin\alpha, \quad l = -b\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Следовательно, $dl = \frac{b\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$; $|[\vec{dl}\,\vec{R}_0]| = dl\cdot 1\cdot\sin\alpha$; $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\times$ $\times\sin\alpha d\alpha$; $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$. При выбранном направлении тока вектор $\vec{B}$ направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180°$, $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = 2$ и $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, что совпадает с результатом, получаемым по закону полного тока.

Индукция в центре квадратного витка с током I и стороной a (рис. 21.23, a) в четыре раза больше, чем от одной стороны и равна $B = \frac{\mu_a I 2\sqrt{2}}{\pi a}$. В центре треугольного витка (см. рис. 21.23, $б$) $B = \frac{9}{2}\,\frac{\mu_a I}{\pi a}$.

Пример 218. Вывести формулу для определения напряженности магнитного поля на оси кругового витка с током I (рис. 21.23, $в$). Радиус витка принять равным a.

Решение. Выделим элемент тока $I\,\vec{dl}$. Напряженность поля $\vec{dH}'$, создаваемая этим элементом в точке b на оси витка, находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна $\frac{I\,[\vec{dl}\,\vec{R}_0]}{4\pi(a^2+z^2)}$; напряженность $\vec{dH}'$ перпендикулярна $\vec{dl}$ и $\vec{R}_0$. От диаметрально противоположного элемента тока $I\,\vec{dl}$ в той же точке b будет напряженность $\vec{dH}''$. По модулю $\vec{dH}'$ и $\vec{dH}''$ одинаковы.

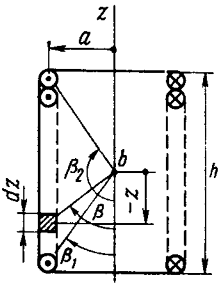


Рис. 21.24

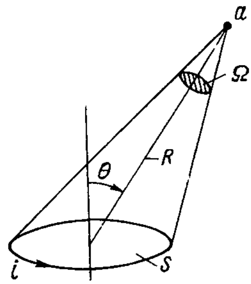


Рис. 21.25

При геометрическом суммировании $\vec{dH}'$ и $\vec{dH}''$ будет получен вектор, направленный по оси витка: $dl = a\,d\alpha$;

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{Ia \sin\beta\, d\alpha}{4\pi(a^2+z^2)} = \frac{Ia}{4\pi(a^2+z^2)}\,\frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Пример 219. Используя решение примера 218, вывести формулу для определения индукции на оси цилиндрической катушки с током I (рис. 21.24). Высота катушки h, средний радиус ее a, число витков w.

Решение. В произвольной точке b на оси от элемента тока dz:

$$dB = \mu_0 \frac{Iw}{h}\, dz \frac{a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\cos\beta = \frac{-z}{(a^2+z^2)^{1/2}}; \quad -d(\cos\beta) = \frac{a^2\,dz}{(a^2+z^2)^{3/2}};$$

$$dB = -\frac{\mu_0 Iw}{2h} d(\cos\beta); \quad B = -\frac{\mu_0 Iw}{2h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} d(\cos\beta) =$$

$$= \frac{\mu_0 Iw}{2h}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2).$$

§ 21.26. Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол. На рис. 21.25 изображен контур с током, который охватывает площадь S. Вертикальная ось расположена перпендикулярно площади. Запишем формулы для магнитного скалярного потенциала (полагая, что на бесконечности $\varphi_м = 0$) и составляющих H_R и H_θ напряженности поля в произвольной точке a, находящейся на расстоянии R от центра площади. Полагаем, что расстояние R значительно больше линейных размеров контура; θ — угол между вертикальной осью и радиусом R.

Воспользуемся аналогией между электростатическим и магнитным безвихревым полями. В примере 196 были выведены формулы для потенциала φ и составляющих E_R, E_θ напряженности электрического поля диполя:

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2}; \quad E_R = \frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon_a R^3}; \quad E_\theta = \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_a R^3}.$$

Заменим в этих формулах электрический момент ql на магнитный момент $iS\mu_a$, ε_a на μ_a, φ на $\varphi_м$, E_R на H_R, E_θ на H_θ. Учтем, что $S\cos\theta/R^2$ представляет собой телесный угол Ω, под которым площадь S видна из точки наблюдения a. Получим

$$\varphi_м = \frac{i\Omega}{4\pi} = \frac{iS\cos\theta}{4\pi R^2}; \quad H_R = \frac{iS\cos\theta}{2\pi R^3}; \quad H_\theta = \frac{iS\sin\theta}{4\pi R^3}.$$

Угол θ положителен, если из точки a ток в контуре виден направленным против часовой стрелки.

§ 21.27. Магнитное поле намагниченной пленки (ленты). Магнитная пленка толщиной несколько микрон ($2a$ на рис. 21.26) применяется для записи информации (магнитофоны, вычислительные машины). При записи пленку намагничивают с помощью записывающей головки либо продольно, когда вектор намагниченности направлен вдоль пленки (рис. 21.26, *а*), либо поперечно (рис. 21.26, *б*). После снятия внешнего поля пленка остается намагниченной и потому, если ее пропустить мимо считывающей головки, пересечение силовых линий обмоткой этой головки приведет к наведению в ней э. д. с.

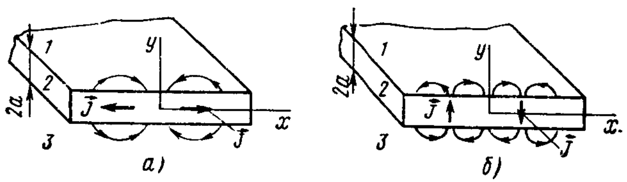


Рис. 21.26

На рис. 21.26, *а* и *б* показаны силовые линии. Намагниченность вдоль оси x изменяется. На рисунке области обозначены: выше пленки цифрой *1*, пленки — *2*, ниже пленки —*3*. Области *1* и *3* неферромагнитны, область *2* — ферромагнитная среда.

Во всех областях на рис. 21.26, *б* поле подчиняется уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi_м = 0$ ($\operatorname{div}\vec{J} = \frac{dJ_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$, так как $J_x = 0$, а J_y зависит только от x); $\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_м$; $\operatorname{div}\vec{H} = 0$.

Для рис. 21.26,*а* $\nabla^2\varphi_м = -\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\vec{J} = \frac{dJ_x}{dx}$; $\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_м$.

В соответствии с методом Фурье в каждой из областей $\varphi_м = X(x)\,Y(y)$ (от координаты z поле не зависит).

Задаваясь законом изменения намагниченности, например, для рис. 21.26, *а* в виде $J = J_x = J_0 \sin mx$, а для рис. 21.26, *б* в виде $J = J_y = J_0 \cos mx$ можно получить решение для $\varphi_м$. Так, для рис. 21.26, *б*:

$$\varphi_м^{I} = C_1 e^{-my} \cos mx \; (y > a);$$

$$\varphi_м^{II} = (C_2 e^{-my} + C_3 e^{my}) \cos mx \; (-a \geqslant y \geqslant a);$$

$$\varphi_м^{III} = C_4 e^{my} \cos mx \; (y < -a).$$

Четыре постоянных $C_1 \div C_4$ определяют из условия непрерывности $\varphi_м$ и непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции на границе между областями *2* и *1*, а также между областями *2* и *3*.

§ 21.28. Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом. Положим, что ферромагнитное тело (например, кусочек ферромагнитной пленки) высотой $\Delta\vec{l}$, площадью поперечного сечения $\Delta\vec{S}$, намагниченностью $\vec{J}\,(\Delta\vec{S} \| \vec{J})$ расположено вблизи контура *а* (рис. 21,27,

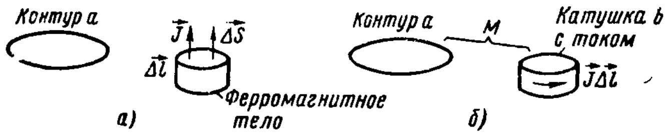


Рис. 21.27

а). Требуется определить поток, создаваемый ферромагнитным телом и пронизывающий контур *а*. В соответствии с § 14.24 заменим ферромагнитное тело одновитковой эквивалентной катушкой высотой Δl, площадью ΔS, по которой протекает ток $\delta\Delta\vec{l} = \vec{J}\Delta\vec{l}$ (магнитный момент катушки равен магнитному моменту ферромагнитного тела, рис. 21.27, *б*).

Эта катушка с током создает в контуре *а* потокосцепление, равное произведению тока катушки $\vec{J}\Delta\vec{l}$ на взаимную индуктивность M между контуром *а* и эквивалентной катушкой *b* в условиях отсутствия ферромагнетиков: $\psi = \vec{J}\Delta\vec{l}M$. Величина M может быть найдена расчетным или экспериментальным путем.

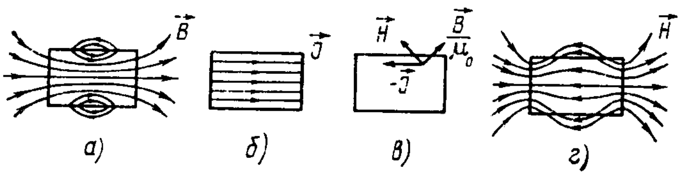


Рис. 21.28

Если намагниченность тела $\vec{J}$ плавно изменяется по высоте, то тело следует разбить на участки Δl_k со ступенчато изменяющейся $\vec{J}_k$, каждый k — участок тела заменить одновитковой катушкой k со средним по высоте этой катушки током $\vec{J}_k\Delta\vec{l}_k$ и найти

$$\Psi = \Sigma M_k \vec{J}_k \Delta\vec{l}_k,$$

где M — взаимная индуктивность катушки k с контуром *а*.

Обратим внимание на то, что картина магнитного поля, созданного однородно намагниченным телом (не говоря уже о неоднородно намагниченном), носит довольно сложный характер, а внутри этого тела картина поля для вектора $\vec{B}$ и для вектора $\vec{H}$ резко различны.

В качестве иллюстрации на рис. 21.28, *а* показана примерная картина линий $\vec{B}$, а на рис. 21.28, *б* линий $\vec{J}$ при однородно намагниченном теле. Рис. 21.28, *в* поясняет, почему вектор $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}$ в некоторой точке внутри ферромагнитного тела направлен совсем иначе, чем вектор $\vec{B}$. Примерная картина линий $\vec{H}$ изображена на рис. 21.28, *г*.

§ 21.29. Выражение механической силы в виде производной от энергии магнитного поля по координате. Положим, что в системе из n контуров с токами один из контуров под действием механической силы $\vec{F}$ на него со стороны остальных контуров перемещается так, что координата x его изменяется на величину $\vec{dx}$. Требуется выяснить, какая связь существует между силой $\vec{F}$ и изменением энергии магнитного поля системы $dW_м$.

Для какого-то k — контура системы запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$i_k R_k + \frac{d\Psi_k}{dt} = e_k. \tag{21.43}$$

Умножим (21.43) на $i_k\,dt$:

$$i_k^2 R_k\,dt + i_k\,d\Psi_k = e_k i_k\,dt.$$

Запишем аналогичные уравнения для остальных контуров и просуммируем их:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k\,dt + \sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Psi_k = \sum_{k=1}^{n} e_k i_k\,dt. \tag{21.44}$$

Слагаемое $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k d\psi_k$ представляет собой ту часть энергии, которую получают все цепи от источников э. д. с. за вычетом тепловых потерь.

При перемещении какого-то контура на расстояние dx изменяется магнитная энергия системы $W_м$ на величину $dW_м$ и совершается механическая работа Fdx, где F — составляющая силы, действующая по направлению dx.

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, доставляемая источниками э. д. с. за время dt, должна равняться энергии, выделяющейся за то же время в виде теплоты в сопротивлениях контура, плюс энергия, затраченная на покрытие механической работы Fdx, плюс приращение энергии магнитного поля $dW_м$:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k\,dt + Fdx + dW_м = \sum_{k=1}^{n} e_k i_k\,dt. \tag{21.45}$$

При сопоставлении (21.44) и (21.45) получим

$$\sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Psi_k = Fdx + dW_м. \tag{21.46}$$

Уравнение (21.46) означает, что механическая работа и приращение энергии совершаются за счет той части энергии $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k i_k\,dt$ источников, которую последние отдают в цепи, за вычетом тепловых потерь. Из (21.46) получим

$$F = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k\,d\Psi_k - dW_м}{dx}. \tag{21.47}$$

Из уравнения (21.47) вытекают два частных случая.

1. Если перемещение стремится происходить таким образом, что потокосцепления контуров остаются неизменными, то $d\psi_k = 0$, $Fdx = -dW_м$ и

$$F = -\frac{dW_м}{dx}. \quad (21.48)$$

Для того чтобы ψ_k были постоянны, токи контуров i_k должны соответствующим образом изменяться. При этом энергия, доставляемая источниками, расходуется только на тепловые потери.

2. Если перемещение стремится происходить так, что токи в контурах остаются неизменными ($i_k = \text{const}$), что возможно, например, когда перемещение происходит настолько быстро, что токи не успевают измениться, то в соответствии с § 2.6 $W_м = \frac{1}{2}\Sigma\ i_k\psi_k$.

Следовательно

$$dW_м = \frac{1}{2} d\Sigma i_k \Psi_k = \frac{1}{2} \Sigma i_k\, d\Psi_k. \quad (21.49)$$

Подставим (21.49) в (21.47), получим

$$F = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k\, d\psi_k - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} i_k\, d\Psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} i_k\, d\Psi_k}{dx} = \frac{dW_м}{dx}. \quad (21.50)$$

Во втором частном случае выражение для механической силы отличается от (21.48) только знаком.

При $i_k = \text{const}$ доставляемая в цепи от источников э. д. с. энергия за вычетом тепловых потерь делится на две равные части. Одна идет на приращение энергии магнитного поля $dW_м$, другая — на механическую работу Fdx. Уравнения (21.48) и (21.50) часто используют для нахождения механической силы. Чтобы найти силу F, надо либо составить аналитическое выражение для магнитной энергии системы и продифференцировать его по изменяющейся координате, либо опытным путем снять зависимость магнитной энергии от изменяющейся координаты и затем графически продифференцировать ее. Если в поле двух катушек при изменении координаты x индуктивности L_1 и L_2 остаются постоянными и меняется только взаимная индуктивность M, то $F = I_1 I_2 \frac{dM}{dx}$. Если в рассматриваемой системе имеются ферромагнитные тела, то часть энергии dW_M расходуется на необратимые тепловые процессы в них вследствие гистерезиса.

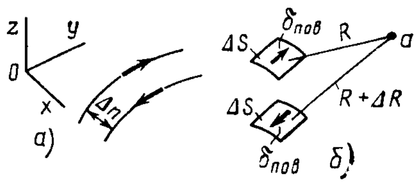


Рис. 21.29

§ 21.30. Магнитное поле двойного токового слоя. Под *двойным токовым слоем* понимают два весьма близко (теоретически бесконечно близко) параллельно расположенных слоя (находящихся в плоскости $x0y$), по которым текут поверхностные токи в противоположных направлениях (рис. 21.29, *а*). Расстояние между слоями по нормали Δn. По верхнему слою ток течет вдоль оси y, по нижнему — по оси $-y$. Поверхностную плотность тока каждого слоя обозначим $\delta_{пов}$.

В каждом слое выделим единичную площадь ($\Delta x = \Delta y = 1$) и запишем магнитный момент контура длиной $\Delta y = 1$ и высотой Δn: $\vec{M} = -\vec{i}\Delta n \cdot 1 \cdot \delta_{пов}$, отсюда $\delta_{пов} = M/\Delta n$.

Составляющая векторного потенциала в произвольной точке a (рис. 21.29, *б*) от двух противолежащих элементов поверхности площадью ΔS:

$$d\vec{A} = \vec{j}\, \mu_0 \delta_{пов} \frac{\Delta S}{4\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\Delta R}\right).$$

Заменим $\delta_{пов}$ на $M/\Delta n$, просуммируем составляющие от всех элементов поверхности, устремим $\Delta n \to 0$, заменим ΔS на dS и получим формулу для векторного потенциала в произвольной точке от двойного токового слоя

$$\vec{A} = \vec{j}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S M\,\frac{\partial(1/R)}{\partial n}\,dS.$$

Обратим внимание на два положения.

1. При переходе с одного токового слоя на другой векторный потенциал изменяет направление на противоположное (на верхнем слое $\vec{A}$ направлено вдоль оси y, на нижней — вдоль оси $-y$), т. е. *при переходе через слои тангенциальная составляющая* $\vec{A}$, *терпит разрыв.*

2. Несмотря на то, что расстояние между слоями $\Delta n \to 0$ в пространстве между ними проходит *конечной величины* магнитный поток, направленный вдоль оси $-x$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение магнитного поля постоянного тока. Какими точечными и интегральными величинами оно характеризуется? 2. Каков физический смысл векторов $\vec{B}, \vec{J}, \vec{H}$? Каковы единицы измерения их? 3. Какие поля называют вихревыми? 4. В каких случаях величина $\vec{H}$ может быть определена без затруднений при помощи закона полного тока? 5. Дайте физическое толкование понятию ротора. 6. Запишите принцип непрерывности магнитного потока в интегральной и дифференциальной формах. 7. Могут ли линии $\vec{H}$ быть прерывными? 8. Почему понятие $\varphi_м$ неприменимо к областям, занятым током? 9. Может ли $\varphi_м$ бесконечно близко расположенных точек в поле линейного тока I различаться на конечную величину? 10. Почему вектор-потенциал $\vec{A}$ является более общей характеристикой поля, чем $\varphi_м$? 11. На каком основании можно принять $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$? 12. Определите характер распределения плотности тока $\vec{\delta}$ в некоторой области, если в ней $\vec{A} = \vec{i}5x^3$ (*ответ.* $\vec{\delta} = \vec{i}\left(-\dfrac{30\,x}{\mu_a}\right)$. 13. Пользуясь законом полного тока в дифференциальной форме покажите, что в электрическом поле постоянного тока нет истоков вектора $\vec{\delta}$. 14. Одинаковы ли будут картины поля вектора $\vec{B}$ для поля, у которого векторный магнитный потенциал равен $\vec{A}$ и для поля, у которого он равен $\vec{A} + \text{grad}\,\psi$, где ψ — некоторая скалярная функция? 15. Чем следует руководствоваться при графическом построении картины магнитного поля? Каким свойством обладает магнитная силовая трубка? 16. Какого типа соответствия могут быть в картинах магнитного и электростатического поля? 17. Поясните ход решения задачи о цилиндрическом магнитном экране и расскажите, из каких соображений находят постоянные интегрирования. 18. Чем можно объяснить, что в соответствующих формулах на метод зеркальных изображений для сходных задач в магнитном (§ 21.23) и электростатическом (19.32) полях индексы *1* и *2* поменялись местами? 19. Почему можно сказать, что закон Био — Савара — Лапласа в некотором смысле является более общим, чем закон полного тока? 20. Ток I проходит по отрезку дуги окружности радиуса a с центральным углом α. Определите H в центре окружности (*ответ.* $I\alpha/4\pi a$). 21. Выведите формулу для определения B в центре квадратного витка со стороной a, по которому течет ток I. Виток находится в воздухе. 22. Создает ли магнитное поле ток утечки, радиально стекающий через несовершенную изоляцию с жилы на оболочку коаксиального кабеля (рис. 21.30, *а*)? 23. Провод с током I расположен в воздухе на расстоянии h от плоской поверхности ферромагнитного тела, μ_r которого равно 9 (рис. 21.30, *б*). Определите силу, действующую на еди-

ницу длины провода $\left(\textit{ответ.}\ \frac{0{,}2\, I^2 \mu_0}{\pi h}\right)$. **24.** В поле линейного тока I_1 на расстоянии a от него расположен параллельно с ним коаксиальный кабель длиной $l = 1$ м с током I_2 (по жиле ток «от нас», по оболочке «к нам»). Какова сила, действующая на жилу кабеля, на кабель как систему? $\left(\textit{ответ.}\ \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi a} \sim 0\right)$. **25.** Докажите, что для двух параллельных двухпроводных линий, находящихся в воздухе, отношение взаимной индуктивности между линиями к потенциальному коэффициенту α_{12} (§ 19.34) равно $\mu_0\varepsilon_0$. **26.** В цилиндрическом неферромагнитном проводнике радиуса a параллельно его оси просверлено цилиндрическое отверстие радиуса $a/2$ (рис. 21.30, *г*). По проводнику проходит ток I. Показать, что напряженность поля во всех точках отверстия одинакова и равна $I/4\,\pi a$. **27.** Два тонких

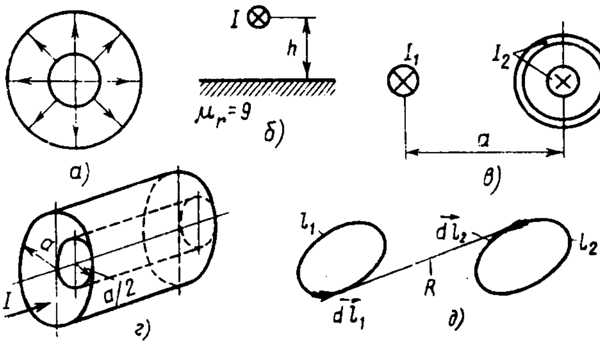


Рис. 21.30

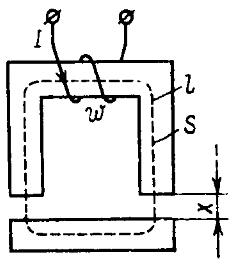


Рис. 21.31

проводящих контура l_1 и l_2 (рис. 21.30, *д*) находятся в воздухе. Элементы длины их обозначены $\vec{dl_1}$ и $\vec{dl_2}$. Расстояние между текущими элементами длины R. Воспользовавшись выражением для векторного потенциала $\vec{A}$ элемента тока и выражением магнитного потока через $\vec{A}$, покажите, что взаимная индуктивность между контурами может быть определена по формуле $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\vec{dl_1}\ \vec{dl_2}}{R}$. **28.** На рис. 21.31 изображен электромагнит постоянного тока. Магнитная цепь его выполнена из магнитномягкого материала и находится в ненасыщенном состоянии Длина средней магнитной линии на пути в стали l_c, длина каждого воздушного зазора x. Площадь поперечного сечения S. Полагая, что магнитная энергия, запасенная в воздушном зазоре $W_{вз}$ много больше магнитной энергии, запасенной на ферромагнитных участках магнитной цепи $W_{фм}$, выведите формулу тягового усилия магнита F, считая известной магнитную индукцию в воздушном зазоре B (*ответ*: $F = (B^2 S)/\mu_0$). **29.** Выведите формулу тягового усилия F магнита постоянного тока (рис. 21.31) по известной м.д.с. катушки Iw, полагая, как и в примере 28, что $W_{вз} \gg W_{фм}$ и что падение магнитного напряжения на пути в стали $H_s l_c$ много меньше падения магнитного напряжения на воздушных зазорах $H_в \cdot 2x$ $\left(\textit{ответ}:\ F = \frac{\mu_0 S\,(Iw)^2}{4x^2}\right)$. **30.** Используя аналогию между электростатическим и магнитным безвихревым полем и выкладки § 19.51, покажите, что на ферромагнитный шарик радиуса a и магнитной проницаемостью μ_{ri} находящийся в неравномерном магнитном поле напряженностью H и магнитной проницаемостью μ_{re}, действует сила $\vec{F} = 4\pi a^3.\ \mu_{ae} \frac{\mu_{ri} - \mu_{re}}{\mu_{ri} + 2\mu_{re}} H \operatorname{grad} H$. **31.** Решите задачи 21.1; 21.4; 21.12; 21.21; 21.24; 21.25.

Глава двадцать вторая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 22.1. Определение переменного электромагнитного поля. *Под переменным электромагнитным полем* понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных и обусловливающих друг друга электрического и магнитного полей. Оно определяется двумя векторными величинами — напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$.

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой, количеством движения, может превращаться в другие виды материи и самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, для вакуума равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/с, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями Максвелла.

Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения*:

1) уравнение (22.1), выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке поля, — первое уравнение Максвелла;

2) уравнение (22.4), которое определяет связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля, — второе уравнение Максвелла;

3) уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока [оно следует из (22.4) после взятия от обеих частей его дивергенции];

б) уравнение $\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{своб}/\varepsilon_a$, выражающее связь между истоком напряженности электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля.

Эту систему дополняют уравнением непрерывности (см. § 22.3) и теоремой Умова—Пойнтинга (см. § 22.6).

§ 22.2. Первое уравнение Максвелла. Первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (22.1)$$

В правой части его имеются две плотности тока: плотность тока проводимости $\vec{\delta}$ и плотность тока электрического смещения $\partial \vec{D}/\partial t$. Ток электрического смещения возникает в любом диэлектрике, в том числе и в вакууме, при изменении напряженности электрического поля

* Уравнения были сформулированы английским ученым Д. Максвеллом (1831—1879) в его книге «Трактат об электричестве и магнетизме», изданной в 1873 г.

во времени. Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Хотя природа тока проводимости и тока смещения неодинакова, оба они обладают одним и тем же свойством — вызывать магнитное поле.

Таким образом, смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что всякое изменение электрического смещения во времени ($\partial\vec{D}/\partial t$) в некоторой точке поля (т. е. возникновение в ней тока смещения) на таких же правах, как и ток проводимости, вызывает в этой точке вихрь магнитного поля ($\operatorname{rot}\vec{H}$), т. е. вызывает вихревое магнитное поле. Если среда однородна и изотропна, то $\varepsilon_а = \text{const}$ и тогда

$$\frac{\partial\vec{D}}{dt} = \varepsilon_а \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

С током смещения в предыдущих разделах (особенно в гл. 3 и 8) приходилось встречаться неоднократно. Так, известно, что при зарядке конденсатора через него протекает ток. Этот ток протекает через диэлектрик и является током смещения.

Если, например, взять незаряженный плоский воздушный конденсатор и подключить его к источнику э. д. с. напряжением U через сопротивление R, то напряжение на обкладках конденсатора будет расти по закону $u_C = U(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$. Так как напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = u_C/d$, где d — расстояние между обкладками, то $E = \frac{U}{d}(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$. Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_а S/d$.

Ток смещения, протекающий через единицу поверхности сечения диэлектрика, взятой перпендикулярно силовым линиям,

$$\varepsilon_а \frac{\partial E}{dt} = \varepsilon_а \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{RS} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Через поверхность S ток смещения в S раз больше, т. е. он равен току проводимости, протекающему по проводникам, соединяющим конденсатор с источником э. д. с.

Отметим, что первое уравнение Максвелла представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Убедимся в том, что из закона полного тока следует уравнение (22.1). С этой целью возьмем произвольный контур и составим для него уравнение по закону полного тока. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром, равен сумме тока проводимости и тока смещения. Поэтому

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \int_S (\vec{\delta} + \partial\vec{D}/dt)\, d\vec{S}.$$

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{H}d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H}d\vec{S}$. Следовательно,

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H}d\vec{S} = \int_S (\vec{\delta} + \partial\vec{D}/dt)\, d\vec{S}. \qquad (22.2)$$

Равенство (22.2) должно выполняться при любой площади $\vec{S}$, поэтому

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta}+\partial\vec{D}/dt.$$

§ **23.3. Уравнение непрерывности.** Линии полного тока $\left(\vec{\delta}+\varepsilon_a\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ являются непрерывными. Физически это означает, что на границе проводящей среды и диэлектрика ток проводимости переходит в ток смещения.

Можно математически сформулировать *принцип непрерывности (замкнутости) линий полного тока*. С этой целью от обеих частей уравнения (22.1) возьмем дивергенцию. Из предыдущего известно, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю (см. § 21.12). Поэтому

$$\operatorname{div}\left(\vec{\delta}+\varepsilon_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0. \qquad (22.3)$$

Уравнение (22.3) можно записать в другой форме. Действительно, из него следует, что $\operatorname{div}\vec{\delta}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}$. Но $\operatorname{div}\vec{D}=\rho_{своб}$. Поэтому

$$\operatorname{div}\delta=-\frac{\partial\rho_{своб}}{\partial t}. \qquad (22.3а)$$

Уравнение непрерывности (22. 3′)называют также *законом сохранения заряда*. Этот закон означает, что электрический заряд неуничтожаем, он может только перемещаться из одного места в другое.

§ **22.4. Второе уравнение Максвелла.** Второе уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (22.4)$$

Физический смысл его состоит в том, что всякое изменение магнитного поля во времени $(\partial\vec{B}/\partial t)$ в какой-либо точке поля возбуждает вихрь или ротор электрического поля в той же точке поля, т. е. вызывает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции.

Чтобы убедиться в этом, проведем следующие рассуждения. Мысленно возьмем некоторый замкнутый контур, расположенный в переменном электромагнитном поле. Переменный магнитный поток, пронизывающий контур, наведет в нем э. д. с. $e=\oint\vec{E}d\vec{l}=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$. Но $\Phi=\int\limits_S\vec{B}d\vec{S}$, поэтому $\oint\vec{E}d\vec{l}=-\int\limits_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$, причем площадка $\vec{S}$ опирается на контур l.

На основании теоремы Стокса $\oint\vec{E}d\vec{l}=\int\limits_S\operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S}$, поэтому

$$\int\limits_S\operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S}=-\int\limits_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (22.5)$$

Равенство (22.5) должно выполняться при любых площадях S, что возможно только в том случае, когда равны подынтегральные функции обоих интегралов. Следовательно

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знак «минус» в правой части второго уравнения Максвелла $\left(\text{как и в формуле } e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$ объясняется тем, что в основу положено правило правого винта. Если завинчивать правый винт так, что положительное направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в некоторой точке пространства при возрастании индукции в этой точке совпадает с направлением движения острия винта, то положительное направление для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ при составлении циркуляции вектора $\vec{E}$ вдоль бесконечно малого контура, окружающего эту точку и лежащего в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, совпадает с направлением вращения головки винта.

Знак «минус» в правой части (22.4) поставлен для того, чтобы привести в соответствие действительное направление для $\vec{E}$ при оговоренных ранее условиях с направлением, принятым для $\vec{E}$ за положительное.

Как в первом, так и во втором уравнениях Максвелла участвуют частные (не полные) производные во времени. Объясняется это тем, что уравнения Максвелла записаны для таких тел и контуров, которые неподвижны по отношению к выбранной системе координат. (Вопросы электродинамики движущихся сред кратко рассмотрены в § 22.9).

В переменном электромагнитном поле кроме силовых линий электрического поля, «начинающихся» и «оканчивающихся» на электрических зарядах (как в электростатическом поле) могут быть и замкнутые на себя силовые линии электрического поля, охватывающие замкнутые на себя силовые линии магнитного поля (см., например, рис. 26.5, *а*).

§ 22.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи. Уравнения (22.1) и (22.4) записаны для мгновенных значений. Если H и E изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать уравнения (22.1) и (22.4) в иной форме. Пусть $H = H_m \sin(\omega t + \psi_н)$ и $E = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$.

Можно записать $H = Im \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (Im — мнимая часть) или, условно, $H \to \dot{H}_m e^{j\omega t}$, где комплексная амплитуда $\dot{H}_m = H_m e^{j\psi_н}$.

В свою очередь $E \to \dot{E}_m e^{j\omega t}$ ($\to$ значок соответствия).

Так как напряженности E и H, кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, т. е. определенным образом ориентированными в пространстве векторами, то над ними ставят стрелку и точку: $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$.

Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально*. Тогда $\vec{\delta}$ можно заменить на $\gamma\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}$:

$$\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ — на } j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}e^{j\omega t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right)$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{H} \text{ — на } \operatorname{rot} \left[\dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right] = e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$$

($e^{j\omega t}$ как постоянную величину, не зависящую от координат, можно вынести за знак ротора). При этом первое уравнение Максвелла запишем так:

$$e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \left(\gamma \dot{\vec{E}} + j\varepsilon_a \omega \dot{\vec{E}} \right) e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}. \qquad (22.6)$$

Аналогично, второе уравнение Максвелла в комплексной форме

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}. \qquad (22.7)$$

§ 22.6. Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений. Кроме уравнений Максвелла, большое значение в теории электромагнитного поля имеет теорема Умова—Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова—Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма — для синусоидально изменяющихся величин.

Из § 19.46 известно, что энергия электрического поля в единице объема равна $\varepsilon_a E^2/2$. Энергия магнитного поля в единице объема — $\mu_a H^2/2$. Энергия в объеме dV равна $\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$.

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dV, умножим (22.1) на $\vec{E}dV$, а (22.4) на $\vec{H}dV$. Получим

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dV = \left(\gamma \vec{E}\, \vec{E} + \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV. \qquad (22.8)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} dV = \left(-\mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \qquad (22.9)$$

Из (22.8) вычтем (22.9). Тогда

$$\left(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} \right) dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right] dV. \qquad (22.10)$$

---

* В дальнейшем от амплитудных значений переходим к действующим и индекс m опускаем.

Так как $\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}$*, то левая часть (22.10) есть $-\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]\,dV$. Следовательно,

$$-\operatorname{div}\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]dV = \left\{\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)\right\}dV.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение $\vec{E}$ на $\vec{H}$ через $\vec{\Pi}$, т. е. примем, что $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$; $\vec{\Pi}$ — это вектор, называемый *вектором Пойнтинга*; размерность его равна произведению размерностей E и H:

$$|\Pi| = |E|\,|H| = \frac{\text{В}}{\text{м}}\,\frac{\text{А}}{\text{м}} = \text{ВА/м}^2.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет размерность мощности (или энергии в единицу времени), отнесенной к единице поверхности, и направление его (рис. 22.1) совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от $\vec{E}$ к $\vec{H}$. Следовательно,

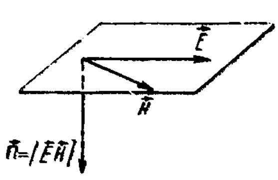


Рис. 22.1

$$-\operatorname{div}\vec{\Pi}dV = \left\{\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)\right\}dV. \qquad (22.11)$$

Распространим (22.11) на некоторый объем конечных размеров. С этой целью проинтегрируем (22.11) по объему V:

$$-\int_V \operatorname{div}\vec{\Pi}dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right]dV. \qquad (22.11\text{а})$$

Подобно тому, как поверхностный интеграл по теореме Стокса преобразовывается в линейный (см. § 21.14): $\int_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{S} = \oint \vec{A}d\vec{l}$, объемный интеграл в свою очередь может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование осуществляют с помощью теоремы Остроградского—Гаусса $\int_V \operatorname{div}\vec{\Pi}dV = \oint_S \vec{\Pi}d\vec{S}$.

Качественно поясним это преобразование. Разобъем объем V (рис. 22.2) на отдельные объемы ΔV, заменим $\operatorname{div}\vec{\Pi}$ на $\dfrac{\Sigma\vec{\Pi}\Delta\vec{S}}{\Delta V}$ (строго говоря, надо было бы

---

* Напомним вывод этого соотношения. Введем индексы a и b, указывающие, по какой переменной (A или B) производится дифференцирование, и учтем, что можно в циклическом порядке менять множители. Будем иметь: $\operatorname{div}[\vec{A}\vec{B}] = \nabla_a[\vec{A}\vec{B}] + \nabla_b[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}[\nabla_a\vec{A}] + \vec{A}[\vec{B}\nabla_b] = \vec{B}[\nabla_a\vec{A}] - \vec{A}[\nabla_b\vec{B}] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$.

Замена $\vec{A}$ на $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на $\vec{H}$ и дает соотношение: $\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}$.

записать $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Sigma \vec{\Pi} \Delta \vec{S}}{\Delta V}$), где $\Delta\vec{S}$ — элемент поверхности объема ΔV, а знак Σ означает суммирование по всем поверхностям объема ΔV. Тогда

$$\int\limits_V \operatorname{div} \vec{\Pi} d\vec{V} = \Sigma\Sigma \frac{\vec{\Pi}\Delta\vec{S}}{\Delta V} \Delta V = \Sigma\Sigma\vec{\Pi}\Delta\vec{S}.$$

Первый знак суммы означает суммирование по поверхностям малого объема, а второй — по отдельным объемам.

Сумма $\Sigma\Sigma\vec{\Pi}\Delta\vec{S}$ может быть разбита на две суммы: на сумму выражений $\vec{\Pi}\Delta\vec{S}$ по всем поверхностям, отделяющим один объем от соседнего (по «внутренним» поверхностям), и на сумму $\vec{\Pi}\Delta\vec{S}$ по всем «периферийным» поверхностям. Пер-

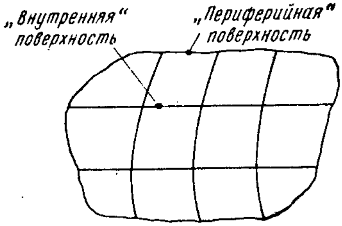


Рис. 22.2

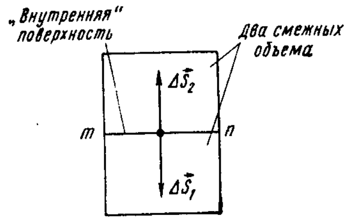


Рис. 22.3

вая сумма равна нулю, так как для двух смежных объемов внешние нормали к общей поверхности направлены встречно. Рис. 22.3 поясняет это; mn — общая грань двух объемов. Для верхнего объема нормаль к грани направлена вниз ($\Delta\vec{S}_1$), для нижнего — вверх ($\Delta\vec{S}_2$); вектор $\vec{\Pi}$, будучи умноженным на ($\Delta\vec{S}_1 + \Delta\vec{S}_2$), даст нуль. Сумма $\vec{\Pi}\Delta\vec{S}$ по всем периферийным поверхностям и представляет собой $\oint \vec{\Pi} d\vec{S}$.

Теорему Умова—Пойнтинга для мгновенных значений записывают следующим образом:

$$-\oint\limits_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int\limits_V \gamma E^2\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) dV. \qquad (22.12)$$

Левая часть (22.12) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторый объем V.

Поясним смысл знака «минус» в левой части формулы (22.12).

Элемент поверхности $d\vec{S}$ в любой ее точке направлен в сторону внешней по отношению к рассматриваемому объему нормали. Вектор Пойнтинга направлен внутрь этого объема. Поскольку угол между $\vec{\Pi}$ и $d\vec{S}$ больше 90°, то скалярное произведение $\vec{\Pi} d\vec{S} < 0$, а $-\vec{\Pi} d\vec{S} > 0$. Таким образом, за счет знака «минус» левая часть формулы (22.9)— величина положительная.

В соответствии с уравнением Джоуля—Ленца в дифференциальной форме γE^2 — энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени.

Поэтому $\int\limits_V \gamma E^2 dV$ есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V; $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V, равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты, и мощности, идущей на приращение энергии электромагнитного поля.

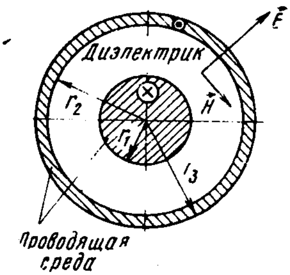


Рис. 22.4

Теорему Умова—Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса*; левая часть (22.12) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (22.12) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (22.12) было получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad -\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int\limits_V \gamma E^2 dV.$$

Обратим внимание также на то, что формула (22.12) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{\Pi}$ транзитом через объем V.

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику (*провода же в линиях передачи выполняют двоякую роль*: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике).

Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере. Пусть энергия постоянного тока передается по коаксиальному кабелю (рис. 22.4). Радиус жилы r_1, внутренний радиус оболочки r_2.

Примем проводимость материала жилы и оболочки настолько большой (теоретически бесконечной большой), что напряженности поля $E = \delta/\gamma$ в жиле и оболочке стремятся к нулю. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.

---

* Н. А. Умов (1846—1915) с 1893 по 1911 г. являлся профессором Московского университета. В 1874 г. защитил докторскую диссертацию «О движении энергии в упругих средах», где рассмотрел вопрос о потоке энергии в упругих средах и о плотности потока энергии. Применительно к электромагнитному полю понятие о потоке энергии было развито английским физиком Пойнтингом в 1885 г.

Убедимся, что энергия, передаваемая приемнику в единицу времени, равная UI, действительно канализируется по диэлектрику.

С этой целью подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2. Напряженность магнитного поля в диэлектрике по закону полного тока $H = I/(2\pi r)$.

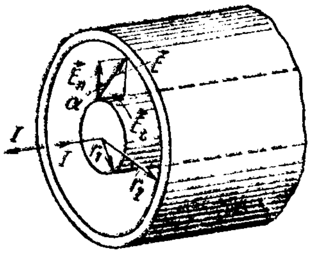


Рис. 22.5

Напряженность электрического поля в диэлектрике при постоянном токе определяется так же, как и в условиях электростатики:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_a r l} = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где Q — полный заряд жилы на длине l; U — напряжение между жилой и оболочкой.

Следовательно, в некоторой точке диэлектрика, расположенной на расстоянии r от оси $(r_1 \leqslant r \leqslant r_2)$

$$\Pi = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

($\vec{E}$ и $\vec{H}$ — взаимно перпендикулярны; см. рис. 22.4). Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2:

$$\int\limits_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \Pi 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия передается по диэлектрику. По жиле и оболочке энергия к приемнику не передается. Более того, если учесть, что γ конечна и напряженность электрического поля в жиле и оболочке направлена по току и не равна нулю, то нетрудно убедиться в наличии потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность провода внутрь провода, т. е. провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.

Пример 220. Определить тангенс угла α, составляемого напряженностью электрического поля с нормалью к поверхности жилы в точке, принадлежащей поверхности жилы коаксиального кабеля (рис. 22.5), а также подсчитать величину потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы на длине в 1 м и сопоставить величину потока вектора Пойнтинга с потерями энергии в жиле на длине в 1 м. Радиус медной жилы $r_1 = 0{,}3$ см; внутренний радиус оболочки $r_2 = 1$ см. Протекающий по кабелю постоянный ток $I = 50$ А. Напряжение между жилой и оболочкой $U = 10$ кВ.

Решение. Нормальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы:

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{10^4}{0.003 \cdot \ln \frac{1}{0,3}} = 2,77 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы по закону Ома:

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0,003^2 \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}.$$

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ составляет с нормалью к поверхности жилы угол α (см. рис. 22.5), тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напряженность магнитного поля на поверхности жилы, по закону полного тока,

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0,003} = 2650 \text{ А/м}.$$

Для определения величины потока вектора Пойнтинга внутрь жилы на длине в 1 м следует умножить составляющую вектора Пойнтинга $E_t H$, проникающую внутрь жилы, на величину боковой поверхности жилы на длине в 1 м:

$$E_t H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3,05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \times 2\pi \cdot 0,003 \cdot 1 = 1,523 \text{ Вт}.$$

Эта величина равна потерям энергии в жиле кабеля на длине в 1 м

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \frac{1}{5,8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0,003^2} = 1,523 \text{ Вт}.$$

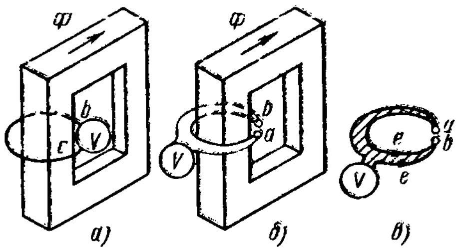


Рис. 22.6

Пример 221. На рис. 22.6, *а* и *б* изображен сердечник трансформатора и один виток, окружающий сердечник. Концы витка обозначены *a* и *b*. Намагничивающая обмотка трансформатора на рисунке не показана. По сердечнику проходит синусоидально изменяющийся во времени магнитный поток $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Поток вне сердечника отсутствует. К концам витка *a* и *b* присоединим вольтметр электродинамической системы с сопротивлением R_V один раз в соответствии с рис. 22.6, *а*, другой по рис. 22.6, *б*. Определим показание вольтметра в этих двух случаях, полагая, что активное сопротивление самого витка $R_в \ll R_V$ и что индуктивность рассеяния L_s витка ничтожно мала.

Обозначим ток в контуре i и для рис. 22.6, *а* составим уравнение по второму закону Кирхгофа $iR_в + iR_V + L_s \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = 0$.

Пренебрегая слагаемыми $iR_в$ и $L_S \frac{di}{dt}$ по сравнению с iR_V и $d\Phi/dt$, обозначив $IR_V = U_в$, найдем показание вольтметра в схеме рис. 22.6, *а* $U_V = \omega\Phi_m/\sqrt{2}$. В схеме рис. 22.6, *б* вольтметр покажет нуль. Это можно пояснить двояко. 1. Провода, идущие от точек *a* и *b* витка к вольтметру на рис. 22.6, *б* образуют второй виток, в котором изменяющимся магнитным потоком наводится такая же э. д. с., что и в основном витке (см. рис. 22.6, *в*). При обходе контура, состоящего из двух витков, убеждаемся, что суммарная э. д. с. в контуре равна нулю. 2. Такой же вывод сделаем, если учтем, что суммарный поток, пронизывающий заштрихованную площадь контура рис. 22.6, *в*, равен нулю (поток вне сердечника по условию отсутствует).

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что при измерениях в переменном электромагнитном поле показание вольтметра зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения.

§ 22.7. Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме записи. Перед тем как записать теорему Умова—Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность $\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = P + jQ$.

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные активные сопротивления R, индуктивность L и емкость C.

Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \omega\left[I^2 L - I^2\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 C\right] = 2\omega\,(w_м - w_э).$$

Здесь

$$w_м = LI^2/2 \text{ и } w_э = CU_C^2/2,$$

где U_C — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной $w_м$ и электрической $w_э$ энергиями цепи, умноженной на 2ω. Подобно тому как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности $\tilde{S}$ надо умножить комплекс напряжения $\dot{U}$ на сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I}$, вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга $\vec{\tilde{\Pi}} = [\vec{\dot{E}}\vec{\overset{*}{H}}]$. Вместо $-\oint \vec{\Pi} d\vec{S}$ теперь будет

$$-\oint \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div} \vec{\tilde{\Pi}} dV = \int_V \left(\vec{\dot{E}} \operatorname{rot} \vec{\overset{*}{H}} - \vec{\overset{*}{H}} \operatorname{rot} \vec{\dot{E}}\right) dV.$$

В соответствии с (22.6) и (22.7)

$$\operatorname{rot} \vec{\dot{H}} = \gamma\vec{\dot{E}} + j\omega\varepsilon_a \vec{\dot{E}}, \quad \operatorname{rot} \vec{\dot{E}} = -j\omega\mu_a \vec{\dot{H}}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \vec{\overset{*}{H}} = \gamma\vec{\overset{*}{E}} - j\omega\varepsilon_a\vec{\overset{*}{E}}$ и

$$\vec{\dot{E}} \operatorname{rot} \vec{\overset{*}{H}} - \vec{\overset{*}{H}} \operatorname{rot} \vec{\dot{E}} = \gamma\vec{\dot{E}}\vec{\overset{*}{E}} - j\omega\varepsilon_a \vec{\overset{*}{E}}\vec{\dot{E}} + j\omega\mu_a \vec{\overset{*}{H}}\vec{\dot{H}} =$$

$$= \gamma E^2 + 2j\omega\left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2}\right).$$

Поэтому

$$-\oint \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = \int\limits_V \gamma E^2 \, dV + j2\omega \int \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E_a^2}{2} \right) dV. \qquad (22.13)$$

Первое слагаемое правой части (22.13) представляет собой активную мощность, второе — реактивную. Таким образом, теорему Умова—Пойнтинга можно записать еще следующим образом: $-\oint \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = P + jQ$.

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе (подробнее см. § 23.7).

§ 22.8. Некоторые замечания к § 22.1. *Первое замечание.* В уравнения Максвелла входят параметры ε_a, γ, μ_a, характеризующие усредненные в пространственном и временном смысле свойства вещества. При низких частотах эти параметры представляют собой действительные (некомплексные) числа — такими и будем их считать в курсе ТОЭ. При высоких частотах в диэлектриках существенную роль начинают играть диэлектрическая вязкость и другие процессы.

В ферромагнитных веществах резко сказываются явления гистерезиса, магнитной вязкости и ряд других. В силу этих причин ε_a, γ и μ_a оказываются функциями частоты и комплексами*.

Убедимся, в том, что вязкостные процессы при поляризации диэлектриков с полярными молекулами приводят к тому, что ε_a становится комплексным числом.

Обозначим $E_п$ — напряженность поля, обусловленную приложенным к конденсатору напряжением u; например, для плоского конденсатора с расстоянием d между обкладками $u = E_п d$; $E_д$ — действующая на диполи полярных молекул напряженность поля, вызывающая их поворот.

За счет вязкостных процессов при поляризации (повороте) полярных молекул $E_д < E_п$ на величину, пропорциональную скорости поляризации:

$$E_д = E_п - k_1 \frac{dP}{dt}, \qquad (22.14)$$

где k_1 — некоторый коэффициент.

Но $P = k_2 E_д$, поэтому $E_д + k \frac{dE_д}{dt} = E_п$, где $k = k_1 k_2$. При нулевых начальных условиях $E_д = E_п \left(1 - e^{-t/k}\right)$. Коэффициент k называют *постоянной времени релаксации.*

При переменном токе частотой ω:

$$\dot{E}_д = \frac{\dot{E}_п}{1 + j\omega k}; \quad \dot{P} = k_2 \dot{E}_д$$

и

$$\dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E}_п + \dot{P} = \dot{E}_п \frac{\varepsilon_0 (1 + j\omega k) + k_2}{1 + j\omega k}.$$

---

* Зависимость параметров веществ от частоты впервые была обнаружена русским ученым В. К. Аркадьевым в 1908—1911 гг. Физическое объяснение этим явлениям было дано им в 1913 г. в работе «Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле».

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}_a = \dfrac{\dot{D}}{\dot{E}_п} = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a$

$$\varepsilon'_a = \frac{(\varepsilon_0 + k_2) + \omega^2 k^2 \varepsilon_0}{1 + (\omega k)^2}; \quad \varepsilon''_a = \frac{\omega k k_2}{1 + (\omega k)^2}.$$

Из формул видно, что ε'_a и ε''_a являются функциями частоты. Мгновенное значение плотности тока через диэлектрик, у которого проводимость $\gamma = 0$, $\vec{\delta}_{см} = \partial\vec{D}/\partial t$. При переменном токе частотой ω : $\dot{\delta}_{см} = j\omega\dot{D} = j\omega\dot{E}_п(\varepsilon'_a - j\varepsilon''_a) = \omega\dot{E}_п(\varepsilon''_a + j\varepsilon'_a)$. Мгновенное значение полной плотности тока через несовершенный диэлектрик ($\gamma \neq 0$): $\vec{\delta}_п = \gamma\vec{E}_п + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. При переменном токе частотой ω: $\dot{\delta} = (\gamma + \omega\varepsilon''_a)\dot{E}_п + j\omega\varepsilon'_a\dot{E}_п$. Первое слагаемое правой части находится в фазе с приложенным напряжением, второе на 90° его опережает. Тангенс угла потерь несовершенного диэлектрика (см. § 3.9) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\varepsilon''_a + \gamma/\omega}{\varepsilon'_a}$. Используя уравнение (16.34) § 16.8 для вязкостных процессов в ферромагнетиках, можно вывести аналогичные формулы и для комплексной магнитной проницаемости в предположении, что вихревые токи отсутствуют. Заметим, что дифференциальное уравнение, описывающее процесс зарядки конденсатора с вязким диэлектриком через резистор сопротивлением R от источника постоянной э. д. с., если учесть вязкостные процессы по уравнению (22.14), будет иметь второй (не первый!) порядок.

Второе замечание. В § 22.2 рассматривалось первое уравнение Максвелла (22.1). В правой части этого уравнения записаны две плотности тока — проводимости $\vec{\delta}$ и электрического смещения $\partial\vec{D}/\partial t$. Но кроме токов проводимости и электрического смещения существует третий вид тока — ток переноса (это собирательное название).

Под *током переноса* понимают ток, природа которого отлична от природы тока проводимости и тока смещения, это, например, ток, возникающий в электронной лампе вследствие термоэлектронной эмиссии.

Плотность тока переноса равна объемной плотности переносимых зарядов ρ, умноженной на скорость их переноса $\vec{v}$.

Если ток переноса создается движением со скоростью $\vec{v}$ положительно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_+ и движущихся со скоростью v_- отрицательно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_-, то плотность тока переноса равна $\rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_-$. Ток переноса, так же как и остальные виды токов, создает магнитное поле.

С учетом тока переноса первое уравнение Максвелла записывают следующим образом: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon_a\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \rho\vec{v}$.

Для тех задач, которые рассматриваются в ч. III учебника, ток переноса отсутствует, поэтому первое уравнение Максвелла и взято в форме (22.1).

Третье замечание. При чрезвычайно высоких частотах, когда длина электромагнитной волны становится соизмеримой с линейными размерами, характеризующими молекулярную структуру самого вещества, вещество уже нельзя рассматривать как континуум. В этом случае уравнения Максвелла должны быть заменены уравнениями квантовой теории поля.

Четвертое замечание. В курсе ТОЭ в основном рассматривают поля в изотропных линейных средах. В них вектор $\vec{B} = \mu_a\vec{H}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{H}$, вектор $\vec{D} = \varepsilon_a\vec{E}$ совпадает по направлению с $\vec{E}$ и вектор $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$ с $\vec{E}$. В *изотропных средах* μ_a, ε_a и γ представляют собой некоторые постоянные числа, не зависящие от величины H или E (но зависящие от частоты). Если проекция вектора $\vec{B}$ на оси x, y, z обозначить B_x, B_y, B_z, а проекции $\vec{H}$ — через H_x, H_y, H_z, то для изотропных сред $B_x = \mu_a H_x$; $B_y = \mu_a H_y$; $B_z = \mu_a H_z$. Аналогично $D_x = \varepsilon_a E_x$, $D_y = \varepsilon_a E_y$, $D_z = \varepsilon_a E_z$, $\delta_x = \gamma E_x$ и т. д. В *анизотропных средах* $\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu}_a \vec{H}$ не совпадает по направлению с $\vec{H}$, $\vec{D}$ с $\vec{E}$, $\vec{\delta}$ с $\vec{E}$. Любая проекция $\vec{B}$, $\vec{D}$, u, $\vec{\delta}$ зависит не только от одноименной проекции $\vec{H}$ или $\vec{E}$, но и от разноименных проекций. Так, B_x зависит не только от H_x, но и от H_y и H_z; $B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$, аналогично, $B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$, где μ_{xx}, μ_{xy}, μ_{xz} — составляющие тензора магнитной проницаемости $\overleftrightarrow{\mu}_a$

$$\overleftrightarrow{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Подобные выражения существуют и для тензоров $\overleftrightarrow{\varepsilon}_a$ и $\overleftrightarrow{\gamma}$.

§ 22.9. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики). Положим, что имеются две системы отсчета координат и времени. Одна система неподвижна, имеет начало в точке 0, координаты произвольной точки в ней x, y, z и время t (система 0). Другая система отсчета связана с движущейся по отношению к предыдущей системе отсчета средой, имеет начало в точке O_1, а координаты той же точки в ней x_1, y_1, z_1 и времени t_1 (система 0_1). Допустим, что в момент времени $t = 0$ обе системы координат совпадают и что скорость движения среды $\vec{v}$ направлена по оси x. Тогда в соответствии с теорией относительности можно записать преобразования Лоренца, связывающие координаты и время в обеих системах отсчета:

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y_1 = y; \quad z_1 = z; \quad t_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{22.15}$$

где c — скорость света, $\beta = v/c$.

Обозначим напряженность электрического поля и магнитную индукцию в произвольной точке, которые бы измерил наблюдатель, неподвижный по отношению к системе 0, соответственно как $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Физически $\vec{E}$ означает силу, действующую на единичный покоящийся заряд в системе 0, а $\vec{B}$ — силу, действующую на единичный элемент тока, неподвижный в системе 0:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z; \quad \vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z.$$

Напряженность электрического поля и магнитную индукцию, которые бы измерил наблюдатель, неподвижный по отношению к системе 0_1 (т. е. движущийся со средой со скоростью $\vec{v}$), обозначим $\vec{E}_1$ и $\vec{B}_1$. Физически $\vec{E}_1$ означает силу, действующую на единичный покоящийся в системе 0_1 заряд; $\vec{B}_1$ — силу, действующую на единичный элемент тока, покоящийся в движущейся среде:

$$\vec{E}_1 = \vec{i}E_{x1} + \vec{j}E_{y1} + \vec{k}E_{z1}; \quad \vec{B}_1 = \vec{i}B_{x1} + \vec{j}B_{y1} + \vec{k}B_{z1}.$$

Перейдем от уравнений Максвелла для неподвижных сред к уравнениям Максвелла для движущихся сред. С этой целью частные производные по x, y, z при взятии ротора и дивергенции и частные производные по t заменим частными производными по x_1, y_1, z_1 и по времени t_1, имея в виду, что в соответствии с (22.15):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_1}\right); \quad \frac{\partial}{\partial t} = \alpha\left(-v\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right);\quad \frac{\partial}{\partial t_1}=\alpha\left(v\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}=\frac{\partial}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{\partial}{\partial z};\quad \alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

После раскрытия ротора и объединения членов с одинаковыми ортами в первом уравнении Максвелла $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, получим

$$\operatorname{rot}\vec{H}_1=\vec{\delta}_1+\frac{\partial\vec{D}_1}{\partial t}. \tag{22.16}$$

Проекции векторов на координатные оси в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$H_{x1}=H_x;\quad H_{y1}=\alpha(H_y+vD_z);\quad H_{z1}=\alpha(H_z-vD_y), \tag{22.17}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{\delta}_1=\vec{i}\,\delta_{x1}+\vec{j}\delta_{y1}+\vec{k}\,\delta_{z1},\\ &\delta_{x1}=\alpha(\delta_x-\rho v);\quad \delta_{y1}=\delta_y;\quad \delta_{z1}=\delta_z,\end{aligned}\right\} \tag{22.18}$$

$$\vec{D}_1=\vec{i}\,D_{x1}+\vec{j}\,D_{y1}+\vec{k}D_{z1},$$

$$D_{x1}=D_x;\quad D_{y1}=\alpha\left(D_y-\frac{v}{c^2}H_z\right);$$

$$D_{z1}=\alpha\left(D_z+\frac{v}{c^2}H_y\right). \tag{22.19}$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\vec{E}_1=-\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t} \tag{22.20}$$

дают связь между проекциями векторов:

$$E_{x1}=E_x;\quad E_{y1}=\alpha(E_y-vB_z);\quad E_{z1}=\alpha(E_z+vB_y); \tag{22.21}$$

$$B_{x1}=B_x;\quad B_{y1}=\alpha\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right);\quad B_{z1}=\alpha\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right). \tag{22.22}$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла в системе 0_1 имеют вид:

$$\operatorname{div}\vec{D}_1=\rho_1, \tag{22.23}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}_1=0. \tag{22.24}$$

Здесь

$$\rho_1=\alpha\left(\rho-\frac{v}{c^2}\delta_x\right). \tag{22.25}$$

Обратим внимание еще раз на то, что в системе 0_1 операции дифференцирования при взятии ротора и дивергенции производят по координатам x_1, y_1, z_1.

В системе 0_1, для которой среда неподвижна, выполняется условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности E_{t1}, тангенциальной составляющей H_{t1} и непрерывность нормальных составляющих D_{n1} и B_{n1}.

В системе 0_1

$$\vec{J}_1=\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}-\vec{H}_1;\quad \vec{P}_1=\vec{D}_1-\varepsilon_0\vec{E}_1. \tag{22.26}$$

В системе 0

$$\vec{J}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H};\quad \vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E} \tag{22.27}$$

$\vec{J}$ и $\vec{J}_1$ — намагниченность и $\vec{P}$ и $\vec{P}_1$ — поляризованность в системах 0 и 0_1: $\vec{J}=\vec{i}J_x+\vec{j}J_y+\vec{k}J_z$; $\vec{J}_1=\vec{i}J_{x1}+\vec{j}J_{y1}+\vec{k}J_{z1}$; $\vec{P}=\vec{i}P_x+\vec{j}P_y+\vec{k}P_z$; $\vec{P}_1=\vec{i}P_{x1}+\vec{j}P_{y1}+\vec{k}P_{z1}$.

Используя уравнения (22.17), (22.19), (22.21), получим связи между проекциями векторов намагниченности и поляризованности в системах 0 и 0_1:

$$\left.\begin{aligned} &J_{x1}=J_x;\quad J_{y1}=\alpha(J_y+vP_z);\quad J_{z1}=\alpha(J_z-vP_y);\\ &P_{x1}=P_x;\quad P_{y1}=\alpha\left(P_y-\frac{v}{c^2}P_z\right);\quad P_{z1}=\alpha\left(P_z+\frac{v}{c^2}P_y\right).\end{aligned}\right\} \tag{22.28}$$

Из уравнений (22.17) и (22.22) следует, что если в системе 0 магнитное поле отсутствует ($B=0$), но имеется электрическое ($E\neq 0$), то в системе 0_1 имеется не только электрическое, но и магнитное поле. Из уравнений (22.19) и (22.21) заключаем, что если в системе 0 отсутствует электрическое поле ($E=0$), но есть магнитное ($B\neq 0$), то в системе 0_1 наблюдается не только магнитное, но и электрическое поле. Плотность тока $\vec{\delta}_1$ в системе 0_1 создается не только током проводимости $\vec{\delta}_1$, но и током переноса $\alpha v\rho$ [см. урав. (22.18)].

В соответствии с уравнением (22.25) перемещение тока с плотностью δ_x параллельно самому себе с системой 0_1, наблюдатель в системе 0 воспринимает как возникновение объемного заряда $\frac{v}{c^2}\delta_x$, *дополнительного к объемной плотности зарядов* ρ_1. В соответствии с уравнением (22.28) движение поляризованной среды со скоростью v воспринимается в системе 0 как появление *дополнительной намагниченности*, а движение намагниченной среды со скоростью v воспринимается в системе 0 как возникновение дополнительной поляризованности.

Для поля, связанного с системами 0 и 0_1, имеют место следующие инварианты:

$$\frac{E_1^2}{c}-B_1^2c=\frac{E^2}{c}-B^2c;\quad \vec{E}_1\vec{B}_1=\vec{E}\vec{B};$$

$$D_1^2c-\frac{H_1^2}{c}=D^2c-\frac{H^2}{c};\quad \vec{D}_1\vec{H}_1=\vec{D}\vec{H}.$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью света, то $v^2/c^2\ll 1$; $\alpha\approx 1$, при этом преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея $x_1=x-vt$; $y_1=y$; $z_1=z$; $t_1=t$, а связи между величинами в системах 0 и 0_1 становятся такими:

$$\vec{E}_1=\vec{E}+[\vec{v}\,\vec{B}];\quad \vec{B}_1=\vec{B}-\frac{[\vec{v}\,\vec{E}]}{c^2};\quad \vec{H}_1=\vec{H}-[\vec{v}\vec{D}];\quad \vec{D}_1=\vec{D}+\frac{[\vec{v}\vec{H}]}{c^2};$$

$$\vec{\delta}_1=\vec{\delta}-\vec{v}\rho;\quad \rho_1=\rho-\frac{\vec{v}\,\vec{\delta}}{c^2};\quad \vec{J}_1=\vec{J}+[\vec{v}\,\vec{P}];\quad \vec{P}_1=\vec{P}-\frac{[\vec{v}\,\vec{J}]}{c^2}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение переменного электромагнитного поля и запишите совокупность уравнений Максвелла. 2. Какими атрибутами, присущими материи, обладает электромагнитное поле? 3. Сформулируйте и запишите математически принцип непрерывности полного тока. 4. Покажите, что из первого уравне-

ния Максвелла следует принцип непрерывности полного тока (или закон сохранения заряда), а из второго — принцип непрерывности магнитной индукции. 5. Чем объяснить, что во втором уравнении Максвелла, в отличие от первого, поставлен знак минус? 6. Какие уравнения в интегральной форме соответствуют первому и второму уравнениям Максвелла? 7. Установите связь закона электромагнитной индукции с законом Ленца. 8. Прокомментируйте теорему Умова — Пойнтинга для мгновенных значений величин и для величин в комплексной форме записи. 9. Как формируется комплексный вектор Пойнтинга? Каков смысл знака минус в левой части записи теоремы Умова—Пойнтинга? 10. Можно ли утверждать, что при постоянном токе электромагнитная энергия передается по проводам? 11. Поясните смысл преобразования, осуществляемого с помощью теоремы Остроградского — Гаусса. 12. Чем объяснить, что показание вольтметра в переменном электромагнитном поле зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения? 13. Поясните в силу каких причин ε_a, γ и μ_a могут оказаться комплексными числами. 14. Какие среды называют анизотропными? 15. Назовите анизотропные проводящие, магнитные, диэлектрические среды. 16. Две металлические плоские шины рис. 22.7 высотой h расположены в диэлектрике на расстоянии b ($b \ll h$) и служат прямым и обратным проводами, по которым проходит постоянный ток I при напряжении U. Покажите, что поток вектора Пойнтинга в направлении шин (в пространстве между ними) через поперечное сечение диэлектрика равен UI. 17. Изменится ли магнитное поле вне цилиндрического постоянного магнита, если его начать вращать вокруг его продольной оси? 18. Решите задачи 22.2; 22.9; 22.11.

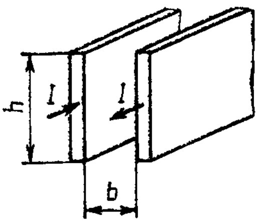


Рис. 22.7

Глава двадцать третья

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 23.1. Уравнения Максвелла для проводящей среды. Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a.

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}.$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение $\omega\varepsilon_a$ много меньше проводимости γ. Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}$ в первом уравнении Максвелла для проводящих сред можно пренебречь.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} \qquad (23.1)$$

и

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}. \qquad (23.2)$$

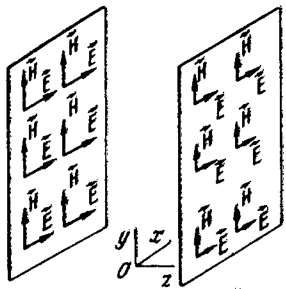
Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$. Решим их совместно. С этой целью возьмем ротор от уравнения (23.1): $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\dot{\vec{H}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\dot{\vec{H}} - \nabla^2\dot{\vec{H}} = \gamma\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}}$.

Учтем, что $\mathrm{div}\,\dot{\vec{H}} = 0$, и поэтому $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{H}} = 0$. Вместо $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}}$ в соответствии с (21.2) подставим $-j\omega\mu_a\dot{\vec{H}}$. Получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega\gamma\mu_a \dot{\vec{H}}. \qquad (23.3)$$

Уравнение (23.3) является дифференциальным относительно $\dot{\vec{H}}$. В общем случае, когда $\dot{\vec{H}}$ зависит от всех трех или даже только от двух координат, решение (23.3) довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением решения этого уравнения для частных случаев — для плоской и цилиндрической электромагнитных волн.

§ 23.2. Плоская электромагнитная волна. В общем случае под *плоской электромагнитной волной* понимают волну, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой расположены в плоскости *xoy*, *перпендикулярной* направлению распространения волны (ось z) и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t. В дальнейшем (за исключением § 24.8) под плоской волной будем понимать *плоскую линейно поляризованную* волну, в которой вектор $\vec{E}$ направлен вдоль одной, а вектор $\vec{H}$ вдоль другой координатной оси плоскости *xoy*. Плоская линейно поляризованная волна показана на рис. 23.1. На рисунке изображены для одного и того же момента времени векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 23.1, *а*) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по величине и направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 23.1, *б*) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по величине и направлению, но не равна напряженности поля в первой плоскости.



а) *б)*

Рис. 23.1

В силу самого определения плоской волны:

$$\frac{\partial\dot{\vec{H}}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\dot{\vec{H}}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial y} = 0.$$

В плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ являются функциями только одной координаты, в рассматриваемом случае функцией только z.

Повернем координатные оси таким образом, чтобы ось y совпала с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. При этом $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$, где $\vec{j}$ — единичный орт оси y декартовой системы координат. Подставим $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$ в уравнение (23.3) и раскроем ∇^2:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = j\omega\gamma\mu_a \vec{j}\dot{H}. \qquad (23.4)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu_a \dot{H}. \qquad (23.5)$$

В этом уравнении (23.5) вместо частной написана обыкновенная производная. Переход от частной производной к обыкновенной для плоской волны является естественным, так как $\dot{H}$ — это функция только одной переменной z.

Уравнение (23.5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}, \qquad (23.6)$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ — постоянные интегрирования; это комплексы, которые определяют из граничных условий; для каждой конкретной задачи свои постоянные.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\gamma\mu_a$ найдем постоянную распространения

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}. \qquad (23.7)$$

Если γ берется в единицах $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, μ_a в Гн/м, постоянная распространения p измеряется в м^{-1}. Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1 + j)/\sqrt{2}$, то p можно представить и так:

$$p = k(1 + j), \qquad (23.8)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}. \qquad (23.9)$$

Найдем напряженность электрического поля с помощью уравнений (23.1) и (23.6). Из (23.1) следует, что $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\,\text{rot}\,\vec{H}$.

Найдем $\text{rot}\,\vec{H}$. В соответствии с уравнением (21.6) (учитывая, что $\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$) имеем

$$\text{rot}\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z}\right). \qquad (23.10)$$

Следовательно,

$$\vec{\dot{E}} = \vec{i}\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}\right). \qquad (23.10a)$$

Производная

$$\frac{d\dot{H}}{dz} = p\,[\dot{C}_1\,e^{pz} - \dot{C}_2\,e^{-pz}]. \qquad (23.11)$$

Выражение (23.10, а) показывает, что напряженность электрического поля в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси x, об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси x (орта $\vec{i}$). Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\vec{\dot{E}}$ и $\vec{\dot{H}}$ *есть пространственный сдвиг* в 90° ($\vec{\dot{E}}$ направлено по оси x, а $\vec{\dot{H}}$ — по оси y).

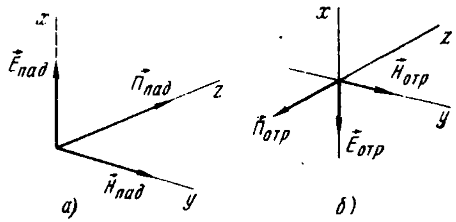


Рис. 23.2

Частное от деления p на γ принято называть *волновым сопротивлением*:

$$Z_в = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}}\,e^{j45°}. \qquad (23.12)$$

Волновое сопротивление $Z_в$ измеряемое в омах, зависит от свойств среды (от γ и μ_a) и угловой частоты ω. В соответствии с (23.10, а) и (23.11) проекция $\vec{\dot{E}}$ на ось x равна:

$$\dot{E} = \dot{E}_{пад} + \dot{E}_{отр},$$

$$\text{где}\quad \dot{E}_{пад} = Z_в\dot{C}_2\,e^{-pz} \quad\text{и}\quad \dot{E}_{отр} = -Z_в\dot{C}_1\,e^{pz}.$$

Проекция $\vec{\dot{H}}$ на ось y в соответствии с (21.6): $\dot{H} = \dot{H}_{пад} + \dot{H}_{отр}$, где $\dot{H}_{пад} = \dot{C}_2 e^{-pz}$ и $\dot{H}_{отр} = \dot{C}_1 e^{pz}$.

Компоненты падающей волны $\vec{E}_{пад}$ и $\vec{H}_{пад}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{П}_{пад}$ (рис. 23.2, *а*), направленный вдоль положительного направления оси z. Следовательно, движение энергии падающей волны происходит вдоль положительного направления оси z.

Компоненты отраженной волны $\vec{E}_{отр}$ и $\vec{H}_{отр}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{П}_{отр}$ (рис. 23.2, *б*), направленный вдоль отрицательного направления оси z. Это означает, что отраженная волна несет с собой энергию вдоль отрицательного направления оси z.

Волновое сопротивление $Z_в$ можно трактовать как отношение $\dot{E}_{пад}/\dot{H}_{пад}$*. Так как волновое сопротивление является числом комплексным [см. формулу (23.12)] и имеет аргумент 45°, то сдвиг *во времени* между $\dot{E}_{пад}$ и $\dot{H}_{пад}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45°.

* Отношение $\dot{E}_{отр}$ к $-\dot{H}_{отр}$ также равно $Z_в$.

§ 23.3. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве. Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной проводящей среде, простирающейся теоретически в бесконечность (рис. 23.3).

Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в проводящую среду и распространяется в ней. Так как среда простирается теоретически в бесконечность и падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, которая «возмутила» бы ее распространение, то отраженной волны в данном случае не возникает.

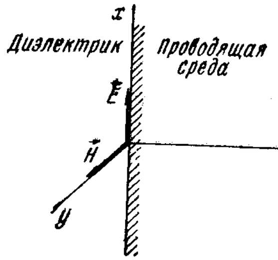


Рис. 23.3

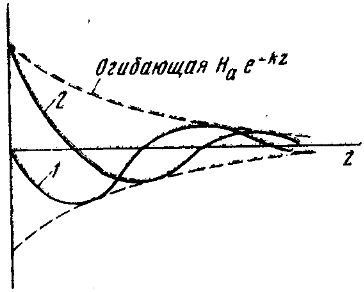


Рис. 23.4

При наличии только одной падающей волны $\dot H = \dot C_2 e^{-pz}$ и $\dot E = Z_в \dot C_2 e^{-pz}$.

Постоянную интегрирования $\dot C_2$ найдем из граничных условий. Если обозначить напряженность магнитного поля на поверхности проводящей среды через $\dot H_a = H_a e^{j\psi_a}$, то при $z = 0$ $\dot C_2 = \dot H_a$. Поэтому с учетом (23.8)

$$\dot H = H_a e^{-kz} e^{-jkz} e^{j\psi_a}. \qquad (23.13)$$

В свою очередь

$$\dot E = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{-jkz} e^{j\psi_a} e^{j45^\circ}. \qquad (23.14)$$

Чтобы записать выражения для мгновенных значений H и E, необходимо правые части (23.13) и (23.14) умножить на $e^{j\omega t}$ и взять мнимые части от получившихся произведений.

Тогда получим:

$$H = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a) \qquad (23.15)$$

и

$$E = H_a \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \qquad (23.16)$$

Проанализируем полученные выражения. Амплитуда $H = H_a e^{-kz}$; амплитуда $E = H_a \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{-kz}$. С увеличением z множитель e^{-kz} уменьшается по показательному закону. Следовательно, по мере проникновения электромагнитной волны в проводящую среду амплитуды E и H уменьшаются по показательному закону. На рис. 23.4 изображены огибающие амплитуд H, построенные на основе $H_a e^{-kz}$. Мгновенное значение H и E определяется аргументом синуса, который в выражении (23.15), например, зависит от z и от ωt. Если принять $\omega t = \mathrm{const}$, то на графике мгновенных значений H в функции от z будет получена кривая 1 (см. рис. 23.4) при $\omega t + \psi_a = 0$ и кривая 2 при $\omega t + \psi_a = 90°$.

Для того чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения волны в проводящую среду, вводят понятие «глубина проникновения».

§ 23.4. **Глубина проникновения и длина волны.** Под *глубиной проникновения* Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в е = 2,71 раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения: $e^{-k\Delta} = e^{-1}$. Отсюда следует, что $k\Delta = 1$ или

$$\Delta = 1/k. \tag{23.17}$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (γ и μ_r) и частоты ω. Так, если электромагнитная волна имеет частоту $f = 5000$ Гц и проникает в проводящую среду, у которой $\gamma = 10^7$ (Ом $\times$ $\times$ м)$^{-1}$ и $\mu_r = 10^3$, то*

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot 5000\cdot 10^3\cdot 1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 10^7}{2}} = 14100\ \text{м}^{-1}.$$

Глубина проникновения $\Delta = 1/k \approx 7\cdot 10^{-5}$ м, т. е. на расстоянии в 0,007 см амплитуды H и E снизились в 2,71 раза.

Под *длиной волны* λ в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором фаза колебания изменяется на 2π. Длину волны определяют из уравнения $\lambda k = 2\pi$, отсюда:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{23.18}$$

Для рассмотренного числового примера

$$\lambda = \frac{2\pi}{14100} \approx 0{,}000445\ \text{м}.$$

Иногда пользуются понятием фазовой скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде.

Под *фазовой скоростью* понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль оси z, чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания определяется выражением $\omega t - kz + \psi_a$.

---

* Полагаем, что μ_a не зависит от величины H. Решение, в котором учтено, что μ_a является функцией величины H, дано в [12].

Производная от постоянной есть нуль, поэтому $\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0$, или

$$\omega - k\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \tag{23.19}$$

Для рассмотренного числового примера $v_{\text{фаз}} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14\,100} \approx 2{,}25$ м/с.

§ 23.5. Магнитный поверхностный эффект. В качестве примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока $\dot{\Phi}_m$. Лист (рис. 23.5) имеет толщину $2a$, высоту h ($h \gg 2a$) и большую протяженность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа $\dot{B}_{\text{ср}} = \dot{\Phi}_m/2ah$.

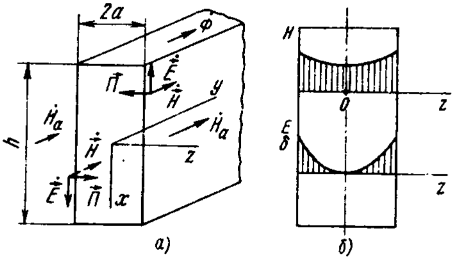


Рис. 23.5

Задача состоит в определении законов изменения $\dot{H}$ и $\dot{E}$ по сечению листа. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой поверхности листа. Обозначим ее через $\dot{H}_a$ и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через $\dot{B}_{\text{ср}}$).

Так как толщина листа $2a$ много меньше высоты листа h, то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении пренебречь, и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии с рис. 23.5. Примем, как и прежде, $\vec{\dot{H}} = \vec{j}\dot{H}$. Общее решение для $\dot{H}$ таково: $\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}$.

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При $z = -a$, т. е. для точек, находящихся на левой стороне листа,

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}; \tag{23.20}$$

при $z = +a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \tag{23.21}$$

Совместное решение (23.20) и (23.21) относительно $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ дает

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2\,\mathrm{ch}\,pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2\,\mathrm{ch}\,pa}(e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{\mathrm{ch}\,pz}{\mathrm{ch}\,pa}. \tag{23.22}$$

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \vec{i}\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}\right) = -\vec{i}\left(\frac{p}{\gamma}\dot{H}_a\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}\right) = -\vec{i}\dot{E},$$

где

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma}\dot{H}_a\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}. \tag{23.23}$$

При $z = +a$ напряженность $\vec{E}$ направлена вверх (вдоль оси $-x$); при $z = -a$ — вниз (вдоль оси $+x$, см. рис. 23.5, a). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутрь листа).

Как известно из ч. II учебника, ток, возникающий при прохождении по листу переменного магнитного потока, принято называть *вихревым*. Вектор плотности вихревого тока $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$ в любой точке листа коллинеарен с вектором $\vec{E}$ в этой же точке. Магнитная индукция в произвольной точке

$$\dot{B} = \mu_a\dot{H} = \frac{\mu_a\dot{H}_a\operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \tag{23.24}$$

Среднее значение магнитной индукции в листе

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{a}\int_0^a \dot{B}dz = \frac{\mu_a\dot{H}_a\operatorname{sh} pa}{ap\operatorname{ch} pa} = \frac{\mu_a\dot{H}_a\operatorname{th} pa}{ap}. \tag{23.25}$$

Если считать $\dot{B}_{\text{ср}}$ известной и равной $\frac{\Phi_m}{2ah}$, то из (23.25) можно найти напряженность поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_a = \frac{ap\dot{B}_{\text{ср}}}{\mu_a\operatorname{th} pa}. \tag{23.26}$$

Заметим, что аргумент $pa = ka + jka$ является комплексом и $\operatorname{th} pa$ есть гиперболический тангенс от комплексного аргумента; он также является комплексом:

$$\operatorname{th} pa = \operatorname{th}(ka + jka) = \frac{\operatorname{sh} 2ka + j\sin 2ka}{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}. \tag{23.27}$$

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа $\dot{B}_{\text{ср}}$ к напряженности поля на поверхности листа $\dot{H}_a$ называют *комплексной магнитной проницаемостью*:

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a\operatorname{th} pa}{ap} \quad (\tilde{\mu}_a = \mu_0\tilde{\mu}_r).$$

Она зависит от величины μ_r, частоты ω и толщины листа. При больших значениях аргумента $2ka$ $\operatorname{sh} 2ka \approx \operatorname{ch} 2ka$, значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях $2ka$

$$\operatorname{th} pa \approx \frac{\operatorname{sh} 2ka}{\operatorname{ch} 2ka} \approx 1.$$

и комплексная магнитная проницаемость $\tilde{\mu}_a = \mu_a/pa$.

Так, например, при толщине листа $2a = 0{,}015$ см, $\mu_r = 20\,000$, $\gamma = 1{,}8 \cdot 10^6$ (Ом · м)$^{-1}$ и $f = 50\,000$ Гц; $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = 84200$; $p = 84200\sqrt{2}\,e^{j45°}$; $ka = 6{,}31$; $2ka = 12{,}62$; $\operatorname{th} pa = \frac{\operatorname{sh} 12{,}62}{\operatorname{ch} 12{,}62} \approx 1$.

Следовательно,

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa} = \frac{20000\,\mu_0}{84\,200\sqrt{2\,e^{j45°}}\;0{,}000015} = 2250\,e^{-j45°}\,\mu_0.$$

Напряженность поля в средней плоскости листа (при $z = 0$) $\dot{H}_{z=0} = \frac{\dot{H}_a}{\operatorname{ch} pa}$. Отношение напряженности поля на краю листа (при $z = a$) к напряженности поля в средней плоскости листа:

$$\dot{H}_a/\dot{H}_{z=0} = \operatorname{ch} pa. \qquad (23.28)$$

Левая и правая части формулы (23.28) являются комплексами. Модуль $\operatorname{ch} pa$ показывает, во сколько раз модуль $\dot{H}_a$ больше модуля $\dot{H}_{z=0}$. Найдем модуль $\operatorname{ch} pa$. С этой целью запишем два сопряженных комплекса: $\operatorname{ch}(ka + jka) = \operatorname{ch} ka \cos ka + j \sin ka \sin ka$ и $\operatorname{ch}(ka - jka) = \operatorname{ch} ka \cos ka - j \operatorname{sh} ka \sin ka$.

Произведение сопряженных комплексов дает квадрат модуля. Следовательно,

$$|\operatorname{ch} pa|^2 = \operatorname{ch}(ka + jka)\operatorname{ch}(ka - jka) = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka]^*.$$

Таким образом,

$$|\operatorname{ch} pa| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}{2}}. \qquad (23.29)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu_r = 100$; $f = 500$ Гц; $\gamma = 10^7$ (Ом · м)$^{-1}$. При этом $k = 1410$ м$^{-1}$.

Найдем отношение напряженности поля в средней плоскости к напряженности поля на поверхности листа при толщине листа: $2a = 1$ мм; 2 мм; 4 мм; $2ka = 1{,}41$; $2{,}82$; $5{,}64$; $1/|\operatorname{ch} pa| = 0{,}91$; $0{,}52$; $0{,}1$.

Таким образом напряженность поля в средней плоскости листа может быть много меньше напряженности поля на краю листа.

Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящую среду, называют *поверхностным эффектом*. Если вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют *магнитным*, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то — *электрическим* поверхностным эффектом. Природа их одна и та же, а слова «магнитный» или «электрический» свидетельствуют лишь о том, что направлено вдоль листа (шины): поток или ток.

---

* В силу того, что $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$.

На рис. 23.5, *б* построены две кривые. Кривая $H(z)$ характеризует изменение модуля напряженности магнитного поля в функции от z. В средней плоскости листа H до нуля не снижается, так как $\operatorname{ch} 0 \neq 0$. Кривая H строится по уравнению (23.22). Кривая $E(z)$ характеризует изменение модуля напряженности электрического поля в функции от z. Эта кривая строится по (23.23); $\operatorname{sh} pz_{z=0} = 0$ и потому кривая проходит через нуль при $z = 0$. Кривая плотности вихревых токов $\delta = \gamma E$ качественно повторяет кривую E от z (разница только в масштабе).

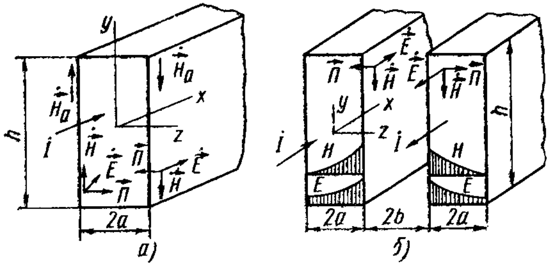


Рис. 23.6

§ 23.6. Электрический поверхностный эффект в прямоугольной шине. Эффект близости. При электрическом поверхностном эффекте — рис. 23.6, *а* — вдоль пластины (шины) направлен синусоидальный ток $\dot{I}$ частоты ω. В этом случае поле внутри пластины определяется по формулам:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{2h}\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} pa}, \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma}\frac{\dot{I}}{2h}\frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{sh} pa}; \quad \dot{\delta} = \gamma\dot{E}.$$

Модуль $\operatorname{sh} pa$ определим по формуле

$$|\operatorname{sh} pa| = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2ka - \cos 2ka)}.$$

Сопротивление единицы длины шины (пластины) $Z = R + jX = \frac{p}{\gamma 2h \operatorname{th} pa}$. Зависимость модуля $H(z)$ в этом случае такая же, как и зависимость $E(z)$ на рис. 23.5, *б*, а зависимость $E(z)$ такая же, как и зависимость $E(z)$ на этом же рисунке.

Если высота шины h соизмерима с толщиной $2a$ или шина в поперечном сечении имеет профиль, отличный от прямоугольного, сечением S, периметром q, то при $\lambda \ll \sqrt{S}$ (λ — длина волны) сопротивление единицы длины шины $R + jX = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}(1 + j)$. При ферромагнитной шине когда $\lambda \ll \sqrt{S}$ в соответствии с [12] $R = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}}$ и $X = 0{,}6R$; μ_a определяют по основной кривой намагничивания материала шины по действующему значению напряженности поля на поверхности ее $H = I/q$, I — ток по шине.

Если по двум параллельным близко расположенным плоским шинам (см. рис. 23.6, *б*) будет протекать в противоположных направлениях синусоидально изменяющийся во времени ток $\dot{I}$ частоты ω, а размеры $2a \ll h$ и $2b \ll h$, то, поместив начало декартовой системы координат в средней плоскости левой шины и учтя, что слева от левой шины напряженность поля $H = 0$, а в пространстве между шинами $\dot{H} = -\dot{I}/h$

(в этом можно убедиться на основании закона полного тока), получим формулы для $\dot{H}$ и $\dot{E}$ в левой шине:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{sh} p(a+z)}{\operatorname{sh} 2pa}, \quad \dot{E} = -\frac{p}{\gamma}\frac{\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{ch} p(a+z)}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Эпюра модулей H и E в функции от координаты z показана на рис. 23.6, *б*. Поле одной шины влияет на распределение поля в другой шине. Это явление называют *эффектом близости*. Комплексное сопротивление единицы длины двух плоских шин, расположенных в воздухе, равно двум комплексным сопротивлениям самих шин плюс индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком, проходящим в пространстве между шинами,

$$Z = R + jX = \frac{2p}{\gamma h \operatorname{th} 2pa} + j\frac{\mu_0 \omega 2b}{h}.$$

Напомним, что p и $\operatorname{th} pa$ — комплексные числа.

§ 23.7. Неравномерное распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины. Расположим оси декартовой системы в соответствии с рис. 23.7, *а*. Обозначим: $\dot{I}$ — ток по шине; b — ширина, h — высота паза. Магнитная проницаемость шины μ_a. Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, полагаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю. В шине $\vec{H}$ направлена по оси y, $\vec{E}$ по оси x. Вектор Пойнтинга направлен по оси z. Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность $mnsq$ и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

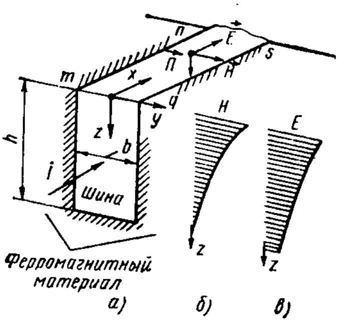


Рис. 23.7

По закону полного тока при $z = 0$ $\dot{H} = \dot{I}/b$, при $z = h$ $H = 0$. Для определения постоянных интегрирования $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ в выражении

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz} \qquad \text{(а)}$$

составим два уравнения $\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = \dot{I}/b$ и $\dot{C}_1 e^{ph} + \dot{C}_2 e^{-ph} = 0$. После определения $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и подстановки их в (а) получим

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{b}\frac{\operatorname{sh} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}; \quad \vec{E} = \vec{i}\dot{E}_x = \vec{i}\dot{E};$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p}{\gamma}\frac{\dot{I}}{b}\frac{\operatorname{ch} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}, \quad \vec{\delta} = \gamma\vec{E}.$$

Графики H и E по высоте шины изображены на рис. 23.7, *б*, *в*.

§ 23.8. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе. По цилиндрическому проводу радиусом a протекает синусоидальный ток $\dot{I}$ частотой ω. Требуется вывести формулы для определения плотности тока $\dot{\delta}$ и напряженности $\dot{H}$ в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько далеко удаленным от прямого, что влияние обратного провода на поле в прямом проводе можно не учитывать.

Решение проведем в цилиндрической системе координат (рис. 23.8). Плотность тока $\vec{\dot{\delta}}$ направлена по оси z, поэтому $\vec{\dot{\delta}} = \vec{z}_0\dot{\delta}$. Воспользуемся уравнениями (23.1) и (23.2), предварительно умножив последнее на γ.

Получим

$$\operatorname{rot} \vec{\dot{H}} = \vec{\dot{\delta}}; \qquad (23.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{\dot{\delta}} = -j\omega\gamma\mu_a \vec{\dot{H}}, \qquad (23.31)$$

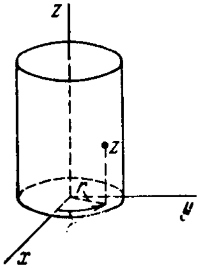


Рис. 23.8

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\dot{\delta}} = -j\omega\gamma\mu_a \vec{\dot{\delta}},$$

т. е. $(\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\delta} - \nabla^2 \vec{\dot{\delta}})\, \dot{z}_0 = (-j\omega\gamma\mu_a)\, \vec{\dot{\delta}} \dot{z}_0$.

В установившемся режиме $\operatorname{div}\dot{\delta} = 0$. Поэтому $\nabla^2\dot{\delta} = j\omega\gamma\mu_a\dot{\delta}$.

Раскроем $\nabla^2\dot{\delta}$ в цилиндрической системе координат [см. формулу (19.30)] и учтем, что $\dot{\delta}$ от α и от z не зависит. Получим

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r\,\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2}\right) = j\omega\gamma\mu_a\,\dot{\delta},$$

или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\gamma\mu_a\,\dot{\delta}.$$

Обозначим

$$q^2 = -j\omega\gamma\mu_a. \qquad (23.32)$$

Тогда

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2\,\dot{\delta} = 0,$$

или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr}\,\frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0. \qquad (23.33)$$

Уравнение (23.33) является частным случаем уравнения Бесселя (15.4) при $p = 0$. Роль x играет qr, а роль y — $\dot{\delta}$.

Как известно из курса математики, решение уравнения (23.33) можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \dot{A}J_0(qr) + \dot{B}N_0(qr), \qquad (23.34)$$

где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$ (т. е. на оси провода при $r = 0$) она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому слагаемое $\dot{B}N_0(qr)$ в решении отбрасываем (принимаем $\dot{B} = 0$). Следовательно,

$$\dot{\delta} = \dot{A}J_0(qr). \tag{23.35}$$

В соответствии с уравнением (23.31) и формулами (23.32) и (21.7)

$$\vec{\dot{H}} = \frac{1}{q^2}\operatorname{rot}\vec{\dot{\delta}} = \vec{\alpha}^\circ\left(-\frac{1}{q^2}\frac{d\dot{\delta}}{dr}\right) = \vec{\alpha}^\circ\dot{H};$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{q^2}\frac{d}{dr}[\dot{A}J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2}\frac{d[J_0(qr)]}{dqr}\frac{dqr}{dr} =$$

$$= -\frac{\dot{A}}{q^2}q[-J_1(qr)] = \frac{\dot{A}}{q}J_1(qr),$$

т. е.

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q}J_1(qr), \tag{23.36}$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования $\dot{A}$. С этой целью по закону полного тока найдем $\dot{H}$ на поверхности провода (при $r = a$) и приравняем его значению $\dot{H}$, которое получается из формулы (23.36):

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q}J_1(qa);$$

$$\dot{A} = \frac{q\dot{I}}{2\pi aJ_1(qa)}. \tag{23.37}$$

Подставим найденное значение $\dot{A}$ в формулы (23.35) и (23.36). Получим

$$\dot{\delta} = \frac{q\dot{I}J_0(qr)}{2\pi aJ_1(qa)}; \tag{23.38}$$

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}J_1(qr)}{2\pi aJ_1(qa)}. \tag{23.39}$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока $\dot{\delta}$ и комплекс напряженности поля $\dot{H}$ в любой точке сечения провода.

Радиус r может принимать значения от 0 до a. Для точки на оси провода $r = 0$; для точек на поверхности $r = a$. Так как $J(0) = 1$ (см. табл. 23.1), то плотность тока на оси провода:

$$\dot{\delta}_0 = \frac{q\dot{I}}{2\pi aJ_1(qa)}. \tag{23.40}$$

Сопоставление (23.40) с (23.38) дает

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 J_0 (qr). \tag{23.41}$$

Из формулы (23.41) следует, что плотность тока на поверхности провода:

$$\dot{\delta}_a = \dot{\delta}_0 J_0 (qa). \tag{23.41'}$$

Из предыдущего известно, что произведение qr есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega\gamma\mu_a} \sqrt{-j}. \tag{23.42}$$

Бесселевы функции $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$ от комплексного аргумента qr тоже являются комплексами и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0 (qr) = b_0 e^{j\beta_0}; \tag{23.43}$$

$$J_1 (qr) = b_1 e^{j\beta_1}, \tag{23.44}$$

где b_0 — модуль, а β_0 — аргумент функции $J_0(qr)$; b_1 — модуль, а β_1 — аргумент функции $J_1(qr)$; b_0, b_1, β_0, β_1 (β_0 и β_1 в градусах) определяют по значению $r\sqrt{\omega\gamma\mu_a}$ с помощью табл. 23.1. При составлении этой таблицы наличие множителя $\sqrt{-j}$ в составе аргумента qr уже учтено.

Таблица 23.1

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r\sqrt{\omega\gamma\mu_a}$	b_0	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	—45,00
1	1,015	14,22	0,501	—37,84
2	1,229	52,28	1,041	—16,73
3	1,95	96,52	1,80	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Пример 222. По стальному проводу [$\gamma = 10^7$ (Ом · м)$^{-1}$; $\mu_r = 10^3$] диаметром 6,04 мм течет синусоидальный ток $I = 100$ А частотой 50 Гц. Определить плотность тока на поверхности и оси провода.

Решение.

$$\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = \sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} = 1985 \text{ м}^{-1};$$

$$q = 1985 \sqrt{-j} = 1985 e^{-j45°}; \ a\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = 0{,}00302 \cdot 1985 = 6.$$

По табл. 23.1 найдем

$$J_0(qa)=J_0(6\sqrt{-j})=11{,}5\,e^{j219{,}6^\circ};\; b_0=11{,}5;\; \beta_0=219{,}6^\circ;$$

$$J_1(qa)=J_1(6\sqrt{-j})=10{,}85\,e^{j133{,}45^\circ};\; b_1=10{,}85;\; \beta_1=133{,}45^\circ.$$

По формуле (23.40) определим плотность на оси провода:

$$\dot{\delta}_0=\frac{q\dot{I}}{2\pi a J_1(qa)}=96{,}5\cdot 10^4\, e^{-j178^\circ 30'}\ А/м^2.$$

По формуле (23.42) плотность тока на поверхности провода:

$$\dot{\delta}_a=\dot{\delta}_0 J_0(qa)=111\cdot 10^5\, e^{j41{,}1^\circ}\ А/м.$$

§ 23.9. Применение теоремы Умова — Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников при переменном токе. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводников при переменном токе часто определяют с помощью теоремы Умова—Пойнтинга в комплексной форме. С этой целью подсчитывают поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника на длине в 1 м делят его на квадрат тока, протекающего по проводнику; получают комплексное сопротивление проводника на единицу длины.

Действительно,

$$-\oint\left[\dot{\vec{E}}\,\overset{*}{\vec{H}}\right]d\vec{S}=P+jQ=I^2R+jI^2X=I^2Z$$

и

$$Z=R+jX=\frac{-\oint\left[\dot{\vec{E}}\,\overset{*}{\vec{H}}\right]d\vec{S}}{I^2}.$$

В качестве примера определим активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрического провода (см. рис. 23.8) на длине 1 м:

$$Z=\frac{\dot{E}_a\overset{*}{H}_a\,2\pi a\cdot 1}{I^2}=\frac{\sqrt{\omega\gamma\mu_a}\,b_0\,e^{-j45^\circ}\,e^{j\beta_0}}{2\pi\gamma a b_1\,e^{j\beta_1}};$$

$$R=\frac{\sqrt{\omega\gamma\mu_a}\,b_0}{2\pi a\gamma b_1}\cos(\beta_0-\beta_1-45^\circ);\; X=\frac{\sqrt{\omega\gamma\mu_a}\,b_0}{2\pi a\gamma b_1}\sin(\beta_0-\beta_1-45^\circ).$$

§ 23.10. Экранирование в переменном электромагнитном поле. Явление затухания электромагнитной волны в поверхностном слое металла используют для экранировки в переменном электромагнитном поле.

Электромагнитные экраны представляют собой полые цилиндрические, сферические или прямоугольные оболочки, внутрь которых помещают экранируемое устройство (например, катушку индуктивности измерительный прибор и т. п.).

Экран выполняет две функции: 1) защищает устройство, заключенное в экран, от влияния внешнего по отношению к экрану электромагнитного поля; 2) защищает внешнее по отношению к экрану пространство от электромагнитного поля, создаваемого устройством, заключенным в экране.

Поскольку на расстоянии, равном длине волны, электромагнитная волна в металле почти полностью затухает, то для хорошей экранировки толщина стенки экрана должна быть примерно равна длине волны в металле. Практически приходится учитывать и другие факторы (механическую прочность экрана, его стоимость и т. д.).

§ 23.11. Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях.

Электростатическое экранирование основано на компенсации внешнего поля полем зарядов, выявившихся на стенках экрана из проводящего материала вследствие электростатической индукции (см. § 19.21). Толщина стенок экрана при электростатическом экранировании в отличие от экранирования в магнитном и электромагнитном полях может быть сколь угодно малой.

Экранирование в магнитном поле постоянного тока (см. § 21.21) основано, грубо говоря, на том, что силовые линии магнитного поля преимущественно проходят по участкам с меньшим магнитным сопротивлением (по стенкам экрана). Экранирование в переменном электромагнитном поле основано, главным образом, на том, что электромагнитная волна, проникающая в стенки экрана, быстро затухает, расходуя энергию на покрытие потерь, обусловленных вихревыми токами в стенках экрана.

Если экран выполнен из ферромагнитного материала и частота ω относительно низкая, то экранирование достигается не только за счет затухания волны в стенке экрана, но и за счет стремления силовых линий магнитного поля пройти по участкам с меньшим магнитным сопротивлением.

§ 23.12. Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков. *Нагрев* металлических деталей перед ковкой и штамповкой, *сушку* древесины, *наплавку* и *реставрацию* инструментов часто производят путем помещения этих предметов (деталей) в электромагнитное поле сравнительно невысокой частоты (1—20 кГц). Стальные изделия (например, валы, шестеренки) нередко подвергают *поверхностной закалке*, помещая их в электромагнитное поле более высокой частоты (порядка 10—500 кГц).

В соответствии с § 22.7 энергия, выделяющаяся в виде тепла в проводящем теле, равна $\mathrm{Re}\{-\oint\limits_S [\dot{\vec{E}}\overset{*}{\vec{H}}]\, d\vec{S}\}$. Электромагнитная волна, проникая в толщу металла, быстро затухает. Поэтому теплота выделяется практически лишь в относительно тонком поверхностном слое стального изделия.

Под действием теплоты, выделившейся в поверхностном слое, последний быстро разогревается до температуры, необходимой для поверхностной закалки. Высокочастотные поля используют также для нагрева несовершенных диэлектриков (проводимость их хотя и мала, но не равна нулю). Так, область еще более высоких частот (1—30 МГц) используется для высокочастотного *нагрева пластмасс* перед штамповкой, для *термической обработки* пищевых продуктов, *вулканизации* резины и других целей.

§ 23.13 Переходный процесс при проникновении электромагнитного поля в однородное проводящее полупространство. В воздухе вблизи однородного проводящего полупространства (для которого известны γ и $\mu_а$) начиная с момента времени $t = 0$ внешним источником скачком создается постоянное магнитное поле, направленное по оси y: $\vec{j} H_0 1(t)$. Расположение осей координат соответствует рис. 23.3. При проникновении поля в проводящую среду в ней возникают вихревые токи, задерживающие его распространение. Напряженность магнитного поля в проводящей среде $\vec{H} = \vec{j} H_y(z, t) = \vec{j} H$; напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{i} E_x(z, t) = \vec{i} E$. Уравнения Максвелла $-\frac{\partial H}{\partial z} = \gamma E$ и $-\frac{\partial E}{\partial z} = \mu_а \frac{\partial H}{\partial t}$ запишем в операторной форме $-\frac{dH(p, z)}{dz} = \gamma E(p, z)$ и $-\frac{dE(p, z)}{dz} = \mu_а p H(p, z)$.

Отсюда $\frac{d^2 H(p, z)}{dz^2} = a^2 p H(p, z)$,

где $a^2 = \gamma\mu_а$. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение, корни которого $\alpha_{1,2} = \pm a\sqrt{p}$. Следовательно, $H(p, z) = C_1 e^{a\sqrt{p}z} + C_2 e^{-a\sqrt{p}z}$. Так как полупространство в направлении оси z простирается в бесконечность, то $C_1 = 0$ и $H(p, z) = C_2 e^{-a\sqrt{p}z}$. Определим постоянную C_2. На границе двух сред (при $z = 0$) тангенциальные составляющие $\vec{H}$ в воздухе и в проводящей среде равны, следовательно равны и их операторные изображения. Отсюда $C_2 = H_0/p$, а $H(p, z) = \frac{H_0}{p} e^{-a\sqrt{p}z}$ и $E(p, z) = -\frac{1}{\gamma}\frac{dH(p, z)}{dz} = -\frac{H_0}{p}\sqrt{\frac{\mu_а}{\gamma}} e^{-a\sqrt{p}z}$.

По таблицам соответствия § 8.39 перейдем к функциям времени:

$$H(t, z) = H_0\left[1 - \Phi\left(\frac{az}{2\sqrt{t}}\right)\right] \text{ и } E(t, z) = -\frac{H_0}{\sqrt{\pi t}}\sqrt{\frac{\mu_а}{\gamma}} e^{-\frac{a^2 z^2}{4t}}. \quad (23.46)$$

Кривая интеграла ошибок Гаусса $\Phi\left(\frac{az}{2\sqrt{t}}\right) = \Phi(Z)$ изображена на рис. 12.10, *а*. Формулы (23.46) дают возможность подсчитать H и E в любой точке проводящего полупространства в функции координаты z и времени t.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение плоской линейно поляризованной электромагнитной волне. 2. От каких факторов зависит постоянная распространения $p = k + jk$, волновое сопротивление $Z_в$, глубина проникновения Δ? 3. Чем объяснить, что электромагнитная волна затухает, проникая в проводящую среду? 4. Какой угол в пространстве составляют $\vec{E}$ и $\vec{H}$ падающей волны и на какой угол смещены во времени их мгновенные значения? 5. Во сколько раз модуль вектора $\vec{\Pi}$ падающей волны на поверхности больше, чем модуль вектора $\vec{\Pi}$ на глубине проникновения? 6. Какой процесс отображает фазовая скорость? 7. Дайте определение поверхностному эффекту. 8. В чем отличие между магнитным и электрическим поверхностными эффектами? 9. Какой физический процесс учитывает $\tilde{\mu}_а$? 10. Чем сле-

дует руководствоваться при проектировании электромагнитного экрана? **11.** Будет ли нагреваться ферромагнитный экран при работе его: а) в неизменном во времени поле; б) в переменном поле? **12.** Какой экран лучше экранирует в переменном поле — медный или алюминиевый (при прочих равных условиях)? **13.** В чем заключается эффект близости? **14.** Запишите граничные условия для определения постоянных интегрирования в случае цилиндрического провода и для случая, когда провод (шина) находится в пазу электрической машины. **15.** Составьте условие, при котором плотность тока на поверхности цилиндрического провода находится в противофазе с плотностью тока на оси провода. 16. Как применить теорему Умова — Пойнтинга для определения комплексного сопротивления провода? **17.** Почему сердечник высокочастотного трансформатора выполняют из феррита, а низкочастотного из листового материала? 18. Почему в высокочастотной технике вместо сплошных проводов можно применять полые (трубчатые?) **19.** По ферромагнитному цилиндру (проволоке) проходит синусоидально изменяющийся магнитный поток. Вывести законы изменения $\dot{E}$ и $\dot{H}$ в функции радиуса r. **20.** Вдоль параллельных плоских шин (см. рис. 23.6, *б*) протекает синусоидальный ток в одинаковом направлении. Определить законы изменения $\dot{E}$ и $\dot{H}$ в функции координаты z. **21.** Решите задачи 22.12; 22.20; 22.24; 22.28.

Глава двадцать четвертая

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ И В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 24.1. Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике. Проводимость γ идеального диэлектрика равна нулю. Поэтому в первом уравнении Максвелла (22.1) первое слагаемое правой части ($\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$) выпадает, и уравнения Максвелла для диэлектрика получают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}; \tag{24.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}; \tag{24.2}$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \rho_{\text{своб}}/\varepsilon_a.$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\mu_a = \text{const}$ и условие $\operatorname{div}\mu_a\vec{H} = 0$ равносильно условию $\operatorname{div}\vec{H} = 0$.

Решим совместно уравнения (24.1) и (24.2). С этой целью возьмем ротор от уравнения (24.1). Получим $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = j\omega\varepsilon_a \operatorname{rot}\dot{\vec{E}}$.

Так как $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, то и $\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0$. В свою очередь $\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}$ на основании второго уравнения Максвелла равен $-j\omega\mu_a\vec{H}$. Поэтому

$$-\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_a\left[-j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}\right]$$

или

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\vec{H}}. \tag{24.3а}$$

Произведение $\varepsilon_a\mu_a$ измеряется в с²/м²;

$$[\varepsilon_a]\,[\mu_a] = \frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}\cdot\text{м}}\;\frac{\text{В}\cdot c}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{с}^2/\text{м}^2,$$

т. е. $\varepsilon_a\mu_a$ имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости, и потому можно принять $\varepsilon_a\mu_a = 1/v^2$. После введения такого обозначения уравнение (24.3а) получает следующий вид:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -(\omega/v)^2\,\dot{\vec{H}}. \tag{24.3}$$

Для плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z в соответствии с предыдущим, можно принять, что напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y, т. е.

$$\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}. \tag{24.4}$$

Так как для плоской волны $\dot{\vec{H}}$ зависит только от координаты z и не зависит от координат x и y, то уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\vec{j}\dot{H}$$

приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2\dot{H}}{dz^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\dot{H}. \tag{24.5}$$

Уравнению (24.5) соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -(\omega/v)^2$, корни которого $p_1 = j\frac{\omega}{v}$ и $p_2 = -j\frac{\omega}{v}$.

Общее решение уравнения (24.4)

$$\dot{H} = \dot{C}_1\,\text{e}^{j\frac{\omega}{v}z} + \dot{C}_2\,\text{e}^{-j\frac{\omega}{v}z}, \tag{24.6}$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ — комплексные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Как и всякое комплексное число, их можно представить в показательной форме: $\dot{C}_1 = C_1\,\text{e}^{j\psi_0}$ и $\dot{C}_2 = C_2\text{e}^{j\psi_n}$.

Слагаемое $\dot{C}_2\text{e}^{-j\frac{\omega}{v}z}$ представляет собой падающую волну, продвигающуюся в положительном направлении оси z, а слагаемое $\dot{C}_1\text{e}^{j\frac{\omega}{v}z}$ — отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z.

Напряженность электрического поля $\dot{\vec{E}}$ найдем по уравнению (24.1):

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}.$$

Как следует из предыдущего [см. формулу (23.10)], для плоской волны

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \vec{i}\left(-\frac{d\dot{H}}{dz}\right).$$

Поэтому

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\left\{\frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\left[\left(-j\frac{\omega}{v}\right)\left(\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}\right)\right]\right\}.$$

Величину $1/(\varepsilon_a v) = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}/\varepsilon_a = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ называют *волновым сопротивлением диэлектрика.*

Волновое сопротивление является чисто действительным числом (измеряется в омах):

$$Z_в = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{1{,}256\cdot 10^{-6}\ Гн/м\cdot\mu_r}{8{,}86\cdot 10^{-12}\ Ф/м\cdot\varepsilon_r}} = 377\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\,.$$

Оно не зависит от угловой частоты колебаний ω. Для вакуума $\varepsilon_r = 1$ и $\mu_r = 1$, поэтому $Z_в = 377$ Ом. Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E},$$

где

$$\dot{E} = Z_в \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - Z_в \dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}. \qquad (24.7)$$

Присутствие единичного орта оси x (орта $\vec{i}$) в формуле (24.7) свидетельствует о том, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x.

Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, как и для проводящей среды $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ взаимно перпендикулярны: $\dot{\vec{H}}$ направлено по оси y, $\dot{\vec{E}}$ — по оси x.

Запишем выражения для мгновенных значений H и E падающей волны. Чтобы получить мгновенное значение падающей волны H, необходимо комплекс $\dot{H} = C_2 e^{j\psi_n} e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ умножить на $e^{j\omega t}$ и от произведения взять мнимую часть. В результате получим

$$H = C_2 \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v}z\right); \qquad (24.8)$$

аналогично,

$$E = C_2 Z_в \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v}z\right). \qquad (24.9)$$

По мере продвижения падающей волны вдоль оси z амплитуды E и H остаются неизменными, т. е. затухания волны не происходит, так как в диэлектрике нет токов проводимости и выделения энергии в виде теплоты.

На рис. 24.1 изображены пространственные кривые, представляющие собой графики мгновенных значений H и E. Эти графики построены по уравнениям (24.8) и (24.9) для момента времени $\omega t + \psi_n = 0$.

Для более позднего момента времени, например для $\omega t + \psi_n = 90°$, аналогичные кривые изображены на рис. 24.2.

Как видно из рис. 24.1 и 24.2 вектор $\vec{E}$ при движении волны остается направленным вдоль оси x, а вектор $\vec{H}$ — вдоль оси y, сдвига по фазе между H и E нет.

Проверим правильность построения графика $E = f(z)$ на рис. 24.1. Кривые на рис. 24.1 построены при $\omega t + \psi_n = 0$, поэтому уравнением кривой $E = f(z)$ является выражение [в соответствии с (24.9)]:

$$E_{\text{при } \omega t + \psi_n = 0} = C_2 Z_{\text{в}} \sin\left(-\frac{\omega}{v} z\right).$$

При $z = 0$ $E = 0$. В интервале от $\frac{\omega z}{v} = 0$ до $\omega z = \pi$ мгновенное значение E отрицательно. При $\frac{\omega z}{v} = \pi$ $E = 0$ и т. д.

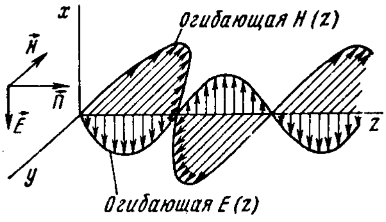


Рис. 24.1

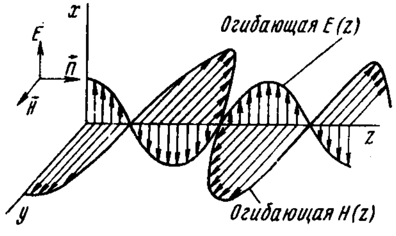


Рис. 24.2

Вектор Пойнтинга падающей волны направлен вдоль оси z. Модуль Π изменяется по закону: $\Pi = C_2^2 Z_{\text{в}} \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_n\right)$. Так как $\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, то

$$\Pi = \frac{C_2^2 Z_{\text{в}}}{2}\left[1 - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega}{v} z + 2\psi_n\right)\right],$$

т. е. вектор Пойнтинга имеет постоянную составляющую $C_2^2 Z_{\text{в}}/2$ и переменную, изменяющуюся во времени с двойной угловой частотой.

Фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике:

$$v_{\text{фаз}} = v = 1/\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}. \qquad (24.10)$$

Если волна распространяется в вакууме, то $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ и $\mu_a = \mu_0$, и тогда фазовая скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}}} \approx 300\,000 \text{ км/с}.$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике очень велика и несоизмеримо больше фазовой скорости плоской электромагнитной волны в проводящей среде.

Длина волны λ есть расстояние вдоль оси z, на котором фаза колебания изменится на 2π. Ее находят из соотношения $\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi$. Отсюда

$$\lambda = v/f. \qquad (24.11)$$

Из (24.11) видно, что длина волны в диэлектрике обратно пропорциональна частоте f. Так, при $f = 10^6$ Гц $\lambda = 300\,000$ км/с/10^6 с$^{-1}$ = = 300 м.

Пример 223. В плоскости $z = 0$ напряженность электрического поля плоской волны изменяется по закону $E = E_m \sin(\omega t + \psi_n)$, где $E_m = 0{,}2$ В/м, $\omega = 10^6$ с$^{-1}$ и $\psi_n = 30°$; диэлектрик — воздух.

Записать выражения для мгновенного значения напряженности магнитного поля и вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0{,}5$ км.

Решение.

$$H = \frac{E_m}{Z_в} \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right);$$

$$\frac{E_m}{Z_в} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{377} = 5{,}315 \cdot 10^{-4} \text{ А/м},$$

$$\frac{\omega}{v} z = \frac{10^6 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 10^5} = 1{,}665 \text{ рад} \approx 95°20'.$$

Следовательно, $H = 5{,}315 \cdot 10^{-4} \sin(10^6 t - 65°20')$ А/м. Мгновенное значение вектора Пойнтинга при $z = 0{,}5$ км:

$$\Pi = \frac{E_m H_m}{2}\left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_n - \frac{2\omega z}{v}\right)\right] =$$

$$= 5{,}315 \cdot 10^{-5}\,[1 - \cos(2 \cdot 10^6 t - 130°40')] \text{ Вт/м}^2.$$

§ 24.2. Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах. Кратко рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородных и изотропных полупроводящих средах (морской воде, почве, ионосфере, ферритах). При достаточно высоких частотах токи проводимости и токи смещения в полупроводящих средах оказываются соизмеримыми. Уравнения $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_a)\dot{\vec{E}}$ и $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}$ после введения обозначений $\varepsilon_1 = \varepsilon_a - j\dfrac{\gamma}{\omega} = \varepsilon_a - j\varepsilon'$, где $\varepsilon' = \gamma/\omega$, для плоской волны приводятся к следующему виду:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = -\omega^2 \varepsilon_1 \mu_a \dot{H}. \tag{а}$$

Последнему выражению соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -\omega^2\varepsilon_1\mu_a$. Решение уравнения (а) $\dot{H} = \dot{C}_1 e^{p_1 z} + \dot{C}_2 e^{p_2 z}$, где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий. Постоянные распространения: $p_1 = \beta + j\dfrac{\omega}{v_1}$, $p_2 = \beta - j\dfrac{\omega}{v_1}$. Коэффициент затухания $\beta = \dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_a)^2}}$

и фазовая скорость $v_ф = \omega/\alpha$; $\alpha = \omega/v_1$;

$$v_{фаз} = v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\varepsilon'/\varepsilon_a)^2}}}$$

зависят от величины $\varepsilon'/\varepsilon_a$. При выводе использованы формулы

$$\sin\alpha/2 = \sqrt{0{,}5\,(1 - \cos\alpha)} \text{ и } \cos\alpha/2 = \sqrt{0{,}5\,(1 + \cos\alpha)}.$$

Напряженность электрического поля для падающей волны $\dot{E}_n = \dot{H}_n Z_в$, где волновое сопротивление $Z_в = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_a}}}$.

Сдвиг по фазе между $\dot{E}_n$ и $\dot{H}_n$ находится в интервале от 0 до 45° в зависимости от соотношения между 1 и $\varepsilon'/\varepsilon_a$.

Заметим, что параметры ε_a, γ и μ_a полупроводящих сред являются функциями частоты и комплексными числами (ср. с § 22.8). Эти зависимости должны быть известны перед проведением расчета. Для ферритов решение приближенно, так как μ_a ферритов зависит еще и от величины напряженности магнитного поля.

Среды с потерями, для которых фазовая скорость и коэффициент затухания зависят от частоты, называют *диспергирующими*.

В заключение коснемся понятия групповой скорости. Оно используется главным образом при рассмотрении вопроса о распространении радиосигналов в среде с потерями. Так как радиосигнал образован совокупностью волн, имеющих разные частоты, а β и v_1 зависят от ω, то огибающая импульса при его движении в среде с потерями непрерывно деформируется. *Групповой скоростью* называют скорость перемещения максимума огибающей сигнала (импульса). Скорость перемещения этого максимума характеризует скорость перемещения энергии группы волн.

Выведем приближенную формулу для групповой скорости распространения волны в полупроводящей среде. Положим, что вдоль оси z распространяются два колебания $A \sin \omega t$ и $A \sin (\omega + \Delta\omega)\, t$.

Для частоты ω $p = \beta + j\alpha$ $(\alpha = \omega/v_1)$, для частоты $\omega + \Delta\omega$ $p = (\beta + \Delta\beta) + j(\alpha + \Delta\alpha)$. Сумма колебаний вдоль оси z:

$$Ae^{-\beta z} \sin (\omega t - \alpha z) + Ae^{-\beta z} e^{-\Delta\beta z} \sin [(\omega + \Delta\omega)\, t - (\alpha + \Delta\alpha)\, z].$$

Полагая, что $\Delta\beta z \ll 1$ и $e^{-\Delta\beta z} \approx 1$ и используя формулу $\sin \nu + \sin \rho = 2 \cos \frac{\nu - \rho}{2} \sin \frac{\nu + \rho}{2}$, получим

$$2Ae^{-\beta z} \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\alpha}{2} z \right) \sin [(\omega + \Delta\omega/2)\, t - (\alpha + \Delta\alpha/2)\, z].$$

Скорость перемещения огибающей результирующего колебания вдоль оси z найдем, взяв производную по времени от аргумента $\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\alpha}{2} z$, полагая его постоянным: $v_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\alpha} \approx \frac{1}{d\alpha/d\omega}$.

При $e^{-\Delta\beta z}$ заметно отличающемся от 1, форма сигнала при его движении вдоль оси z настолько деформируется, что исчезает информация, заключенная в сигнале. В этом случае понятие $v_{гр}$ теряет смысл.

§ 24.3. Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред. Граничные условия обобщают граничные условия на границе раздела двух идеальных диэлектриков (см. § 19.24) и на границе раздела двух проводящих сред (§ 20.6).

Запишем граничные условия для синусоидально изменяющегося поля (потому над $\dot{E}$ ставим точку), частным случаем которого является поле, неизменное во времени. Формула (19.24), совпадающая с формулой (20.10), справедлива и для полупроводящей среды, только, учитывая синусоидальный характер поля во времени, ставим точки над $\dot{E}_t$:

$$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t}. \qquad (24.12)$$

Формулы (19.35) и (20.11) различны и поэтому следует образовать более общее выражение, частными случаями которого были бы эти формулы. Для этого возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_a)\dot{\vec{E}}$. Так как $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} \equiv 0$, то и

$$\mathrm{div}\,(\gamma + j\omega\varepsilon_a)\dot{\vec{E}} = 0. \tag{24.13}$$

На границе раздела двух полупроводящих сред выделим прямой сплющенный параллелепипед очень малых размеров. Его донышко находится в одной среде, а крышка — в другой. Из (24.13) следует, что:

$$(\gamma_1 + j\omega\varepsilon_{a1})\dot{E}_{1n} = (\gamma_2 + j\omega\varepsilon_{a2})\dot{E}_{2n}. \tag{24.14}$$

Формулы (24.12) и (24.14) представляют искомые граничные условия.

§ 24.4. Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках. Процессы в полупроводящих средах должны удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\mathrm{div}\,\vec{\delta} = -\frac{\partial\rho_{\text{своб}}}{\partial t} \tag{24.15}$$

и теореме Гаусса

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{\text{своб}}. \tag{24.16}$$

В соответствии с законом Ома в уравнение (24.15) подставим $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$:

$$\vec{E}\,\mathrm{grad}\,\gamma + \gamma\,\mathrm{div}\,\vec{E} = -\frac{\partial\rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \tag{24.15а}$$

В уравнение (24.16) заменим $\vec{D}$ на $\varepsilon_a\vec{E}$:

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon_a\,\vec{E} + \varepsilon_a\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho_{\text{своб}}. \tag{24.16а}$$

Из (24.16а) найдем:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \vec{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_a}{\varepsilon_a}. \tag{24.17}$$

Подставим (24.17) в (24.15)

$$\frac{\partial\rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_a}\rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a}\vec{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_a - \vec{E}\,\mathrm{grad}\,\gamma. \tag{24.18}$$

Преобразуем правую часть (24.18):

$$\vec{E}\gamma\frac{\gamma}{\varepsilon_a}\left(\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a}{\gamma^2}\,\mathrm{grad}\,\gamma\right) = \vec{\delta}\,\frac{\gamma}{\varepsilon_a}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\varepsilon_a}{\gamma}\right),$$

или

$$\frac{\partial\rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_a}\rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a}\vec{\delta}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\varepsilon_a}{\gamma}\right). \tag{24.18а}$$

Уравнение (24.18а) является дифференциальным уравнением относительно свободного объемного заряда. Оно описывает переходные и установившиеся процессы в самой полупроводящей среде (не идеальном диэлектрике).

В установившемся режиме $\rho_{\text{своб}} = \vec{\delta}\,\mathrm{grad}\,(\varepsilon_a/\gamma)$. Если среда однородна $\varepsilon_a/\gamma = \mathrm{const}$, то в установившемся режиме свободный объемный заряд не накапливается, т. е. $\rho_{\text{своб}} = 0$. Переходные процессы в однородной полупроводящей среде описываются уравнением $\frac{d\rho_{\text{своб}}}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_a}\rho_{\text{своб}} = 0$. Если к началу переходного процесса при $t=0_-$ $\rho_{своб} = \rho_{своб}(0_-)$, то объемный заряд в этой точке поля рассасывается по экспоненте

$$\rho_{своб} = \rho_{своб}(0_-)\, e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_a} t}.$$

Время уменьшения $\rho_{своб}$ в $e = 2{,}72$ раза называют *временем релаксации*. В несовершенной изоляции время релаксации может составлять от нескольких единиц до нескольких десятков секунд. Если конденсатор с несовершенной изоляцией, находящийся под напряжением, отключить от источника напряжения, затем на некоторое время замкнуть проводником накоротко и после этого проводник убрать, то на зажимах отключенного от сети конденсатора вновь появится напряжение за счет рассасывания объемного заряда. В металлах время релаксации составляет около 10^{-17} с, т. е. рассасывание объемного заряда происходит практически мгновенно.

§ 24.5. О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме. В соответствии с § 24.3 в синусоидально изменяющемся поле проводимость является комплексным числом $\tilde{\gamma} = \gamma + j\omega\varepsilon_a$.

Изменяющийся во времени ток, протекающий по несовершенному диэлектрику, создает в нем изменяющееся во времени магнитное поле. Однако если последнее слабое, то его влиянием на электрическое поле в первом приближении можно пренебречь и рассчитывать электрическое поле в полупроводящих средах по формулам для статических полей в проводящих средах, вводя в соответствующие формулы комплексную $\tilde{\gamma}$ вместо вещественной γ. А так как формулы для расчета электрических полей в проводящих средах в условиях статики следуют из формул для расчета соответствующих электростатических задач (см. § 19.32—19.36, 19.39, 19.40 и др.), то надлежит использовать формулы электростатики, заменяя в них ε на $\tilde{\gamma}$.

Аналогичный подход применяют при расчетах квазистатических электрических полей в вязких диэлектриках, вводя комплексное $\tilde{\varepsilon}_a$, и при расчетах квазистатических магнитных полей в магнитно вязких материалах при отсутствии вихревых токов (в ферритах), вводя комплексное $\tilde{\mu}_a$.

§ 24.6. Определение гиротропной среды. *Гиротропными* (*вращающими*) называют среды, в которых плоскость поляризации электромагнитной волны поворачивается по мере распространения волны вдоль некоторого направления.

В гиротропной среде μ_a или ε_a для малых переменных составляющих является тензором. Наиболее распространенными на практике магнитными гиротропными (гиромагнитными) средами являются намагниченные постоянным магнитным полем ферриты (у них тензором являются $\overleftrightarrow{\mu_a}$) и намагниченные постоянным магнитным полем ионизированные газы — гироэлектрические среды (у них тензор $\overleftrightarrow{\varepsilon_a}$). Далее в качестве гиротропной среды будем использовать феррит.

§ 24.7. Тензор магнитной проницаемости феррита. Сначала вспомним, что называют прецессией.

Из механики известно, что скорость изменения момента количества движения $d\vec{M}/dt$, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω волчка (гироскопа), равна приложенному к нему вращающему моменту (рис. 24.3, *а*):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r}\,\vec{F}]. \qquad (24.19)$$

Здесь $\vec{r}$ — расстояние волчка от вертикальной оси z; $\vec{F}$ — сила тяжести. Радиус R вращающего волчка описывает боковую поверхность конуса. Такое движение называют *прецессией*.

В феррите, помещенном в постоянное магнитное поле индукции $\vec{B} = k\vec{B}$, вектор намагниченности $\vec{J}$ единицы объема вещества совершает прецессионное движение подобно вращающемуся волчку (рис. 24.3, *б*). Если не учитывать создаваемое вязким трением затухание, прецессия описывается уравнением Ландау—Лившица

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma\,[\vec{B}\,\vec{J}], \tag{24.20}$$

где коэффициент $\gamma = 1{,}756 \cdot 10^{11}$ Тл$^{-1}\cdot$с$^{-1}$.

При наличии вязкого трения индукция $\vec{B}$ оказывается уменьшенной на величину, пропорциональную скорости изменения $d\vec{J}/dt$, $\vec{B} - \mu_0 \alpha\, d\vec{J}/dt$, поэтому

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma \left[\left(\vec{B} - \mu_0\, \alpha \frac{d\vec{J}}{dt} \right) \vec{J} \right]. \tag{24.21}$$

Если в начало координат поместить малую ферритовую сферу рис. 24, 3, *в* и постоянное магнитное поле индукции B_0 направить по оси z, а малое по амплитуде синусоидально-изменяющееся переменное поле индукции $\dot{b}$ частоты ω направить по осям x и y, $\vec{b} = \vec{i}\dot{b}_x + \vec{j}\dot{b}_y$, то $\vec{B} = \vec{i}\dot{b}_x + \vec{j}\dot{b}_y + \vec{k}B_0$. В свою очередь намагниченность $\vec{J} = \vec{i}j_x + \vec{j}j_y + \vec{k}\,(J_0 + j_z)$.

Учитывая временной фактор множителем $e^{j\omega t}$, производную $d\vec{J}/dt$ заменим на $j\omega\,(\vec{i}j_x + \vec{j}j_y + \vec{k}j_z)$.

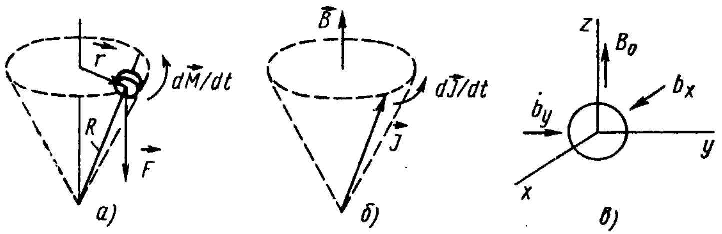


Рис. 24.3

После подстановки всех величин в (24.21), пренебрежения слагаемыми второго порядка малости (например, произведением $\dot{b}_x j_y$), окажется, что j_x зависит не только от $\dot{b}_x$, но и от $\dot{b}_y$, а j_y не только от $\dot{b}_y$, но и от $\dot{b}_x$:

$$j_x = k_{xx}\frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + k_{xy}\frac{\dot{b}_y}{\mu_0}\,; \quad j_y = k_{yx}\frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + k_{yy}\frac{\dot{b}_y}{\mu_0}\,;$$

$$k_{xx} = k_{yy} = \frac{1}{m}\,(B_0 + j\omega\mu_0\,\alpha J_0)\,\mu_0 J_0 \gamma^2;$$

$$k_{xy} = -k_{yx} = -j\omega\gamma\mu_0 J_0/m;$$

$$m = \gamma^2\,(B_0 + j\omega\mu_0\,\alpha J_0)^2 - \omega^2.$$

Коэффициенты k_{xx} и k_{xy} играют роль магнитной восприимчивости. Коэффициент k_{xx} имеет действительную k_{xx1} и мнимую k_{xx2} части. Аналогично две части имеет и k_{xy}. При $\omega = \omega_p = \dfrac{B_0}{\sqrt{\alpha^2\mu_0^2 J_0^2 + \gamma^{-2}}}$ действительная часть m равна 0. При этом k_{xx1} достигает максимума и наблюдается гиромагнитный резонанс.

Когда вязкое трение отсутствует $\alpha = 0$ и $\omega = \omega_p = \gamma B_0$. При $B_0 = 1$ Тл $\omega_p = 1{,}75 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$.

Если $\vec{b} = \vec{j}\dot{b}_x$ ($b_y = 0$), то $j_x = \dfrac{B_0}{\gamma^2 B_0^2 - \omega^2}$ и $j_y = \dfrac{-j\omega\gamma J_0}{\gamma^2 B_0^2 - \omega^2}$, т. е. несмотря на то, что $b_y = 0$, переменная составляющая вектора имеет компоненты по осям x и y, сдвинутые во времени на 90° (множитель $-\vec{j}$ у j_y). Это означает, что поле вектора $\vec{j}$ поляризовано в плоскости xoy.

Тензор абсолютной проницаемости $\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a$ феррита, намагничиваемого постоянным магнитным полем индукции $\vec{B}_0$, направленным по оси z, и малым переменным полем по осям x и y, следующий:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -jc & 0 \\ jc & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}; \qquad (24.22)$$

$$\mu = 1 + k_{xx}; \qquad c = \frac{\omega\gamma\mu_0 J_0}{m};$$

$$\mu_z = 1 + k_0,$$

k_0 — восприимчивость феррита в постоянном магнитном поле.

§ 24.8. **Распространение плоской волны в гиромагнитной среде.** Положим, что в феррите в направлении оси z, вдоль которой направлено постоянное магнитное поле индукции B_0, распространяется плоская электромагнитная волна частоты ω. В соответствии с формулой (24.22)

$$\dot{B}_x = \mu_0 (\mu \dot{H}_x - jc\dot{H}_y); \quad \dot{B}_y = \mu_0 (jc\dot{H}_x + \mu\dot{H}_y);$$

$$\dot{B}_z = \mu_0 \mu \dot{H}_z; \quad E_z = H_z = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{o}{\partial y} = 0;$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y.$$

Подставим в уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}$ и $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ значения $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{B}}$. Получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\dot{H}_y}{dz} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x; \quad \frac{d\dot{H}_x}{dz} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y; \\ -\frac{d\dot{E}_y}{dz} &= -j\omega\mu_0 (\mu\dot{H}_x - jc\dot{H}_y); \quad \frac{d\dot{E}_x}{dz} = -j\omega\mu_0 (jc\dot{H}_x + \mu\dot{H}_y). \end{aligned}\right\} \qquad (24.23)$$

Полагаем, что потери в феррите отсутствуют, и поэтому волна будет распространяться без затухания. Тогда можно принять

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_{0x} e^{-jpz}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} e^{-jpz}; \\ \dot{H}_x &= \dot{H}_{0x} e^{-jpz}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{-jpz}, \end{aligned}\right\} \qquad (24.24)$$

$\dot{E}_{ox}$, $\dot{E}_{oy}$, $\dot{H}_{ox}$ и $\dot{H}_{oy}$ — значения $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ при $z = 0$.

Совместно решая (24.23) с учетом (24.24), получим:

$$\left.\begin{aligned} p\dot{H}_{0y}&=\omega\varepsilon_a\dot{E}_{0x}; \quad p\dot{H}_{0x}=-\omega\varepsilon_a\dot{E}_{0y};\\ p\dot{E}_{0y}&=-\omega\mu_0(\mu\ \dot{H}_{0x}-jc\dot{H}_{0y}); \quad p\dot{E}_{0x}=\omega\mu_0(jc\dot{H}_{0x}+\mu\ \dot{H}_{0y}).\end{aligned}\right\} \quad (24.25)$$

Из первых двух уравнений (24.25) найдем $\dot{H}_{0y}$ и $\dot{H}_{0x}$ и подставим в остальные два уравнения:

$$(p^2-\varepsilon_a\omega^2\mu\mu_0)\dot{E}_{0y}=jc\varepsilon_a\omega^2\mu_0\dot{E}_{0x}; \quad (24.26)$$

$$(p^2-\mu\mu_0\omega^2\varepsilon_a)\dot{E}_{0x}=-jc\mu_0\omega^2\varepsilon_a\dot{E}_{0y}. \quad (24.27)$$

Совместно решая (24.26) и (24.27), получим уравнение относительно p:

$$(p^2-\varepsilon_0\mu\ \mu_0\omega^2-m\varepsilon_a\mu_0\omega^2)(p^2-\varepsilon_a\mu\ \mu_0\omega^2+m\varepsilon_a\omega^2\mu_0)=0. \quad (24.28)$$

Уравнение (24.28) имеет два корня, удовлетворяющих условию задачи

$$p^+=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0(\mu+c)} \quad \text{и} \quad p^-=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0(\mu-c)}.$$

Подставляя найденные значения p в (24.26) и (24.27), найдем $\dot{E}_{0y}=\pm j\dot{E}_{0x}$. Если $p=p^+$, то $\dot{E}_{0y}=j\dot{E}_{0x}$, т. е. $\dot{E}_{0y}$ по фазе опережает $\dot{E}_{0x}$ на 90°, этому соответствует правое вращение плоскости поляризации и фазовая скорость $\overset{+}{v}=$
$=\dfrac{\omega}{p^+}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_0(\mu+c)}}$.

Если $p=p^-$, то $\dot{E}_{0y}=-j\dot{E}_{0x}$, т. е. $\dot{E}_{0y}$ отстает от $\dot{E}_{0x}$ на 90° — левое вращение плоскости поляризации, ему соответствует фазовая скорость

$$v^-=\frac{\omega}{p^-}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_0(\mu-c)}}.$$

Положим, что вдоль оси z распространяется волна, компоненты которой, соответствующие правой и левой поляризации, имеют одинаковые амплитуды $\dot{E}_m$

$$E_x^+=E_m\sin(\omega t-p^+z); \quad E_y^+=E_m\cos(\omega t-p^+z);$$

$$E_x^-=E_m\sin(\omega t-p^-z); \quad E_y^-=-E_m\cos(\omega t-p^-z).$$

Проекция суммы напряженностей на оси x и y:

$$E_x=E_x^++E_x^-=2E_m\cos[0{,}5(p^+-p^-)z]\sin[\omega t-0{,}5(p^++p^-)z];$$

$$E_y=E_y^++E_y^-=2E_m\sin[0{,}5(p^+-p^-)z]\sin[\omega t-0{,}5(p^++p^-)z].$$

Результирующая напряженность поля

$$E_p=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=2E_m\sin[\omega t-0{,}5(p^++p^-)z].$$

Волна поляризована в плоскости, проходящей через вектор $\vec{E}_p$ и ось z. Тангенс угла β между вектором $\vec{E}_p$ и осью x $\operatorname{tg}\beta=E_y/E_x=\operatorname{tg}[0{,}5(p^+-p^-)z]$.

Угол β увеличивается пропорционально расстоянию z. Среда называется *гиротропной* (вращающей) потому, что плоскость поляризации волны непрерывно поворачивается с ростом z (эффект Фарадея).

Если электромагнитная волна будет распространяться вдоль оси $-z$ (т. е. встречно постоянному полю B_0), то коэффициент c изменит знак, в результате направление вращения плоскости поляризации (если смотреть вслед волне) сохраняется прежним, а не изменится на противоположное, т. е. для гиротропной среды не выполняется принцип взаимности.

Эффект вращения плоскости поляризации волны используется для создания вентильных устройств волноводного тракта, например, в устройстве, называемом *циркулятором* (отрезок волноводного тракта, заполненного ферритом), с двух сторон которого находятся поляризаторы. В волноводе с таким устройством электромагнитная волна может проходить только в одном направлении, а в другом задерживается одним из поляризаторов.

Вопросы для самопроверки

1. На какую долю процента скорость света в воздухе ($\varepsilon_r = 1.0006$) и волновое сопротивление меньше, чем в вакууме? 2. В некоторой точке диэлектрика $\vec{E} = \vec{i}E_m \sin \omega t$. Определите $\vec{H}$ и rot $\vec{H}$ в этой точке. 3. В некоторой точке диэлектрика $\vec{H} = \vec{j}H_m \cos \omega t$. Определите $\vec{E}$ и rot $\vec{E}$ в этой точке. 4. Дайте определение полупроводящей среде. Приведите примеры. 5. При какой частоте амплитуда плотности тока проводимости равна амплитуде плотности тока смещения для сухой почвы, у которой $\gamma = 10^{-3}$ Ом$^{-1}$ м$^{-1}$? 6. Какими параметрами характеризуют проводящие среды? 7. Каковы особенности распространения электромагнитных волн в полупроводящей среде? 8. Из формул для $Z_в$, $v_ф$ и коэффициента распространения для полупроводящей среды получите формулы соответствующих величин для диэлектрика и для проводящей среды. 9. Из граничных условий для полупроводящей среды получите граничные условия для диэлектрика для проводящей среды. 10. Что понимают под групповой скоростью ? 11. Сопоставьте формулы для фазовой и групповой скоростей. 12. Какие среды называют диспергирующими? 13. При каких ограничениях синусоидально изменяющееся во времени электромагнитное поле в полупроводящих средах, а также в вязких магнитных и диэлектрических средах может быть рассчитано по соответствующим формулам электростатического поля? 14. Какие процессы в конденсаторах с несовершенными диэлектриками называют релаксационными? К каким неожиданным последствиям они могут привести? 15. Какое явление называют прецессией? 16. Выведите формулу для тензора абсолютной магнитной проницаемости феррита, на который воздействует вдоль оси z постоянное магнитное поле $\vec{B}_0$, а вдоль осей x и y синусоидально изменяющееся магнитное поле малой амплитуды. 17. В чем особенности распространения электромагнитных волн в гиротропных средах? 18. Решите задачи 22.15; 22.16; 22.17; 22.46; 22.47.

Глава двадцать пятая

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

§ 25.1. Вывод уравнений для $\vec{A}$ и φ в переменном электромагнитном поле и их решение. Переменное электромагнитное поле создается токами и зарядами, зависящими не только от координат, но и от времени. Рассмотрим, каким уравнениям подчиняются векторный и скалярный потенциалы $\vec{A}$ и φ в переменном электромагнитном поле. С этой целью выпишем систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \tag{25.1}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{25.2}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0; \tag{25.3}$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \rho_{своб}{}^{*}/\varepsilon_a. \tag{25.4}$$

* В дальнейшем индекс «своб» писать не будем.

Дополним ее уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{\delta} = -(d\rho/dt) \tag{25.5}$$

и выражением магнитной индукции через векторный потенциал:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{25.6}$$

Для того чтобы составить уравнение относительно векторного потенциала, необходимо проделать ряд выкладок. Умножив (25.1) на μ_a, получим

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_a\vec{\delta} + \mu_a\varepsilon_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

В последнем уравнении заменим $\mu_a\varepsilon_a$ на $1/v^2$:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_a\vec{\delta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{25.7}$$

В (25.7) вместо $\vec{B}$ подставим $\operatorname{rot}\vec{A}$, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu_a\vec{\delta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu_a\vec{\delta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{25.8}$$

Затем в (25.2) вместо $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ подставим $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ (операция взятия ротора и дифференцирование во времени не зависят друг от друга и потому взаимно переместимы). Тогда (25.2) приобретает следующий вид:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{25.9}$$

Если равны роторы двух функций (от $\vec{E}$ и $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$), то сами функции равны с точностью до градиента от некоторой скалярной функции. Объясняется это тем, что ротор от градиента скалярной функции тождественно равен нулю ($\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$).

Таким образом,

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \tag{25.10}$$

В (25.10) в качестве градиента скалярной функции взят $\operatorname{grad}\varphi$. Объясняется это тем, что уравнение (25.10) должно быть справедливо и для статического поля. А так как в статическом поле $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0$, то выражение, которое получается из (25.10) для статического, поля, должно совпадать с известным из электростатики выражением: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

В соответствии с (25.10) можно сказать, что в переменном электромагнитном поле напряженность электрического поля имеет две составляющие. Одна из них $\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$ обусловлена переменным магнитным полем, другая ($-$ gradφ) — неподвижными зарядами*. Возьмем циркуляцию от вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{A}d\vec{l} - \oint \mathrm{grad}\,\varphi\, d\vec{l}.$$

Циркуляция от градиента φ тождественно равна нулю, а $\oint \vec{A}d\vec{l}$ в соответствии с уравнением (21.26) есть магнитный поток Φ, пронизывающий выбранный контур. Таким образом,

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad (25.10\text{ а})$$

т. е. из (25.10) получили (25.10а) — закон электромагнитной индукции.

Обратим внимание на то, что формула (25.10), определяющая $\vec{E}$, записана для случая неподвижных тел и сред при отсутствии сторонней напряженности поля $E_{\text{стор}}$, возникающей, например при соприкосновении проводящих тел различного химического состава или имеющих не одинаковую температуру.

В более общем случае, когде тело или среда движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле, индукции $\vec{B}$ ($\vec{v}$ и $\vec{B}$ измеряются в одной и той же системе координат, а скорость v значительно меньше скорости света и когда в данной точке поля имеется $E_{\text{стор}}$, результирующая напряженность поля будет состоять из четырех компонент: $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{E}_{\text{стор}} + [\vec{v}\vec{B}]$. Первые два слагаемых имеют тот же смысл, что и в (25.10), третье — сторонняя напряженность поля, четвертое — магнитная составляющая силы Лоренца, представляющая собой силу, действующую на единичный заряд, двигающийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$. Все четыре компоненты $\vec{E}$ в одной и той же точке поля одновременно, как правило, не возникают.

В уравнении (25.8) участвует производная $\partial\vec{E}/\partial t$. Найдем ее из (25.10):

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и подставим в (25.8):

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu_a\vec{\delta} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\,\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \nabla^2\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_a\vec{\delta}. \qquad (25.11)$$

---

* Первую из них можно назвать *вихревой* составляющей, вторую — *потенциальной* (или кулоновой).

Вектор-потенциал представляет собой функцию, ротор которой равен $\vec{B}$. В гл. 21 отмечалось, что вектор-потенциал $\vec{A}$ должен быть подчинен определенному условию, а именно: в постоянном магнитном поле $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, т. е. линии вектора представляют собой замкнутые сами на себя линии.

В переменном электромагнитном поле таким требованием к вектору-потенциалу является требование (калибровка Лоренца):

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (25.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для неизменного во времени поля условие (25.12) сводится к условию $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. В дальнейшем будет показано, что это условие является уравнением непрерывности $\operatorname{div}\vec{\delta} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (§ 22.3), записанным в иной форме.

Вместе с тем уравнение (25.12) свидетельствует о том, что в переменном электромагнитном поле между векторным потенциалом $\vec{A}$ и скалярным потенциалом φ существует определенная связь и что функции $\vec{A}$ и φ зависят друг от друга.

С учетом (25.12) уравнение (25.11) приобретает вид:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta} \qquad (25.13)$$

и называется *уравнением Даламбера*.

Если $\vec{A}$ не является функцией t, то $\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$ и уравнение (25.13) переходит в уравнение Пуассона.

Уравнение (25.13) является неоднородным векторным волновым уравнением. Его часто записывают в иной форме:

$$\Box^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \qquad (25.13')$$

Оператор $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют *четырехмерным лапласианом* (за четвертое измерение принимают время t).

Выясним, какому уравнению в переменном электромагнитном поле подчиняется потенциал φ. С этой целью в уравнение (25.4) вместо напряженности $\vec{E}$ подставим ее эквивалент по (25.10):

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Но $\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и, следовательно, $-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$.

В свою очередь $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi$. Поэтому уравнение (25.4) приобретает следующий вид:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \qquad (25.14)$$

Таким образом, в переменном электромагнитном поле скалярный потенциал φ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (25.14). Если поле статическое и потенциал не является функцией времени, то $(\partial^2\varphi)/(\partial t^2) = 0$ и уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$, обсуждавшееся в § 19.19.

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (25.12) совпадает с уравнением непрерывности (22.3), проделаем следующие выкладки.

Применим оператор $\Box^2$ к обеим частям уравнения (25.12):

$$\Box^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\Box^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Внесем оператор $\Box^2$ под знак дивергенции и под знак производной по времени. Получим

$$\operatorname{div} \Box^2 \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Box^2 \varphi. \qquad (25.15)$$

В соответствии с (25.13′) в (25.15) вместо $\Box^2\vec{A}$ подставим $-\mu_a\vec{\delta}$, а вместо $\Box^2\varphi$ подставим $-\frac{\rho}{\varepsilon_a}$. Будем иметь

$$-\operatorname{div} \mu_a \vec{\delta} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \qquad (25.15\text{ а})$$

Вынесем μ_a из-под знака дивергенции, а ε_a — из-под знака производной по времени, поменяем знаки и разделим обе части равенства на μ_a:

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{1}{v^2 \varepsilon_a \mu_a} \frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (25.16)$$

Так как $\frac{1}{v^2\varepsilon_a\mu_a} = 1$, то уравнение (25.16) есть уравнение непрерывности $\operatorname{div}\vec{\delta} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Обсудим вопрос о решении уравнения (25.14). Запишем решение уравнения для двух частных случаев: для случая, когда $\partial^2\varphi/\partial t^2 = 0$, но $\rho/\varepsilon_a \neq 0$, и когда $\rho/\varepsilon_a = 0$, но $\partial^2\varphi/\partial t^2 \neq 0$. После этого на основании физических соображений запишем решение уравнения (25.14) в общем виде, так что оно будет переходить в известные решения для частных случаев.

Если $\partial^2\varphi/\partial t^2 = 0$, то уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона, общее решение которого известно из раздела электростатики (см. § 19.19):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_V \frac{\rho dV}{R}.$$

Составляющая потенциала φ от элементарного заряда ρdV равна $\frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{\rho dV}{R}$.

При ρ 0 уравнение (25.14) приобретает вид волнового уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \qquad (25.17)$$

В частном случае для плоской волны φ зависит только от пространственной координаты z:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \qquad (25.17а)$$

Решением (25.17а) является выражение:

$$\varphi = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v).$$

Причем функции f_1 и f_2 могут быть любыми, лишь бы они позволяли дважды дифференцировать их по t и z. Вид функций определяется граничными условиями.

Функция $f_1(t - z/v)$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в направлении оси $+z$, функция $f_2(t + z/v)$ это отраженная волна, двигающаяся в направлении оси $-z$.

Напомним, что о волновом уравнении (25.17′) уже говорилось при рассмотрении вопроса о переходных процессах в линиях с распределенными параметрами в гл. XII.

Чтобы определить, в каком направлении перемещается волна $f_1(t - z/v)$, надо выяснить, как должно изменяться z с увеличением времени t, чтобы аргумент функции $f_1(t - z/v)$ оставался постоянным, например равным нулю. Если принять $t - z/v = 0$, то $z = vt$, т. е. с ростом t увеличивается z. Это означает, что волна распространяется вдоль положительного направления оси z.

Покажем, что в сферической системе координат уравнению (25.17) удовлетворяет функция $\frac{f(t - R/v)}{R}$, где R — координата сферической системы; v — скорость распространения волны. Действительно, в сферической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Так как в силу сферической симметрии φ является функцией только R, то $(\partial\varphi)/(\partial\theta)$ и $(\partial\varphi)/(\partial\alpha) = 0$. Поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R}\right). \qquad (25.17б)$$

Если в (25.17б) подставить $\frac{f(t - R/v)}{R}$, то окажется, что $\nabla^2\varphi = \frac{1}{Rv^2} \times f''\left(t - \frac{R}{v}\right)$; $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ также равно $\frac{1}{Rv^2} f''(t - R/v)$.

Таким образом, функция $\frac{f(t - R/v)}{R}$ удовлетворяет уравнению (25.17) в сферической системе координат.

Для неизменного во времени поля (см. § 19.19) $\varphi = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a R}$ и в то же время решение для φ в пространстве, не занятом зарядами

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$f\left(t-\frac{R}{v}\right)=\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon_a}.$$

Таким образом, составляющая потенциала от заряда $\rho(t)\,dV$, изменяющегося во времени, на расстоянии R от него равна

$$\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon_a R}. \qquad (25.18)$$

Выражение $\rho\,(t-R/v)$ следует понимать так: объемный заряд ρ является функцией аргумента $(t-R/v)$. Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределенных в объеме V:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V\frac{\rho\,(t-R/v)\,dV}{R}. \qquad (25.19)$$

Обсудим решение уравнения (25.13). В общем случае это уравнение можно разбить на три уравнения для трех проекций вектора-потенциала*. Каждое из уравнений в проекциях будет составлено относительно скалярной величины (проекция вектора есть величина скалярная). Общее решение для каждой из проекций проводится точно так же, как проводилось решение для скалярной величины φ, но вместо объемного заряда будет участвовать соответствующая проекция плотности тока и μ_a вместо $1/\varepsilon_a$.

После умножения решений на соответствующие орты и сложения окажется, что составляющая вектора потенциала от элемента тока $\vec{\delta}dV$ в некоторой точке пространства, удаленной от элемента тока на расстояние R,

$$d\vec{A}=\frac{\mu_a\,\vec{\delta}\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi R}. \qquad (25.20)$$

Для получения результирующего значения $\vec{A}$ необходимо геометрически просуммировать составляющие от всех элементов тока:

$$\vec{A}=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{\delta}\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{R}. \qquad (25.21)$$

§ 25.2. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля. Рассмотрим, в чем физический смысл выражений (25.18) и (25.20). Электромагнитная волна распространяется со скоростью v. Расстояние R она пройдет за время R/v. Поэтому значение составляющей потенциала φ в переменном электромагнитном поле в некоторой

* Подобно тому, как это сделано в § 21.13.

точке, удаленной от заряда на расстояние R в момент времени t, определяется значением заряда в момент времени $(t - R/v)$. Так же следует понимать и выражение

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta}(t - R/v)\, dV}{4\pi R}.$$

В силу конечной скорости распространения электромагнитной волны значение вектора-потенциала от элемента тока $\vec{\delta} dV$ в точке, удаленной от элемента тока на расстояние R, изменяется с запаздыванием во времени на величину R/v. Поэтому потенциалы переменного электромагнитного поля называют *запаздывающими потенциалами*.

Так как скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике очень велика (в воздухе $v \approx 300\,000$ км/с), то запаздывание проявляется заметно только при значительных R. При малых R запаздывание настолько незначительно, что им практически можно пренебречь.

Наиболее часто понятием запаздывающих потенциалов пользуются в радиотехнике при рассмотрении вопросов, связанных с излучением электромагнитной энергии.

§ 25.3. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала. В гл. 21 [см. уравнение (21.27)] отмечалось, что составляющая векторного потенциала от элемента линейного тока $i\vec{dl}$:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i\vec{dl}}{R}.$$

В переменном электромагнитном поле с учетом явления запаздывания:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i(t - R/v)}{R} \vec{dl}.$$

Ток i может изменяться во времени по любому закону. С практической точки зрения наиболее интересен синусоидальный закон изменения тока во времени, поэтому полагаем:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Ток можно представить в показательной форме $\dot{I}_m e^{j\omega t}$, где $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ (строго говоря, надо было бы написать еще символ взятия мнимой части: но его часто опускают).

Ток $i(t - R/v) = I_m \sin[\omega(t - R/v) + \psi]$ или в показательной форме $\dot{I}_m e^{j\omega(t - R/v)}$. Следовательно, комплексную амплитуду вектор-потенциала от элемента тока $\vec{dl} I_m \sin(\omega t + \psi)$ можно записать так:

$$d\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\dot{I}_m e^{j\omega(t - R/v)} \vec{dl}}{R}. \qquad (25.22)$$

Аналогично, если электрические заряды, создающие поле, меняются во времени по синусоидальному закону, то комплексная амплитуда потенциала $\dot{\varphi}$ от объемного заряда $\dot{\rho}_m e^{j\omega t} dV$:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{\dot{\rho}_m \, e^{j\omega(t - R/v)} \, dV}{R}. \tag{25.23}$$

Пример 224. Найти закон изменения векторного потенциала от тока $100 \times \sin(10^5 t + 30°)$ А, протекающего по элементу проводника длиной $dl = 30$ см, в точке, удаленной от элемента тока на расстояние $R = 100$ км, $\mu_a = \mu_0$.

Решение.

$$dA = \frac{\mu_0 I_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right) + \psi\right] dl}{4\pi R} =$$

$$= \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}3 \cdot 100 \sin\left[10^5\left(t - \frac{100}{300\,000}\right) + 30°\right]}{4\pi \cdot 100 \cdot 10^3} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-11} \sin(10^5 t - 80°) \text{ В·с/м}$$

$$(33{,}3 \text{ рад} \approx 110°; \quad -110° + 30° = -80°).$$

§ 25.4. Излучение электромагнитной энергии. Рассмотрим вопрос об излучении электромагнитной энергии элементом тока. Пусть по отрезку проводника длиной dl, находящемуся в воздухе ($\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$), протекает ток $I_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 25.1). Далее будем пользоваться цилиндрической и отчасти сферической системами координат. Ось z цилиндрической системы направим вдоль проводника. Пусть положительное направление тока по проводнику совпадает с положительным направлением оси z.

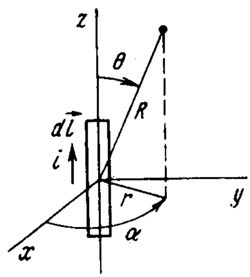


Рис. 25.1

Найдем значение вектора-потенциала в произвольной точке, удаленной от элемента тока на расстояние R. В соответствии с (25.22)

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} \vec{dl}}{R},$$

или, если исключить множитель $e^{j\omega t}$:

$$d\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{I}_m e^{-j\omega\frac{R}{v}} d\vec{l}}{R}.$$

Направление $\vec{dA}$* совпадает с направлением вектора $\vec{dl}$ (вдоль оси z). Найдем магнитную индукцию в произвольной точке поля: $\dot{\vec{B}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}$.

* В дальнейшем для сокращения записи вместо $d\dot{\vec{A}}$ будем писать $\dot{\vec{A}}$.

Раскроем ротор в цилиндрической системе координат:

$$\dot{\vec{B}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}} = \vec{r}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{r \partial \alpha} - \frac{\partial \dot{A}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial z} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_p}{r \partial a} \right).$$

Так как $\dot{\vec{A}}$ имеет единственную составляющую $\dot{A}_z$, и она зависит только от R и в силу симметрии поля не зависит от α, то

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\alpha}^\circ \left(- \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right). \qquad (25.24)$$

Из формулы (25.24) следует, что магнитная индукция имеет α-е направление.

Для нахождения комплекса магнитной индукции надо вычислить $\frac{-\partial \vec{A}_r}{\partial r}$; $\vec{A}_z$ зависит в явном виде от R, а не от r. Поэтому

$$-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r}. \qquad (25.25)$$

Для любой точки пространства справедливо, очевидно, соотношение, вытекающее из теоремы Пифагора,

$$z^2 + r^2 = R^2. \qquad (25.26)$$

Продифференцируем (25.26) по r, получим

$$2r = 2R \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin \theta. \qquad (25.27)$$

Составляющая $\dot{A}_z$ состоит из произведения двух функций R: функции $e^{-j\omega \frac{R}{v}}$ и функции $1/R$. Поэтому

$$\dot{B} = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_m \, dl}{4\pi} \sin \theta \left[-\frac{1}{R^2} e^{-j\omega \frac{R}{v}} - j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right],$$

или

$$\dot{B} = \frac{\mu_0 \dot{I}_m \, dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{R^2} + \frac{j\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right]. \qquad (25.28)$$

Выражение (25.28) можно переписать и в ином виде, перейдя к мгновенным значениям:

$$B = \frac{\mu_0 I_m \, dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{\sin\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right)}{R^2} + \frac{\omega}{vR} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) \right]. \qquad (25.28a)$$

Формула (25.28а) позволяет сделать вывод, что в любой точке пространства магнитная индукция от элемента переменного тока имеет две составляющие, одна из них убывает обратно пропорционально квадрату радиуса и изменяется по закону синуса во времени, другая убывает обратно пропорционально первой степени радиуса и изменяется по закону косинуса во времени.

Найдем закон изменения напряженности электрического поля. В соответствии с первым уравнением Максвелла:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}. \tag{25.29}$$

Так как $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, то

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\alpha}^0 \left[\frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{R^2} + \frac{j\omega\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{vR} \right) \right]. \tag{25.30}$$

Далее целесообразно перейти к сферической системе координат. Проекции $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$ в сферической системе следующие:

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \dot{H}_\alpha) - \frac{\partial \dot{H}_\theta}{\partial\alpha} \right];$$

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial H_R}{\partial\alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\dot{H}_\alpha);$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R\dot{H}_\theta) - \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial\theta} \right].$$

Так как $H_\theta = 0$, $\dot{H}_R = 0$, то

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \dot{H}_\alpha); \tag{25.31}$$

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\dot{H}_\alpha). \tag{25.32}$$

Найдем проекции $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$ на направление R:

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}_m\, dl \cos\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m\, dl \cos\theta\, j\omega\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v}. \tag{25.33}$$

В свою очередь проекция $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$ на направление θ по формуле (25.32)

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, j\omega\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^2 v} - \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, \omega^2\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R v^2}. \tag{25.34}$$

Для того чтобы получить проекции $\vec{\dot{E}}$ на направление R и θ, необходимо соответствующие проекции $\mathrm{rot}\vec{\dot{H}}$ разделить на $j\omega\varepsilon_0$ [см. уравнение (25.29)]:

$$\dot{E}_\theta = \frac{-j\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3\, \omega\varepsilon_0} + \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2 v} + \frac{j\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, \omega\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R v^2 \varepsilon_0} \qquad (25.35)$$

и

$$\dot{E}_R = \frac{-j\dot{I}_m\, dl \cos\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^3\, \omega\varepsilon_0} + \frac{\dot{I}_m\, dl \cos\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^2\, v\varepsilon_0}. \qquad (25.36)$$

Таким образом, напряженность электрического поля имеет две составляющие: одна направлена по θ, другая — по R; $\dot{E}_\theta$ содержит три слагаемых [см. уравнение (25.35)], изменяющихся обратно пропорционально, соответственно, третьей, второй и первой степеням расстояния R; $\dot{E}_R$ состоит из двух слагаемых, изменяющихся обратно пропорционально R^3 и R^2. Частное $v/\omega = v/2\pi f = vT/2\pi = \lambda/2\pi$. Отношение модуля первого слагаемого в (25.33) к модулю второго равно $\lambda/(2\pi R)$ (λ — длина волны).

Если $R \gg \lambda/2\pi$, то первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь, если $R \ll \lambda/(2\pi)$, то, наоборот, можно пренебречь вторым слагаемым. Аналогичные соотношения имеют место между модулями слагаемых в (25.34).

Принято все поле делить на ближнюю, среднюю и дальнюю зоны. Для ближней зоны $R \ll \lambda/(2\pi)$; для дальней $R \gg \lambda/(2\pi)$. В средней зоне R соизмеримо с $\lambda/(2\pi)$. В соответствии с этим для ближней зоны

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\dot{H}} = \vec{\alpha}^0 \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^2}; \quad \dot{E}_\theta = \frac{-j\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3\, \omega\varepsilon_0}; \\ &\dot{E}_R = \frac{-j\dot{I}_m\, dl \cos\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^3\, \omega\varepsilon_0}; \end{aligned}\right\} \qquad (25.37)$$

для дальней зоны

$$\vec{\dot{H}} = \frac{\vec{\alpha}^0\, j\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2R\lambda}; \quad \dot{E}_\theta = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, j\dot{I}_m\, dl \sin\theta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2R\lambda}. \qquad (25.38)$$

Запишем мгновенные значения H и E для дальней зоны:

$$\left.\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_m\,dl\sin\theta}{2R\lambda}\cos(\omega t - \omega R/v + \psi); \\ E_\theta &= \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,I_m\,dl\sin\theta}{2R\lambda}\cos(\omega t - \omega R/v + \psi). \end{aligned}\right\} \qquad (25.39)$$

Таким образом, в дальней зоне, т. е. в зоне, для которой $R \gg \lambda/2\pi$, напряженность магнитного поля имеет только одну α составляющую, а напряженность электрического поля — только одну θ-ю составляющую [см. уравнение (25.38)]. Если провести сферу радиусом R, то во всех точках этой сферы (назовем ее эквифазной поверхностью) H имеет одну и ту же фазу колебания в какой-то конкретный момент времени (фаза колебания определяется аргументом косинуса). Амплитуда H для точек сферы $R = \text{const}$ различна, она зависит от угла θ; на «полюсах» при $\theta = 0$ и при $\theta = 180°$ амплитуда колебания для любого момента времени равна нулю, так как $\sin\theta = \sin 180° = 0$, амплитуда колебания максимальна на «экваторе» сферы при $\theta = 90°$. По фазе H и E совпадают [см. уравнение (25.39)]. Модуль E в $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = Z_в$ раз больше модуля H, т. е. $E = HZ_в$.

Диаграмму зависимости модуля E или H в дальней зоне от угла θ принято называть *диаграммой направленности*. Она будет представлять собой объемную фигуру — тор, сечение которого плоскостью, проходящей через полярную ось, представляет собой две соприкасающиеся окружности (рис. 25.2, *а*).

Составим выражение вектора Пойнтинга для дальней зоны: $\vec{П} = [\vec{E}_\theta \vec{H}_\alpha] = \vec{П}_R$.

Векторное произведение двух векторов, один из которых имеет θ-е направление, а другой — α-е, дает вектор $\vec{П}$, направленный по радиусу (рис. 25.2, *б*).

Так как H и E в дальней зоне совпадают по фазе, то с изменением направления H на противоположное (H изменяется во времени по косинусоиде) одновременно меняется на противиположное и направление вектора E. Но вектор $\vec{П}$ своего направления не меняет, он все время направлен вдоль радиуса.

Найдем величину модуля вектора Пойнтинга. С этой целью умножим модуль E на модуль H:

$$П = \frac{Z_в\,(dl)^2\,I_m^2\sin^2\theta\cos^2(\omega t - \omega R/v + \psi)}{4R^2\lambda^2}. \qquad (25.40)$$

Среднее значение модуля вектора Пойнтинга за период $T = 2\pi/\omega$

$$П_{ср} = \frac{Z_в\,(dl)^2\,I_m^2\sin^2\theta}{8R^2\lambda^2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right)dt = \frac{1}{1}\right].$$

за период

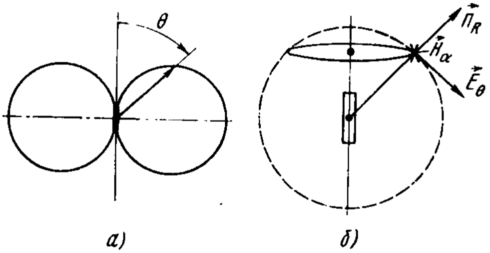


Рис. 25.2

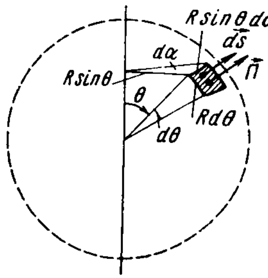


Рис. 25.3

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R. Элемент $\vec{dS}$ сферической поверхности радиусом R направлен по радиусу. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ также направлен по радиусу. Угол между ними равен нулю (рис. 25.3). Элемент сферической поверхности можно рассматривать как криволинейный квадрат, площадь его (см. рис. 25.3):

$$dS = Rd\theta R\sin\theta\, d\alpha = R^2 \sin\theta d\theta d\alpha;\quad \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi;$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_1^{-1} \sin^2\theta d\cos\theta = \int_1^{-1} (\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta = \frac{4}{3}.$$

Заменим I_m^2 на $2I^2$ (I — действующее значение тока). В результате окажется, что поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R, представляющий собой мощность P_s, излученную элементом тока, не зависит от радиуса и равен:

$$\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = P_s = R_s I^2, \tag{25.41}$$

где

$$R_s = \frac{2}{3}\frac{\pi Z_в (dl)^2}{\lambda^2}. \tag{25.42}$$

Величину R_s называют *сопротивлением излучения*. Чем больше R_s, тем больше излученная мощность при том же токе. I. Сопротивление излучения прямо пропорционально квадрату длины излучателя и, что особенно важно, обратно пропорционально квадрату длины волны λ.

Так как длина волны $\lambda = v/f$, *то излученная мощность прямо пропорциональна квадрату частоты*. Если частота мала, например всего 50 Гц, то излучения практически нет. При радиочастоте излучение значительно. Например, при частоте $50 \cdot 10^6$ Гц излучение больше, чем при частоте 50 Гц, в 10^{12} раз.

Пример 225. По отрезку линейного провода длиной $dl = 3$ см протекает переменный ток $I = 0{,}2$ А. Частота тока $f = 10^9$ Гц. Найти сопротивление и мощность излучения.

Р е ш е н и е. Длина волны $\lambda = 30$ см. По формуле (25.42):

$$R_s = \frac{2}{3}\pi\frac{377\cdot 3^2}{30^2} = 7{,}8 \text{ Ом}.$$

По формуле (25.41) $P_s = R_s I^2 = 7{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}312$ Вт.

§ 25.5. Понятие об излучающем диполе. При выводе формул § 25.4 в качестве излучателя электромагнитной энергии был взят небольшой отрезок провода, по которому протекал синусоидальный ток. Но точно такие же формулы были бы получены, если бы вместо элемента тока был взят излучающий диполь. Под *излучающим диполем* понимают отрезок линейного провода с сосредоточенными на концах его емкостями в виде шаров (рис. 25.4, *а*).

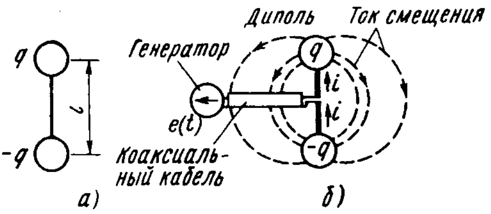


Рис. 25.4

Полагают, что длина диполя l много меньше длины волны λ и сечение провода ничтожно мало. При этих условиях распределенную емкость самого проводника в первом приближении можно не принимать во внимание и учитывать только емкости шаров.

На рис. 25.4, *б* показана схема, в которой генератор синусоидального напряжения высокой частоты через коаксиальный кабель присоединен к двум вертикально расположенным проводникам (изображены «жирными» линиями), соединенным в свою очередь с двумя шарами (шариками) диполя.

Под воздействием напряжения генератора шарики диполя периодически перезаряжаются. Положим, что заряд верхнего шарика q изменяется по закону $- Q_m \cos\omega t$, а заряд нижнего шарика — по закону $Q_m \cos\omega t$. Тогда по вертикальным проводникам при периодической перезарядке шариков будет протекать ток проводимости: $i = \frac{dq}{dt} = \omega Q_m \times \sin\omega t$.

Этот ток замыкается через диэлектрик в виде тока смещения, как показано на рис. 25.4, *б*.

Важно обратить внимание на то, что по двум вертикальным проводникам длиной $l/2$ каждый при периодической перезарядке шариков протекает ток проводимости i, т. е. два вертикальных проводника длиной $l/2$ (или $\frac{dl}{2}$) с током i, которыми соединены шарики диполя, представляют собой элемент тока $i\vec{l}$ (или $i\vec{dl}$), о котором шла речь в § 25.4.

Посредине элемента тока на рис. 25.4, *б* есть разрыв, а в элементе тока (рис. 25.1) разрыва нет. Но это не имеет существенного значения, так как разрыв может быть весьма малым по сравнению с длиной l (dl).

Таким образом, все выводы § 25. 4, сделанные по отношению к элементу тока $i\vec{dl}$, применимы и к излучателю в виде диполя, т. е. излучателю, составленному двумя периодически перезаряжающимися шариками, соединенными тонким проводником.

§ 25.6. Дополнительный анализ поля излучения. Как уже говорилось в § 25.4, в ближней зоне излучателя основную роль играют составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_R, обратно пропорциональные третьей степени расстояния рассматриваемой точки до излучателя.

Эти составляющие на 90° отстают по фазе от протекающего по проводнику тока или, другими словами, по фазе совпадают с зарядом одного из шаров излучающего диполя.

Из предыдущего [см. формулы (19.74), (19.75)] известно, что напряженность электрического поля, созданного диполем, заряды которого неизменны во времени, также обратно пропорциональна третьей степени расстояния рассматриваемой точки до центра диполя.

Следовательно, для определения мгновенного значения напряженности электрического поля излучающего диполя в ближней зоне практически можно пользоваться формулами, вытекающими из закона Кулона. В свою очередь, напряженность магнитного поля в ближней зоне излучателя [см. формулу (25.37)] обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока и по фазе совпадает с током.

Из закона Био—Савара—Лапласа [см. формулу (21.36)] следует, что напряженность магнитного поля, создаваемого элементом постоянного тока, также обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока.

На основании этого можно сделать вывод, что в ближней зоне (при $R \ll \lambda$) для определения мгновенного значения напряженности магнитного поля практически можно пользоваться формулой Био — Савара—Лапласа. Применимость формул, описывающих статические поля, для подсчета мгновенных значений E и H переменных полей в ближней зоне (при $R \ll \lambda$), объясняется тем, что в ближней зоне можно пренебречь запаздыванием.

Границы ближней зоны зависят от частоты. Так, например, при $f = 50$ Гц $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м; при $f = 10^{10}$ Гц $\lambda = 3$ см. Следовательно. при частоте 50 Гц законами Кулона и Био—Савара—Лапласа практически можно пользоваться при любом расстоянии точки до элемента тока или диполя. Совершенно иная картина будет при частоте 10^{10} Гц. В этом случае границы ближней зоны удалены от излучателя всего на доли сантиметра и все пространство вокруг него следует рассматривать как дальнюю зону. В дальней зоне «кулонова» составляющая напряженности электрического поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей E, а «био—саварова» составляющая напряженности магнитного поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей H.

В ближней зоне поток вектора Пойнтинга имеет две составляющие: первая изменяется во времени по закону $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$; вторая — по закону $\sin^2 \omega t$ или $\cos^2 \omega t$.

При подсчете потока вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R в ближней зоне за период переменного тока оказывается, что поток от первой составляющей равен нулю, поскольку среднее за период значение функции $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$ равно нулю; поток от второй составляющей отличен от нуля. Физически это означает, что в ближней зоне происходит два качественно различных в энергетическом отношении процесса.

Первый — это процесс периодического обмена энергией между источником энергии, к которому присоединен излучатель, и ближней зоной. Энергия то забирается от источника и накапливается в электромагнитном поле ближней зоной, то отдается обратно источнику. Этот процесс характерен для «кулонова» и «био—саварова» полей ближней зоны.

Второй — это процесс излучения энергии, характеризующий волновой процесс в ближней зоне. Излученная энергия составляет от-

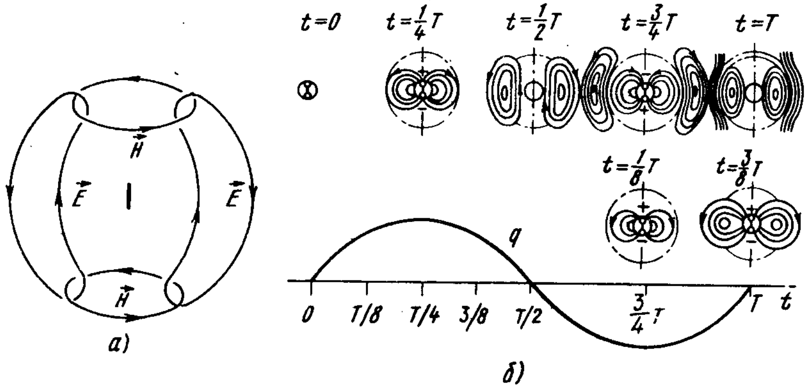


Рис. 25.5

носительно небольшую величину по сравнению с энергией, периодически накапливаемой в электромагнитном поле ближней зоны и затем отдаваемой источнику питания.

От излучателя в пространство распространяются электромагнитные волны*. Эти волны для фиксированного момента времени схематически можно представить рис. 25.5, *а*. На нем линии E образуют замкнутые фигуры, лежащие в меридиональных плоскостях. Линии E охвачены линиями H, которые представляют собой окружности с центром на оси элемента тока. Чтобы не загромождать рис. 25.5, *а*, на нем изображены всего две линии E и две линии H.

Линии напряженности электрического поля в меридиональной плоскости для волновой зоны излучателя при различных моментах времени представлены на рис. 25.5, *б*, где изображена также кривая изме-

* Существование электромагнитных волн экспериментально было доказано Г. Герцем в 1887—1888 гг. Справедливость электромагнитной теории света была подтверждена опытами П. Н. Лебедева в 1895 г., который измерил световое давление, теоретически предсказанное Д. Максвеллом.

А. С. Поповым 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества был прочитан доклад об успешно проведенных опытах по приему и передаче радиосигналов. Поэтому 7 мая отмечают как День радио.

нения заряда излучающего диполя в функции времени. Чем больше по абсолютной величине становятся заряды диполя, тем большее количество линий E начинается или соответственно оканчивается на них.

По мере распространения электромагнитной волны в окружающее пространство форма линий E непрерывно меняется. Когда заряды диполя по абсолютной величине начинают уменьшаться, начинает уменьшаться и число исходящих из них линий E. При этом образуются замкнутые на себя линии E. Пакет замкнутых на себя линий E сцеплен с пронизывающими этот пакет линиями H (см. рис. 25.5, *а*). В следующий полупериод, когда заряды шаров меняют знаки на противоположные, образуется аналогичный пакет замкнутых на себя линий E, отличающийся от предыдущего лишь направлением вихря E.

§ 25.7. Расчет поля реальных излучателей. Практически в качестве излучателей используют антенны. Простейшая антенна представляет собой отрезок провода длиной l, расположенный вертикально по отношению к поверхности земли (рис. 25.6, *а*). Генератор высокой частоты включают между антенной и землей. За счет наличия распределенных емкостей антенны и проходящих через них токов смещения, ток по высоте антенны меняется по амплитуде и фазе (см. эпюру изменения амплитуд на рис. 25.6, *а*). Антенна обладает высокой способностью к излучению вследствие того, что создаваемые ею электрическое и магнитное поля распределены в одной и той же области пространства, окружающего антенну (см. рис. 25.6, *а*).

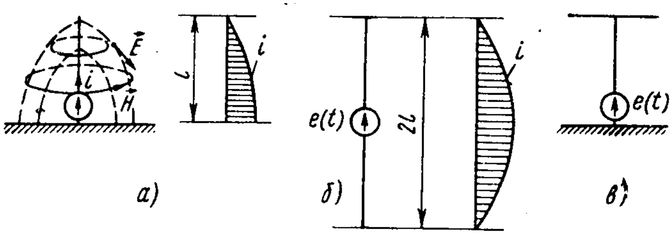


Рис. 25.6

Влияние земли на поле учитывают, вводя в расчет зеркальное изображение антенны (полагая, что земля является идеальным проводником). При этом длина антенны оказывается равной $2l$, а эпюра тока дополняется второй половиной (рис. 25.6, *б*)*. Для расчета поля, создаваемого антенной, ее заменяют совокупностью малых отрезков длиной dl, на каждом из которых ток принимают неизменным по амплитуде и фазе. Тогда напряженность поля в произвольной точке пространства можно найти как геометрическую сумму напряженностей, создаваемых всеми малыми отрезками антенны.

Для увеличения емкости антенны, а следовательно, и проходящего по ней тока при том же напряжении генератора антенну часто дополняют горизонтальным участком (рис. 25.6, *в*).

* Мощность, излученная в пространство над землей таким излучателем, равна половине мощности излучателя удвоенной длины с током i.

§ 25.8. Теорема взаимности для э. д. с., наведенных излученным полем. Положим, что в дальней зоне излучателя длиной $\vec{dl_1}$ с током $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ — см. рис. 25.7 — на расстоянии R от него находится элемент $\vec{dl_2}$ приемной антенны [небольшой кусок провода ($dl_2 \ll R$)], расположенный по направлению напряженности поля $\vec{E}_{\theta 1}$, создаваемой элементом $i\,\vec{dl_1}$. Элементы dl_1, dl_2 и радиус R находятся в одной меридиональной плоскости.

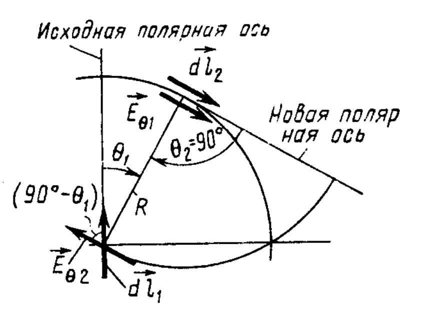


Рис. 25.7

Все пространство вокруг излучателя однородно и изотропно и не содержит сред с нелинейными свойствами.

В элементе $\vec{dl_2}$ наводится э. д. с. $e_2 = \vec{E}_{\theta 1}\vec{dl}_2 = E_{\theta 1} dl_2 \cos 0 = E_{\theta 1} dl_2$. Используя формулу (25.39), находим

$$e_2 = \frac{Z_в I_m dl_1\, dl_2 \sin\theta_1}{2R\lambda} \times$$

$$\times \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right). \qquad (a)$$

После этого излучателем сделаем элемент $\vec{dl_2}$, пропустив по нему ток i, и определим э. д. с. e_1, наведенную излученным полем в отрезке $\vec{dl_1}$. Для этого воспользуемся новой системой координат, совместим центр ее с серединой отрезка $\vec{dl_2}$ и направив полярную ось по $\vec{dl_2}$. Отрезки dl_1, dl_2 и радиус R, как и ранее, будут находиться в одной меридиональной плоскости. Так как угол между радиусом R и отрезком dl_2 равен 90°, а $\vec{E}_{\theta 2}$ перпендикулярна радиусу R, то угол $\theta_2 = 90°$. При этом угол между $\vec{E}_{\theta 2}$ и $\vec{dl_1}$ составляет $90° - \theta_1$. Э. д. с., наведенная в элементе $\vec{dl_1}$ током i в элементе $\vec{dl_2}$

$$e_1 = \vec{E}_{\theta 2}\,\vec{dl_1} = E_{\theta 2} dl_1 \cos\ (90° - \theta_1) = \frac{Z_в I_m dl_2\, dl_1 \sin 90°}{2R\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right). \quad (б)$$

Сопоставляя (а) и (б), устанавливаем, что $e_1 = e_2$. Это положение принято называть *теоремой взаимности для э. д. с., наведенных излученным полем*. Теорему используют при расчете излучающих и приемных антенн. Убедимся в том, что эта теорема имеет место и в том случае, когда элементы $\vec{dl_2}$ и $\vec{E}_{\theta 1}$ по направлению не совпадают. С этой целью повернем отрезок $\vec{dl_2}$ в пространстве на угол $\Delta\alpha$ сферической системы так, что средняя точка этого отрезка останется на прежнем месте. В этом случае в правой части формулы (а) вместо dl_2 будет проекция повернутого отрезка $\vec{dl_2}$ на направление $\vec{E}_{\theta 1}$, т. е. $dl_2 \cos\Delta\alpha$. Если теперь пропустить ток i по повернутому на угол $\Delta\alpha$ отрезку $\vec{dl_2}$, то как и на рис. 25.7 вектор $\vec{E}_{\theta 2}$ будет по-прежнему перпендикулярен радиусу R, но $\vec{E}_{\theta 2}$ на угол $\Delta\alpha$ повернется по отношению к своему положению, показанному на рис. 25.7. В соответствии с этим в— правой части формулы (б) для э. д. с: e_1 появится множитель $\cos\Delta\alpha$, т. е и в этом случае $e_1 = e_2$. Аналогичными рассуждениями убедимся в равенстве $e_1 = e_2$, если отрезок повернем около его средней точки на угол $\Delta\theta$, а в более общем случае и на углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\theta$.

В теории поля пользуются понятием взаимного сопротивления двух излучателей. Положим, что первый элемент dl_1 на рис. 25.7 является излучающей антенной, а второй — приемной. Напряжение $\dot U_2$ на элементе dl_2, отсчитываемое в направлении $\vec{dl_2}$, пропорционально току $\dot I_1$, в элементе $\vec{dl_1}$, поэтому $\dot U_2 = Z_{21}\dot I_1$.

Если второй элемент будет излучающей антенной с током $\dot I_2$, а первый — приемной, то напряжение отсчитываемое в направлении $\vec{dl_1}$ равно $\dot U_1 = Z_{12}\dot I_2$. На основании теоремы взаимности $Z_{12} = Z_{21}$ и для расположения излучателей в соответствии с рис. 25.7 взаимные сопротивления

$$Z_{12} = Z_{21} = -j\,\frac{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\,dl_1\,dl_2}{2R\lambda}\,e^{-j\frac{\omega R}{v}}. \tag{в}$$

§ 25.9. Излучение магнитного диполя и принцип двойственности. В § 19.11 и § 25.5 шла речь об электрическом диполе, обладающем электрическим моментом $\vec p_э = q_э\vec l$. В теории поля пользуются также понятием магнитного диполя. Магнитный диполь образован двумя магнитными зарядами $q_м$ и $-q_м$, расположенными на расстоянии l. Диполь обладает магнитным моментом $\vec p_м = q_м\vec l$ (рис. 25.8, *а*).

Из § 14.24 известно, что виток (рамка) с током i, охватывающим площадь S, также обладает магнитным моментом $\vec p_м = i\vec S$ (рис. 25.8, *б*). Магнитный диполь можно рассматривать как расчетный эквивалент витка с током, если равны их магнитные моменты, т. е. если $q_м\vec l = i\vec S$. Изменение тока в рамке соответствует изменению магнитных зарядов диполя по времени и протеканию между ними «магнитного тока смещения». Излучение энергии рамкой с током в расчетном смысле можно представить как излучение магнитного диполя.

Если обратиться к уравнениям Максвелла $\operatorname{rot}\vec H = \varepsilon_a\dfrac{\partial\vec E}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\vec E = -\mu_a\dfrac{\partial\vec H}{\partial t}$, то нетрудно заметить, что первое уравнение получается из второго, а второе из первого, если заменить $\vec H$ на $\vec E$, а ε_a на $-\mu_a$. Это свойство уравнений Максвелла называют принципом *двойственности*. Его применяют для решения задач электродинамики, двойственных уже решенным.

Так, имея решение для поля, создаваемого электрическим диполем, получают решение для поля, создаваемого магнитным диполем, т. е. рамкой с синусоидально изменяющимся током (считая, что оси $\vec R$, $\vec\alpha$, $\vec\theta$ расположены в соответствии с рис. 25.1). Так как в случае электрического диполя $i = \dfrac{dq}{dt}$, то при $i = I_m\sin\omega t$: $\dot I_m = j\omega\dot q_m$, а $\dot I_m dl = j\omega q_m dl = j\omega\dot p$.

Подставив в (25.38) $j\omega p$ вместо $\dot I_m dl$, запишем формулу для напряженности магнитного поля в дальней зоне через электрический момент $\dot p$:

$$\dot H_\alpha = -\frac{\omega\dot p\sin\theta\, e^{-j\frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda}.$$

В соответствии с принципом двойственности в этой формуле заменим $\dot H_\alpha$ на $\dot E_\alpha$ и $\dot p$ на $\dot p_м' = -\mu_a\dot I_m S$. Получим формулы для комплексов напряженности электрического поля в дальней зоне магнитного диполя

$$\dot E_\alpha = \frac{\omega\mu_a\dot I_m S\sin\theta\, e^{-j\frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda};$$

и для комплекса напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_\theta = -\frac{\omega\mu_a \dot{I}_m S \sin\theta e^{-j\frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda Z_в}.$$

Знаки правых частей формул для $\dot{E}_\alpha$ и $\dot{H}_\theta$ соответствуют направлению вектора Пойтинга вдоль радиуса от излучателя.

§ 25.10. Переход плоской электромагнитной волны из одной среды в другую. Рассмотрим условия перехода плоской синусоидально изменяющейся электромагнитной волны из первой среды с волновым сопротивлением $Z_{в1}$ во вторую среду с волновым сопротивлением $Z_{в2}$.

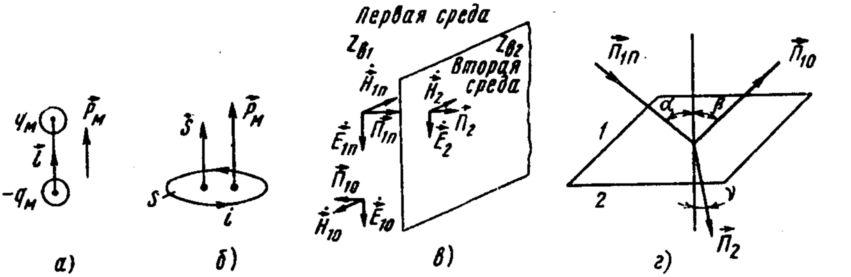


Рис. 25.8

Примем, что волна падает перпендикулярно границе раздела сред (рис. 25.8, *в*). Волна частично пройдет во вторую среду, частично отразится.

В первой среде будут падающая (индекс «п») и отраженная (индекс «о») волны, во второй — только падающая (поэтому индекс «п» у нее не будем ставить). Падающую во второй среде волну называют также преломленной.

Для удобства чтения рис. 25.8, *в* векторы, характеризующие падающую и отраженную волны в первой среде, смещены по вертикали и несколько отодвинуты от границы раздела сред. На границе раздела сред должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности электрического поля и тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля:

$$\dot{E}_{1п} + \dot{E}_{1о} = \dot{E}_2; \qquad (25.43)$$

$$\dot{H}_{1п} + \dot{H}_{1о} = \dot{H}_2. \qquad (25.44)$$

Уравнения (25.43) и (25.44) полностью тождественны уравнениям, которыми связаны напряжения и токи падающей, отраженной и преломленной волн при переходе волны с одной линии с распределенными параметрами на другую (см. § 12.6).

Комплекс напряженности электрического поля $\dot{E}_{1п}$ равен комплексу напряженности магнитного поля $\dot{H}_{1п}$, умноженному на $Z_{в1}$: $\dot{E}_{1п} = \dot{H}_{1п} Z_{в1}$.

Для отраженной волны в соответствии с изменением направления движения энергии на противоположное: $\dot{E}_{10} = -\dot{H}_{10}Z_{в1}$. Для преломленной волны $\dot{E}_2 = \dot{H}_2 Z_{в2}$.

Из уравнений (25.43) и (25.44) с учетом предыдущих строчек получим:

$$\dot{E}_{10} = \frac{Z_{в2} - Z_{в1}}{Z_{в2} + Z_{в1}} \dot{E}_{1п}; \tag{25.45}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{2Z_{в1}}{Z_{в1} + Z_{в2}} \dot{H}_{1п}; \tag{25.46}$$

$$\dot{H}_{10} = \frac{Z_{в1} - Z_{в2}}{Z_{в1} + Z_{в2}} \dot{H}_{1п}. \tag{25.47}$$

Проанализируем полученные результаты. Значения $\dot{E}_{10}$, $\dot{H}_{10}$ и $\dot{E}_2$ зависят от соотношения между волновыми сопротивлениями обеих сред. Наибольший практический интерес представляет случай, когда волна падает из воздуха на поверхность металла. В этом случае первой средой является воздух, а второй — металл. Так как волновое сопротивление проводящей среды зависит не только от ее проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты [см. формулу (23.12)], то для определенности положим, что проводящей средой является медь, а частота $f = 10^8$ Гц. Сопоставим значения волновых сопротивлений для диэлектрика и для металла (см. формулы для $Z_в$ на стр. 165 и 149). Для воздуха $Z_{в1} = 377$ Ом. Для меди ($\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$) при $f = 10^8$ Гц, $Z_{в2} = 0{,}00357 e^{j45^\circ}$ Ом. Если подставить значения $Z_{в1}$ и $Z_{в2}$ в (25.47), то получим $\dot{E}_{10} \approx -\dot{E}_{1п}$; $\dot{H}_{10} \approx \dot{H}_{1п}$, т. е. от поверхности металла электромагнитная волна почти полностью отражается с переменой знака у напряженности электрического поля. Та часть волны, которая все же проникнет в металл, быстро в нем затухнет. Если бы проводящая среда имела γ, стремящуюся к бесконечности, то тогда она являлась бы идеальным зеркалом для электромагнитной волны.

Явления отражения электромагнитных волн от проводящих сред лежит в основе радиолокации.

В более общем случае электромагнитная волна, распространяясь из среды *1* в среду *2*, направлена не перпендикулярно границе раздела сред (рис. 25.8, *г*). Полагаем, что среды 1 и 2 — диэлектрики. В среде 1 $Z_{в1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}$; $p_1 = j\omega \times \sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$, в среде 2 $Z_{в2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}$; $p_2 = j\omega\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$. Векторы Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн ($\vec{\Pi}_{1п}$, $\vec{\Pi}_{10}$, $\vec{\Pi}_2$) находятся в одной плоскости. Их углы с вертикалью к границе раздела обозначены на рис. 25.8, г соответственно α, β, ν. Угол падения α равен углу отражения β,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\nu} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a2}\,\mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a1}\,\mu_{a1}}}. \tag{а}$$

Используем обозначения § 25.8 и рассмотрим два случая. 1. Когда вектор $\vec{E}_{1п}$ перпендикулярен плоскости падения (т. е. параллелен границе раздела сред), из граничных условий следует:

$$\dot{E}_{10} = \dot{E}_{1п}\frac{Z_{в2}\cos\alpha - Z_{в1}\cos\nu}{Z_{в2}\cos\alpha + Z_{в1}\cos\nu}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_{1п}\frac{2Z_{в2}\cos\alpha}{Z_{в2}\cos\alpha + Z_{в1}\cos\nu}. \tag{б}$$

2. Когда вектор $\vec{E}_{1п}$ параллелен плоскости падения (а вектор $\vec{H}_{1п}$ перпендикулярен ей):

$$\dot{E}_{10}=\dot{E}_{1п}\frac{Z_{в2}\cos\nu-Z_{в1}\cos\alpha}{Z_{в1}\cos\alpha+Z_{в2}\cos\nu}\ ;\quad \dot{E}_2=\dot{E}_{1п}\frac{2Z_{в2}\cos\alpha}{Z_{в1}\cos\alpha+Z_{в2}\cos\nu}. \qquad (в)$$

Соотношения (б) и (в) называют *формулами Френеля*. Если окажется, что $\sin\nu=\sin\alpha\sqrt{\frac{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}}>1$ — наступит *полное отражение от границы* (преломленная волна отсутствует). Этот режим используется, например, в оптических волноводах. Если $\alpha+\nu=90°$ — возникает полное преломление, когда отраженная волна отсутствует.

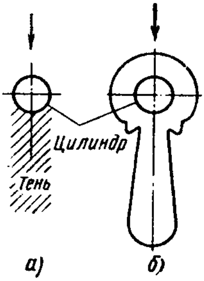


Рис. 25.9

В заключение рассмотрим явление дифракции. *Дифракцией* называют явление отражения и преломления электромагнитных волн от проводящего или диэлектрического тела, а также изменение структуры и направления волн при прохождении их через отверстие (щель) в каком-либо теле, например, в пластинке, когда размеры тела или щели соизмеримы с длиной электромагнитной волны.

Качественно рассмотрим, как влияет на поле плоской волны помещенный в это поле длинный цилиндр радиуса a, полагая, что ось цилиндра расположена перпендикулярно вектору Пойнтинга падающей волны, а ее вектор $\vec{E}$ параллелен оси цилиндра.

Рассмотрим три характерных случая. 1. Если длина волны $\lambda\ll a$, то действуют законы геометрической оптики и за цилиндром будет область тени — рис. 25.9, *а*. 2. Если вне и внутри цилиндра $\lambda\gg a$,то можно пренебречь запаздыванием и тогда поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ внутри и вне цилиндра определяются в условиях, близких к статическим. 3. Если $\lambda/a\approx 1$, а это случай наиболее типичный для дифракционных задач, то в области за цилиндром, где на рис. 25.9, *а* была тень, появляется интенсивное поле. На рис. 25, 9,*б* изображена эпюра для напряженности H рассеянного поля, когда проводимость γ цилиндра стремится к бесконечности. Физически интенсивное поле вместо тени получается за счет того, что наводимые в верхней части проводящего цилиндра токи затекают в нижнюю его часть и там служат излучателем (вторичным источником поля). Наличие мелких углублений на диаграмме объясняется интерференцией волн.

§ 25.11. Устранение отражения электромагнитных волн. Прием, который используют для устранения отражения электромагнитных волн от границы раздела двух диэлектриков и от границы диэлектрик—поверхность хорошо проводящего тела, сходен с тем, который применяют в линиях с распределенными параметрами (четвертьволновый трансформатор, § 11.24) [19].

а. *Устранение отражения от границы раздела двух диэлектриков.* Пусть плоская электромагнитная волна распространяется из диэлектрика с ε_{a1} и μ_{a1} и волновым сопротивлением $Z_{в1}=\sqrt{\mu_{a1}/\varepsilon_{a1}}$ (например, воздуха) в диэлектрик с ε_{a2}, μ_{a2} и волновым сопротивлением $Z_{в2}=\sqrt{\mu_{a2}/\varepsilon_{a2}}$. Для устранения отражения от границы раздела между первым и вторым диэлектриками помещают слой третьего диэлектрика (рис. 25.10, *а*) с параметрами ε_{a3}, μ_{a3} толщиной в четверть длины волны $\frac{\lambda_3}{4}=\frac{1}{4f\sqrt{\varepsilon_{a3}\mu_{a3}}}$ и волновым сопротивлением $Z_{в3}$, равным средне геометрическому из $Z_{в1}$, и $Z_{в2}$ (см. § 11.24), т. е. $Z_{в3}=\sqrt[4]{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}$. Цепной аналог изображен на рис. 25.10, *б*. Входное сопротивление четвертьволновой линии равно $Z_{в1}$, поэтому от границы между *1* и *3* средами волна не отражается. Стоячие волны имеются в 3 среде.

6. Устранение отражения от границы диэлектрик—проводящая среда. Плоскую поверхность хорошо проводящего тела ($\gamma \to \infty$, $Z_{в.пт} \to 0$, см. § 25.9), от которой надо устранить отражение (рис. 25.10, *в*), отделяют слоем воздуха или какого-либо другого диэлектрика толщиной $\lambda/4$ (волновое сопротивление воздуха $Z_{вв} = 377$ Ом) от проводящей пластины толщиной d и удельным сопротивлением ρ. Сопротивление единицы длины и единицы ширины этой пластины $Z_{вп}$

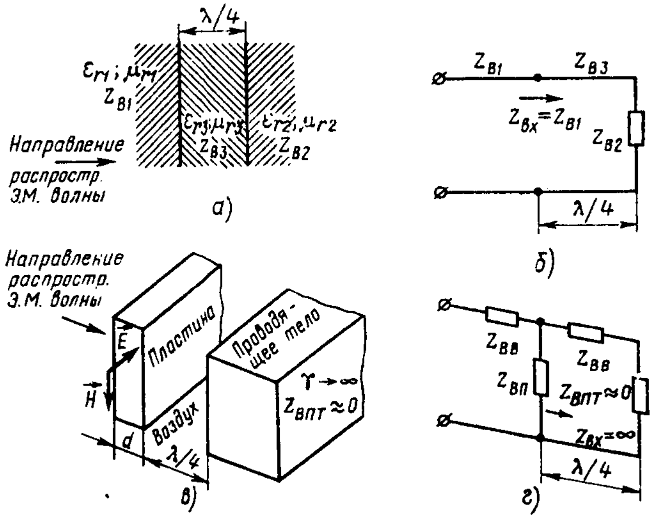


Рис. 25.10

в направлении вектора $\vec{E}$ волны $\frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l}{dl} = \frac{\rho}{d}$ берут равным волновому сопротивлению среды (воздуха), откуда поступает электромагнитная волна. Таким образом,

$$Z_{вв} = Z_{вп} = \rho/d = 377 \text{ Ом}.$$

Цепным аналогом полученного устройства является схема рис. 25.10, *г*. Входное сопротивление четвертьволновой линии, короткозамкнутой на конце, $Z_{вх} = jZ_{вв}\,\mathrm{tg}\,90° = \infty$ (см. § 11.19). В воздухе, откуда поступает электромагнитная волна, отраженная волна отсутствует, так как линия с волновым сопротивлением $Z_{вв}$ согласована с линией, имеющей волновое сопротивление $Z_{вп}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как связан исток вектора $\vec{A}$ с потенциалом φ? 2. Покажите, что условие, выражающее собой нормировку Лоренца, является иной формой записи уравнения непрерывности. 3. Почему первое слагаемое правой части формулы $\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt} - \mathrm{grad}\,\varphi$ называют вихревой, а второе — потенциальной составляющей? 4. Запишите уравнения, которым удовлетворяют $\vec{A}$ и φ в переменном поле. 5. Покажите, что функция $\varphi = \frac{\rho\,(t - R/v)}{4\pi\varepsilon_a R}$ является решением уравнения Даламбера $\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$. 6. Почему $\vec{A}$ и φ называют запаздывающими потенциалами? Зависит ли запаздывание по фазе (измеряемое в радианах) от частоты? 7. Качественно поясните ход решения задачи об излучении энергии элементом тока (электрическим диполем). 8. Исходя из формы фазового фронта электромагнитной волны дайте определение плоской, цилиндрической и сферической

волнам. Покажите, что на большом удалении от излучателя сферическая волна становится плоской. 9. Докажите, что в отношении излучения электромагнитной энергии в окружающее пространство излучающий диполь эквивалентен элементу тока длиной $\vec{dl}$ с током $I_m \sin \omega t$. 10. Дайте определение магнитному излучающему диполю и покажите, что ему эквивалентен виток с синусоидальным током. 11. От каких факторов зависит излученная мощность электрическим и магнитным диполями? 12. Правильно ли записан критерий дальней зоны: $R \gg v/\omega$? 13. С какого расстояния начинается дальняя зона у излучателя, работающего на частоте 300 МГц? Какой физический смысл может быть придан сопротивлению R_S? 15. В чем различие физических процессов в ближней и дальней зонах? 16. Какова последовательность расчета напряженности поля от излучающей антенны конечных размеров, расположенной перпендикулярно поверхности земли? 17. Чем объяснить малую способность к излучению электромагнитной энергии в окружающее пространство у колебательного контура (образованного индуктивной катушкой и конденсатором) по сравнению с антенной? 18. Поясните, какое свойство уравнений Максвелла называют свойством перестановочной двойственности. 19. Выведите формулу для мощности, излученной магнитным диполем (ответ $P_S = \frac{8}{3}\pi^3 Z_в \frac{(SI)^2}{\lambda^4}$). 20. Виток с синусоидальным током частоты ω вращается с угловой скоростью $0{,}5\omega$ вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Скажется ли вращение витка с током на излучение электромагнитной энергии? 21. При каком условии наступает полное преломление? 22. Дайте определение дифракции. Качественно поясните, почему, когда длина волны λ соизмерима с линейными размерами проводящего тела, то в той области, где должна бы быть тень, может возникнуть интенсивное поле? 23. Объясните, почему устройство предназначенное для устранения отражения плоской электромагнитной волны частоты f от проводящей (диэлектрической) поверхности, не будет выполнять свои функции, если изменится частота f. 24. Решите задачи 22.33; 22.35; 22.36; 22.44.

Глава двадцать шестая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

§ 26.1. Понятие о волноводах и объемных резонаторах. Канализация энергии очень высокой частоты по обычным двухпроводным линиям передачи практически невозможна ввиду того, что: 1) провода линии играют роль антенн и, вместо того чтобы передавать энергию потребителю, излучают ее в пространство; 2) активное сопротивление проводов линии при сверхвысоких частотах в силу резко выраженного поверхностного эффекта оказывается настолько большим, что весьма значительная часть энергии затрачивается на нагрев проводов.

Применение коаксиального кабеля (коаксиальной линии, см. рис. 22.4) для канализации энергии весьма высокой частоты экономически также невыгодно. Хотя в этом случае энергия в окружающее пространство и не излучается (так как оболочка кабеля одновременно является и экраном), однако в кабеле велики потери энергии в жиле и диэлектрических шайбах (например, из полистирола или полиэтилена), с помощью которых жила крепится внутри кабеля. Практически коаксиальный кабель применяют в диапазоне частот от нуля до нескольких мегагерц и используют в силовых, телефонных и телевизионных устройствах.

При частоте больше 10^9 Гц энергию передают по волноводам. *Волновод* представляет собой полую трубу прямоугольного или круглого сечения.

На рис. 26.1, *а* изображен прямоугольный волновод. Размеры a и b находятся в определенном соотношении с длиной волны. Так, например, при длине волны $\lambda = 10$ см берут $b = 3{,}4$ см и $a = 7{,}2$ см.

Энергия внутрь волновода обычно доставляется с помощью небольшого стерженька, помещенного в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (см. рис. 26.1, *а*), или с помощью петли с током, помещаемой в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 26.1, *б*).

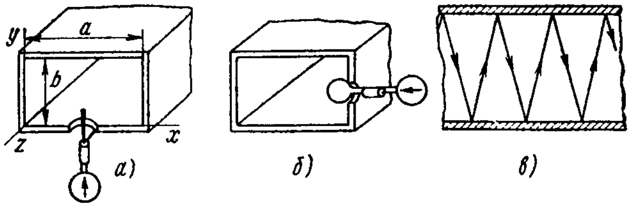


Рис. 26.1

Иногда волновод возбуждают, соединяя его через щель или диафрагму с другим волноводом или резонатором. Отвод энергии с другого конца волновода производят с помощью стерженька, петли или через щель.

Энергия передается вдоль волновода, отражаясь от его стенок (рис. 26.1, *в*). Стенки волновода являются как бы направляющими для потока энергии. Небольшая часть энергии проникает в стенки волновода и выделяется в них в виде теплоты. Для уменьшения потерь энергии в стенках волновода внутреннюю поверхность труб полируют и покрывают слоем хорошо проводящего металла, например серебра.

В качестве резонансных контуров при не очень высоких частотах применяют контуры с сосредоточенными индуктивностями и емкостями или отрезки линий с распределенными параметрами. При сверхвысоких частотах (при длине волн сантиметрового диапазона) контуры с сосредоточенными параметрами L и C и отрезки линий с распределенными параметрами оказываются малопригодными, так как они излучают электромагнитную энергию и вследствие этого, а также в силу резко выраженного поверхностного эффекта обладают малой добротностью.

При сверхвысоких частотах в качестве устройства, выполняющего функции резонансного контура с высокой добротностью, применяют объемный резонатор.

Объемный резонатор обычно представляет собой полый прямоугольный параллелепипед, стенки которого выполняют из хорошо проводящего материала. Длины его трех ребер находятся, как и у волновода, в определенном соотношении с длиной волны и составляют несколько сантиметров. Возбуждают его так же, как и волновод, например, с помощью стерженька или петли с током. В полости объемного резонатора возникают стоячие электромагнитные волны по осям x, y, z, так как со всех сторон полость ограничена хорошо проводящими стенками.

Качественно переход от обычного колебательного контура L, C к прямоугольному объемному резонатору иллюстрируют рис. 26.2, *а*–26.2, *г*. На рис. 26.2, *а* изображены две пластины конденсатора, соединенные двумя индуктивностями, на рис. 26.2, *б* индуктивности заменены на две полоски, на рис. 26.2, *в* — на четыре полоски, на рис. 26.2, *г* полоски заменены проводящими стенками.

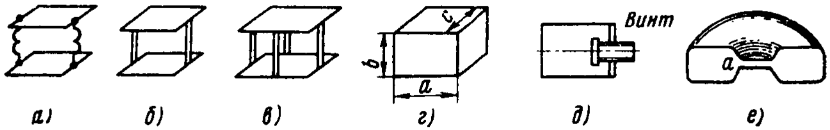


Рис. 26.2

Если через a, b, c обозначить длины трех ребер резонатора в направлении осей x, y, z (рис. 26.2, *г*), а через m, n, p — характеристические числа, которые могут принимать значения 0, 1, 2 и т. д., то собственная частота объемного резонатора:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}.$$

Так, при $m = n = 1$, $p = 0$, $a = b = c = 5$ см, $\omega = 2{,}66 \times 10^{10}$ рад/с, $f = 4{,}23 \cdot 10^9$ Гц.

Частота колебаний возбудителя, т. е. частота тока в стерженьке или петле, должна равняться собственной частоте резонатора. Для настройки резонатора изменяют один из его размеров, например с помощью поршня (винта) – рис. 26.2, *д*.

При колебательном процессе в резонаторе энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и обратно. В прямоугольном и цилиндрическом резонаторах энергия каждого из полей распределена по всей полости резонатора. В других устройствах сверхвысоких частот (клистронах, магнетронах) энергии этих полей распределены преимущественно в различных областях. Так, в резонансной полости клистрона (рис. 26.2, *е*) электрическое поле сосредоточено преимущественно в узком зазоре a (как бы в плоском конденсаторе), а магнитное связано с индуктивностью, роль которой выполняет полость резонатора, примыкающая к узкому зазору.

Под *добротностью резонатора* понимают $Q = (\omega_0 W_0)/P$. Здесь W_0— энергия электромагнитного поля, запасенная в резонаторе; P — активная мощность, затрачиваемая на потери от вихревых токов в стенках резонатора, на потери через щель в виде излучения, а если диэлектрик, имеющийся в полости резонатора, не идеальный, то и на потери в диэлектрике. Добротность Q достигает значения 10^4 и более.

§ 26.2. Типы волн в волноводе. Решение для H-волны. Процесс распространения электромагнитных волн в полости прямоугольного волновода будем рассматривать, полагая, что его стенки выполнены из сверхпроводящего материала ($\gamma \to \infty$). При этом условии напряженность электрического поля на стенках волновода будет равна нулю (плотность тока на стенках волновода $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$ конечна, поэтому при $\gamma \to \infty$ $E \to 0$).

Полость волновода заполнена диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ε_a. Оси координат расположим в соответствии с рис. 26.3, *а*. Размеры полости волновода в направлении оси x обозначим буквой a, а в направлении оси y — буквой b. Длина волновода в направлении оси z неограничена. Электромагнитное поле в волноводе описывается уравнением (24.3): $\nabla^2\vec{H} + \omega^2\varepsilon_a\mu_a\vec{H} = 0$ или аналогичным ему уравнением: $\nabla^2\vec{E} + \omega^2\varepsilon_a\mu_a\vec{E} = 0$.

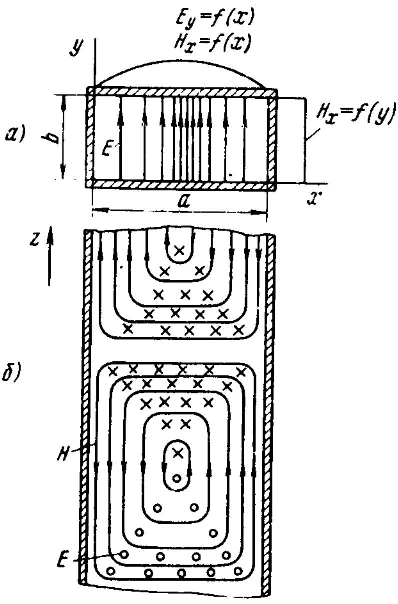


Рис. 26.3

Распространяющиеся в волноводе электромагнитные волны являются волнами, бегущими вдоль оси волновода (оси z) и стоячими в двух остальных направлениях. Стоячие волны в направлениях x и y образуются вследствие многократных отражений волн от стенок волновода.

Тот факт, что волны являются бегущими вдоль оси z, в формально математическом отношении находит свое выражение в том, что каждая из составляющих волн, подобно бегущим волнам в линии с распределенными параметрами, при записи ее имеет множитель $e^{-k_p z}$, где k_p — коэффициент распространения.

Волны, распространяющиеся в волноводах, разделяют на два типа: H-волны и E-волны (рис. 26.3, *б*). H-волну называют также *поперечно-электрической* и обозначают ТЕ; E-волну — *поперечно-магнитной* и обозначают ТМ. Кроме волн ТЕ и ТМ могут быть еще волны ТЕМ. Они возникают в коаксиальном кабеле (не в волноводе). В волне ТЕМ векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Структура H-волны такова, что составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность магнитного поля, а напряженность электрического поля, расположена в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для H-волны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \vec{i}\dot{H}_x + \vec{j}\dot{H}_y + \vec{k}\dot{H}_z; \\ \dot{\vec{E}} &= \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y. \end{aligned}\right| \qquad (26.1)$$

Для E-волны имеет место обратная картина: составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность электрического поля, а векторы напряженности магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для E-волны: $\dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y + \vec{k}\dot{E}_z$; $\dot{\vec{H}} = \vec{i}\dot{H}_x + \vec{j}\dot{H}_y$.

Какой из этих типов волн возникает, зависит от условий возбуждения. Если возбуждение производить с помощью штырька по рис. 26.1, *а*, то в волноводе возникнут H-волны. При возбуждении с помощью петли с током, расположенной вблизи узкой стенки волновода в соответствии с рис. 26.1, *б* в последнем возникают также H-волны. Для E-волны штырек следует направить вдоль оси z.

Приводимые далее выкладки проделаны для H-волны, но они были бы почти такие же и для E-волны. Если подставить (26.1) в уравнение (24.3), то последнее разобьется на три уравнения для проекций. Для проекции на оси z будем иметь уравнение:

$$(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)\dot{H}_z+\omega^2\varepsilon_a\mu_a\dot{H}_z=0. \quad (26.2)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, который рассмотрен в § 19.39. С этой целью положим:

$$\dot{H}_z=XYe^{-k_p z}, \quad (26.3)$$

где X — функция только x; Y — функция только y. Множитель $e^{-k_p z}$ свидетельствует о том, что вдоль оси z движется бегущая волна.

Подставим (26.3) в (26.2):

$$Ye^{-k_p z}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+Xe^{-k_p z}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+k_p^2XYe^{-k_p z}+\omega^2\varepsilon_a\mu_a XYe^{-k_p z}=0. \quad (26.2а)$$

Обозначим

$$k_p^2+\omega^2\varepsilon_a\mu_a=k^2 \quad (26.4)$$

и разделим (26.2а) на $XYe^{-k_p z}$. Будем иметь

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+k^2=0. \quad (26.5)$$

Сумма двух функций $\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ и $\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$, из которых одна является функцией только x, а другая y, может равняться постоянному числу $-k^2$ только в том случае, если каждая из этих функций есть постоянное число.

Перейдем от частных производных к обыкновенным и положим:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=-p^2; \quad (26.5а)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}=-q^2, \quad (26.5б)$$

где p и q — некоторые постоянные числа.

Решением уравнений (26.5а) и (26.5б) являются функции $X=\dot{C}_1\times\sin(px+\varphi)$, $Y=\dot{C}_2\sin(qy+\psi)$, где $\dot{C}_1$, q и $\dot{C}_2$, ψ—постоянные интегрирования, которые найдем из граничных условий. Таким образом, в соответствии с (26.3)

$$\dot{H}_z=\dot{H}_m\sin(px+\varphi)\sin(qy+\psi)e^{-k_p z}. \quad (26.6)$$

Здесь комплексная амплитуда $\dot{H}_m=\dot{C}_1\dot{C}_2$.

Для определения значений p, q, φ, ψ обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным через проекции напряженностей на оси координат:

$$\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_x; \quad (26.7)$$

$$\frac{\partial\dot{H}}{\partial z}-\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y; \quad (26.8)$$

$$\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_z; \quad (26.9)$$

$$\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z}=-j\omega\mu_a\dot{H}_x; \quad (26.10)$$

$$\frac{\partial \dot E_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot H_y; \tag{26.11}$$

$$\frac{\partial \dot E_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_a \dot H_z. \tag{26.12}$$

В силу того что для H-волны $E_z = 0$ и поскольку волны являются бегущими вдоль оси z, то $\partial \dot E_y/\partial z = -k_p \dot E_y$, а $\partial \dot E_x/\partial z = -k_p \dot E_x$.

Из уравнений (26.10) и (26.11) следует, что

$$\left.\begin{aligned} k_p \dot E_y &= -j\omega\mu_a \dot H_x; \\ k_p \dot E_x &= j\omega\mu_a \dot H_y. \end{aligned}\right\} \tag{26.13}$$

Как уже говорилось, на внутренних поверхностях стенок волновода напряженность электрического поля равна нулю. Следовательно, $E_x = 0$ при $y = 0$ и $y = b$, а $E_y = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. Если это учесть, то из уравнений (26.13) имеем: $H_{y_{y=0}} = H_{y_{y=b}}$ и $H_{x_{x=0}} = H_{x_{x=a}} = 0$.

Так как $\partial \dot H_y/\partial z = -k_p \dot H_y$, $\partial \dot H_z/\partial z = -k_p \dot H_x$, а $H_y = 0$ при $y = 0$ и $y = b$ и $H_x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, то из (26.7) и (26.8) найдем

$$(\partial \dot H_z/\partial y)_{y=0} = 0; \quad (\partial \dot H_z/\partial y)_{y=b} = 0; \tag{26.14}$$

$$(\partial \dot H_z/\partial x)_{x=0} = 0; \quad (\partial \dot H_z/\partial x)_{x=a} = 0. \tag{26.15}$$

Уравнения (26.14), (26.15) служат для определения значений p, q, φ, ψ.

Подставив (26.6) в (26.14), найдем $\psi = \pi/2$, и $q = n\pi/b$. Из (26.15) определим $\varphi = \pi/2$ и $p = m\pi/a$, где m и n — целые числа; m равно числу полуволн электромагнитной волны, которое разместится по ширине волновода; n показывает, сколько полуволн разместится по высоте волновода. Таким образом,

$$\dot H_z = \dot H_m \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \tag{26.16}$$

Найдем теперь $\dot H_x$, $\dot H_y$ и $\dot E_x$, $\dot E_y$. Для определения $\dot E_x$ в уравнении (26.7) $\partial \dot H_y/\partial z$ заменим на $-k_p \dot H_y = -k_p \dfrac{k_p \dot E_x}{j\omega\mu_a}$. Тогда $\dfrac{\partial \dot H_z}{\partial y} + \dfrac{k_p^2 \dot E_x}{j\omega\mu_a} = j\omega\varepsilon_a \dot E_x$.

Отсюда

$$\dot E_x = -\frac{j\omega\mu_a}{k^2}\frac{\partial \dot H_z}{\partial y} = \frac{j\omega\mu_a}{k^2}\frac{n\pi}{b}\dot H_m \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}, \tag{26.17}$$

где $k^2 = k_p^2 + \omega^2\varepsilon_a\mu_a$.

Аналогично,

$$\dot H_y = \frac{k_p \dot E_x}{j\omega\mu_a} = \frac{k_p}{k^2}\frac{n\pi}{b}\dot H_m \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \tag{26.18}$$

$$\dot E_y = \frac{j\omega\mu_a}{k^2}\frac{\partial \dot H_z}{\partial x} = -j\frac{\omega\mu_a}{k^2}\frac{m\pi}{a}\dot H_m \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \tag{26.19}$$

$$\dot H_x = \frac{-k_p}{j\omega\mu_a}\dot E_y = \frac{k_p}{k^2}\frac{m\pi}{a}\dot H_m \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \tag{26.20}$$

Проанализируем полученные результаты. Коэффициент k_p играет роль постоянной распространения электромагнитной волны вдоль оси z. Если k_p будет действительным числом, то волна при своем продвижении по волноводу будет затухать. Затухание будет отсутствовать, если k_p — мнимое число.

Для того чтобы связать k_p с геометрическими размерами волновода a и b и числами m и n, подставим (26.16) в (26.2). Получим $k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Но $k^2 = k_p^2 + \omega^2\varepsilon_a\mu_a$. Поэтому

$$(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 = k_p^2 + \omega^2\varepsilon_a\mu_a; \quad k_p = 0$$

при

$$\omega = \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \qquad (26.21)$$

Величина k_p является мнимым числом при $\omega > \omega_0$. Таким образом по волноводу с заданными размерами могут распространяться электромагнитные волны, если частота волны $\omega > \omega_0$ (а длина волны $\lambda < \lambda_c$, где $\lambda_c = v_c/f$ — длина волны в свободном пространстве; v_c — скорость света).

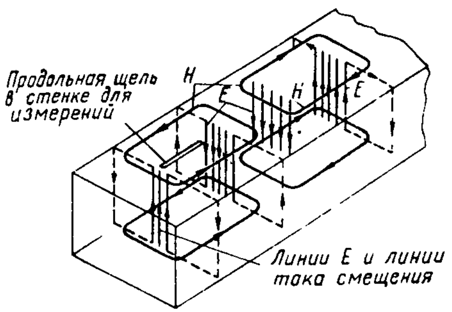


Рис. 26.4

Числа m и n могут принимать любые целые значения, но не могут одновременно равняться нулю, так как тогда все составляющие E и H отсутствовали бы. Наибольшее практическое значение имеет основная волна для которой $m = 1$ и $n = 0$. Для нее по ширине волновода укладывается одна полуволна, а по его высоте интенсивность поля не изменится. При $a = 7{,}2$ см. По формуле (26.21) найдем $\omega_0 \approx 13{,}1 \cdot 10^9$ рад/с. Таким образом, по волноводу может передаваться энергия лишь весьма высокой частоты. Амплитуда максимальной напряженности поля E должна быть меньше пробивной напряженности поля, иначе произойдет пробой диэлектрика (воздуха, газа или какого-либо другого диэлектрика). При любом способе возбуждения волновода вблизи возбудителя возникает несколько различных типов волн. Чтобы на некотором расстоянии от излучателя избавиться от высших типов волн размеры a и b выбирают, исходя из того, чтобы для низшего типа волн, например H_{10} при выбранной ω значение k_p являлось мнимым числом, а для ближайшего высшего типа волн, например $H_{11}k_p$ было действительным числом. Обычно берут $a \cong (0{,}7 \div 0{,}8)\lambda_c$ и $b \cong (0{,}3 \div 0{,}4)\lambda_c$. Размеры a и b стандартизованы.

Объемная картина поля для волны H_{10} в некоторый момент времени изображена на рис. 26.4. Токи смещения в полости волновода переходят в токи проводимости по его стенкам (пунктир на рис. 26.4). Хотя на стенках волновода $E \to 0$, но при $\gamma \to \infty$ плотность тока проводимости в стенках $\delta = \gamma E$ имеет конечное значение. Для измерительных целей в стенках волновода делают прорези (щели), располагая их так, чтобы они не препятствовали протеканию токов проводимости.

§ 26.3. Волновое сопротивление. Фазовая и групповая скорости. Под волновым сопротивлением волновода $Z_{вв}$ понимают отношение комплексных значений взаимно перпендикулярных составляющих $\dot{E}$ и $\dot{H}$. Так, для основной волны H_{10}

$$Z_{вв} = \dot{E}_y/\dot{H}_x = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}. \qquad (26.22)$$

Зависимость $Z_{вв}$ от $\lambda_c/2a$ для волны H_{10} изображена на рис. 26.5, a. $2a$ — наибольшая из возможных длина волны в данном волноводе.

Скорость перемещения по волноводу неизменного фазового состояния $v_{фв}$ направлена под некоторым углом к оси волновода

$$v_{фв} = \frac{j\omega}{k_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - k^2}} = \frac{v_c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}} \cdot \tag{26.23}$$

Зависимость $v_{фв}$ от частоты называют дисперсией. Так как $\frac{\lambda_c}{2a} < 1$, то $v_{фв}$ больше скорости света v_c. Энергия вдоль оси волновода передается с групповой скоростью $v_{гр} = \frac{dj\omega}{dk_p} = v_c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$. Величины $v_{фв}$ и $v_{гр}$ можно сопоставить.

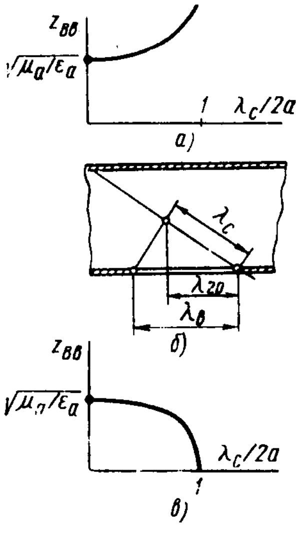


Рис. 26.5

соответственно, со скоростью смыкания кромок ножниц и скоростью движения навстречу друг другу рукояток этих ножниц. Рис. 26.5, *б* иллюстрирует связь между длиной волны в свободном пространстве $\lambda_c = v_c/f$, длиной волны в волноводе $\lambda_в = v_{фв}/f$ и групповой длиной волны $\lambda_{гр} = v_{гр}/f$ — расстояние, на которое перемещается энергия вдоль оси волновода за одно колебание: $\lambda_в\lambda_{гр} = \lambda_c^2$ или $v_{фв}v_{гр} = v_c^2$.

Для определения энергии, переносимой электромагнитной волной, бегущей по волноводу, следует подсчитать поток продольной составляющей вектора Пойнтинга $\vec{\tilde{\Pi}}$ через поперечное сечение волновода. Так, в случае основной волны H_{10} необходимо подсчитать поток вектора $\vec{\tilde{\Pi}} = [\dot{\vec{E}}_y \overset{*}{\vec{H}}_x]$, учтя, что $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$ совпадают по фазе

$$-\int\limits_S \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = \frac{abH_m^2 Z_{вв}}{4} \cdot \tag{26.24}$$

Рассмотрим влияние нагрузки на конце волновода на характер волновых процессов в нем.

Если сопротивление нагрузки на конце волновода не будет равно $Z_{вв}$, то в волноводе кроме падающей возникает и отраженная волна. Если волновод на конце будет открыт, то часть мощности, переносимой падающей волной, будет излучаться в окружающее пространство, часть отразится обратно в волновод. Если на конце волновода поместить решетку из проводящих стержней (проволок), то влияние решетки на возникновение отраженной волны зависит от того, как расположены стержни (продольно или поперечно) по отношению к вектору $\vec{E}$ волны. Когда стержни будут параллельны вектору $\vec{E}$, то в них возникают токи и большая часть падающей волны отражается обратно в волновод. Когда стержни решетки перпендикулярны линиям $\vec{E}$ на конце волновода, они мало влияют на излучаемую мощность. Если на конце волновода установить сплошную металлическую перегородку, то это будет соответствовать режиму короткого замыкания на конце волновода. В этом случе вдоль волновода возникает стоячая волна с удвоенным значением H на конце волновода. Согласованную нагрузку на конце волновода при небольших мощностях конструктивно выполняют, помещая в конце волновода клинообразную диэлектрическую пластину, покрытую тонким проводящим слоем (например, графитом). В этом случае отраженная волна почти отсутствует за счет клинообразной формы пластинки.

§ 26.4. Решение для Е-волны. Простейшим типом волн ТМ (E-волн) является волна E_{11}, имеющая компоненты E по осям x, y, z и компоненты H по осям x и y. Если соответствующие комплексные коэффициенты, включающие и $e^{-k_p z}$

обозначить $\dot{C}_x$, $\dot{C}_y$, $\dot{C}_z$ для E-компонент и $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ для H-компонент, то для волны E_{11}:

$$\dot{E}_x = \dot{C}_x \cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}; \quad \dot{E}_y = \dot{C}_y \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b};$$

$$\dot{E}_z = \dot{C}_z \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}; \quad \dot{H}_x = \dot{C}_1 \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b};$$

$$\dot{H}_y = \dot{C}_2 \cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{b}; \quad \dot{H}_z = 0.$$

Для волны E_{11} волновое сопротивление $Z_{\text{вв}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$ (рис. 26.5, *в*).

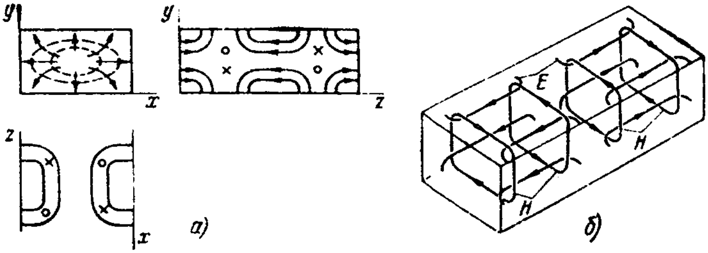


Рис. 26.6

На рис. 26.6, *а* в трех проекциях изображена картина поля волны E_{11}, где сплошные линии соответствуют компонентам E, пунктирные (а также кружки и крестики) — H; на рис. 26.6, *б* дана объемная картина поля. Линии E замыкаются по стенкам волновода.

§ 26.5. Аналогия между волноводом и линией с распределенными параметрами. Между волноводом и линией без потерь с распределенными параметрами имеет место формальная аналогия. Сходными величинами и соотношениями являются: в линии U; I; $U = IZ_{\text{в}}$; L_0, C_0, $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$; в волноводе E; H; $E = HZ_{\text{вв}}$; μ_a; ε_a; $Z_{\text{вв}} = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$. Аналогию используют в различных целях, например, для выяснения влияния неоднородностей (перегородок, окон) в волноводе на распределение волн в областях вдали от неоднородностей. Для этого составляют схему замещения, в которой волновод заменен линией с распределенными параметрами, а неоднородность представляют некоторым четырехполюсником с сосредоточенными параметрами (которые находят опытным путем).

§ 26.6. Граничные условия Леонтовича—Рытова. При расчете поля в волноводе было принято, что стенки его имеют проводимость $\gamma \to \infty$. В действительности γ конечна, поэтому в стенках волновода есть потери энергии, которые подсчитывают методом последовательных приближений. Сначала определяют H_x и H_y на стенках волновода, считая $\gamma \to \infty$ и $E_x = E_y = 0$. Затем по найденным значениям H_x и H_y определяют приближенные значения E_x и E_y на стенках, полагая, что γ конечна и для стенок $Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}}\, e^{j45°}$. Тогда

$$\dot{E}_x = Z_{\text{в}}\dot{H}_y; \quad \dot{E}_y = -Z_{\text{в}}\dot{H}_x. \tag{а}$$

Два последних соотношения называют *граничными условиями Леонтовича—Рытова*. Поясним их. На рис. 26.7 показана поверхность стенки волновода. Оси декартовой системы (местной системы координат) расположены так, что ось z (орт $\vec k$) направлена вглубь стенки. Составляющие векторов $\vec E$ и $\vec H$, образующие поток вектора $\vec \Pi$ в глубь стенки, в общем случае имеют x и y компоненты:

$$\dot{\vec H} = \vec i \dot H_x + \vec j \dot H_y + \vec k \dot H_z; \quad \dot{\vec E} = \vec i \dot E_x + \vec j \dot E_y. \tag{б}$$

Для точек проводящей среды (на стенках волновода)

$$Z_в [\dot{\vec H} \vec k] = \dot{\vec E}. \tag{в}$$

Подставляя (б) в (в) и сопоставляя слагаемые с одинаковыми ортами, получаем (а). Потери в стенках равны потоку вектора Пойнтинга внутрь стенок.

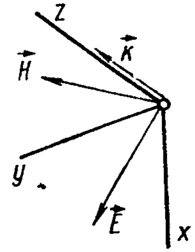


Рис. 26.7

§ 26.7. Запредельный волновод. За счет того, что при конечной γ на стенках волновода $\dot E_x$ и $\dot E_y$ хотя и малы, но все же не равны нулю, картина поля в волновод несколько отлична от картины поля при $\gamma \to \infty$. Практически оказывается, что энергия может передаваться по волноводу и при $\omega < \omega_{кр}$ (до некоторой частоты ω_1). При этом $Z_{вн}$ оказывается комплексным числом. Волновод, работающий при $\omega < \omega_{кр}$ (до некоторой частоты ω_1), называют *запредельным*, его используют как ослабитель. При $\omega \leqslant \omega_1$ изменяется структура (характер) поля в волноводе. Поле вместо волнового становится по типу электростатического для E-волны и по типу магнитного поля постоянного тока для H-волны. Эти поля рассчитывают по методу зеркальных изображений относительно стенок (зарядов или токов, соответственно).

§ 26.8. Линии с поверхностными волнами и полосковые линии. Вместо волноводов иногда применяют линии с поверхностными волнами и полосковые линии.

Линия с поверхностной волной обычно представляет собой металлическую пластинку (стерженек), окруженную слоем диэлектрика. Поверхность металла и диэлектрика является направляющей системой

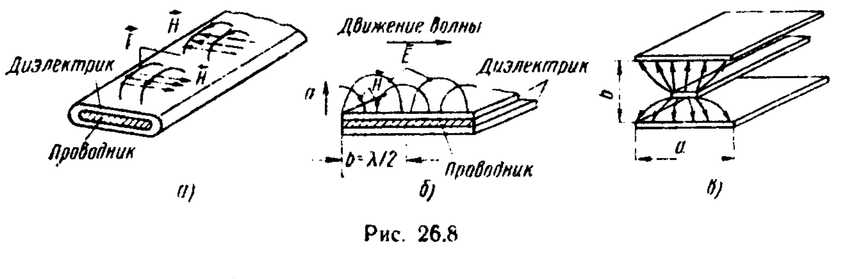


Рис. 26.8

для бегущих волн. Скорость движения волны вдоль этой линии меньше скорости движения волны, если бы она распространялась в свободном пространстве без этих направляющих, т. е. линия играет роль замедляющей системы. Замедление обусловлено тем, что для удовлетворения граничных условий должны быть одинаковы значения фазовых скоростей вне диэлектрического слоя и внутри его.

Схематически картина поля поверхностной волны (в аксонометрии) изображена на рис. 26.8, *а*. На рис. 26.8, *б* показана картина линий

E и H вдоль линии, позволяющая понять, почему относительно мало излучение энергии в пространство, окружающее линию.

Вертикальные пунктирные линии, проведенные на рис. 26.8, *б* на расстоянии $b = \lambda/2$, это как бы две мысленно проведенные стенки обычного прямоугольного волновода, две другие стенки которого удалены друг от друга на расстояние $a \to \infty$. Коэффициент распространения k_p для такого волновода не будет мнимым числом и потому в направлении, перпендикулярном пластинке, волна будет распространяться с затуханием.

Полосковая линия представляет собой две металлические полоски, в пространстве между которыми паралелльно им расположена более узкая полоска или круглый стерженек. Картина поля показана на рис. 26.8, *в*. Излучение в окружающее пространство относительно мало́, если $a > 5b$. Достоинства полосковых линий по сравнению с волноводами — простота изготовления, малый вес и дешевизна.

Вопросы для самопроверки

1. Почему энергию СВЧ практически невозможно передавать по обыкновенным открытым линиям и коаксиальному кабелю? 2. Охарактеризуйте достоинства и недостатки известных Вам направляющих систем СВЧ. 3. Начиная примерно с каких частот энергию передают по волноводам? 4. Как связана собственная частота объемного резонатора с его размерами? 5. Дайте определение волн TE, TM, TEM. 6. Покажите, что распространяющаяся в коаксиальном кабеле электромагнитная волна является волной типа TEM. 7. Каким соотношением связана постоянная распространения k_p с геометрическими размерами a и b волновода и с числами m и n? Что определяют собой числа n и m? 8. Как определить критическую частоту $\omega_{кр}$, ниже которой электромагнитная волна не может распространяться вдоль волновода без затухания (полагая, что стенки волновода имеют $\gamma \to \infty$). Чем физически можно объяснить затухание, когда потери в стенках отсутствуют? 9. Чем руководствуются при выборе размеров сторон a и b в прямоугольном волноводе, чтобы в нем вдали от излучателя распространялась волна H_{10}, а волны высших типов отсутствовали? 10. Начертите картину волны типа H_{10} и типа H_{11}. 11. Что понимают под волновым сопротивлением $Z_{вв}$ и как оно зависит от $\lambda_c/2a$ для волны типа H_{10} и для E_{11}? 12. Каков физический смысл групповой скорости? С какой скоростью $v_ф$ или $v_{гр}$ перемещается волна вдоль оси волновода? 13. Почему превышение фазовой скоростью скорости света не противоречит утверждению, что все физические процессы происходят со скоростью, не большей скорости света? 14. Как осуществить режим согласованной нагрузки на конце волновода? 15. На конце волновода установлена сплошная металлическая перегородка. Начертите картину напряженности электрического поля вдоль оси волновода для волны H_{10}. 16. Выведите граничные условия Леонтовича—Рытова и поясните как, используя их, можно определить H_x и H_y на стенках волновода при конечной проводимости стенок. 17. Каким свойством обладает запредельный волновод и с какой целью он может быть использован? 18. Поясните картину поля полосковой линии и укажите положительные качества этой линии. 19. Выведите формулу для мощности, передаваемой по волноводу волной E_{11}.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

§ 27.1. Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости. В § 27.1—27.6 под заряженной частицей понимаем электрон. Заряд его обозначим $q = -q_э$ и массу m. $q_э = 1{,}601 \cdot 10^{-19}$ Кл, при скорости движения, значительно меньшей скорости света, масса $m = 0{,}91 \cdot 10^{-27}$ г. Полагаем, что имеет место достаточно высокий вакуум, так что при движении электрон не сталкивается с другими частицами. На электрон, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{f} = q[\vec{v}\vec{B}]$.

На рис. 27.1 учтено, что заряд электрона отрицателен, и скорость его $\vec{v} = \vec{j}v$ направлена по оси y, а индукция $\vec{B} = -\vec{i}B$ по оси $-x$. Сила $\vec{f}$ направлена перпендикулярно скорости и является центробежной силой. Она изменяет направление скорости, не влияя на числовое значение.

Электрон будет двигаться по окружности радиусом r с угловой частотой $\omega_ц$, которую называют *циклотронной частотой*. Центробежное ускорение равно силе f, деленной на массу $v^2/r = q_э vB/m$.

Отсюда

$$r = vm/Bq_э. \qquad (27.1)$$

Время одного оборота

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{Bq_э}.$$

Следовательно,

$$\omega_ц = 2\pi/T = Bq_э/m. \qquad (27.2)$$

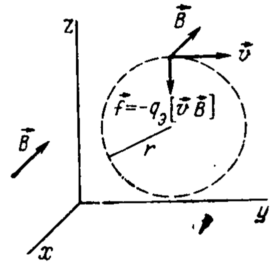


Рис. 27.1

§ 27.2. Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям. Рассмотрим два случая: в первом — электрон будет двигаться в равномерном, во втором — в неравномерном поле.

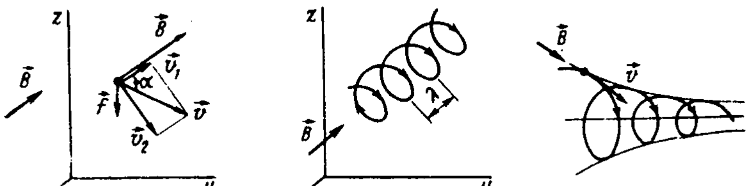


Рис. 27.2

1. Движение в равномерном поле. Через α на рис. 27.2, *а* обозначен угол между скоростью электрона $\vec{v}$ и индукцией $\vec{B}$. Разложим $\vec{v}$ на $\vec{v}_1$, направленную по $\vec{B}$ и численно равную $v \cos\alpha$, и на $\vec{v}_2$, направленную перпендикулярно $\vec{B}$ и численно равную $v \sin\alpha$. Так как $[\vec{v}_1\vec{B}] = 0$, то наличие составляющей скорости $\vec{v}_1$ не вызывает силы воздействия на электрон. Движение со скоростью $\vec{v}_2$ приводит

к вращению электрона вокруг линии $\vec{B}$ подобно тому, как это было рассмотрено в § 27.1. В целом электрон будет двигаться по спирали рис. 27.2, *б*, осевой линией которой является линия магнитной индукции. Радиус спирали $r = v_2 m/Bq$ шаг спирали

$$\lambda = Tv_1 = \frac{2\pi m}{Bq_э} v_1. \qquad (27.3)$$

Поступательное и одновременно вращательное движение иногда называют *дрейфом электрона*.

2. Движение в неравномерном поле. Если магнитное поле неравномерно, например сгущается (рис. 27.2, *в*), то при движении по спирали электрон будет попадать в точки поля, где индукция B увеличивается. Но чем больше B, тем при прочих равных условиях меньше радиус спирали r [см. формулу (27.1)]. Дрейф электрона будет происходить в этом случае по спирали со всем уменьшающимся радиусом. Если бы магнитные силовые линии образовывали расходящийся пучок, то электрон при своем движении попадал бы в точки поля со все уменьшающейся индукцией и радиус спирали возрастал бы.

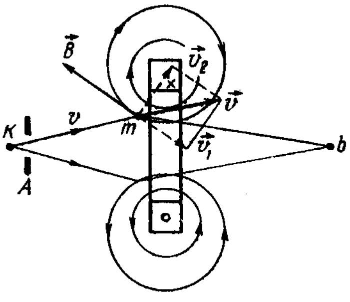


Рис. 27.3

§ 27.3. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза). Из катода электронного прибора (рис. 27.3) выходит расходящийся пучок электронов. Со скоростью $\vec{v}$ электроны входят в неравномерное магнитное поле узкой цилиндрической катушки с током.

Разложим скорость электрона $\vec{v}$ в произвольной точке m на две составляющие: $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Первая $\vec{v}_1$ направлена противоположно $\vec{B}$, а вторая $\vec{v}_2$ — перпендикулярно $\vec{B}$. Возникшая ситуация повторяет ситуацию, рассмотренную в § 27.2. Электрон начнет двигаться по спирали, осью которой является $\vec{v}_1$. В результате электронный пучок фокусируется в точке b.

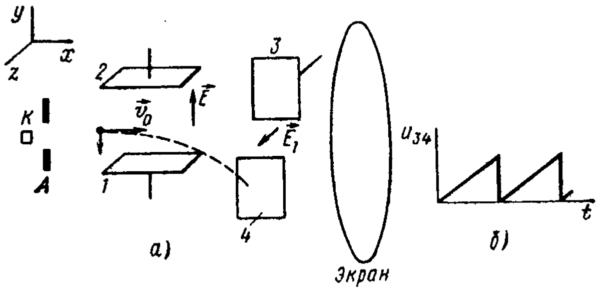


Рис. 27.4

§ 27.4. Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа. Электрон, пройдя расстояние от катода K до узкого отверстия в аноде A (рис. 27.4, *а*), под действием ускоряющего напряжения $U_{ак}$ увеличивает свою кинетическую энергию на величину работы сил поля.

Скорость v_0, с которой электрон будет двигаться после выхода в аноде из отверстия 0, найдем из соотношения $mv_0^2/2 = q_э U_{ак}$; $v_0 = \sqrt{\dfrac{2q_э U_{ак}}{m}}$.

При дальнейшем прямолинейном движении по оси x электрон попадает в равномерное электрическое поле, напряженностью $\vec{E}$ между отклоняющими пластинами 1 и 2 (находятся в плоскостях, параллельных плоскости zox). Напряженность $\vec{E}$ направлена вдоль оси y. Пока электрон движется между отклоняющимися пластинами, на него действует постоянная сила $\vec{F}_y = -q_э\vec{E}$, направленная по оси $-y$. Под действием этой силы электрон движется вниз равноускоренно, сохраняя постоянную скорость v_0 вдоль оси x. В результате в пространстве между отклоняющими пластинами электрон движется по параболе. Когда он выйдет из поля пластин 1—2, в плоскости yox он будет двигаться по касательной к параболе. Далее он попадает в поле пластин 3—4, которые создают развертку во времени. Напряжение U_{34} между пластинами 3—4 и напряженность поля между ними E_1 линейно нарастают во времени (рис. 27.4, *б*). Электрон получает отклонение в направлении оси z, что и дает развертку во времени.

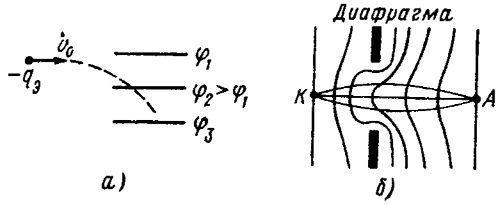


Рис. 27.5

§ 27.5. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза). Фокусировка основана на том, что, проходя через участок неравномерного электрического поля, электрон отклоняется в сторону эквипотенциали с большим значением потенциала (рис. 27.4, *а*). Электрическая линза образована катодом, испускающим электроны, анодом, куда пучок электронов приходит сфокусированным, и фокусирующей диафрагмой, представляющей собой пластинку с круглым отверстием в центре (рис. 27.5, *б*). Диафрагма имеет отрицательный потенциал по отношению к окружающим ее точкам пространства, вследствие этого эквипотенциали электрического поля как бы выпучиваются через диафрагму по направлению к катоду. Электроны, проходя через отверстие в диафрагме и отклоняясь в сторону, фокусируются на аноде.

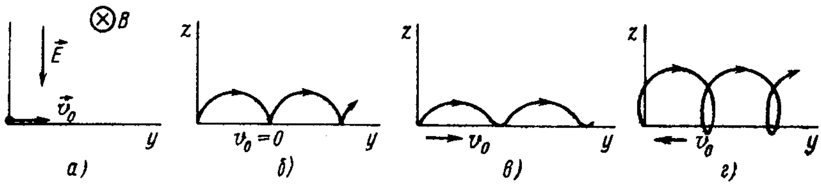


Рис. 27.6

§ 27.6. Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитном и электрическом полях. Пусть электрон с зарядом $q = -q_э$ и массой m с начальной скоростью $\vec{v}_0$ оказался при $t = 0$ в начале координат (рис. 27.6, *а*) в магнитном и электрическом полях. Магнитная индукция направлена по оси $-x\vec{B} = -\vec{i}B$, т. е. $B_x = B$. Напряженность электрического поля направлена по оси $-z$ $\vec{E} = -\vec{k}E$, т. е. $E_z = E$. Движение электрона будет происходить в плоскости zoy со скоростью $\vec{v} = \vec{j}v_y +$

$+ \vec{k} v_z$. Уравнение движения $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q_э\vec{E} - q_э[\vec{v}\vec{B}]$ или $\vec{j}m\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}m\frac{dv_z}{dt} = \vec{k}(q_эE - q_эv_yB) + \vec{j}v_zBq_э$.

Следовательно, $m\frac{dv_y}{dt} = q_эv_zB$; $\frac{mdv_z}{dt} = q_эE - q_эv_yB$.

В соответствии с формулой (27.2) заменим $q_эB/m$ на циклотронную частоту $\omega_ц$. Тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_ц v_z; \tag{27.4}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q_эE}{m} - \omega_ц v_y. \tag{27.5}$$

Продифференцируем (27.4) по t и в правую часть уравнения подставим (27.5):

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega_ц^2 v_y = \omega_ц\frac{q_эE}{m}. \tag{27.6}$$

Решим уравнение классическим методом: $v_y = v_{y\,пр} + v_{y\,св}$; $v_{y\,пр} = q_эE/m\omega_ц = E/B$;

$$v_{y\,св} = A\sin(\omega_ц t + \nu).$$

Составим два уравнения для определения постоянных интегрирования. Так как при $t = 0$ $v_y = v_0$, то $A\sin\nu + E/B = v_0$. При $t = 0$ $v_z = 0$. Поэтому $(dv_y/dt)_{t=0} = 0$ или $A\cos\nu = 0$. Отсюда $\nu = 90°$ и $A = v_0 - E/B$.

Таким образом, $v_y = E/B + (v_0 - E/B)\cos\omega_ц t$;

$$v_z = \frac{1}{\omega_ц}\frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{E}{B} - v_0\right)\sin\omega_ц t.$$

Пути, пройденные электроном по осям y и z:

$$y = \int_0^t v_y\,dt = \frac{E}{B}t - \frac{E/B - v_0}{\omega_ц}\sin\omega_ц t.$$

$$z = \int_0^t v_z\,dt = \frac{E/B - v_0}{\omega_ц}(1 - \cos\omega_ц t).$$

На рис. 27.6, *б*, *в*, *г* изображены три характерных случая движения при различных значениях v_0. На рис. 27.6, *б* трохоида при $v_0 = 0$, максимальное отклонение по оси z равно $z_{max} = 2mE/q_эB^2$.

Если $v_0 > 0$ и направлена по оси $+y$, то траекторией является растянутая трохоида (рис. 27.6, *в*) с максимальным отклонением $z_{max} = \frac{2m}{q_эB^2}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)$. Если $v_0 < 0$ и направлена по оси $-y$, то траекторией будет сжатая трохоида (рис. 27.6, *г*) с $z_{max} = \frac{2m}{q_эB^2}\left(\frac{E}{B} + v_0\right)$.

Когда магнитное и электрическое поля мало отличаются от равномерных, траектории движения электронов близки к трохоидам.

§ 27.7. Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях. Циклотрон представляет собой две полые камеры в виде полуцилиндров из проводящего неферромагнитного материала. Эти камеры находятся в сильном равномерном магнитном поле индукции $\vec{B}$, направленном на рис. 27.7 сверху вниз. Камеры помещают в вакуумированный сосуд (на рисунке не показан) и присоединяют к источнику напряжения $U_m\cos\omega t$. При $t = 0$, когда напряжение между камерами имеет максимальное значение, а потенциал левой камеры положителен по отношению к правой, в пространство между камерами вводят положительный заряд q. На него будет действовать сила $q\vec{E}$. Заряд начнет двигаться слева направо и с начальной скоростью $\vec{v}_0$ войдет в правую камеру. Но внутри камеры напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому, пока он находится там, на него не действует сила $q\vec{E}$, но действует сила $q[\vec{v}\vec{B}]$, обусловленная магнитным полем. Под действием этой силы положительный заряд, двигающийся со скоростью v, начинает движение по окружности радиусом $r = mv/qB$. Время, в течение которого он совершит пол-оборота, $t_1 = \pi r/v = \pi m/qB$.

Если частоту приложенного между камерами напряжения взять равной $f = 1/T = 1/2t_1$, то к моменту времени, когда заряд выйдет из правой камеры, он окажется под воздействием электрического поля, направленного справа налево. Под действием этого поля заряд увеличивает свою скорость и входит в левую камеру, где совершает следующий полуоборот, но уже большего радиуса, так как имеет большую скорость. После k полуоборотов заряженная частица приобретает такую скорость и энергию, какую она приобрела бы, если в постоянном электрическом поле пролетела бы между электродами, разность потенциалов между которыми kU_m.

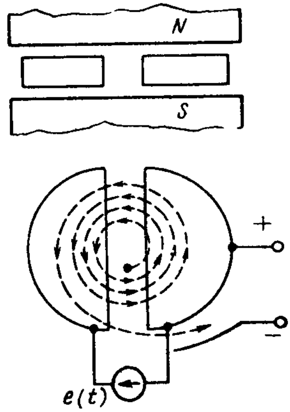


Рис. 27.7

Вывод заряда из циклотрона осуществляется с помощью постоянного электрического поля, создаваемого между одной из камер (на рис. 27.7 правой) и вспомогательным электродом A. С увеличением скорости $\vec{v}$, когда она становится соизмеримой со скоростью света, масса частицы m во много раз увеличивается. Возрастает и время t_1 прохождения полуоборота. Поэтому одновременно с увеличением скорости частицы необходимо уменьшать либо частоту источника напряжения $U_m \cos \omega t$ (фазотрон), либо величину индукции магнитного поля (синхротрон), либо частоту и индукцию (синхрофазотрон).

Вопросы для самопроверки

1. В постоянном магнитном поле индукции $\vec{B} = -\vec{i}B$ ($B = 1$ Тл) движется электрон со скоростью $\vec{v} = \vec{j}v$. Определите циклотронную частоту $\omega_ц$ (Ответ $1{,}76 \cdot 10^8$ с$^{-1}$). 2. Определите угол α между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ постоянного во времени магнитного поля и скоростью $\vec{v}$ электрона, если он движется по спирали, шаг которой λ равен ее радиусу r (Ответ $80°56'$). 3. Электрон, имея очень малую начальную скорость, под действием ускоряющего напряжения $U_{ак}$ приобрел скорость 10^6 м/с. Определите значение напряжения $U_{ак}$ (Ответ $\sim 2\ 840$ В). 4. Электрон движется во взаимноперпендикулярных неизменных во времени электрическом и магнитном полях (см. рис. 27.6). Начальная скорость электрона $v_0 = 10^5$ м/с. Магнитная индукция $B = 1$ Тл. Траектория движения электрона представляет собой сжатую трохоиду с максимальным отклонением $z_{max} = 2{,}27$ мм. Определите величину напряженности электрического поля (Ответ 10^5 В/м). 5. Цилиндрический поток электронов радиуса r_0 ускорен напряжением $U_{ак}$. Объемная плотность заряда в пучке равномерна и равна ρ. Определите радиальные электрическую $\vec{F}_э$ и магнитную $F_м$ силы, действующие на крайние электроны пучка, обусловленные собственными электрическим и магнитным полями. При решении использовать понятие тока переноса $\vec{\delta}_п = \rho\vec{v}_0$ (Ответ $\vec{F}_э = \vec{r}_0 \times \frac{q_э \rho r_0}{2\varepsilon_0}$; $\vec{F}_м = -\vec{r}_0 \frac{q_э \mu_0 \rho v_0^2 r_0}{2}$; $v_0 = \sqrt{\frac{2q_э}{m} U_{ак}}$). 6. Расходящийся пучок электронов (угол расходимости α составляет несколько градусов) движется со скоростью v вдоль оси цилиндрической катушки с током. При входе в равномерное магнитное поле катушки индукции B радиус пучка равен r_0. Определите B, при ко-

торой граничные электроны пучка будут двигаться по спирали с радиусом r_0 $\left(\text{Ответ } B = \dfrac{v_0 m \cos \alpha/2}{r_0 q_э}\right)$. 7. Поясните принцип работы магнитной линзы. 8. Объясните, в силу каких причин электрическая линза осуществляет фокусировку электронного пучка. 9. Расскажите о принципе работы электронного осциллографа. 10. В чем отличие принципа работы фазотрона от принципов работы синхрофазотрона и циклотрона?

Глава двадцать восьмая

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 28.1. Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения. Магнитная гидродинамика — это область науки, в которой изучают поведение плазмы или проводящей жидкости (расплавленных металлов или солей) в магнитном или электромагнитном поле.

Плазмой называют полностью или частично ионизованный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных ионов одинакова, а суммарный заряд в единице объема равен нулю. Этот газ в магнитогидродинамическом приближении можно рассматривать как своеобразную проводящую жидкость. При движении жидкости (плазмы) в магнитном (электромагнитном) поле в ней возникают электрические токи, взаимодействия которых с магнитным полем вызывает механические силы, влияющие на характер ее движения.

За последние годы магнитная гидродинамика особенно интенсивно развивалась в трех направлениях: а) исследование космических проблем; б) изучение способов воздействия на высокотемпературную плазму (ее термоизоляцию, импульсное ускорение, работы по управляемой термоядерной реакции); в) разработка методов электромагнитного воздействия на жидкий металл при его плавке, транспортировке, дозировании.

В космосе имеется полностью ионизованный газ (плазма). Проводимость его в некоторых случаях может приближаться к проводимости металла. Если учесть, что ионизованные газы занимают колоссальные объемы, то несмотря на большие расстояния между космическими телами, сопротивления между ними относительно невелики. В то же время магнитное поле в космосе может быть значительным. Так, регулярное магнитное поле солнца около $25 \cdot 10^{-4}$ Тл, а в области солнечных пятен достигает $0{,}2 \div 0{,}4$ Тл. Эти магнитные поля создают огромные медленно затухающие токи в плазме, взаимодействие которых с магнитным полем создает механические силы. Даже если силы и оказываются небольшими по числовому значению, их влияние на движение плазмы значительно, так как они воздействуют на нее в течение длительного времени.

Различают высокотемпературную и низкотемпературную плазмы. По степени концентрации заряженных частиц различают плазму разреженную и плазму с большой концентрацией. У высокотемпературной плазмы температура доходит до нескольких миллионов градусов. Низкотемпературная плазма имеет место, например, в столбе ионизованного газа при тлеющем и дуговом разрядах. Плазма с температурой нескольких тысяч градусов образуется, например, вблизи поверхности ракеты при ее вхождении в плотные слои атмосферы.

Магнитная гидродинамика наряду с другими науками является теоретической основой при разработке магнитогидродинамических генераторов, а также плазменных и ионных двигателей.

Применение жидкометаллических теплоносителей в паровых машинах и турбинах, охлаждение атомных реакторов щелочными металлами, натрием и калием, разлив и транспортировка жидкого металла в металлургии — все это вызвало потребность в магнитных насосах, вентилях, дозаторах.

При исследовании поведения проводящей жидкости в магнитном поле ее характеризуют проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a. Значения γ и μ_a полагают известными из молекулярно-кинетической теории. Точно так же, когда изучают поведение плазмы в магнитном поле, значение γ и μ_a для нее считают известными из электронной теории. Обычно полагают, что среда является однородной и изотропной и что ее свойства не зависят от температуры. Однако при определенных условиях γ плазмы может оказаться величиной тензорной, например γ плазмы в области солнечной короны. Иногда необходимо рассматривать плазму как двухкомпонентную (не однокомпонентную) среду.

§ 28.2. Уравнения магнитной гидродинамики. Систему уравнений магнитной гидродинамики образуют следующие группы уравнений.

Уравнение Максвелла применительно к движущейся проводящей среде. Проводящая среда по отношению к некоторой системе отсчета движется со скоростью $\vec{v}$ во внешнем магнитном поле индукции $\vec{B}$. Скорость движения среды ничтожно мала по сравнению со скоростью света, поэтому релятивистские поправки в уравнения Максвелла не вносят. Ток смещения не учитывают, так как он ничтожно мал по сравнению с током проводимости.

Напряженность электрического поля равна сумме электрической и магнитной составляющих $\vec{E} + [\vec{v}\,\vec{B}]$.

Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma\left(\vec{E} + [\vec{v}\,\vec{B}]\right); \tag{28.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{28.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \tag{28.3}$$

$$\vec{\delta} = \gamma\left(\vec{E} + [\vec{v}\,\vec{B}]\right), \tag{28.4}$$

где $\vec{\delta}$ — плотность тока.

Уравнение (28.4) представляет собой закон Ома. Решим системы (28.1)—(28.4) относительно вектора $\vec{B}$. С этой целью найдем $\vec{E}$ из (28.1), заменив $\vec{H}$ на $\vec{B}/\mu_a$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma\mu_a}\operatorname{rot}\vec{B} - [\vec{v}\,\vec{B}].$$

Подставим $\vec{E}$ в (28.2):

$$\frac{1}{\gamma\mu_a}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} - \operatorname{rot}[\vec{v}\,\vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \nabla^2\vec{B}$, а $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, то получим

$$\frac{1}{\gamma\mu_a}\nabla^2\vec{B} + \operatorname{rot}[\vec{v}\,\vec{B}] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{28.5}$$

Уравнение Навье—Стокса выражает второй закон Ньютона применительно к единице объема проводящей среды, движущейся в магнитном поле.

Произведение массы единицы объема ρ, движущейся со скоростью $\vec{v}$ жидкости, на ее ускорение $d\vec{v}/dt$ равно сумме сил, действующих на единицу объема:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

где $d\vec{v}/dt$ — полная или материальная производная, учитывающая изменение $\vec{v}$ в данной точке во времени и в результате того, что точка наблюдения попадает в поле с иными значениями $\vec{v}$ вследствие движения; $\vec{F}_1 = -\operatorname{grad} p$ — сила, вызванная перепадом давления и направленная в сторону уменьшения давления (тогда как grad p направлен в сторону увеличения давления); $\vec{F}_2 = \rho\vec{g}$ — сила тяжести, действующая на единицу объема ($\vec{g}$ — ускорение силы тяжести в данной точке); $\vec{F}_3 = \rho\nu\nabla^2\vec{v}$ — сила вязкого трения на единицу объема, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Сила вязкого трения взята пропорциональной второй производной скорости потому, что равна разности сил, действующих с каждых двух противоположных граней объема, отнесенной к расстоянию между гранями; $\vec{F}_4$ — электромагнитная сила. Выражение для нее получим из формулы (21.1), если ввести ток I в квадратные скобки и заменить его произведением плотности тока $\vec{\delta}$ на сечение $\Delta\vec{S}$, через которое он проходит; затем обе части выражения $\vec{F} = [\Delta l \Delta S \vec{\delta}\,\vec{B}]$ разделить на выделенный объем проводящего тела $\Delta l \Delta S = \Delta\vec{l}\Delta\vec{S}$.

Силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ малы по сравнению с $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ и потому их не учитывают. Окончательно имеем:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p + [\vec{\delta}\,\vec{B}]. \tag{28.6}$$

Уравнение непрерывности, выражающее собой то обстоятельство, что изменение массы в элементарном объеме обусловлено притоком жидкости (плазмы),

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0. \tag{28.7}$$

Уравнение теплового баланса

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda\nabla^2 T + \delta^2/\gamma + W_{\text{тр}} + \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{28.8}$$

где $\rho c \dfrac{dT}{dt}$ — теплота, расходуемая на увеличение температуры объема; c — удельная теплоемкость; $\lambda\nabla^2 T$ — теплота, приносимая в единичный объем за счет теплопроводности; λ — коэффициент теплопроводности; δ^2/γ — джоулевы потери в единице объема; $W_{\text{тр}}$ — теплота, выделяемая в объеме в силу наличия трения; p — давление; $\dfrac{p}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}$ — теплота, выделяющаяся в объеме при изменении плотности ρ.

В установившемся тепловом режиме температура T неизменна и в этом случае уравнение (28.8) не используется.

§ 28.3. Просачивание (диффузия) магнитного поля. Положим, что плазма неподвижна. Из уравнений (28.5) и (28.6) при $\vec{v} = 0$ следует:

$$\frac{1}{\gamma\mu_a}\nabla^2\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{28.9}$$

$$[\vec{\delta}\,\vec{B}] = \mathrm{grad}\, p. \tag{29.10}$$

Уравнение (28.9) является уравнением диффузии или уравнением теплопроводности, где $1/\gamma\mu_a$ — коэффициент диффузии. Если принять, что $\vec{B}$ имеет только одну не равную нулю составляющую в декартовой системе координат $\vec{B} = \vec{i}\,\vec{B}_x(x, t)$, то решение (28.9) будет следующим:

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu^2 t}{\gamma\mu_a}} \left[a(\nu)\cos\nu x + b(\nu)\sin\nu x\right] d\nu, \tag{28.11}$$

где ν — параметр; $a(\nu)$, $b(\nu)$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий.

Из (28.11) следует, что поле, просачиваясь сквозь плазму, затухает с постоянной времени:

$$\tau \equiv \gamma \mu_a l^2, \qquad (28.12)$$

где l — линейный размер области, занятой полем.

На расстоянии l укладывается одно колебание $\sin \nu x$ или $\cos \nu x$ при $\nu = 2\pi/l$.

§ 28.4. Электромагнитный барьер. Согласно уравнению (28.10) grad p перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\delta}$ и $\vec{B}$ (рис. 28.1). Отсюда следует, что при определенной конфигурации поля давление p может быть уравновешено электромагнитной силой. Это особенно важно хотя бы для кратковременной локализации плазмы с температурой порядка миллиона градусов, когда не приходится рассчитывать на барьеры из какого-либо вещества.

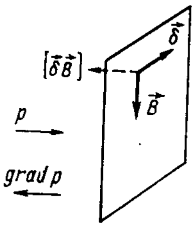


Рис. 28.1

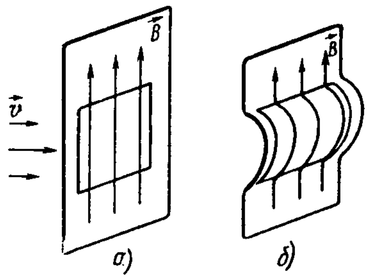


Рис. 28.2

§ 28.5. Вмороженное поле. Положим, что проводимость плазмы γ очень велика, теоретически стремится к бесконечности и что плазма находится в движении со скоростью $\vec{v}$. На рис. 28.2, *а* показана плоскость, в которой в исходном состоянии расположены линии магнитной индукции. Возьмем произвольный контур в этой плоскости и допустим, что скорость движения плазмы поперек линий $\vec{B}$ стала неодинаковой (см. стрелки для $\vec{v}$ на рис. 28.2, *а*). Через некоторое время плоскость деформируется и примет вид, изображенный на рис. 28.2, *б*. Силовые линии растянутся вместе с контуром, они как бы приклеены или вморожены в плазму (поток через контур останется неизменившимся). Физически это объясняется тем, что при движении плазмы поперек линий $\vec{B}$ в ней индуктируются токи, поле которых, складываясь с первоначальным, так его деформирует, что силовые линии смещаются вместе с плазмой. Практически проводимость γ не бесконечно велика и поэтому деформация линий $\vec{B}$ несколько отстает от деформации контура.

§ 28.6. Возникновение волн в плазме. При определенных условиях в плазме могут возникать магнитогидродинамические волны. Для выяснения механизма их возникновения обратимся к рис. 28.3. Для упрощения выкладок примем, что проводимость плазмы $\gamma \to \infty$.

Прямоугольная система координат расположена в плазме так, что внешнее магнитное поле индукции $\vec{B}_0$ направлено по оси z. Положим, что по какой-то причине слой плазмы 1 (рис. 28.3, *б*) начал двигаться со скоростью $\vec{v}$ в направлении оси y. Так как движение этого слоя есть движение проводящего тела в магнитном поле, то в каждой точке слоя 1 возникает напряженность поля $[\vec{v}\vec{B}] = \vec{i}\, vB_0$. Под ее действием в плазме возникнут токи проводимости с плотностью $\vec{\delta} = \frac{1}{\mu_a} \times$ $\operatorname{rot} \vec{B}$, замыкающиеся через соседние слои, как показано на рис. 28.3, *а*.

Результирующая индукция $\vec{B}$ равна сумме индукции внешнего поля $\vec{B}_0$ и индукции $\vec{b}$ от токов проводимости: $\vec{B} = \vec{j}b + k\vec{B}_0$.

На движущийся в магнитном поле ток будет действовать механическая сила, в каждой точке слоя равная

$$[\vec{\delta}\,\vec{B}] = \frac{1}{\mu_a}[\mathrm{rot}\,\vec{B}\,\vec{B}] = \frac{1}{\mu_a}\left[\left(-\vec{i}\,\frac{\partial b}{\partial z}\right)\left(\vec{j}\,b + k\vec{B}_0\right)\right] =$$

$$= \vec{k}\left(-b\,\frac{\partial b}{\partial z}\right) + \vec{j}\,B_0\,\frac{\partial b}{\partial z}.$$

Сила $\vec{F}_1$, действующая на слой плазмы *1*, начавший двигаться первым, будет замедлять его движение. Слои *2* и *3*, расположенные выше и ниже слоя *1* (в них токи направлены в противоположную сторону по сравнению с током в слое *1*), будут испытывать силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, под воздействием которых слои начнут двигаться по оси y.

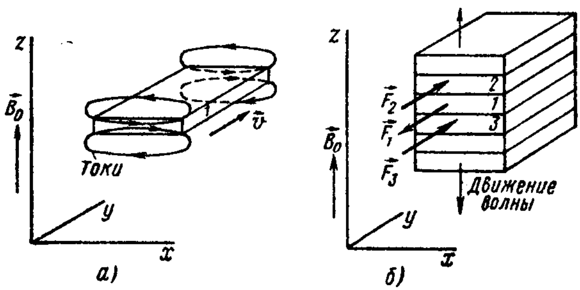


Рис. 28.3

Вдоль направления внешнего магнитного поля возникают две волны, распространяющиеся со скоростью $\vec{v}_1 = \pm\vec{k}v_1$. Одна из них распространяется вверх, другая — вниз. Волны будут поперечными — слои плазмы движутся перпендикулярно направлению распространения волны. Рассмотренный тип волн называют *волнами Альфвена*.

Давление p волны изменяется только в направлении оси z:

$$\mathrm{grad}\,p = \vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Уравнение (28.5) имеет только одну проекцию на ось y:

$$B_0\,\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial t}. \qquad (28.13)$$

Уравнение (28.6) дает проекции на оси y и z:

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = B_0\,\frac{1}{\mu_a}\,\frac{\partial p}{\partial z}; \qquad (28.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{b}{\mu_a}\,\frac{\partial b}{\partial z}. \qquad (28.15)$$

Дифференцируя (28.13) по t и (28.14) по z получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho\mu_a}\,\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

Решение его следующее: $b = f_1(t - z/v_1) + f_2(t + z/v_1)$. Скорость распространения волны в направлении оси z $v_1 = \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_a}}$. При $B_0 = 1 \div 1{,}5$ Тл, $\rho = 1 \div 10^4$ кГ/м^3 значение v_1 составляет от нескольких сантиметров до нескольких десятков метров в секунду. Если $b = A\sin(\omega t - \omega z/v_1)$, то из уравнения (28.13) скорость движения плазмы $v_1 = -\frac{A}{\sqrt{\rho\mu_a}}\sin(\omega t - \omega z/v_1)$.

Из уравнения (28.15) давление $p = p_0 - \frac{A^2}{2\mu_a}\sin^2(\omega t - \omega z/v_1)$, где A и p_0 некоторые постоянные. Плотность тока $\vec{\delta} = \vec{i}\delta_x$: $\delta_x = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}_x\vec{B} = -\frac{1}{\mu_a}\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{A\omega}{B_0}\sqrt{\frac{\rho}{\mu_a}}\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1}\right)$.

Если учесть, что γ конечна, не бесконечно велика, то вследствие потерь от вихревых токов и вязкого трения амплитуда волны A по мере продвижения волны вдоль оси z будет затухать по экспоненте.

В плазме могут возникнуть и другие типы волн, при которых силовые линии, увлекаемые частицами плазмы или жидкости, участвуют в турбулентном движении.

§ 28.7. Эффект сжатия (пинч-эффект). В цилиндрическом столбе электрической дуги (рис. 28.4) нити тока параллельны. Каждый элемент этой нити находится в магнитном поле индукции $\vec{B}$, направленной по касательной к нити тока. На каждый элемент тока с плотностью $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\,\vec{B}]$. Под действием этих сил нити стремятся сжаться, а столб дуги уплотниться. Но температура газа (плазмы), а следовательно, и давление будут максимальны на оси. Силе сжатия противостоит давление. Система находится в равновесии, когда электромагнитная сила сжатия уравновешена силой давления.

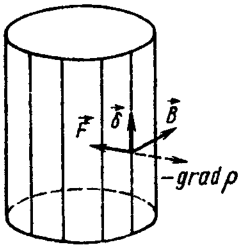


Рис. 28.4

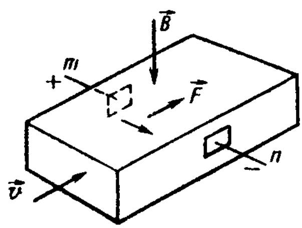


Рис. 28.5

§ 28.8. Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля. В магнитном насосе механическое воздействие на проводящую жидкость создается магнитным полем. Принцип работы насоса кондукционного типа поясняет рис. 28.5. Участок трубопровода находится в скрещенных магнитном и электрическом полях. Магнитное поле направлено сверху вниз, электрическое — от точки m к точке n. Под действием электрического поля в направлении от m к n через жидкость течет ток I. На каждый элемент объема жидкости с плотностью тока $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\,\vec{B}]$, направленная согласно с направлением движения жидкости по трубопроводу, т. е. устройство действует как насос.

Если при прочих равных условиях изменить направление электрического или магнитного поля, то возникнет сила, препятствующая движению. В этом случае устройство будет работать в качестве тормоза или вентиля. Управлять числовым значением силы можно, изменяя величину B.

§ **28.9. Принцип работы магнитного гидродинамического генератора.** Через канал с большой скоростью $\vec{v}$ продувают плазму, нагретую до высокой температуры (рис. 28.6, *а*). В перпендикулярном направлении создают сильное магнитное поле индукции $\vec{B}$. На ионы плазмы воздействует лоренцова сила $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$. Под ее действием положительные заряды движутся по направлению $\vec{E}$ к электроду *1*, а отрицательные — встречно $\vec{E}$ к электроду *2*. Между электродами возникает разность потенциалов, равная Eh. Если электроды замкнуть на сопротивление R, то по замкнутому контуру потечет ток, а плазма будет испытывать тормозящее воздействие.

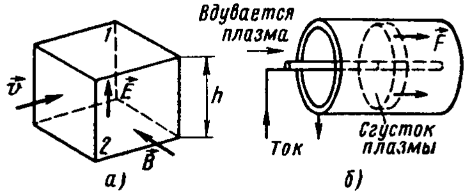


Рис. 28.6

§ **28.10. Принцип работы плазменного реактивного двигателя.** Сгустки плазмы вдуваются в полость между проводящей трубкой и проводником, расположенным по оси трубки (рис. 28.6, *б*). Плазма замыкает собой трубку и осевой проводник. Ток, протекающий по трубке, плазме и осевому проводнику, создает магнитное поле, которое выдувает плазму вправо. Плазма, получив ускорение, с силой выбрасывается из трубки в вакуум вправо, а трубка получает импульс движения влево.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение магнитной гидродинамики. 2. В каких практических случаях приходится иметь дело с плазмой и с движением проводящей жидкости в магнитном или электромагнитном полях? 3. Запишите и прокомментируйте уравнения магнитной гидродинамики. 4. Запишите уравнение, описывающее процесс диффузии магнитного поля, и поясните решение. 5. Каким образом магнитное поле может быть использовано для удержания высокотемпературной плазмы? 6. При каких условиях в плазме могут возникнуть магнито-гидродинамические волны (волны Альфвена)? 7. В чем заключается пинч-эффект? 8. Что нужно сделать, чтобы превратить магнитный насос в магнитный тормоз? 9. Какие принципы положены в основу работы плазменного реактивного двигателя?

Глава двадцать девятая

СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ **29.1. Сверхпроводимость.** Особое состояние проводящей среды, возникающее при понижении температуры до некоторой критической $T_к$, при которой удельное сопротивление среды становится равным нулю при одновременном скачкообразном изменении магнитных и тепловых свойств ее называют *сверхпроводимостью*.

При плавном понижении температуры переход из нормального состояния в сверхпроводящее происходит скачком. Этот переход иллюстрируется кривой *1* рис. 29.1. По оси абсцисс — температура, по оси ординат — удельное сопротивление. Кривая *2* — иллюстрация зависимости $\rho = f(t^0)$ для обычного проводника.

Удельное сопротивление ρ при переходе от обычного к сверхпроводящему состоянию уменьшается на 14—17 порядков по сравнению с удельным сопротивлением меди при нормальной температуре.

Изучение свойств проводящих сред при низких температурах началось после того, как в 1908 г. в лаборатории Камерлинг-Онесса в Лейдене был получен жидкий гелий, температура конденсации которого при нормальном давлении составляла — 4,1 К. Само явление сверхпроводимости (СП) было открыто в 1911 г., когда Камерлинг—Онесс обнаружил, что при температуре — 4 К удельное сопротивление ртути скачком упало до величины меньшей 10^{-23} Ом · см.

Сверхпроводимость наблюдается у относительно плохих проводников и у сплавов. У металлов с высокой проводимостью (медь, серебро и т. д.) она не обнаружена.

Явление СП физически состоит в том, что при низких температурах электронное облако в металле (его называют также *электронной жидкостью*), взаимодействуя с ионами решетки, так изменяет его периоди-

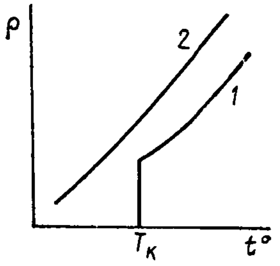


Рис. 29.1

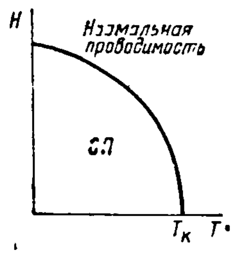


Рис. 29.2

ческую структуру, что электрон оказывается как бы окруженным облаком положительных зарядов и вследствие этого он не отталкивается от другого электрона из-за проявления кулоновых сил, а притягивается к нему. При этом вся электронная система оказывается как бы связанной электронным коллективом, в котором электроны с противоположными спинами попарно образуют связанные (куперовские) пары. Элементы этих пар могут быть удалены друг от друга на расстояния, в 10^4 раз превышающие период кристаллической решетки.

Куперовские пары могут находиться в состоянии с одинаковой энергией, при этом частоты их волновых функций будут равны. Эти пары можно рассматривать как совокупность сильно связанных друг с другом осцилляторов, частоты которых одинаковы, а фазы волновых функций сихронизированы. Совокупность куперовских пар описывается единой волновой функцией — в системе наблюдается коллективный квантовый эффект. При малых скоростях движения вся электронная система перемещается в теле без трения. Возникновение сверхпроводящих свойств зависит от температуры образца и интенсивности магнитного поля, в котором он находится.

На рис. 29.2 качественно показано, как изменяется состояние вещества в зависимости от температуры T и напряженности магнитного поля H. Кривая имеет вид параболы. Она разделяет сверхпроводящую фазу от нормальной. Таким образом, переход при низких температурах из состояния СП в состояние нормальной проводимости может быть осуществлен при неизменной $t^0 < T_к$ путем изменения напряженности магнитного поля в образце.

Магнитные и электрические свойства в состоянии сверхпроводимости могут быть трех типов, в соответствии с чем сверхпроводники подразделяют на сверхпроводники первого, второго и третьего родов.

§ 29.2. Сверхпроводники первого рода. Сверхпроводниками *первого рода* называют такие, по толще которых не может проходить магнитный поток. В то же время по ним может проходить электрический ток, если он не превышает такого значения, при котором в СП не возникает критическая напряженность поля (при возникновении ее вещество переходит из состояния СП в обычное). Напряженность определяется по закону полного тока. Сверхпроводники первого рода представляют собой обычно чистые металлы без примесей, например ниобий (его $T_к = 9{,}22$ К), олово ($T_к = 3{,}72$ К), свинец ($T_к = 7{,}2$ К). Таким образом, как говорилось, в СП первого рода внешнее магнитное поле не проникает. Это было показано в опыте Мейсснера и Оксенфельда.

§ 29.3. Сверхпроводники первого рода в магнитном поле. В 1933 г. Мейсснером и Оксенфельдом был проведен опыт, который показал, что СП — это не только проводники с чрезвычайно большой (бесконечно большой) проводимостью, но и вещества, у которых имеют место необычные магнитные свойства. Опыт состоял в следующем. Во внешнее *постоянное* магнитное поле при $T > T_{кр}$ был помещен шарик из олова (или свинца), магнитные силовые линии проходили через шарик в соответствии с рис. 29.3, *а*. Если температуру образца T уменьшить до значения, меньшего критической ($T < T_{кр}$), то образец из обычного состояния переходит в сверхпроводящее. При этом *магнитное поле вытесняется из шарика*, так что магнитные силовые линии будут теперь как бы обтекать шарик, не заходя внутрь его (рис. 29.3, *б*)*.

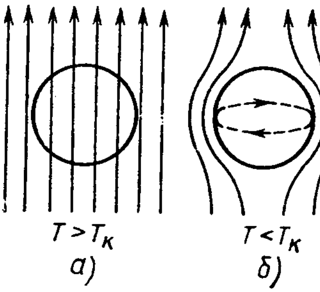


Рис. 29.3

Вытеснение магнитного потока из шарика (шарик был из СП первого рода) объясняется тем, что в поверхностном слое шарика на глубине всего $\sim 10^{-5}$ см возникает *поверхностный постоянный ток, незатухающий по числовому значению* (показан пунктиром на рис. 29.3, *б*), не испытывающий сопротивления и образующий свое собственное магнитное поле, направленное встречно внешнему магнитному полю. Наложение внешнего и внутреннего магнитных полей приводит к тому, что результирующее магнитное поле в образце будет отсутствовать.

---

* Если такой же опыт проделать с обычным проводником, у которого $\rho \to 0$ при понижении температуры, то магнитный поток в нем сохранится неизменным.

§ 29.4. **Уравнение Лондонов.** В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны предложили систему уравнений для макроскопического описания поведения СП первого рода в электромагнитном поле.

Прежде чем записать эти уравнения, отметим, что при температурах выше критической электронная жидкость в проводнике обладает и нормальными и сверхпроводящими свойствами. В соответствии с этим плотность тока обусловлена и нормальными (индекс н) и сверхпроводящими (индекс с) свойствами электронов.

Нормальная плотность тока $\vec{\delta}_н$ в некоторой точке связана с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в этой точке законом Ома

$$\vec{\delta}_н = \gamma_н \vec{E}. \qquad (29.1)$$

Здесь $\gamma_н$ — проводимость электронной жидкости, связанная с нормальными свойствами электронов.

Плотность тока, обусловленная сверхпроводящими свойствами электронов, $\vec{\delta}_с$ может быть выражена через заряд электрона e, скорость движения электронов в электронном облаке $\vec{v}_с$ и числом электронов $n_с$, проходящих через единицу поверхности

$$\vec{\delta}_с = e n_с \vec{v}_с. \qquad (29.2)$$

С учетом тока смещения $\partial\vec{D}/\partial t$ первое уравнение Максвелла можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{\delta}_н + \vec{\delta}_с + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \qquad (29.3)$$

Ток смещения ничтожно мал по сравнению с $\vec{\delta}_н$ и $\vec{\delta}_с$, поэтому его в дальнейшем учитывать не будем. При понижении температуры ниже критической электроны теряют свои свойства в отношении нормальной проводимости и увеличивают свои сверхпроводящие свойства. Поэтому уравнение (29.3) для СП состояния запишем так

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}_с. \qquad (29.4)$$

Сила, действующая на электрон $e\vec{E}$, равна произведению массы электрона m на его ускорение $d\vec{v}_с/dt$, т. е.

$$m \frac{d\vec{v}_с}{dt} = e\vec{E}. \qquad (29.5)$$

Если во второе уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (29.6)$$

подставить $\vec{E} = \frac{m}{e}\,\frac{d\vec{v}_c}{dt}$, а значение $\vec{v}_c$ взять из (29.2) $\vec{v}_c = \frac{1}{en_c}\,\vec{\delta}_c$, то будем иметь $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{e^2 n_c}\,\mathrm{rot}\vec{\delta}_c + \vec{B}\right) = 0$. Отсюда*

$$\mathrm{rot}\,\vec{\delta}_c = -\frac{n_c\,e^2}{m}\,\vec{B}. \qquad (29.7)$$

Уравнения (29.4) и (29.7) получены из уравнений Максвелла для сверхпроводящей среды. Их в литературе называют *уравнениями Лондонов*.

§ 29.5. Сверхпроводящее тело в постоянном магнитном поле. Возьмем ротор от обеих частей уравнения (29.4):

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{\delta}_c.$$

В правую часть его подставим (29.7). Получим

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\left(-\frac{n_c\,e^2}{m}\,\vec{B}\right). \qquad (29.8)$$

Учитывая, что $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, получим

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{\mu_0\,n_c\,e^2}{m}\,\vec{B}. \qquad (29.9)$$

Решим уравнение (29.9) для случая, когда в постоянное во времени магнитное поле помещено сверхпроводящее тело первого рода. Положим, что индукция внешнего магнитного поля $\vec{B}$ параллельна поверхности СП тела, что тело имеет плоскую границу (случай плоской одномерной задачи). Тогда поле будет функцией одной координаты (рис. 29.4, *а*). Индукцию в СП теле при $z = 0$ обозначим $B(0)$.

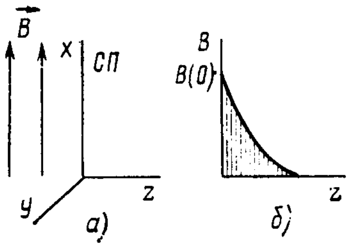


Рис. 29.4

Обозначим

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0\,n_c\,e^2}. \qquad (29.10)$$

Тогда уравнение (29.9) для модуля B запишем так

$$\frac{d^2B}{dz^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,B. \qquad (29.11)$$

Учитывая граничное условие и протяженность тела в направлении оси z запишем решение уравнения (29.11)

$$B = B(0)\,e^{-\frac{z}{\lambda}}, \qquad (29.12)$$

т. е. постоянное магнитное поле в направлении координаты z затухает по экспоненте рис. 29.4, *б*.

* Лондоны предположили, что сумма в скобках равна нулю (не функция координат).

Коэффициент λ имеет смысл глубины проникновения постоянного во времени поля в СП среду. На глубине $z = \lambda$ индукция, снизится по сравнению с индукцией на поверхности тела в $e = 2{,}718$ раза.

Если подставить значения μ_0, m, n_c и e в формулу (29.10), то например для олова при $T = 0$ К, $\lambda = 5{,}1 \cdot 10^{-6}$ см*, т. е. магнитное поле проникает в СП первого рода на ничтожную глубину, а в толще его магнитное поле отсутствует.

Плотность сверхпроводящего тока определим по (29.4).

$$\vec{\delta}_c = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{B};\ \vec{v}_c = \vec{j}\,\frac{dB_x}{dz};\ \vec{\delta}_c = \vec{j}\left(-\frac{1}{\lambda\mu_0}\right)B(0)\,e^{-\frac{z}{\lambda}}.$$

Плотность тока направлена по оси $-\vec{j}$.

§ 29.6. Сверхпроводники второго рода. Сверхпроводники второго рода обладают таким свойством: если их поместить во внешнее магнитное поле, то в некоторой области значений индукции внешнего поля ($B_{к1} < B < B_{к2}$) оно частично проникает в толщу проводника за счет того, что в СП образуются тонкие нити магнитных потоков, расположенных по внешнему магнитному полю (рис. 29.5). Эти нити в сечении СП тела расположены по углам равносторонних треугольников. По каждой нити проходит обычно один квант магнитного потока $\Phi_0 = h/2e$, где h — постоянная Планка, а e — заряд электрона. Числовое значение $\Phi_0 = 2{,}07 \cdot 10^{-15}$ Вб.

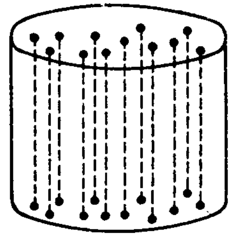


Рис. 29.5

Каждая магнитная нить окружена вращающимися вокруг нее электронами, которые и создают магнитное поле в ней.

Магнитные нити находятся в состоянии нормальной проводимости, а пространство между нитями — в состоянии сверхпроводимости.

Если интенсивность внешнего магнитного поля увеличивать при $B > B_{к1}$, то число магнитных нитей растет, нити сближаются и при некоторой $B = B_{к2}$, когда расстояние между нитями становится равным $\sim 10^{-4}$ см, сверхпроводящее состояние образца разрушается, и он целиком переходит в нормальное проводящее состояние.

Состояние образца, когда у него сочетаются сверхпроводящие области с областями нормальной проводимости, называют *смешанным состоянием или шубниковской фазой* (по имени советского физика Л. В. Шубникова).

Если вдоль СП второго рода пропустить ток от внешнего источника — (так называемый *транспортный ток*, он пойдет по областям СП), то вследствие его механического взаимодействия с нитями магнитного потока последние придут в движение и нитевидная структура разрушится. Таким образом, по толще сверхпроводников второго

* Теория Лондонов справедлива качественно. Экспериментальное и теоретическое значения λ различаются в 2—3 раза. В дальнейшем теория их была уточнена.

рода в отличие от сверхпроводников первого рода может проходить магнитный поток, но не может проходить транспортный ток.

Сверхпроводники второго рода изготавливают из сплавов металлов, например, из сплава свинца с висмутом (чистый свинец — СП первого рода).

§ 29.7. Сверхпроводники третьего рода. Сверхпроводники *третьего* рода (или жесткие сверхпроводники), так же, как и СП второго рода, выполняют из сплавов металлов, но образцы должны иметь крупные неоднородности.

В этом случае магнитные нити, о которых шла речь в предыдущем параграфе, как бы закрепляются на неоднородностях (это явление называется *пиннингом*). При этом если по СП пропускать транспортный ток и он невелик, то магнитные нити, за счет закрепления их, в движение не приходят, и структура не разрушается. Если транспортный ток и далее увеличивать, то при достижении им некоторого критического значения нити магнитных потоков сорвутся с закреплений и весь образец перейдет в состояние нормальной проводимости.

Значение критического тока зависит от размера и количества неоднородностей в СП теле (причем, неоднородности не должны быть точечными), температуры, интенсивности внешнего магнитного поля и механической обработки, которой подвергается образец. Таким образом, по СП третьего рода при выполнении определенных условий может проходить и магнитный поток и течь транспортный ток. Сверхпроводники третьего рода наиболее перспективны для создания источников сильных магнитных полей.

§ 29.8. Описание поля в сверхпроводниках с нитевидной структурой. Расчет *переменного* во времени электромагнитного поля в СП с нитевидной структурой должен дать возможность определить конфигурацию поля, величины допустимых транспортных токов, потерь от гистерезиса, потерь от вихревых токов в областях нормальной проводимости.

Методы расчета в настоящее время разрабатываются. Один из возможных методов расчета полей в СП с нитевидной структурой изложен в статье W. T. Carr в журнале Physical Review серия B, 1975 г., № 4. В этом методе поле описывается уравнениями Максвелла в анизотропной среде с различными μ_r и γ в направлении и поперек нитей.

§ 29.9. Применение сверхпроводников. Наиболее широко применяются сверхпроводники при создании сверхмощных магнитов, которые могут создавать магнитные поля с индукцией в 10 и даже 20 Тл. Такие магниты используют в физике элементарных частиц, при создании магнитогидродинамических генераторов, магнитных насосов и других устройств. Так как сопротивление обмоток этих магнитов равно нулю, то тепловой энергии в обмотках при протекании постоянного тока не выделяется, и при работе их энергия расходуется лишь на получение жидкого гелия, в котором находится магнит.

В настоящее время проводятся интенсивные работы по созданию поездов на магнитной подушке. Сверхпроводящие магниты находятся в вагонах и создают интенсивное магнитное поле над рельсами. Вследствие возникновения эффекта отталкивания магнитов от рельсового пути, поезд висит над рельсами и может перемещаться без трения об них.

Явление сверхпроводимости применяется также в радиотехнике, вычислительной и измерительной технике, в трансформаторо- и электромашиностроении. Если объемный резонатор поместить в жидкий гелий, то потери в стенках резонатора становятся ничтожно малыми, вследствие чего добротность его возрастает в десятки тысяч раз.

В вычислительной технике уже длительное время используются запоминающие устройства — криотроны. В основу принципа действия сверхчувствительных магнитометров положен эффект квантования магнитного потока в сверхпроводниках второго рода.

Интенсивные работы проводятся по созданию сверхпроводящих силовых кабелей с жилами из ниобия или свинца. Большие надежды связывали с получением металлического водорода, который, как полагали, обладал бы сверхпроводящими свойствами при комнатной температуре. Но до сверхпроводимости при комнатной температуре пока еще очень далеко. В настоящее время материалом, имеющим наивысшую критическую температуру $T_к$ 22,3 К является сложное соединение Nb_3Ge.

Вопросы для самопроверки

1. Какие физические свойства скачком изменяются у сверхпроводников при плавном снижении температуры до критической? 2. Может ли переход от состояния нормальной проводимости к состоянию сверхпроводимости происходить под действием магнитного поля при неизменной температуре? 3. Дайте определение сверхпроводников первого рода. 4. Шарик из ниобия при температуре выше критической находится в постоянном магнитном поле. Какое явление произойдет, если температура шарика станет ниже критической? 5. Поясните, как можно получить уравнения Лондонов из уравнений Максвелла. 6. В постоянном во времени однородном магнитном поле индукции $\vec{B}_0$ при температуре выше критической находится отрезок проволоки из ниобия. Ось проволоки параллельна $\vec{B}_0$. Составьте уравнение для описания поля в проволоке, если температура станет ниже критической. 7. Как определить квант магнитного потока через постоянную Планка и заряд электрона? Каково значение кванта магнитного потока? 8. Чем отличаются сверхпроводники третьего рода от сверхпроводников второго рода? 9. Почему при относительно высоких частотах сопротивление сверхпроводников оказывается все же не равным нулю? 10. Назовите известные Вам применения сверхпроводников.

ПРИЛОЖЕНИЕ И

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ СЕТОК И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТОК

Довольно широко распространены: а) числовой расчет электрических и магнитных полей по методу сеток; б) моделирование электрических и неэлектрических (магнитных) полей по методу электрических сеток. Несмотря на близость названий, содержание методов существенно различно.

§ И.1. Расчет полей по методу сеток. Метод сеток представляет собой числовой метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к уравнениям в конечных разностях.

На рис. И.1, *а* изображен участок двухмерного поля. На нем показаны оси x и y декартовой системы и квадратная сетка со стороной b. Точки (узлы) сетки обозначены цифрами *0, 1, 2, 3, 4*. Примем φ_0 — потенциал точки *0*, φ_1 — потенциал точки *1* и т. д. Выведем приближенное соотношение между потенциалами $\varphi_0 - \varphi_4$, вытекающее из уравнения Пуассона. Среднее значение первой производной $\partial\varphi/\partial x$ на участке *1—0* приближенно равно $(\Delta\varphi/\Delta x)_{1-0} = (\varphi_1 - \varphi_0)/b$, на участке *0—2* $(\Delta\varphi/\Delta x)_{0-2} = (\varphi_0 - \varphi_2)/b$.

Вторая производная $\partial^2\varphi/\partial x^2$ в точке *0* приближенно равна разности средних значений первых производных $\partial\varphi/\partial x$ на участках *1—0* и *0—2*, отнесенных к расстоянию b между серединами отрезков *1—0* и *0—2*:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2} = \frac{(\Delta\varphi/\Delta x)_{1-0} - (\Delta\varphi/\Delta x)_{0-2}}{b} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{b^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - 2\varphi_0}{b^2}.$$

Запишем уравнение Пуассона для двухмерного электростатического поля:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = -\rho_{своб}/\varepsilon_a,$$

где $\rho_{своб}$ — свободный заряд в точке *0*.

Подставим в уравнение Пуассона приближенные выражения для $\partial^2\varphi/\partial x^2$ и $\partial^2\varphi/\partial y^2$.

Получим

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = -\frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_a} b^2. \qquad (И.1)$$

Если поле описывается уравнением Лапласа, то $\rho_{своб} = 0$ и

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0. \qquad (И.2)$$

Уравнения (И.1) и (И.2) определяют связь между потенциалами квадратной сетки и являются основными в методе сеток. Чем меньше шаг сетки b, тем меньше погрешность от замены уравнений Пуассона или Лапласа соответственно на уравнения (И.1) или (И.2). При расчете по методу сеток применяют не только квадратные, но и иные сетки, например полярные. Для них имеются формулы в конечных разностях, в общем случае отличные от формул (И.1) и (И.2).

Допустим, что двухмерное поле, подчиняющееся уравнению Лапласа, ограничено некоторыми поверхностями и известны значения производной от потенциала по нормали к каждой граничной поверхности во всех точках (задача Неймана). Возможны и комбинированные типы задач, когда для одной части граничных поверхностей известны значения потенциалов, а для другой — значения нормальной производной от потенциала.

Требуется найти значения потенциалов прямоугольной сетки этого поля. Последовательность расчета для задачи Дирихле проиллюстрируем на примере расчета поля, образованного двумя параллельными прямыми углами рис. И.1, *б*. В месте поворота расстояние между параллельными сторонами угла изменяется. Потенциал верхней границы положим равным 75 единицам, нижней — нулю. Будем полагать, что объемные заряды отсутствуют.

1. Тонкими сплошными линиями нанесем квадратную сетку. Обозначим узлы получившихся квадратов буквами а, б, в, г, д ... (расположены в кружках).

2. Произвольно выберем значения потенциалов узлов а, б, в, ... Объем дальнейшей вычислительной работы в значительной мере зависит от того, насколько

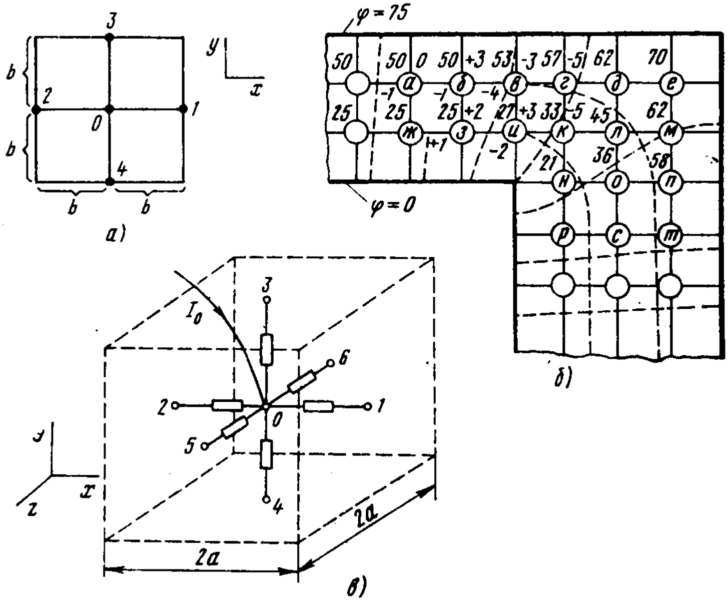


Рис. И.1

близко к действительному выбрано первоначальное распределение потенциала. Поэтому следует стремиться к возможно более правдоподобному первоначальному распределению потенциала.

Для этой цели нанесем на рис. И.1 приближенную картину силовых и эквипотенциальных линий и, руководствуясь ею, запишем начальные значения потенциалов узлов (цифры слева и вверху у каждого узла).

3. Для каждого узла находим остаток в формуле (И.2). Так, остаток для точки б $53 + 50 + 75 + 25 - 4 \cdot 50 = 3$. Записываем величину остатка в правом верхнем углу у каждого узла.

4. Поскольку в каждом узле остаток должен быть равен нулю, то дальнейший и наиболее трудоемкий этап расчета состоит в таком изменении потенциалов узлов, чтобы остатки во всех узлах не превышали некоторой заданной величины (скажем, 1 или 2).

Поэтому в одной из точек с наибольшим значением остатка изменяем потенциал приблизительно на $^1/_4$ от остатка (в рассматриваемом случае в точке *б* уменьшаем потенциал на единицу и затем пересчитываем остатки во всех остальных узлах). Вновь полученные остатки записываем в левом нижнем углу у каждого узла (на рисунке они выписаны не для всех узлов). Такая операция выполняется несколько раз до тех пор, пока все остатки не станут равны или меньше заданной величины. Процесс является сходящимся. При расчетах используют вычислительные машины.

Метод применим для магнитных и электрических полей, линейных и нелинейных сред, для неизменных и изменяющихся во времени полей.

§ И.2. Моделирование полей по методу электрических сеток. Моделирование полей с помощью электрических сеток представляет собой метод экспериментального исследования полей, подчиняющихся уравнению Пуассона, путем измерения потенциалов узлов электрической сетки, которой заменяется сплошная среда. Положим, что требуется выяснить распределение потенциалов в некоторой области (сплошной среде), потенциалы границ которой заданы. Кроме того, известны электрическая или соответственно магнитная проницаемость среды, а также плотность распределенных источников в исследуемом поле (например, плотность свободных зарядов $\rho_{своб}$ в моделируемом электрическом поле).

Исследуемое поле заменим полем в проводящей среде с проводимостью γ. Моделируемую область разделим на элементарные объемы, например на кубы. Каждый элементарный объем заменим электрической схемой замещения в соответствии с рис. И.1, *в*.

Пусть ребро куба имеет длину $2a$. Центр куба обозначим цифрой 0, а точки лежащие в серединах его граней,—цифрами 1—6. Шаг сетки в направлении осей x, y, z обозначим Δx, Δy, Δz ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$). Проводимость между любой из точек 1—6 и центральной точкой 0: $g = \gamma\, 2a\, 2a/a = 4\gamma a$.

К узлу 0 от источника тока подтекает ток $I_0 = 2\delta\,(x, y, z)\, a^3$. К остальным узлам, не показанным на рис. И.1, *в*, подтекают свои токи. Эти токи, подводимые в центры кубов, выполняют функции распределенных источников в исходном поле. Значения токов определяются по заданной плотности распределенных источников. По первому закону Кирхгофа, сумма токов, подтекающих к узлу 0, должна быть равна нулю, т. е.

$$(\varphi_1-\varphi_0)\,g+(\varphi_2-\varphi_0)\,g+(\varphi_3-\varphi_0)\,g+(\varphi_4-\varphi_0)\,g+ \\ +(\varphi_5-\varphi_0)\,g+(\varphi_6-\varphi_0)\,g+I_0=0. \qquad \text{(И.3)}$$

Потенциал точки 0 $\varphi_0 = \varphi\,(x, y, z)$

Потенциал точки 1

$$\varphi_1=\varphi\,(x+\Delta x, y, z) \cong \varphi\,(x, y, z)+\frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+ \\ +\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\ldots.$$

Потенциал точки 2

$$\varphi_2=\varphi\,(x-\Delta x, y, z) \cong \varphi\,(x, y, z)-\frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}- \\ -\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\ldots.$$

Следовательно, $(\varphi_1-\varphi_0)\,g+(\varphi_2-\varphi_0)\,g=(\Delta x)^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}g=4\gamma a^3\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Проделав аналогичные выкладки с остальными слагаемыми уравнения (И.3), подставив в него выражение для I_0 и сократив на $4a^3$, получим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\delta\,(x, y, z)}{\gamma}.$$

Таким образом, распределение потенциалов в электрической сетке с точностью до частных производных четвертого порядка от φ, умноженных на $a^2/4!$, удовлетворяет тому же уравнению, что и распределение потенциалов в сплошной среде.

Распределение потенциалов в узлах 0 элементарных объемов измеряется компенсационным способом.

Моделирование позволяет на относительно дешевой модели исследовать поля, с трудом или совсем не поддающиеся аналитическому расчету.

ПРИЛОЖЕНИЕ К

МЕТОД ГРИНА

§ К.1. Формулы Грина. Формулы Грина получают из теоремы Остроградского—Гаусса

$$\int\limits_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint\limits_S \vec{D} d\vec{S} = \oint D_n \, dS. \qquad (К.1)$$

где D_n — нормальная составляющая некоторого вектора $\vec{D}$ на поверхности $\vec{S}$, ограничивающей объем V; D_n направлена в сторону внешней нормали $\vec{n}$ по отношению к объему V.

Положим, $\vec{D} = \alpha\vec{F}$, где α — произвольный скаляр, а вектор $\vec{F}$ представим как градиент некоторой скалярной функции φ: $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$. Тогда $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\alpha \operatorname{grad} \varphi) = \nabla (\alpha\nabla\varphi) = \alpha\nabla^2\varphi + \nabla\varphi\nabla\alpha$.

Подстановка в (К.1) дает:

$$\int\limits_V (\alpha\nabla^2 \varphi + \nabla\varphi\nabla\alpha) \, dV = \oint\limits_S D_n \, dS.$$

Учтем, что проекция вектора $\vec{D}$ на направление нормали $\vec{n}$ есть $\alpha \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$

$$\int\limits_V (\alpha\nabla^2 \varphi + \nabla\varphi\nabla\alpha) \, dV = \oint\limits_S \alpha \, (\partial\varphi/\partial n) \, dS. \qquad (К.2)$$

Формулу (К.2) называют *первой формулой Грина*.

Поменяв местами скаляры α и φ и вычтя одно равенство из другого, получим *вторую формулу Грина*

$$\int\limits_V (\alpha\nabla^2 \varphi - \varphi\nabla^2 \alpha) \, dV = \oint\limits_S \left(\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\alpha}{\partial n} \right) dS. \qquad (К.3)$$

§ К.2. Гармонические функции. Функцию, непрерывную в рассматриваемой области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению Лапласа в этой области называют гармонической.

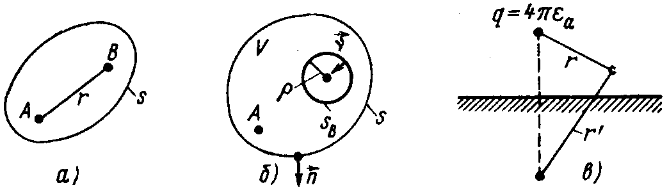


Рис. К.1

Центрально симметричная функция $1/r$, где r расстояние от некоторой фиксированной точки объема (например, от точки A рис. К.1, *а*) до текущей точки B, является гармонической функцией. Для плоскопараллельного поля гармоническая функция равна $\ln r$. Примем в формуле (К.3), что α и φ — гармонические функции, $\alpha = 1/r$ и функция φ выполняет роль потенциала φ. Тогда $\nabla^2\varphi = 0$, $\nabla^2\alpha = 0$ и для поверхности, ограничивающей область V, имеет место соотношение

$$\oint\limits_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] dS = 0. \qquad (К.4)$$

§ К.3. Интеграл Грина для гармонических функций. Применим формулу (К.4) для определения потенциала в произвольной точке B объема V. С этой целью окружим точку B сферой S_B малого радиуса ρ (рис. К.1, *б*) и применим формулу (К.4) к поверхностям S и S_B:

$$\int\limits_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS + \int\limits_{S_B} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \nu} \right) dS = 0,$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S; ν — нормаль к поверхности S_B, обе они внешние к объему V.

Устремим радиус ρ к нулю. При этом $\lim \int\limits_{S_B} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = 0$, так как $\partial\varphi/\partial\nu$ величина ограниченная (функция φ непрерывна в области V); S_B стремится к нулю, как ρ^2, а $1/r$ возрастает, как $1/\rho$. При $\rho \to 0$ потенциал точек поверхности S_B примерно равен потенциалу φ_B точки B:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \nu} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

Кроме того, учтем, что

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\int\limits_{S_B} \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \nu} dS \right] = \lim_{\rho \to 0} \varphi_B \int\limits_{S_B} \frac{dS}{r^2} = \varphi_B \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi\varphi_B.$$

Таким образом, потенциал произвольной точки B внутри области v:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi} \left[\int\limits_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) \right] dS. \qquad \text{(К.5)}$$

Он определяется значением потенциала и нормальной производной потенциала на поверхности, ограничивающей область V. Физически первое слагаемое формулы (К.5) обусловлено поверхностными зарядами, как бы вкрапленными в поверхность S, а второе—зарядами диполей на поверхности, т. е. двойным заряженным слоем.

§ К.4. Функция Грина. Положим, что в точке A (рис. К.1, *в*) находится точечный заряд $q = 4\pi\varepsilon_a$, а поверхность S является проводящей и заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Вследствие электростатической индукции на внутренней стороне поверхности возникают отрицательные наведенные заряды плотностью $-\sigma$, а на наружной $+\sigma$. Суммарный отрицательный заряд на внутренней поверхности равен суммарному положительному заряду на внешней поверхности и каждый из них численно равен q.

Обозначим расстояние произвольной точки B до точки A через r, а до произвольной точки на поверхности — через R.
Тогда:

$$\varphi_B = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_S \frac{\sigma dS}{R}.$$

Если точка B будет находиться на поверхности S, то ее потенциал по условию задачи должен быть равен нулю.

Функцией Грина $G = 1/r + g$ называют функцию, которая обладает свойством потенциала произвольной точки B в рассматриваемой задаче, т. е. она является гармонической функцией и принимает нулевое значение на поверхности S. Функция G определена через функцию g, представляющую собой решение уравнения Лапласа для рассматриваемой задачи. Основная трудность решения методом функций Грина заключается в отыскании функции g. Она найдена лишь для некоторых частных случаев: например, в поле точечного заряда $q = 4\pi\varepsilon_a$, расположенного на расстоянии h от проводящей плоскости (см. рис. К.1, *в*), $G = 1/r - 1/r'$.

§ К.5. Определение потенциала φ через функции Грина в общем случае. В объеме V, ограниченном поверхностью S, имеются объемные заряды ρ, распределенные с заданной плотностью, известны потенциалы поверхностей и функция Грина. Положим в формуле (К.4): $\alpha = g = G - 1/r$, учтем, что $\nabla^2\alpha = 0$, а $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_a}$. Тогда

$$\int\limits_V -\left(G - \frac{1}{r}\right)\frac{\rho}{\varepsilon_a}\,dV = \oint\limits_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(G - \frac{1}{r}\right) - \left(G - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dS. \qquad (К.6)$$

Кроме того, из физических соображений следует, что потенциал произвольной точки B определяется объемными и поверхностными зарядами, а также двойным заряженным слоем (диполями) на границе:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \varphi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}dS. \qquad (К.7)$$

Вычтем (К.6) из (К.7), учтем, что функция Грина на поверхности S равна нулю. Получим формулу для определения потенциала произвольной точки φ_B через функцию Грина и ее нормальную производную:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V G\rho dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \varphi\frac{\partial G}{\partial n}dS, \qquad (К.8)$$

где n — внешняя нормаль к объему. Примеры на применение формулы (К.8) см. в [15].

ПРИЛОЖЕНИЕ Л

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегральных уравнений (ИУ) представляет собой метод расчета магнитных и электрических полей, основанный на введении вторичных источников и состоящий в сведении задачи к интегральным уравнениям и их числового решения на ЭВМ. В настоящее время его применяют главным образом для решения двухмерных задач, но с увеличением объема памяти ЭВМ он может быть применен и к трехмерным полям.

Имеется два варианта метода интегральных уравнений, отличающиеся видом вторичных источников. Идея метода и его первый вариант предложены Г. А. Гринбергом [7]. Дальнейшее развитие метода и доведение его до практических расчетов осуществлено О. В. Тозони [17], Э. В. Колесниковым, В. М. Алехиным и др. Разработка второго варианта метода осуществлена О. В. Тозони [18] и др.

§ Л.1. Первый вариант метода интегральных уравнений. Идею метода рассмотрим применительно к магнитному полю, образованному намагничивающими обмотками, геометрия и ток в которых известны, и намагниченными ферромагнитными телами. Однородно намагниченные ферромагнитные тела в расчетном смысле можно заменить вакуумом (воздухом), поместив на поверхность ферромагнитных тел поверхностные токи с плотностью σ на единицу длины (пояснения о поверхностных токах см. в § 14, 24, где они были обозначены $\delta_м$). Значение σ в различных точках поверхности неизвестно и подлежит определению. Значение плотности тока проводимости δ в обмотках известно.

Рассмотрим условия на границе между ферромагнитным телом (среда *e*) и воздухом (среда *i*) — рис. Л.1, *а*. На рис. Л.1, *б* показана та же граница, что и на рис. Л.1, *а*, но ферромагнитное (ф. м) тело заменено воздухом, а на границе помещен поверхностный ток с плотностью σ на единицу длины.

Тангенциальные (о чем свидетельствует индекс *t*) составляющие напряженности поля на границе H_t^i в среде *i* и H_t^e в среде *e* состоят каждая из двух компонент: из составляющей H_t', обусловленной всеми токами проводимости,

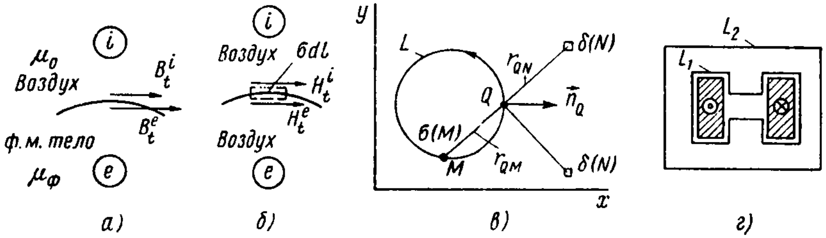


Рис. Л.1

протекающими по обмоткам электрического аппарата, и всеми поверхностными токами (их называют *связанными*) на границе ферромагнитной области, кроме поверхностного тока σdl, протекающего по рассматриваемому элементу поверхности, и из составляющей H_t'', обусловленной поверхностным током σdl в рассматриваемом элементе поверхности ферромагнитного тела (выбран направленным к читателю).

Тангенциальные составляющие индукции на границе: $B_t^i = \mu_0 H_t^i$; $B_t^e = \mu_ф H_t^e$, где $\mu_ф$ — асболютная магнитная проницаемость ферромагнитного тела.

Каждая из них состоит из двух компонент:

$$B_t^i = B_t' - B_t''; \quad B_t^e = B_t' + B_t'', \tag{Л.1}$$

но

$$B_t' = \mu_0 H_t' \quad и \quad B_t'' = \mu_0 H_t'', \tag{Л.2}$$

так как они определены, когда среда — неферромагнитна.

Применим закон полного тока к пунктирному контуру на рис. Л.1, *б*, охватывающему кусочек границы длиной *dl*. Получим

$$2H_t'' = \sigma. \tag{Л.3}$$

При составлении циркуляции по этому контуру учли, что по верхней и нижней границам контура составляющих H_t' в соответствии с рис. Л.1, *б* нет. Так как тангенциальные составляющие напряженности поля на границе воздух—ферромагнитное тело равны, то

$$B_t^i/\mu_0 = B_t^e/\mu_ф. \tag{Л.4}$$

Имея в виду (Л.2), (Л.3), (Л.1) и (Л.4) получаем

$$H_t' = \frac{\sigma}{2} \frac{\mu_ф + \mu_0}{\mu_ф - \mu_0}.$$

Следовательно,

$$B_t' = \mu_0 H_t' = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \frac{\mu_ф + \mu_0}{\mu_ф - \mu_0}.$$

Отсюда находим поверхностную плотность тока для гладких участков поверхности ферромагнитного тела через B_t', $\mu_ф$ и μ_0:

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_ф - \mu_0}{\mu_ф + \mu_0} B_t'. \qquad (Л.5)$$

Но B_t' можно определить как ротор от векторного потенциала $\vec{A}$, который определяется всеми токами проводимости δ в обмотках и поверхностными токами σ на поверхности ферромагнитных тел.

Для плоскопараллельного поля

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} \int\limits_S \delta(N) \ln \frac{1}{r_{QN}} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \oint\limits_L \sigma(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M,$$

где A — значение вектора потенциала в произвольной точке наблюдения Q, расположенной на контуре ферромагнитного тела L; N — произвольная точка сечения обмотки с током, плотность тока в которой $\delta(N)$; r_{QN} — расстояние от точки Q до точки N (рис. Л.1, *в*); M — произвольная точка на контуре L с плотностью поверхностного тока $\sigma(M)$.

Обход контура выберем против часовой стрелки, а нормаль n направим во внешнюю область по отношению к контуру L. Тогда $B_t' = -\partial A/\partial n$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{QN}} = \frac{d}{dr_{QN}} \ln r_{QN} \frac{\partial r_{QN}}{\partial n} \frac{1}{r_{QN}} \cos(r_{QN}, n),$$

то

$$B_t' = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int\limits_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} dS_N - \frac{\mu_0}{2\pi} \oint\limits_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_м. \qquad (Л.6)$$

Подставив формулу (Л.6) в (Л.5), получим интегральное уравнение второго рода Фредгольма относительно плотности поверхностного тока на контуре L ферромагнитного тела:

$$\sigma(Q) + \frac{1}{\pi} \lambda \oint\limits_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_м = -F(Q). \qquad (Л.7)$$

Здесь $\lambda = (\mu_ф - \mu_0)/(\mu_ф + \mu_0)$

$$F(Q) = \frac{1}{\pi} \lambda \int\limits_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q) dS_N}{r_{QN}}.$$

Для каждой точки Q контура L функцию $F(Q)$ можно подсчитать до решения уравнения (Л.7), так как распределение тока проводимости $\delta(N)$ и геометрия магнитной системы известны. Если контуров, ограничивающих ферромагнитную область, несколько (т. е. область многосвязна) — например, на рис. Л.1, *г* область ограничивают два контура L_1 и L_2 — то уравнение (Л.7) заменяют системой уравнений (число уравнений равно числу контуров). В каждое уравнение входят слагаемые от поверхностных токов и в других контурах (а не только от поверхностных токов в своем контуре).

Уравнение типа (Л.7) решают на ЦВМ итерационным методом, заменяя интегралы конечными суммами. Чтобы итерационнный процесс сходился, используют интегральные соотношения для контуров L, вытекающие из закона полного тока. После нахождения $\sigma(Q)$ определяют B_t', а по ним и по A — любую точечную или интегральную характеристику поля.

Подробное рассмотрение первого варианта метода, составление программ для ЭВМ, числовые примеры и распространение метода на нелинейные магнитные системы читатель найдет в [18]. О применении метода к электростатическим полям см. [11].

§ Л.2. Второй вариант метода интегральных уравнений. Первый вариант метода ИУ имеет тот недостаток, что если параметр λ в уравнении (Л.7) окажется близок к единице, то малая погрешность, допущенная при подсчете $F(Q)$ по формуле (Л.8), приведет к большой погрешности при определении закона распределения σ. Чтобы этого недостатка избежать, в [18] описан второй вариант метода ИУ с иными вторичными источниками. Рассмотрим основы второго варианта. С этой целью запишем систему уравнений Максвелла сначала через векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$, а затем через векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$, полагая, что ε_r и μ_r являются функциями координат.

Первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}=\frac{1}{\mu_0}\left\{\frac{1}{\mu_r}\operatorname{rot}\vec{B}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu_r},\vec{B}\right]\right\}=\vec{\delta},$$

но

$$\operatorname{grad}\frac{1}{\mu_r}=\frac{d}{d\mu_r}\left(\frac{1}{\mu_r}\right)\operatorname{grad}\mu_r=-\frac{\nabla\mu_r}{\mu_r^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{\delta}+\mu_0\left\{-\frac{1}{\mu_0}\frac{[\vec{B}\,\nabla\mu_r]}{\mu_r}\right\}. \tag{Л.9}$$

С учетом того, что ε_r —функция координат, теорему Гаусса $\operatorname{div}\vec{D}=\operatorname{div}\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\rho$ запишем так:

$$\operatorname{div}\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon_0\left[\varepsilon_r\operatorname{div}\vec{E}+(\vec{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r)\right]=\rho$$

или

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_r}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{-\varepsilon_0\frac{(\vec{E}\,\nabla\varepsilon_r)}{\varepsilon_r}\right\}. \tag{Л.10}$$

В свою очередь

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \text{ и } \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{Л.11}$$

Поле векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в вакууме описывается системой уравнений (Л.9)—(Л.11). Из нее следует, что поле создается первичными источниками $\mu_a\vec{\delta}$ и зарядами ρ/ε_a, а также вторичными источниками—плотностями тока намагниченности

$$\vec{\delta}_н(Q,t)=-\frac{1}{\mu_0}\frac{[\vec{B}(Q,t)\,\nabla_Q\mu_r]}{\mu_{rQ}} \tag{Л.12}$$

и объемными зарядами поляризации плотностью

$$\rho_п(Q,t)=-\varepsilon_0\left(\frac{\vec{E}(Q,t)\,\nabla_Q\varepsilon_r}{\varepsilon_{rQ}}\right). \tag{Л.13}$$

Здесь Q — произвольная точка наблюдения; t — время.

Запишем теперь систему уравнений Максвелла через векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ (исключив $\vec{B}$ и $\vec{E}$):

$$\operatorname{rot}\vec{D}=-\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\mu_0\,\mu_r\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\varepsilon_0\left\{-\frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{[\vec{D},\nabla\varepsilon_r]}{\varepsilon_r}\right\}. \qquad (Л.14)$$

$$\operatorname{div}\vec{D}=\rho,\ \operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta}, \qquad (Л.15)$$

$$\operatorname{div}\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\left\{-\mu_0\frac{[\vec{H},\nabla\mu_r]}{\mu_r}\right\}. \qquad (Л.16)$$

Системы (Л.14)—(Л.16) свидетельствуют о том, что поле векторов $\vec{D}$ и $\vec{H}$ в вакууме создается системой первичных источников-плотностей токов проводимости $\vec{\delta}$ и объемных зарядов ρ и системой вторичных источников-плотностями фиктивных магнитных токов:

$$\vec{\sigma}_{\text{м}}(Q,t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{[\vec{D}(Q,t)\,\nabla_Q\,\varepsilon_r]}{\varepsilon_{rQ}}, \qquad (Л.17)$$

и фиктивных магнитных зарядов:

$$\rho_{\text{м}}(Q,t)=-\mu_0\frac{[\vec{H}(Q,t),\,\nabla_Q\,\mu_r]}{\mu_{rQ}}. \qquad (Л.18)$$

Поскольку свободных магнитных зарядов не существует, то

$$\int_V\rho_{\text{м}}(Q,t)\,dV+\oint_S\sigma_{\text{м}}(Q,t)\,dS=0. \qquad (Л.19)$$

Если расчет магнитного поля постоянного тока в кусочно-неоднородной среде вести с использованием вторичных источников второго типа, т. е. фиктивных магнитных зарядов $\rho_{\text{м}}(Q,t)$ и поверхностной плотности токов на поверхностях ферромагнитных тел $\sigma_{\text{м}}(Q,t)$, то, выразив $\vec{H}(Q,t)$ через первичные и вторичные источники и подставив ее в формулу

$$\sigma_{\text{м}}(Q,t)=2\frac{\mu_i-\mu_e}{\mu_i+\mu_e}\left(\vec{H}(Q,t),\vec{n}(Q)\right)=2\lambda_{\text{м}}\left(\vec{H}(Q,t)\,\vec{n}(Q)\right) \qquad (Л.20)$$

и в формулу (Л.18), получим два следующих интегральных уравнения относительно $\sigma_{\text{м}}$ и $\rho_{\text{м}}$ (в статическом поле $\sigma_{\text{м}}$ и $\rho_{\text{м}}$ будут функциями только Q):

$$\sigma_{\text{м}}(Q)+\oint_{S_\text{ф}}\sigma_{\text{м}}(M)\,\lambda(Q)\frac{\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{2\pi r_{QM}^3}\,dS_{\text{м}}+\int_{S_\text{ф}}\rho_{\text{м}}(M)\,\lambda(Q)\frac{\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{2\pi r_{QM}^3}\,dV_{\text{м}}=$$

$$=-\frac{\mu_0}{2\pi}\int_D\vec{\sigma}(N)\,\lambda(Q)\frac{[\vec{r}_{QN},\vec{n}_Q]}{r_{QN}^3}\,dV_N. \qquad (Л.21)$$

$$\rho_{\text{м}}(Q)-\int_{V_\text{ф}}\rho_{\text{м}}(M)\frac{\left(\vec{r}_{QM},\nabla_Q\,\mu_r\right)}{4\pi\mu_r(Q)\,r_{QM}^3}\,dV_{\text{м}}-\int_{S_\text{ф}}\sigma_{\text{м}}(M)\frac{\left(\vec{r}_{QM},\nabla_Q\,\mu_r\right)}{4\pi\mu_r(Q)\,r_{QM}^3}\,dS_{\text{м}}=$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_D\vec{\delta}(N)\frac{[\nabla_Q\,\mu_r,\vec{r}_{QN}]}{\mu_r(Q)\,r_{QN}^3}\,dV_N, \qquad (Л.22)$$

где $S_ф$ — поверхность; $V_ф$ — объем ферромагнитика; D — объем, занятый токами проводимости $\vec{\delta}$; $\vec{n}_Q$ — единичная нормаль к поверхности в точке Q.

Систему уравнений (Л.21—Л.22) решают совместно с уравнением (Л.19) либо прямым, либо итерационным методом. Методику решения и программы для ЦВМ см. в [18].

§ Л.3. Расчет полей, используя интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Ряд задач на расчеты полей может быть сведен к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В качестве примера рассмотрим определение линейной плотности поверхностных зарядов на двух цилиндрических электродах A и B длиной l_1 и l_2, соответственно, и радиуса r_0, расположенных в воздухе как показано на рис. Л.2, *а*.

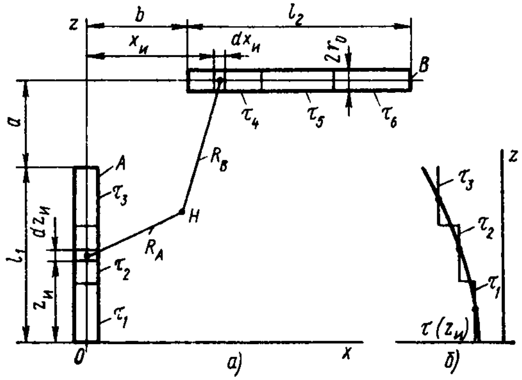


Рис. Л.2

Размеры l_1, l_2, a, $b \gg r_0$. Потенциал электрода A равен φ_A, электрода B — минус φ_A. Воспользуемся декартовой системой координат; полагаем, что плоскость xoz проходит через осевые сечения электродов.

Индекс и будет относиться к точке истока, н — к точке наблюдения. Координаты точки истока $x_и$, $z_и$, координаты точки наблюдения $x_н$, $z_н$.

Потенциал произвольной точки наблюдения $\varphi_н$ определяется распределенными по поверхностям обоих электродов зарядами.

При отмеченных допущениях примем, что распределенные по поверхностям заряды электродов находятся на оси каждого электрода. Потенциал точки наблюдения

$$\varphi_н = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{l_1} \frac{\tau(z_и)\,dz_и}{R_A} + \int_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_и)\,dx_и}{R_B}\right].$$

Здесь

$$R_A = \sqrt{(z_и - z_н)^2 + x_н^2}, \quad R_B = \sqrt{(z_и - z_н)^2 + (x_и - x_н)^2}.$$

Поместим точку наблюдения на поверхность электрода A. Тогда $\varphi_н = \varphi_A$, $x_н = r_0$ и

$$4\pi\varepsilon_0\,\varphi_A = \int_0^{l_1} \frac{\tau(z_и)\,dz_и}{\sqrt{(z_и - x_н)^2 + r_0^2}} + \int_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_и)\,dx_и}{\sqrt{(a + l_1 - z_н)^2 + (x_и - r_0)^2}} \quad \text{(Л.23)}$$

Поместим точку наблюдения на поверхность электрода B, тогда $\varphi_н \doteq -\varphi_A$, $z_н = a + l_1$ и

$$-4\pi\varepsilon_0 \varphi_A = \int\limits_0^{l_1} \frac{\tau(z_и)\, dz_и}{\sqrt{[z_и - (a+l_1)]^2 + x_н^2}} + \int\limits_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_и)\, dx_и}{\sqrt{r_0^2 + (x_и - x_н)^2}}. \qquad (Л.24)$$

Уравнения (Л.23) и (Л.24) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода относительно линейной плотности поверхностных зарядов $\tau(z_и)$ и $\tau(x_и)$ на электродах A и B. Эти плотности являются плавно изменяющимися функциями координат $z_и$ и $x_и$, соответственно. На рис. Л.2, *б* показан примерный график зависимости $\tau(z_и)$ на электроде A в функции от координаты z.

Уравнения (Л.23) и (Л.24) решим приближенно. С этой целью разделим каждый электрод на n одинаковой длины участков. Для пояснения хода решения положим $n = 3$. Тогда электрод A состоит из участков *1*, *2*, *3*, электрод B — из участков *4*, *5*, *6*. Положим, что на каждом участке плотность τ своя и неизменна. В соответствии с этим заменим плавную кривую $\tau(z_и)$ рис. Л.2, *б* на ступенчатую с плотностями τ_1, τ_2, τ_3 и плавную зависимость $\tau(x_и)$ на ступенчатую с плотностями τ_4, τ_5, τ_6.

Полагаем, что суммарный заряд каждого электрода при плавном изменении τ и при ступенчатом одинаков. Каждый из интегралов в (Л.23) и (Л.24) может быть заменен на три интеграла и соответствующая τ (поскольку она постоянна) может быть вынесена из под знака интеграла. После деления уравнений (Л.23) и (Л.24) на $4\pi\varepsilon_0\varphi_A$ и введения линейной плотности зарядов в относительных единицах $\tau'_к = \dfrac{\tau_к}{4\pi\varepsilon_0\varphi_A}$, получим систему из шести (в общем случае из $2n$) уравнений с шестью неизвестными $\tau'_1 - \tau'_6$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \alpha_{51} & \alpha_{61} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \alpha_{52} & \alpha_{62} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{63} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \alpha_{54} & \alpha_{64} \\ \alpha_{15} & \alpha_{25} & \alpha_{35} & \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{36} & \alpha_{46} & \alpha_{56} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \\ \tau'_4 \\ \tau'_5 \\ \tau'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (Л.25)$$

Первый индекс i у коэффициента α_{ij} соответствует участку истока, второй индекс j — участку наблюдения. Если обозначить $z_{ин}$ и $x_{ин}$ — нижние пределы изменения координаты точки истока и $z_{ив}$ и $x_{ив}$ — верхние пределы изменения координаты точки истока, то
при $i = j = 1 \div 3$

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{z_{ин}}^{z_{ив}} \frac{dz_и}{\sqrt{(z_и - z_н)^2 + r_0^2}} = \ln \frac{z_{ив} - z_н + \sqrt{(z_{ив} - z_н)^2 + r_0^2}}{z_{ин} - z_н + \sqrt{(z_{ин} - z_н)^2 + r_0^2}}. \qquad (Л.26)$$

При $i = j = 4 \div 6$

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{x_{ин}}^{x_{ив}} \frac{dx_и}{\sqrt{(x_и - x_н)^2 + r_0^2}} = \ln \frac{x_{ив} - x_н + \sqrt{(x_{ив} - x_н)^2 + r_0^2}}{x_{ин} - x_н + \sqrt{(x_{ин} - x_н)^2 + r_0^2}}. \qquad (Л.27)$$

При $i = 4 \div 6$; $j = 1 \div 3$

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{x_{\text{ин}}}^{x_{\text{ив}}} \frac{dx_{\text{и}}}{\sqrt{(z_{\text{и}} - z_{\text{н}})^2 + (x_{\text{и}} - x_{\text{н}})^2}} = \ln \frac{x_{\text{ив}} - x_{\text{н}} +}{x_{\text{ин}} - x_{\text{н}} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+\sqrt{(x_{\text{ив}} - x_{\text{н}})^2 + (z_{\text{и}} - z_{\text{н}})^2}}{+\sqrt{(x_{\text{ин}} - x_{\text{н}})^2 + (z_{\text{и}} - z_{\text{н}})^2}}. \qquad (\text{Л.28})$$

По формуле (Л.28) могут быть подсчитаны и коэффициенты α_{ij} при $i = 4 \div 6$, $j = 4 \div 6$, когда $i \neq j$, если принять $z_{\text{и}} - z_{\text{н}} = r_0$.

При $i = 1 \div 3$, $j = 4 \div 6$

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{z_{\text{ин}}}^{z_{\text{ив}}} \frac{dz_{\text{и}}}{\sqrt{(z_{\text{и}} - z_{\text{н}})^2 + x_{\text{н}}^2}} = \ln \frac{z_{\text{ив}} - z_{\text{н}} + \sqrt{(z_{\text{ив}} - z_{\text{н}})^2 + x_{\text{н}}^2}}{z_{\text{ин}} - z_{\text{н}} + \sqrt{(z_{\text{ин}} - z_{\text{н}})^2 + x_{\text{н}}^2}}. \qquad (\text{Л.29})$$

По формуле (Л.29) могут быть определены также коэффициенты α_{ij} при $i = 1 \div 3$, $j = 1 \div 3$ и $i \neq j$, если заменить $x_{\text{н}}$ на r_0.

Емкость между электродами A и B равна суммарному заряду электрода A $Q = l_1/3\,(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ разделенному на разность потенциалов $(\varphi_A - \varphi_B)$ между электродами

$$C = \frac{Q}{2\varphi_A} = \frac{2}{3}\pi\varepsilon_0\, l_1\,(\tau_1' + \tau_2' + \tau_3').$$

ПРИЛОЖЕНИЕ М

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОТОБРАЖЕНИЙ)

Метод конформных преобразований — это метод анализа и расчета неизменных во времени двухмерных электрических и магнитных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа, основу которого составляет конформное преобразование совокупности точек одной плоскости комплексного переменного в совокупность точек другой плоскости.

§ М.1. Комплексный потенциал. Расположим оси декартовой системы в исследуемом поле так, что ось z будет перпендикулярна полю. Плоскость xoy будем называть плоскостью z. Каждая точка поля имеет некоторые коодинаты x и y. Плоскость xoy можно считать комплексной плоскостью. Тогда положение точки на плоскости будет характеризоваться комплексным числом $z = x + jy$.

Совокупность точек x, y, принадлежащих эквипотенциальной линии, обозначим $(x, y) = U$, а совокупность точек, принадлежащих силовой линии, назовем $V(x, y) = V$. Из § 19.5 известно, что в любой точке поля силовые и эквипотенциальные линии взаимно перпендикулярны. Следовательно, одну из функций, например, U, можно принять в качестве действительной, а другую V — в качестве мнимой части некоторого комплексного числа $w = U + jV$.

Функцию w называют *комплексным потенциалом*. Он описывает совокупность силовых и эквипотенциальных линий поля, т. е. ортогональную сетку или картину поля. Функцию U называют *потенциальной функцией*, а V — *функцией потока* (так как через нее может быть найден поток вектора, характеризующего это поле.)

Функциям U и V можно придать и противоположный смысл, т. е. U считать функцией потока, а V—потенциальной функцией. Если считать U потенциальной функцией, то проекция вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = i\vec{E}_x + j\vec{E}_y$ на оси x и y соответственно равны:

$$E_x = -\partial U/\partial x, \quad E_y = -\partial U/\partial y. \tag{М.1}$$

[ср. с формулами (19.8)].

Отсюда следует, что модуль напряженности поля $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = |dw/dz|$.

Аналогичные формулы можно записать и для магнитного поля.

§ М. 2. Конформные преобразования. *Конформными* называют преобразования совокупности точек плоскости $z = x + jy$ в совокупность точек плоскости $w = U + jV$, осуществляемых с помощью аналитической функции $w = f(z)$.

Функцию $w = U + jV = f(x + jy) = f(z)$ называют *аналитической*, если производная $\frac{dw}{dz} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от направления, вдоль которого взято приращение Δz, т. е. производная dw/dz аналитической функции должна быть одна и та же, если приращение dz один раз взять вдоль оси x ($dz = dx$), а другой раз — вдоль оси y, ($dz = jdy$). Так, когда приращение Δz взято вдоль оси x, приращение функции $\Delta_x w = \Delta_x U + j\Delta_x V$. Если же приращение Δz взять вдоль оси y, то приращение функции $\Delta_y w = \Delta_y U + j\Delta_y V$.

Учитывая сказанное, имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial x}; \tag{М.2}$$

$$\frac{\partial w}{j\partial y} = -j\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}. \tag{М.3}$$

Приравнивая правые части (М.2) и (М.3), получим уравнения, называемые *уравнениями Коши — Римана*:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \tag{М.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{М.5}$$

Можно доказать, что функции U и V удовлетворяют уравнению Лапласа. Чтобы убедиться в том, что функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, продифференцируем (М.4) по x, а (М.5) — по y:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}.$$

Если сложить эти равенства, то получим уравнение Лапласа относительно U. Аналогичное доказательство можно провести и по отношению к функции V.

Если в произвольной точке a плоскости z (рис. М.1, *а*) взять два приращения: $dz_1 = |dz_1|\, e^{j\beta_{z1}}$ и $dz_2 = |dz_2|\, e^{j\beta_{z2}}$, то в точке a плоскости w (каждой точке плоскости z соответствует некоторая точка в плоскости w, рис. М.1, *б*) им будут соответствовать приращения $dw_1 = |dw_1|\, e^{j\beta_{w1}}$ и $dw_2 = |dw_2|\, e^{j\beta_{w2}}$. В силу аналитичности функции w:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{\text{при } dz = dz_1} = \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{\text{при } dz = dz_2}.$$

Поэтому

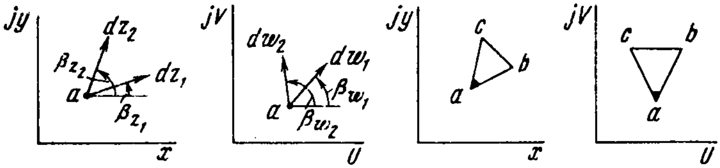
$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|}\, e^{j(\beta_{w1} - \beta_{z1})} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|}\, e^{j(\beta_{w2} - \beta_{z2})}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} \text{ и } \beta_{w2} - \beta_{w1} = \beta_{z2} - \beta_{z1}.$$

т. е. бесконечно малой фигуре на плоскости z (рис. М.1, *в*) соответствует подобная бесконечно малая фигура на плоскости w (рис. М.1, *г*).

По определению, напряжение между двумя близлежащими точками на плоскости z равно $E_z dz \cos(\widehat{\vec{E}_z \vec{dz}}) = \operatorname{Re}\vec{E}_z \overset{*}{dz}$. Напряжение между одноименными точками на плоскости w равно $\operatorname{Re}\vec{E}_w \overset{*}{dw}$. Эти напряжения равны $\operatorname{Re}\vec{E}_z dz^* = \operatorname{Re}\vec{E}_w d_w^*$. Усилим это равенство $\vec{E}_z \overset{*}{d_z} = \vec{E}_w \overset{*}{dw}$. Отсюда $\vec{E}_z = \vec{E}_w \left(\frac{dw}{dz}\right)^*$. Здесь $(dw)/d_z)^*$ —



а) б) в) г)

Рис. М.1

сопряженный с dw/dz комплекс. Составим выражение для $(dw/dz)^*$ и $\vec{E}_w$ в декартовой системе координат, отсчитывая углы от осей x и U, расположив их параллельно. Когда U — потенциальная функция, то, используя (М.4) и (М.5) имеем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^* = \frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} e^{j \operatorname{arctg}\frac{\partial U/\partial y}{\partial U/\partial x}}$$

и так как напряженность направлена от более высокого потенциала к более низкому, то $\vec{E}_w = E_w e^{j180^\circ}$. Если V — потенциальная функция, то $\vec{E}_w = E_w e^{-j90^\circ}$ и

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^* = \frac{\partial V}{\partial y} - j\frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2} e^{j \operatorname{arctg}\frac{(-\partial V/\partial x)}{\partial V/\partial y}}.$$

§ М. 3. Прямая и обратная задачи расчета полей по методу конформных преобразований. Прямая задача формулируется следующим образом. Известны эквипотенциальные линии плоскости z (обычно известны две линии в соответствии с тем, что поле создается двумя электродами—поверхность каждого электрода является эквипотенциалью). Требуется найти такую функцию $w = f(z)$, действительная U или мнимая V часть которой удовлетворяла бы уравнению $U(xy) = \text{const}$ [или соответственно уравнению $V(xy) = \text{const}$)] на поверхности каждого электрода*.

Если такая функция будет найдена, то на основании теоремы единственности она будет правильно описывать поле во всех его точках.

Очертания электродов в плоскости z могут быть самыми различными. Если очертания электродов таковы, что их можно представить кусочно-ломаными прямыми, то задачу нахождения функции $w = f(z)$ можно решить в общем виде

* Отметим, что ортогональная сетка на плоскости w может быть описана не только в декартовой, но и в полярной системе координат. В полярной системе $w = re^{j\beta}$ и линии $r = \text{const}$ могут быть приняты за силовые линии, а линии $\beta = \text{const}$ — за эквипотенциали. Полярная сетка использована в § М.4—М.6.

(по крайней мере принципиально)с помощью интеграла Кристоффеля—Шварца (см. § М.5). Если же очертания электродов в плоскости таковы, что не могут быть представлены кусочно-ломаными прямыми, то общий метод нахождения функции $w = f(z)$ для таких задач не известен. Тем не менее метод конформных отображений часто стремятся применить в этом случае, решая задачу обходным путем — просматривают уже известные решения, имеющиеся в учебной и специальной литературе, и пытаются найти такое, в котором форма двух эквипотенциалей, если не полностью, совпадает с формой (очертаниями) электродов исследуемого поля, то достаточно близка к ним. Это решение и принимают в качестве искомого.

Обратная задача формулируется так. Задана некоторая аналитическая функция $w = f(z)$. Требуется выяснить взаимное конформное преобразование каких полей может быть осуществлено с помощью этой функции. В качестве примера обратной задачи рассмотрим преобразование, осуществляемое функцией $w = m\,\mathrm{Arch}\,\frac{z}{k}$ (М,6), где m и k — некоторые числовые коэффициенты.

Разрешив (М.6) относительно z, будем иметь

$$z = x + jy = k\,\mathrm{ch}\,\frac{U+jV}{m} = k\,\mathrm{ch}\,\frac{U}{m}\cos\frac{V}{m} + jk\,\mathrm{sh}\,\frac{U}{m}\sin\frac{V}{m}.$$

Следовательно,

$$x = k\,\mathrm{ch}\,\frac{U}{m}\cos\frac{V}{m}; \tag{М.7}$$

$$y = k\,\mathrm{sh}\,\frac{U}{m}\sin\frac{V}{m}. \tag{М.8}$$

Разделим уравнение (М.7) на $k\mathrm{ch}\,\frac{U}{m}$ и уравнение (М.8) на $k\,\mathrm{sh}\,\frac{U}{m}$, возведем полученные уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{k^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{U}{m}} + \frac{y^2}{k^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{U}{m}} = 1. \tag{М.9}$$

Полуоси его: $a = k\,\mathrm{ch}\,\frac{U}{m}$, $b = k\,\mathrm{sh}\,\frac{U}{m}$.

Из (М.9) следует, что различным $U = \mathrm{const}$ соответствует семейство конфокальных эллипсов с фокусным расстоянием от центра $k = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Разделим уравнение (М.7) на $k\cos\frac{V}{m}$ и уравнение (М.8) на $k\,\mathrm{sh}\,\frac{V}{m}$, а затем возведя их в квадрат и вычтя одно из другого, получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{k^2\cos^2\frac{V}{m}} - \frac{y^2}{k^2\sin^2\frac{V}{m}} = 1 \tag{М.10}$$

с полуосями $a_1 = k\cos\frac{V}{m}$, $b_1 = k\sin\frac{V}{m}$.

Уравнение (М.10) при $V = \mathrm{const}$ описывает семейство конфокальных гипербол с фокусным расстоянием $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = k$.

Таким образом, функция $w = m\,\mathrm{Arch}\,\frac{z}{k}$ конформно преобразует совокупность взаимно перпендикулярных эллипсов и гипербол на плоскости z (рис. М.2, *а*) в совокупности взаимно перпендикулярных прямых на плоскости w (рис. М.2, *б*).

В § М.2 говорилось, что роль потенциальной функции может выполнять либо функция U, либо функция V.

Если в рассматриваемом случае под потенциальной функцией понимать функцию U, то эквипотенциальные поверхности будут эллипсами, а поле на плоскости z представляет собой поле между двумя конфокальными эллиптическими электродами (рис. М.2, в).

Если же под потенциальной функцией в рассматриваемом примере понимать функцию V, то поле на плоскости z является полем между двумя электродами гиперболической формы (рис. М.2, *г*).

В предельном случае, когда полуось $b_1 = 0$, гипербола вырождается в прямую (рис. М.2, *д*) и исследуемое поле представляет собой поле между двумя плоскими пластинками.

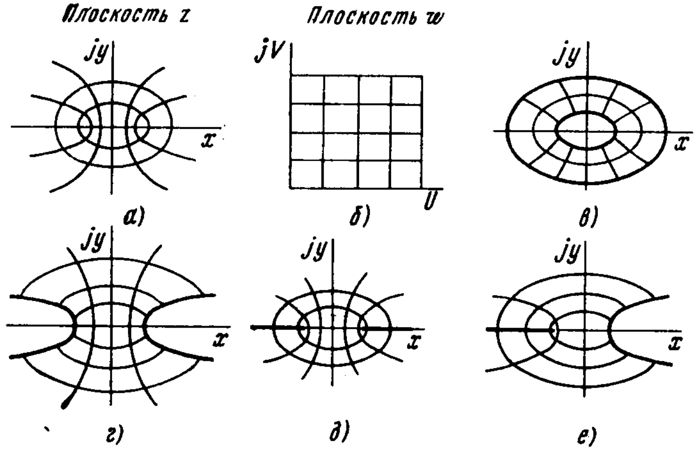


Рис. М.2

Электроды могут иметь и неодинаковую форму, например левый электрод-форму плоской пластинки, а правый — форму гиперболы (рис. М.2, *е*). Постоянные m и k определяют из граничных условий.

§ М.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w. Координату некоторой точки на плоскости w запишем в полярной системе координат: $w = re^{j\beta}$ (обозначения см. на рис. М.3, *б*). Свяжем переменные z и w соотношением $z = x + jy = A \ln \frac{w}{r_0}$. Здесь A и r_0 — некоторые постоянные. Тогда $x = A \ln \frac{r}{r_0}$ и $y = A\beta$.

На плоскости z (рис. М.3, *а*) имеется равномерное поле, образованное двумя плоскими электродами. Один электрод совпадает с осью x и имеет потенциал $\varphi_1 = 0$, второй удален от оси x на расстояние d и имеет потенциал φ_2. На плоскости z эквипотенциали являются прямыми, параллельными оси x, а силовые линии параллельны оси y.

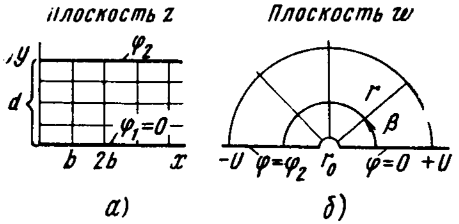


Рис. М.3

На плоскости w при использовании полярной системы координат линии равного потенциала соответствуют линиям $A\beta = \text{const}$, т. е. являются лучами, проведенными из начала координат, а эквипотенциали $A \ln \frac{r}{r_0} = \text{const}$ будут окружностями.

Положим, что эквипотенциаль $y = d$ плоскости z отображена на плоскость w отрицательной полуосью $-U$, а эквипотенциаль $y = 0$ — положительной полуосью $+U$. Точке $w = 0$ соответствует $x = -\infty$. Определим постоянную A. Полупрямой $-U$ соответствует $\beta = \pi$, поэтому $y = d = A\pi$. Отсюда $A = d/\pi$.

Найдем соответствие между силовыми линиями в плоскостях z и w. Силовой линии $x = 0 = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ соответствует полуокружность радиусом $r = r_0$ (r_0 — произвольный радиус, играющий роль единицы измерения).

Силовой линии $x = b = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ отвечает полуокружность радиусом $r = r_0 e^{\frac{b\pi}{d}}$. Силовой линии $x = 2b$ отвечает полуокружность $r = r_0 e^{\frac{2b\pi}{d}}$ и т. д.

Таким образом, поле в верхней полуплоскости w, конформно отображающее равномерное поле на плоскости z, образовано двумя полупрямыми, совпадающими с осью $+U$ и $-U$, которые отделены друг от друга в точке $w = 0$ и разность потенциалов между которыми φ_2.

§ М.5. Интеграл Кристоффеля—Шварца. Поле на плоскости z, образованное между осью x и ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \ldots - z_n$ с конечным числом изломов (рис. М.4, *а*), может быть отображено на верхнюю полуплоскость w с помощью преобразования Кристоффеля — Шварца:

$$dz = A(w - U_1)^{-\alpha_1}(w - U_2)^{-\alpha_2} \ldots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw. \qquad (М.11)$$

Здесь A — некоторая постоянная; $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — произвольно выбранные точки на оси (рис. М.4, *б*), соответствующие одноименным точкам $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Оси x и U расположим параллельно. Исходной точке z_0 отвечает некоторая точка U_0 на оси U. Углы α и γ в формуле (М.11) измеряются в долях от π. Угол α положителен, если при переходе от предшествующего участка к последующему совершается поворот против часовой стрелки. Так, для рис. М.4, *а* $\alpha_1 > 0$, но $\alpha_2 < 0$. Угол $\gamma\pi$ отсчитывается от оси $+x$ до отрезка $z_0 - z_1$. Линия $z_0 - z_1 - \ldots z_n$ представляет собой след электрода, поэтому она является эквипотенциалью. В более общем случае перемещение производят по следу электрода, по выбранной силовой линии и по следу второго электрода или эквипотенциальной линии. Этому перемещению соответствует перемещение вдоль линии U плоскости w*.

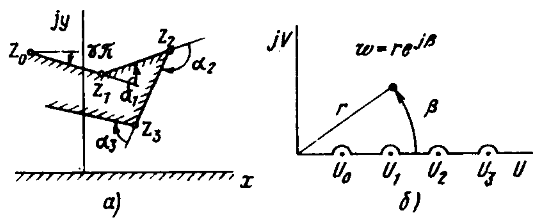


Рис. М.4

При обходе по контуру на плоскости z надо следить за тем, чтобы область, занятая полем, располагалась слева. Биномы $(w - U_k)^{-\alpha_k}$ учитывают, что модуль $\vec{E}_z$ изменяется на каждом линейном участке, но аргумент $\vec{E}_z$ на каждом участке остается неизменным. При переходе через точку излома $z_к$ аргумент $\vec{E}_z$ $\left(\text{он пропорционален } \arg \frac{dw}{dz}\right)$ скачком изменяется на угол $\alpha_к$, поскольку при переходе через точку $U_к$ бином $(w - U_к)$ изменяет знак. В формуле (М.11) граничные условия в поле учтены правильным изменением аргумента dw/dz на всей границе области. Интегрируя (М.11), получим формулу (М.12), которую называют *интегралом Кристоффеля — Шварца*:

$$z = A \int (w - U_1)^{-\alpha_1}(w - U_2)^{-\alpha_2} \ldots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw + C_1 + jC_2, \qquad (М.12)$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

§ М.6. Применение интеграла Кристоффеля — Шварца. Рассмотрим картину поля на краю плоского конденсатора рис. М.5, *а*. Оси координат плоскости z расположим так, что ось x совпадает со средней линией конденсатора (потен-

* Для полярной системы координат U = const не является уравнением эквипотенциали.

циал ее примем равным нулю). Верхний электрод, параллельный оси x, удален от нее на расстояние h и простирается от точки b до $-\infty$, имея потенциал φ_2. Пунктиром показан нижний электрод.

Ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \ldots - z_n$ (рис. М.5, *б*) в данном случае является линия, состоящая из трех участков. Первый идет по верхней части электрода из точки a (из $-\infty$) до точки b. Участок расположен параллельно оси x, поэтому $\gamma\pi = 0$. Второй участок от точки b до точки c (до $-\infty$) по нижней части электрода.

Угол $\alpha = -1$. Третий участок от точки c $(-\infty)$ вдоль положительного направления оси x до точки e, находящийся в $+\infty$. Так как при переходе от второго участка к третьему совершается поворот по часовой стрелке на 180°, то $\alpha_2 = +1$.

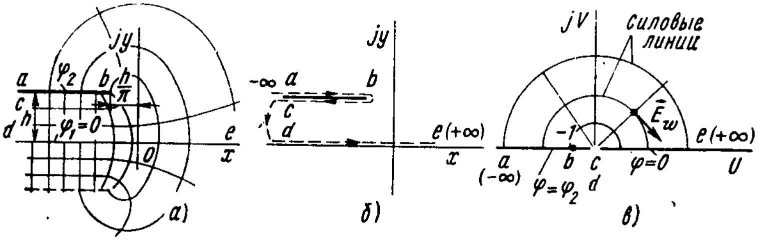


Рис. М.5

Линию ab плоскости z отобразим на отрицательную полуось $-U$ плоскости w так (рис. М.5, *в*), чтобы точка a находилась в точке $U = -\infty$; точка b — в точке $U = -r_0 = -1$; точки c и d — в точке $U = 0$ и точка e — в $U = +\infty$. Тогда в соответствии с формулой (М.11)

$$dz = A\,(w+1)^1\,(w-0)^{-1}\,dw. \tag{а}$$

и

$$z = x + jy = A\int (w+1)\,w^{-1}\,dw + C_1 + jC_2$$

или

$$z = A\left(w + r_0 \ln \frac{w}{r_0}\right) + C_1 + jC_2. \tag{б}$$

На плоскости w воспользуемся полярной системой координат $w = re^{j\beta}$. Разделяя действительные и мнимые части, найдем:

$$x = A\left(r\cos\beta + r_0 \ln \frac{r}{r_0}\right) + C_1; \tag{М.13}$$

$$y = A\,(r\sin\beta + r_0\beta) + C_2. \tag{М.14}$$

Определим постоянные A, C_1 и C_2. Постоянную C_2 найдем из условия, что для участка de плоскости z имеем $y = 0$ и что ему на плоскости w соответствует $\beta = 0$. Подставляя $\beta = 0$ и $y = 0$ в (М.14), находим $C_2 = 0$.

Для нахождения A учтем, что для участка ab плоскости z $y = h$, а на плоскости w этому участку соответствует $\beta = \pi$. Подставляя эти данные в (М.14), определим $A = h/\pi$.

Подставляя данные, соответствующие точке b ($x = -\frac{h}{\pi}$, $\beta = \pi$), в уравнение (М.13), найдем $C_1 = 0$. Учитывая, что $r_0 = 1$, перепишем (М.13) и (М.14):

$$x = \frac{h}{\pi}\left(r\cos\beta + \ln\frac{r}{r_0}\right), \tag{М.15}$$

$$y = \frac{h}{\pi}\,(r\sin\beta + \beta). \tag{М.16}$$

Эквипотенциалями на плоскости w являются прямые $\beta = \text{const}$. Для построения на плоскости z эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ ($\varphi_2 > \varphi > 0$) поступаем следующим образом. Находим угол $\beta = \frac{\varphi}{\varphi_2}\pi$, подставляем найденное β в формулы (М.15) и (М.16) и, придавая r/r_0 различные значения, находим координаты x и y точек искомой эквипотенциали. Для построения силовой линии в формулах (М.15) и (М.16) следует положить $r = \text{const}$ и изменять β от 0 до π. Определяем напряженность поля $\vec{E}_w$ на плоскости w, исходя из того, что $\pi r E_w = \varphi_2$. Так как $\vec{E}_w$ перпендикулярна эквипотенциальной линии, проведенной под углом β к оси $+U$, то $\vec{E}_w$ с осью $+U$ составляет угол $\beta - \pi/2$.

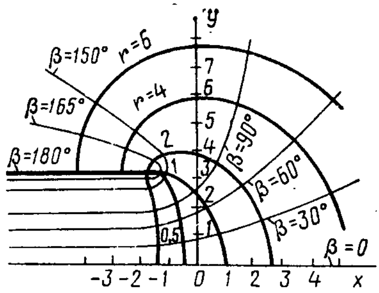


Рис. М.6

Таким образом,

$$\vec{E}_w = \frac{\varphi_2}{\pi r} e^{j(\beta - \pi/2)}. \qquad (\text{М.17})$$

Напряжение между какими-то двумя бесконечно близко расположенными друг к другу точками плоскости z и между соответствующими им точками плоскости w одинаково и равно $\vec{E}_z d\overset{*}{z} = \vec{E}_w d\overset{*}{w}$.

Здесь $\vec{E}_z$ — напряженность поля на плоскости z. Отсюда $\vec{E}_z = \vec{E}_w (dw/dz)^*$.

Подставляя значение $\vec{E}_z$ из (М.17), производной dw/dz из (б) и значение $A = h/\pi$, найдем $\vec{E}_z = -j\frac{\varphi_2}{rh}\left(\frac{w}{r_0 + w}\right)^* e^{j\beta}$.

В качестве примера использования формул (М.15) и (М.16) на рис. М.6 построена картина поля на краю плоского конденсатора при $h = \pi$ и $r_0 = 1$. Эквипотенциали построены при углах 30, 60, 90, 150, 165°. Силовые линии проведены через точки, для которых $r = 0{,}5$, 1, 2, 4, 6.

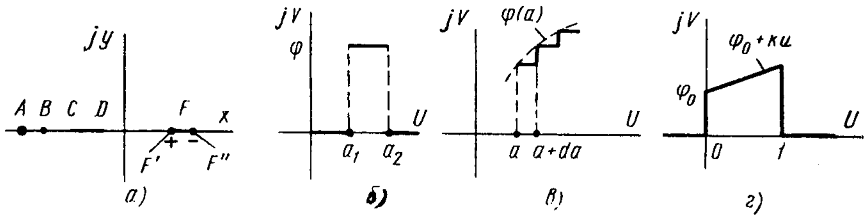


Рис. М.7

Применим интеграл Кристоффеля—Шварца к расчету поля, образованного линейным зарядом, находящимся в точке A на оси x плоскости z (рис. М.7, a), заряженной полоской на отрезке C—$Д$ и диполя в окрестности точки F. Характер изменения dz/dw при перемещении по оси U плоскости w такой:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{w - b}{(w - a)\sqrt{(w - c)(w - d)}\,(w - f)^2}. \qquad (\text{М.18})$$

Точки a, b, c, d, f оси U плоскости w соответствуют точкам A, B, C, D, F оси x плоскости z. Поясним формулу (М.18). При переходе через точку A напряженность $\vec{E}_z$, принимая бесконечно большое значение в точке A, скачком изменяет направление на 180°. Такой характер изменения $\vec{E}_z$ создает множитель $1/(w - a)$ в формуле (М.18). В точках C и D аргумент $\vec{E}_z$ изменяется на 90°. Это учтено наличием в формуле (М.18) множителя $[(w-c)(w-d)]^{-1/2}$. В некоторой точке B оси x плоскости z $E_z = 0$. Это учтено множителем $(w-b)$ в числителе (М.18). В окрестности точки F, где расположен диполь, характер изменения $\vec{E}_z$ получим предельным переходом, устремив точки F' и F'' к точке F, при этом в формуле (М.18) появляется множитель $1/(w-f)^2$. Интегрируя (М.18), получим $z = f(w)$, а затем найдем и $w = f_1(z)$.

§ М.7. Интеграл Шварца. Положим, что на некотором участке границы исследуемой области поля на оси x плоскости z в интервале значений x от A_1 до A_2 потенциал равен φ, а вне этого отрезка $\varphi = 0$. Упомянутым точкам на оси U плоскости w соответствуют точки a_1 и a_2 (рис. М.7, *б*). При переходе через эти точки скачком изменяется направление напряженности поля, скачком должно изменяться и значение dz/dw. В соответствии с этим

$$\frac{dz}{dw} = \frac{M}{(w-a_1)(w-a_2)} = N\left(\frac{1}{w-a_2} - \frac{1}{w-a_1}\right),$$

здесь $N = (a_2 - a_1) M$. Следовательно,

$$z = N \ln \frac{w-a_2}{w-a_1} + jC, \qquad (\text{М}.19)$$

где jC — некоторая постоянная.

При $w < a_1$ и $w > a_2$, $z = x + jy = x + j0$. Дробь под знаком логарифма положительна, поэтому $C = 0$. При переходе через точку a_1 под знаком логарифма в (М.19) оказывается отрицательное число, поэтому: $z = x + jy = N \times \ln \left|\frac{w-a_1}{w-a_2}\right| + j\pi N$.

Приращение аргумента комплексного потенциала w при переходе через точку a_1 равно $V = \varphi$. Но при этом приращение аргумента w должно быть равно приращению аргумента z (см. § М.2), поэтому $\pi N = \varphi$, $N = \varphi/\pi$ и $z = \frac{\varphi}{\pi} \ln \frac{w-a_2}{w-a_1}$.

Если потенциал φ вдоль оси U плоскости w будет изменяться плавно, то, заменив U на переменную интегрирования a, сначала представим плавную кривую в виде ступенчатой, как это показано на рис. М.7, *в*, и составим приращение потенциала на бесконечно малом отрезке da оси U плоскости w: $dz = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln \frac{w-(a+da)}{w-a} = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln\left(1 + \frac{da}{a-w}\right)$.

Разложим логарифм в ряд, и учитывая, что $\frac{da}{a-w} \ll 1$, возьмем лишь первый член этого ряда $dz = \frac{\varphi(a)}{\pi}\frac{da}{a-w}$.

Комплексный потенциал z получим, просуммировав приращения dz от всех скачков потенциала на отрезках da, т. е. осуществив интегрирование:

$$z = \frac{1}{\pi}\int \varphi(a) \frac{da}{a-w}. \qquad (\text{М}.20)$$

В качестве примера составим $z = f(w)$ для поля, образованного границей магнитопровода трансформатора с потенциалом $\varphi = 0$ (отрезок $-\infty$, 0 оси U плоскости w) и высоковольтной обмоткой на участке *0—1*, потенциал которой линейно нарастает по закону $\varphi_0 + ka$ — рис. М.7, *г*. В этом случае

$$z = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_0 + ka}{a-w} da = \frac{1}{\pi}(\varphi_0 + kw)\ln\frac{w-1}{w} + \frac{k}{\pi}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Н

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И СТАНОВЛЕНИЯ КУРСА ТОЭ

История развития электротехники — это постепенное, сначала медленное, а затем более быстрое накопление опытных фактов об электромагнитных явлениях, обобщение и анализ их, формулировка основных теоретических положений и законов и вытекающих из них следствий. Теоретическое осмысливание электромагнитных явлений шло одновременно с применением их для нужд практической деятельности человека. Термин «электротехника» происходит от слова «электричество». Под *электричеством* принято понимать совокупность электрических зарядов и связанных с ними электромагнитных полей. Термин «электричество» происходит от греческого слова «электрон», что означает янтарь. Еще со времен Фалеса Милетского (VI в. до н. э.) была известна способность янтаря электризоваться при трении о сукно. Происхождение второго основополагающего термина, используемого в электротехнике, — магнита — связывают с именем пастуха Магнеса, который пас овец на склонах горы Иды на острове Крит и его сандалии, скрепленные железными шипами, притягивались кусками магнитного железняка на этой горе.

Термин «электричество» был введен в первом трактате об электрических и магнитных явлениях: «О магните, магнитных телах и о большом магните — Земле», составленном в 1600 г. английским ученым У. Гильбертом. В то время электрические явления рассматривались вне связи с магнитными. Понятие проводника и непроводника электричества было введено С. Греем в 1729 г. Два вида электричества (которым впоследствии присвоили знаки + и —) установлены французским физиком Ш. Ф. Дюфе в 1733—1737 гг. Американский ученый (и одновременно с этим крупный общественный деятель) В. Франклин в 1748 г. сформулировал закон сохранения заряда. Им впервые была высказана мысль об электрической природе молнии и предложен громоотвод, как средство защиты от нее.

Великий русский физик, астроном, химик, художник и поэт М. В. Ломоносов впервые сформулировал принцип сохранения материи. По предложению М. В. Ломоносова Петербургская Академия Наук выдвинула конкурсную тему на 1755 г. «сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию». М. В. Ломоносов в «Слове о явлениях воздушных от электрической силы происходящих» в 1753 г. дал объяснение происхождению атмосферного электричества и высказал мысль, что опыты с электричеством «великую надежду к благополучию человеческому показуют».

На взаимную связь электрических и магнитных явлений впервые указал русский академик Ф. Эпинус в 1758 г. в своем докладе на тему «Речь о родстве электрической силы и магнетизма» в Петербургской Академии Наук.

Французский ученый Ш. О. Кулон в 1785 г. сформулировал закон, получивший его имя. Им было введено понятие напряженности электрического поля. Понятие электрической цепи было введено итальянским физиком А. Вольта в 1794 г., им же предложены электрометр и конденсатор. Вольтов столб датируют 1800 г. Серия опытов с электрической дугой с помощью батареи из 4 200 медных и цинковых кружков была предпринята русским академиком В. В. Петровым в 1802 г. Он же является основоположником электрохимии.

Воздействие тока на магнитную стрелку изучалось датским ученым Х. Эрстедом в 1819 г., а взаимодействие токов — французским ученым А. Ампером в 1820 г. Ампер ввел термины электрический ток, сила тока, электрическое напряжение. Опытные данные Ж. Б. Био и Ф. М. Совара по исследованию магнитных полей были математически обобщены П. С. Лапласом в 1820 г. (Закон Био—Савара — Лапласа).

Понятие физического поля своими истоками восходит к английскому ученому И. Ньютону и французскому философу и математику Р. Декарту. В законе тяготения, установленном И. Ньютоном в 1687 г, поле играло вспомогательную роль: под ним понималась область пустого пространства, в котором могли проявляться силы дальнодействия. Такая трактовка поля давала простор всевозможным теологическим построениям. Несколько ранее, в 1644 г. в книге Р. Декарта «Начала философии» было развито представление о близкодействии, когда взаимодействие в поле физическом трактовалось как происходящее путем изменения состояния промежуточной среды — эфира. Однако и в концепции Декарта поле было лишено самостоятельного существования.

Применительно к электромагнитному полю материалистическая концепция близкодействия был развита английским ученым М. Фарадеем. Для описания электрических и магнитных полей им введены понятия о силовых и эквипотенциальных линиях. Заряды он рассматривал как особые точки поля, как узлы электрических силовых линий. В математических работах термин «потенциал» введен Д. Грином в 1828 г. Впервые уравнение Лапласа применено французским математиком, астрономом и физиком П. С. Лапласом в его работах по теории тяготения в 1782 г. Уравнение Пуассона изучалось французским математиком С. Д. Пуассоном в 1812 г.

Закон электромагнитной индукции открыт М. Фарадеем в 1831 г. Им же сформулированы законы электрохимии и введен термин диэлектрик. М. Фарадей первым высказал мысль о поляризации диэлектрика в 1837 г. Электромагнитный телеграф был изобретен русским инженером П. Л. Шиллингом в 1832 г. Русский академик Б. С. Якоби в 1838 г. построил первую электрическую машину, которая двигала по Неве лодку с 14 пассажирами. Он же является основателем гальванопластики. Закон Ома предложен в 1826 г. немецким ученым Г. С. Омом.

Абсолютная система электромагнитных единиц была создана немецкими учеными К. Ф. Гауссом и Т. Вебером в 1831—1833 гг. Основы теории потенциала были изложены К. Ф. Гауссом в 1834—1840 гг. в работе «О силах, действующих обратно пропорционально расстоянию». В 1838 г. вышла также его книга «Общая теория земного магнетизма».

Закон Джоуля—Ленца о тепловом действии тока сформулирован английским физиком Д. П. Джоулем (1841 г.), а также русским академиком Э. Х. Ленцем (1842 г.). В 1844 г. Э. Х. Ленц сформулировал закон электромагнитной инерции. Законы (правила) Кирхгофа предложены немецким ученым Г. Р. Кирхгофом в 1845 г., им же впервые предложено понятие о δ-функции, впоследствии (в 1937 г.) использованное П. А. М. Дираком в работах по атомной физике.

Векторный потенциал $\vec{A}$, индуктивность L и взаимную индуктивность M впервые применил немецкий ученый Ф. Нейман в 1845 г. Английский ученый Д. К. Максвелл в 1873 г. ввел понятие о токах смещения и сформулировал совокупность уравнений переменного электромагнитного поля, носящих его имя.

Гипотеза Максвелла о токах смещения в совокупности с представлениями Фарадея о электромагнитном поле дала возможность Максвеллу сделать вывод о существовании электромагнитных волн, в том числе электромагнитных волн в вакууме. Теоретические работы Максвелла явились основой для того, чтобы рассматривать электромагнитное поле как самостоятельный вид материи. Однако, и после работ Максвелла понадобилось еще около 25 лет прежде чем окончательно восторжествовала точка зрения о том, что электромагнитное поле это самостоятельный вид материи.

Движение энергии в упругих средах было теоретически изучено русским ученым Н. А. Умовым в 1874 г. Понятие о массе и количестве движения электромагнитного поля введено немецким ученым М. Абрагамом в 1903 г. Первые опыты по передаче электрической энергии мощностью 4,4 кВт постоянным током на расстоянии 1 км были проведены русским инженером Ф. А. Пироцким в 1875 г. В 1882 г. французский инженер М. Депре передавал электрическую энергию мощностью 2,2 кВт на расстояние 57 км при напряжении 2 кВ. Эти опыты были высоко оценены Ф. Энгельсом в письме к К. Марксу.

Одним из первых применений электричества явилось использование его для электрического освещения («Русский свет») вместо газового. Лампа накаливания была изобретена А. Н. Лодыгиным в 1875 г., а с 1876 г. для электрического освещения на переменном токе стали применять «Свечу Яблочкова».

Применительно к электромагнитному полю движение энергии в нем теоретически было изучено английским ученым Д. Пойнтингом в 1884 г. Русский инженер и ученый М. О. Доливо-Добровольский разработал все основные элементы трехфазной системы передачи энергии. Им был разработан к 1889 г. трехфазный двигатель, трехфазный генератор и трансформатор и осуществлена передача энергии трехфазным током на расстоянии в 175 км (напряжение 15 кВ, мощность установки 150 кВА).

Русский ученый А. Г. Столетов известен открытием фотоэффекта, исследованием электрического разряда в газе и исследованием свойств ферромагнитных материалов (1872 г.). Первым в мире осуществил радиосвязь между кораблями Балтийского флота русский ученый А. С. Попов в 1895 г.

Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн осуществлено немецким ученым Г. Герцем в 1887—1888 гг. Экспериментальное доказательство наличия светового давления, предсказанного Максвеллом, осуществил в своих опытах проф. Московского университета П. Н. Лебедев в 1885 г. Про него лорд Кельвин — титул лорда был пожалован за научные заслуги английскому физику Уильяму Томсону — в разговоре с К. А. Тимирязевым сказал: «Вы может быть знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, а вот Ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами». Проф. П. Н. Лебедев, один из тех, кто составлял гордость русской науки, покинул свою лабораторию в Московском университете в знак протеста против исключения из университета передовых студентов царским министром Кассо в 1911 г. Цикл работ по исследованию зависимости параметров вещества от частоты был проведен в 1908—1911 г. русским ученым В. К. Аркадьевым.

Развитие релятивистской электродинамики происходило в основном в 1905—1908 гг. и связано с именами Г. Лоренца, Г. Минковского и Э. Эйнштейна. К тому времени электромагнитное поле уже трактовали как самостоятельный вид материи. В развитие теории распространения радиоволн существенный вклад внесен советским ученым Рожанским в 1922 г. Советские ученые П. Е. Краснушкин Л. И. Мандельштам, Г. В. Кисунько, а впоследствии В. В. Никольский выполнили важные исследования по волноводам. Явление сверхпроводимости было открыто немецким ученым Г. Камерлинг Онессом в 1911 г. В раскрытии физической природы явления сверхпроводимости и построения ее математической теории большой вклад внесли немецкие ученые В. Мейснер и Р. Оксенфельд, советские ученые П. Л. Капица, Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, Н. Н. Боголюбов и др., английские ученые Г. и Ф. Лондоны, американские —Д. Бардин, Л. Купер, Д. Шриффер и др. Большой вклад в исследование свойств сегнетоэлектриков был внесен в 30 годах 20 столетия советскими учеными И. В. Курчатовым и Б. М. Вулом в 1944 г. создавшим керамический сегнетоэлектрик — титанат бария. Слово «электрет» было введено в литературу английским ученым О. Хевисайдом в 1896 г. Первые электреты были получены японским физиком М. Егути в 1919 г. Советские ученые А. Н. Губкин и Г. И. Сканави в 1957 г. обнаружили электретные свойства некоторых керамических материалов.

Основатель Советского государства В. И. Ленин придавал огромное значение электрификации России. По его инициативе в 1920 г. была создана комиссия ГОЭЛРО по разработке плана электрификации РСФСР. Этот план был рассчитан на 10—15 лет и был высоко оценен В. И. Лениным, который назвал его второй программой партии. В разработке этого плана принимали участие видные советские электротехники, в том числе Г. М. Кржижановский и основатель Московской электротехнической школы К. А. Круг. План предусматривал создание 30 электростанций общей мощностью 1,75 млн. кВт. План был успешно и досрочно выполнен.

Предусмотрено Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года, принятыми на XXVII съезде, довести в 1990 году выработку электроэнергии до 1840—1880 млрд. киловатт—часов, в том числе на атомных электростанциях до 390 млрд. киловатт—часов. Продолжить формирование Единой энергетической системы страны, осуществить строительство межсистемных линий электропередачи напряжением 500, 750 и 1150 киловольт переменного тока и 1500 киловольт постоянного тока, а также распределительных электросетей.

Приведем сведения о времени появления до сих пор не упомянутых основополагающих математических и общетеоретических работ, имеющих непосредственное отношение к курсу ТОЭ.

Французский математик и философ, член Петербургской Академии Наук Ж. Л. Даламбер разработал теорию волнового уравнения и совместно с членами Петербургской Академии Наук Л. Эйлером и Д. Бернулли заложил основы математической физики. Начала теории конформных отображений были созданы Л. Эйлером в 1777 г. Термин «конформный» был введен Петербургским академиком Ф. И. Шубертом в 1789 г.

Прямое преобразование Лапласа датируют 1782 г. Формула преобразования объемного интеграла в поверхностный дана русским ученым М. В. Остроградским в 1828 г. В развитии операторного метода существенную роль сыграла работа русского математика М. Е. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и применение его к интегрированию дифференциальных уравнений» (1862 г).

Теорема свертки впервые была дана русским ученым П. Л. Чебышевым в 1867 г. Интеграл Дюамеля (французский ученый) датируют 1883 г. Основы теории устойчивости движения были созданы русским академиком А. М. Ляпуновым в 1892 г. Операторный метод на основе преобразования Коши был введен в электротехнику английским ученым О. Хевисайдом в 1892—1912 г. В тот же период Хевисайдом была введена в обращение единичная функция. Спектральные представления функций времени и связь спектра функции с энергией — теорему Рейли — датируют 1894 г. Одним из первых, кто применил спектральные представления к электрическим колебаниям был русский ученый Н. Н. Андреев (1915 г).

Символический метод расчета электрических цепей синусоидального тока предложен американским ученым Ч. Штейнметцем в 1894 г. Штейнметц находился в переписке с Лениным и был большим другом Советского государства. Метод гармонического баланса как метод расчета нелинейных электрических цепей при периодических воздействиях был впервые введен французским ученым М. Жоли в 1911 г. Кусочно-линейный метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей был предложен русским ученым Н. Д. Папалекси в 1912 г. Графо-аналитический метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений был введен в электротехнику русским инженером В. Волынкиным в 1916 г. Советский ученый С. А. Гершгорин в 1929 г. предложил метод электрических сеток для решения уравнения Лапласа. Метод медленно меняюняющихся амплитуд предложил в 1927 г. голландский ученый Б. Ван-дер-Поль. Метод малого параметра — французский ученый Г. Пуанкаре в 1928 г. Крупные работы по исследованию полей в поляризуемых и ферромагнитных средах проведены советскими учеными И. Е. Таммом (1929 г)., а также Л. Д. Ландау и Е. М. Лившицем. Большую роль в становлении науки об электричестве сыграла изданная в 1929 г. книга академика И. Е. Тамма «Основы теории электричества». Основополагающие работы по теории нелинейных колебаний выполнены школами советских академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси и академика А. А. Андронова к 1937 г. Методику расчета электрических цепей с нелинейными элементами, имеющими идеально прямоугольные характеристики, предложил немецкий инженер В. Кремер в 1938 г. Частотные методы анализа нелинейных цепей развиты советскими учеными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в 1934—1937 г. Дискретное преобразование Лапласа развито в работах советского ученого Я. З. Цыпкина в 1948—1950 гг. Метод трапецеидальных частотных характеристик разработан советским ученым В. В. Солодовниковым в 1950 г. Первое обстоятельное исследование комбинационных колебаний в нелинейных цепях, мягкого и жесткого возбуждения выполнено немецким ученым К. Хеегнером в 1924 г. Влияние переменной составляющей магнитного потока на постоянную в нелинейной магнитной цепи обнаружено немецким ученым Г. Шунком в 1923 г., а селективное выпрямление — советским ученым М. А. Розенблатом в 1949 г.

Первые работы по синтезу электрических цепей выполнены немецким ученым И. О. Цобелем и американским ученым Р. Фостером в 1924 г., немецким ученым В. Кауером в 1927 г., советскими учеными Г. В. Брауде в 1934 г., С. Н. Евлановым в 1937 г., Б. В. Булгаковым в 1949 г. и др. Теорема В. А. Котельникова о передаче непрерывных сообщений дискретными значениями сформулирована в 1933 г.

Первые работы по структурному анализу и теории сигнальных графов выполнены советским ученым Б. Н. Петровым в 1945 г. и американским ученым С. Мезоном в 1953 г. Применение метода интегральных уравнений к задачам теории поля осуществлено советскими учеными Г. А. Гринбергом в 1948 г. и впоследствии В. М. Алехиным, О. В. Тозони, Э. В. Колесниковым и др. Приоритет исследования задач теории различных полей на моделях принадлежит советским ученым академикам А. Н. Крылову и Н. Н. Павловскому.

С 1 июля 1880 г. начал издаваться первый в России электротехнический журнал «Электричество», редакторами которого в то время были В. Н. Чиколев и Д. А. Лачинов. Первая в мире электротехническая выставка была открыта в Петербурге в апреле 1880 г.

Первым в России высшим учебным заведением электротехнического профиля было основанное в 1886 г. Петербургское техническое училище телеграфных инженеров, которое через пять лет было преобразовано в Петербургский электротехнический институт (ныне ЛЭТИ).

Первая в России электротехническая школа для рабочих была организована в Петербурге в 1896 г. Первое электротехническое училище на уровне техникума было организовано в Москве в 1907 г. В его организации деятельное участие принимал один из основателей электротехнического образования в России профессор Л. И. Сиротский.

Как самостоятельная дисциплина курс ТОЭ начал формироваться с 1904 г., когда профессор В. Ф. Миткевич (впоследствии академик) в Петербургском политехническом институте (ныне ЛПИ) начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений», а проф. К. А. Круг (впоследствии член-кор. АН СССР) с 1905 г. в МВТУ — курс «Теория переменных токов».

Первое издание учебника по ТОЭ К. А. Круга датировано 1916 г., а последнее (шестое) — 1946 г.

В настоящее время учебники и учебные пособия издаются авторами, работающими (или работавшими) в Московском Энергетическом институте, Московском институте радиотехники, электроники и автоматики, Ленинградском Политехническом институте, Московском авиационном институте, Ленинградском электротехническом институте.

Кроме коллективов московских и ленинградских ученых заметный вклад в развитие курса ТОЭ вносят коллективы ученых Киева, Таганрога, Новочеркасска, Новосибирска, Минска, Львова и многих других городов Советского Союза.

Программа курса ТОЭ через каждые 6—7 лет пересматривается и обновляется. В соответствии с этим периодически пересматривается и обновляется содержание учебников и учебных пособий по ТОЭ. Из них устраняется относительно второстепенное и добавляется существенно новое, появляющееся за последние годы. Современный учебник по ТОЭ должен не только соответствовать программе, но и перспективно опережать ее и это, как правило, имеет место.

Исторически дисциплина «Теоретические основы электротехники» явилась как бы той колыбелью, в которой сначала зарождались, развивались, а затем из нее выходили и становились самостоятельными многие электротехнические, энергетические, радиотехнические, связистские и другие дисциплины. В то же время дальнейшее развитие отпочковавшихся от ТОЭ дисциплин оказывало и оказывает существенное влияние на содержание курса ТОЭ.

В период с 1915 г по 1935 г. курс ТОЭ формировался в основном под влиянием энергетики, связи, светотехники, электромашиностроения. В последующий период — примерно с 1936 г. по 1950 г. под влиянием развития радиотехники, автоматики и телемеханики. В последующие годы на курс ТОЭ в значительной мере повлияло развитие электроники, вычислительной техники и теории информации.

К изучению курса ТОЭ студенты приступают после освоения раздела «Электричество и магнетизм» курса физики и разделов «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Матричная алгебра», «Уравнения математической физики» курса математики. Поэтому основные понятия, относящиеся к электромагнитному полю и теории электрических цепей, студентам к началу изучения курса ТОЭ известны. В курсе ТОЭ эти знания расширяются и углубляются применительно к методам анализа, синтеза и экспериментального исследования явлений в электрических цепях и электромагнитных полях. При чтении лекций, проведении упражнений, лабораторных занятий по курсу ТОЭ обращается внимание студентов на ряд методологических вопросов.

1. На то, что необходимость в практическом разрешении той или иной проблемы и в аналитическом исследовании ее возникает, когда появляется жизненная потребность в решении этой проблемы и когда появляются материальные условия для этого.

2. К необходимости решения новой проблемы (задачи) почти одновременно приходят ученые различных стран.

3. Во всех элементах реальных электротехнических устройств происходят достаточно сложные процессы — протекание токов проводимости, токов смещения, выделение тепла, наведение э. д. с. изменяющимся магнитным потоком, накопление и перераспределение энергии электрического и магнитного полей.

Для расчетного отображения этих процессов составляют схемы замещения реальных объектов из идеализированных схемных элементов — резистивных, индуктивных и емкостных. Резистивный элемент учитывает выделение тепла в реальном элементе электротехнического устройства, индуктивный — наведение э. д. с. и накопление энергии в магнитном поле, емкостной — протекание токов смещения и накопление энергии в электрическом поле.

Электротехническое устройство на схеме замещения представляют совокупностью схемных элементов.

4. Способ составления расчетной модели из схемных элементов должен быть согласован с методом исследования и с вопросом о том, на какие конкретно вопросы хотят получить ответ, иначе может получиться, что задача окажется трудноразрешимой.

5. Насколько можно упростить расчетную модель заранее сказать нельзя. Ответ может дать только опыт — расхождение между теорией и экспериментом должно быть незначительным. Если расчетные данные недостаточно сходятся с экспериментом, модель уточняют. Познание, по словам В. И. Ленина, есть «вечное, бесконечное приближение мысли к объекту».

6. В курсе обращается внимание на то, что всякая реальная физическая система в той или иной степени является нелинейной. Однако к какой категории (линейной или нелинейной) ее следует отнести — этот вопрос решают с учетом того, являются ли нелинейные эффекты решающими в работе или второстепенными.

7. В курсе неоднократно отмечается, что опыт является действенным инструментом познания. Обычно то или иное новое физическое явление сначала обнаруживают на практике, а уже затем дают его объяснение с помощью той или иной модели.

8. В курсе отмечается, что каждый последующий нелинейный элемент, идущий на смену предыдущему, как правило функционально богаче, экономичнее, имеет меньшую массу и габариты и обладает бо́льшим быстродействием. Можно сказать, что каждое последующее поколение нелинейных систем отрицает предыдущее, сохраняя все то положительное, что было присуще предыдущим поколениям.

9. В курсе ТОЭ используют общие физические принципы, формирующие диалектическое мышление, такие как принцип симметрии, принцип минимума энергии, закон сохранения заряда, принцип непрерывности магнитного потока.

10. Лабораторные занятия по курсу ТОЭ также способствуют формированию материалистического мировоззрения — при выполнении лабораторных работ студент ощущает реальность явлений, о которых говорится в теории.

11. В курсе ТОЭ обращается внимание на адэкватность отображения физических процессов в электрических цепях временным и спектральным методами и на диалектическое единство этих методов.

12. В заключение отметим, что одной из существенных задач преподавания курса ТОЭ при проведении всех видов занятий со студентами является уменье преподавателя на конкретном материале курса аргументированно подводить студента к правильным мировоззренческим выводам. И здесь многое зависит от научной квалификации преподавателя.

ПРИЛОЖЕНИЕ О

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Значения электрической проводимости γ (См/м) при 20 °С для различных проводниковых материалов

Алюминий . . .	$(3,47—3,8)\cdot 10^7$	Сталь	$(0,73—0,97)\cdot 10^7$
Бронза	$(1,92—4,76)\cdot 10^7$	Серебро	$(6,17—6,25)\cdot 10^7$
Латунь	$(1,26—3,23)\cdot 10^7$	Чугун	$(2—2,5)\cdot 10^7$
Медь	$(5,5—5,72)\cdot 10^7$	Константан . .	$(1,9—2,22)\cdot 10^7$
Никель	$(1,26—1,32)\cdot 10^7$	Нихром	$(0,735—0,48)\cdot 10^7$

Основные свойства некоторых диэлектриков. В табл. 0.1 даны значения диэлектрической проницаемости ε_r при частоте 100 Гц и 100 МГц, тангенса угла потерь tgδ при частоте 1000 Гц и пробивной напряженности (кВ эфф/см) в равномерном поле при частоте 50 Гц.

Таблица 0.1

Материал	ε_r		tg δ	$E_{проб}$
	100 Гц	100 МГц		
Бакелит	4,9	3,7	0,03	240
Бумага	3,7	—	0,009	160
Кварц	3,8	3,8	0,001	80
Плексиглас	3,4	2,6	0,06	400
Полихлорвинил	3,2	2,8	0,01	320
Полистирол	2,55	2,52	0,0005	240
Слюда	5,4	5,4	0,002	100—1000
Трансформаторное масло	2,24	2,18	$<0,001$	120
Фарфор	7	—	—	57

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

а. Учебники

1. *Ионкин П. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. — т. II: Высшая школа; 1976.
2. *Купалян С. Д.* Теоретические основы электротехники. — ч. III: Энергия, 1979.
3. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники. — Энергия: т. II, 1981
4. *Поливанов К. М.* Теоретические основы электротехники. ч. III: Энергия, 1974.

б. Учебные пособия и монографии

5. *Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. — Наука, 1972.
6. *Буккель В.* Сверхпроводимость. — Мир, 1975.
7. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — Наука, 1972.
8. *Кресин В. З.* Сверхпроводимость и сверхтекучесть. — Наука, 1978.
9. *Кухаркин Е. С.* Основы инженерной электрофизики. — Ч. I: Высшая школа, 1982.
10. *Меерович Э. А.* Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. — Энергия, 1966.
11. *Миролюбов Н. Н.* и др. Методы расчета электростатических полей. — Высшая школа, 1963.
12. *Нейман Л. Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. — Госэнергоиздат, 1948.
13. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. — Наука, 1973.
14. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. — ИЛ., 1954.
15. *Стреттон Д. А.* Теория электромагнетизма. — Гостехиздат, 1948.
16. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — Гостехиздат, 1956.
17. *Тозони О. В.* Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. — Техника, 1967.
18. *Тозони О. В.* Метод вторичных источников в электротехнике. — Энергия, 1975.
19. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. — Мир, 1964.
20. Электрорадиоматериалы. Под ред. Т а р е е в а Б. М. — Высшая школа, 1978.

в. Задачники

21. *Бессонов Л. А., Демидова И. Г. Заруди М. Е.* и др. Сб. задач по теоретическим основам электротехники. — Высшая школа, 1980.
22. *Колли Я. Н., Соболева Л. П., Фрадкин Б. М.* Задачник по теоретическим основам электротехники (теория поля), — Энергия, 1972.
23. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. — /Под ред. П. А. И о н к и н а. Энергоиздат, 1982.

г. Контрольные задания и методические указания

24. *Бессонов Л. А., Демидова И. Г., Заруди М. Е.* и др. Контрольные задания и методические указания по курсу ТОЭ. — Высшая школа, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава двадцать шестая

Глава двадцать седьмая

Глава двадцать восьмая

Глава двацать девятая

Учебное издание

Лев Алексеевич Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электромагнитное поле

Зав. редакцией Л. А. Романова
Редактор Е. А. Орехова
Мл. редактор Т. В. Шеганова
Художественный редактор Т. М. Скворцова
Технический редактор З. В. Нуждина
Корректоры: О. Н. Шебашова, И. Л. Козеко

ИБ № 4399

Изд. № ЭР-343. Сдано в набор 27.03.86. Подп. в печать 19.09.86. Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 16,5 усл. печ. л. 16,5 усл. кр.-отт. 17,98 уч. изд. л. Тираж 49 000 экз. Зак. № 1512. Цена 80 коп. Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 129041, Москва, Б. Переяславская, 46