УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин

Теоретические основы электротехники

Том II

5-е издание

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» и «Электроэнергетика»

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2009

ББК 32.211я7
УДК 621.3.01(075)
Д30

Рецензенты:

Бычков Ю. А., заведующий кафедрой ТОЭ Санкт-Петербургского электротехнического университета «ЛЭТИ», д. т. н., профессор

Бутырин П. А., заведующий кафедрой ТОЭ Московского энергетического института (технического университета), д. т. н., профессор, чл.-корр. РАН.

Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В.

Д30 Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 5-е изд. Т. 2. — СПб.: Питер, 2009. — 432 с.: ил.

ISBN 978-5-388-00411-6

Учебник предназначен для студентов и специалистов электротехнических и радиотехнических специальностей. Во втором томе рассматриваются установившиеся и переходные процессы в электрических цепях с распределенными параметрами. Далее подробно обсуждаются вопросы анализа установившихся и переходных процессов в нелинейных электрических и магнитных цепях, нелинейные электронные компоненты электрических цепей, преобразователи параметров электрической энергии (выпрямители, инверторы) и режимы их работы, вопросы устойчивости в нелинейных цепях. Излагается теория электромагнитного поля, приведены основные сведения об электростатическом, электрическом и магнитном полях постоянного тока, переменном поле в диэлектрике и проводящей среде, расчетах основных электромагнитных параметров разнообразных устройств. Рассмотрены методы численного расчета электромагнитного поля: метод сеток, метод конечных элементов и метод интегральных уравнений.

Содержание разделов учебника полностью соответствует программе Министерства образования и науки РФ курсов «Теоретические основы электротехники», «Основы теории цепей», «Теория электромагнитного поля».

ББК 32.211я7
УДК 621.3.01(075)

ISBN 978-5-388-00411-6

Содержание

О структуре тома

<Эта страница будет переписана полностью>

Глава семнадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами при установившемся режиме

17.1. Электрические цепи с распределенными параметрами

В § 3.3 было указано, что, строго говоря, мы всегда имеем цепи, параметры которых в той или иной мере распределены вдоль участков цепи, и только абстрагируясь от действительности, можно предполагать, что параметры цепи — индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость — сосредоточены в определенных участках цепи. Во многих случаях такое допущение не приводит к сколько-нибудь заметным неточностям в результатах проводимого анализа. Изложенная во всех предыдущих главах теория цепей относилась к цепям с сосредоточенными параметрами. Однако мы встречаемся с рядом важных случаев, когда такого рода допущение становится неприемлемым и совершенно необходимо учитывать распределенность параметров вдоль цепи. При этом еще имеем возможность рассматривать электротехническое устройство как электрическую цепь, если оно имеет большую протяженность лишь в одном определенном направлении. В таком случае можно говорить о параметрах, распределенных по длине цепи в этом направлении. Критерием необходимости рассматривать цепь в качестве цепи с распределенными параметрами, как было сказано в § 3.4, является соотношение между интервалом времени распространения электромагнитных волн вдоль всей длины цепи и интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на величину, составляющую заметную долю от полного их изменения в рассматриваемом процессе. Когда эти интервалы времени сравнимы, то цепь необходимо рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

Естественно, что токи и напряжения в таких цепях являются функциями двух независимых переменных — времени t и координаты x, отсчитываемой вдоль указанного выше направления. Соответственно, уравнения, описывающие процессы в этих цепях, являются уравнениями в частных производных. Примерами цепей с распределенными параметрами являются линии передачи электрической энергии, линии связи, высокочастотные коаксиальные линии радиотехнических и телевизионных устройств. Обмотки трансформаторов и электрических машин также должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами при воздействии на них импульсных токов и напряжений, когда промежуток времени изменения токов и напряжений сравним со временем пробега волн вдоль проволоки обмотки.

Параметры цепи могут быть распределены неравномерно вдоль цепи. Однако во многих случаях можно полагать параметры распределенными равномерно вдоль цепи, например для линий передач, в которых сечение проводов, их взаимное расположение и характеристики среды не изменяются по длине линии. Такие линии называют однородными.

В дальнейшем под величинами, обозначаемыми через L, C, r, g и M, будем понимать индуктивность, емкость, сопротивление, проводимость и взаимную индуктивность, приходящиеся на единицу длины линии. Эти параметры, вообще говоря, зависят от частоты. Например, сопротивление r и индуктивность L зависят от частоты вследствие поверхностного эффекта. Исследуя основные процессы в однородных линиях, будем полагать их параметры постоянными. В случае необходимости зависимость параметров от частоты должна быть учтена.

17.2. Уравнения линии с распределенными параметрами

Рассмотрим двухпроводную однородную линию. Величины L и r представляют собой индуктивность и сопротивление пары проводов на единицу длины линии, величины C и g — емкость и проводимость утечки между проводами на единицу длины линии. Координату x будем отсчитывать от некоторой точки линии, в частности от начала линии. Ток в проводах линии зависит не только от t, но и от x, так как на каждом отрезке dx линии ток ответвляется от одного провода к другому в виде тока смещения $Cdx\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и тока проводимости $gdxu$. Поэтому если ток в проводе в точке x равен i, то в точке $x + dx$ он отличается от i на величину $\dfrac{\partial i}{\partial x}dx$ и равен $i + \dfrac{\partial i}{\partial x}dx$. Согласно принципу непрерывности тока, ток сквозь замкнутую поверхность s (рис. 17.1, *а*) равен нулю:

$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) + \left(gdxu + Cdx\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}.$$

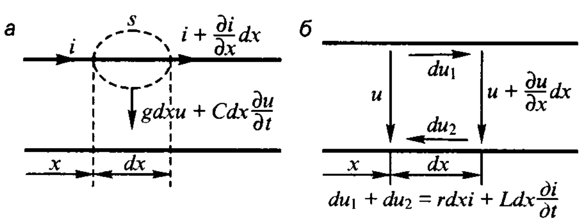

Рис. 17.1

Точно так же напряжение между проводами зависит не только от t, но и от x, так как на каждом отрезке dx линии имеет место падение напряжения в двух проводах линии $du_1 + du_2$ (рис. 17.1, *б*). Это падение напряжения складывается из падения напряжения $rdxi$ в сопротивлении rdx пары проводов и индуктивного падения напряжения $Ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$, обусловленного индуктивностью Ldx пары проводов, т. е. $du_1 + du_2 = rdxi + Ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$. Сумма падений напряжения в рассматриваемом контуре равна нулю:

$$(-u)+\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)+\left(rdxi+Ldx\frac{\partial i}{\partial t}\right)=0$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=ri+L\frac{\partial i}{\partial t}.$$

Таким образом, уравнения линии имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=ri+L\frac{\partial i}{\partial t};\quad -\frac{\partial i}{\partial x}=gu+C\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Для однородной линии параметры r, L, g и C не зависят от x. Для неоднородной линии они являются функциями от x.

В общем случае для n-проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также ЭДС взаимоиндукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых телеграфных уравнений):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x}=r_k i_k+L_k\frac{\partial i_k}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}M_{km}\frac{\partial i_m}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x}=g_k u_k+\sum_{m=1}^{n}g_{km}(u_k-u_m)+C_k\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}C_{km}\frac{\partial(u_k-u_m)}{\partial t},$$

где $k=1, 2, \ldots, n$ — номер провода; r_k, L_k, g_k, C_k — собственные параметры k-го провода на единицу длины с учетом влияния земли; M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k-м и m-м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Рассмотрение частного случая — двухпроводной линии, которое будет выполнено в последующих параграфах, представляет интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий наиболее наглядно показать основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия может быть заменена эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена так называемая транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии (см. § 17.5). При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательности токи в проводах также образуют симметричные системы соответственно прямой и обратной последовательности. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

17.3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

При установившихся режимах токи и напряжения изменяются во времени по периодическому закону. Представив периодические функции времени в виде ряда Фурье, можно произвести расчет отдельно для каждой синусоидальной составляющей этого ряда и вследствие линейности цепи получить результирующий процесс, пользуясь методом наложения. Поэтому достаточно произвести анализ процессов в линии при синусоидальных токах и напряжениях.

Пусть ток и напряжение в линии изменяются во времени по синусоидальному закону с угловой частотой ω. Пользуясь комплексным методом, напишем уравнения линии для комплексных действующих напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U}.$$

Комплексные $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями только x, и, соответственно, уравнения в частных производных для мгновенных u и i перешли в обыкновенные дифференциальные уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$.

Дифференцируя первое уравнение по x и используя второе, находим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U},$$

где

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

Решение уравнения для $\dot{U}$ имеет вид

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}.$$

Из первого уравнения линии находим комплексный ток:

$$\dot{I} = -\frac{1}{r + j\omega L}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}),$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Комплексные величины $\gamma = \alpha + j\beta$ и Z являются основными характеристиками однородной линии и носят наименования: γ — коэффициент распространения линии, Z — волновое, или характеристическое, сопротивление линии, α — коэффициент затухания, β — коэффициент фазы.

Смысл всех этих наименований будет ясен из рассмотрения бегущих волн в линии (см. § 17.5). Обратим внимание на то, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно, обозначив $r + j\omega L = z'e^{j\psi'}$, $g + j\omega C = y'e^{j\psi''}$ и $\frac{1}{2}(\psi' + \psi'') = \theta$, будем иметь $\gamma = \alpha + j\beta =$ $= \sqrt{z'y'}e^{j\theta} = \sqrt{z'y'}\cos\theta + j\sqrt{z'y'}\sin\theta$. Так как $0 < \psi' < \pi/2$, $0 < \psi'' < \pi/2$ и, следовательно, $0 < \theta < \pi/2$, то $\cos\theta > 0$ и $\sin\theta > 0$, т. е. $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Условимся отмечать дальше ток и напряжение в начале линии ($x = 0$) индексом 1 ($\dot{I}_1, \dot{U}_1$) и в конце линии ($x = l$, где l — длина линии) — индексом 2 ($\dot{I}_2, \dot{U}_2$).

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 достаточно знать две из этих четырех величин.

Выразим эти постоянные через напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в начале линии. Полагая $x = 0$, имеем

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = \frac{1}{Z}(A_1 - A_2);$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z).$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}\right].$$

Эти же выражения для напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ в любой точке линии можно записать также в другой форме, используя соотношения

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch}\gamma x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh}\gamma x.$$

Получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh}\gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Значения напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ в конце линии получаются, если принять $x = l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh}\gamma l; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma l.$$

Из этих уравнений можно выразить $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения четырехполюсника в A-параметрах. Постоянные этого четырехполюсника, соответственно, равны

$$A = D = \operatorname{ch}\gamma l; \quad B = Z\operatorname{sh}\gamma l; \quad C = \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z},$$

причем, как и для всякого пассивного четырехполюсника,

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l = 1.$$

Как и всякий четырехполюсник, линия может быть заменена Т- или П-образной, в данном случае симметричной, эквивалентной схемой. Параметры эквивалентных схем вычисляются через постоянные A, B, C и D по формулам, приведенным в § 13.2.

17.4. О моделировании однородной линии цепной схемой

Рассмотрение линии с распределенными параметрами как четырехполюсника и, соответственно, замена линии эквивалентной Т- или П-образной схемой возможны только в том случае, если интересуемся напряжениями и токами только в начале и в конце линии. Если же желаем изучать распределение напряжения и тока вдоль линии, то необходимо ее рассматривать как цепь с распределенными параметрами и пользоваться приведенными ранее уравнениями, в которых $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями x. Однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев. Поэтому приближенно можно линию конечной длины заменить цепной схемой с конечным числом звеньев, обладающих конечными значениями параметров. Такая замена будет давать тем более точные результаты, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Эти соображения имеют весьма большое значение для моделирования линий. Для экспериментального изучения в лабораторных условиях процессов в длинных линиях, а также процессов в различных системах, соединенных длинными линиями, обычно линии заменяют эквивалентными им цепными схемами. Точность моделирования будет тем больше, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Одного звена, заменяющего линию, достаточно, если интересуемся соотношениями между напряжениями и токами только в начале и в конце линии и только при одной частоте установившегося синусоидального режима. Если же желаем знать связь между напряжениями и токами хотя бы только в начале и в конце линии, но при разных частотах, например для разных гармоник несинусоидальных токов и напряжений, то моделировать всю линию одним Т- или П-образным звеном уже недостаточно. Это следует из того, что параметры такого звена, как видно из приведенных ранее формул, сложным образом зависят от характеристик линии Z и γ, которые в общем случае, в свою очередь, сложным образом зависят от частоты.

Моделировать линию цепной схемой с достаточным числом звеньев и подавно необходимо при изучении распределения напряжения и тока вдоль линии.

Выбор числа звеньев в модели линии зависит от тех задач, которые ставятся при исследовании. Большей частью бывает достаточно взять 10–20 звеньев.

17.5. Бегущие волны

Рассмотрим выражение, полученное в § 17.3 для $\dot{U}$, причем введем обозначения

$$\dot{U}_{\varphi} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{j\xi} e^{-\gamma x};$$

$$\dot U_\psi = \frac{1}{2}(\dot U_1 - \dot I_1 Z)e^{\gamma x} = \dot U_{\psi 1}e^{\gamma x} = U_{\psi 1}e^{j\eta}e^{\gamma x}.$$

Тогда при $\gamma = \alpha + j\beta$ имеем

$$\dot U = \dot U_\varphi + \dot U_\psi = \dot U_{\varphi 1}e^{-\gamma x} + \dot U_{\psi 1}e^{\gamma x} = U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}e^{j(\xi-\beta x)} + U_{\psi 1}e^{\alpha x}e^{j(\eta+\beta x)}$$

и, переходя от комплексного напряжения $\dot U$ к изображаемому им напряжению u, получим

$$u = u_\varphi + u_\psi = \sqrt{2}\,U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2}\,U_{\psi 1}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \eta + \beta x).$$

Таким образом, u можно рассматривать как сумму двух составляющих u_φ и u_ψ. Из выражения $u_\varphi = \sqrt{2}U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ следует, что при x = const, т. е. в данной точке линии, напряжение u_φ является синусоидальной функцией времени. Пусть $\alpha = 0$ и $e^{-\alpha x} = 1$. Тогда, приняв t = const, нетрудно убедиться, что при $\alpha = 0$ напряжение u_φ в данный момент времени будет распределено вдоль линии также по синусоидальному закону. При этом длина λ синусоидальной волны, изображающей этот закон распределения напряжения u_φ, т. е. расстояние между ближайшими точками, в которых фазы напряжения u_φ различаются на 2π, равна $2\pi/\beta$. Это синусоидальное распределение напряжения, или, как говорят, волна напряжения, перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью, равной $v = \omega/\beta$. Действительно, $\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ при $x = x_0 + \omega t/\beta$ будет величиной постоянной, и, следовательно, напряжение, существовавшее в некоторый момент времени в произвольно выбранной точке x, будет оставаться неизменным, если эта точка начнет перемещаться вдоль линии со скоростью $v = \omega/\beta$. Так как при этой скорости остается неизменной фаза колебания, то ее называют *фазовой скоростью волны*. Такого рода волны, перемещающиеся вдоль некоторого направления, называют *бегущими волнами*. При $\alpha > 0$ наличие множителя $e^{-\alpha x}$ показывает, что амплитуда волны по мере продвижения последней вдоль линии затухает по показательному закону и что распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени может быть изображено синусоидой, затухающей по тому же закону (рис. 17.2). Поэтому коэффициент α называют коэффициентом затухания. Так как фаза напряжения изменяется с изменением x, то коэффициент β, характеризующий это изменение фазы, называют коэффициентом фазы.

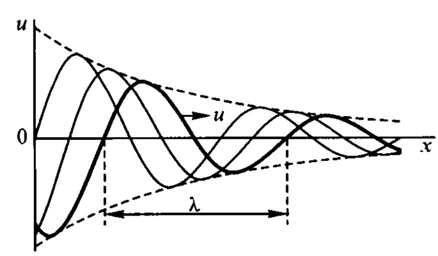

Рис. 17.2

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что вторая составляющая $u_\psi = \sqrt{2}\,U_{\psi 1}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \eta + \beta x)$ представляет собой волну такой же длины $\lambda = 2\pi/\beta$, как и u_φ, бегущую вдоль линии со скоростью $v = -\omega/\beta$, т. е. от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны, как показывает наличие множителя $e^{\alpha x}$, возрастает по показательному закону от начала линии к ее концу, или, иными словами, затухает по показательному закону по мере продвижения волны от конца линии к ее началу. Волны, бегущие от начала линии к ее концу, будем называть п р я м ы м и в о л н а м и, а волны, бегущие в обратном направлении, — о б р а т н ы м и в о л н а м и.

Аналогично, рассматривая выражение для тока $\dot{I}$, можем написать $\dot{I} = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi$, где $\dot{I}_\varphi = \frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x}$; $\dot{I}_\psi = -\frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}$. Соответственно, для мгновенных значений получаем $i = i_\varphi + i_\psi$, причем i_φ — прямая волна тока, а i_ψ — обратная волна тока.

Легко видеть, что отношение напряжения $\dot{U}_\varphi$ прямой волны к току $\dot{I}_\varphi$ прямой волны равно волновому сопротивлению линии Z, а для обратных волн соответствующее отношение равно $(-Z)$:

$$\frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = Z; \quad \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi} = -Z. \qquad (*)$$

Появление обратных волн можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Соответственно, прямые волны называют также п а д а ю щ и м и, а обратные — о т р а ж е н н ы м и. К о э ф ф и ц и е н т о м о т р а ж е н и я н а п р я ж е н и я q_u от конца линии называют отношение отраженной волны $\dot{U}_{\psi_2}$ к прямой волне $\dot{U}_{\varphi_2}$ напряжения в конце линии. Соответственно к о э ф ф и ц и е н т о м о т р а ж е н и я т о к а q_i называют отношение $\dot{I}_{\psi_2}$ к $\dot{I}_{\varphi_2}$. Найдем выражение для q_u и q_i через волновое сопротивление Z линии и сопротивление $Z_{\text{пр}}$ приемника, на которое замкнута линия на ее конце.

Имеем на конце линии

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi_2} + \dot{U}_{\psi_2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi_2} + \dot{I}_{\psi_2} = \frac{\dot{U}_{\varphi_2}}{Z} - \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{Z}.$$

Отсюда находим

$$2\dot{U}_{\psi_2} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2(Z_{\text{пр}} - Z); \quad 2\dot{U}_{\varphi_2} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2(Z_{\text{пр}} + Z);$$

следовательно,

$$q_u = \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{\dot{U}_{\varphi_2}} = \frac{Z_{\text{пр}} - Z}{Z_{\text{пр}} + Z}.$$

Разделив первое равенство (*) на второе, получаем $q_i/q_u = -1$, т. е.

$$q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{\text{пр}}}{Z + Z_{\text{пр}}}.$$

Если линия замкнута на конце на сопротивление, равное волновому, $Z_{\text{пр}} = Z$, то $q_u = 0$ и $q_i = 0$, т. е. в линии будут отсутствовать отраженные (обратные) волны. При этом в *любой точке линии* отношение напряжения к току равно волновому сопротивлению:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = Z.$$

Если линия на конце разомкнута, т. е. имеем так называемый режим холостого хода, то $Z_{пр} = \infty$, $q_u = 1$ и $q_i = -1$. Следовательно, на конце линии падающая $\dot{U}_{\varphi 2}$ и отраженная $\dot{U}_{\psi 2}$ волны напряжения равны по значению и одинаковы по знаку, в результате чего результирующее напряжение $\dot{U}_2$ на конце линии оказывается в два раза больше напряжения падающей волны. Падающая $\dot{I}_{\varphi 2}$ и отраженная $\dot{I}_{\psi 2}$ волны тока равны по значению и противоположны по знаку, и результирующий ток $\dot{I}_2$ на конце разомкнутой линии равен нулю.

В другом крайнем случае короткого замыкания на конце линии $Z_{пр} = 0$, $q_u = -1$ и $q_i = 1$. При этом $\dot{U}_{\psi 2} = -\dot{U}_{\varphi 2}$ и $\dot{U}_2 = 0$, а $\dot{I}_{\psi 2} = \dot{I}_{\varphi 2}$ и $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{\varphi 2}$.

17.6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии

Волновое сопротивление линии $Z = \sqrt{\dfrac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$ и коэффициент распространения $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ зависят от частоты. Поэтому условия прохождения волн тока и напряжения для разных частот оказываются различными. Если сигнал на входе линии является периодической несинусоидальной функцией времени, то на выходе линии форма кривой сигнала будет отличаться от ее формы на входе, так как для различных гармоник условия прохождения различны. Это же будет иметь место и при любом апериодическом сигнале, так как такой сигнал может быть представлен в виде сплошного частотного спектра с помощью преобразования Фурье и для различных частот этого спектра условия прохождения вдоль линии будут различными.

Для линии связи чрезвычайно важно создание условий, при которых отсутствовало бы искажение формы передаваемого сигнала (тока и напряжения). Для этого необходимо, чтобы волновое сопротивление Z, коэффициент затухания α и фазовая скорость $v = \omega/\beta$ не зависели от частоты. Очевидно, при этом коэффициент фазы β должен быть пропорционален частоте. Такие условия оказываются выполненными, если соблюдено соотношение

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C}.$$

Действительно, при этом

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC}\sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} =$$
$$= \sqrt{LC}(r/L + j\omega) = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{LC},$$

т. е. удовлетворяются все вышеуказанные требования, необходимые для того, чтобы линия была неискажающей. Можно показать, что в этих условиях коэффициент затухания и коэффициент фазы имеют минимальные значения, т. е.

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega\sqrt{LC}.$$

Соответственно, фазовая скорость при этом принимает максимальное значение $v_{\max} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$ и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем провода линии.

Для воздушных линий $z \approx 300...400$ Ом и $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Для кабельной линии $z \approx 50$ Ом и $v < 3 \cdot 10^8$ м/с, так как диэлектрическая проницаемость изоляции в кабеле больше диэлектрической проницаемости воздуха.

Длина волны $\lambda = v/f$ для воздушной линии при частоте 50 Гц оказывается равной 6000 км, т. е. обычно превосходит длину наиболее протяженных линий электропередачи. При звуковой частоте 5000 Гц длина волны $\lambda = 60$ км и, следовательно, на протяжении линии связи можно укладывать несколько длин волн. Это имеет место даже в сравнительно коротких линиях, применяемых в радиотехнических устройствах, вследствие высокой частоты.

Обычно в линиях $r/L > g/C$, так как проводимость утечки через изоляцию незначительна. Для достижения равенства $r/L = g/C$ увеличение проводимости нецелесообразно. Уменьшение r или C практически не представляется возможным. Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью.

Осуществив вышеуказанное соотношение между параметрами линии, получаем условие для передачи сигнала без искажений, но сигнал затухает по мере продвижения вдоль линии, так как $\alpha > 0$. В предельном случае, когда $r = 0$ и $g = 0$, получаем неискажающую линию без потерь, по которой сигнал передается не только без искажения, но и без затухания.

Для осуществления передачи сигналов без искажения, кроме соблюдения вышеуказанных условий, необходимо, чтобы отсутствовали отраженные волны от конца линии. Для этого, как было показано в предыдущем параграфе, сопротивление приемника должно быть равно волновому сопротивлению линии, т. е., как говорят, приемник и линия должны быть *согласованы*.

Если $Z_{\text{пр}} \neq Z$, то согласования можно добиться, включив между линией и приемником согласующее устройство. Таковым может быть, например, трансформатор с надлежаще выбранным коэффициентом трансформации. Осуществляют также согласование в начале линии генерирующего устройства и линии.

17.7. Однородная линия при различных режимах работы

В этом и следующем параграфах будем рассматривать режимы в однородной линии при различных значениях сопротивления приемника, т. е. при различных значениях отношения $\dot{U}_2$ к $\dot{I}_2$. В этом случае целесообразнее вести счет расстояний от конца линии, для чего во всех ранее использованных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$. При этом $x = 0$ будет относиться к концу линии, а $x = l$ — к началу линии. В § 17.3 при счете расстояний от начала линий мы получили выражения для напряжения и тока в любой точке линии в виде

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I} = \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Заменяя в этих выражениях x на $l - x$, получаем

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x};$$

$$\dot{I}Z = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x},$$

где положено $A_1 e^{-\gamma l} = A_3$ и $A_2 e^{\gamma l} = A_4$. В конце линии, т. е. теперь при $x = 0$, будет $\dot{U} = \dot{U}_2$ и $\dot{I} = \dot{I}_2$. Следовательно, для определения постоянных A_3 и A_4 имеем выражения $\dot{U}_2 = A_3 + A_4$ и $\dot{I}_2 Z = A_3 - A_4$, откуда $A_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)$; $A_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)$.

Таким образом, уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ получают вид

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x}\right].$$

Соответственно, эти уравнения, выраженные через гиперболические функции, имеют вид

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Рассмотрим режим холостого хода. Условимся все величины в любой точке линии отмечать дополнительно индексом 0. Так как при холостом ходе $Z_{пр} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \operatorname{ch}\gamma x; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{Z}{\operatorname{th}\gamma l}.$$

На рис. 17.3 и 17.4 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{пр} = \infty$.

Характер распределения напряжения и тока вдоль линии хорошо иллюстрируется кривыми распределения квадратов их действующих значений. Для квадратов модулей комплексных величин ch γx и sh γx имеем

$$\left|\operatorname{ch}\gamma x\right|^2 = \left|\operatorname{ch}^2(\alpha x + j\beta x)\right| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha x + \cos 2\beta x);$$

$$\left|\operatorname{sh}\gamma x\right|^2 = \left|\operatorname{sh}^2(\alpha x + j\beta x)\right| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

и, следовательно,

$$U_0^2 = \frac{1}{2}U_{20}^2(\operatorname{ch}2\alpha x + \cos 2\beta x); \quad I_0^2 = \frac{U_{20}^2}{2z^2}(\operatorname{ch}2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

где z — модуль комплекса Z.

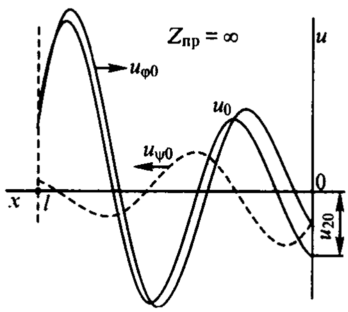

Рис. 17.3

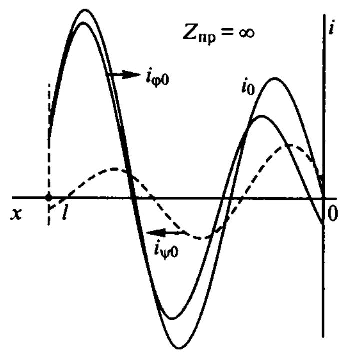

Рис. 17.4

Кривые $\operatorname{ch} 2\alpha x$ и $\cos 2\beta x$, а также их сумма, характеризующая распределение U_0^2, и их разность, характеризующая распределение I_0^2, приведены на рис. 17.5. Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как U_0, так и I_0 чередуются приблизительно через четверть длины волны, причем максимумы U_0 сдвинуты относительно максимумов I_0 также почти на четверть длины волны. Из этих же кривых следует, что в линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при холостом ходе действующий ток убывает, а действующее напряжение, наоборот, возрастает в направлении от начала линии к ее концу.

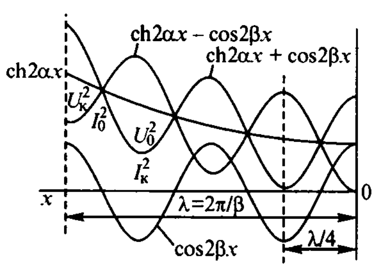

Рис. 17.5

Рассмотрим режим короткого замыкания. Условимся при этом все величины в любой точке линии отмечать дополнительным индексом «к». Так как при коротком замыкании $Z_{пр} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_к = \dot{I}_{2к} Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I}_к = \dot{I}_{2к} \operatorname{ch} \gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_к = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = Z \operatorname{th} \gamma l.$$

На рис. 17.6 и 17.7 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{пр} = 0$.

Для квадратов действующих напряжения $U_к$ и тока $I_к$ аналогично предыдущему найдем

$$U_к^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 z^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x); \quad I_к^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

Следовательно, при коротком замыкании распределение $U_к^2$ и $I_к^2$ вдоль линии характеризуется, соответственно, кривыми $(\mathrm{ch}\,2\alpha x - \cos 2\beta x)$ и $(\mathrm{ch}\,2\alpha x + \cos 2\beta x)$, приведенными на рис. 17.5.

Заметим, что, определив из опытов холостого хода и короткого замыкания $Z_0 = Z/\mathrm{th}\,\gamma l$ и $Z_к = Z\,\mathrm{th}\,\gamma l$, можно вычислить Z и γl, а именно

$$Z = \sqrt{Z_0 Z_к} \quad \text{и} \quad \mathrm{th}\,\gamma l = \sqrt{Z_к/Z_0}.$$

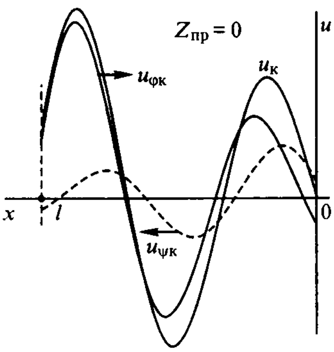

Рис. 17.6

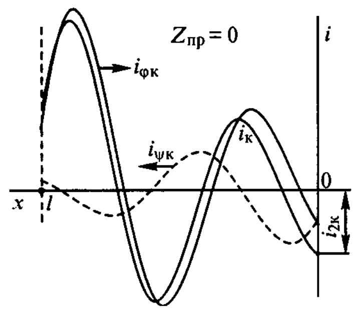

Рис. 17.7

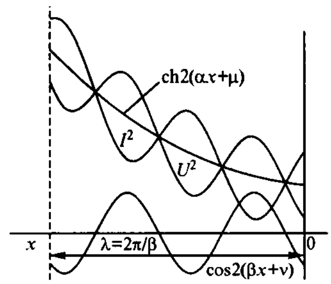

Рис. 17.8

Любой рабочий режим линии при замыкании ее на сопротивление $Z_{пр}$ может быть получен наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания. Выражения для $\dot U$ и $\dot I$ в общем случае можно привести к виду

$$\dot U = \dot U_2\left(\mathrm{ch}\,\gamma x + \frac{Z}{Z_{пр}}\mathrm{sh}\,\gamma x\right) = \dot U_2\,\frac{\mathrm{ch}(\gamma x + \sigma)}{\mathrm{ch}\,\sigma};$$

$$\dot I = \dot I_2\left(\mathrm{ch}\,\gamma x + \frac{Z_{пр}}{Z}\mathrm{sh}\,\gamma x\right) = \dot I_2\,\frac{\mathrm{sh}(\gamma x + \sigma)}{\mathrm{sh}\,\sigma},$$

если принять $Z/Z_{пр} = \mathrm{th}\,\sigma = \mathrm{th}\,(\mu + j\nu)$, и, следовательно, U^2 и I^2 пропорциональны соответственно $\mathrm{ch}\,2(\alpha x + \mu) + \cos 2(\beta x + \nu)$ и $\mathrm{ch}\,2(\alpha x + \mu) - \cos 2(\beta x + \nu)$, где μ и ν зависят от соотношения между $Z_{пр}$ и Z. Поэтому кривые $U^2 = F_1(x)$, $I^2 = F_2(x)$ в этом случае (рис. 17.8) сходны с кривыми при $Z_{пр} = \infty$ и $Z_{пр} = 0$. Основное отличие состоит в том, что в конце линии $U_2 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$.

17.8. Линии без потерь

В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда $\omega L \gg r$ и $\omega C \gg g$, можно пренебречь наличием потерь в линии и принять $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z = z = \sqrt{L/C}$ и многие соотношения, полученные ранее, упрощаются.

В случае холостого хода линии, когда $Z_{пр} = \infty$ и $I_2 = 0$, при счете расстояний от конца линии имеем

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20}\operatorname{ch}\gamma x = \dot{U}_{20}\cos\beta x;\quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{z}\operatorname{sh}\gamma x = j\frac{\dot{U}_{20}}{z}\sin\beta x.$$

Из этих выражений видно, что в рассматриваемом случае в результате наложения двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами получаются с т о я ч и е в о л н ы. Действительно, $\cos\beta x$ при $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2...$ обращается в ± 1, а $\sin\beta x$ — в нуль, и в соответствующих точках линии имеем пучности напряжения и узлы тока. При $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4...$ получаем узлы напряжения и пучности тока (рис. 17.9), так как тогда $\cos\beta x$ обращается в нуль, а $\sin\beta x$ — в ± 1. Для входного сопротивления линии при холостом ходе Z_0, обозначая длину линии через l, получим

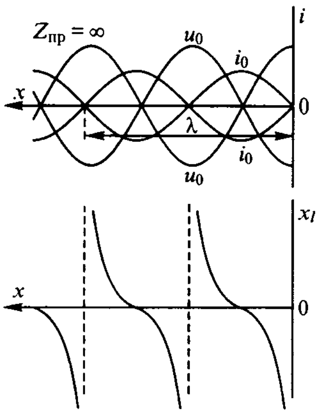

Рис. 17.9

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = -jz\operatorname{ctg}\beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет емкостный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — индуктивный характер и т. д. (рис. 17.9). При $l = \lambda/4$, $l = 3\lambda/4...$ входное сопротивление разомкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/2$, $l = \lambda$ ... оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

В случае короткого замыкания линии, когда $Z_{пр} = 0$ и $U_2 = 0$,

$$\dot{U}_к = \dot{I}_{2к}Z\operatorname{sh}\gamma x = j\dot{I}_{2к}z\sin\beta x;\quad \dot{I}_к = \dot{I}_{2к}\operatorname{ch}\gamma x = \dot{I}_{2к}\cos\beta x,$$

откуда видно, что и в этом случае имеем наложение двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами, в результате чего получаются стоячие волны. Все отличие от предыдущего случая состоит в том, что в конце линии будут узел напряжения и пучность тока (рис. 17.10). Для входного сопротивления короткозамкнутой линии $Z_к$ имеем

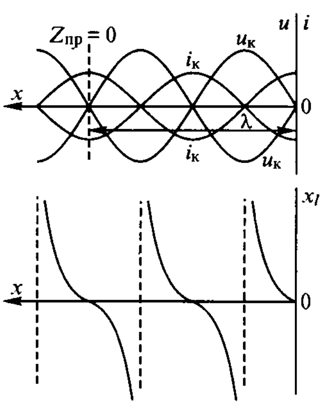

Рис. 17.10

$$Z_к = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} = jz\operatorname{tg}\beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет индуктивный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — емкостный характер и т. д. (рис. 17.10). При $l = \lambda/2$, $l = \lambda...$ входное сопротивление короткозамкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/4$, $l = 3\lambda/4...$ оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

При очень высоких частотах короткозамкнутая линия, длина которой равна четверти длины волны, применяется в качестве колебательного контура, имеющего вследствие относительно малых потерь весьма малое затухание. Такая линия практически обладает чрезвычайно большим входным сопротивлением, и это дает возможность использовать ее при малых длинах волн также для изоляции высокочастотных линий (рис. 17.11) вместо изоляторов, применение которых в этих случаях влечет за собой большие потери.

При реактивной нагрузке линии, когда $Z_{пр} = jx_{пр}$, имеем

$$\dot{U} = \dot{U}_2\left(\cos\beta x + \frac{z}{x_{пр}}\sin\beta x\right) = \dot{U}_2\,\frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin\sigma};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2\left(\cos\beta x - \frac{x_{пр}}{z}\sin\beta x\right) = \dot{I}_2\,\frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos\sigma},$$

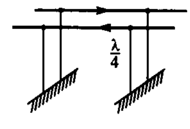

Рис. 17.11

если принять $x_{пр}/z = \operatorname{tg}\sigma$. Таким образом, и в данном случае получаются стоячие волны, но в конце линии при этом не будет ни пучности, ни узла (рис. 17.12). Для входного сопротивления линии, замкнутой на реактивное сопротивление,

$$Z_x = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = jx_{пр}\,\frac{\operatorname{tg}(\beta l + \sigma)}{\operatorname{tg}\sigma} = jz\operatorname{tg}(\beta l + \sigma) = jx_l,$$

т. е. зависимость входного сопротивления линии от ее длины имеет такой же характер (рис. 17.12), как и в двух предыдущих случаях, причем для $l = \lambda/4$ и $l = \lambda/2$ найдем, соответственно, $Z_x = -z^2/(jx_{пр})$ и $Z_x = jx_{пр}$.

При $x_{пр} = z\operatorname{ctg}\beta l$, когда $\sigma = \pm\,\pi/2 - \beta l$, $Z_x = \pm\,\infty$, и тогда линия эквивалентна короткозамкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны, а при $x_{пр} = -\,z\operatorname{tg}\beta l$, когда $\sigma = -\,\beta l$, $Z_x = 0$, и, следовательно, в этом случае линия эквивалентна разомкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны.

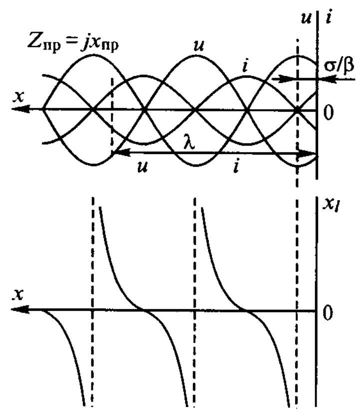

Рис. 17.12

Таким образом, в зависимости от частоты приложенного напряжения, длины линии и оконечного сопротивления линия без потерь, замкнутая на реактивное сопротивление, представляет собой индуктивное или емкостное сопротивление, причем эквивалентная индуктивность или емкость могут иметь все значения в пределах от нуля до бесконечности. Возможность осуществить при помощи соответствующим образом подобранной линии индуктивное или емкостное сопротивление того или иного значения важно для практики при высоких частотах.

Итак, во всех трех рассмотренных случаях работы линии без потерь в ней получаются стоячие волны. При этом пучности напряжения и тока, а также узлы напряжения и тока сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Напряжение и ток в каждой точке линии различаются по фазе на четверть периода, и напряжение достигает максимального значения, когда ток во всей линии равен нулю, а ток достигает максимального значения, когда напряжение во всей линии равно нулю.

Так как в любой момент времени в узлах напряжения $u = 0$, а в узлах тока $i = 0$, то в этих точках линии мощность всегда равна нулю, а энергия через эти точки не передается. Однако на каждом участке линии, ограниченном узлами напряжения и тока, происходит передача энергии вдоль линии, связанная с колебаниями энергии между электрическим и магнитным полями на этом участке.

Все три случая образования стоячих волн в линии, рассмотренные нами, характеризуются отсутствием расхода энергии как в линии, так и в приемнике. При наличии расхода энергии или в линии, или в приемнике в линии неизбежно должны существовать бегущие волны напряжения и тока, с которыми только и может быть связан процесс передачи энергии вдоль всей линии.

В заключение остановимся кратко на рассмотрении линии без потерь, имеющей длину, равную четверти длины волны, и замкнутой на активное сопротивление $r_{пр}$. В этом случае

$$\operatorname{ch}\gamma l = \cos\beta l = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

а

$$\operatorname{sh}\gamma l = j\sin\beta l = j\sin\frac{\pi}{2} = j,$$

и имеем

$$\dot{U}_1 = j\dot{U}_2\frac{z}{r_{пр}};\quad \dot{I}_1 = j\dot{I}_2\frac{r_{пр}}{z},$$

т. е. такую линию можно рассматривать как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным $z/r_{пр}$. Это весьма важное свойство дает возможность использовать линию, длина которой равна четверти длины волны, для согласования приемника с генератором или одной линии с другой линией. Так как входное сопротивление $Z_{вх}$ рассматриваемой линии равно

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{z^2}{r_{пр}},$$

то для согласования генератора и приемника, имеющих активные сопротивления $r_г$ и $r_{пр}$, или двух линий с такими же характеристическими сопротивлениями достаточно включить между ними линию, имеющую длину, равную четверти длины волны, и обладающую характеристическим сопротивлением $z = \sqrt{r_г r_{пр}}$.

Глава восемнадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами при переходных процессах

18.1. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

В предыдущей главе были рассмотрены процессы в линии при установившемся периодическом режиме. Вместе с тем большой интерес представляют непериодические процессы в таких линиях, например переходные процессы при включении и выключении линии, при воздействии на линии грозовых разрядов и т. п. Токи и напряжения в линиях связи, как правило, носят непериодический характер.

Для исследования таких процессов необходимо решить систему уравнений в частных производных, описывающих эти процессы, при заданных граничных и начальных условиях. Это решение может быть выполнено классическим или операторным методом.

18.2. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе классическим методом

Воспользуемся классическим методом для нахождения решения уравнений однородной линии

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

для частного случая — неискажающей линии, когда $rC = gL$.

Примем $r/L = g/C = \delta$ и введем вместо u и i новые функции u_1 и i_1, связанные с u и i соотношениями:

$$u = u_1 e^{-\delta t}; \quad i = i_1 e^{-\delta t}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta u_1 e^{-\delta t};$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial i_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial i_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta i_1 e^{-\delta t}.$$

Подставляя найденные значения производных в основные уравнения линии и сокращая на $e^{-\delta t}$, приведем их к виду

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L\frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого уравнения по x, а от второго — по t, получим

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L\frac{\partial^2 i_1}{\partial x\,\partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x\,\partial t} = C\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, приняв $CL = 1/v^2$, придем к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Введем вместо x и t новые переменные, а именно

$$\xi = x - vt; \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -v\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v\frac{\partial u_1}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \upsilon(\eta) \text{ и } u_1 = \int \upsilon(\eta)\, d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

если принять $\int \upsilon(\eta)\, d\eta = \psi(\eta)$.

Возвращаясь к переменным x и t, можем написать

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt)$$

и, следовательно, для напряжения u между проводами линии имеем

$$u = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)]e^{-\delta t}.$$

Для определения i_1 подставим в уравнение $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}$ только что найденное выражение для u_1. Тогда получим

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial[\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right] = Cv\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right] = -\sqrt{\frac{C}{L}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right],$$

так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

и, проинтегрировав, найдем

$$i_1=\sqrt{\frac{C}{L}}[\varphi(x-vt)-\psi(x+vt)+f(t)].$$

В выражении для i_1 может содержаться функция $f(t)$ только от t, так как $\frac{\partial}{\partial x}f(t)=0$. Для определения $f(t)$ подставим найденные для u_1 и i_1 значения в уравнение $-\frac{\partial u_1}{\partial x}=L\frac{\partial i_1}{\partial t}$ и тогда получим $\frac{\partial f(t)}{\partial t}=0$. Следовательно, $f(t)=A=$ $=\text{const}$. Однако можно принять $A=0$, так как при $A\neq 0$ мы могли бы ввести вместо φ и ψ функции $\varphi_1=\varphi+A/2$ и $\psi_1=\psi-A/2$, после чего получились бы выражения для u_1 и i_1, в которые постоянная A не входит явно. Поэтому можем написать

$$i_1=\sqrt{\frac{C}{L}}[\varphi(x-vt)-\psi(x+vt)],$$

и, следовательно, для тока i в линии получим

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}[\varphi(x-vt)-\psi(x+vt)]e^{-\delta t},$$

где $\sqrt{L/C}$ представляет собой, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные выражения для напряжения u и тока i можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2=\frac{r}{L}\frac{g}{C}=\alpha^2v^2 \quad \text{и} \quad \delta t=\alpha vt,$$

где $\alpha=\sqrt{rg}$ — коэффициент затухания неискажающей линии (см. § 17.6), и что, следовательно,

$$e^{-\delta t}=e^{-\alpha vt}=e^{\alpha(x-vt)}e^{-\alpha x}=e^{-\alpha(x+vt)}e^{\alpha x}.$$

На основании последних равенств выражения для u и i можно представить в виде

$$u=\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}+\psi(x+vt)e^{\alpha x};$$

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}[\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}-\psi(x+vt)e^{\alpha x}],$$

причем следует иметь в виду, что функции φ и ψ в этих выражениях отличаются от φ и ψ в предыдущих выражениях для напряжения и тока, соответственно, множителями $e^{\alpha(x-vt)}$ и $e^{-\alpha(x+vt)}$.

Заметим, что мы получили только общий вид решения, определяющий характер функциональной зависимости напряжения и тока от x и t. Конкретный вид функций $\varphi(x-vt)$ и $\psi(x+vt)$ будет определяться конкретными условиями задачи. Некоторые простые примеры будут рассмотрены дальше. Вместе с тем уже из полученных общих выражений для напряжения и тока можно сделать важные выводы о физическом смысле членов, образующих эти выражения, что и будет сделано в § 18.4.

18.3. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе операторным методом

Покажем также применение операторного метода для получения решения уравнений однородной линии при переходном процессе.

Так как напряжение и ток являются функциями двух переменных t и x, то их операторные изображения будут функциями оператора p и x:

$$u(t,x) \Rightarrow U(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt;$$

$$i(t,x) \Rightarrow I(p,x) = \int_0^\infty i(t,x)e^{-pt}dt.$$

Производная по времени от напряжения изображается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow pU(p,x) - u(0,x),$$

где $u(0, x)$ — распределение напряжения вдоль линии при $t = 0$. Производная от напряжения по x

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}U(p,x).$$

Соответственно, изображения для производных тока будут

$$\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow pI(p,x) - i(0,x); \quad \frac{\partial i}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}I(p,x).$$

Таким образом, уравнения однородной линии

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

в операторной форме принимают вид

$$-\frac{dU(p,x)}{dx} = rI(p,x) + pLI(p,x) - Li(0,x);$$

$$-\frac{dI(p,x)}{dx} = gU(p,x) + pCU(p,x) - Cu(0,x).$$

Существенно заметить, что уравнения для операторных изображений $U(p, x)$ и $I(p, x)$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, так как они содержат лишь одну переменную x. В этом отношении имеем определенную аналогию с уравнениями линии, записанными в комплексной форме при синусоидальном процессе.

Решая совместно эти уравнения при заданных граничных условиях (при $x = 0$ и $x = l$), можем найти операторные изображения $U(p, x)$ и $I(p, x)$, а по ним и оригиналы $u(t, x)$ и $i(t, x)$ напряжения и тока.

При нулевых начальных условиях $[u(0, x) = 0$ и $i(0, x) = 0]$ уравнения принимают вид

$$-\frac{dU(p,x)}{dx} = (r + pL)I(p,x); \quad -\frac{dI(p,x)}{dx} = (g + pC)U(p,x).$$

Дифференцируя первое по x и используя второе, находим

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} = \gamma^2 U(p,x), \quad \text{где} \quad \gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$U(p,x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x},$$

где A_1 и A_2 не зависят от x, но могут быть функциями от p, т. е. $A_1 = F_1(p)$ и $A_2 = F_2(p)$.

Для операторного изображения тока получаем

$$I(p,x) = -\frac{1}{r + pL}\frac{dU(p,x)}{dx} = \frac{\gamma}{r + pL}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{g + pC}{r + pL}}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z(p)}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Величина $Z(p) = \sqrt{\dfrac{r + pL}{g + pC}}$ является *операторным волновым* (характеристическим) *сопротивлением* линии.

Величина $\gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$ представляет собой *операторное выражение коэффициента распространения.*

Решение существенно упрощается для неискажающей линии, для которой $r/L = g/C$, и, следовательно,

$$Z(p) = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{rg} + p\sqrt{LC} = \alpha + \frac{p}{v}.$$

Таким образом, в этом случае решение для операторных изображений напряжения и тока может быть записано в виде

$$U(p,x) = \left[F_1(p)e^{-p\frac{x}{v}}\right]e^{-\alpha x} + \left[F_2(p)e^{p\frac{x}{v}}\right]e^{\alpha x};$$

$$I(p,x) = \sqrt{\frac{C}{L}}\left[F_1(p)e^{-p\frac{x}{v}}\right]e^{-\alpha x} - \sqrt{\frac{C}{L}}\left[F_2(p)e^{p\frac{x}{v}}\right]e^{\alpha x}.$$

Оригинал функции от p, стоящий при множителе $e^{-\alpha x}$, можно получить, применяя формулу Римана—Меллина (см. § 11.5)

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[F_1(p)e^{-p\frac{x}{v}}\right]e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(p)e^{-p\frac{1}{v}(x-vt)}dp.$$

Из последнего выражения видно, что $\varphi\ (t,\ x)$ является функцией аргумента $x-vt$, так как x и t входят совместно только в такой комбинации, т. е. $\varphi\ (x,\ t)=\varphi\ (x-vt)$. Аналогично для функции от p, стоящей при множителе $e^{\alpha x}$, получаем

$$\psi(t,x)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[F_2(p)e^{p\frac{x}{v}}\right]e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2(p)e^{p\frac{1}{v}(x+vt)}dp,$$

т. е.

$$\psi(t,x)=\psi(x+vt).$$

Таким образом, искомое выражение для $u(t,\ x)$ записывается в виде

$$u(t,x)=\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}+\psi(x+vt)e^{\alpha x}.$$

Соответственно для тока получаем выражение

$$i(t,x)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}-\psi(x+vt)e^{\alpha x}].$$

Полученные выражения полностью совпадают с найденными в предыдущем параграфе классическим методом.

18.4. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим только что полученные выражения для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, т. е. примем $r=0$ и $g=0$. Тогда $\delta=0$, $\alpha=0$, $e^{-\delta t}=1$, а также $e^{-\alpha x}=e^{\alpha x}=1$, и для линии без потерь получим

$$u=\varphi(x-vt)+\psi(x+vt)=u_\varphi+u_\psi;$$

$$i=\left[\varphi(x-vt)\Big/\sqrt{\frac{L}{C}}\right]+\left[\psi(x+vt)\Big/\left(-\sqrt{\frac{L}{C}}\right)\right]=i_\varphi+i_\psi.$$

Пусть в частном случае $\psi\ (x+vt)=0$ и $u=\varphi\ (x-vt)=u_\varphi$. Приняв в последнем равенстве $t=0$, найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку x и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью v, т. е. что ее положение определяется координатой $x=x_0+vt$. Тогда напряжение в этой движущейся точке $u_\varphi=\varphi\ (x_0+vt-vt)=\varphi\ (x_0)$ не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью v, то, следовательно, при $u=\varphi\ (x-vt)=u_\varphi$ начальное распределение напряжения u перемещается вдоль линии со скоростью v. Иными словами, функция $u_\varphi=\varphi\ (x-vt)$ определяет прямую волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии со скоростью v, т. е. волну напряжения, бегущую вперед и не претерпевающую изменения формы. Аналогично функция $u_\psi=\psi\ (x+vt)$ определяет обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью $-v$, или, что то же, распространяющуюся со скоростью v в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжение, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн, распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью $v = 1/\sqrt{LC}$ в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно $\sqrt{L/C}$, т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно $-\sqrt{L/C}$. При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии $v = 1/\sqrt{LC}$ для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для u и i множителя $e^{-\delta t}$ или, соответственно, в других их выражениях множителей $e^{-\alpha x}$ и $e^{\alpha x}$, причем $\alpha = \sqrt{rg}$, показывает, что обе волны по мере продвижения их вдоль линии затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в теплоту, выделяющуюся в проводах, так как $r \neq 0$, а также и в среде, окружающей провода, так как $g \neq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем $\alpha x = \sqrt{rg}x$.

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе линии dx, приняв во внимание, что $u^2/i^2 = L/C$, найдем

$$dW_м = \frac{1}{2} i^2 L\,dx = \frac{1}{2} u^2 C\,dx = dW_э.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и на всей линии равны друг другу, и для суммы этих полей на элементе линии получим

$$dW = dW_м + dW_э = i^2 L\,dx = u^2 C\,dx = ui\sqrt{LC}dx.$$

Для соответствующей мощности найдем

$$p = ui = i^2\sqrt{\frac{L}{C}} = u^2\Big/\sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

18.5. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуцирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуцировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуцированного заряда вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией $f_0(x)$ (рис. 18.1). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным $\sqrt{L/C}$, обозначим через z. Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем

$$u_0 = u_{\varphi 0} + u_{\psi 0} = f_0(x);$$
$$i_0 = i_{\varphi 0} + i_{\psi 0} = (u_{\varphi 0} - u_{\psi 0})/z = 0$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi 0} = u_{\psi 0} = \frac{1}{2} f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собой сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

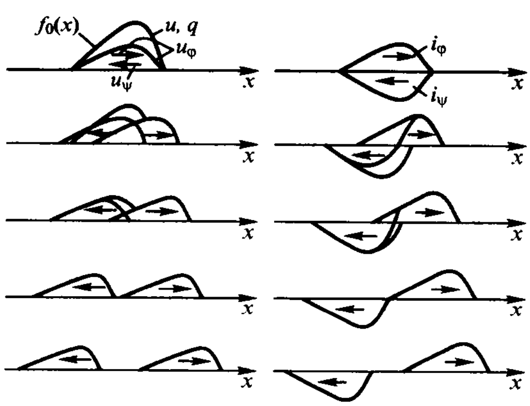

Рис. 18.1

С момента освобождения индуцированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютному значению равны между собой. На рис. 18.1 представлено движение волн напряжения и тока в первые моменты времени после освобождения индуцированного заряда в предположении, что они не затухают.

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, будем предполагать, что внешние ЭДС постоянны. Это предположение допустимо, так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что при синусоидальной ЭДС, имеющей частоту порядка десятков герц, значение этой ЭДС за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь очень незначительно. Кроме того, будем считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней ЭДС, имеют прямоугольную форму.

18.6. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна φ_1, бегущая от источника ЭДС по однородной линии, имеющей волновое сопротивление z_1, достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление z_2. Обозначив напряжение и ток в первой линии через u_1 и i_1, а во второй — через u_2 и i_2, в месте сопряжения обеих линий имеем $u_1 = u_2$ и $i_1 = i_2$. Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна φ_2, бегущая в том же направлении, что и волна φ_1, и называемая *преломленной* волной, в то время как в первой линии, кроме волны φ_1, называемой *падающей* волной, при $z_2 \neq z_1$ обязательно возникнет волна ψ_1, бегущая в обратном направлении и называемая *отраженной* волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами φ_1, ψ_1 и φ_2, соответственно, падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем

$$u_1 = u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2} = u_2;$$

$$i_1 = \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2} = i_2,$$

откуда

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1};$$

$$i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}; \quad i_{\psi 1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}.$$

Из этих отношений следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения $u_{\varphi 2}/u_{\varphi 1}$ и $i_{\varphi 2}/i_{\varphi 1}$ можно рассматривать как *коэффициенты преломления*, а отношения $u_{\psi 1}/u_{\varphi 1} = q_u$ и $i_{\psi 1}/i_{\varphi 1} = q_i$ — как *коэффициенты отражения*.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

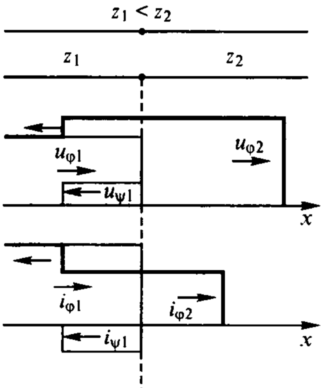

Рис. 18.2

При $z_2 > z_1$, что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменой знака, причем по абсолютному значению обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 18.2 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 < z_2$. Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

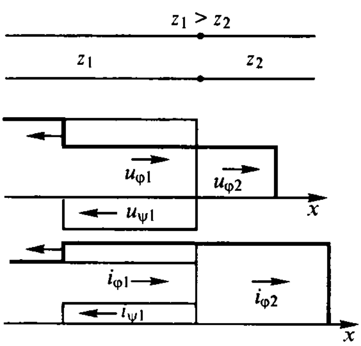

Рис. 18.3

При $z_1 > z_2$ преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные значения обеих отраженных волн опять будут меньше значений соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 18.3). Заметим, что даже при очень малых значениях z_2 преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

Рассматривая мощность p в месте сопряжения линий, имеем

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\varphi 1} + u_{\psi 1})\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2} \quad \text{или} \quad p_{\varphi 1} = p_{\psi 1} + p_{\varphi 2},$$

где $p_{\varphi 1}, p_{\psi 1}, p_{\varphi 2}$ — мощности падающих, отраженных и преломленных волн. Отсюда следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломленных волн, переходит во вторую линию, а остальная часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собой цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

18.7. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление z и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн φ от конца линии возникнут отраженные волны ψ, и для напряжения u и тока i в конце линии, или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней, получим

$$u = u_\varphi + u_\psi; \quad i = i_\varphi + i_\psi = \frac{u_\varphi - u_\psi}{z}; \quad zi = u_\varphi - u_\psi,$$

откуда

$$2u_\varphi = zi + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток i можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение $2u_\varphi$ и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению z линии, и последовательно соединенной с ним оконечной цепи.

Определив ток i по заданным u_φ, z и параметрам оконечной цепи, можем найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений

$$u_\psi = u_\varphi - zi; \quad i_\psi = -\frac{u_\psi}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших оконечных цепей в предположении, что ЭДС источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением z замкнута на сопротивление r_0. Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений z и r_0, и получим

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}; \quad u_\psi = u_\varphi - zi = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_\varphi;$$

$$i_\psi = -\frac{u_\psi}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получили такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий, с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление r_0, на которое замкнута линия. При этом для мощности $p = ui$ в конце линии имеем

$$p = ui = (u_\varphi + u_\psi)\frac{u_\varphi - u_\psi}{z} = \frac{u_\varphi^2}{z} - \frac{u_\psi^2}{z} = p_\varphi - p_\psi,$$

т. е. эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление r_0 равно волновому сопротивлению линии z, то отраженные волны не возникают и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая $r_0 = \infty$, в конце линии имеем

$$u_\psi = u_\varphi; \quad i_\psi = -i_\varphi,$$

а при короткозамкнутой линии, полагая $r_0 = 0$, в конце линии получим

$$u_\psi = -u_\varphi; \quad i_\psi = i_\varphi,$$

т. е. в этих случаях отраженные волны имеют то же значение, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменой знака отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменой знака отражается волна напряжения (рис. 18.4). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в короткозамкнутой линии ток на ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая, соответственно, или $z_2 = \infty$, или $z_2 = 0$.

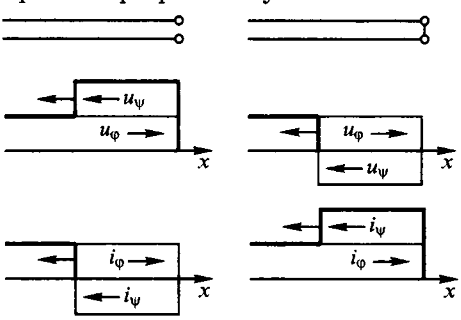

Рис. 18.4

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе, и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток на ее конце должен равняться нулю. Поэтому когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникает равная ей по значению и противоположная по знаку отраженная волна тока и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отраженной волнами тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по значению и противоположная по знаку отраженная волна напряжения и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь (r_0, L_0). Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления ($z + r_0$) и индуктивности L_0, и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i получим (см. § 9.5)

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

где $\tau = \dfrac{L_0}{z + r_0}$, и для u_ψ и i_ψ найдем

$$u_\psi = \left(\frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_\varphi; \quad i_\psi = \left(\frac{z - r_0}{z + r_0} - \frac{2z}{z + r_0}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_\varphi.$$

Из этих выражений, приняв $t = 0$, нетрудно усмотреть, что в первый момент отражение от цепи (r_0, L_0) происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая $t = \infty$, видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для линии, замкнутой на сопротивление r_0. На рис. 18.5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда

$$u_\psi = \left(-1 + 2e^{-\frac{z}{L_0}t}\right)u_\varphi; \quad i_\psi = \left(1 - 2e^{-\frac{z}{L_0}t}\right)i_\varphi.$$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь (r_0, C_0). Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений ($z + r_0$) и емкости C_0, и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i имеем (см. § 9.6)

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = (z + r_0)C_0$, и для u_ψ и i_ψ найдем

$$u_\psi = \left(1 - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_\varphi; \quad i_\psi = \left(-1 + \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_\varphi.$$

Из этих выражений, приняв $t = 0$, видим, что в первый момент времени отражение от цепи (r_0, C_0) происходит так же, как в линии, замкнутой на сопротивление r_0. Полагая $t = \infty$, нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для разомкнутой линии. На рис. 18.5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда

$$u_\psi = \left(1 - 2e^{-\frac{t}{zC_0}}\right) u_\varphi; \quad i_\psi = \left(-1 + 2e^{-\frac{t}{zC_0}}\right) i_\varphi.$$

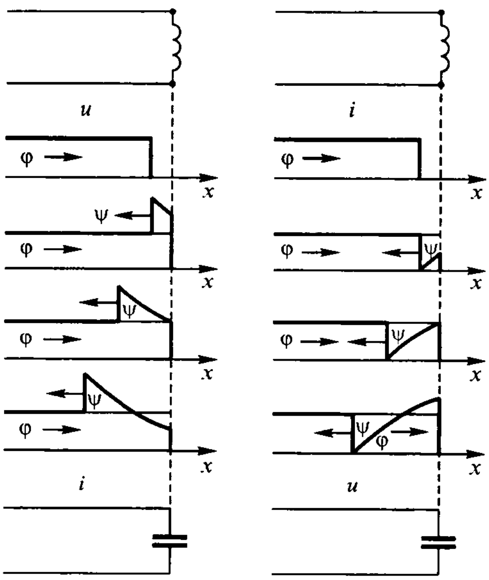

Рис. 18.5

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведению тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо, однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

18.8. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано ранее, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному напряжению в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отражаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю и вся линия будет заряжена до напряжения, равного удвоенному напряжению генератора.

Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получатся отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линии до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противоположный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате к генератору пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов представлены на рис. 18.6.

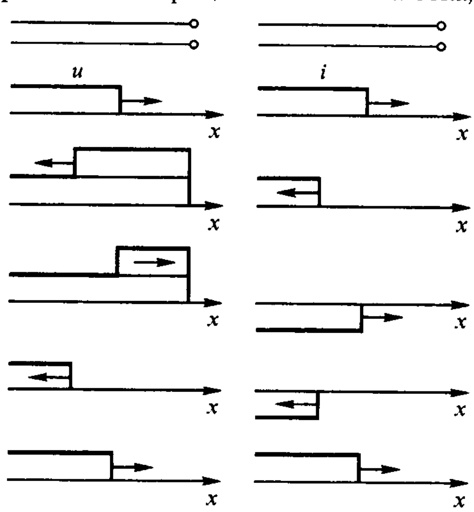

Рис. 18.6

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в течение времени

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где l — длина линии, а v — скорость распространения волн в ней. Этот промежуток времени T называют **периодом собственных колебаний линии**.

Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период T_0 собственных колебаний такого контура из катушки с индуктивностью Ll и конденсатора емкостью Cl был бы

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LlCl} = 2\pi l\sqrt{LC},$$

т. е. в $\pi/2$ раза больше, чем T.

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а значения напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме холостого хода.

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменой знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора, и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменой знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора. Отражение волны тока и от генератора, и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на значение первоначального тока (рис. 18.7).

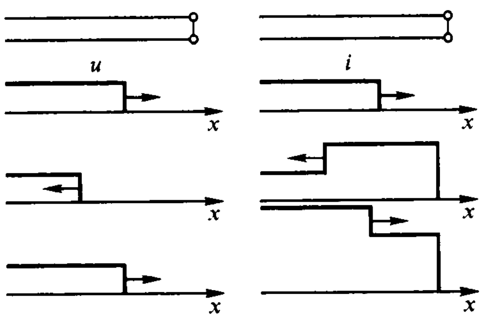

Рис. 18.7

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успевает заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

18.9. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью L_0. Тогда, пренебрегая емкостью между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = L_0\frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать

$$\frac{u_{\varphi1} - u_{\psi1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi2}}{z_2}; \quad u_{\varphi1} + u_{\psi1} = \frac{L_0}{z_2}\frac{du_{\varphi2}}{dt} + u_{\varphi2},$$

откуда

$$2u_{\varphi1} = \frac{L_0}{z_2}\frac{du_{\varphi2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2}u_{\varphi2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\varphi1}$ = const, и следовательно,

$$u_{\varphi2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_{\varphi1}; \quad i_{\varphi2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_{\varphi1},$$

где $\tau = L_0/(z_1 + z_2)$, и тогда для $u_{\psi1}$ и $i_{\psi1}$ найдем

$$u_{\psi1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_{\varphi1}; \quad i_{\psi1} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} - \frac{2z_1}{z_1 + z_2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_{\varphi1}.$$

Из полученных выражений видно, что в рассматриваемом случае преломленные волны $u_{\varphi2}$ и $i_{\varphi2}$ нарастают постепенно от значений, равных нулю при $t = 0$, до значений, которые мы имели при отсутствии реактивной катушки. Что же касается отраженных волн $u_{\psi1}$ и $i_{\psi1}$, то в первый момент они имеют такие же значения, как и при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки.

Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени $\tau = L_0/(z_1 + z_2)$, т. е. чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

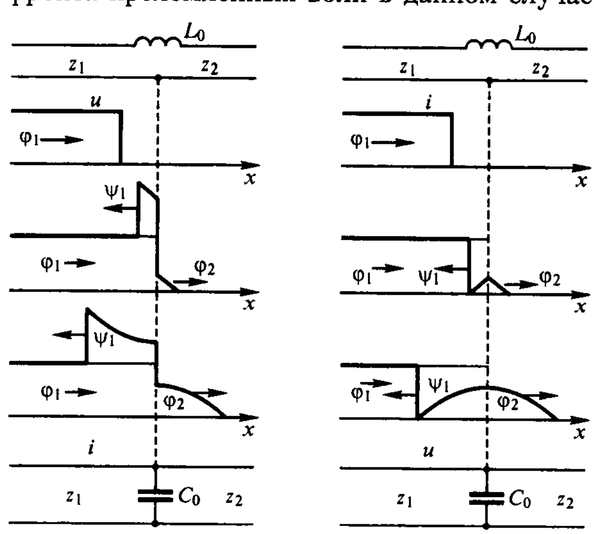

Рис. 18.8

На рис. 18.8 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда

$$u_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1};$$

$$u_{\psi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \qquad i_{\psi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где $\tau = L_0/(2z_1) = L_0/(2z_2)$.

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна C_0. Тогда в месте сопряжения линий

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2,$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi 1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\varphi 1} = \text{const}$ получим

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1},$$

где $\tau = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, и тогда для $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$ найдем

$$u_{\psi 1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\psi 1} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} + \frac{2z_2}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1}.$$

Выражения, полученные для $u_{\varphi 2}$ и $i_{\varphi 2}$, аналогичны выражениям, полученным в предыдущем случае, и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени $\tau = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, тем меньше, чем больше емкость конденсатора C_0. Что касается отраженных волн $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$, то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по значению и противоположна по знаку падающей волне и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 18.8 справа показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда

$$u_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1};$$

$$u_{\psi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \qquad i_{\psi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где $\tau = z_1 C_0/2 = z_2 C_0/2$.

18.10. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включено последовательно с ними активное сопротивление r_0. Тогда в месте сопряжения линий

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\varphi 1}$ из первой линии во вторую можем написать

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}; \quad u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = \frac{r_0}{z_2} u_{\varphi 2} + u_{\varphi 2}.$$

Следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2 z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений видно, что наличие сопротивления r_0 уменьшает преломленную волну напряжения и что даже при большом значении z_2, увеличивая r_0, ее можно довести до сколь угодно малого значения. Отраженная волна $u_{\psi 1}$ при $z_2 > z_1$ с увеличением r_0 возрастает, но не может превзойти значение $u_{\varphi 1}$.

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении r_0, равна $p = r_0 i_2^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\varphi 2}^2$, в то время как мощность падающей волны $p_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1}$. Для отношения этих мощностей имеем

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{r_0 z_1}{z_2^2} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4 r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при $r_0 = z_2 + z_1$ это отношение достигает максимума, равного $z_1/(z_1 + z_2)$. Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть поглощена сопротивлением r_0 лишь при $z_1 \gg z_2$, т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между z_1 и z_2, взяв $r_0 = z_1 + z_2$, получим $u_{\varphi 2} = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$, и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления r_0 (рис. 18.9).

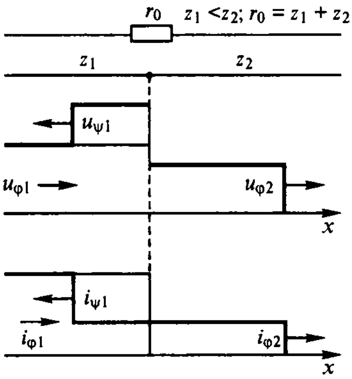

Рис. 18.9

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, значение волн напряжения при их прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь значение порядка 500–600 Ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление r_0. Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\varphi 1}$ из первой линии во вторую можем написать

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{r_0} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2},$$

следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + z_2 z_1 / r_0} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 - z_2 z_1 / r_0}{z_2 + z_1 + z_2 z_1 / r_0} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений вытекает, что наличие ответвления с активным сопротивлением уменьшает преломленную волну напряжения; причем, уменьшая r_0, ее можно довести до сколь угодно малого значения. Отраженная волна $u_{\psi 1}$ с уменьшением r_0 возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти значение $u_{\varphi 1}$.

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна $p = u_{\varphi 2}^2 / r_0$, в то время как мощность падающей волны $p_{\varphi 1} = u_{\varphi 1}^2 / z_1$. Для отношения этих мощностей имеем

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{z_1}{r_0} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4 z_1 z_2^2}{r_0 (z_1 + z_2 + z_1 z_2 / r_0)^2},$$

причем при $r_0 = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$ это отношение достигает максимума, равного $\dfrac{z_2}{z_1 + z_2}$. Таким образом, в рассматриваемом случае при $z_1 \ll z_2$, когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв $r_0 = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$, получим $u_{\varphi 2} = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$, и тогда при любом соотношении между z_1 и z_2 преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 18.10).

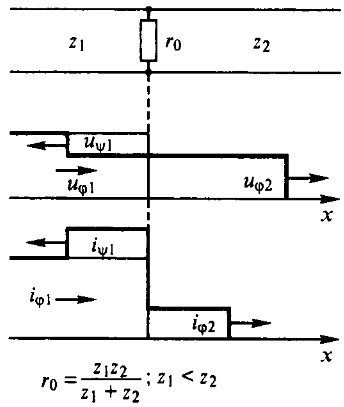

Рис. 18.10

Во избежание прохождения через ответвление сколько-нибудь значительного тока при нормальной работе линии последовательно с элементом, обладающим сопротивлением r_0, включают конденсатор, не оказывающий существенного сопротивления прохождению через него волн, но имеющий достаточно большое сопротивление для тока нормальной частоты.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава девятнадцатая

Элементы нелинейных электрических цепей, их характеристики и параметры

19.1. Особые свойства нелинейных электрических цепей

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Как отмечалось в § 3.5, т. I, строго говоря, все электрические цепи нелинейны. Однако во многих практических случаях эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею можно пренебречь. Это дает возможность развить теорию линейных электрических цепей переменного тока, изложенную в предыдущей части, и с успехом применять ее для расчета многих электротехнических устройств.

Однако существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, именуемые нелинейными цепями, обладают рядом новых свойств, которые отсутствуют у линейных цепей. Эти свойства позволяют создать основанные на них автоматические системы управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, устройства для производства электрических измерений и передачи информации, быстродействующие вычислительные машины и т. д.

Использование несимметричных нелинейных элементов, обладающих при одном направлении тока малым сопротивлением и при другом направлении тока большим сопротивлением, например кенотронов, ртутных и полупроводниковых вентилей, газотронов, дает возможность осуществить выпрямление переменного тока, т. е. преобразование переменного тока в постоянный ток.

Исключительное значение имеет возможность создания управляемых нелинейных элементов, например трехэлектродных электронных ламп, тиратронов с управляющей сеткой, трехэлектродных полупроводниковых приборов и т. п., имеющих, кроме двух главных электродов, между которыми проходит основной ток, еще дополнительный, управляющий электрод. Используя такие нелинейные элементы, получаем возможность осуществить преобразование постоянного тока в переменный ток, усиление переменного тока, преобразование частоты переменного тока.

Наличие в цепи нелинейного элемента приводит к тому, что при синусоидальном напряжении на зажимах цепи ток в ней при установившемся режиме изменяется по периодическому, но несинусоидальному закону. И наоборот, при синусоидальном токе в цепи напряжение на ее зажимах оказывается несинусоидальным. Это свойство нелинейных цепей переменного тока позволяет осуществить преобразование частоты переменного тока.

Своеобразные явления, называемые иногда явлениями феррорезонанса, возникают в цепи переменного тока, содержащей конденсаторы и индуктивные катушки с нелинейными характеристиками. На этой основе осуществляются стабилизаторы напряжения или тока.

Весьма важным обстоятельством, как увидим дальше, является возможность неустойчивых состояний в нелинейных цепях, которые при соответствующих условиях приводят к возбуждению незатухающих колебаний в этих цепях. Устойчивость возникающих в цепи периодических процессов, т. е. ограничение амплитуды колебаний, в свою очередь, определяется нелинейностью характеристик элементов, входящих в состав цепи. Важными примерами таких колебательных систем являются ламповые генераторы, а также генераторы релаксационных колебаний.

Теоретическое исследование процессов в нелинейных электрических цепях оказывается много сложнее исследования процессов в линейных цепях. Процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями, которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа.

Для аналитического решения этих уравнений необходимо выразить аналитически характеристики всех нелинейных элементов цепи. При этом большей частью оказывается, что можно выбрать различные аналитические выражения, приближенно изображающие характеристики элементов. От удачного выбора приближенных аналитических выражений характеристик зависит возможность аналитического решения задачи.

Для анализа процессов в нелинейных цепях с успехом могут быть применены графический или графоаналитический методы. Эти методы могут дать более точный результат, так как в них используются действительные характеристики нелинейных элементов, заданные графически в виде кривых. Однако такие методы не дают возможности получить общие связи, позволяющие анализировать изменение характера процессов в цепи при изменении ее параметров.

Большое значение имеют приближенные методы, дающие возможность получить решения для тех или иных конкретных устройств с нелинейными элементами. Для решения нелинейных задач в области теории электрических цепей широко используются современные электронные вычислительные машины.

19.2. Элементы электрической цепи с нелинейными сопротивлениями, их параметры и характеристики

При действии в цепи постоянных ЭДС значение постоянного тока в ней определяется сопротивлениями r и проводимостями g участков цепи. Поэтому, рассматривая нелинейные элементы в цепи постоянного тока, в первую очередь будем интересоваться их сопротивлениями и проводимостями. Наличие индуктивностей и емкостей, как увидим дальше, имеет существенное значение для решения вопроса об устойчивости режима в такой цепи. Но и в цепи переменного тока для многих нелинейных элементов основное значение имеют их сопротивление и проводимость, а учет их индуктивности и емкости в определенном диапазоне частот имеет лишь второстепенное значение. В связи с этим в настоящем параграфе рассмотрим такие нелинейные элементы и их характеристики, у которых основными параметрами являются сопротивление и проводимость.

Будем называть зависимость напряжения на зажимах элемента с сопротивлением от тока в нем $u = f(i)$, а также обратную зависимость $i = \varphi(u)$ *характеристиками элемента*. Такие характеристики часто называют вольт-амперными характеристиками (ВАХ). Одно из существенных своеобразий нелинейных цепей заключается в том, что вольт-амперные характеристики элементов могут неоднозначно отображать взаимные связи между токами и напряжениями. Так, например, ВАХ, которая имеет аналитическое выражение в виде $u = ai^2$, для любого заданного тока в элементе однозначно определяет напряжение на зажимах элемента. В то же время из выражения $i = \pm\sqrt{u/a}$ следует, что для любого положительного напряжения ток имеет два значения. Более того, для $u < 0$ физически приемлемое решение в виде вещественных значений тока вообще отсутствует. Заметим, что нелинейный элемент с такой ВАХ не может быть пассивным. Действительно, при $i < 0$ имеем $p = ui = ai^3 < 0$, и поэтому такой элемент для токов $i < 0$ является источником энергии.

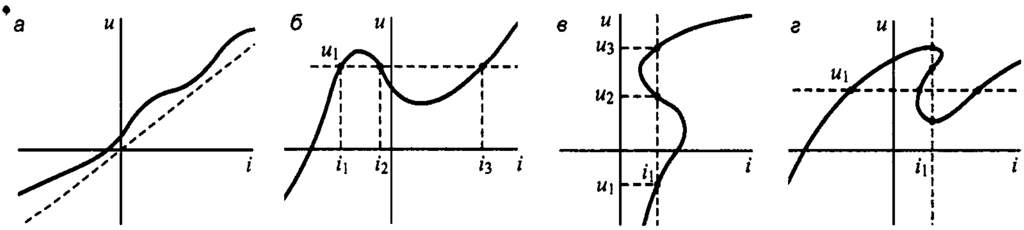

Рис. 19.1

С точки зрения однозначного и неоднозначного взаимного отображения токов и напряжений ВАХ можно разделить на следующие виды:

1. Монотонная ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le i \le \infty$ токи в каждой точке характеристики однозначно определяют напряжения и в этом же интервале напряжения однозначно определяют токи (рис. 19.1, *а*). Частным случаем монотонной ВАХ является характеристика линейного элемента (на рис. 19.1, *а* штриховая линия).

2. Управляемая током ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le i \le \infty$ токи в каждой точке характеристики однозначно определяют напряжения, но при заданном напряжении токи определяются неоднозначно (рис. 19.1, *б*). Обозначим такие ВАХ $u = f(i)$ или $u = R(i)$.

3. Управляемая напряжением ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le u \le \infty$ напряжения в каждой точке характеристики однозначно определяют токи, но при заданном токе напряжения определяются неоднозначно (рис. 19.1, *в*). Обозначим такие ВАХ $i = \varphi(u)$ или $i = G(u)$.

4. Неуправляемая ВАХ, для которой характерна многозначность и тока, и напряжения (рис. 19.1, *г*).

Вольт-амперные характеристики могут быть заданы в виде графиков, таблиц и аналитических выражений. Наиболее полное описание ВАХ можно осуществить в виде аналитических зависимостей, так как и графическая и табличная формы задания ВАХ недостаточно точны и имеют ограниченный диапазон изменения u и i. Привлекательность графического и табличного представлений заключается в том, что результаты экспериментальных исследований вольт-амперных характеристик наиболее просто оформить в виде графиков и таблиц.

Статическими называют характеристики, в которых каждая точка дает значения постоянного напряжения при соответствующем значении постоянного тока. Из них определяются *статическое сопротивление* и *статическая проводимость* нелинейного элемента:

$$r_{\text{ст}} = \frac{u}{i} = f_1(i) \quad \text{и} \quad g_{\text{ст}} = \frac{i}{u} = F_1(i).$$

Динамическими называют характеристики, дающие связь между напряжением и током при достаточно быстрых изменениях тока. Они могут отличаться от статических характеристик, например, вследствие тепловой инерции и других причин. Из них определяются *динамические сопротивление и проводимость* нелинейного элемента:

$$r_{\text{д}} = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = f_2(i) \quad \text{и} \quad g_{\text{д}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = F_2(i).$$

При достаточно медленном изменении напряжения и тока динамические характеристики совпадают со статическими. Определенные из статических характеристик сопротивления и проводимости в виде производных du/di или di/du называют *дифференциальными*. Обозначим их через r_d и g_d.

Для общности всегда будем говорить о динамических параметрах $r_{\text{д}}$ и $g_{\text{д}}$, имея в виду, что при весьма медленных изменениях тока они совпадают с дифференциальными параметрами, т. е. $r_{\text{д}} = r_d$ и $g_{\text{д}} = g_d$.

Имеют место очевидные соотношения

$$r_{\text{ст}} g_{\text{ст}} = 1 \quad \text{и} \quad r_{\text{д}} g_{\text{д}} = 1,$$

но для нелинейных элементов, за исключением отдельных точек характеристик, $r_{\text{ст}} \ne r_{\text{д}}$ и $g_{\text{ст}} \ne g_{\text{д}}$.

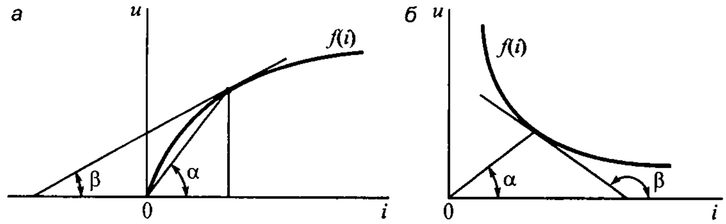

Рис. 19.2

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона луча, проведенного из начала координат в данную точку характеристики (рис. 19.2):

$$r_{ст} = k\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Динамическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона касательной в данной точке характеристики:

$$r_{д} = k\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

При этом $k = v/a$, где v и a — масштабы напряжения и тока. Соответственно,

$$g_{ст} = \frac{1}{k}\mathrm{ctg}\,\alpha; \quad g_{д} = \frac{1}{k}\mathrm{ctg}\,\beta.$$

Все эти параметры изменяются при переходе от одной точки характеристики к другой. Для так называемых пассивных элементов, т. е. не содержащих источников энергии, всегда $r_{ст} > 0$ и $g_{ст} > 0$, но $r_{д}$ и $g_{д}$ положительны, только когда данная точка характеристики лежит на ее *восходящей* части (рис. 19.2, *а*), и отрицательны, если данная точка лежит на *падающей* части характеристики (рис. 19.2, *б*).

19.3. Симметричные и несимметричные характеристики элементов с нелинейными сопротивлениями

По виду характеристики $u = f(i)$ различают симметричные и несимметричные элементы. У *симметричных* элементов характеристика изображается симметричной относительно осей кривой, т. е. сопротивление таких элементов зависит от тока одинаково для обоих направлений тока в элементе. *Несимметричные* элементы обладают несимметричной характеристикой, их сопротивление по-разному зависит от тока при разных направлениях тока в элементе.

К симметричным элементам относятся, например, лампы накаливания и терморезисторы, тиритовые элементы, бареттеры, лампы с тлеющим разрядом, электрическая дуга между одинаковыми электродами.

Лампы накаливания работают при высокой температуре, и вследствие зависимости сопротивления нити накала от температуры сопротивление лампы при номинальном токе существенно отличается от ее сопротивления в холодном состоянии, т. е. при токах, которые много меньше номинального. На рис. 19.3 представлены характеристика лампы с вольфрамовой нитью (кривая *1*), температурный коэффициент сопротивления которой положителен, и характеристика лампы с угольной нитью (кривая *2*), имеющей отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

С нелинейностью осветительной нагрузки электрических сетей приходится особенно считаться при исследовании таких вопросов, как влияние характеристик приемника на нагрузку генераторов при аварийных процессах, сопровождаемых обычно резкими колебаниями напряжения на приемниках.

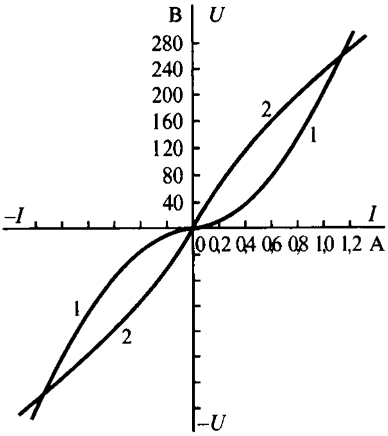

Рис. 19.3

На принципе зависимости сопротивления от температуры специально создаются так называемые *терморезисторы*, имеющие обычно характеристику типа *2* на рис. 19.3. Они используются в приборах и аппаратах для компенсации изменения их сопротивления с изменением температуры, для измерения и для автоматического регулирования температуры, в реле с выдержкой времени и т. д. Выполняют также терморезисторы из полупроводникового материала, именуемые термисторами, обладающие характеристикой, представленной на рис. 19.4, значительная часть которой имеет падающий характер. Одна из конструкций термистора представляет собой шарик из смеси окислов металлов (окиси никеля, магния и др.) с добавкой тонкоизмельченного медного порошка для увеличения проводимости. Через этот шарик соединены две проволочки из иридиевой платины, служащие для подвода тока. Все это устройство заключено в защитную стеклянную оболочку. Такие термисторы применяются для электрических измерений в технике высокой частоты.

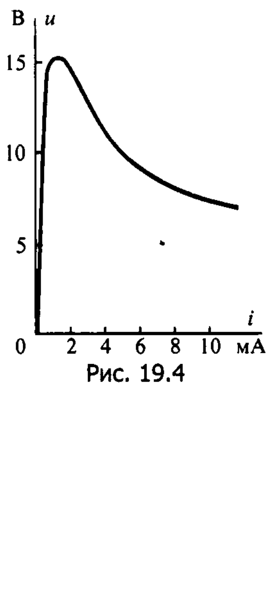

Рис. 19.4

В технике высокого напряжения находят применение *тиритовые нелинейные элементы*, выполненные из керамического материала — тирита. Связь между током и напряжением для них можно выразить в виде $|i| = A|u|^n$, где $n \approx 3{,}5$, причем характеристика является симметричной. Следовательно, статическая и динамическая проводимости их имеют выражения

$$g_{\text{ст}} = \frac{i}{u} = \frac{|i|}{|u|} = A|u|^{n-1} \approx A|u|^{2,5};$$

$$g_{\text{д}} = \frac{di}{du} = \frac{d|i|}{d|u|} = An|u|^{n-1} \approx An|u|^{2,5},$$

т. е. проводимость возрастает с увеличением напряжения. Такая зависимость проводимости тиритовых элементов от напряжения дает возможность использовать их для защиты установок высокого напряжения — электрических станции, подстанций, трансформаторов и т. д. — от перенапряжений. Осуществляют так называемые тиритовые разрядники, представляющие собой столб *T* из тиритовых дисков, включаемые через искровой промежуток *a* параллельно с защищаемой установкой N обычно между проводом линии переменного тока высокого напряжения и землей (рис. 19.5).

При номинальном напряжении искровой промежуток не пробит и через разрядник ток не проходит. При повышении напряжения в линии выше номинального искровой промежуток пробивается и через тиритовый столб проходит большой ток, так как с повышением напряжения сопротивление разрядника резко падает. В итоге линия разряжается через тиритовый разрядник и напряжение на ней падает. При уменьшении напряжения сопротивление разрядника возрастает и ток через него резко падает. Резкое уменьшение тока приводит к прекращению газового разряда в искровом промежутке, а следовательно, к полному прекращению тока в цепи разрядника. На рис. 19.6 приведена примерная характеристика тиритовых дисков, используемых для разрядников. При увеличении напряжения в два раза по сравнению с номинальным ток увеличивается примерно в 10 раз.

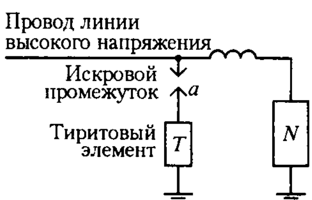

Рис. 19.5

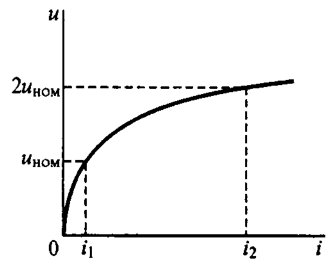

Рис. 19.6

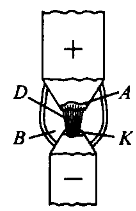

Рис. 19.7

Весьма большое практическое применение имеет *электрическая дуга*, являющаяся нелинейным элементом электрической цепи.

Явление, называемое электрической дугой, открыто профессором В. В. Петровым в 1802 г. На рис. 19.7 схематически изображена электрическая дуга между угольными электродами, горящая в воздухе при атмосферном давлении и питаемая от источника ЭДС. Активная часть K катода, излучающая электроны, имеет температуру 2700–3150 °С. Часть A анода, бомбардируемая электронами и имеющая обычно вогнутую форму, называется кратером электрической дуги. Температура кратера достигает 3500–3900 °С. Между активной частью катода и кратером располагается сама дуга D, температура которой достигает 4800 °С. Газы и пары в занятом ею пространстве находятся в ионизированном состоянии. Таким образом, электрические заряды переносятся в дуге как электронами, так и ионами, но в основном ток определяется потоком электронов. Собственно дуга окружена ореолом B — оболочкой, в которой происходит сгорание паров и частиц угля, а также образование продуктов горения воздуха, т. е. окислов азота.

Академик В. Ф. Миткевич в 1902–1905 гг. произвел ряд исследований электрической дуги, в которых он установил общие условия горения дуги, а также показал, что основными носителями тока в дуге являются электроны. Из опытов, поставленных В. Ф. Миткевичем, следует, что основным условием образования и существования электрической дуги является эмиссия электронов из катода. При термоэлектронной эмиссии (случай, исследованный В. Ф. Миткевичем) необходима как обязательное условие горения дуги высокая температура катода. Высокая температура анода имеет второстепенное значение. Во время дальнейших исследований установлено, что в том случае, когда созданы условия для достаточно мощной автоэлектронной эмиссии из катода, возможно существование дуги и при холодном катоде. Таким образом, основным условием возникновения электрической дуги является достаточно мощная эмиссия электронов из катода.

Электрическая дуга находит применение в ряде областей электротехники. Изобретение в 1876 г. П. Н. Яблочковым его знаменитой электрической свечи положило начало широкому использованию электричества для освещения. В настоящее время как источник света электрическая дуга используется в прожекторах и проекционных аппаратах. В металлургии мощные дуги применяются в так называемых дуговых электрических печах. Весьма распространен метод электросварки электрической дугой, в своей основе данный Н. Г. Славяновым и Н. Н. Бенардосом. В химической промышленности дуга используется для фиксации атмосферного азота. Широко применяется электрическая дуга в приборах, служащих для выпрямления переменного тока.

Электрическая дуга имеет ярко выраженную нелинейную характеристику. С увеличением тока i падение напряжения u в дуге уменьшается, т. е. дуга имеет падающую характеристику (рис. 19.8). При одинаковых электродах характеристика дуги симметрична (рис. 19.9).

Для некоторых элементов при переменном токе зависимость $u = f(i)$ при увеличении тока не совпадает с зависимостью $u = f(i)$ при уменьшении тока. Так, на рис. 19.10 изображена характеристика электрической дуги между одинаковыми электродами при периодическом переменном токе. Напряжение u между электродами при возрастающем токе больше напряжения при убывающем токе, так как при увеличении тока процесс идет от менее ионизированного состояния и от меньших температур, чем при его убывании. Характеристики таких элементов зависят от частоты переменного тока.

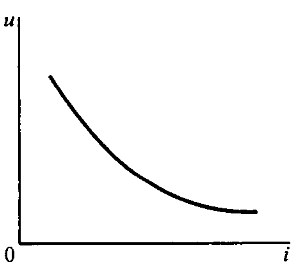

Рис. 19.8

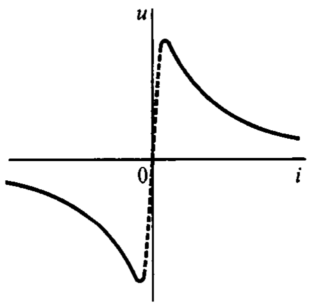

Рис. 19.9

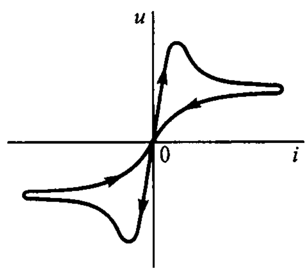

Рис. 19.10

К несимметричным нелинейным элементам относятся, например, электрическая дуга при неоднородных электродах, лампа с тлеющим разрядом при неодинаковых по форме электродах, ртутный вентиль, кенотрон, газотрон, полупроводниковый вентиль.

То обстоятельство, что основным носителем тока в электрической дуге является мощный поток электронов — частиц с отрицательным зарядом — и что для существования дуги необходима мощная эмиссия электронов из катода — отрицательного электрода, — приводит к заключению, что при разнородных электродах характеристика дуги должна быть несимметричной. Наиболее резко несимметрия проявляется, если один из электродов поставлен в условия, при которых из него возникает мощная эмиссия электронов, а другой электрод находится в условиях, при которых сколько-нибудь заметная эмиссия электронов из него невозможна. Например, один электрод нагрет до высокой температуры, достаточной для мощной термоэлектронной эмиссии, а другой искусственно поддерживается холодным, или у одного электрода могут образовываться высокие напряженности поля, достаточные для мощной автоэлектронной эмиссии, а у поверхности другого электрода такие напряженности поля не могут возникать. При таких условиях устройство проводит ток только в одном направлении и может служить для выпрямления переменного тока.

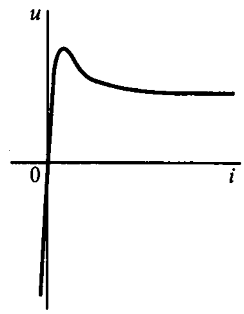

Рис. 19.11

Весьма важным представителем таких устройств является *ртутный вентиль*, представляющий собой сосуд, из которого по возможности тщательно удален воздух и который заполнен парами ртути и имеет катодом жидкую ртуть, а в качестве анодов — железные или графитовые цилиндры. Электрическая дуга горит в парах ртути. Эмиссия электронов происходит из так называемого катодного пятна на поверхности жидкой ртути. Таким образом, ток при принятом его положительном направлении может проходить через ртутный вентиль только от анода к катоду. Катодное пятно обычно поддерживается от постороннего источника энергии с помощью дуги возбуждения, горящей между катодом и вспомогательными анодами, расположенными вблизи катода. Характеристика ртутного вентиля, т. е. зависимость напряжения u между главным анодом и катодом от тока i при наличии дуги возбуждения, показана на рис. 19.11.

При горении дуги падение напряжения на вентиле невелико (15–30 В) и мало зависит от тока. Ток в ртутной дуге осуществляется не только движением электронов от катода к аноду, но и движением положительных ионов ртути в направлении от анода к катоду. Поэтому ртутные вентили принадлежат к *ионным приборам.* При изменении знака напряжения на вентиле обратный ток через вентиль ничтожен. Ртутные вентили изготовляются как сравнительно небольшой мощности — в запаянных стеклянных сосудах, так и очень большой мощности — в железных сосудах, откачиваемых насосами. Возможность построения ртутных вентилей на очень большие обратные напряжения, порядка сотен тысяч вольт, и одновременно на большие токи, порядка нескольких сотен ампер, имеет исключительное значение для создания преобразовательных устройств переменного тока в постоянный и обратно — на концах линий передачи энергии постоянного тока высокого напряжения, о чем пойдет речь в дальнейшем.

Несимметричным нелинейным элементом является также *кенотрон* — пустотная электронная лампа с двумя электродами. Катод кенотрона имеет высокую температуру, достаточную для эмиссии электронов. С этой целью он накаливается от специального источника тока. Температура анода поддерживается довольно низкой, чтобы эмиссия электронов с его поверхности не происходила. В результате электронный ток может проходить в кенотроне только от катода к аноду, т. е. положительный ток может протекать только от анода к катоду. Кенотроны используются для выпрямления тока. Так как в кенотронах ток осуществляется движением только электронов, то кенотроны принадлежат к *электронным приборам.*

Характеристика кенотрона, т. е. зависимость тока i в нем от напряжения u между анодом и катодом, показана на рис. 19.12. При достижении напряжением u значения, при котором все электроны, излучаемые катодом, переносятся к аноду, ток i получает предельное значение i_s, называемое т о к о м н а с ы щ е н и я. Значение тока насыщения можно увеличить, лишь повышая температуру катода. То обстоятельство, что ток не достигает тока насыщения при малых напряжениях, связано с наличием в пространстве между катодом и анодом отрицательного объемного заряда электронов, находящихся в данный момент в этом пространстве и движущихся от катода к аноду. Этот отрицательный объемный заряд создает у катода электрическое поле, противоположное полю положительно заряженного анода, что и приводит к ограничению тока при данном напряжении между анодом и катодом. В начальной части характеристики зависимость между i и u может быть представлена, как это можно вывести теоретически, в виде $i = ku^{3/2}$. Кенотроны легко выполнить на высокое напряжение, так как в них создан высокий вакуум. Существенным недостатком является значительное падение напряжения в них, связанное с появлением отмеченного выше отрицательного объемного заряда. Ионные приборы в этом отношении выгодно отличаются от кенотронов — падение напряжения в них невелико, так как положительный заряд ионов в значительной мере компенсирует отрицательный заряд электронов.

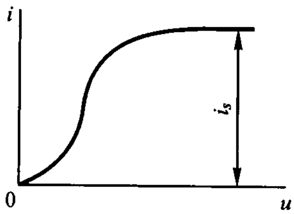

Рис. 19.12

К ионным приборам, используемым для выпрямления переменного тока, относятся, кроме упомянутых выше ртутных вентилей, также газотроны, представляющие собой, как и кенотроны, лампы с накаливаемым от постороннего источника твердым катодом, но наполненные или одним из благородных газов, или парами ртути. В последнем случае в баллон вводится капля жидкой ртути, над поверхностью которой и образуются насыщенные пары ртути. Вид характеристики газотрона аналогичен виду характеристики ртутного вентиля (см. рис. 19.11).

Полупроводниковые диоды, обладающие также несимметричной характеристикой, будут рассмотрены отдельно (см. § 19.6).

19.4. Инерционные и безынерционные элементы с нелинейным сопротивлением

Характерной особенностью некоторых нелинейных элементов при переменном токе является значительная их инерционность, которая приводит к невозможности быстрого изменения их сопротивления. Такими *инерционными* нелинейными элементами являются, например, лампы накаливания, обладающие значительной тепловой инерцией. При изменении тока в лампе с достаточно большой частотой, например с промышленной частотой $f = 50$ Гц, температура нити лампы практически не изменяется в течение периода, а соответственно, и сопротивление лампы остается практически неизменным в течение периода. Поэтому лампа при неизменном действующем периодическом переменном токе по отношению к мгновенному току оказывается линейным элементом. Форма кривой тока в лампе повторяет форму кривой напряжения на ней; в частности, при синусоидальном напряжении и ток в лампе оказывается синусоидальным. Однако при изменении действующего переменного тока I в лампе температура нити накала и ее сопротивление изменяются и, соответственно, характеристика лампы $U = F(I)$, связывающая действующие ток и напряжение, оказывается нелинейной (см. рис. 19.3).

Наряду с инерционными элементами мы располагаем нелинейными элементами, которые при не слишком высоких частотах могут рассматриваться как *безынерционные.* К ним относятся прежде всего электронные лампы, так как инерция электронов, образующих в них ток, весьма мала. Такие элементы являются нелинейными как в отношении действующих, так и в отношении мгновенных тока и напряжения. При периодических процессах кривые тока и напряжения в этих элементах имеют различные формы; например, при синусоидальном напряжении ток оказывается несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение несинусоидально. По этой причине нелинейная характеристика $U = F(I)$, связывающая действующие ток и напряжение, в таких элементах зависит от формы кривых мгновенных тока и напряжения.

Рассматривая связь между мгновенными переменным током и переменным напряжением в таких элементах, естественно пользоваться *динамическими* сопротивлением и проводимостью:

$$r_д = \frac{du}{di} \quad \text{и} \quad g_д = \frac{di}{du},$$

причем $r_д$ и $g_д$ являются функциями тока i и, соответственно, напряжения u.

Рассматривая же связь между действующими током и напряжением, можно использовать значения *эквивалентных* активного сопротивления и активной проводимости элемента, равные

$$r_э = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad g_э = \frac{I}{U},$$

поскольку в рассматриваемых элементах пренебрегаем их индуктивностью и емкостью.

19.5. Характеристики элементов с нелинейным сопротивлением, позволяющие осуществить стабилизацию тока или напряжения

На рис. 19.13 изображена характеристика *бареттера*, представляющего собой запаянный и заполненный водородом стеклянный баллон, внутри которого помещена железная нить, присоединенная к выводам из баллона. Изменение температуры нити при изменении тока в ней, а также соответствующие условия ее охлаждения приводят к нелинейной зависимости между током и напряжением, показанной на рисунке. В пределах изменения напряжения на зажимах бареттера от u' до u'' ток почти не изменяется. Поэтому бареттеры используются для *стабилизации тока.* С этой целью их включают последовательно с приемником, в котором необходимо стабилизировать ток. Если подобрать нормальный режим работы цепи так, чтобы разность напряжений питающей сети и приемника, приходящаяся на зажимы бареттера, равнялась $u_{ном}$ (рис. 19.13), то при колебаниях напряжения сети в пределах $\pm\,\Delta u$ эти колебания практически полностью приходятся на бареттер, так как ток остается неизменным и, соответственно, неизменным остается напряжение на зажимах приемника при постоянстве его сопротивления. Ток в цепи остается постоянным также и при изменениях сопротивления приемника, хотя при этом напряжение на приемнике изменяется. Для стабилизации тока важно только, чтобы колебания разности напряжений сети и приемника не выходили за пределы u' и u'' (рис. 19.13).

В качестве нелинейных элементов широко используются *лампы с тлеющим разрядом* (неоновые лампы, стабиловольты и т. д.). Эти лампы представляют собой заполненные инертным газом запаянные баллоны, куда введены два электрода, между которыми имеется газовый промежуток. На рис. 19.14 дана характеристика такой лампы. Если постепенно увеличивать напряжение на негорящей лампе, то ток, оставаясь ничтожным по значению, немного возрастает. При достижении напряжения u_0 между электродами возникает тлеющий разряд — лампа загорается, т. е. газ начинает светиться. На одном участке характеристика лампы является падающей вследствие роста степени ионизации газа при увеличении тока и соответственного увеличения проводимости газового промежутка. В пределах изменения тока от i' и i'' напряжение на лампе практически остается неизменным, что используется для *стабилизации напряжения* с помощью так называемых стабиловольтов.

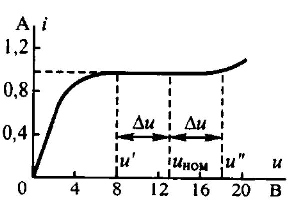

Рис. 19.13

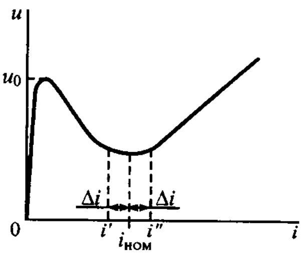

Рис. 19.14

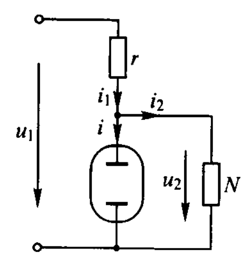

Рис. 19.15

Стабиловольт представляет собой лампу с тлеющим разрядом с последовательно включенным с ней линейным резистором r (рис. 19.15). Приемник N, на зажимах которого необходимо стабилизировать напряжение, приключается параллельно лампе. Нормальный режим всей цепи подбирают так, чтобы ток в лампе равнялся $i_{ном}$ (рис. 19.14). При изменении напряжения u_1 сети изменяется ток $i_1 = i + i_2$ в резисторе r, но если эти колебания тока не выходят за пределы $\pm\Delta i$

(рис. 19.14), то они практически полностью приходятся на ток i в лампе. Напряжение же u_2 на лампе и на приемнике и ток i_2 в приемнике практически не изменяются. Напряжение u_2 остается стабильным и при изменении сопротивления приемника. При этом изменение тока i_2 компенсируется изменением тока i в лампе. Для стабилизации напряжения u_2 необходимо, чтобы при колебаниях напряжения сети и сопротивления приемника ток в лампе оставался в пределах i' и i'' (рис. 19.14).

19.6. Полупроводниковые диоды как нелинейные элементы электрической цепи

Полупроводниковые диоды, обладающие несимметричной нелинейной характеристикой, получили исключительно широкое распространение. Уже в течение длительного времени для выпрямления переменного тока используются меднозакисные и селеновые полупроводниковые вентили.

Особый интерес представляют весьма широко применяемые германиевые и кремниевые полупроводниковые вентили. Рассмотрим несколько подробнее процессы в этих вентилях, так как это понадобится в последующем для уяснения принципа действия германиевых триодов.

Германий и кремний относятся к четвертой группе элементов — атомы их имеют во внешней электронной оболочке по четыре валентных электрона. В кристалле германия атомы расположены так, что каждый атом находится между четырьмя соседними атомами, отстоящими по отношению к нему на равных расстояниях и под одинаковыми углами. Четыре валентных электрона каждого атома входят в так называемые ковалентные связи с четырьмя соседними атомами. Таким образом, в каждой ковалентной связи участвуют два электрона соседних атомов. На рис. 19.16 структура кристаллической решетки германия условно представлена на плоскости. Ядро атома с остальными электронами представляет собой инертный в отношении химических свойств и в отношении электропроводности остаток с положительным зарядом, по абсолютному значению равным четырем зарядам электрона.

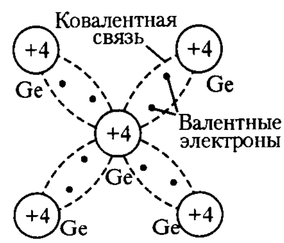

Рис. 19.16.

Энергетический зазор между валентной зоной и зоной проводимости на так называемой энергетической диаграмме у полупроводников имеет порядок 1 эВ (у германия 0,72 эВ, у кремния 1,11 эВ), т. е. значительно меньше, чем у диэлектриков. Поэтому при комнатной температуре у полупроводников большее число электронов, чем у диэлектриков, способно преодолеть этот зазор и перейти в зону проводимости. При этом в валентной зоне образуются не занятые электронами места, т. е. положительные дырки. Этот процесс схематически показан на рис. 19.17, *а* на модели решетки кристалла и на рис. 19.17, *б* на энергетической диаграмме. Электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне определяют электропроводность полупроводника. Удельное сопротивление чистого германия при $t = 20$ °С составляет $\rho = 0{,}6$ Ом·м, в то время как такой диэлектрик, как слюда, имеет $\rho \approx 9 \cdot 10^{13}$ Ом·м. С возрастанием температуры увеличивается число электронов, способных преодолеть энергетический зазор, и вследствие этого удельное сопротивление чистого германия убывает с ростом температуры, т. е. чистый германий имеет отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

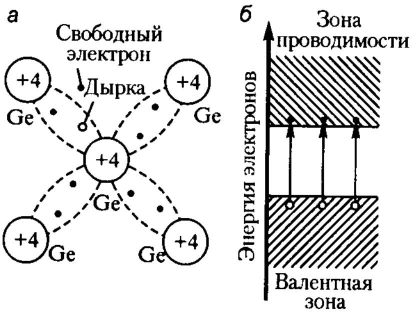

Рис. 19.17.

Чрезвычайно важно, что имеется возможность влиять на значение и характер проводимости германия путем внесения в него ничтожно малых количеств примесей элементов третьей (бор, индий) или пятой (мышьяк, сурьма) групп.

Предположим, что в кристалл германия добавлена в небольшом количестве примесь элемента пятой группы, атомы которого имеют пять валентных электронов. Атомы примеси замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом четыре валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с четырьмя соседними атомами германия, а пятый валентный электрон примесного атома, оставшийся вне этих связей, оказывается слабо связанным со своим атомом. Он легко освобождается под влиянием, например, теплового движения, становясь свободным электроном проводимости.

Примеси этого типа называют «донорами», или «источниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся преобладанием свободных электронов, называют полупроводниками типа *n*. На рис. 19.18, *а* схематически изображено на модели кристаллической решетки германия образование свободного электрона вследствие замещения одного атома германия примесным атомом сурьмы. На энергетической диаграмме (рис. 19.18, *б*) уровни доноров располагаются в энергетическом зазоре вблизи зоны проводимости в соответствии с тем, что требуется незначительная энергия для освобождения их избыточного электрона и перевода его в зону проводимости. После ухода этого электрона атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке положительный ион. Ничтожное добавление такой примеси существенно увеличивает электрическую проводимость германия. Так, добавление одного донорного атома на 10^8 атомов германия снижает его удельное сопротивление при комнатной температуре до $\rho = 0{,}04$ Ом·м.

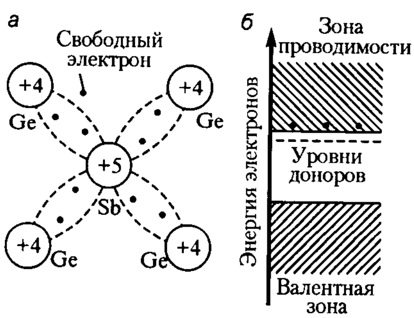

Рис. 19.18.

Предположим теперь, что в германий добавлена в небольшом количестве примесь элемента третьей группы, атомы которого имеют три валентных электрона. Эти атомы также замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом три валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с тремя соседними атомами германия, но в ковалентной связи с четвертым атомом германия образуется не занятое электроном место, т. е. дырка. В это незанятое место сравнительно легко может перейти электрон из соседней ковалентной связи, оставив в ней дырку. В эту вновь образовавшуюся дырку может перейти электрон из следующей ковалентной связи и т. д. Все происходит так, как будто перемещается положительно заряженная частица, эквивалентная дырке.

Примеси этого типа называют «акцепторами», или «приемниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся дырочной проводимостью, называют полупроводниками типа *p*. На рис. 19.19, *а* на модели кристаллической решетки схематически изображено образование дырки в случае замещения одного атома германия примесным атомом индия. На энергетической диаграмме (рис. 19.19, *б*) уровни акцепторов располагаются в энергетическом зазоре вблизи валентной зоны в соответствии с тем, что требуется незначительная энергия для перевода на этот уровень электрона из валентной зоны с образованием дырки в последней. После ухода дырки атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке отрицательный ион.

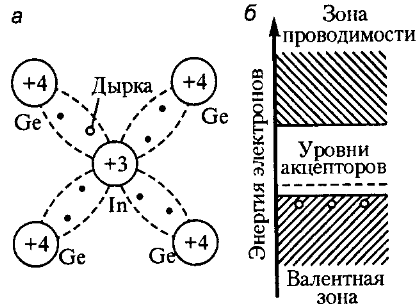

Рис. 19.19

Возможность создания полупроводников с различным характером проводимости позволяет создать устройства для выпрямления переменного тока.

Предположим, что в образце германия слева от плоскости *1–1′* (рис. 19.20) введены акцепторные примеси, а справа от нее — донорные примеси, т. е. слева имеем германий типа *p*, а справа — германий типа *n*. Говорят, что около плоскости *1–1′* имеется *p*–*n*-переход. Дырки в германии типа *p* и электроны в германии типа *n* являются основными носителями тока. Дырки будут диффундировать слева направо из области *p* в область *n*. Свободные электроны будут диффундировать в противоположном направлении. В итоге слева от плоскости *1–1′* образуется избыточный отрицательный заряд и справа — избыточный положительный заряд. Вследствие рекомбинации электронов и дырок в близлежащих к плоскости *1–1′* областях не будет ни дырок, ни свободных электронов и избыточный заряд, по существу, будет создаваться слева отрицательными ионами акцептора, а справа — положительными ионами донора. В месте *p*–*n*-перехода возникает электрическое поле, направленное справа налево и препятствующее дальнейшей диффузии дырок и электронов. Между областью *p* и областью *n* образуется разность электрических потенциалов, т. е. возникает так называемый потенциальный барьер. Распределение потенциала в районе *p*–*n*-перехода показано внизу на рис. 19.20 и на рис. 19.21, *а*, причем здесь и далее за нуль потенциала условно принят потенциал в области германия типа *p* непосредственно около *p*–*n*-перехода, где уже нет объемного заряда.

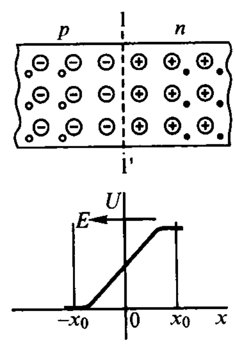

Рис. 19.20

Приключим такой образец к источнику постоянного напряжения так, как показано на рис. 19.21, *б*. При таком включении напряжение источника снизит значение потенциального барьера и основные носители тока (дырки слева и электроны справа) получат возможность проходить через p–n-переход. В цепи возникает так называемый прямой ток, который будет возрастать с увеличением напряжения источника (рис. 19.22, *а*). Если к образцу приложить от источника напряжение противоположного по сравнению с предыдущим случаем знака (рис. 19.21, *в*), то потенциальный барьер возрастет на значение этого напряжения и основные носители тока не смогут проходить через плоскость раздела *1–1'*. Однако ток все же не будет полностью отсутствовать.

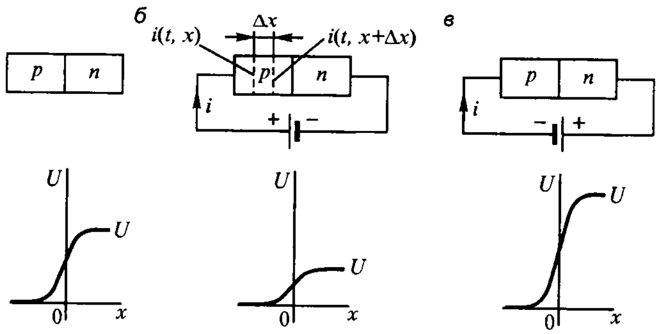

Рис. 19.21

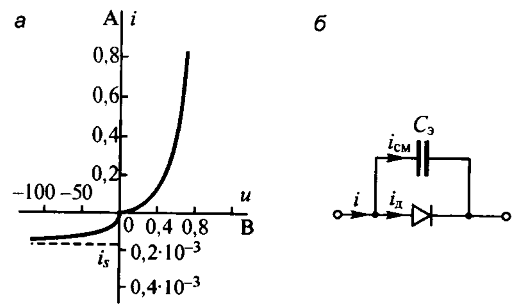

Рис. 19.22

Кроме основных носителей тока, вызванных наличием примесей, и в p- и в n-областях имеются в небольшом количестве так называемые неосновные носители тока, знаки зарядов которых противоположны знакам зарядов основных носителей, а именно в области p присутствуют также в небольшом количестве свободные электроны, а в области n — дырки. Они появляются в обеих областях вследствие образования электронно-дырочных пар в результате воздействия теплового движения согласно схеме, показанной на рис. 19.17. Очевидно, эти неосновные носители тока свободно переходят через потенциальный барьер, так как электрическое поле здесь не препятствует, а способствует их прохождению. Они образуют так называемый обратный ток. С увеличением обратного напряжения этот обратный ток быстро достигает своего предельного значения, определяемого числом электронно-дырочных пар, образующихся в образце в единицу времени. Обратный ток во много раз меньше прямого. На рис. 19.22, *а* приведена характеристика германиевого вентиля. Чтобы можно было на одном рисунке изобразить и прямой, и обратный токи, они даны в различных масштабах.

Математическое описание этих процессов, иными словами, математическая модель полупроводникового диода, составлено для случая, когда граница p–n-перехода плоская и распределение концентраций дырок (p) и электронов (n) зависит только от одной координаты (x), направленной перпендикулярно к границе раздела *1–1'* (рис. 19.20). Для случая, когда устанавливается динамическое равновесие и плотности зарядов не меняются, имеем две составляющие плотности тока: дрейфовую составляющую, которая возникает за счет движения зарядов под воздействием электрического поля и равна (для дырок) $q_0\mu_p pE$, и диффузную составляющую, которая возникает за счет наличия разности концентраций и равна (для дырок) $q_0 D_p \dfrac{dp}{dx}$. Здесь $q_0 = 1{,}602\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона; μ_p — подвижность дырок, м^2/(В·с); $D_p = \mu_p \dfrac{kT}{q_0}$ — коэффициент диффузии, м^2/с; $k = 1{,}381\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — температура по шкале Кельвина; p — концентрация дырок. Для температуры приблизительно 23 °С или $T \approx 300$ К термоэлектрический потенциал равен $kT/q_0 \approx 0{,}02586$ В или $q_0/kT \approx 38{,}67$ В$^{-1}$. В состоянии динамического равновесия результирующая плотность тока дырок на несколько порядков меньше отдельных ее составляющих, поэтому можно записать $q_0\mu_p pE = q_0 D_p \dfrac{dp}{dx}$. Это уравнение описывает следующий физический процесс. Вследствие различной концентрации неосновных носителей происходит диффузия дырок, которая определяет плотность тока диффузии и направлена от участков с высокой концентрацией дырок к участку с низкой концентрацией (на рис. 19.20 в n-области слева направо). Силу, приводящую к диффузии, можно рассматривать как результат действия некоторого стороннего электрического поля, напряженность которого направлена слева направо. При наличии стороннего поля, потенциал которого убывает по мере приближения к границе, в n-области образуется электрическое поле, движущее дырки справа налево; при этом возникает ток переноса — ток дрейфа, направленный противоположно току диффузии. Основные носители — электроны в n-области — распределяются таким образом, что в любом объеме n-области объемная плотность заряда оказывается равной нулю. Связь между приложенным к диоду напряжением и концентрацией дырок можно найти, если из выражений для плотностей токов определить E и произвести интегрирование. Имеем

$$\int_{x_0}^{-x_0} E\,dx = \frac{D_p}{\mu_p}\int_{x_0}^{-x_0}\frac{dp}{p};\quad u = \frac{D_p}{\mu_p}\ln\frac{p_p}{p}\quad \text{или}\quad \frac{p_p}{p} = e^{\frac{\mu_p u}{D_p}} = e^{\frac{q_0 u}{kT}}.$$

Напряжение $u = u_{n,p} + u_{\text{конт}}$.

Если к диоду приложено напряжение $u_{n,p} = 0$, то контактная разность потенциалов $u_{\text{конт}}$ в n–p-переходе определяется отношением равновесных концентраций дырок в n- и p-материалах. Иначе говоря, $p_p/p_n = e^{\frac{q_0 u_{\text{конт}}}{kT}}$, и тогда

$$\frac{p}{p_p} = \frac{p_n}{p_p} e^{-\frac{q_0 u_{n,p}}{kT}} = \frac{p_n}{p_p} e^{\frac{q_0 u_{p,n}}{kT}} \quad \text{или} \quad p = p_n e^{\frac{q_0}{kT} u_{p,n}} = p_n e^{\frac{q_0}{kT} u_\text{д}},$$

где $u_\text{д} = u_{n,p}$ — приложенное к диоду напряжение, условно-положительное направление которого принято от p -материала к n-материалу. Токи в p- и n-областях определяются избыточными неосновными носителями, поэтому для избыточной концентрации дырок в n-материале можно записать

$$\tilde{p} = p - p_n = p_n \left(e^{\frac{q_0 u_\text{д}}{kT}} - 1 \right).$$

Аналогичное выражение можно получить и для избыточной концентрации неосновных носителей — электронов в p-материале:

$$\tilde{n} = n - n_p = n_p \left(e^{\frac{q_0 u_\text{д}}{kT}} - 1 \right).$$

Для концентрации дырок в некотором объеме и плотности тока диффузии можно записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p - p_n}{\tau_p} + \frac{1}{q_0} \frac{\partial J_p}{\partial x} \quad \text{и} \quad J_p = -q_0 D_p \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Скорость возрастания числа дырок в единице объема равна разнице скоростей генерирования и рекомбинации дырок в единице объема плюс разность дырочных токов, входящих в единицу объема и выходящих из нее, причем p_n — тепловая равновесная концентрация дырок в n-материале, а τ_p — их эффективное время жизни. Аналогичные уравнения можно записать для концентрации электронов и плотности тока диффузии электронов в материале p-типа:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n - n_p}{\tau_n} + \frac{1}{q_0} \frac{\partial J_n}{\partial x} \quad \text{и} \quad J_n = q_0 D_n \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Направление плотности тока J_n и направление потока электронов противоположны, поэтому последний член имеет другой знак по сравнению с выражением для дырок.

Если $\partial p / \partial t = 0$, то

$$\frac{p - p_n}{\tau_p} = D_p \frac{d^2 p}{dx^2} = D_p \frac{d^2 (p - p_n)}{dx^2},$$

откуда

$$p - p_n = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}, \text{ где } \alpha = \left(\sqrt{D_p \tau_p} \right)^{-1} = 1/L_p,$$

где L_p — глубина диффузии дырок.

Учитывая, что при $x = \infty$ имеем $p - p_n = 0$, получим $A_1 = 0$. Ранее мы получили выражение для p-избыточной концентрации дырок в зависимости от $u_\text{д}$. При интегрировании пределом являлся x_0, поэтому должно быть очевидное равенство

$$A_2 e^{-x_0/L_p} = p_n\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) \quad \text{или} \quad A_2 = e^{x_0/L_p} p_n\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) = p_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right).$$

Отсюда окончательно имеем

$$\tilde{p}(x) = p_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right)e^{-\frac{x}{L_p}}; \quad \tilde{n}(x) = n_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right)e^{-\frac{x}{L_n}}.$$

Ток в p–n-переходе и, следовательно, в диоде равен

$$i_д = i_p \Big|_{x=0} + i_n \Big|_{x=0} = s_д(J_p - J_n) = s_д q_0\left(-D_p \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} - D_n \frac{\partial\tilde{n}}{\partial x}\right) =$$

$$= q_0 s_д\left(\frac{D_p p_0}{L_p} + \frac{D_n n_0}{L_n}\right)\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) = I_s\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right),$$

где $s_д$ — поперечное сечение диода.

Наличие объемных зарядов в p–n-переходе следует учесть в математической модели тем, что ток диода, кроме тока проводимости, будет содержать составляющие, учитывающие токи смещения. Такая добавка может быть получена, если принять во внимание, что

$$i_{см} = \frac{d}{dt}(sD) = s_д \frac{d}{dt}\left(\frac{L_p q_0 p}{2} + \frac{L_n q_0 n}{2}\right) =$$

$$= s_д\left(\frac{L_p q_0}{2}\frac{q_0 p_0}{kT} + \frac{L_n q_0}{2}\frac{q_0 n_0}{kT}\right)e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} \frac{du_д}{dt} = C_э \frac{du_д}{dt},$$

где $C_э = \frac{s_д q_0}{2}\frac{q_0}{kT}(p_0 L_p + n_0 L_n)e^{\frac{q_0 u_д}{kT}}$.

Заметим, что $L_p = D_p\tau_p/L_p$, и при предположении о равенстве $\tau_p = \tau_n = \tau$ можно получить

$$C_э = \frac{I_s \tau q_0}{2kT} e^{\frac{q_0 u_д}{kT}}.$$

Эквивалентная схема, соответствующая полученной выше математической модели, приведена на рис. 19.22, *б*. Если обратить внимание на выражения для концентрации неосновных носителей и плотностей токов, можно заметить их сходство с уравнениями для цепей с распределенными параметрами. Это сходство не случайное, ибо заряды и токи в веществе диода, согласно основному допущению, распределены вдоль координаты x, и поэтому процессы протекают и в зависимости от x, и в зависимости от времени. Эта аналогия также говорит о том, что представление диода двумя элементами не может быть признано точным, так как частотные свойства цепей с распределенными параметрами r и C невозможно точно воспроизвести при помощи двух пассивных элементов.

Выпрямители с полупроводниковыми диодами (вентилями) находят исключительно широкое применение в электроизмерительных приборах, в устройствах автоматики, в электронных вычислительных машинах, а также в различных мощных электроэнергетических установках — в электрическом транспорте, на электрохимических предприятиях и т. д.

19.7. Управляемые нелинейные элементы. Ионный прибор с управляющим электродом

Ряд особых, весьма ценных явлений в электрических цепях может быть получен при использовании *управляемых нелинейных элементов*. В настоящем параграфе рассмотрим один из весьма распространенных приборов этого типа — ионный прибор с управляющим электродом. В следующих параграфах будут рассмотрены два других получивших широкое распространение прибора — трехэлектродная лампа и полупроводниковый триод.

Ионный прибор с управляющим электродом выполняется или с жидким катодом, как ртутный вентиль, или с накаливаемым катодом, как газотрон. Отметим, что часто он носит название *тиратрон*. Управляющий электрод обычно выполняется в виде сетки той или иной конструкции, расположенной между катодом и анодом.

Сетка в ионном приборе не обладает полным управлением. С помощью отрицательного напряжения между сеткой и катодом, при котором потенциал сетки отрицателен по отношению к потенциалу катода, можно не допустить возникновения разряда между катодом и анодом, но невозможно прекратить уже возникший разряд. Действие сетки в таком приборе поясняется рис. 19.23. До момента времени t_1 напряжение на сетке u_c было отрицательным и разряд между катодом и анодом не образовывался, хотя в отдельные интервалы времени напряжение u_a между анодом и катодом было положительно. Электрическое поле сетки компенсировало поле анода. В момент времени t_1 на сетку подается импульс положительного напряжения. Так как при этом напряжение на аноде положительно, то между катодом и анодом возникает ионный разряд в форме электрической дуги. Однако изменение знака u_c на отрицательный в момент t_2 при положительном напряжении на аноде не приводит к погасанию дуги, так как положительные ионы, имеющиеся в большом количестве в пространстве, окружающем сетку, привлекаются к ней и нейтрализуют действие ее отрицательного заряда. Дуга гаснет в момент t_3 изменения знака напряжения u_a между анодом и катодом. Дуга загорается вновь в момент t_4 при подаче положительного напряжения на сетку при положительном напряжении u_a. Подача на сетку положительного импульса напряжения в момент t_5, когда напряжение на аноде отрицательно, не приводит к образованию дуги. Если в момент t_6 снять отрицательное напряжение на сетке и заменить его постоянным положительным, то дуга будет беспрепятственно гореть при положительных значениях анодного напряжения так же, как это происходит в неуправляемом вентиле.

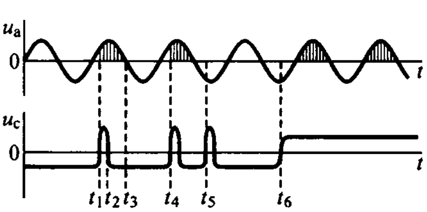

Рис. 19.23

Хотя управляющее действие сетки в ионных приборах ограничено, но и такое действие сетки, как будет показано, дает возможность осуществить регулирование напряжения выпрямительных установок, а также решить при помощи ионных приборов значительно более сложную и важную задачу преобразования переменного тока в постоянный.

19.8. Управляемые нелинейные элементы. Трехэлектродная электронная лампа

В отличие от ионных приборов, в трехэлектродных электронных лампах сетка обладает полным управлением (рис. 19.24). Ток в цепи сетки в нормальных режимах значительно меньше тока в цепи анода. Поэтому током в цепи сетки будем пренебрегать. Анодный ток $i_а$ определяется совместным действием анодного $u_а$ и сеточного $u_с$ напряжений: $i_а = F(u_а, u_с)$. Характер зависимости тока $i_а$ от напряжений $u_а$ и $u_с$ приведен на рис. 19.25. Кривые на рис. 19.25, носящие название анодно-сеточных характеристик, выражают изменение анодного тока $i_а$ при изменении сеточного напряжения $u_с$ для различных постоянных значений анодного напряжения: $i_а = F(u_с)$ при $u_а = \text{const}$. Из рис. 19.25 видно, что зависимости $i_а = F(u_с)$ являются нелинейными при больших изменениях сеточного напряжения. Однако они имеют значительные прямолинейные участки, заканчивающиеся с одной стороны переходом к току насыщения i_s и с другой стороны — переходом к нулевому значению тока.

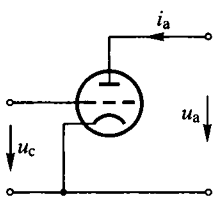

Рис. 19.24

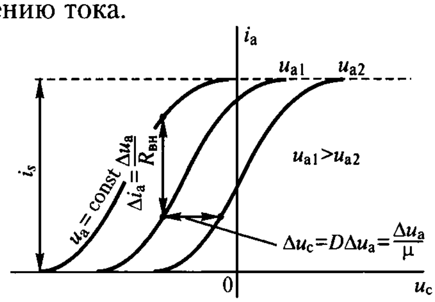

Рис. 19.25

Приращение тока $i_а$ определяется приращениями обоих напряжении $u_а$ и $u_с$ и равно

$$di_а = \frac{\partial i_а}{\partial u_а} du_а + \frac{\partial i_а}{\partial u_с} du_с. \qquad (*)$$

Величина $\frac{\partial i_а}{\partial u_а} = \left(\frac{di_а}{du_а}\right)_{u_с = \text{const}} = G_{вн}$ представляет собой *внутреннюю проводимость* лампы, а обратная ей величина $R_{вн} = 1/G_{вн}$ — *внутреннее сопротивление* лампы; величина $\frac{\partial i_а}{\partial u_с} = \left(\frac{di_а}{du_с}\right)_{u_а = \text{const}} = S$ является крутизной характеристики лампы. Величина S определяется с учетом масштабов тангенсом угла наклона касательной к характеристике в данной точке.

Кроме параметров $R_{вн}$ и S лампы, вводят еще два зависящих от них параметра. Пусть приращения $du_а$ и $du_с$ подобраны так, что ток $i_а$ не меняется, т. е. $di_а = 0$ и, следовательно,

$$0 = \frac{\partial i_а}{\partial u_а} du_а + \frac{\partial i_а}{\partial u_с} du_с = \frac{1}{R_{вн}} du_а + S du_с,$$

откуда

$$-\left(\frac{du_а}{du_с}\right)_{i_а=\mathrm{const}} = -\frac{\partial u_а}{\partial u_с} = SR_{вн}.$$

Величину $\left(\dfrac{du_а}{du_с}\right)_{i_а=\mathrm{const}} = \mu$ называют коэффициентом усиления лампы. Величину, обратную коэффициенту усиления, $D = 1/\mu$ называют проницаемостью лампы.

Величины μ и D определяются формой и геометрическими размерами электродов лампы. Сетка расположена ближе к катоду, чем анод. Поэтому $\mu > 1$ и $D < 1$. Чем гуще сетка и чем ближе она к катоду, тем больше влияние сеточного напряжения на анодный ток по сравнению с влиянием анодного напряжения и, соответственно, тем больше μ и меньше D. На этом основывается использование ламп в качестве усилителей напряжения.

Между параметрами лампы, как видно из последних формул, существует связь

$$\mu = \frac{1}{D} = SR_{вн}, \text{ т. е. } SR_{вн}D = 1.$$

Параметры μ и D, определяемые геометрическими размерами, практически не зависят от процессов в лампе, тогда как величины S и $R_{вн}$ зависят от процессов, т. е. от значений $u_а$, $u_с$ и $i_а$. На прямолинейных участках характеристики также $S = \mathrm{const}$ и $R_{вн} = \mathrm{const}$.

19.9. Трехэлектродная электронная лампа как элемент электрической цепи

Предположим, что колебания анодного тока в электронной лампе происходят в пределах линейного участка характеристики. Если процесс совершается на нелинейном участке характеристики, то будем предполагать амплитуду колебаний достаточно малой, чтобы можно было линеаризовать участок характеристики в пределах, в которых совершаются колебания. В таком случае уравнения, описывающие эти колебания около некоторой точки характеристики, оказываются линейными. Пусть $I_а(p)$, $U_а(p)$ и $U_с(p)$ — операторные изображения изменяющихся во времени отклонений $\Delta i_а = i_а - i_{а0}$, $\Delta u_а = u_а - u_{а0}$, $\Delta u_с = u_с - u_{с0}$ анодного тока $i_а$, анодного напряжения $u_а$ и сеточного напряжения $u_с$ от их значений $i_{а0}$, $u_{а0}$, $u_{с0}$, соответствующих этой точке характеристики. Уравнение (*) предыдущего параграфа для них имеет вид

$$I_а(p) = G_{вн}U_а(p) + SU_с(p)$$

или

$$-SU_с(p) = G_{вн}U_а(p) - I_а(p).$$

Обозначив $\mathfrak{I}(p) = -SU_c(p)$ и $I(p) = -I_a(p)$, запишем уравнение в виде

$$\mathfrak{I}(p) = G_{вн} U_а(p) + I(p).$$

Величину $\mathfrak{I}(p) = -SU_c(p)$ будем рассматривать как ток зависимого источника тока, так как $\mathfrak{I}(p)$ зависит от $U_c(p)$. Величину $G_{вн}U(p)$ при этом будем рассматривать как ток через внутреннюю проводимость $G_{вн}$ этого источника тока. Величина $I(p)$ является током, идущим от источника к приемнику. Соответственно, эквивалентная схема электронной лампы (рис. 19.26, *а*) получает вид, показанный на рис. 19.26, *б*. На эквивалентной схеме принято изображать также входные зажимы *1*, *0* в цепи сетки. Выходными являются зажимы *2*, *0* в анодной цепи.

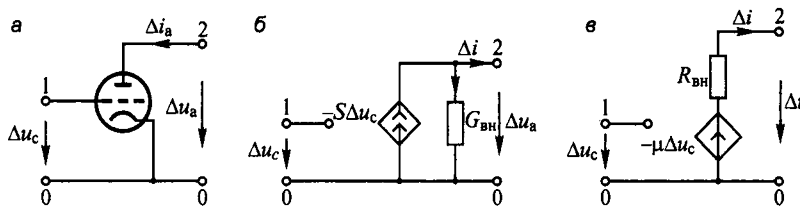

Рис. 19.26

Заменяя источник тока эквивалентным источником ЭДС, получаем ЭДС этого источника равной $E(p) = \dfrac{\mathfrak{I}(p)}{G_{вн}} = -\dfrac{S}{G_{вн}} U_c(p) = -\mu U_c(p)$ и его внутреннее сопротивление равным $R_{вн} = 1/G_{вн}$. Соответственно, схема, эквивалентная электронной лампе, может быть представлена также в виде, изображенном на рис. 19.26, *в*.

При весьма высоких частотах необходимо учитывать емкости между электродами лампы, и, соответственно, эквивалентная схема дополняется конденсаторами (рис. 19.27).

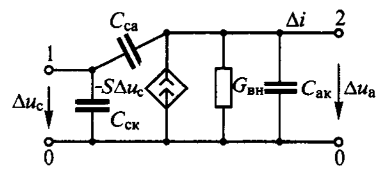

Рис. 19.27

Пусть сопротивление приемника, приключенного к выходным зажимам *2*, *0*, равно *R*. Тогда, согласно схеме рис. 19.26, *в*, имеем

$$I(p) = -\frac{\mu U_c(p)}{R_{вн} + R} \quad \text{и} \quad U_а(p) = I(p)R = -\frac{\mu U_c(p)R}{R_{вн} + R}.$$

Таким образом, передаточная функция четырехполюсника от зажимов *1–0* к зажимам *2*, *0*, представляющая собой коэффициент усиления напряжения, приобретает вид

$$\frac{U_а(p)}{U_c(p)} = -\frac{\mu R}{R_{вн} + R} = k.$$

Обычно μ заметно больше единицы, и при заданном $R_{вн}$ величину R выбирают достаточно большой, так чтобы имело место неравенство $\mu > \dfrac{R_{вн} + R}{R}$; при этом $k > 1$ и имеем усиление напряжения.

19.10. Управляемые нелинейные элементы. Полупроводниковые триоды

Совершенно новые возможности в области создания усилителей переменных токов, генераторов колебаний и различных автоматических измерительных и счетно-решающих систем открылись с осуществлением полупроводниковых управляемых элементов — так называемых полупроводниковых триодов или транзисторов.

Рассмотрим принцип действия плоскостных германиевых триодов. На рис. 19.28 схематически изображен такой триод, в котором две области германия типа *p* разделены тонким слоем германия типа *n*. С помощью электродов в виде металлических пластин, называемых э м и т т е р о м, б а з о й и к о л л е к т о р о м, эти три области могут быть соединены с внешней электрической цепью. В таком триоде имеются два перехода между полупроводниками различного типа: *p*–*n*-переход от эмиттерной области к области базы и *n*–*p*-переход от области базы к области коллектора. Триоды такого типа называют биполярными. Если электроды не присоединены к внешней цепи, то вдоль триода в районе этих переходов устанавливается распределение электрического потенциала, показанное внизу на рис. 19.28. Как было разъяснено при рассмотрении принципа действия полупроводникового диода в § 19.6, такое распределение потенциала является результатом появления около поверхностей раздела германия различного типа объемных зарядов. В германии типа *p* этот объемный заряд обусловлен отрицательными зарядами закрепленных в решетке кристалла ионов акцепторной примеси, а в германии типа *n* — положительными зарядами закрепленных в решетке ионов донорной примеси (на рис. 19.28 эти ионы показаны большими кружками с соответствующими знаками в них). Электрическое поле, созданное этими объемными зарядами, препятствует диффузии дырок (маленькие белые кружки) из области *p* в область *n* и свободных электронов (маленькие черные кружки) — в противоположном направлении.

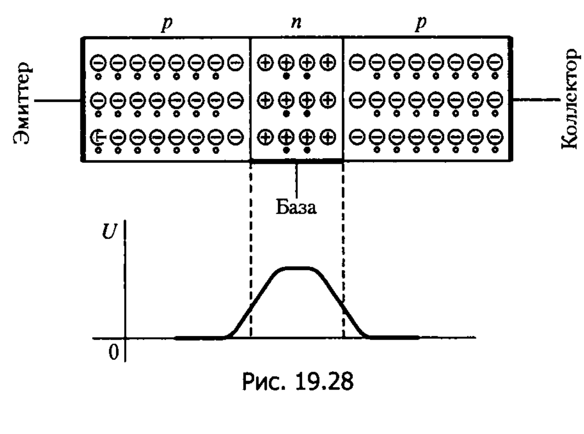

Рис. 19.28

Присоединим к триоду внешнюю цепь, как показано на рис. 19.29. Напряжение $U_э$ батареи, включенной между базой и эмиттером, снижает потенциальный барьер в *p*–*n*-переходе от эмиттерной области к области базы, так как эта батарея включена в прямом (способствующем прохождению прямого тока) направлении. Напряжение же $U_к$ батареи, включенной между базой и коллектором, увеличивает потенциальный барьер в n–p-переходе от области базы к области коллектора, так как эта батарея включена в обратном (запирающем) направлении. Распределение потенциала, которое при этом устанавливается в районе переходов вдоль триода, показано внизу на рис. 19.29. Снижение потенциального барьера между эмиттерной областью и областью базы вызывает движение дырок из области эмиттера в область базы (в область n). Ввиду весьма малой толщины слоя n германия (порядка сотых миллиметра) почти все дырки, прошедшие в этот слой из области эмиттера, продрейфуют через всю толщину слоя до следующего n–p-перехода и свободно пройдут через этот переход в область коллектора, так как электрическое поле в этом переходе не препятствует, а, наоборот, способствует движению дырок слева направо. Этому движению дырок способствует и напряжение батареи, включенной между базой и коллектором.

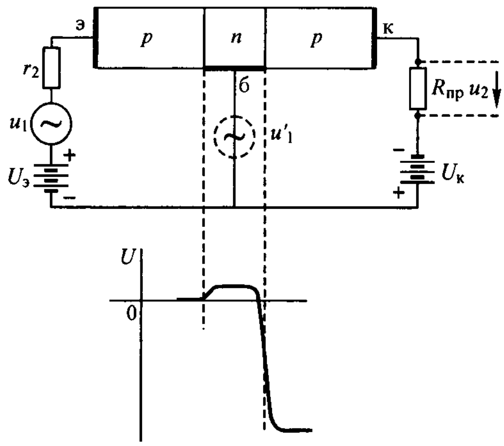

Рис. 19.29

Все же будет происходить рекомбинация в слое n некоторого числа дырок со свободными электронами этого слоя, что приведет к небольшому снижению тока в коллекторе по сравнению с током в эмиттере вследствие ответвления небольшой части тока эмиттера в базу. Кроме того, должен протекать электронный ток из области базы в область эмиттера, но при правильном конструировании триода этот ток значительно меньше тока, обусловленного движением дырок. Этот электронный ток создает дополнительную составляющую тока через базу и, соответственно, несколько увеличивает ток в эмиттере.

Существенное значение имеет характер зависимости тока в коллекторе от напряжения в цепи коллектора при заданном токе эмиттера. При увеличении напряжения сначала ток в коллекторе быстро возрастает (рис. 19.30), а затем наступает как бы истощение носителей тока в области коллектора, так как поступление их из эмиттера через p–n- и n–p-переходы ограничено током эмиттера, зависящим от значения потенциального барьера между эмиттером и базой (см. рис. 19.29). Соответственно, несмотря на значительное возрастание напряжения в цепи коллектора, ток в коллекторе увеличивается очень медленно, и, следовательно, сопротивление области коллектора резко возрастает, достигая весьма большого значения. Обычно напряжение $U_к$ батареи в цепи коллектора принимается достаточно большим, порядка нескольких десятков вольт, и, соответственно, сопротивление области коллектора достигает сотен тысяч и даже нескольких миллионов ом. Такой же порядок

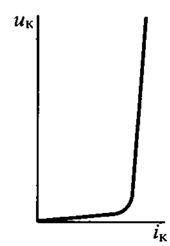

Рис. 19.30

имеет и сопротивление $R_{пр}$ приемника во внешней цепи коллектора. Так как значение потенциального барьера между эмиттером и базой имеет порядок одного вольта и сопротивление области эмиттера по сравнению с сопротивлением области коллектора незначительно, то в цепи эмиттера требуется незначительное напряжение $U_э$ батареи.

Предположим теперь, что в цепи эмиттера действует источник переменного напряжения u_1 с малой амплитудой и с внутренним сопротивлением r_2, малым по сравнению с сопротивлением области коллектора (см. рис. 19.29). Это напряжение изменяет значение потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влияет на значение тока, проходящего из эмиттера через область базы в цепь коллектора. Так как ток в цепи коллектора лишь немного меньше тока в цепи эмиттера, а сопротивление в цепи коллектора весьма велико, то на зажимах приемника возникает переменное напряжение u_2, значительно превышающее напряжение u_1. Таким образом, триод работает как усилитель напряжения. Коэффициент усиления напряжения $\alpha_u = u_2/u_1$ получается порядка десятков. Коэффициент же усиления тока, согласно вышеизложенному, получается несколько меньше единицы, т. е. $\alpha_i = i_2/i_1 < 1$, причем и i_2, и i_1 — переменные составляющие токов в цепях коллектора и эмиттера. Соответственно коэффициент усиления мощности $\alpha_p = \alpha_u\alpha_i$ несколько меньше α_u.

Большее усиление мощности можно получить, если включить источник первичного переменного напряжения u_1' в цепь базы, как это показано штриховыми линиями на рис. 19.29. Очевидно, что источник будет так же эффективно изменять значение потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влиять на значение тока в цепи коллектора, так что коэффициент усиления напряжения α_u получается также большим. Но так как ток в цепи базы весьма мал по сравнению с током в цепи коллектора, то значительным получается также коэффициент усиления тока α_i, а соответственно, и коэффициент усиления мощности $\alpha_p = \alpha_u\alpha_i$ оказывается при этом больше, чем в случае включения первичного источника напряжения u_1 в цепь эмиттера.

Наряду с рассмотренными биполярными триодами распространение нашли полевые, или униполярные триоды, в которых используется не два перехода между полупроводниками различного типа (см. рис. 19.28), а один (p–n либо n–p) переход.

Рассмотрим принцип действия полевого триода с p–n-переходом. На рис. 19.31 схематически изображен такой триод, в котором p–n-переход осуществлен на части нижней поверхности полупроводника типа n путем нанесения тонкого слоя полупроводника типа p.

Рис. 19.31

Присоединение триода к внешней цепи осуществляется через металлические электроды, называемые истоком (и), затвором (з) и стоком (с). Через полупроводник типа n протекает ток от стока к истоку, и эта часть устройства называется *каналом*.

Как следует из изложенного в § 19.6, при отсутствии внешних источников в зоне p–n-перехода создается избыточный заряд, электрическое поле которого является поперечным к каналу и направлено сверху вниз. Область расположения объемного заряда ограничена на рис. 19.31 пунктирной линий.

Полевой триод с присоединенной к нему внешней электрической цепью изображен на рис. 19.32. Полярность батареи $U_з$ такова, что она препятствует протеканию тока затвора, так что ток $i_з$ затвора оказывается весьма малым, и им можно пренебречь. Напряжение $U_з$ увеличивает потенциальный барьер в p–n-переходе, и область объемного заряда в канале также увеличивается (см. рис. 19.31).

Ток стока, протекающего по каналу, и напряжение u_2 приемника $r_{пр}$ зависят от размера области объемного заряда, изменяющей проводимость канала. При изменении напряжения между затвором и истоком, например, при включении источника переменного напряжения u_1, изменяются размер области объемного заряда и проводимость канала между стоком и истоком. Так как размеры области объемного заряда и канала в поперечном направлении соизмеримы, то относительно небольшое изменение напряжения между затвором и истоком ведет к значительному изменению проводимости канала и напряжения u_2 приемника, и поэтому $\alpha_u \gg 1$.

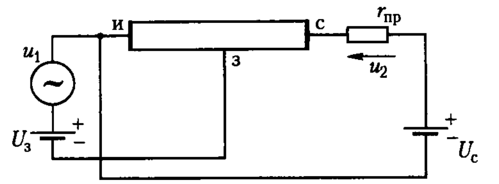

Рис. 19.32

Таким образом, усиление полевого триода обусловлено воздействием поперечного в области канала электрического поля на его проводимость в продольном направлении.

Зависимость тока $i_с$ стока от напряжения $u_{си}$ между стоком и истоком при неизменном напряжении $u_{зи}$ между затвором и истоком имеет вид, аналогичный зависимости $i_к(u_к)$.

Наряду с рассмотренными полевыми триодами распространение получили также полевые триоды с изоляционным слоем между электродом затвора и полупроводником канала, называемые МДП-триодами (металл—диэлектрик—полупроводник). Сопротивление между затвором и каналом в таких триодах возрастает до $10^8...10^9$ Ом при использовании в качестве диэлектрика окисла кремния SiO_2, так что ток затвора можно принять равным нулю во всех режимах их работы.

Полевые триоды позволяют получить значительные коэффициенты усиления мощности вследствие именно малого тока затвора. Другая особенность полевых триодов, также связанная с малым током затвора и возможностью управления током стока с помощью электрического поля затвора, заключается в том, что входное сопротивление триода оказывается весьма большим и источник напряжения u_1 на входе триода работает в режиме холостого хода.

19.11. Полупроводниковый триод как элемент электрической цепи

На рис. 19.33, *а* приведено условное обозначение полупроводникового триода с p–n–p-переходами. Здесь э — эмиттер, б — база, к — коллектор. В случае n–p–n-переходов стрелка у эмиттера направляется в противоположном направлении. На рис. 19.34 изображены три возможные схемы включения триода: *а* — с общей для входных и выходных зажимов базой, *б* — с общим эмиттером и *в* — с общим коллектором. Во всех случаях один из входных зажимов соединен с базой, и во всех случаях один из выходных зажимов соединен с коллектором.

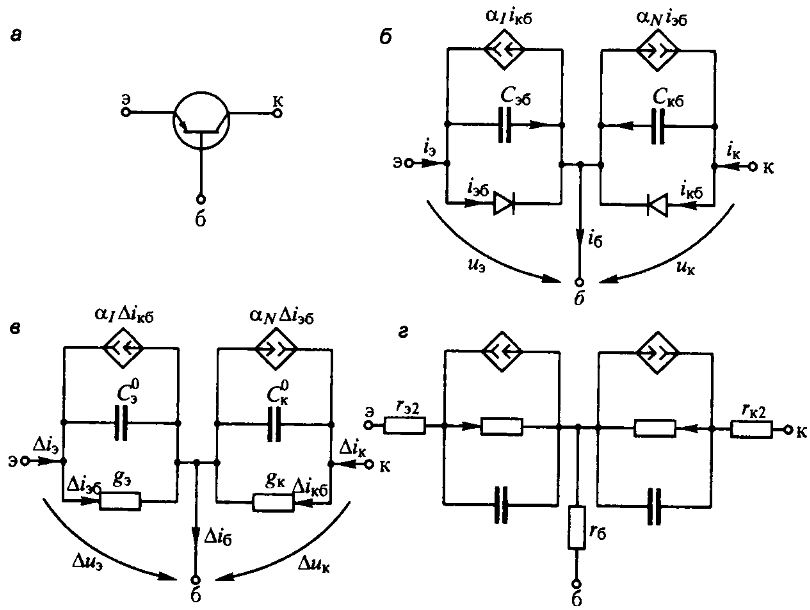

Рис. 19.33

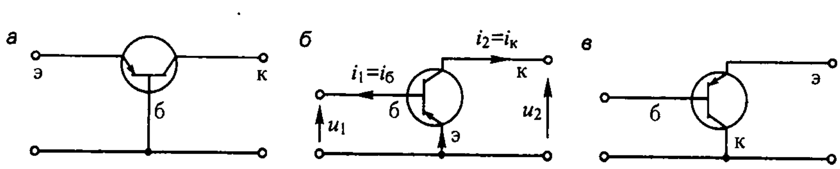

Рис. 19.34

Математическое описание процессов, происходящих в полупроводниковом триоде, может быть произведено относительно различных физических величин. Такими величинами могут быть заряды, токи и напряжения. В соответствии с математическим описанием будут различны и математические модели триода, и эквивалентные схемы.

В полупроводниковом триоде *p*–*n*- и *n*–*p*-переходы аналогичны двум диодам, соединенным, как это показано на рис. 19.33, *б*. На этом рисунке параллельно к двум эквивалентным схемам диодов, представляющим процессы только в переходах эмиттер—база и коллектор—база, присоединены также и два источника тока, один из которых учитывает процесс проникновения части носителей из эмиттерной зоны сквозь базу в коллекторную ($\alpha_N i_{эб}$), другой — аналогичное проникновение части коллекторного обратного тока в эмиттерную зону ($\alpha_I i_{кб}$). Величину α_N называют коэффициентом усиления по току в прямой активной области (эмиттерный переход смещен в прямом направлении, а коллекторный —

в обратном). Величину α_I называют коэффициентом усиления по току для схемы с общей базой в инверсной активной области (эмиттерный переход смещен в обратном направлении, а коллекторный — в прямом). При анализе процессов в полупроводниковых диодах было отмечено, что распределение заряда в полупроводниковом материале зависит от времени и пространственной координаты. В связи с этим коэффициенты α_N и α_I оказываются сложными функциями комплексной частоты, т. е. зависящими от времени функциями. Это обстоятельство является большим недостатком рассматриваемой эквивалентной схемы, известной под названием схемы Эберса—Молла. В целом, приведенная на рис. 19.33, *б* эквивалентная схема, приближенно представляющая процессы в триоде по частоте, может описать процессы в широком диапазоне изменения токов и напряжений и поэтому пригодна для расчета цепей при любых (больших и малых) изменениях токов и напряжений.

Во многих устройствах полупроводниковый триод используется в режиме «малого сигнала», когда при больших постоянных токах и напряжениях происходят относительно малые изменения некоторых входных и выходных величин. Для анализа таких процессов целесообразно составлять эквивалентные схемы, пригодные для анализа режима «малого сигнала».

Для токов и напряжений схемы (рис. 19.33, *б*) имеем

$$i_э = i_{эб} + C_{эб}\frac{du_э}{dt} - \alpha_I i_{кб}; \quad i_к = i_{кб} + C_{кб}\frac{du_к}{dt} - \alpha_N i_{эб},$$

где $i_{эб} = I_{sэб}(e^{\frac{q_0 u_э}{kT}} - 1)$; $i_{кб} = I_{sкб}(e^{\frac{q_0 u_к}{kT}} - 1)$; $C_{эб} = C_{0э}e^{\frac{q_0 u_э}{kT}}$; $C_{кб} = C_{0к}e^{\frac{q_0 u_к}{kT}}$.

Пусть $i_э = i_{э0} + \Delta i_э$, $i_к = i_{к0} + \Delta i_к$; $u_э = u_{э0} + \Delta u_э$; $u_к = u_{к0} + \Delta u_к$. Разложим все функции в ряд по малому параметру Δu и ограничимся в этом ряде только членами первого порядка малости. Тогда

$$i_э - i_{э0} = \Delta i_э = \left(I_{sэб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{э0}}{kT}}\right)\Delta u_э + C_{эб}e^{\frac{q_0 u_{э0}}{kT}}\frac{d\Delta u_э}{dt} - \alpha_I I_{sкб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\Delta u_к;$$

$$i_к - i_{к0} = \Delta i_к = \left(I_{sкб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\right)\Delta u_к + C_{кб}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\frac{d\Delta u_к}{dt} - \alpha_N I_{sэб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\Delta u_э$$

или

$$\Delta i_э = g_э\Delta u_э + C_э^0\frac{d\Delta u_э}{dt} - \alpha_I\Delta i_{кб};$$

$$\Delta i_к = g_к\Delta u_к + C_к^0\frac{d\Delta u_к}{dt} - \alpha_N\Delta i_{эб}.$$

Следовательно, эквивалентная схема для малосигнального режима будет иметь вид, представленный на рис. 19.33, *в*. В этой схеме параметры всех элементов линейны относительно малых сигналов, однако зависят нелинейно от $u_э$ и $u_к$.

В эквивалентных схемах диода и триода не учтены падения напряжения, которые имеют место при протекании токов в самом полупроводнике: в зоне эмиттера, в зоне базы и в зоне коллектора. Сопротивления, учитывающие эти падения напряжения, должны быть включены последовательно к каждому из зажимов. С учетом этих сопротивлений, например, малосигнальная эквивалентная схема будет иметь вид, показанный на рис. 19.33, *г*.

Рассмотрим расчет малосигнального режима при низких частотах (токами в конденсаторах пренебрегаем), когда эмиттерный переход смещен в прямом направлении (переход открыт), а коллекторный — в обратном (переход закрыт). Тогда $\Delta i_к$ мало, и поэтому можно пренебречь током $\alpha_I \Delta i_{кб}$ сравнению с током $\Delta i_э$. Проводимость $g_к$ будет весьма мала, т. е. будет велико сопротивление $r_к$. Эквивалентная схема может быть упрощена и представлена в виде, показанном на рис. 19.35.

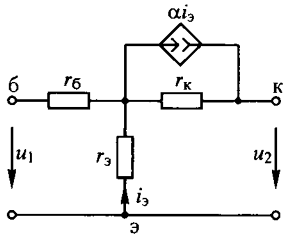

Рис. 19.35

Ранее (см. § 19.10) было указано, что высокий коэффициент усиления мощности получается для схемы на рис. 19.34, *б*, так как при этом происходит значительное усиление как тока, так и напряжения. Поэтому рассмотрим расчет именно этой схемы, обозначая все токи и напряжения малыми буквами и имея в виду, что все эти величины являются малыми сигналами.

Коэффициент усиления по току $k_i = i_{пр}/i_б$, коэффициент усиления по напряжению $k_u = u_{пр}/u_1$ и, соответственно, $k_p = p_{пр}/p_1 = k_u k_i$.

Применим метод контурных токов; для этого источник тока преобразуем в источник ЭДС (рис. 19.36). Имеем

$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2; \quad -u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 - e,$$

где $e = r_m i_э = r_m (i_2 - i_1)$. Тогда

$$u_1 = (r_б + r_э) i_1 - r_э i_2; \quad -u_2 = (-r_э + r_m) i_1 + (r_э + r_к - r_m) i_2$$

или

$$u_1 = r'_{11} i_1 + r'_{12} i_2; \quad -u_2 = r'_{21} i_1 + r'_{22} i_2.$$

Можно заметить, что если зависимый источник e представить в виде падения напряжения, нарушится условие $r'_{12} = r'_{21}$, ибо $r'_{12} = -r_э$, а $r'_{21} = -r_э + r_m$. Численный анализ результатов произведем при следующих значениях параметров эквивалентных схем: $r_б$ = 500 Ом, $r_э$ = 25 Ом, $r_к = 2{,}04 \cdot 10^6$ Ом, $r_m = \alpha r_к = 2 \cdot 10^6$ Ом, $\alpha = 0{,}98$. Пусть $r_{пр} = 2000$ Ом. Тогда, учитывая, что $r_к - r_m = = (1 - \alpha) r_к = 0{,}04 \cdot 10^6 \gg r_э$ и $r_m \gg r_э$, можем приблизительно считать

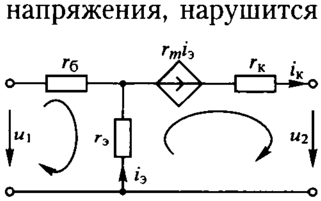

Рис. 19.36

$$k_i = \frac{i_2}{i_1} \approx -\frac{\alpha r_к}{(1-\alpha) r_к - r_{пр}} = -\frac{2 \cdot 10^6}{0{,}04 \cdot 10^6 - 2000} = -52{,}6;$$

$$k_u = \frac{u_{пр}}{u_1} = 57{,}18 \quad \text{и} \quad |k_p| = 52{,}6 \cdot 57{,}18 \approx 3010.$$

На рис.19.37 показано условное обозначение полевого триода с каналом типа n (здесь и — исток, з — затвор, с — сток). У триодов с каналом типа p направления стрелок у стока и затвора меняются на противоположные.

Аналогично биполярным триодам для полевых триодов также возможны три схемы включения: с общим затвором, с общим истоком и с общим стоком. Наибольшее распространение получила схема с общим истоком, в которой входным напряжением служит $u_{зи}$, а выходным — $u_{си}$.

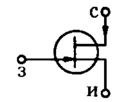

Рис. 19.37

На рис.19.38 приведено семейство характеристик $i_с = f(u_{си})$ при ряде напряжений $u_{зи}$ = const.

Аналогично схеме для трехэлектродной электронной лампы (см. § 19.8) можем записать

$$di_с = \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}} du_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{си}} du_{си}.$$

Величина $\frac{\partial i_с}{\partial u_{си}} = \left(\frac{\partial i_с}{\partial u_{си}}\right)_{u_{зи}=\text{const}} = G_{вн}$ представляет собой *внутреннюю проводимость*, а обратная величина $R_{вн} = \frac{1}{G_{вн}}$ — *внутреннее сопротивление* триода. Величину $\frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}} = \left(\frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\right)_{u_{си}=\text{const}} = S$ называют *крутизной* характеристики триода.

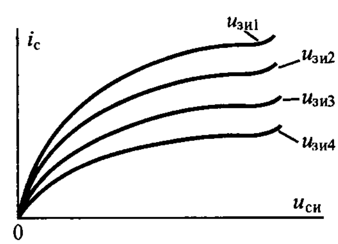

Рис. 19.38

В малосигнальном режиме, считая $G_{вн}$ и S постоянными и записывая выражение $-S\Delta u_{зи} = G_{вн}\,\Delta u_{си} - \Delta i_с$, можем рассматривать величину $-S\Delta u_{зи} = \mathfrak{J}$ в качестве зависимого источника тока, а $G_{вн}\Delta u_{си}$ — в качестве тока через внутреннюю проводимость этого источника. Эквивалентная схема полевого транзистора показана на рис. 19.39.

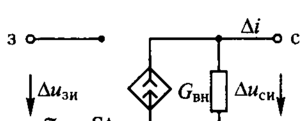

Рис. 19.39

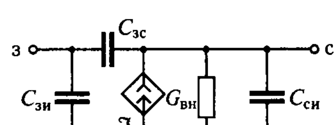

Рис. 19.40

Она находит применение, когда напряжения между электродами неизменны во времени либо изменяются с низкой частотой, при которой можно пренебречь токами смещения между электродами полевого триода. Для учета токов смещения в эквивалентные схемы следует ввести соответствующие емкостные элементы $C_{зи}$, $C_{зс}$, $C_{си}$ между электродами триода. Упрощенная схема триода в малосигнальном режиме изображена на рис. 19.40. Из-за особенностей геометрии полевого триода (см. рис. 19.31) емкость $C_{си}$ обычно на порядок меньше емкостей $C_{зи}$ и $C_{зс}$.

Эквивалентные схемы (рис. 19.35, 19.39) могут быть использованы для расчета сложных электрических цепей, содержащих полупроводниковые триоды.

Следует отметить, что при больших амплитудах переменных составляющих токов и напряжений в триоде уже нельзя не считаться с нелинейностью его характеристик. При высоких частотах необходимо считаться с тем, что сопротивления эквивалентной схемы комплексные.

19.12. Управляемые нелинейные элементы. Тиристоры

Тиристор представляет собой управляемый полупроводниковый прибор, содержащий несколько *p–n*-областей и способный находиться подобно диоду в открытом либо закрытом состоянии.

На рис. 19.41 показана характерная для тиристоров кремниевая 4-слойная полупроводниковая структура, содержащая три перехода $П_1$, $П_2$, $П_3$ между полупроводниками различного типа с металлическими электродами, называемыми анодом, катодом и управляющим электродом.

Напряжение $U_{ак}$ батареи снижает потенциальный барьер в *p–n*-переходах $П_1$ и $П_3$, в связи с чем, как и в полупроводниковом триоде, дырки из области анода дрейфуют и через переход $П_2$ частично достигают области p_2, а электроны из области катода, проходя через область p_2, частично достигают области n_1. При некоторых малых напряжениях $U_{ак}$ и $u_у$ проходящий через сопротивление $r_{пр}$ нагрузки ток будет небольшим и тиристор закрыт (или, другими словами, выключен). Если при $U_{ак} = \text{const}$ увеличивать напряжение $u_у$ управления, то с возрастанием тока перехода $П_3$ будет расти и ток перехода $П_2$, что приводит к росту тока перехода $П_1$ и еще большему увеличению тока тиристора. Если при некотором значении $U_{ак}$ напряжение $u_у$ достигает значения $u_{у0}$, называемого напряжением открывания, то начинается лавинообразный процесс возрастания тока тиристора, достигающего наибольшего значения, когда тиристор полностью открыт.

На рис. 19.42 изображены зависимости $i = f(U_{ак}, u_у)$ для ряда значений управляющего напряжения.

Четырехслойную полупроводниковую структуру тиристора можно представить в виде эквивалентной ей структуры из двух триодов: типа *p–n–p* и *n–p–n* (рис. 19.43) — и, используя схемы, эквивалентные триоду, составить эквивалентную схемы тиристора.

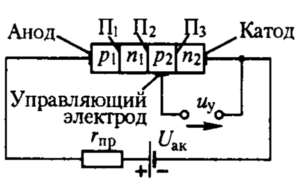

Рис. 19.41

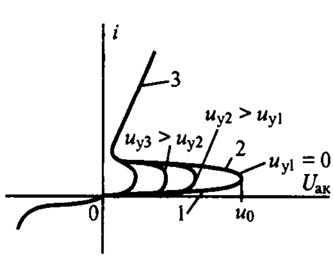

Рис. 19.42

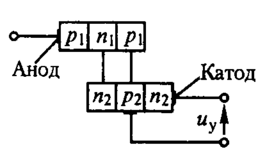

Рис. 19.43

Как видно, тиристор может открываться и при $u_у = 0$, если напряжение $U_{ак}$ достигает значения u_0. На нелинейной характеристике $i = f(U_{ак})$ тиристора для каждого из значений управляющего напряжения $u_у$ можно выделить участок *1*, соответствующий закрытому состоянию тиристора, *2* — падающий участок, на котором при возрастании тока i напряжение $U_{ак}$ уменьшается, и участок *3*, соответствующий открытому состоянию тиристора.

Особенность тиристора заключается в независимости тока i от значения напряжения $u_у$ при его открытом состоянии. Поэтому после открывания тиристора и перехода его на участок *3* характеристики при уменьшении $u_у$ до нуля открытое состояние тиристора сохраняется и переход его в закрытое состояние может быть осуществлен только при уменьшении напряжения $U_{ак}$.

Тиристоры применяют в электрических цепях средней и большой мощности при построении преобразователей напряжения, для управления устройствами электромеханики и электроэнергетики, в которых тиристоры работают в ключевом режиме.

19.13. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов

Индуктивности электрических контуров, а также магнитные сопротивления магнитных цепей зависят от магнитных свойств среды, в которой существует магнитное поле.

Магнитная проницаемость μ ферромагнитных веществ, основными представителями которых являются железо, никель, кобальт и их сплавы, значительно превышает магнитную постоянную ($\mu \gg \mu_0$) и сильно зависит от напряженности магнитного поля, т. е. $\mu = f(H)$.

Магнитная индукция в ферромагнитных веществах может иметь при одном и том же значении напряженности поля различные значения, зависящие от предыдущих магнитных состояний материала. Поэтому для того, чтобы величиной $\mu = B/H$ можно было пользоваться в качестве характеристики магнитных свойств ферромагнитных материалов, необходимо точно оговорить метод определения этой характеристики.

Рассмотрим процесс намагничивания ферромагнитного вещества. Предположим, что первоначально вещество было полностью размагничено, т. е. поле элементарных токов во внешнем пространстве не обнаруживалось. При монотонном увеличении напряженности внешнего поля индукция растет сначала быстро (кривая $0D_1$ на рис. 19.44) вследствие того, что элементарные токи ориентируются так, что их магнитные потоки добавляются к внешнему потоку. При больших значениях индукции скорость ее возрастания уменьшается. Магнитное состояние вещества приближается к *насыщению*. При этом уже почти все элементарные токи ориентированы так, что их магнитные поля совпадают по направлению с внешним полем. Кривая $0D_1$, получающаяся при условии, что вещество предварительно было размагничено, называется **начальной кривой намагничивания**.

Предположим, что напряженность поля была доведена до некоторого значения $+H_m$ (точка D_1 на рис. 19.44) и затем вновь уменьшается. Кривая $B = f(H)$ при убывающей напряженности поля располагается выше начальной кривой намагничивания. При уменьшении величины H до нуля наблюдается остаточная намагниченность и соответствующая ей *остаточная индукция*. Это свидетельствует о том, что элементарные токи в известной мере сохранили свою упорядоченную ориентацию. Чтобы индукция стала равной нулю, напряженность поля должна принять отрицательное значение, называемое коэрцитивной силой. Если довести H до отрицательного значения $-H_m$, по абсолютной величине равного наибольшему положительному значению, то индукция примет отрицательное значение, соответствующее точке C_1. Вновь увеличивая напряженность до $+H_m$, получаем ветвь C_1D_2. Точка D_2 лежит ниже точки D_1, так как кривая в нее приходит из точки отрицательной остаточной индукции, тогда как в точку D_1 кривая приходит из начала координат, т. е. из точки, соответствующей нейтральному состоянию вещества. Повторному уменьшению величины H соответствует кривая D_2C_2, последующему затем возрастанию напряженности соответствует кривая C_2D_3, и т. д.

Таким образом, значение индукции при заданном значении напряженности поля зависит от истории процесса намагничивания. Это явление называется явлением магнитного гистерезиса. Только после достаточного числа (примерно десяти) перемагничиваний получаем симметричную гистерезисную петлю (CD), изображенную на рис. 19.44 штриховой линией. На рис. 19.45 изображено семейство симметричных гистерезисных петель, полученных при различных значениях H_m. Кривая $B = f(H)$, проходящая через вершины симметричных гистерезисных петель, называется основной кривой намагничивания и является вполне определенной для данного сорта материала. Поэтому принято определять магнитную проницаемость ферромагнитных материалов именно из основной кривой намагничивания. Точно так же остаточную индукцию B_r и коэрцитивную силу H_c обычно определяют из симметричной гистерезисной петли (рис. 19.45), причем H_m должно быть достаточно велико, чтобы при H_m вещество было близко к состоянию магнитного насыщения.

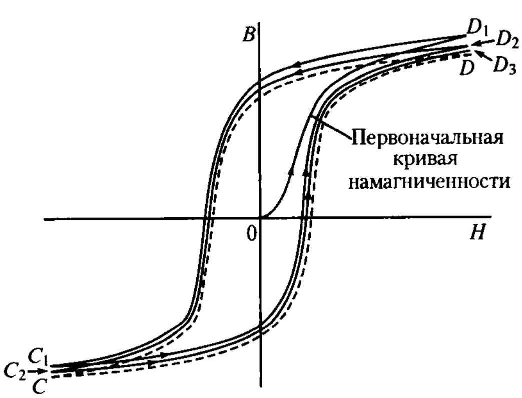

Рис. 19.44

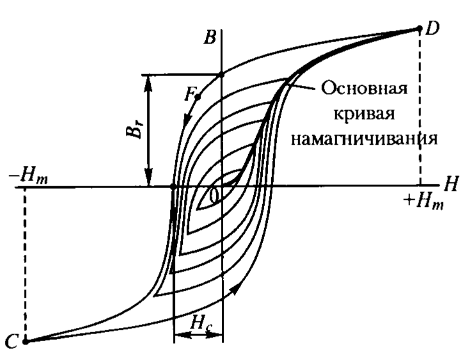

Рис. 19.45

При перемагничивании ферромагнитного вещества в нем происходят потери энергии на гистерезис.

Нетрудно убедиться, что площадь замкнутой гистерезисной петли в координатах B и H, умноженная на масштабы абсцисс и ординат, определяет собой потери за один цикл перемагничивания.

Предположим, что намагничиваемое тело из ферромагнитного вещества имеет форму тонкого кольца, длина которого l и поперечное сечение s. Кольцо намагничивается током i в обмотке, имеющей w витков, равномерно распределенных по длине кольца. Работа внешнего источника ЭДС, связанная с изменением $d\Psi$ потокосцепления $\Psi = w\Phi$ с обмоткой, определяется той частью $(+d\Psi/dt)$ напряжения на зажимах обмотки, которая преодолевает ЭДС $(-\,d\Psi/dt)$, индуцируемую изменяющимся потокосцеплением:

$$dA = i\frac{d\Psi}{dt}dt = i\,d\Psi = iw\,d\Phi.$$

Работа, затрачиваемая внешним источником ЭДС на изменение магнитного состояния в единице объема вещества, равна

$$dA' = \frac{dA}{ls} = \frac{iw}{l}d\left(\frac{\Phi}{s}\right) = H\,dB.$$

Эта работа определяется площадью полоски, имеющей длину H и ширину dB и густо заштрихованной на рис. 19.46, *а*. При увеличении напряженности поля от $-H_m$ до $+H_m$ работа определяется разностью абсолютных значений площадей EDL и CLG. Площадь EDL положительна, так как $H > 0$ и $dB > 0$. Площадь CLG отрицательна, так как $H < 0$, а $dB > 0$. Поэтому необходимо взять разность абсолютных значений этих площадей. При уменьшении напряженности поля работа определяется разностью абсолютных значений площадей KCG и KED (рис. 19.46, *б*). Площадь KCG положительна, так как $H < 0$ и $dB < 0$, площадь же KED отрицательна, так как $H > 0$, а $dB < 0$. Накладывая друг на друга рис. 19.46, *а* и 19.46, *б*, получаем рис. 19.46, *в*.

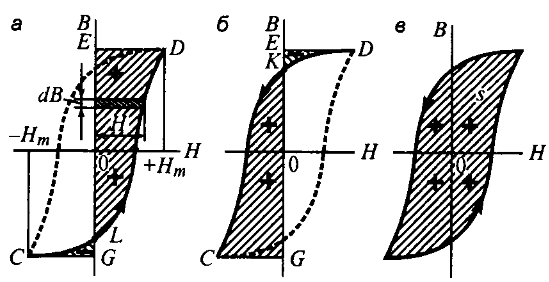

Рис. 19.46

Таким образом, работа внешнего источника, затрачиваемая на циклическое перемагничивание единицы объема вещества, определяется площадью s гистерезисной петли. Эта работа равна

$$A' = \oint H\,dB = shb,$$

где h — масштаб по оси абсцисс и b — масштаб по оси ординат. После обхода замкнутой гистерезисной петли магнитное состояние вещества возвращается к тому, которое было до начала обхода. Следовательно, никаких изменений в запасе энергии в системе не происходит, и необходимо заключить, что работа A' идет на необратимые процессы, связанные с перемагничиванием вещества.

Обозначая энергию, отнесенную к единице объема вещества, теряемую вследствие явления гистерезиса за один полный симметричный цикл перемагничивания, через $W_г'$, имеем

$$W_г' = A' \quad \text{или} \quad W_г' = \oint H\,dB.$$

Штейнмец предложил эмпирическую формулу вида

$$W_г' = \eta' B_m^{1,6},$$

где B_m — амплитуда магнитной индукции и η' — коэффициент, зависящий от рода материала. Формула с показателем 1,6 удовлетворительно сходится с опытом, если B_m лежит в интервале 0,1 Тл $< B_m <$ 1 Тл. При $0 < B_m <$ 0,1 Тл, а также при 1 Тл $< B_m <$ 1,6 Тл более правильные результаты дает формула

$$W_г' = \eta'' B_m^2.$$

Обе последние формулы можно объединить в одну, имеющую вид

$$W_г' = \eta B_m^n.$$

При весьма больших значениях индукции для ряда материалов показатель n сначала возрастает с увеличением B_m, становится больше двух и затем вновь уменьшается. Поэтому приведенные эмпирические формулы следует рассматривать лишь как приближенно выражающие зависимость потерь энергии на гистерезис от амплитуды индукции при не слишком больших значениях B_m и в соответствующих интервалах изменения B_m.

Следует отметить, что при быстрых периодических изменениях напряженности магнитного поля вид петли, выражающей зависимость $B = f(H)$, вообще говоря, отличается от *статической петли* гистерезиса, получаемой при медленных изменениях напряженности поля, так как при этом магнитная индукция является функцией не только напряженности поля, но и ее производных по времени. Причиной этого являются вихревые токи, возникающие в ферромагнитном материале, и магнитная вязкость. Вихревыми токами называют электрические токи проводимости, возникающие и замыкающиеся внутри проводящего сплошного тела, находящегося в переменном магнитном поле. Площадь *динамической петли*, выражающей зависимость $B = f(H)$, определяет собой при этом полные потери в единице объема ферромагнитного вещества на перемагничивание и на вихревые токи за один период изменения напряженности поля.

Приведем магнитные характеристики некоторых ферромагнитных материалов, рассматривая их как иллюстрацию к вышеизложенному.

Железо всегда имеет некоторые трудно удалимые примеси, оказывающие влияние на его магнитные свойства. Так, наличие углерода и кислорода в небольших количествах заметно снижает магнитную проницаемость. На рис. 19.47 изображены основная кривая намагничивания и части циклов гистерезиса для промышленного чистого железа (кривая *1*), имеющего 0,1 % примесей, и для лабораторной пробы, полученной путем специальной обработки (кривая *2*), при которой содержание примесей было уменьшено до 0,01 %. При помощи особой обработки чистого железа был получен материал с исключительно высокой абсолютной магнитной проницаемостью, имеющей максимальное значение $\mu_{max} = 180\,000\ \mu_0$. Потери на гистерезис в этих пробах были очень малы и составляли всего 0,045 Вт/кг при f = 50 Гц и при амплитуде индукции B_m = 1 Тл. В электротехнических устройствах, предназначенных для работы при переменном магнитном потоке, чистое железо не применяется, так как оно обладает сравнительно малым удельным сопротивлением и потери на вихревые токи оказываются большими. В указанных устройствах используется электротехническая сталь, в которой основной примесью является кремний (Si). Присадки кремния в небольшом количестве значительно увеличивают удельное сопротивление материала. Присадка кремния в количестве до 1,7% уменьшает также потери на гистерезис. Такого порядка содержание кремния имеет электротехническая сталь, применяемая в электромашиностроении. Листовая сталь, предназначенная для магнитопроводов трансформаторов и участков магнитных цепей машин переменного тока, которые работают при больших переменных индукциях, содержит около 4% Si. Этим достигается значительное уменьшение потерь на вихревые токи. Общие потери на вихревые токи и на гистерезис в хороших сортах трансформаторной стали толщиной 0,35 мм имеют значение порядка 1 Вт/кг при f = 50 Гц и B_m = 1 Тл.

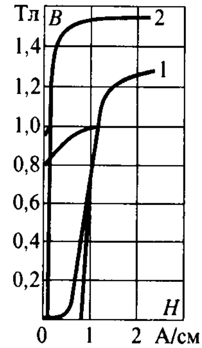

Рис. 19.47

Из других сплавов особенный интерес представляют сплавы железа с никелем (Ni). Сплав, содержащий 78,5% Ni, имеет очень высокое значение максимальной магнитной проницаемости: $\mu_{max} = (100\,000...200\,000)\mu_0$. Этот сплав называется *пермаллоем*. На рис. 19.48 приведены для сравнения кривые намагничивания пермаллоя и промышленного чистого железа.

Высокие качества пермаллоя достигаются только при особо тщательном соблюдении режима его тепловой обработки. Кроме того, механические напряжения и сотрясения легко снижают эти качества пермаллоя. Как нетрудно усмотреть из рис. 19.48, насыщение пермаллоя достигается уже при очень слабых полях. В слабых полях пермаллой имеет проницаемость в 15–20 раз выше по сравнению с обычной электротехнической сталью. Некоторые примеси, например молибден, еще более повышают магнитную проницаемость пермаллоя, одновременно улучшая его свойства в отношении увеличения удельного сопротивления и, соответственно, уменьшения потерь при перемагничивании в переменных полях. Например, сплав, содержащий 79% Ni, 16% Fe и 5% Mo, имеет максимальную магнитную проницаемость $\mu/\mu_0 = 800\,000$. В соответствии с указанными свойствами сплавы типа пермаллоя могут быть с успехом использованы в устройствах, работающих при слабых магнитных полях, например в трансформаторах тока.

Рис. 19.48

Совершенно иные требования предъявляются к материалам, которые предназначаются для изготовления постоянных магнитов. Магнитное состояние вещества постоянного магнита характеризуется некоторой точкой F (см. рис. 19.45) части гистерезисной петли, расположенной во втором квадранте. От таких материалов требуется, чтобы они обладали высокой остаточной индукцией B_r и большой коэрцитивной силой H_c. Последнее необходимо для того, чтобы намагниченность постоянного магнита была устойчивой. Одним из лучших материалов, отвечающих этим требованиям, является сплав *магнико,* состоящий из железа, никеля, алюминия, кобальта и меди и имеющий B_r = 1,25 Тл и H_c = 44 000 А/м. Магнитные свойства этого сплава обусловлены не только его составом, но и специальной обработкой: после отливки магнит охлаждается в сильном магнитном поле.

Для изготовления сердечников катушек и трансформаторов, предназначенных для работы в полях высокой частоты, используются специальные ферромагнитные материалы — так называемые *магнитодиэлектрики* и *ферриты.*

Магнитодиэлектрики состоят из основы — порошка ферромагнитного материала — и связки — изолирующего вещества. Они изготовляются прессованием основы со связкой. Основа придает магнитодиэлектрикам необходимые магнитные свойства — для уменьшения потерь на вихревые токи она должна быть из очень мелких зерен, а связка изолирует зерна основы друг от друга. Магнитная проницаемость магнитодиэлектриков сравнительно невелика. Она имеет порядок нескольких единиц или десятков и мало меняется с ростом напряженности магнитного поля вплоть до насыщения. Наибольшее распространение получили магнитодиэлектрики, изготовляемые на основе карбонильного железа, имеющего максимальную магнитную проницаемость μ/μ_0 = 21 000 и получаемого сразу в виде очень мелкого порошка. Эти магнитодиэлектрики имеют μ/μ_0 = 8. По сравнению с другими магнитодиэлектриками они имеют наименьшие потери и обладают довольно хорошей стабильностью во времени и при изменении температуры.

Ферриты — керамические материалы, изготовляемые из смеси твердых окислов железа с твердыми окислами других металлов (например, никеля и цинка). Измельченные и перемешанные окислы прессуют, а затем обжигают при температуре от 800 до 1400 °С, причем происходит их спекание. Изменяя состав, размер зерен, продолжительность и температуру обжига, можно получить ферриты с разными свойствами. По сравнению с магнитодиэлектриками ферриты обладают большей магнитной проницаемостью, порядка нескольких сотен или тысяч, и меньшими потерями.

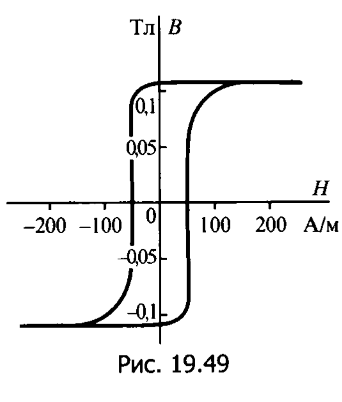

Рис. 19.49

Магниево-цинковые ферриты отличаются прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 19.49). Прямоугольную петлю гистерезиса приобретают также никель-цинковые ферриты в результате механического сжатия, что связано с проявлением в них эффекта, обратного магнитострикции. Тороиды из феррита с прямоугольной петлей гистерезиса получили широкое применение в быстродействующих вычислительных машинах и в различных устройствах импульсной техники. Следует при этом иметь в виду, что при весьма быстрых изменениях магнитного потока, как было отмечено выше, петля гистерезиса деформируется вследствие магнитной вязкости и вихревых токов.

19.14. Нелинейные характеристики и параметры катушки с сердечником из ферромагнитного материала

Характеристика индуктивной катушки $\Psi_L = F(i)$, выражающая зависимость потока самоиндукции от тока в катушке, является *линейной* (рис. 19.50), если магнитная проницаемость среды, в которой существует магнитный поток, не зависит от напряженности поля.

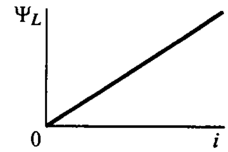

Рис. 19.50

Как было видно в предыдущем параграфе, магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля. Соответственно характеристика $\Psi_L = F(i)$ катушки с ферромагнитным сердечником оказывается *нелинейной.*

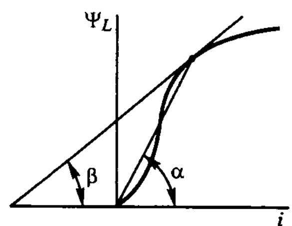

Рис. 19.51

Связь между потокосцеплением с витками катушки и током в катушке отражена в виде кривой на рис. 19.51 для случая возрастания тока от нуля при условии, что сердечник был предварительно размагничен. Эта кривая имеет тот же характер, что и первоначальная кривая намагничивания $B = f(H)$ материала сердечника, так как потокосцепление Ψ_L определяется значениями магнитной индукции B, а ток i — значениями напряженности поля. При однородном намагничивании замкнутого сердечника потокосцепление Ψ_L пропорционально B, ток i пропорционален H и кривые $\Psi_L = F(i)$ и $B = f(H)$ подобны. Потокосцепление Ψ_L не пропорционально току. Индуктивность такой катушки *зависит от тока.*

Динамическая характеристика катушки, получающаяся при достаточно быстрых изменениях тока, отличается от *статической характеристики* вследствие явлений вихревых токов и магнитной вязкости. Соответственно различают с т а т и ч е с к у ю и н д у к т и в н о с т ь катушки

$$L_{\text{ст}} = \frac{\Psi_L}{i} = F_1(i),$$

определяемую из статической характеристики, и д и н а м и ч е с к у ю и н д у к т и в н о с т ь

$$L_{\text{д}} = \frac{d\Psi_L}{di} = F_2(i),$$

определяемую из динамической характеристики.

При достаточно медленном изменении тока и потока динамические характеристики повторяют статические. Определяемую из статических характеристик индуктивность в виде производной $d\Psi_L/di$ называют д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й. Обозначим ее через L_d. Для общности всегда будем говорить о динамической индуктивности $L_{\text{д}}$, имея в виду, что при очень медленном изменении тока она совпадает с дифференциальной, т. е. $L_д = L_d$. На рис. 19.51 приведены способы определения $L_{ст}$ и $L_д$:

$$L_{ст} = \frac{\Psi_L}{i} = k\,\mathrm{tg}\alpha = F_1(i) \quad \text{и} \quad L_д = \frac{d\Psi_L}{di} = k\,\mathrm{tg}\beta = F_2(i),$$

где k зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат.

При периодических процессах динамическая характеристика имеет вид замкнутой петли, причем при достаточно низкой частоте тока она практически совпадает со статической петлей гистерезиса.

Когда нас интересует значение постоянного потокосцепления Ψ_L при заданном постоянном токе i, мы должны пользоваться статической индуктивностью. Если же необходимо вычислить ЭДС, индуцируемую в цепи при изменяющемся потоке, то следует пользоваться динамической индуктивностью.

Индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником при отсутствии постоянного подмагничивания представляет собой нелинейный элемент с *симметричной характеристикой* $\Psi_L = F(i)$. На рис. 19.52 изображена кривая, выражающая связь между мгновенными потокосцеплением Ψ_L и током i в такой катушке при пренебрежении явлением гистерезиса, а также дана кривая динамической индуктивности $L_д = d\Psi_L/di$. На рис. 19.53 те же кривые приведены с учетом расхождения восходящей и нисходящей ветвей петли гистерезиса. Заметим, что вследствие появления вихревых токов в сердечнике связь между результирующим потокосцеплением Ψ_L и током в обмотке при переменном токе видоизменяется и отступает от петли, изображенной на рис. 19.53. Под влиянием вихревых токов углы петли закругляются (рис. 19.54), и чем больше их влияние, тем ближе кривая $\Psi_L = F(i)$ при периодическом токе к эллипсу.

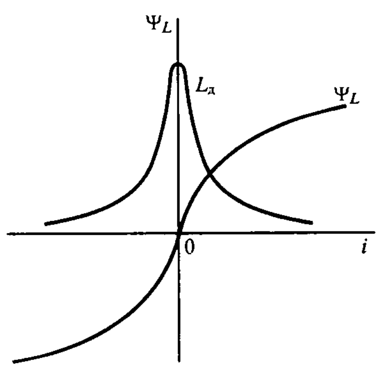

Рис. 19.52

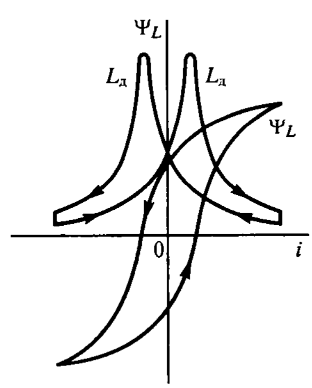

Рис. 19.53

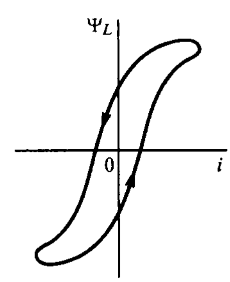

Рис. 19.54

Часто интересуются действующими напряжением U на зажимах катушки и током I в катушке. Зависимость $U = F(I)$ изображена на рис. 19.55. Эту зависимость также называют характеристикой катушки. Нелинейный характер этой зависимости является следствием насыщения сердечника катушки при больших токах. Существенно отметить, что такая характеристика зависит от форм кривых тока и напряжения. Так, характеристика, получаемая при синусоидальном напряжении, несколько отличается от характеристики, получаемой при синусоидальном токе.

Наложив на сердечник катушки дополнительную обмотку, питаемую постоянным током, получим *несимметричный* нелинейный индуктивный элемент, так как при одном направлении тока в основной обмотке МДС обеих обмоток будут суммироваться, а при другом — вычитаться.

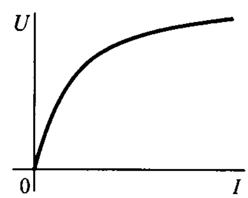

Рис. 19.55

Изменяя значение тока подмагничивания в дополнительной обмотке, получаем возможность изменять характеристику катушки со стороны зажимов основной обмотки, осуществляя таким образом управляемый нелинейный индуктивный элемент. Такие элементы могут быть использованы в различных нелинейных устройствах, в частности в ферромагнитном усилителе мощности, о чем будет сказано в дальнейшем.

19.15. Конденсаторы с нелинейной характеристикой

Если диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора не зависит от напряженности электрического поля, то и емкость C конденсатора не зависит от напряжения на конденсаторе. Это соблюдается для большинства конденсаторов, применяемых на практике. Зависимость заряда q такого конденсатора от напряжения u выражается прямой линией (рис. 19.56). Говорят, что такой конденсатор имеет *линейную характеристику* $q = f(u) = Cu$.

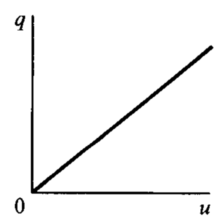

Рис. 19.56

Существуют вещества, называемые сегнетоэлектриками, для которых величина ε сильно зависит от напряженности электрического поля. При некоторых значениях напряженности поля относительная диэлектрическая проницаемость этих веществ достигает весьма больших значений. Если при отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик не был поляризован, то при увеличении напряженности поля E электрическое смещение D возрастает соответственно кривой, изображенной на рис. 19.57. Связь между D и E оказывается *нелинейной*. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ с увеличением E сначала возрастает, достигает максимума и затем убывает. При периодическом изменении напряженности поля в пределах от $+E_m$ до $-E_m$ наблюдается так называемое явление диэлектрического гистерезиса — кривая $D = f(E)$ при уменьшении напряженности поля не совпадает с соответствующей кривой (рис. 19.58) при увеличении напряженности поля. При уменьшении напряженности поля до нуля сохраняются некоторая *остаточная поляризация* и, соответственно, *остаточное смещение* D_r.

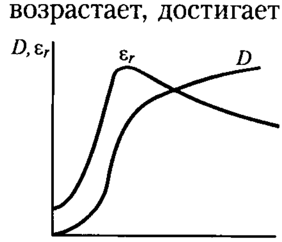

Рис. 19.57

Наименование «сегнетоэлектрики» связано с наименованием вещества сегнетова соль, для которого впервые были обнаружены указанные свойства. Сегнетова соль представляет собой двойную натрокалиевую соль винной кислоты

($NaKC_4H_4O_6 4H_2O$). Высокая поляризуемость наблюдается в кристаллах сегнетовой соли в направлении одной из ее кристаллографических осей. Эти особые свойства сегнетовой соли очень сильно зависят от температуры и проявляются только в диапазоне температуры от −18 до +22,5 °С. Впервые глубокие исследования свойств сегнетоэлектриков были проведены И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

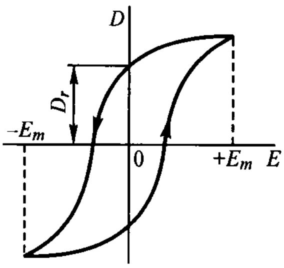

Рис. 19.58

К группе сегнетоэлектриков относится также метатитанат бария ($TiO_2{\cdot}BaO$), сегнетоэлектрические свойства которого открыты советским ученым Б. М. Вулом. Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r титаната бария при комнатной температуре превышает 1000. Он сохраняет свои сегнетоэлектрические свойства до температуры +80 °С.

Существование сегнетоэлектриков имеет принципиальное значение. Их свойства в группе диэлектриков в значительной степени аналогичны свойствам ферромагнитных веществ. Это дает основание дать физическое объяснение свойств сегнетоэлектриков, сходное с объяснением свойств ферромагнитных веществ (см. § 19.13). Предполагают, что отдельные области сегнетоэлектриков самопроизвольно поляризованы в определенном направлении. Внешне эта поляризация не проявляется, пока различные области поляризованы в противоположных направлениях. Под действием внешнего поля поляризация областей изменяется в направлении поля. Это изменение происходит очень мелкими скачками, соответствующими изменению направления поляризации отдельных областей. Вследствие этого изменения направления поляризации областей и происходит быстрое увеличение поляризованности вещества и значения электрического смещения D, что соответствует крутой части кривой $D = f(E)$ на рис. 19.57. При некоторой напряженности поля достигается насыщение, когда почти все области самопроизвольной поляризации оказываются поляризованными в направлении поля. Соответственно, при достаточно больших напряженностях поля величина D растет все медленней при увеличении E.

В опытах с кристаллом сегнетовой соли большой толщины, описанных И. В. Курчатовым, максимальное значение относительной диэлектрической проницаемости имело порядок 100 000 и насыщение достигалось уже при напряженности 30 В/см. У титаната бария насыщение достигается при значительно больших напряженностях поля. Температура 22,5 °С для сегнетовой соли и, соответственно, 80 °С для титаната бария характерна тем, что при ней тепловым движением разрушается самопроизвольная поляризация областей и сегнетоэлектрик приобретает электрические свойства обычных диэлектриков.

Если диэлектриком в конденсаторе является сегнетоэлектрик, то зависимость $q = f(u)$ заряда q на обкладке конденсатора от напряжения u между обкладками будет нелинейной и аналогичной по характеру зависимости $D = f(E)$, изображенной на рис. 19.57 и 19.58. В простейшем случае для плоского конденсатора, поле в котором однородно, кривые $q = f(u)$ и $D = f(E)$ различаются только масштабами, так как для плоского конденсатора $q = Ds$ и $u = Ed$, где s — поверхность обкладки и d — толщина диэлектрика.

Говорят, что такой конденсатор обладает *нелинейной характеристикой* $q = f(u)$. На рис. 19.59 изображена эта характеристика, соответствующая увеличению напряжения при условии, что при отсутствии напряжения диэлектрик не был поляризован. При периодическом изменении напряжения в пределах от $+U_m$ до $-U_m$ характеристика имеет вид *петли гистерезиса*, представленной на рис. 19.60. Кривая $q = f(u)$, проходящая через вершины петель гистерезиса, соответствующих различным значениям амплитуд напряжения U_m, изображенная штриховой линией на рис. 19.60, близка к кривой $q = f(u)$ на рис. 19.59.

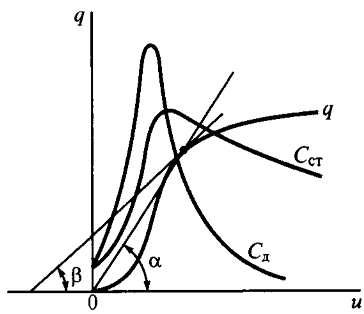

Рис. 19.59

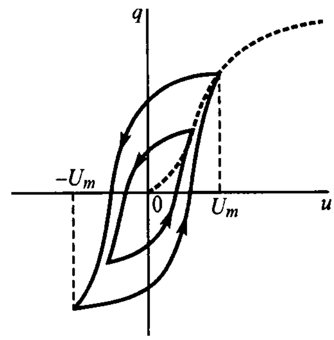

Рис. 19.60

Площадь петли гистерезиса в соответствующем масштабе $A = \oint u\,dq = abs$ (a и b — масштабы по осям абсцисс и ординат) равна потерям $W_г$ энергии в диэлектрике конденсатора за один период изменения напряжения. Эти потери называют потерями на диэлектрический гистерезис. В единице объема диэлектрика эти потери соответственно равны $W_г' = \oint E\,dD$ и определяются в соответствующих масштабах площадью петли на рис. 19.58. Наличие этих довольно значительных потерь в таких веществах, как титанат бария, значительно затрудняет использование их при переменных полях, особенно при высоких частотах.

Необходимо различать *статические характеристики* и *динамические характеристики* конденсатора.

Статическая характеристика определяет собой значения не изменяющихся во времени зарядов конденсатора при соответствующих значениях не изменяющихся во времени напряжений. Практически она может быть получена путем измерения ряда значений зарядов q, соответствующих ряду значений напряжений u, причем при переходе от одного значения напряжения u к другому необходима достаточная выдержка времени, чтобы новое значение заряда q успело установиться. Это новое значение заряда q устанавливается не сразу вследствие явления так называемой диэлектрической вязкости. При достаточно быстром изменении напряжения явление диэлектрической вязкости приводит к тому, что зависимость $q = f(u)$ будет отлична от зависимости, определяемой из статической характеристики. Связь $q = f(u)$ при этом изображается динамической характеристикой. В частности, при быстрых периодических изменениях напряжения динамические петли гистерезиса отличаются от статических. При достаточно медленном изменении напряжения динамические характеристики практически совпадают со статическими.

Нелинейный характер зависимости $q = f(u)$ приводит к тому, что емкость такого конденсатора зависит от напряжения u на его обкладках. При этом различают так называемую статическую емкость, определяемую как отношение q к u:

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u}$$

и динамическую емкость, определяемую как предел отношения приращения заряда Δq к соответствующему приращению напряжения Δu при стремлении последнего к нулю:

$$C_{\text{д}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}.$$

Статическая емкость определяется из статической характеристики и для конденсатора с нелинейной характеристикой является функцией напряжения. Динамическая емкость определяется из динамической характеристики, и так как вид последней зависит от скорости изменения напряжения при различных его значениях, то динамическая емкость является функцией не только значения напряжения, но, вообще говоря, и его производных по времени. Статическая и динамическая емкости конденсатора с нелинейной характеристикой различаются между собой также и при достаточно медленном изменении напряжения, хотя и определяются при этом из одной и той же статической характеристики, причем в этом случае динамическая емкость $C_{\text{д}}$ равна дифференциальной C_d. Это видно хотя бы из рис. 19.59, так как статическая емкость равна

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u} = k\,\mathrm{tg}\alpha = f_1(u),$$

динамическая же емкость

$$C_{\text{д}} = \frac{dq}{du} = k\,\mathrm{tg}\beta = f_2(u),$$

где k зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат.

Конденсаторы с нелинейной характеристикой находят применение в устройствах автоматического управления. О некоторых возможных использованиях нелинейных свойств таких конденсаторов будет сказано дальше.

19.16. Источники ЭДС и источники тока с нелинейными характеристиками

В § 3.8, т. I, было указано, что внешняя характеристика $u = f(i)$ реального источника ЭДС может быть *нелинейной*. Это может быть результатом того, что или ЭДС e источника нелинейно зависит от тока i, или зависит от тока его внутреннее сопротивление $r_{\text{вн}}$. Внешняя характеристика $i = f(u)$ реального источника тока также может быть *нелинейной*. На рис. 19.61 приведена нелинейная характеристика источника электромагнитной энергии с не изменяющимися во времени ЭДС и током. Выразив эту характеристику уравнением $u = e - ir_{вн}$, рассматриваем источник энергии как источник ЭДС. Если условно принять $e = \text{const}$ (горизонтальная штриховая линия на рис. 19.61), то все изменение напряжения на зажимах источника при изменении тока i придется объяснить падением напряжения $ir_{вн}$ внутри источника, причем мы должны считать внутреннее сопротивление источника нелинейным, т. е. полагать $r_{вн} = f(i)$. На эквивалентной схеме такого источника (рис. 19.62) величина $r_{вн}$ является функцией тока i.

Выражая характеристику уравнением $i = \mathfrak{J} - ug_{вн}$, рассматриваем этот же источник энергии как источник тока. Если принять $\mathfrak{J} = \text{const}$ (вертикальная штриховая линия на рис. 19.61), то мы должны считать нелинейной внутреннюю проводимость источника $g_{вн} = f(u)$. На эквивалентной схеме такого источника (рис. 19.63) величина $g_{вн}$ является функцией напряжения u.

При расчете цепи, питаемой от таких источников, можно относить нелинейное внутреннее сопротивление источников ЭДС или, соответственно, нелинейную внутреннюю проводимость источников тока к приемной цепи, на которую работают источники. Очевидно, при этом приемная цепь становится нелинейной, даже если все остальные ее элементы имеют линейные характеристики. Источники же ЭДС и тока при этом рассматриваются как идеальные.

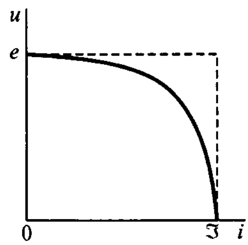

Рис. 19.61

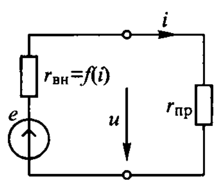

Рис. 19.62

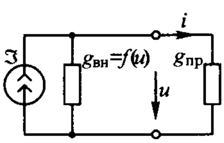

Рис. 19.63

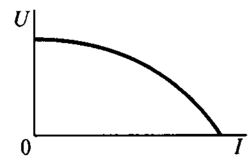

Рис. 19.64

Для источников периодической во времени ЭДС, например синхронных генераторов, реальная внешняя характеристика также оказывается *нелинейной*. На рис. 19.64 приведена внешняя характеристика трехфазного синхронного генератора при активной нагрузке ($\cos \varphi_{пр} = 1$), дающая зависимость действующего напряжения U на зажимах генератора от действующего тока I, отдаваемого генератором в приемник. Ход этой характеристики определяется реакцией якоря и активным и индуктивным падениями напряжения в обмотке статора от потоков рассеяния.

Глава двадцатая

Расчет нелинейных электрических и магнитных цепей при постоянном токе

20.1. О расчете нелинейных электрических цепей при постоянном токе

При постоянном токе неизменными во времени являются потокосцепления и заряды, поэтому индуцируемые в цепи ЭДС и токи в конденсаторах равны нулю. По этой причине в схемах распределение токов и напряжений определяется резисторами и активными сопротивлениями обмоток индуктивных катушек и активными проводимостями неидеальных конденсаторов.

Система топологических уравнений для напряжений и токов ветвей цепи аналогична таковой для линейной электрической цепи (см. § 3.12, т. I) и может быть составлена согласно первому и второму законам Кирхгофа. Соответственно, и методы составления этих уравнений, и форма записи одинаковы для линейных и нелинейных цепей.

В матричной форме системы уравнений для токов в узлах и сечениях, а также для напряжений в контурах будут иметь вид (см. §§ 3.13–3.15, т. I)

$$\mathbf{Ai} = -\mathbf{A\mathfrak{J}}; \quad \mathbf{Di} = -\mathbf{D\mathfrak{J}}; \quad \mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица соединений; $\mathbf{D}$ — матрица сечений; $\mathbf{C}$ — матрица контуров; $\mathbf{i} = \| i_1, i_2, ..., i_p \|^t$ — матрица-столбец токов в линейных и нелинейных элементах ветвей; $\mathfrak{J} = \|\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_p\|^t$ — матрица-столбец источников токов в ветвях; $\mathbf{e} = \| e_1, e_2, ..., e_p \|^t$ — матрица-столбец источников ЭДС в ветвях. Эти системы должны быть дополнены уравнениями, которые связывают напряжения и токи в элементах цепи. Для нелинейных цепей напряжения и токи связаны между собой нелинейными соотношениями, и поэтому в целом система уравнений цепи оказывается нелинейной. В матричной форме запишем эти нелинейные соотношения в виде

$$\|f_1(i_1, u_1); f_2(i_2, u_2); \ldots; f_p(i_p, u_p)\|^t = \mathbf{0}$$

или $\mathbf{F}(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Для постоянных токов все уравнения будут алгебраическими, причем система уравнений с учетом нелинейных зависимостей между токами и напряжениями будет нелинейной.

Аналитическое решение системы нелинейных уравнений, даже когда нелинейные ВАХ заданы в аналитической форме, является весьма трудной задачей, и во многих случаях такое решение вообще отсутствует. По этой причине для решения задач теории нелинейных цепей приходится широко использовать различные приближенные методы решения, такие как метод итераций и графоаналитические методы. В последующих параграфах эти методы будут рассмотрены. Их рассмотрение представляет интерес также и потому, что во многих случаях сами характеристики нелинейных элементов бывают заданы графически.

При решении нелинейных алгебраических уравнений электрических цепей может представлять интерес также проблема единственности решения. Рассмотрение особенностей вольт-амперных характеристик показывает, что вопрос единственности решения существенно зависит от типа ВАХ и от способа соединения нелинейного элемента с источником энергии или с внешней по отношению к этому элементу частью цепи. Как будет показано далее, выбором соответствующего дерева графа и отнесением ветвей с управляемыми током ВАХ к ветвям дерева и ветвей с управляемыми напряжением ВАХ — к связям графа можно обеспечить единственность решения.

В случаях, когда в цепи такое разделение невозможно, может иметь место множество состояний равновесия (множество решений). Однако, как увидим в последней главе этой части, состояния равновесия не всегда будут устойчивыми. В частности, неустойчивые состояния могут быть при наличии падающих участков в ВАХ нелинейных элементов. Исследование устойчивости потребует учета индуктивных и емкостных элементов цепи, так как при этом необходимо будет рассматривать переходные процессы, возникающие при отклонениях от состояния равновесия. Эти более сложные вопросы будут рассмотрены в главе 22.

Сложность решения системы нелинейных уравнений электрических цепей постоянного тока предопределяет широкое применение для анализа процессов в них ЭВМ. Однако и эти мощные средства вычислений не решают в полной мере ряда проблем, среди которых следует отметить проблему получения полной совокупности решений системы нелинейных уравнений цепи, без знания которых невозможно дальнейшее исследование свойств цепи.

20.2. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и не содержащих источников ЭДС

Пусть электрическая цепь (рис. 20.1, *а*) состоит из двух последовательно соединенных нелинейных элементов, характеристики которых $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_2 = F_2(i_2)$ известны. В этом случае

$$u = u_1 + u_2;\quad i_1 = i_2 = i.$$

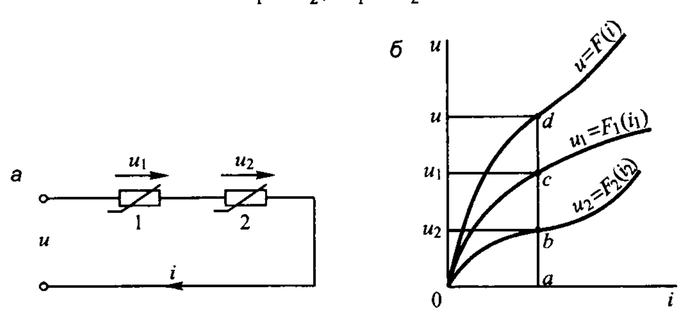

Рис. 20.1

Изобразив на рис. 20.1, *б* заданные характеристики отдельных элементов в виде кривых и складывая ординаты этих кривых для разных значений тока, получаем точки характеристики $u = F(i)$, относящейся ко всей цепи в целом. Например, $ab + ac = ad$. Располагая этой характеристикой, уже нетрудно находить значения i, u_1 и u_2 при любом заданном значении u. Очевидно, этот метод может быть распространен на любое число последовательно включенных нелинейных и линейных элементов.

Значения i_1 и u_2 можно найти также, если нелинейный элемент *1* и идеальный источник ЭДС рассмотреть в качестве реального источника с нелинейной вольт-амперной характеристикой (рис. 20.2, *а*). Эта характеристика описывается формулой $u_0 = E_0 - u_1$, где $u_1 = F(i)$, и изображается на рис. 20.2, *б* падающей кривой. Очевидно, условие равенств $u_2 = u_0$ и $i_1 = i_2 = i$, при котором имеет место равновесие состояния, и даст решение уравнения цепи. Графически точка равновесия есть точка b пересечения ВАХ реального источника (заключенного на рис. 20.2, *а* внутри вычерченного штриховой линией прямоугольника) и ВАХ нелинейного элемента *2*. Напряжение u_1 равно отрезку bd, напряжение u_2 — отрезку ab, а ток — отрезку $0a$. На рис. 20.2, *б* штриховой линией изображена суммарная ВАХ из рис. 20.1, *б*.

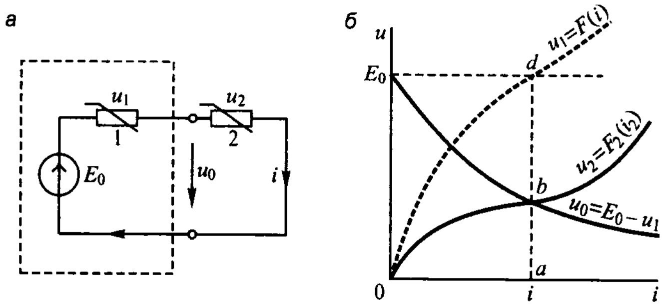

Рис. 20.2

Пусть электрическая цепь (рис. 20.3) состоит из двух параллельно соединенных нелинейных элементов с известными характеристиками. В этом случае

$$i = i_1 + i_2; \quad u_1 = u_2 = u.$$

Складывая на рис. 20.4 абсциссы кривых $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_2 = F_2(i_2)$, получаем точки характеристики $u = F(i)$, относящейся ко всей цепи в целом. Например, $ab + ac = ad$.

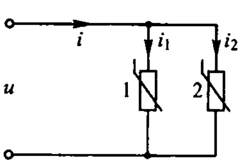

Рис. 20.3

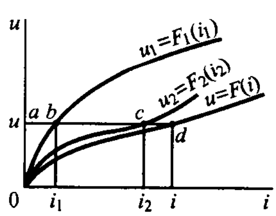

Рис. 20.4

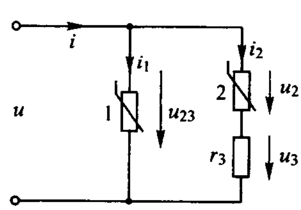

Рис. 20.5

При смешанном соединении, состоящем из последовательного и параллельного соединений отдельных участков цепи, для получения характеристики всей цепи в целом могут быть использованы те же приемы. На рис. 20.5 приведен пример смешанного соединения трех элементов, причем один из них, а именно третий элемент, обладает линейной характеристикой. Имеем уравнения

$$u = u_{23} = u_2 + u_3;\quad u_3 = r_3 i_2;$$
$$i = i_1 + i_2 \quad (i_3 = i_2;\ u_{23} = u_1 = u).$$

Складываем сначала ординаты кривых $u_2 = F_2(i_2)$ и $u_3 = r_3 i_3 = r_3 i_2$ (рис. 20.6). Получаем кривую $u = F_{23}(i_2)$, изображающую характеристику последовательно соединенных второго и третьего элементов. Например, $ab + ac = ad$. Складывая затем абсциссы кривых $u = F_{23}(i_2)$ и $u = F_1(i_1)$, изображающих характеристики параллельно соединенных ветвей, получаем характеристику $u = F(i)$ всей цепи. Например, $gk + gd = gm$. Располагая совокупностью характеристик на рис. 20.6, нетрудно найти напряжения и токи на всех участках цепи, если задано одно из этих напряжений (u_1, u_2 или u_3) или один из этих токов (i, i_1 или i_2).

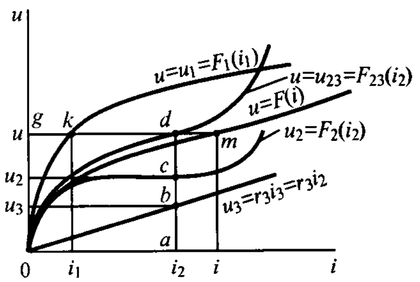

Рис. 20.6

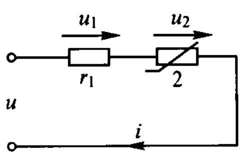

Рис. 20.7

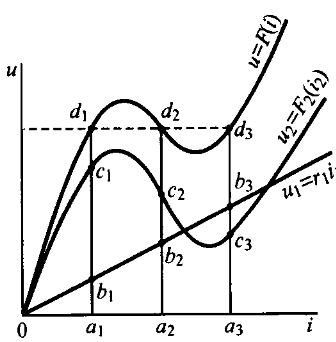

Рис. 20.8

В рассмотренных примерах все характеристики имели возрастающий характер, т. е. как статические, так и динамические сопротивления нелинейных элементов были положительными во всем диапазоне изменения токов в этих элементах. При этом решение задачи получалось однозначным, т. е. при заданном значении напряжения на зажимах цепи устанавливаются определенные значения всех токов. При наличии характеристик с падающими участками, при которых динамическое сопротивление отрицательное, может оказаться, что решение будет многозначным, т. е. при заданном напряжении может быть несколько совокупностей токов в ветвях, удовлетворяющих в равной мере уравнениям Кирхгофа. Иными словами, может существовать несколько состояний равновесия. Рассмотрим пример цепи (рис. 20.7), состоящей из последовательно соединенных двух участков, первый из которых обладает линейной характеристикой $u_1 = r_1 i_1$ (r_1 = const), а второй — нелинейной характеристикой $u_2 = F_2(i_2)$ с падающим участком (рис. 20.8). При этом $i_1 = i_2 = i$. В рассматриваемом случае результирующая характеристика $u = F(i)$ также имеет падающий участок.

Если приложенное к зажимам цепи напряжение u таково, что горизонтальная линия (пунктирная линия на рис. 20.8), определяемая этим напряжением, пересекает характеристику в нескольких точках, то возможно несколько состояний равновесия. На рис. 20.8 токи при равновесии определяются точками a_1, a_2, a_3 и соответствующее им напряжение u_1 — точками b_1, b_2 и b_3, а напряжение u_2 — точками c_1, c_2 и c_3. Вопрос об устойчивости этих состояний будет рассмотрен в главе 22.

20.3. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники ЭДС

Пусть имеется ветвь с последовательно соединенными нелинейным элементом и источником ЭДС (рис. 20.9), причем заданы характеристика $u_{ab} = F(i)$ нелинейного элемента, значение и направление ЭДС e. Напряжение на всей ветви между точками a и c равно

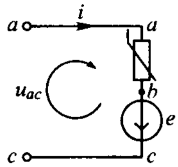

Рис. 20.9

$$u_{ac} = u_{ab} + u_{bc} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Это соотношение получается, если применить второй закон Кирхгофа к контуру, указанному на рис. 20.9 круговой стрелкой:

$$e_{bc} = u_{ca} + u_{ab} = -u_{ac} + u_{ab} \quad \text{или} \quad u_{ac} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Если ЭДС e действует в направлении выбранного положительного направления тока, т. е. $e_{bc} > 0$, то при положительном токе она способствует прохождению тока и при $e_{bc} < u_{ab}$ уменьшает значение u_{ac}. На рис. 20.10, *а* изображена характеристика нелинейного элемента $u_{ab} = F(i)$ и отложена прямая, соответствующая $e_{bc} > 0$. Здесь же нанесена результирующая характеристика $u_{ac} = F_1(i)$ для всей ветви.

На рис. 20.10, *б* произведено то же построение при $e_{bc} < 0$, т. е. когда ЭДС источника в рассматриваемой ветви действует против принятого положительного направления тока.

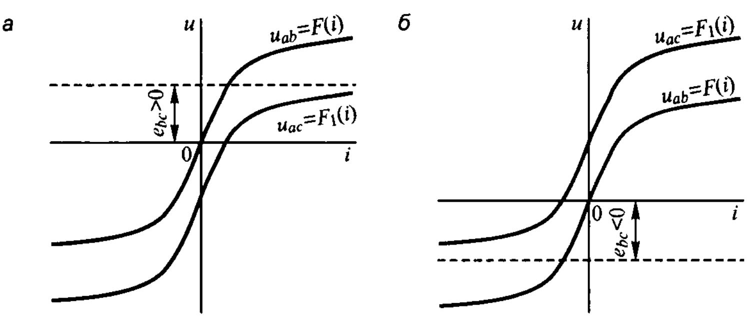

Рис. 20.10

Предположим, что электрическая цепь (рис. 20.11) между зажимами ab состоит из любого числа последовательно и параллельно соединенных участков, содержащих линейные и нелинейные элементы и источники ЭДС. К зажимам a и b приложено заданное напряжение u_{ab}. Задаемся положительными направлениями токов во всех ветвях цепи. Направления и значения ЭДС во всех ветвях, а также характеристики всех элементов заданы. Строим только что изложенным методом результирующие характеристики всех ветвей (рис. 20.12–20.16).

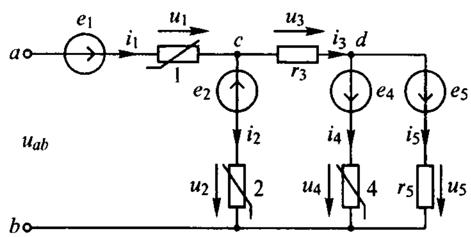

Рис. 20.11

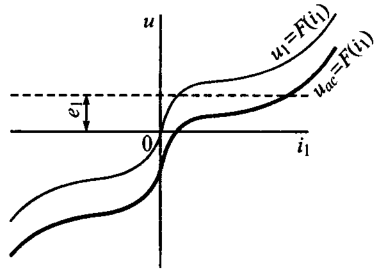

Рис. 20.12

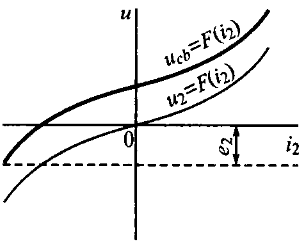

Рис. 20.13

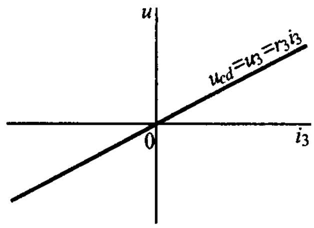

Рис. 20.14

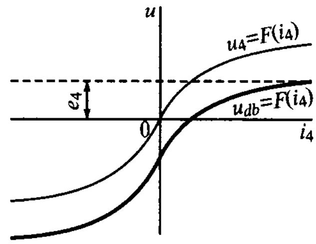

Рис. 20.15

Располагая этими характеристиками, пользуемся дальше для расчета смешанного соединения теми приемами, которые были изложены в предыдущем параграфе. Так, для цепи, изображенной на рис. 20.11, складываем абсциссы кривых $u_{db} = F(i_4)$ и $u_{db} = F(i_5)$, изображающих характеристики ветвей d–4–b и d–5–b, так как эти ветви соединены параллельно. Получаем характеристику $u_{db} = F(i_3)$ этих параллельно соединенных ветвей, изображенную на рис. 20.17. Складывая затем ординаты кривой $u_{db} = F(i_3)$ с ординатами кривой $u_{cd} = u_3 = r_3 i_3$, так как третий участок соединен последовательно с параллельно соединенными четвертым и пятым участками, получаем характеристику всех этих трех участков $u_{cb} = F(i_3)$ (рис. 20.18).

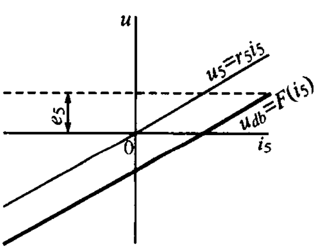

Рис. 20.16

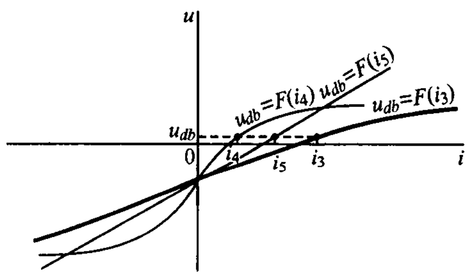

Рис. 20.17

К абсциссам этой кривой прибавляем абсциссы кривой $u_{cb} = F(i_2)$, изображающей характеристику второй ветви. Получаем характеристику $u_{cb} = F(i_1)$ части цепи между зажимами c и b (рис. 20.19). Наконец, складывая ординаты этой кривой с ординатами кривой $u_{ac} = F(i_1)$, находим характеристику всей цепи между зажимами a и b (рис. 20.20). Располагая построенными характеристиками,

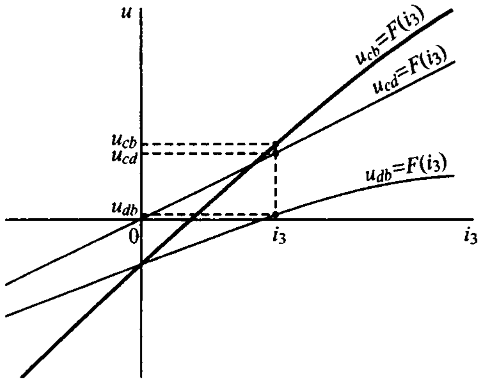

Рис. 20.18

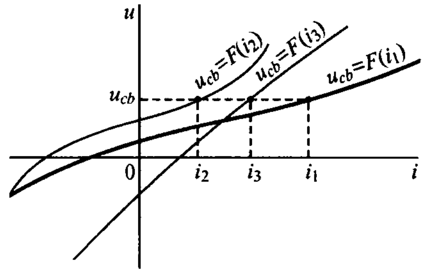

Рис. 20.19

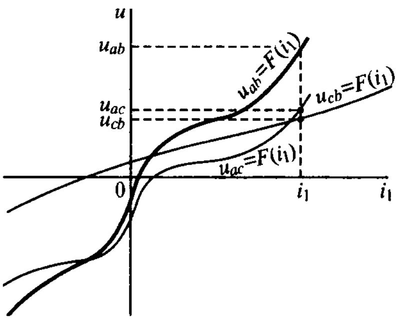

Рис. 20.20

легко находим токи во всех ветвях и напряжения на всех ветвях, если задано приложенное ко всей цепи напряжение u_{ab}. Если задан один из токов или задано напряжение на каком-либо участке ветви, то из этих характеристик определяются токи и напряжения во всех остальных ветвях и напряжение u_{ab} на зажимах всей цепи. Штриховыми линиями на рис. 20.17–20.20 показано решение для одного из таких частных режимов. Заметим, что если зажимы a и b замкнуты накоротко, то токи в цепи возникают только под действием всех источников ЭДС, содержащихся в самой цепи. При этом $u_{ab} = 0$, и, следовательно, решение определяется точкой пересечения характеристики $u_{ab} = F(i_1)$ на рис. 20.20 с осью абсцисс.

20.4. Расчет сложной электрической цепи с одним нелинейным элементом

Для расчета электрической цепи любой сложности, в общем случае не образованной последовательно или параллельно соединенными участками, имеющей любое число источников ЭДС, но содержащей только один нелинейный элемент, может быть применен метод эквивалентного генератора.

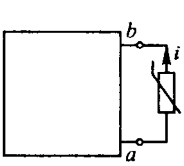

Рис. 20.21

Пусть нелинейный элемент включен в ветвь ab сложной цепи. Выделим на рис. 20.21 эту ветвь, изобразив всю остальную часть сложной цепи условно прямоугольником. Часть цепи, содержащаяся внутри этого прямоугольника, состоит только из линейных элементов и источников ЭДС, и, следовательно, к ней в отдельности применим принцип наложения. Принцип наложения не применим к ветви ab с нелинейным элементом и вследствие этого не применим ко всей цепи в целом, содержащей этот элемент.

Принцип наложения не применим к ветви с нелинейным элементом потому, что сопротивление r этого элемента зависит от тока i в нем. В самом деле, предположим, что искомый действительный режим с током i в нелинейном элементе мы разложили на два частных режима с токами i' и i'' в этом элементе, причем $i = i' + i''$. Напряжения на нелинейном элементе в действительном и в этих частных режимах равны: $u = ri$, $u' = r'i'$ и $u'' = r''i''$. Так как r зависит от i, то, вообще говоря, $r' \neq r''$ и, следовательно, $u \neq u' + u''$. Поэтому, налагая друг на друга частные режимы, мы не получим действительного режима с током i и напряжением u.

Однако результат наложения будет правильным, если в одном из частных режимов ток i' в нелинейном элементе и напряжение u' на нем отсутствуют, т. е. $i' = 0$ и $u' = 0$, а в другом частном режиме ток i'' равен току i в действительном режиме, а следовательно, и напряжение u'' равно напряжению u в действительном режиме. При этом имеем

$$i = 0 + i'' \quad \text{и} \quad u = 0 + u''.$$

Для того чтобы эти два частных режима при наложении давали действительные токи и напряжения во всей сложной цепи, содержащей данный нелинейный элемент, необходимо, чтобы ЭДС e'_k и e''_k в этих режимах в любой k-й ветви в сумме были равны действительной ЭДС e_k в этой ветви, т. е. чтобы было $e'_k + e''_k = e_k$.

Всем этим требованиям удовлетворяет метод эквивалентного генератора. Пользуясь этим методом, введем для получения требуемого первого режима в ветвь ab с нелинейным элементом такую дополнительную ЭДС e'_0, чтобы при действии во всех остальных ветвях ЭДС e'_k, равных заданным ЭДС e_k, ток в нелинейном элементе стал равным нулю: $i' = 0$. Пусть характеристика нелинейного элемента такова, что при этом и $u' = 0$. ЭДС e'_0 равна и противоположна по знаку напряжению u_0, создаваемому всеми заданными источниками ЭДС при размыкании ветви с нелинейным элементом в месте разрыва этой ветви, т. е. $e'_0 = -u_0$.

Во втором частном режиме введем в ветвь с нелинейным элементом ЭДС $e''_0 = -e'_0 = u_0$, а все заданные источники ЭДС замкнем накоротко, сохранив в ветвях их внутренние сопротивления, т. е. примем $e''_k = 0$.

Налагая эти два частных режима друг на друга, получаем во всех ветвях линейной части цепи

$$e'_k + e''_k = e_k + 0 = e_k; \quad i'_k + i''_k = i_k$$

и в ветви ab

$$e'_0 + e''_0 = 0; \quad u' + u'' = 0 + u'' = u; \quad i' + i'' = 0 + i'' = i,$$

т. е. получаем искомый действительный режим во всей цепи.

Обозначая, как и ранее, через $r_г$ сопротивление всей линейной части цепи между зажимами a и b при замкнутых накоротко источниках ЭДС в ней, получаем

$$i = \frac{u_0}{r_г + r(i)},$$

где $r(i)$ — сопротивление нелинейного элемента при токе i в нем. Таким образом, всю сложную линейную часть цепи заменяем эквивалентным генератором ЭДС $e''_0 = u_0$ с внутренним сопротивлением $r_г$ (рис. 20.22). Вычисления величин u_0 и $r_г$ являются чисто линейными задачами и могут быть выполнены изложенными в §§ 5.8–5.16, т. I методами. Отыскание тока i в цепи, представленной на рис. 20.22, легко выполняется графическим построением, изложенным в § 20.3, если задана кривая, изображающая характеристику $u = F(i)$ нелинейного элемента.

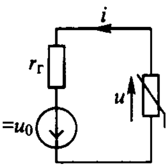

Рис. 20.22

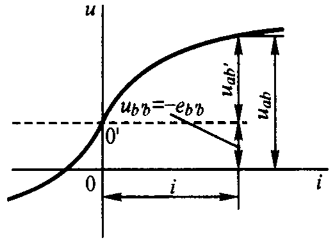

Рис. 20.23

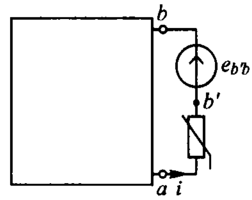

Рис. 20.24

В вышеизложенном была сделана только одна оговорка, что характеристика $u = F(i)$ проходит через начало координат, т. е. что при $i = 0$ также и $u = 0$. Если это не имеет места (рис. 20.23), то, перенеся ось абсцисс так, чтобы характеристика прошла через новое начало координат 0′, видим, что действительный нелинейный элемент с характеристикой $u_{ab} = F(i)$, не проходящей через начало координат, может быть заменен последовательным соединением (рис. 20.24) нелинейного элемента с характеристикой $u_{ab'} = F'(i) = F(i) - u_{b'b} = F(i) + e_{b'b}$, проходящей через начало координат, и источника ЭДС $e_{b'b}$ с внутренним сопротивлением, равным нулю. Если этот источник ЭДС отнести к линейной части цепи, то по отношению к зажимам a и b' будут справедливы все приведенные рассуждения.

20.5. Расчет сложной электрической цепи с двумя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная цепь с источниками ЭДС содержит две ветви ab и cd с нелинейными элементами. Выделим на рис. 20.25 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть цепи, представляющую собой активный линейный четырехполюсник, условно прямоугольником. Используем идею метода, изложенного в предыдущем параграфе, в применении к этой цепи.

Введем в ветви ab и cd такие ЭДС e'_{01} и e'_{02}, чтобы при действии в линейной части цепи всех заданных ЭДС токи в обоих нелинейных элементах *одновременно* стали равными нулю (рис. 20.26). Пусть характеристики обоих нелинейных элементов таковы, что напряжения на них равны нулю при отсутствии токов в них. В таком случае ЭДС e'_{01} и e'_{02} равны и противоположны по знаку напряжениям u_{01} и u_{02}, возникающим при *одновременном* размыкании обеих ветвей с нелинейными элементами в местах разрыва этих ветвей (рис. 20.27). Отыскание этих напряжений является линейной задачей.

Если теперь замкнуть накоротко все заданные источники ЭДС в линейной части цепи ($e''_k = 0$), сохранив в ветвях внутренние сопротивления этих источников, и ввести в ветви ab и cd источники с ЭДС $e''_{01} = -e'_{01} = u_{01}$ и $e''_{02} = -e'_{02} = u_{02}$ (рис. 20.28), то на основе рассуждений, приведенных в предыдущем параграфе, можно утверждать, что токи в нелинейных элементах в этом режиме будут равны искомым токам i_{ab} и i_{cd}, возникающим в них в действительной сложной цепи (рис. 20.25) под действием всех заданных ЭДС.

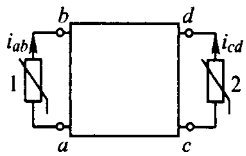

Рис. 20.25

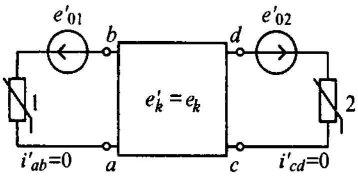

Рис. 20.26

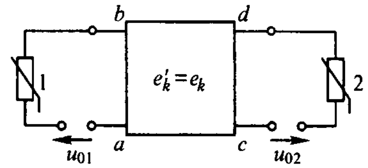

Рис. 20.27

Упрощение задачи заключается в том, что вместо большого числа заданных ЭДС, действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только две эквивалентные ЭДС e''_{01} и e''_{02}, включенные в ветви с нелинейными элементами. При этом вся сложная линейная часть цепи стала пассивным четырехполюсником.

Таким образом, задача сводится к расчету линейной цепи, изображенной на рис. 20.27, и к расчету цепи, приведенной на рис. 20.28. Токи во всех ветвях получаются суммированием токов, найденных в этих двух задачах, в частности, токи в нелинейных ветвях получаются сразу из решения второй задачи, так как в первой задаче они равны нулю.

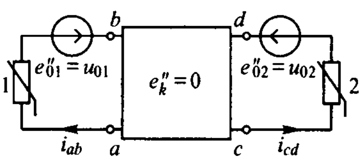

Рис. 20.28

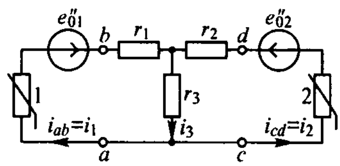

Рис. 20.29

Решение второй нелинейной задачи (рис. 20.28) выполняется путем замены линейного пассивного четырехполюсника его Т-образной эквивалентной схемой (рис. 20.29). Параметры r_1, r_2, r_3 этой эквивалентной схемы определяются методами, изложенными в §§ 13.2, 13.3, т. I. Цепь, изображенная на рис. 20.29, легко рассчитывается с помощью графических построений, приведенных в § 20.3.

20.6. Расчет сложной электрической цепи с тремя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная электрическая цепь с источниками ЭДС содержит три ветви, *ab*, *cd* и *gk*, с нелинейными элементами. Выделим на рис. 20.30 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть условно шестиугольником. Эта часть, имеющая три пары зажимов, причем в каждой паре один является входным, а другой — выходным по отношению к соответствующей внешней цепи (или ветви), представляет собой так называемый шестиполюсник. В данном случае шестиполюсник является *активным*, так как содержит внутри себя источники ЭДС.

Введем во все вынесенные нелинейные ветви такие ЭДС e'_{01}, e'_{02} и e'_{03}, чтобы при действии всех заданных ЭДС токи i_{ab}, i_{cd} и i_{gk} в нелинейных элементах *одновременно* были равны нулю. Эти ЭДС e'_{01}, e'_{02} и e'_{03} равны по значению и противоположны по знаку напряжениям u_{01}, u_{02} и u_{03}, которые появляются в местах размыкания ветвей ab, cd и gk под действием всех заданных ЭДС.

Если теперь ввести в нелинейные ветви ЭДС $e''_{01} = -e'_{01} = u_{01}$, $e''_{02} = -e'_{02} = u_{02}$, $e''_{03} = -e'_{03} = u_{03}$ и замкнуть накоротко все заданные источники ЭДС, сохранив в соответствующих ветвях их внутренние сопротивления (рис. 20.31), то токи в нелинейных ветвях будут равны искомым токам i_{ab}, i_{cd} и i_{gk} в действительной задаче. При этом шестиполюсник между зажимами a и b, c и d, g и k является пассивным.

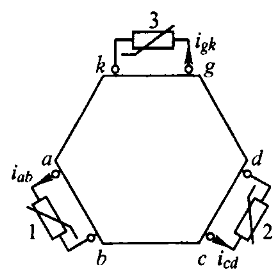

Рис. 20.30

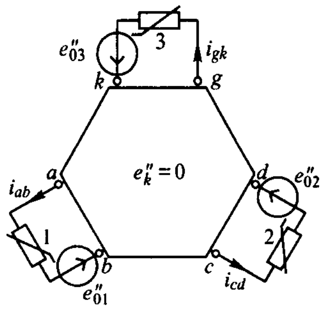

Рис. 20.31

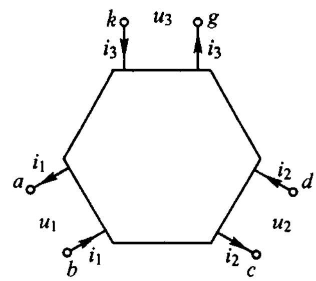

Рис. 20.32

Для пассивного линейного шестиполюсника (рис. 20.32) имеют место уравнения

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3;$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3;$$
$$u_3 = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3,$$

где $u_1 = u_{ba}$, $u_2 = u_{dc}$ и $u_3 = u_{kg}$ — приложенные извне к зажимам шестиполюсника напряжения.

Эти уравнения легко получить, использовав принцип наложения. Если приложить напряжение u'_1 только к зажимам b и a, а вторую и третью внешние цепи разомкнуть ($i_2 = 0$ и $i_3 = 0$), то будем иметь

$$u'_1 = R_{11}i_1; \quad u'_2 = R_{21}i_1; \quad u'_3 = R_{31}i_1.$$

Приложив напряжение u''_2 к зажимам d и c и разомкнув первую и третью внешние цепи, получим

$$u''_1 = R_{12}i_2; \quad u''_2 = R_{22}i_2; \quad u''_3 = R_{32}i_2.$$

Наконец, при действии внешнего напряжения u'''_3 между зажимами k и g при разомкнутых внешних первой и второй цепях имеем

$$u'''_1 = R_{13}i_3; \quad u'''_2 = R_{23}i_3; \quad u'''_3 = R_{33}i_3.$$

Накладывая эти три режима и полагая $u'_1 + u''_1 + u'''_1 = u_1$, $u'_2 + u''_2 + u'''_2 = u_2$ и $u'_3 + u''_3 + u'''_3 = u_3$, получим написанные выше уравнения пассивного линейного шестиполюсника. Входящие в эти уравнения параметры определяются расчетным или опытным путем из только что рассмотренных трех частных режимов.

На основе принципа взаимности можно утверждать, что $R_{21} = R_{12}$, $R_{32} = R_{23}$ и $R_{31} = R_{13}$. Таким образом, уравнения шестиполюсника содержат только шесть независимых параметров, и, следовательно, простейшая *эквивалентная схема* шестиполюсника должна иметь шесть элементов. На рис. 20.33 изображена одна из таких возможных схем, имеющая три независимых контура с контурными токами i_1, i_2 и i_3. Уравнения шестиполюсника и представляют собой уравнения контурных токов для этой эквивалентной схемы.

Собственные сопротивления контуров равны

$$R_{11} = r_1 + r_4 + r_5; \quad R_{22} = r_2 + r_5 + r_6; \quad R_{33} = r_3 + r_6 + r_4.$$

Взаимные сопротивления R_{12}, R_{23} и R_{31} отрицательны, так как положительные направления контурных токов в общих ветвях противоположны, а в уравнениях шестиполюсника все члены нами написаны со знаком «плюс». Имеем

$$R_{12} = R_{21} = -r_5; \quad R_{23} = R_{32} = -r_6; \quad R_{13} = R_{31} = -r_4.$$

Из этих уравнений определяются сопротивления элементов эквивалентной схемы через параметры шестиполюсника.

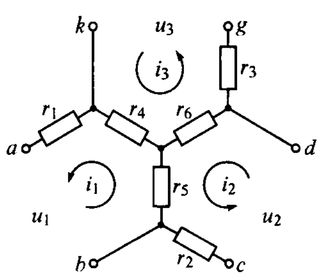

Рис. 20.33

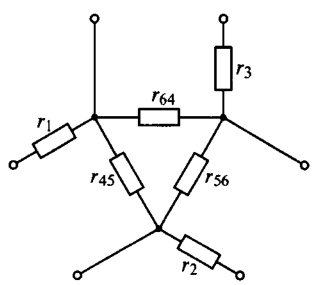

Рис. 20.34

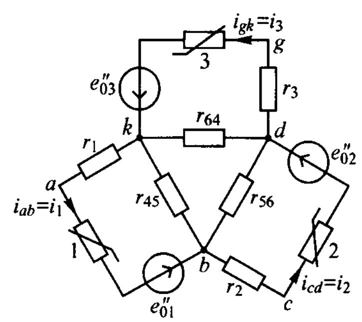

Рис. 20.35

Заменим соединение звездой сопротивлений r_4, r_5 и r_6 на рис. 20.33 эквивалентным соединением треугольником. Получим другую возможную эквивалентную схему шестиполюсника (рис. 20.34), использовав которую, приведем схему на рис. 20.31 к виду, изображенному на рис. 20.35.

В этой схеме ветви с индексами 1 и 45, 2 и 56, а также 3 и 64 соединены попарно параллельно, а образованные этими парами ветвей контуры соединены между собой последовательно. В трех ветвях содержатся нелинейные элементы и источники ЭДС. Такая цепь легко рассчитывается с помощью графических построений, приведенных в § 20.3.

Отметим, что в частном случае, когда в заданной действительной сложной цепи все три ветви с нелинейными элементами сходятся к одному узлу, образуя соединение звездой, при одновременном размыкании этих ветвей узел оказывается отключенным от всей цепи, его потенциал по отношению к другим точкам цепи получается неопределенным, а следовательно, неопределенными оказываются и напряжения на местах разрыва. Однако в этом случае достаточно разорвать только две ветви с нелинейными элементами, так как ток в третьей ветви с нелинейным элементом при этом также будет равен нулю. Соответственно, при расчете токов в нелинейных элементах достаточно будет ввести только два эквивалентных источника ЭДС, например e''_{01} и e''_{02}. В случае, когда характеристика нелинейного элемента не проходит через начало координат, этот нелинейный элемент может быть заменен нелинейным элементом с характеристикой, проходящей через начало координат, и источником ЭДС, как было показано в конце § 20.4.

20.7. Расчет сложной нелинейной цепи постоянного тока численными методами

Наглядность и простота графоаналитического метода не компенсируют ограниченных его возможностей при расчете сложных нелинейных цепей. С развитием вычислительной техники широкое применение находят различные численные методы расчета нелинейных цепей, которые дают возможность рассчитать весьма сложные схемы. Для расчета нелинейных цепей наибольшее распространение получил метод последовательных приближений (метод итераций).

Наиболее просто метод последовательных приближений можно применить для решения уравнений, записанных в виде

$$x = f(x).$$

Тогда

$$x^{k+1} = f(x^k), \text{ а } x_{\text{иск}} = \lim_{k\to\infty} x^k.$$

Здесь x^k и x^{k+1} — значения интересующей нас (искомой) величины $x_{\text{иск}}$ на k-м и $(k+1)$-м шагах итераций; $f(x^k)$ — значение нелинейной функции на k-м шаге итераций. Графически метод простых итераций можно представить, изобразив на плоскости функции $f(x)$ и $x = x$. Точка пересечения этих функций и есть решение уравнения. Траектория сближения к этой точке равновесия и отражает значения $f(x^k)$ и x^k при различных k. На рис. 20.36 изображен случай, когда пересечение указанных функций происходит в трех точках, т. е. существуют три решения уравнения (три точки равновесия, a, b, c). Итерационный процесс следует начинать с произвольного значения x, обозначенного на рис. 20.36 буквой x^0. На этом рисунке изображены итерационные процессы для четырех различных начальных значений x^0, а именно x_1^0, x_2^0, x_3^0 и x_4^0. Итерационный процесс может сходиться к точке равновесия, если характер функции $f(x)$ в окрестности точки равновесия позволяет это (случай с x_2^0, x_3^0, x_4^0). Но итерационный процесс может и не сходиться к точке равновесия (случай с x_1^0 в окрестности точки a). Достаточным условием сходимости является неравенство $|f'(x)| < 1$ в окрестности точки равновесия.

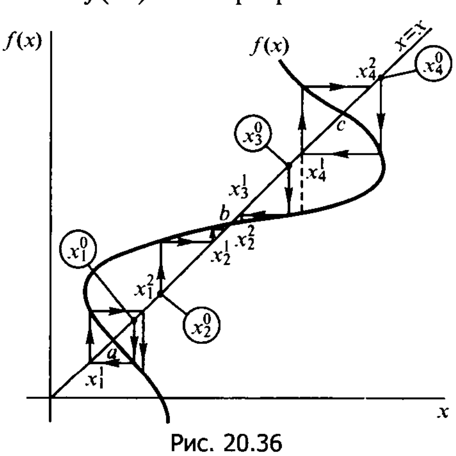

Рис. 20.36

Рис. 20.36 показывает, что метод простых итераций не всегда обеспечивает сходимость процесса итераций и что для нахождения всех решений следует задавать подходящие, наперед неизвестные начальные приближения. При рассмотрении системы уравнений цепи весьма важно сформировать уравнение $x = f(x)$ относительно таких величин, которые дают возможность однозначно определить $f(x)$ при данном x. Например, на рис. 20.36 для значения x_4^0 можно найти два значения $f(x_4^0)$. Применительно к ВАХ элементов электрических цепей это условие проанализируем на примере последовательно соединенных источника ЭДС E и двух нелинейных элементов (см. рис. 20.2, *а*).

Уравнения цепи имеют вид

$$E = u_1 + u_2; \quad u_1 = f_1(i) \quad \text{или} \quad i = f_3(u_1); \quad u_2 = f_2(i) \quad \text{или} \quad i = f_4(u_2).$$

Здесь, согласно принятому в § 19.2 разделению, $u = f(i)$ означает, что ВАХ управляема током, т. е. при заданном токе напряжение определяется однозначно. Функция $i = f(u)$ означает, что ВАХ управляема напряжением, т. е. при заданном напряжении ток определяется однозначно. В форме $x = f(x)$ можно записать следующие уравнения:

$$u_1 = E - u_2 = E - f_2(i) = E - f_2[f_3(u_1)] \quad \text{или} \quad u_1 = E - f_2[f_3(u_1)];$$
$$u_2 = E - u_1 = E - f_1(i) = E - f_1[f_4(u_2)] \quad \text{или} \quad u_2 = E - f_1[f_4(u_2)];$$
$$i = f_3(u_1) = f_3[E - f_2(i)] \quad \text{или} \quad i = f_4(u_2) = f_4[E - f_1(i)].$$

Можно найти u_1 и u_2 также из выражений

$$u_1 = f_1(i) = f_1[f_4(E - u_1)] \quad \text{и} \quad u_2 = f_2(i) = f_2[f_3(E - u_2)].$$

Все шесть уравнений (по два для i, u_1 и u_2) имеют форму $x = f(x)$ и поэтому могут быть использованы для метода простых итераций. Однако в зависимости от характера ВАХ некоторые из них более предпочтительны. Пусть ВАХ первого нелинейного элемента управляема током $u_1 = f_1(i)$, а ВАХ второго элемента управляема напряжением $i = f_4(u_2)$. Из шести выражений, следовательно, необходимо брать лишь те, в которые входят только функции f_1 и f_4. Таковыми являются

$$u_2 = E - f_1[f_4(u_2)]; \quad u_1 = f_1[f_4(E - u_1)]; \quad i = f_4[(E - f_1(i)].$$

Во всех этих выражениях значение x^k однозначно определяет x^{k+1} из-за свойств ВАХ f_1 и f_4.

Заметим, что использование других выражений приведет к неопределенности. Например, пусть f_2 и f_3 таковы, что данным значениям u_1 и i соответствуют по три значения i и u_2, иначе говоря, функции f_2 и f_3 многозначны. Если использовать для u_1 уравнение $u_1 = E - f_2[f_3(u_1)]$, то для заданного u_1^k из функции f_3 определим три значения i, по которым из функции f_2 определим девять значений u_1^{k+1}. Такая многозначность неприемлема с точки зрения рациональной организации процесса последовательных приближений. Не имеет значения и то обстоятельство, что такая множественность решения для u_1 возможна для ограниченного интервала значений u_1, поскольку в процессе итераций u_1 может оказаться именно в этом интервале.

При практических расчетах итерационный процесс следует заканчивать при достижении определенного значения x^{k+1}, которое отличается от предыдущего на величину $|x^{k+1} - x^k| \le \varepsilon$, где ε заранее следует задавать в качестве критерия ошибки в определении x.

Недостатки метода простых итераций частично устраняются в методе Ньютона. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нелинейное уравнение задано в виде $f(x) = 0$. Допустим, что два приближенных значения x^{k+1} и x^k отличаются на малую величину $\Delta x = x^{k+1} - x^k$. Тогда, разложив функцию $f(x^k + \Delta x)$ в ряд по Δx и ограничившись только двумя первыми членами ряда (что справедливо, если Δx — малая величина), получим

$$f(x^k + \Delta x) \approx f(x^k) + f'(x^k)\Delta x.$$

Целесообразно выбрать Δx таким, чтобы $f(x^k + \Delta x) = 0$. Тогда

$$\Delta x = x^{k+1} - x^k = -f(x^k)/f'(x^k) \quad \text{и} \quad x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Последняя формула также определяет некоторый итерационный процесс, которому присущи все особенности метода итераций. И в методе Ньютона следует задавать некоторое начальное значение x^0, определить $f(x)$ и $f'(x)$. Здесь также следует прекратить вычисления при выполнении условия $|x^{k+1} - x^k| \le \varepsilon$. В методе Ньютона возможны случаи, когда производная функции близка (или равна) нулю, и поэтому Δx может быть весьма велико (или равно бесконечности). При этом новое значение x^{k+1} может сильно отличаться от x^k, что ухудшает условия сходимости. Эти затруднения, как правило, обходят, задавая новые значения x^0, которые позволяют миновать точки (рис. 20.37) экстремума.

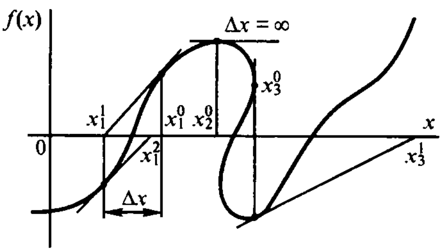

Рис. 20.37

Применительно к методу Ньютона остается в силе все сказанное выше о выборе величин, относительно которых записывается уравнение $f(x) = 0$. Эти величины и вид функции должны обеспечить однозначность $f(x^k)$ при заданном значении x^k. Для цепи, на примере которой выше иллюстрировался метод простых итераций, в качестве нелинейных функций следует также брать функции $f_1(i)$ и $f_4(u_2)$, которые однозначно определяют напряжение u_1 через ток и ток через напряжение u_2. Составим уравнение вида $f(x) = 0$ относительно u_2:

$$f(x) = f(u_2) = E - u_2 - f_1[f_4(u_2)] = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = f'(u_2) = -1 - \frac{\partial f_1}{\partial f_4}\frac{\partial f_4}{\partial u_2}.$$

Принимая во внимание, что $f_4(u_2) = i$ и $f_1(i) = u_1$, а следовательно,

$$\frac{\partial f_1(i)}{\partial f_4} = \frac{\partial f_1(i)}{\partial i} = \frac{\partial u_1}{\partial i} = r_{\text{д}1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_4(u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial i}{\partial u_2} = g_{\text{д}2},$$

получим

$$f'(u_2) = -1 - r_{д1} g_{д2}$$

и

$$u_2^{k+1} = u_2^k + \frac{E - u_2^k - f_1[f_4(u_2^k)]}{1 + g_{д2}^k r_{д1}^k},$$

где $r_{д1}^k$ и $g_{д2}^k$ — дифференциальные сопротивление и проводимость, соответственно, первого и второго нелинейных элементов на k-м шаге итерации.

При численном расчете нелинейных цепей существенным является способ представления характеристик нелинейных элементов, оказывающих влияние на точность и свойства решения. Применение таких методов аппроксимации нелинейных характеристик, как методы Лагранжа и Ньютона, не приводит к увеличению точности при росте числа точек, когда находят коэффициенты полинома, описывающего нелинейную характеристику во всем диапазоне изменения аргумента. Лучшие результаты можно получить при разбиении нелинейной характеристики на участки с ее последующей аппроксимацией на участках.

При кусочно-линейной аппроксимации производные $y'_n = S_n$ ($n = 1, ..., N$) на границах участков разрывны, что при численных расчетах недопустимо. Применение полиномов, порядок которых превышает единицу, позволяет обеспечить на границах участков непрерывность производных заданного порядка. Так, при использовании кубических полиномов $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ непрерывными будут не только функция $y(x)$, но и ее первая и вторая производные.

Записывая нелинейную характеристику на n-м участке в виде

$$f_n(x) = y_n + S_n(x - x_n) + \left(3\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n^2} - \frac{S_{n+1} + 2S_n}{h_n}\right)(x - x_n)^2 +$$
$$+\left(-2\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n^3} + \frac{S_{n+1} + S_n}{h_n^2}\right)(x - x_n)^3, \quad n = 1, \dots, N, \quad h_n = x_{n+1} - x_n$$

и используя условие непрерывности первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производных на общих границах участков, приходим к системе линейных уравнений ($n = 1, ..., N$)

$$h_{n+1}S_n + 2(h_n + h_{n+1})S_{n+1} + h_nS_{n+2} = 3\left(h_n\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h_{n+1}} + h_{n+1}\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)$$

относительно величин S_n. Для получения решения необходимо задать значения S_n при $n = 0$ и $n = N + 1$, которые можно определить приближенно из исходной нелинейной характеристики $y(x)$.

Рассмотренный подход носит название метода аппроксимации с помощью сплайн-функций. Наряду с кубическими находят применение также сплайн-функции других порядков.

20.8. Составление системы нелинейных уравнений электрической цепи постоянного тока при условии обеспечения единственности решения

При расчете сложной нелинейной цепи всегда будет стоять вопрос, единственно ли полученное численное решение или существуют и другие решения, которые должны быть определены путем задания других начальных приближений. Если заранее известно, что в данной цепи возможно единственное решение, то необходимость такого численного исследования отпадает. Это — очень важное обстоятельство с точки зрения экономии времени расчета, так как получение полного набора решений системы нелинейных алгебраических уравнений электрической цепи при помощи ЭВМ — и в настоящее время труднорешаемая задача.

Единственность решения системы уравнений цепи возможна, если наложить определенные ограничения на ВАХ элементов и на выбор дерева графа схемы. Если цепь содержит хотя бы один элемент с неуправляемой ВАХ, то для такой цепи невозможна единственность решения. Поэтому отсутствие элементов с неуправляемыми ВАХ является обязательным условием существования единственности решения.

Матрично-топологический аппарат позволяет определять токи в обобщенных ветвях дерева через токи связей и напряжения связей через напряжения обобщенных ветвей дерева при помощи соотношений (см. § 3.16, т. I)

$$\tilde{\mathbf{i}}_{\text{в}} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}} \\ \hline \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{F}^t \\ \hline \mathbf{1} \\ \hline\end{array}\,\tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\text{в}} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}} \\ \hline \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{F} \\ \hline\end{array}\,\tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{i}}_{\text{в}}, \tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}}, \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{в}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}}$ — матрицы-столбцы, соответственно, токов и напряжений обобщенных ветвей цепи, ветвей дерева и связей графа. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t\tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}.$$

Если ВАХ элемента управляема током, то такой элемент в топологической схеме может быть рассмотрен только как ветвь дерева, напряжение которой однозначно определится токами связей. Если ВАХ элемента управляема напряжением, то такой элемент в топологической схеме может быть рассмотрен только как связь, ток в которой однозначно определится напряжением ветвей дерева. Смысл этих ограничений довольно просто понять, если рассмотреть два определенных случая.

Если во всех ветвях дерева имеются только источники ЭДС, то напряжения связей будут заданы этими ЭДС. Единственность решения может быть обеспечена, если ВАХ элементов таковы, что токи в связях однозначно определяются через напряжения, т. е. когда ВАХ управляемы напряжением. Если же во всех связях имеются только источники тока, то токи в ветвях дерева будут заданы токами источников. Единственность решения может быть обеспечена, если ВАХ элементов таковы, что напряжения ветвей дерева однозначно определяются через токи ветвей, т. е. когда ВАХ управляемы током. Таким образом, токи в связях единственным образом определяются через напряжения ветвей дерева, а напряжения ветвей дерева — через токи связей. Такая взаимная однозначность позволит, например, методом последовательных приближений определить искомые токи в связях и напряжения ветвей дерева. Следовательно, конфигурация исходной цепи и ВАХ элементов этой цепи сужают свободу выбора дерева графа. Элементы с управляемыми током ВАХ с самого начала построения дерева графа должны быть отнесены к ветвям дерева, а элементы с управляемыми напряжением ВАХ — к связям графа.

Элементы с монотонными ВАХ, и в частном случае с линейными ВАХ, могут войти и в состав дерева графа, и в связи графа. Такие ВАХ управляемы и током, и напряжением.

Возникает вопрос о минимальном числе искомых величин и о форме записи уравнений нелинейных цепей. Для цепи с p ветвями, как правило, должны быть заданы p ВАХ элементов ветвей. В общем случае неизвестны p напряжений и p токов в ветвях. Поэтому общее число уравнений должно быть равно p, как и в линейных цепях, что совместно с p ВАХ даст систему из $2p$ уравнений. Матричные уравнения $\tilde{\mathbf{i}}_д = \mathbf{F}'\tilde{\mathbf{i}}_с$ и $\tilde{\mathbf{u}}_с = -\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}_д$ определяют $q - 1$ скалярных уравнений для токов в $q - 1$ сечениях и n скалярных уравнений для контуров, т. е. всего p скалярных уравнений.

Пусть $q - 1$ ветвей, содержащих элементы с управляемыми током ВАХ, составляют дерево графа и n ветвей, содержащих элементы с управляемыми напряжением ВАХ, — связи графа. Обозначим напряжения и токи ветвей дерева через $u_{дk}$ и $i_{дk}$, причем $k = 1 \ldots (q - 1)$. Напряжения и токи связей обозначим через u_{cj} и i_{cj}, причем $j = q \ldots p$. Тогда будем иметь $q - 1$ ВАХ вида $u_{дk} = f_k(i_{дk}) = R_k(i_{дk})$ и $n = p - q + 1$ ВАХ вида $i_{cj} = \varphi_j(i_{cj}) = G_j(u_{cj})$. Следовательно, искомыми величинами должны быть $q - 1$ напряжений ветвей дерева и n токов связей, которые однозначно определяются согласно следующим матричным соотношениям:

$$\mathbf{u}_д = \mathbf{f}(\mathbf{i}_д) = \mathbf{R}(\mathbf{i}_д) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_с = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_с) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_с),$$

где

$$\mathbf{u}_д = \left\| u_{д1}, u_{д2}, \ldots, u_{дq-1} \right\|^t;$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{i}_д) = \left\| f_1(i_1), \ldots, f_{q-1}(i_{q-1}) \right\|^t = \left\| R_1(i_1), \ldots, R_{q-1}(i_{q-1}) \right\|^t;$$

$$\mathbf{i}_с = \left\| i_{cq}, \ldots, i_{cp} \right\|^t; \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}_с) = \left\| \varphi_q(u_q), \ldots, \varphi_p(u_p) \right\|^t = \left\| G_q(u_q), \ldots, G_p(u_p) \right\|^t.$$

В последних выражениях символы $\mathbf{R}(\mathbf{i})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ обозначают нелинейные матричные функции, и не следует делать ошибку, принимая их за матрицы сопротивлений и проводимостей.

Имея в виду, что для обобщенных ветвей графа схемы существуют (см. § 3.12, т. I) соотношения:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} + \mathbf{\mathfrak{Z}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{E},$$

получим

$$\mathbf{i}_д + \mathbf{\mathfrak{Z}}_д = \mathbf{F}'\mathbf{i}_с + \mathbf{F}'\mathbf{\mathfrak{Z}}_с; \quad \mathbf{u}_с - \mathbf{E}_с = -\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{F}\mathbf{E}_д$$

или

$$\mathbf{i}_д = \mathbf{F}'\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathbf{\mathfrak{Z}}; \quad \mathbf{u}_с = -\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{C}\mathbf{E};$$

$$\mathbf{u}_д = \mathbf{f}(\mathbf{i}_д) = \mathbf{R}(\mathbf{i}_д) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_с = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_с) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_с).$$

Здесь **i** и **u** — матрицы токов и напряжений элементов цепи.

Для применения метода итераций или метода Ньютона эти выражения должны быть приведены, соответственно, к виду $x = f(x)$ или $f(x) = 0$, но только в матричной форме. Ход получения решения продемонстрируем на примере отыскания итерационной формулы для $\mathbf{i}_д$. Имеем

$$\mathbf{i}_д = \mathbf{F}'\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathfrak{Z} = \mathbf{F}'[\mathbf{G}(\mathbf{u}_с)] - \mathbf{D}\mathfrak{Z} = \mathbf{F}'[\mathbf{G}(-\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{C}\mathbf{E})] - \mathbf{D}\mathfrak{Z} =$$
$$= \mathbf{F}'[\mathbf{G}(-\mathbf{F}\mathbf{R}(\mathbf{i}_д) + \mathbf{C}\mathbf{E})] - \mathbf{D}\mathfrak{Z}.$$

Мы выразили $\mathbf{i}_д$ через матричную функцию от $\mathbf{i}_д$, т. е. получили выражение, пригодное для применения метода простых итераций. Аналогично можно найти выражения

$$\mathbf{i}_с = \mathbf{G}\{-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}'\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathfrak{Z})] + \mathbf{C}\mathbf{E}\};\ \mathbf{u}_с = -\mathbf{F}\{\mathbf{R}[\mathbf{F}'\mathbf{G}(\mathbf{u}_с) - \mathbf{D}\mathfrak{Z}]\} + \mathbf{C}\mathbf{E};$$
$$\mathbf{u}_д = \mathbf{R}\{\mathbf{F}'[\mathbf{G}(-\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{C}\mathbf{E})] - \mathbf{D}\mathfrak{Z}\}.$$

Заметим, что нелинейные матричные уравнения можно получить относительно любой матричной величины, и, таким образом, общее число скалярных уравнений может соответствовать либо $q - 1$, либо n. Заметим также, что поскольку функции $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{i})$ управляемы, соответственно, напряжением и током, то во всех приведенных выше выражениях правые части однозначно определяют левые. Переносом всех членов уравнений в левую от знака равенства сторону получим выражение, пригодное для метода Ньютона: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0$. Формально для матричных величин можем записать итерационную процедуру согласно методу Ньютона в следующей форме:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^k).$$

Здесь $\mathbf{x}^k$ — столбцовая матрица, верхний индекс у которой показывает шаг итерации; $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})$ — матричная производная матрицы-столбца $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$.

Формально можно записать

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Пусть $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \|\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\|^t$. Тогда

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Квадратную матрицу, состоящую из n строк и n столбцов, элементы которой представляют собой частные производные φ_i по составляющим x_j, называют матрицей Якоби. Величина $[\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})]^{-1}$ есть обратная матрица Якоби, которая существует при условии неравенства нулю определителя матрицы Якоби.

Применительно к электрическим цепям для случая, когда $\mathbf{x} = \mathbf{i}_с$, т. е. для токов в связях, имеем

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\{-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathfrak{Z})] + \mathbf{CE}\} - \mathbf{i}_с = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{i}_с = \mathbf{x} = \left\| i_q, i_{q+1}, \ldots, i_p \right\|^t.$$

По правилам формального дифференцирования имеем

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{i}_с} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_с)}{\partial \mathbf{u}_с}(-\mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}_д)}{\partial \mathbf{i}_д}(\mathbf{F}^t) - \mathbf{1}.$$

Выражения $\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_с)}{\partial \mathbf{u}_с}$ и $\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}_д)}{\partial \mathbf{i}_д}$ определяют некоторые квадратные матрицы, имеющие размерности проводимости и сопротивления. Если

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_с) = \begin{Vmatrix} G_q(u_q) \\ \vdots \\ G_p(u_p) \end{Vmatrix}, \text{ то } \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_с)}{\partial \mathbf{u}_с} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial i_q}{\partial u_q} & \cdots & \frac{\partial i_q}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial i_p}{\partial u_q} & \cdots & \frac{\partial i_p}{\partial u_p} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_q & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & g_{q+1} & 0 & . & . & & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & g_p \end{Vmatrix} = \mathbf{g}_с,$$

где g_q, ..., g_p — дифференциальные проводимости нелинейных элементов связей $q \ldots p$. Эта последняя матрица диагональна, так как ток каждой связи определяется напряжением именно этой связи, и поэтому $\partial i_s/\partial u_j = 0$, если $s \neq j$. Следовательно, в методе Ньютона будем иметь

$$\mathbf{i}_с^{k+1} = \mathbf{i}_с^k + [\mathbf{g}_с^k\mathbf{F}\mathbf{r}_д^k\mathbf{F}^t + \mathbf{1}]^{-1}\{\mathbf{G}(-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_с^k - \mathbf{D}\mathfrak{Z})] + \mathbf{CE}) - \mathbf{i}_с^k\},$$

если аналогично определить $\partial \mathbf{u}_д/\partial \mathbf{i}_д = \mathbf{r}_д$ — диагональную матрицу дифференциальных сопротивлений ветвей дерева. Индексы у матриц $\mathbf{g}_с^k$ и $\mathbf{r}_д^k$ означают, что элементы этих матриц определены для значений токов и напряжений на k-м шаге итераций. Именно необходимость такого пересчета на каждом шаге итераций и последующее обращение матриц порядка $(n \times n)$ или $(q-1) \times (q-1)$ и являются существенными недостатками метода Ньютона.

Выражение $\mathbf{g}_с\mathbf{F}\mathbf{r}_д\mathbf{F}^t + \mathbf{1}$ можно преобразовать следующим образом. Представим $\mathbf{1} = \mathbf{g}\mathbf{g}_с^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{g}_с(\mathbf{F}\mathbf{r}_д\mathbf{F}^t + \mathbf{r}_с) = \mathbf{g}_с\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t.$$

Здесь $\mathbf{C}$ — матрица контуров графа цепи; $\mathbf{r}$ — диагональная матрица дифференциальных сопротивлений цепи. С учетом этого тождества для метода Ньютона можно получить выражение

$$\mathbf{i}_с^{k+1} = \mathbf{i}_с^k + [\mathbf{C}\mathbf{r}^k\mathbf{C}^t]^{-1}\mathbf{r}_с^k\{\mathbf{G}(-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_с^k - \mathbf{D}\mathfrak{Z})] + \mathbf{CE}) - \mathbf{i}_с^k\}.$$

В заключение заметим, что итерационный метод Ньютона может быть непосредственно использован для получения решения линейной задачи. Причем первый же шаг определит истинное значение поправки. Поскольку ВАХ линейны, то значения дифференциальных параметров совпадают со значениями статических параметров. Кроме того, для простоты можно считать $\mathbf{i}_с^0 = \mathbf{0}$. Тогда

$$\mathbf{i}_с^t = [\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t]^{-1}\mathbf{r}_с\mathbf{G}_с(\mathbf{F}\mathbf{R}_д\mathbf{D}\mathfrak{Z} + \mathbf{CE}) = [\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t]^{-1}(\mathbf{CE} + \mathbf{F}\mathbf{R}_д\mathbf{D}\mathfrak{Z}).$$

Матрица $\mathbf{D}\mathfrak{Z}$ переносит все источники тока в ветви дерева. Умножение $\mathbf{R}_{д}\,\mathbf{D}\mathfrak{Z}$ эквивалентно преобразованию всех источников токов в ветвях дерева в источники ЭДС. Умножение на $\mathbf{F}$ определяет вклад этих эквивалентных ЭДС в контурные уравнения.

Таким образом, применение матрично-топологических методов для решения задач расчета нелинейных цепей постоянного тока позволяет формализовать составление уравнений цепи, сокращать число решаемых уравнений и в некоторых случаях обеспечивает формирование такой системы уравнений, которая гарантировала бы единственность решения. В сочетании с возможностями ЭВМ этот метод позволяет решать широкий класс задач нелинейных цепей.

20.9. Аналитическое исследование особых свойств нелинейных электрических цепей постоянного тока при малых отклонениях от заданного режима

Нелинейная зависимость между токами и напряжениями в нелинейных электрических цепях придает этим цепям ряд особых замечательных свойств, которые с успехом используются в различных устройствах, особенно в электроизмерительных и автоматических. Эти особые свойства проявляются в своеобразном поведении нелинейных цепей при отклонении токов и напряжений от их значений при заданном режиме. Некоторые из этих свойств были отмечены в § 20.2 при рассмотрении нелинейных элементов электрической цепи.

Так, например, можно осуществить устройства, в которых при отклонении в известных пределах напряжения u_1 на входных зажимах от номинального его значения напряжение u_2 на выходных зажимах остается неизменным или практически неизменным. Такое устройство служит стабилизатором напряжения. Примером является стабиловольт, описанный в § 19.5. Аналогично можно с помощью нелинейных элементов, например бареттера, добиться стабилизации тока.

С помощью мостовой электрической цепи с нелинейными элементами можно установить, что напряжение u_2 на выходных зажимах в диагонали моста будет равно нулю только при одном определенном заданном значении напряжения u_1 на входных зажимах в другой диагонали моста. При отклонении величины u_1 от этого значения появляется напряжение u_2, отличное от нуля. При этом увеличению u_1 соответствует напряжение u_2 одного знака, уменьшению u_1 — напряжение u_2 другого знака. Такое устройство может служить указателем (индикатором) отклонения напряжения u_1 от заданного его значения и может быть использовано для автоматического поддержания этого напряжения вблизи заданного значения.

Для аналитического исследования поведения нелинейной электрической цепи при небольших отклонениях от заданного режима нет необходимости располагать аналитическим выражением всей характеристики каждого нелинейного элемента, входящего в состав цепи. Достаточно выразить уравнением небольшую часть характеристики вблизи точки A, соответствующей заданному режиму. Обычно бывает достаточно заменить этот участок характеристики отрезком прямой, касательной к характеристике в точке A (рис. 20.38). Уравнение этой прямой имеет вид

$$u = u_0 + r_{д}\,i,$$

где u_0 определяется точкой пересечения прямой с осью ординат (рис. 20.38), а $r_д = k \operatorname{tg} \beta$ есть динамическое сопротивление нелинейного элемента в точке A характеристики, причем k — отношение масштаба напряжения к масштабу тока. Величина u_0 может быть как положительной (рис. 20.38), так и отрицательной (рис. 20.39). Величина $r_д$ также может быть положительной, если u растет при увеличении i, и отрицательной при падающей характеристике.

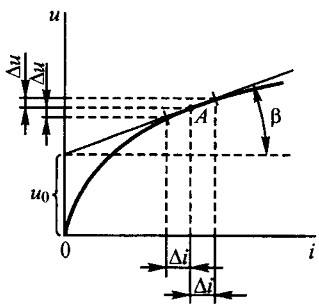

Рис. 20.38

Метод замены характеристики на некотором ее участке отрезком прямой называют **линеаризацией** задачи в соответствующих пределах. Воспользуемся этим методом для аналитического исследования работы стабиловольта вблизи некоторого заданного режима.

Схема стабиловольта показана на рис. 19.15. Обозначим сопротивление приемника N через r_2. Имеем систему уравнений

$$u_1 = ri_1 + u_2;\quad u_2 = r_2 i_2;\quad u_2 = u_0 + r_д i;\quad i_1 = i + i_2.$$

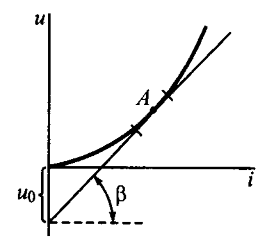

Рис. 20.39

Подставив в третье уравнение $i = i_1 - i_2$ из четвертого и заменив i_2 через u_2/r_2 из второго, выразим i_1 через u_2. Подставив это выражение для i_1 в первое уравнение, получаем связь между u_2 и u_1 в виде

$$u_2 = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} u_1 + \frac{rr_2}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} u_0.$$

Качество работы стабилизатора напряжения характеризуют так называемым коэффициентом стабилизации k, равным отношению относительного изменения $\Delta u_1/u_1$ первичного напряжения к относительному изменению $\Delta u_2/u_2$ вторичного напряжения, т. е. равным

$$k = \frac{\Delta u_1/u_1}{\Delta u_2/u_2} = \frac{u_2/u_1}{\Delta u_2/\Delta u_1}.$$

Из уравнения связи между u_2 и u_1 имеем

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д};$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} + \frac{rr_2}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д}\frac{u_0}{u_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}\left(1 + \frac{r}{r_д}\frac{u_0}{u_1}\right).$$

Следовательно, искомый коэффициент стабилизации имеет выражение

$$k = 1 + \frac{r}{r_д}\frac{u_0}{u_1}.$$

Желательно иметь k возможно большим, так как при этом большому относительному изменению первичного напряжения будет соответствовать малое относительное изменение вторичного напряжения. Из последнего выражения видно, что $k = \infty$ при $r_д = 0$, т. е. если точка A лежит на горизонтальном участке характеристики. В этом случае вторичное напряжение u_2 остается постоянным при изменении первичного u_1.

Полученное выражение позволяет вычислить коэффициент стабилизации для любой точки характеристики и любого значения u_1.

В действительности характеристика нелинейного элемента стабиловольта в используемой рабочей ее части имеет некоторый наклон к оси абсцисс, различный в разных точках. Пользуясь графическим методом, изложенным в § 20.2, можно найти для различных значений первичного напряжения u_1 и сопротивления r_2 нагрузки положение точки A на характеристике и соответствующие ей значения $r_д$ и u_0. Располагая этими значениями, нетрудно по последней формуле получить величину k. Таким путем можно найти зависимости $k = F(u_1)$ при различных r_2.

Подчеркнем, что стабилизация напряжения достигается только благодаря нелинейным свойствам цепи. Действительно, если заменить нелинейный элемент линейным с постоянным сопротивлением, то мы имели бы $u_0 = 0$ и $k = 1$, т. е. относительные изменения первичного и вторичного напряжений были бы равны друг другу и никакой стабилизации не было бы.

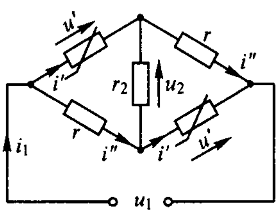

Рис. 20.40

В качестве другого примера исследуем симметричный мост с двумя одинаковыми нелинейными элементами в двух противоположных плечах (рис. 20.40) и двумя одинаковыми постоянными (линейными) сопротивлениями r в других плечах. Имеем уравнения

$$u_1 = u' + ri''; \quad u' = u_2 + ri'';$$

$$i' = i'' - i_2; \quad u' = u_0 + r_д i'; \quad u_2 = r_2 i_2.$$

Подставим i' из третьего уравнения в четвертое. Найденное выражение для u' подставим в первое и второе уравнения и выразим i_2 через u_2 согласно пятому уравнению. Получим два уравнения, содержащие u_1, u_2 и i'', исключая из которых i'', найдем связь между u_2 и u_1 в виде

$$u_2 = \frac{r_д - r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} u_1 + \frac{2r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} u_0.$$

При $r_д = r$ напряжение u_2 на выходе не зависит от u_1 на входе, т. е. мост работает как стабилизатор напряжения. Коэффициент стабилизации равен

$$k = \frac{u_2/u_1}{\Delta u_2/\Delta u_1} = 1 + \frac{2r}{r_д - r}\frac{u_2}{u_1}.$$

При $r_д = r$ имеем $k = \infty$, т. е. полную стабилизацию вторичного напряжения, которое при этом равно

$$u_2 = \frac{1}{1 + r/r_2} u_0.$$

Тот же мост можно использовать и как указатель отклонения Δu_1 первичного напряжения от некоторого заданного его значения u_1. С этой целью уравновесим мост при этом значении напряжения u_1 на его входе. Очевидно, равновесие, т. е. $u_2 = 0$, будет достигнуто, когда статическое сопротивление нелинейных элементов в плечах моста будет равно сопротивлению r в других линейных плечах, т. е. при $r_{ст} = r$.

Воспользовавшись уравнением, связывающим u_2 и u_1, и взяв приращения Δu_2 и Δu_1, найдем

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_д - r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} = \mu.$$

Величину μ называют коэффициентом усиления моста.

Мощность, передаваемая во вторичную цепь, равна

$$p_2 = \frac{(\Delta u_2)^2}{r_2} = (\Delta u_1)^2 \frac{(r_д - r)^2}{r_2\left(r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}\right)^2}.$$

Можно подобрать сопротивление r_2 вторичной цепи таким, чтобы мощность p_2 была наибольшей при заданных Δu_1, $r_д$ и r. Взяв производную от p_2 по r_2 и приравняв ее к нулю, получим

$$r_2 = \frac{2rr_д}{r + r_д} \quad \text{или} \quad r_2 = \frac{2r_{ст}r_д}{r_{ст} + r_д},$$

так как $r = r_{ст}$.

Коэффициент усиления в этом случае

$$\mu = \frac{r_д - r_{ст}}{2(r_{ст} + r_д)} = \frac{1}{2}\frac{r_д/r_{ст} - 1}{r_д/r_{ст} + 1}.$$

При любых $r_д > 0$ абсолютное значение μ не превышает 0,5. Тем не менее, такое устройство дает возможность наблюдать весьма малые относительные отклонения $\Delta u_1/u_1$ первичного напряжения от заданного его значения u_1, так как при заданном значении u_1 напряжение u_2 во вторичной цепи равно нулю, и, следовательно, для отсчета величины Δu_2 может быть взят прибор с весьма большой чувствительностью. Отклонения прибора во вторичной цепи можно использовать путем воздействия на соответствующие регулирующие устройства для автоматического поддержания заданного значения u_1 с очень большой точностью.

Из рассмотренных примеров видим, что метод линеаризации характеристики нелинейного элемента вблизи ее рабочей точки A может быть с успехом использован для аналитического исследования ряда важных свойств нелинейных электрических цепей.

Отметим, что, кроме рассмотренных особых свойств нелинейных электрических цепей, можно получить в этих цепях и другие весьма ценные свойства. Так, при наличии в цепи нелинейных элементов с падающей характеристикой возможны, как убедимся в последующем, неустойчивые режимы. При этом оказывается возможным осуществить устройства, в которых при плавном изменении напряжения u_1 на входных зажимах в момент достижения им некоторого заданного значения напряжение u_2 на выходных зажимах изменяется скачком. Это свойство может быть использовано в релейных устройствах.

20.10. Законы и параметры магнитных цепей

В электрических цепях нам удается создавать весьма протяженные направленные пути для электрического тока, что является результатом очень большого различия удельной проводимости $\gamma_{пр}$ проводников и удельной проводимости $\gamma_{из}$ окружающей их изолирующей среды. Так, для меди $\gamma_{пр} = 5{,}8 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, а для пропитанной кабельной бумаги $\gamma_{из} = 10^{-13}$ 1/Ом·м, т. е. при этом $\gamma_{пр}/\gamma_{из} = 5{,}8 \cdot 10^{20}$. Для магнитных цепей не имеем столь большого различия между абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{фер}$ ферромагнитных материалов участков магнитной цепи, которые должны образовывать путь для магнитных линий, и абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_в = \mu_0$ окружающей среды, обычно воздуха. Их отношение имеет порядок $\mu_{фер}/\mu_0 \approx 10^3 ... 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньше. Поэтому значительная часть потока ответвляется от основной магнитной цепи и проходит через воздух в виде так называемого потока рассеяния. Следовательно, даже при коротких магнитных цепях имеем *магнитные цепи с распределенными параметрами*. Кроме того, вдоль основной магнитной цепи часто располагают воздушные промежутки. Таковым, например, является воздушный промежуток между полюсами электромагнита (рис. 20.41). Магнитная проницаемость этих промежутков равна магнитной проницаемости окружающей магнитную цепь среды, вследствие чего здесь трудно говорить об определенном пути для магнитных линий.

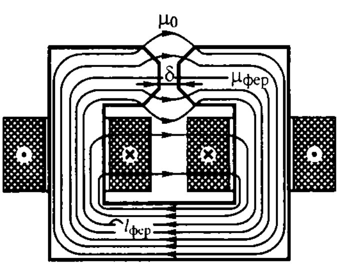

Рис. 20.41

Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля нелинейна и вследствие явления гистерезиса неоднозначна. Поэтому *магнитные цепи, как правило, являются нелинейными.*

Все сказанное весьма усложняет расчеты магнитных цепей даже при постоянном магнитном потоке, т. е. при постоянном токе в намагничивающих катушках. Строгий расчет здесь может быть выполнен только с привлечением методов теории электромагнитного поля. Однако приближенное решение можно и здесь получить, вводя понятие о магнитной цепи и, соответственно, используя теорию, основанную на этом понятии, т. е. теорию магнитных цепей.

Пренебрегая потоками рассеяния, получаем магнитную цепь с сосредоточенными параметрами. Если магнитная цепь не имеет разветвлений (рис. 20.41), то магнитный поток Ф при таком допущении оказывается одинаковым во всех сечениях цепи.

Отношение магнитодвижущей силы (МДС) вдоль всей цепи, равной интегралу напряженности магнитного поля вдоль всей цепи $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = iw$, к магнитному потоку Ф называют **магнитным сопротивлением** такой цепи:

$$R_{\text{м}} = \frac{iw}{\Phi}.$$

Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется **магнитной проводимостью** магнитной цепи:

$$\Lambda = \frac{1}{R_{\text{м}}} = \frac{\Phi}{iw}.$$

Величины $R_{\text{м}}$ и Λ являются основными параметрами магнитной цепи.

Соотношение

$$\Phi = \frac{iw}{R_{\text{м}}}$$

называют **законом магнитной цепи**. Оно по форме аналогично закону Ома для замкнутой электрической цепи при постоянном токе:

$$i = \frac{e}{r},$$

где e — ЭДС, действующая в электрической цепи; i — ток в ней и r — ее электрическое сопротивление.

Всю МДС вдоль замкнутой магнитной цепи можно представить в виде суммы МДС на отдельных разнородных участках магнитной цепи, так как интеграл $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ вдоль замкнутого пути может быть представлен в виде суммы интегралов вдоль отдельных участков этого пути. Для электромагнита (см. рис. 20.41) такими участками являются ферромагнитный сердечник со средней длиной $l_{\text{фер}}$ и воздушный промежуток длиной δ. Имеем

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_{l_{\text{фер}}} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{\delta} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = F_1 + F_2.$$

Соответственно, получаем

$$R_{\text{м}} = \frac{\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}}{\Phi} = \frac{F_1}{\Phi} + \frac{F_2}{\Phi} = R_{\text{м1}} + R_{\text{м2}},$$

где $R_{\text{м1}}$ — магнитное сопротивление сердечника; $R_{\text{м2}}$ — магнитное сопротивление воздушного промежутка. Если сечение s какого-либо участка постоянно и напряженность магнитного поля, магнитную индукцию и, соответственно, магнитную проницаемость μ в разных точках сечений участка можно приближенно считать одинаковыми, то имеют место приближенные выражения

$$\Phi = \int\limits_{s} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} \approx Bs = \mu Hs \quad \text{и} \quad \int\limits_{l} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} \approx H_{\text{ср}} l_{\text{ср}},$$

где $l_{\text{ср}}$ —средняя длина вдоль участка.

Например, принимая такие допущения для сердечника электромагнита (см. рис. 20.41), получим

$$R_{\text{м}1} \approx \frac{Hl_{\text{фер}}}{\mu Hs} = \frac{l_{\text{фер}}}{\mu s}.$$

Вычисление по аналогичной формуле магнитного сопротивления $R_{\text{м}2}$ воздушного зазора между полюсами электромагнита было бы слишком грубым. Здесь для вычисления $R_{\text{м}2}$ надо рассчитать картину поля.

Итак, для замкнутого контура магнитной цепи имеем

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = iw = F_1 + F_2 = R_{\text{м}1}\Phi + R_{\text{м}2}\Phi = \sum_{k=1}^{2} R_{\text{м}k}\Phi.$$

В рассмотренном примере одноконтурной магнитной цепи поток Ф во всех участках цепи один и тот же.

В разветвленной (многоконтурной) магнитной цепи магнитный поток разветвляется в узлах цепи.

Для каждого узла на основании принципа непрерывности магнитного потока можно написать

$$\oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k = 0, \qquad (*)$$

т. е. *сумма магнитных потоков, отходящих по всем ветвям магнитной цепи от узла цепи, равна нулю.* Это соотношение аналогично уравнению для узла электрической цепи, написанному согласно первому закону Кирхгофа:

$$\sum i_k = 0.$$

Для любого контура разветвленной магнитной цепи в соответствии со сказанным выше можем написать уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} i_k w_k = \sum_{k=1}^{n} R_{\text{м}k}\Phi_k, \qquad (**)$$

т. е. *МДС вдоль замкнутого контура магнитной цепи равна сумме произведений магнитного сопротивления на магнитный поток во всех участках (ветвях) цепи, входящих в этот контур.* Это уравнение аналогично уравнению для контура электрической цепи

$$\sum e_k = \sum r_k i_k,$$

составленному на основании второго закона Кирхгофа при постоянном токе.

Уравнений типа (*) должно быть $q - 1$, если q — число узлов магнитной цепи. Уравнений типа (**) должно быть $n = p - q + 1$, где p — число ветвей магнитной цепи.

Таким образом, расчет магнитных цепей, если можно пренебречь потоками рассеяния, аналогичен расчету нелинейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, причем МДС iw соответствует ЭДС e, потоку Ф соответствует ток i и магнитному сопротивлению $R_\text{м}$ соответствует электрическое сопротивление r.

Однако такой приближенный расчет возможен только для сравнительно простых магнитных цепей, так как для сложных магнитных цепей уже нельзя пренебрегать потоками рассеяния. Наличие потоков рассеяния в сложных магнитных цепях чрезвычайно усложняет расчеты. Такие расчеты можно проводить *методом последовательного приближения*. Сначала находим распределение МДС по участкам, пренебрегая потоками рассеяния. Затем на основе этого распределения, пользуясь методами расчета поля, находим потоки рассеяния и уточняем потоки в участках магнитной цепи. Это дает возможность уточнить распределение МДС и, соответственно, значения потоков рассеяния и т. д.

Приведенная аналогия магнитных и электрических цепей формальна. По своему физическому содержанию закон магнитной цепи и закон Ома для электрической цепи существенно различаются между собой. Существование постоянной ЭДС возможно без возникновения под ее действием электрического тока в электрической цепи, если цепь из проводников разомкнута и сопротивление всей цепи бесконечно велико. Напротив, существование магнитодвижущей силы всегда связано с одновременным существованием магнитного потока.

20.11. Расчет магнитной цепи с последовательным соединением участков

Магнитные цепи в практических устройствах обычно содержат участки из ферромагнитных материалов, магнитная проницаемость которых зависит от напряженности магнитного поля, т. е. обычно мы имеем дело с нелинейными магнитными цепями.

Если в первом приближении можно не учитывать так называемые магнитные потоки рассеяния, ответвляющиеся в воздух от главной магнитной цепи, то, как было сказано в предыдущем параграфе, расчет сложной магнитной цепи оказывается аналогичным расчету соответствующей сложной нелинейной электрической цепи.

В простейшем случае последовательного соединения всех участков магнитной цепи полная магнитодвижущая сила $F = wi$, определяемая током i в обмотке, имеющей w витков, равна сумме магнитодвижущих сил на отдельных участках, т. е.

$$F = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = wi = \sum F_k.$$

Если можно пренебречь потоками рассеяния, то потоки Φ во всех последовательно соединенных участках, во всех сечениях s_k данного участка будут одинаковы. Применяя закон магнитной цепи для всей магнитной цепи и для ее участков, будем иметь

$$F = \Phi R_м; \quad F_k = \Phi R_{мk},$$

где $R_м$ — магнитное сопротивление всей магнитной цепи; $R_{мk}$ — магнитное сопротивление ее k-го участка. Подставляя эти выражения в равенство $F = \Sigma F_k$ и сокращая на Φ, получаем

$$R_м = \sum R_{мk},$$

т. е. *при последовательном соединении общее магнитное сопротивление вычисляется как сумма магнитных сопротивлений всех участков.*

Пусть в частном случае сечение s_k участка постоянно вдоль него, и можно, пренебрегая потоками рассеяния, считать, что поток распределен равномерно по сечению. В этом частном случае и при таких допущениях магнитная индукция будет одинакова во всех точках данного участка. Соответственно одинакова во всех точках будет и магнитная проницаемость, если весь участок состоит из однородного материала. В таком случае можно написать

$$R_{\text{м}k} = \frac{l_k}{s_k \mu_k},$$

где l_k — длина и μ_k — абсолютная магнитная проницаемость k-го участка, и, соответственно,

$$R_{\text{м}} = \sum \frac{l_k}{s_k \mu_k}.$$

На рис. 20.42 схематически изображена магнитная цепь двухполюсной электрической машины. Хотя поток в ярме и разветвляется на две части, такую цепь можно рассматривать как неразветвленную, удвоив сечение ярма. Так можно поступить ввиду того, что обе части ярма имеют равные магнитные сопротивления. Конечно, цепь можно рассматривать как неразветвленную, только пренебрегая потоками рассеяния. Практически расчет ведут по следующей схеме. Большей частью заданным является магнитный поток Ф, который должен быть образован в рассчитываемой магнитной цепи, например в воздушном зазоре машины. На основе общих данных выполняют эскиз магнитной цепи проектируемого устройства и выбирают материал для каждого участка цепи. Задают среднее значение магнитной индукции в каждом участке цепи. Это среднее значение индукции выбирают в зависимости от рода материала участка и от назначения данного участка цепи в общем устройстве. После этого определяют сечение s каждого участка как отношение потока к индукции.

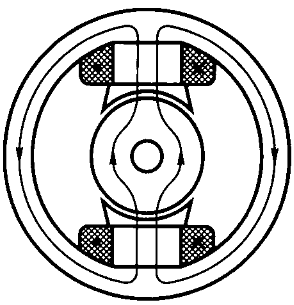
Рис. 20.42

Далее, поскольку выбраны значения индукции и материал, можно по кривым намагничивания найти для каждого участка значение напряженности поля H. Но напряженность поля численно равна МДС, приходящейся на единицу длины. Поэтому МДС, необходимая для проведения потока через данный участок цепи, равна произведению H_k l_k. В случае последовательного соединения всех участков цепи полная искомая МДС, необходимая для образования заданного потока, равна сумме МДС на отдельных участках, т. е.

$$wi = \sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots$$

В случае если при заданной конструкции магнитной цепи заданной является МДС wi, а не поток Ф, следует пользоваться для расчета общим методом, изложенным в следующем параграфе.

При более точном подсчете должны быть учтены и потоки рассеяния. Вследствие наличия потоков рассеяния магнитный поток может быть различным в отдельных следующих друг за другом участках магнитной цепи, а также в различных сечениях одного и того же участка. Необходимо учесть также и то, что поток распределяется в отдельных местах неравномерно по сечению. Так, например, около краев полюсов машины (см. рис. 20.42) происходит сгущение линий магнитной индукции и магнитная индукция в полюсных наконечниках в этих местах принимает очень большие значения. Соответственно, эти места полюсных наконечников сильно насыщены и магнитная проницаемость их сравнительно невелика. Последнее обстоятельство учитывают соответствующими опытными коэффициентами.

Мы видим, что точный расчет даже сравнительно простой магнитной цепи оказывается весьма сложным.

20.12. Расчет разветвленных магнитных цепей

Если пренебречь потоками рассеяния, то, как было сказано в § 20.10, расчет разветвленной магнитной цепи аналогичен расчету соответствующей электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Так как магнитные цепи являются нелинейными, то метод их расчета при этих условиях аналогичен методам расчета нелинейных электрических цепей, изложенным в §§ 20.2, 20.3. Пусть имеется разветвленная магнитная цепь, изображенная на рис. 20.43, *а*. При расчете необходимо использовать кривую намагничивания материала $B = f(H)$, дающую зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля (рис. 20.43, *б*).

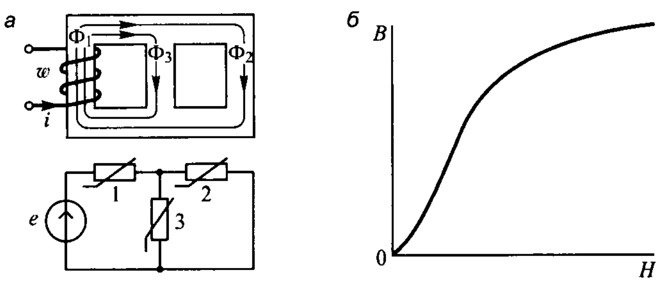

Рис. 20.43

Пользуясь кривой намагничивания, строим кривые $\Phi = f(F)$ для каждого участка в отдельности (кривые *1*, *2* и *3* на рис. 20.44). Для построения этих кривых необходимо умножить ординаты кривой намагничивания, изображенной на рис. 20.43, *б*, на сечения участков и абсциссы — на длины участков. Например, кривая *1*, дающая зависимость $\Phi_1 = f(F_1)$, получается умножением ординат кривой на рис. 20.43, *б* на s_1 и абсцисс — на l_1. Так как

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{и} \quad F_2 = F_3 = F_{23},$$

то, складывая ординаты кривых *2* и *3* на рис. 20.44, определяющих зависимости $\Phi_2 = f(F_2)$ и $\Phi_3 = f(F_3)$, получим кривую *4*, дающую зависимость $\Phi_1 = f(F_{23})$. Например, точка d кривой *4* определяется суммой $ad = ab + ac$.

Полная МДС iw равна сумме МДС F_1 и F_{23}, необходимых для проведения потока Φ_1 через первый участок и через параллельно соединенные второй и третий участки:

$$iw = F_1 + F_{23}.$$

Поэтому, складывая абсциссы кривых *1* и *4*, определяющих зависимости $\Phi_1 = f(F_1)$ и $\Phi_1 = f(F_{23})$, получаем кривую *5*, дающую связь $\Phi_1 = f(iw)$. Например, точка k кривой *5* определяется суммой $ek = ed + eg$.

Легко усмотреть, что метод расчета этой разветвленной магнитной цепи аналогичен методу расчета показанной на рис. 20.43 соответствующей электрической цепи с нелинейными элементами, изложенному в § 20.2.

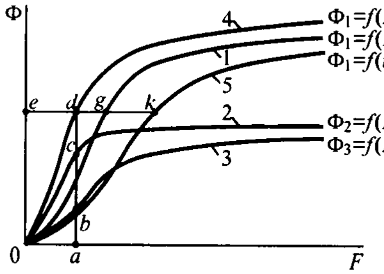

Рис. 20.44

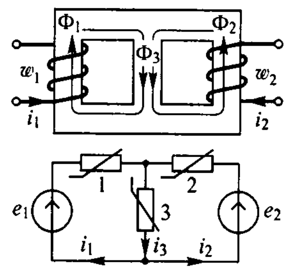

Рис. 20.45

Аналогия с электрическими цепями может быть с успехом использована и для расчета более сложных магнитных цепей, в которых имеются катушки с токами в различных ветвях магнитной цепи. Например, расчет магнитной цепи, приведенной на рис. 20.45, аналогичен расчету электрической цепи, показанной на этом же рисунке. При этом необходимо воспользоваться методом, изложенным для электрической цепи в § 20.3. При такой аналогии ЭДС заменяются МДС, электрические сопротивления — магнитными сопротивлениями и электрические токи — магнитными потоками.

На рис. 20.43 приведена кривая намагничивания без учета гистерезиса. При учете гистерезиса задача становится, строго говоря, неопределенной, и результат будет зависеть от наличия остаточной индукции до включения токов, а также от порядка включения токов в отдельных обмотках. Эти осложнения скажутся незначительно при большом насыщении ветвей магнитной цепи, так как при этом восходящие и нисходящие ветви петли гистерезиса близко сходятся. Однако при большом насыщении необходимо учитывать наличие потоков рассеяния. В этом случае, как было отмечено в § 20.10, следует пользоваться методом последовательных приближений.

Производим первый расчет, пренебрегая потоками рассеяния. Зная из этого расчета распределение МДС вдоль участков магнитной цепи, можно определить приближенно потоки рассеяния, используя картины магнитного поля в пространстве, окружающем магнитную цепь. Учитывая потоки рассеяния, вносим поправки в значения магнитных потоков в различных сечениях каждого участка магнитной цепи. После этого требуется внести коррективы в значения потоков и МДС, чтобы удовлетворялись законы магнитной цепи. Новому распределению МДС будут соответствовать новая картина и новые значения потоков рассеяния. Продолжая действовать таким путем, можно приблизиться к истинной картине распределения потоков и МДС.

20.13. О расчете постоянных магнитов

Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных веществ, широко используется при изготовлении постоянных магнитов.

Рассмотрим постоянный магнит в виде кольца с воздушным зазором. Будем обозначать все величины, относящиеся к зазору, индексом 2, и величины, относящиеся к телу магнита, — индексом 1 (рис. 20.46). Физически поле магнита создается элементарными токами в теле магнита. Однако напряженность поля H, с которой имеем дело во всех технических расчетах, определяется так, что интеграл $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ равен только макроскопическим токам, протекающим в проводниках, охватываемых контуром интегрирования, и в его величину не входят элементарные токи в намагниченных телах. Для постоянного магнита, так как макроскопических токов нет, имеем всюду $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = 0$. В частности, этот интеграл также равен нулю вдоль пути по оси магнита и зазора. Следовательно,

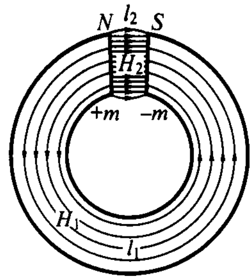

Рис. 20.46

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

т. е.

$$H_1 l_1 = -H_2 l_2,$$

где l_1и l_2 — длины осей магнита и зазора; H_1 и H_2 — напряженности поля в теле магнита и в зазоре. Для упрощения предполагаем поле однородным и в магните, и в зазоре. Заметим, что в последних равенствах и дальше в настоящем параграфе под H подразумеваем не модуль вектора $\boldsymbol{H}$, который всегда положителен, а алгебраическую величину, которая может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, совпадает направление вектора $\boldsymbol{H}$ с направлением положительного обхода или ему противоположно.

В общем случае для неоднородного поля следует написать $F_1 = -F_2$, где F_1 и F_2 — магнитодвижущие силы вдоль оси магнита и вдоль оси зазора.

На рис. 20.47 изображена часть гистерезисной петли, снятой при большом магнитном насыщении для замкнутого кольца, т. е. при отсутствии зазора, и характеризующей материал магнита; B_r — остаточная индукция, H_c — коэрцитивная сила. Ветвь abc называется кривой размагничивания. Эта ветвь на рис. 20.48 перестроена в координатах F и Φ, причем F — МДС вдоль оси магнита, при однородном намагничивании равная $H_1 l_1$, и Φ — поток в нейтральной зоне магнита, при однородном намагничивании равный $B_1 s_1$, где s_1 — поперечное сечение магнита.

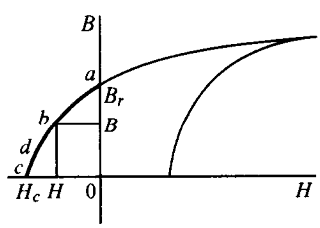

Рис. 20.47

При отсутствии зазора $B = B_r$, $\Phi = \Phi_r$ и H всюду равно нулю. При наличии зазора на проведение магнитного потока через зазор, имеющий магнитное сопротивление $R_{м2}$, требуется МДС $F_2 = R_{м2}\Phi_2$.

Если считать приближенно поле в зазоре однородным, то

$$F_2 = H_2 l_2 = \frac{l_2}{\mu_0 s_2}\Phi.$$

На рис. 20.48 прямая $0L$ изображает связь между F_2 и Ф. Так как $F_1 = -F_2$, то прямая $0M$, дающая связь между F_1 и Ф, является зеркальным отражением прямой $0L$ в оси ординат. Очевидно, точка b пересечения луча $0M$ с кривой размагничивания abc и определяет магнитное состояние вещества магнита при наличии воздушного зазора.

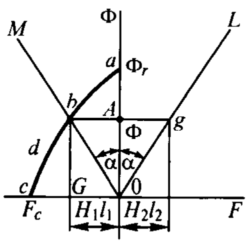

Рис. 20.48

Энергия магнитного поля в зазоре магнита определяется выражением $\Phi F_2/2$, которое при однородном поле приобретает вид

$$\frac{B_2 s_2 H_2 l_2}{2} = \frac{B_2 H_2}{2} V_2,$$

где V_2 — объем зазора. Эта энергия равна половине площади прямоугольника $AbG0$ на рис. 20.48. Необходимо так проектировать магнит, чтобы эта площадь была максимальной. Соответственно, точка b должна занимать на кривой размагничивания в координатах H и B (рис. 20.47) такое положение, чтобы произведение $|BH|$ получилось наибольшим.

Трудность расчета реальных магнитов заключается в трудности вычисления магнитного сопротивления $R_{м2}$ пути потока по воздуху с учетом неоднородности поля, в трудности учета потока рассеяния, выходящего через боковые поверхности магнита, и в трудности определения магнитного состояния магнита при неоднородном намагничивании.

20.14. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами

Если в воздушный зазор магнита внести тело из так называемого магнитомягкого вещества, т. е. из ферромагнитного вещества, которое легко намагничивается в сравнительно слабых полях, то можно пренебречь магнитным сопротивлением тела и утверждать, что внесение такого тела эквивалентно уменьшению зазора и уменьшению магнитного сопротивления зазора. Соответственно вместо прямой $0M$ будем иметь прямую $0M'$ (рис. 20.49). Однако магнитное состояние магнита не переходит в точку b' по кривой размагничивания, а переходит в точку k по кривой bmk, и магнитный поток увеличивается до значения Φ_k. Если вновь удалить тело из воздушного зазора, то магнитное состояние вернется в точку b по кривой knb. Петля $bmknb$ носит наименование *частной петли гистерезиса*.

Такого рода явления происходят в электрических генераторах с постоянными магнитами, например в магнето (рис. 20.50). Полюсные наконечники и якорь магнето имеют малое магнитное сопротивление. Магнитное же сопротивление зазора меняется в зависимости от положения якоря. В положении, изображенном на рисунке, оно имеет наименьшее значение. При повороте якоря на угол $\pi/2$ оно имеет наибольшее значение. Магнитный поток в магнитной цепи магнита при вращении якоря периодически изменяется в пределах от Φ_k до Φ_b (рис. 20.49). Поток же, пронизывающий обмотку якоря, изменяется по отношению к этой обмотке от $+\Phi_k$

до $-\Phi_k$ при повороте якоря и обмотки на угол π из положения, указанного на рисунке. Соответственно, среднее значение ЭДС, индуцируемой в обмотке за половину оборота якоря в этих пределах, получается равным

$$e = \frac{2\Phi_k}{T/2},$$

где T — время полного оборота якоря.

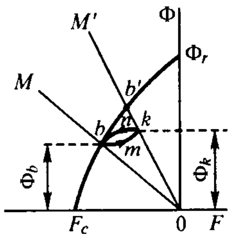

Рис. 20.49

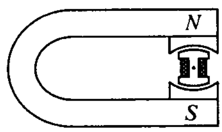

Рис. 20.50

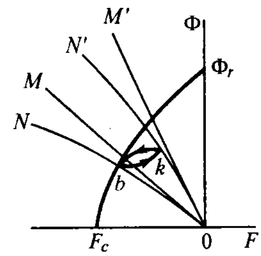

Рис. 20.51

Если учесть конечное магнитное сопротивление полюсных наконечников и якоря, то вместо прямых $0M$ и $0M'$ будем иметь кривые $0N$ и $0N'$ (рис. 20.51). Отрезки, параллельные оси $0F$, между кривыми $0N$ и $0M$ и между кривыми $0N'$ и $0M'$ представляют собой в масштабе по оси абсцисс значения магнитодвижущей силы вдоль полюсных наконечников и якоря при соответствующих значениях магнитного потока. Их можно получить из кривых намагничивания материала полюсных наконечников и якоря. Вершины b и k частной петли гистерезиса лежат при этом на кривых $0N$ и $0N'$.

Глава двадцать первая

Нелинейные электрические и магнитные цепи при периодических процессах

21.1. Особенности периодических процессов в электрических цепях с инерционными нелинейными элементами

При наличии нелинейных элементов в электрической цепи при периодических процессах возникает ряд явлений, с которыми мы не встречались, рассматривая линейные электрические цепи. Соответственно, и методы анализа этих явлений и расчета имеют здесь свои особенности. Несколько иной характер имеют периодические процессы в цепях с инерционными и безынерционными нелинейными элементами.

Большинство нелинейных элементов, используемых на практике, должны рассматриваться как безынерционные, и это весьма усложняет процессы и расчеты. Изучению цепей с такими элементами будет посвящена почти вся настоящая глава. Процессы в инерционных элементах проще в том отношении, что их параметры не изменяются в течение периода изменения тока. Поэтому рассмотрим сначала цепи с инерционными элементами, посвятив этому настоящий и следующий параграфы.

Пусть все нелинейные элементы, входящие в цепь, являются инерционными. Это значит, что при установившемся режиме параметры всех элементов цепи остаются неизменными в течение периода изменения токов и напряжений. Следовательно, при заданном неизменном установившемся процессе для описания его можем воспользоваться теми же способами, которые были развиты для описания процессов в линейных цепях. При синусоидальном приложенном к цепи напряжении токи и напряжения во всех ветвях будут также синусоидальны, и для описания процесса можно с полной строгостью воспользоваться комплексной формой записи и векторными диаграммами. При периодическом несинусоидальном процессе, разложив приложенное напряжение в ряд Фурье, будем, как и в линейных цепях, иметь одинаковые значения параметров r, L, C цепи для всех гармоник, если считать, как это мы принимали и ранее, что эти параметры не изменяются с частотой.

Однако при изменении установившегося режима, например, вследствие изменения действующего напряжения на зажимах сети или даже при сохранении этого действующего напряжения, но при изменении спектра амплитуд его гармоник изменяются действующие напряжения и токи в ветвях цепи, и в том числе в ветвях с нелинейными элементами. Так как в последних зависимость $U = F(I)$ нелинейна, то изменяются их параметры $r_э = U_r/I$, $\omega L_э = U_L/I$ и $1/(\omega C_э) = U_C/I$ и, следовательно, изменяется распределение токов во всей электрической цепи.

Таким образом, исключена возможность пользоваться для расчета такой цепи методом наложения и всеми методами расчета сложных цепей, основанными на принципе наложения. Остаются в силе законы Кирхгофа, которые при синусоидальном напряжении могут быть записаны в комплексной форме. Но в этих уравнениях комплексные сопротивления нелинейных инерционных элементов, т. е. модули и аргументы этих сопротивлений, будут функциями действующих токов в этих элементах. Следовательно, алгебраические уравнения, записанные в комплексной форме согласно законам Кирхгофа, являются теперь нелинейными. Трудность решения их заключается в том, что в общем случае от действующего тока в нелинейном элементе могут зависеть и модуль, и аргумент комплексного сопротивления элемента. Но даже если изменяется только модуль этого сопротивления, расчет остается сложным, так как это изменение ведет к перераспределению амплитуд и изменению фаз токов во всех ветвях цепи.

Можно рекомендовать при синусоидальном приложенном напряжении следующий метод последовательных приближений. Задаемся некоторыми вероятными значениями комплексных сопротивлений $Z_s = z_s e^{j\varphi_s}$ нелинейных элементов и, считая их постоянными, производим расчет цепей. Определив действующие токи в нелинейных элементах, проверяем соответствие заданных параметров элементов значениям этих параметров, полученных из действительных характеристик нелинейных элементов при найденных значениях токов. При несовпадении значений параметров вносим поправки в них и производим повторный расчет. Этот расчет следует выполнять до тех пор, пока принятые для расчета значения параметров не будут достаточно близки к их значениям, полученным из характеристик.

Инерционными элементами с сопротивлениями, как было указано в § 19.4, являются, например, такие, которые обладают большой тепловой инерцией (например, лампы накаливания). Примером инерционного индуктивного элемента может служить электромеханический элемент, который рассмотрим в следующем параграфе.

Синусоидальные установившиеся режимы в сложных электроэнергетических системах в некоторых случаях также могут быть описаны системами нелинейных алгебраических уравнений. Такая возможность возникает, когда оказываются заданными не ЭДС и параметры линий и нагрузок, а значения потребляемых и генерируемых мощностей. При условии задания потребляемой мощности ток и напряжение оказываются взаимосвязанными через нелинейное сопротивление (или проводимость). Действительно, если

$$p = ui = \text{const} \quad \text{и} \quad \overset{*}{S} = \dot{I}\overset{*}{U} = \text{const},$$

то $i = \dfrac{p}{u} = f(u)$ или $\dot{I} = \dfrac{\overset{*}{S}}{\overset{*}{U}} = f(\overset{*}{U})$.

В сложных электроэнергетических системах с точки зрения эксплуатационных характеристик и из-за особенностей соединений генераторов и потребителей наиболее целесообразно в качестве искомых величин выбирать напряжения в узлах системы. С учетом этого для расчета таких систем наиболее распространен метод узловых напряжений. Относительно узловых напряжений можно записать

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Y}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t(\mathbf{1}\overset{*}{\mathbf{U}})^{-1}\overset{*}{\mathbf{S}}.$$

Здесь $\mathbf{Y}$ — матрица комплексных узловых проводимостей; $\mathbf{A}$ — матрица соединений; $\dot{\mathbf{U}}$ — матрица-столбец узловых комплексных напряжений; $\overset{*}{\mathbf{S}}$ — матрица-столбец заданных комплексных мощностей источников и приемников. Это матричное уравнение по указанным выше причинам представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно комплексных узловых напряжений. Разделив вещественные и мнимые составляющие, можно записать

$$\mathbf{A}^t\mathbf{YA}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t(\mathbf{1}\overset{*}{\mathbf{U}})^{-1}\overset{*}{\mathbf{S}} = \Phi_1(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2) + j\Phi_2(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2) = 0$$

или

$$\Phi_1(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \Phi_2(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2) = \mathbf{0}.$$

Последняя система уравнений, написанная для вещественных матриц $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$, может быть решена изложенными во второй главе методами простых итераций или Ньютона. Разумеется, методы расчета сложных электрических систем не ограничиваются приведенными выше. В зависимости от поставленной задачи и характера заданных исходных данных могут быть сформированы различные системы уравнений. Однако для всех этих подходов остается общим то, что в конечном итоге формируется система нелинейных алгебраических уравнений. Приведенные в качестве примера методы решения таких систем уравнений (метод простой итерации и метод Ньютона) являются основой для разработки других, более эффективных методов расчета сложных нелинейных цепей переменного тока в установившихся режимах.

21.2. Процессы в цепи с индуктивным инерционным электромеханическим элементом

Рассмотрим электромагнит, питаемый синусоидальным действующим током I; между его полюсами может вдоль направляющих вертикально перемещаться массивный ферромагнитный якорь (рис. 21.1). Положение якоря определим координатой x, отсчитываемой от некоторого начального положения (от упора якоря). К якорю приложены сила тяжести G, направленная вниз, и электромагнитная сила F, втягивающая якорь в пространство между полюсами электромагнита и направленная вверх.

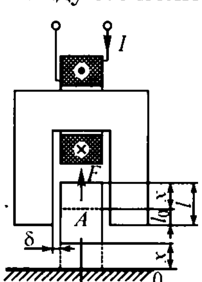

Рис. 21.1

Мгновенная электромагнитная сила f, согласно изложенному в § 2.4, т. I, имеет выражение

$$f = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Если осуществить зависимость $L(x)$ в виде $L = ax + L_0$, то $\partial L/\partial x = a = \text{const}$. При достаточно массивном якоре вследствие инерции положение его остается практически неизменным в течение периода изменения тока. Поэтому среднее за период значение электромагнитной силы F равно

$$F = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt = \frac{a}{2}\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = \frac{a}{2}I^2.$$

Эта сила уравновешивается силой тяжести G, и, следовательно,

$$G = \frac{a}{2}I^2.$$

Так как $G = \text{const}$, то и $I = \text{const} = I_0$, т. е. такое устройство осуществляет *стабилизацию действующего тока.*

Зависимость $L = ax + L_0$ имела бы место, если бы зазор δ между якорем и полюсами оставался неизменным, все линии магнитного потока проходили через зазор и можно было бы пренебречь магнитными сопротивлениями якоря и сердечника. При этом

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2\Phi}{iw} = \frac{w^2}{R_м} = \frac{w^2}{2\delta/(\mu_0 s)},$$

где сечение, сквозь которое проходит магнитный поток в зазоре, $s = bl = b(x + l_0)$. Таким образом, $L = \dfrac{w^2\mu_0 b}{2\delta}(x + l_0) = ax + L_0$. При этих идеальных условиях индуктивность остается постоянной, равной L_0, до тех пор, пока якорь лежит на упоре, т. е. пока $I < I_0$ и $F < G$. При этом с увеличением напряжения U_L на катушке ток растет пропорционально ему: $U_L = I\omega L_0$, что соответствует начальной прямолинейной ветви $0c$ характеристики катушки (рис. 21.2). Как только ток достигнет значения I_0, будет иметь место равенство $F = G$ и якорь окажется во взвешенном состоянии. Если увеличить напряжение выше значения U_{L_0}, то при том же нижнем положении якоря на упоре увеличится ток выше значения I_0, сила F будет больше G и якорь поднимется. Он будет подниматься до тех пор, пока вследствие возрастания индуктивности L ток не упадет вновь до значения I_0, при котором будет иметь место равенство $F = G$. Каждому значению напряжения U_L соответствует свое значение индуктивности L, т. е. определенное положение якоря. Таким образом, характеристика катушки $U_L(I)$, испытав излом в точке c, дальше идет в виде вертикальной прямой, и в пределах этой прямой данное устройство работает как *стабилизатор тока.* Если этот нелинейный элемент включить последовательно с приемником, имеющим сопротивление $Z_{пр}$ (рис. 21.3), то в известных пределах изменения приложенного напряжения U на зажимах цепи ток в приемнике окажется неизменным. Реальная характеристика несколько отличается от идеальной и представлена на рис. 21.4.

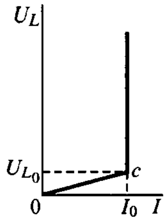

Рис. 21.2

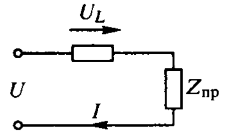

Рис. 21.3

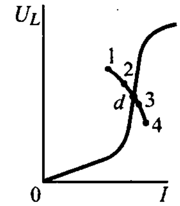

Рис. 21.4

В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе расчет режима в цепи при заданном напряжении $\dot{U}$ ведем методом последовательных приближений. Задаемся некоторым значением L_1 индуктивности L нелинейного элемента и вычисляем ток, который был бы в цепи при этом значении L_1:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j\omega L_1 + Z_{\text{пр}}}.$$

При этом действующее напряжение на катушке было бы равно $U_{L_1} = I_1\omega L_1$. Этим значениям U_{L_1} и I_1 соответствует точка *1* на рис. 21.4. Если эта точка не легла на характеристику катушки, то индуктивность L_1 была выбрана неправильно. Задаваясь рядом значений индуктивности L, получим точки *2*, *3*, *4*. Проводя через эти точки кривую, получим на пересечении ее с характеристикой катушки точку d, определяющую искомый режим.

21.3. Особенности периодических процессов в цепях с безынерционными нелинейными элементами. Метод эквивалентных синусоид

Если хотя бы один нелинейный элемент в цепи является безынерционным, то периодические токи и напряжения в цепи будут содержать высшие гармоники, даже если приложенное к зажимам цепи напряжение синусоидальное. Пусть характеристика нелинейного элемента, изображенная на рис. 21.5, *а*, выражается уравнением $i = au^3$. При синусоидальном изменении напряжения ток будет

$$i = aU_m^3\sin^3\omega t = \frac{3}{4}aU_m^3\sin\omega t - \frac{1}{4}aU_m^3\sin 3\omega t,$$

т. е. он содержит третью гармонику.

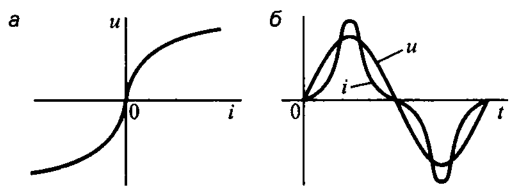

Рис. 21.5

На рис. 21.5, *б* изображены во времени кривые тока и напряжения. Кривую тока $i(t)$ можно было бы построить графически по точкам, пользуясь характеристикой $u(i)$. Уже из этого примера видно, что ток и напряжение на безынерционном элементе не могут быть одновременно синусоидальными. Для сложной цепи расчет является весьма сложным, так как использование комплексной формы записи и векторных диаграмм оказывается невозможным, и расчет необходимо вести для мгновенных величин, причем из-за нелинейности цепи неприменим и метод наложения.

В тех случаях, когда вопрос о форме кривых токов и напряжений нас непосредственно не интересует, можно воспользоваться приближенным методом, основанным на замене действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения эквивалентными им синусоидами. Соответственно, такой метод можно назвать методом эквивалентных синусоид.

Смысл ведения этого метода заключается в возможности записи уравнений в комплексной форме, а также в построении векторных диаграмм, хотя комплексные сопротивления остаются зависящими от тока, а следовательно, алгебраические уравнения, записанные в комплексной форме, остаются нелинейными.

Выбор эквивалентных синусоид тока и напряжения, т. е. их амплитуд и начальных фаз, может быть осуществлен тем или иным способом в зависимости от поставленной задачи. Интересуясь энергетической стороной процесса, этот выбор целесообразно осуществить так, чтобы активная мощность в цепи или в той или иной части цепи оставалась без изменения. Например, если мы желаем, чтобы активная мощность на нелинейном элементе, характеристика которого приведена на рис. 21.5, *а*, при синусоидальном напряжении на этом элементе осталась неизменной после замены несинусоидальной кривой тока эквивалентной ей синусоидой, то в этих условиях эквивалентной синусоидой должна быть первая гармоника тока, так как при этом имеем (см. § 8.4, т. I)

$$P = I_1 U_1 \cos\varphi_1 + I_2 U_2 \cos\varphi_2 + I_3 U_3 \cos\varphi_3 + \ldots = U_1 I_1 = U I_1.$$

Действительно, в данном случае $U_2 = U_3 = \ldots = 0$, $U_1 = U$ и $\cos\varphi_1 = 1$.

Иногда может оказаться целесообразным выбор эквивалентной синусоиды тока или напряжения так, чтобы сохранялось их действующее значение. Например, это целесообразно, когда последовательно включены линейный резистор r с нелинейной индуктивной катушкой без потерь. В таком случае несинусоидальный ток $i(t)$ в катушке имеет смысл заменить синусоидой, эквивалентной ему по действующему значению, т. е. выбрать амплитуду эквивалентной синусоиды равной

$$I_{mэ} = \sqrt{2}\, I = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}.$$

Действительно, в этом случае активная мощность в линейном резисторе r, равная $I^2 r$, остается без изменения.

Метод эквивалентных синусоид находит применение при расчете периодических процессов в нелинейных радиотехнических устройствах, например в ламповых генераторах. При этом в качестве эквивалентной синусоиды применяют первые гармоники тока и напряжения, так как именно на их частоту настраивают резонансные контуры, в которых токи и напряжения в основном и определяются первыми гармониками.

Широкое использование метод эквивалентных синусоид находит при расчете устройств, содержащих ферромагнитные сердечники, например трансформаторов. В связи с этим рассмотрим этот метод более подробно в применении к реактивным катушкам и трансформаторам с ферромагнитными сердечниками.

Подчеркнем еще раз, что по своей сути этот метод является приближенным, но при нем получаем возможность пользоваться комплексной записью уравнений и векторными диаграммами.

21.4. Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником

Так как катушки с ферромагнитным сердечником находят весьма широкое применение в цепях переменного тока, рассмотрим вопрос о влиянии нелинейной зависимости магнитного потока в таких катушках от тока в них на форму кривых тока, потока и ЭДС.

Связь $\Psi = f(i)$ определяется петлей гистерезиса (рис. 21.6), если можно пренебречь влиянием вихревых токов, о котором будет сказано позже. Пусть потокосцепление Ψ, а следовательно, и ЭДС в обмотке катушки $e = -d\Psi/dt$, а также напряжение $u = d\Psi/dt$, ее уравновешивающее, изменяются по синусоидальному закону (рис. 21.6). В таком случае кривая тока в обмотке катушки содержит высшие гармоники, преимущественно третью, пятую и седьмую. Кривую тока нетрудно построить по точкам, как это показано на рис. 21.6. Максимумы тока и потока совпадают, но через нуль кривая тока проходит раньше кривой магнитного потока. Кривая тока имеет заостренную форму. В другом предельном случае, когда ток изменяется по синусоидальному закону, кривая магнитного потока отлична от синусоиды и имеет уплощенную форму (рис. 21.7). Кривые же ЭДС e, равной $-d\Psi/dt$, и напряжения u, равного $d\Psi/dt$, при этом имеют весьма заостренную форму (рис. 21.7). Построение кривой потока по заданной кривой тока и петле гистерезиса нетрудно осуществить по точкам графически. Кривую же напряжения получаем дифференцированием кривой потока.

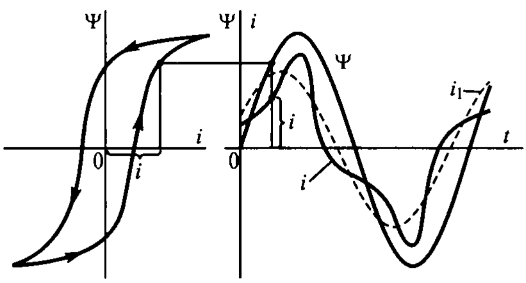

Рис. 21.6

В общем случае как кривая тока, так и кривая напряжения могут оказаться несинусоидальными.

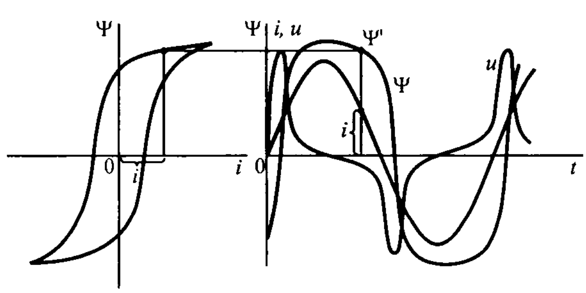

Рис. 21.7

Обратим внимание на то, что вследствие симметричной формы петли гистерезиса в рассмотренных случаях (рис. 21.6 и 21.7) несинусоидальные кривые тока, потока и напряжения симметричны относительно оси абсцисс и, следовательно, не содержат четных гармоник.

21.5. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Для правильного выбора эквивалентных синусоид, заменяющих действительные несинусоидальные кривые тока и напряжения в катушках с ферромагнитными сердечниками, необходимо рассмотреть потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока. Эти потери складываются из потерь на вихревые токи и на гистерезис.

Сердечники большей частью набирают из тонких листов ферромагнитного материала, изолированных друг от друга тонким слоем изоляции с целью уменьшения потерь на вихревые токи.

Вихревые токи, согласно принципу Ленца, направлены таким образом, что созданное ими магнитное поле ослабляет результирующее поле. Это ослабление наиболее резко выражено в середине листа. Поэтому результирующее магнитное поле распределяется неравномерно по сечению листа. Толщину листа для уменьшения потерь выбирают малой; при этом можно пренебречь неравномерностью поля внутри листа, т. е. размагничивающим действием вихревых токов. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в четвертой части курса при исследовании переменного электромагнитного поля в проводящей среде. Приняв такое допущение, легко можем получить зависимость потерь на вихревые токи от амплитуды магнитной индукции, частоты и удельной проводимости материала листа.

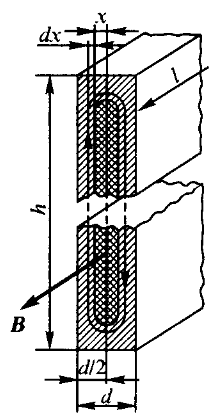

Рис. 21.8

На рис. 21.8 показана трубка вихревого тока, имеющая сечение $l\,dx$ и длину, приблизительно равную $2h$. Активная проводимость вдоль этой трубки обратна ее активному сопротивлению, поскольку мы пренебрегаем магнитным полем вихревых токов и, следовательно, соответствующим индуктивным сопротивлением. Имеем $dg_x = \gamma \dfrac{l\,dx}{2h}$. Действующая ЭДС, индуцируемая вдоль трубки, равна

$$E_x = 4k_{\text{ф}} f \Phi_{mx} = 4k_{\text{ф}} f\, 2xhB_m,$$

где $k_{\text{ф}}$ — коэффициент формы кривой ЭДС. Следовательно, потери внутри трубки тока равны $dP_{\text{в}} = E_x^2 dg_x = 32hl\gamma k_{\text{ф}}^2 f^2 B_m^2 x^2 dx$. Интегрируя от 0 до $d/2$, получаем потери на вихревые токи во всем листе:

$$P_{\text{в}} = \frac{4}{3}\gamma k_{\text{ф}}^2 d^2 f^2 B_m^2 V,$$

где $V = hld$ — объем листа. Таким образом, потери на вихревые токи *при принятом допущении* пропорциональны квадрату частоты, квадрату амплитуды индукции, квадрату толщины листа и первой степени удельной проводимости.

Для сердечника из проволок круглого сечения с диаметром d, оси которых направлены вдоль линии магнитной индукции, при том же допущении получим вместо коэффициента $^4/_3$ коэффициент $^1/_2$. Обобщая полученный результат, можем написать

$$P_{\text{в}} = \xi f^2 B_m^2 V,$$

где коэффициент ξ зависит от формы сечения элементов, на которые разделен сердечник, геометрических размеров этого сечения, удельной проводимости материала и коэффициента формы $k_ф$.

Потери на гистерезис в единице объема вещества за один цикл перемагничивания, как было указано в § 19.13, могут быть выражены в виде $W_г' = \eta B_m^n$, где коэффициент η зависит от свойств ферромагнитного вещества. Следовательно, мощность потерь на гистерезис в объеме V, равная потерям энергии в единицу времени, т. е. за f циклов, может быть выражена в виде

$$P_г = \eta f B_m^n V.$$

В диапазоне амплитуд индукции, с которым обычно имеем дело в электротехнических устройствах, можно принять $n = 2$.

Таким образом, суммарная мощность потерь в сердечнике может быть представлена формулой

$$P_{фер} = P_г + P_в = \eta f B_m^2 V + \xi f^2 B_m^2 V.$$

То обстоятельство, что мощность $P_г$ пропорциональна первой степени частоты, а мощность $P_в$ — квадрату частоты, позволяет экспериментально разделить суммарные потери $P_{фер}$ на $P_г$ и $P_в$, произведя два измерения при двух частотах, но при неизменной амплитуде магнитной индукции. С этой целью необходимо в этих двух опытах иметь одинаковое отношение ЭДС к частоте.

21.6. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током

Заменим несинусоидальный ток в катушке с ферромагнитным сердечником и напряжение на ее зажимах эквивалентными синусоидами. Надлежит выбрать амплитуды U_m и I_m эквивалентных синусоид и угол сдвига фаз φ между ними. Здесь мы рассматриваем напряжение, уравновешивающее ЭДС, индуцируемую в обмотке катушки переменным магнитным потоком в сердечнике, не учитывая падения напряжения в активном сопротивлении обмотки и индуктивного падения напряжения, определяемого потоками рассеяния.

Связь между φ, $U_m = \sqrt{2}U$ и $I_m = \sqrt{2}I$ для эквивалентных синусоид определяется из условия сохранения потерь в сердечнике, т. е. из условия

$$UI\cos\varphi = P_{фер} = P_г + P_в.$$

Необходимы еще два условия для определения всех трех величин φ, $U_m = \sqrt{2}U$ и $I_m = \sqrt{2}I$. Этими условиями могут быть, как было сказано в § 21.3, выбор U_m и I_m равными амплитудам первых гармоник напряжения и тока или выбор U и I равными действующим несинусоидальным напряжениям и току.

Замена действительных кривых тока эквивалентными синусоидами приводит к тому, что связь Ψ и i выражается уравнением эллипса, площадь которого в соответствующих масштабах равна потерям в сердечнике за один период. В зависимости от выбора амплитуд U_m и I_m эквивалентных синусоид получим тот или иной эллипс, но все эти эллипсы должны иметь одну и ту же площадь.

При синусоидальном напряжении, соответственно, при синусоидальном потоке в качестве амплитуд U_m и Ψ_m естественно взять действительные амплитуды этих величин. Амплитуду же I_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники тока i, либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Соответственно тому или другому выбору амплитуды эквивалентной синусоиды тока получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса.

При синусоидальном токе естественно выбрать величину I_m равной действительной амплитуде тока i. Амплитуду же U_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники напряжения u, либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Амплитуда Ψ_m определится из равенства $U_m = \omega\Psi_m$. Соответственно, получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса.

На рис. 21.9 и 21.10 сказанное иллюстрируется в предположении, что учитываются только потери на гистерезис. Рис. 21.9 относится к синусоидальным напряжению u и потоку Ψ, а рис. 21.10 — к синусоидальному току i. В этих случаях площадь эллипса равна площади петли гистерезиса. Наличие вихревых токов несколько приближает к эллипсу действительную кривую $\Psi(i)$. Площадь эквивалентного эллипса при этом должна быть взята равной площади этой действительной кривой, равной в соответствующем масштабе суммарным потерям в сердечнике.

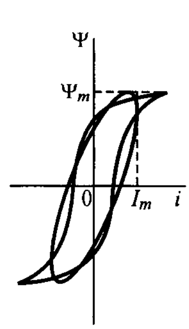

Рис. 21.9

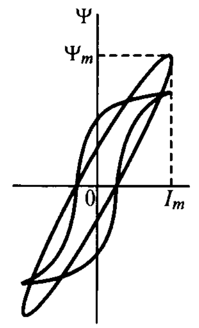

Рис. 21.10

21.7. Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником

Рассмотрим процессы в катушке с замкнутым ферромагнитным сердечником, обмотка которой имеет w витков.

Уравнение, описывающее процесс в катушке, имеет вид

$$u = ri + \frac{d\Psi}{dt},$$

где r — сопротивление обмотки.

Полное потокосцепление представим в виде суммы $\Psi = \Psi_\sigma + \Psi_0$. Величина Ψ_0 есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися целиком вдоль сердечника. Следовательно, $\Psi_0 = w\Phi_0$, где Φ_0 — поток сквозь сечение сердечника, определяемый этими линиями. Ψ_σ есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися частично или полностью в воздухе.

Разделение величины Ψ на Ψ_σ и Ψ_0 имеет тот смысл, что потокосцепление Ψ_σ пропорционально току: $\Psi_\sigma = L_\sigma i$, так как магнитное сопротивление пути, по которому замыкаются линии потока, практически не зависит от тока и, следовательно, индуктивность L_σ постоянна. Потокосцепление Ψ_0 *нелинейно* связано с током i, так как магнитная проницаемость и, следовательно, магнитное сопротивление сердечника зависят от напряженности магнитного поля. Уравнение катушки теперь можно переписать в виде

$$u = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + w\frac{d\Phi_0}{dt} = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + u_0.$$

Это уравнение нелинейное. Поэтому, даже если приложенное напряжение u синусоидально, ток i будет несинусоидальным. Заменяя несинусоидальные кривые тока и потока эквивалентными синусоидами, можем записать это уравнение в комплексной форме для комплексных амплитуд:

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + j\omega w \dot{\Phi}_{0m} = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + \dot{U}_{0m}.$$

Согласно изложенному в предыдущем параграфе, эквивалентная синусоида тока i отстает от эквивалентной синусоиды напряжения $u_0 = d\Psi_0/dt$ на угол $\varphi_0 < \pi/2$ вследствие наличия потерь в сердечнике $P_{\text{фер}} = P_\text{г} + P_\text{в} = U_0 I \cos\varphi_0 > 0$. Таким образом, эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды тока i на угол $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$, так как эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды напряжения u_0 на угол $\pi/2$.

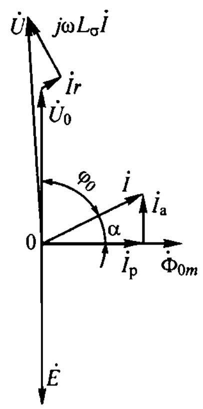

Рис. 21.11

На рис. 21.11 изображена векторная диаграмма катушки, соответствующая уравнению катушки, записанному в комплексной форме. На диаграмме отложен вектор ЭДС, индуцируемой в обмотке потоком Φ_0, равной $e_0 = -w\dfrac{d\Phi_0}{dt}$.

Ток I можно разложить на две составляющие: I_p, находящуюся в фазе с потоком, и I_a, находящуюся в квадратуре с потоком. Величина I_p представляет собой реактивную составляющую тока, а величина I_a — активную составляющую. Соответственно, можем изобразить катушку с помощью эквивалентной схемы, приведенной на рис. 21.12, причем

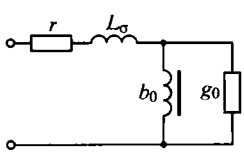

Рис. 21.12

$$b_0 = \frac{I_\text{p}}{U_0} \quad \text{и} \quad g_0 = \frac{I_\text{a}}{U_0} = \frac{I_\text{a} U_0}{U_0^2} = \frac{P_{\text{фер}}}{U_0^2}.$$

21.8. Комплексное магнитное сопротивление магнитной цепи

То обстоятельство, что поток Φ_0 в ферромагнитном сердечнике катушки отстает по фазе на угол α от намагничивающего тока i в обмотке катушки и, следовательно, от МДС iw, можно учесть, введя в закон магнитной цепи

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{\dot{I}_m w}{Z_\text{м}}$$

комплексное магнитное сопротивление сердечника

$$Z_\text{м} = |Z_\text{м}| e^{j\alpha} = R_\text{м} + jX_\text{м}.$$

Выразим комплексное магнитное сопротивление через длину l сердечника, сечение s сердечника и магнитную проницаемость вещества сердечника. Сечение s будем считать одинаковым по всей длине сердечника. Получаем

$$Z_{\text{м}} = \frac{\dot{I}_m w}{\dot{\Phi}_{0m}} = \frac{\dot{H}_m l}{\dot{B}_m s} = \frac{l}{\dot{\mu} s},$$

где $\dot{\mu} = \dot{B}_m / \dot{H}_m$ — комплексная магнитная проницаемость, учитывающая и потери в веществе сердечника.

Существует важная связь между комплексным магнитным сопротивлением $Z_{\text{м}}$ сердечника и комплексным электрическим сопротивлением $Z_{0\text{э}} = 1/(g_0 - jb_0)$ обмотки, определяемым напряжением $\dot{U}_{0m} = j\omega\dot{\Phi}_{0m}w$. Имеем

$$Z_{0\text{э}} = \frac{\dot{U}_{0m}}{\dot{I}_m} = \frac{j\omega w^2 \dot{\Phi}_{0m}}{\dot{I}_m w} = \frac{j\omega w^2}{Z_{\text{м}}}.$$

Появление мнимой составляющей $jX_{\text{м}}$ в комплексном магнитном сопротивлении является результатом наличия потерь в сердечнике. Действительно, используя эквивалентную схему катушки (рис. 21.12) и выражение для ее параметров $g_0 = \frac{P_{\text{фер}}}{U_0^2} = \frac{2P_{\text{фер}}}{U_{0m}^2} = \frac{2P_{\text{фер}}}{\omega^2 w^2 \Phi_{0m}^2}$, получаем

$$\frac{1}{Z_{0\text{э}}} = Y_{0\text{э}} = g_0 - jb_0 = \frac{Z_{\text{м}}}{j\omega w^2} = \frac{R_{\text{м}} + jX_{\text{м}}}{j\omega w^2} = \frac{X_{\text{м}}}{\omega w^2} - j\frac{R_{\text{м}}}{\omega w^2},$$

откуда

$$X_{\text{м}} = \omega w^2 g_0 = \frac{2P_{\text{фер}}}{\omega^2 \Phi_{0m}^2}.$$

Таким образом, действительно, $X_{\text{м}}$ пропорционально потерям в сердечнике.

Используя понятие о комплексном магнитном сопротивлении и, соответственно, о комплексной магнитной проницаемости, получаем возможность описывать периодические процессы также и в магнитных цепях с помощью комплексного метода. Подчеркнем здесь, что как $R_{\text{м}}$, так и $X_{\text{м}}$ являются *нелинейными* функциями амплитуды МДС $I_m w$ или амплитуды потока Φ_{0m}.

21.9. Уравнения, векторная диаграмма и эквивалентная схема трансформатора с ферромагнитным сердечником

Обмотки трансформатора обычно располагаются на ферромагнитном сердечнике, что обеспечивает увеличение магнитной связи между обмотками. С этой же целью стремятся расположить обмотки как можно ближе друг к другу. Рассмотрим трансформатор с двумя электрически не соединенными обмотками, имеющими числа витков w_1 и w_2.

Реальная картина магнитного поля в трансформаторе достаточно сложна. Некоторые магнитные линии замыкаются целиком по сердечнику, охватывая все витки обеих обмоток, другие проходят частично или целиком по воздуху, охватывая то или иное число витков обмоток. Интересуясь только напряжениями на зажимах обмоток и не рассматривая распределение напряжения между отдельными их витками, можем действительную сложную картину поля заменить эквивалентной ей упрощенной, изображенной на рис. 21.13. Линии потока Φ_0 охватывают все витки обеих обмоток. Линии потока $\Phi_{\sigma 1}$ охватывают все витки только первой обмотки. Линии потока $\Phi_{\sigma 2}$ охватывают все витки только второй катушки. Поток Φ_0 называют основным, а потоки $\Phi_{\sigma 1}$ и $\Phi_{\sigma 2}$ — потоками рассеяния. Поток Φ_0 *нелинейно* связан с магнитодвижущей силой $i_1 w_1 + i_2 w_2$, определяемой обоими токами. Поток $\Phi_{\sigma 1}$ пропорционален току i_1, а поток $\Phi_{\sigma 2}$ пропорционален току i_2. Для потокосцеплений с первой и второй катушками можем написать

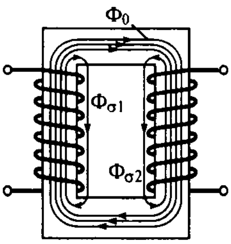

Рис. 21.13

$$\Psi_1 = \Psi_{\sigma 1} + \Psi_{01} = L_{\sigma 1} i_1 + w_1 \Phi_0;$$

$$\Psi_2 = \Psi_{\sigma 2} + \Psi_{02} = L_{\sigma 2} i_2 + w_2 \Phi_0.$$

Здесь $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ — индуктивности первичной и вторичной обмоток, определяемые потоками рассеяния.

Пусть к зажимам первичной обмотки трансформатора приложено напряжение u_1, а к зажимам вторичной обмотки приключен приемник. Напряжение u_1 имеет составляющую $r_1 i_1$, равную падению напряжения в сопротивлении первичной обмотки, и составляющую $d\Psi_1/dt$, уравновешивающую ЭДС, индуцируемую потоком Ψ_1:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}.$$

ЭДС $-d\Psi_2/dt$, индуцируемая потоком Ψ_2 во вторичной обмотке, преодолевает падение напряжения $r_2 i_2$ в сопротивлении вторичной обмотки и напряжение u_2 на зажимах приемника:

$$-\frac{d\Psi_2}{dt} = r_2 i_2 + u_2.$$

Пользуясь разложением потоков на потоки рассеяния и основной, можем написать уравнения трансформатора в виде

$$u_1 = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + u_0;$$

$$-w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = r_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Обозначим через $e_1 = -u_0 = -w_1 \dfrac{d\Phi_0}{dt}$ и $e_2 = -w_2 \dfrac{d\Phi_0}{dt}$ ЭДС, индуцируемые потоком Φ_0 в первичной и вторичной обмотках.

Уравнения трансформатора нелинейны вследствие нелинейной связи между потоком Φ_0 и МДС $i_1 w_1 + i_2 w_2$. Поэтому периодические токи, потоки и напряжения несинусоидальны. Заменяя их эквивалентными синусоидами, можем написать уравнения трансформатора в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_0;$$

$$\dot{E}_2 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_{\sigma 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2,$$

причем $\dot{U}_2 = Z_{\text{пр}} \dot{I}_2$, где $Z_{\text{пр}}$ — комплексное сопротивление приемника.

Если числа витков w_1 и w_2 существенно отличаются друг от друга, то столь же различными будут действующие ЭДС e_1 и e_2. Принято в этом случае осуществлять так называемое приведение всех величин во вторичной цепи к первичной цепи. Приведенные величины будем отмечать штрихами. Приведение осуществляют, заменяя реальный трансформатор с числом витков w_2 во вторичной обмотке эквивалентным трансформатором с числом витков во вторичной обмотке $w_2' = w_1$. Таким образом, вместо действительного трансформатора с *коэффициентом трансформации* $n = w_1/w_2$ рассматриваем эквивалентный ему трансформатор с коэффициентом трансформации, равным единице.

Условием эквивалентности является одинаковая в обоих случаях реакция вторичной цепи на первичную. Это значит, что МДС вторичной обмотки должна остаться без изменения, т. е. $w_2' i_2' = w_2 i_2$ и, следовательно, $i_2' = i_2/n$. Так как поток Φ_0 при этом не изменяется, то ЭДС во вторичной обмотке изменяется пропорционально числу витков. Имеем $e_2' = \dfrac{w_2'}{w_2} e_2 = n e_2$. Очевидно, точно так же все падения напряжения во вторичной цепи должны быть пересчитаны пропорционально коэффициенту трансформации n.

Сопротивления и индуктивности во вторичной цепи пересчитываются пропорционально n^2, так как напряжения изменяются пропорционально n, а ток — обратно пропорционально n. Проводимости и емкости пересчитываются обратно пропорционально n^2.

После приведения уравнения трансформатора запишутся в виде

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_0;$$

$$\dot{E}_2' = r_2' \dot{I}_2' + j\omega L_{\sigma 2}' \dot{I}_2' + \dot{U}_2',$$

где $\dot{U}_2' = Z_{\text{пр}}' \dot{I}_2'$.

Связь между комплексной амплитудой потока $\dot{\Phi}_0$ и вызывающей этот поток МДС $i_1 w_1 + i_2 w_2$ в комплексной форме запишется как

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{\dot{I}_{1m} w_1 + \dot{I}_{2m} w_2}{Z_{\text{м}}} = \frac{\dot{I}_{1m} w_1 + \dot{I}_{2m}' w_2'}{Z_{\text{м}}} = \frac{(\dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}') w_1}{Z_{\text{м}}} = \frac{\dot{I}_{0m} w_1}{Z_{\text{м}}},$$

где $Z_{\text{м}} = R_{\text{м}} + jX_{\text{м}}$ — комплексное магнитное сопротивление сердечника, причем $X_{\text{м}}$ учитывает потери в сердечнике на гистерезис и вихревые токи. Величину $\dot{I}_{0m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}'$ называют *намагничивающим током*. Заметим, что в обмотках протекают токи i_1 и i_2, а ток i_0 является при $i_1 \neq 0$ и $i_2 \neq 0$ лишь расчетной величиной. Ток i_0 равен току i_1 только при $i_2 = 0$.

Вследствие наличия потерь в сердечнике поток Φ_0 отстает по фазе от тока i_0 на угол α.

В соответствии с последними уравнениями трансформатора можем построить векторную диаграмму трансформатора (рис. 21.14). Диаграмма на рисунке построена для случая $\varphi_{\text{пр}} > 0$, т. е. когда приемник имеет индуктивный характер.

Соответственно последним уравнениям трансформатора можем также составить схему, эквивалентную трансформатору, в виде, представленном на рис. 21.15.

Величины r_1, $L_{\sigma 1}$, r_2', $L_{\sigma 2}'$ постоянны, не зависят от тока и составляют линейную часть схемы. Реактивная проводимость b_0 зависит от напряжения U_0 и является нелинейной величиной. Активная проводимость g_0 является постоянной, если потери в сердечнике пропорциональны U_0^2, т. е. пропорциональны B_m^2. Если же потери на гистерезис изменяются непропорционально квадрату амплитуды индукции, то величина g_0 в некоторой мере зависит от U_0 и также является нелинейной.

В мощных трансформаторах при номинальной нагрузке ток I_0 составляет лишь несколько процентов от тока I_1, что является результатом сравнительно малого магнитного сопротивления сердечника вследствие высокой магнитной проницаемости стали. При номинальном напряжении и номинальной нагрузке падения напряжения в обмотках $I_1\sqrt{r_1^2+\omega^2 L_{\sigma 1}^2}$ и $\dot{I}_2'\sqrt{r_2'^2+\omega^2 L_{\sigma 2}'^2}$ обычно составляют в трансформаторах несколько процентов от напряжения U_1. Поэтому отношение U_1 к U_2 близко к коэффициенту трансформации n.

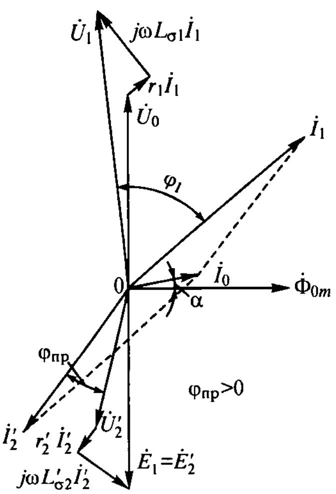

Рис. 21.14

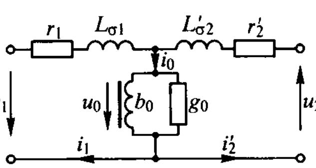

Рис. 21.15

Трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой нелинейный четырехполюсник. Поэтому, определяя его параметры из опытов холостого хода и короткого замыкания, необходимо в опыте холостого хода вследствие зависимости b_0 от U_0 брать напряжение U_1 равным напряжению U_0 при нормальной нагрузке. Падение напряжения на участке r_1, $L_{\sigma 1}$ при токе холостого хода весьма мало. Из опыта холостого хода определяются параметры b_0 и g_0. Опыт короткого замыкания обычно проводят при номинальном токе. Так как при этом напряжение U_1, а следовательно, и U_0 много меньше их значений в номинальном режиме, то ток $I_0 \ll I_1$ и им можно пренебречь. Поэтому из опыта короткого замыкания определяются параметры $r_1 + r_2'$ и $L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2}'$. Величины r_1 и r_2', так же как величины $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}'$, обычно одного порядка. Учитывая отмеченные выше соотношения между токами I_1 и I_0, а также между падениями напряжения в обмотках и U_1, не сделаем большой ошибки, полагая в эквивалентной схеме $r_2' = r_1$ и $L_{\sigma 2}' = L_{\sigma 1}$.

21.10. Графический метод расчета, основанный на введении эквивалентных синусоид

В предыдущих параграфах было показано, что введение метода эквивалентных синусоид позволяет при анализе процессов в таких важных нелинейных элементах электрической цепи, как, например, катушки с ферромагнитными сердечниками, воспользоваться комплексным методом и векторными диаграммами. Более сложными являются процессы в цепи, в которой имеет место сочетание катушек и трансформаторов с ферромагнитными сердечниками с другими элементами цепи, например с конденсаторами, участками с активными сопротивлениями и т. д. Приближенное рассмотрение этих процессов и в таком случае оказывается возможным, если заменить несинусоидальные токи и напряжения эквивалентными синусоидами. Это позволяет при любом соединении реактивных элементов получать графически результирующую нелинейную характеристику путем алгебраического суммирования ординат или абсцисс характеристик отдельных элементов. При наличии активных и реактивных сопротивлений, пользуясь графическим построением результирующих характеристик, необходимо учитывать, что эквивалентные синусоиды напряжений на этих сопротивлениях сдвинуты на угол $\pm\pi/2$.

Несмотря на приближенность этого метода, как сейчас увидим, он дает возможность выявить главные особенности процессов в нелинейных цепях. Примеры использования такого графического метода исследования процессов в нелинейных цепях будут рассмотрены в следующих четырех параграфах.

21.11. Явление феррорезонанса при последовательном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора

В электрических цепях, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, наблюдаются особые явления, связанные с нелинейными свойствами этих цепей.

Впервые исследование таких цепей было выполнено П. Л. Калантаровым, который также предложил метод графического расчета этих цепей.

В настоящем и последующих параграфах рассматриваются явления в таких цепях на простейших примерах последовательного и параллельного соединений катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

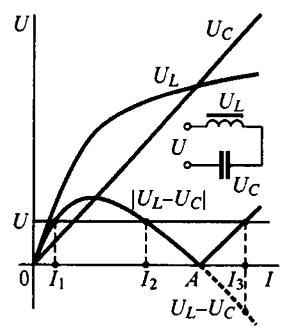

Рис. 21.16

Пусть дана цепь, состоящая из последовательно соединенных реактивной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора емкостью C (рис. 21.16). Предположим, что в цепи отсутствуют потери, и заменим несинусоидальные кривые напряжений и тока эквивалентными синусоидами, выбрав их равными первым гармоникам действительных кривых, иными словами, пренебрежем наличием высших гармоник. При указанных условиях напряжение U_L на зажимах катушки и напряжение U_C на зажимах конденсатора по фазе прямо противоположны друг другу; напряжение U на зажимах цепи равно абсолютному значению их разности $U = |U_L - U_C|$, причем возможен как случай преобладания U_L над U_C, так и случай преобладания U_C над U_L.

Представляя напряжения U_L и U_C в виде функций тока I, причем $U_L = F(I)$ изобразится характеристикой катушки, а $U_C = I/(\omega C)$ изобразится прямой, проходящей через начало координат, получим

$$U = |U_L - U_C| = \left| F(I) - \frac{I}{\omega C} \right| = \varphi(I).$$

Зависимость $U = |U_L - U_C| = \varphi(I)$ является *нелинейной характеристикой всей цепи.*

График разности $U_L - U_C$ найдем, вычитая из ординат кривой $U_L = F(I)$ соответствующие ординаты прямой $U_C = I/(\omega C)$ (рис. 21.16). Ток при заданном значении напряжения U определим, находя точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси абсцисс на расстоянии U от нее. Как видно из рис. 21.16, таких точек может быть три, откуда следует, что при одном и том же напряжении на зажимах цепи в ней могут, вообще говоря, устанавливаться три различных режима тока. Такая неопределенность, совершенно не свойственная цепям с постоянными параметрами, не может иметь места и в рассматриваемой цепи, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик неопределенность имеет место лишь в ограниченной области напряжений. А именно: если приложенное напряжение U меньше того значения, при котором прямая U касается кривой $|U_L - U_C|$, то имеем три точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой U, причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакции самоиндукции, а третья — преобладанию реакции емкости. Если приложенное напряжение превосходит указанный предел, то кривая $|U_L - U_C|$ пересекается с прямой U только в одной точке и, следовательно, в цепи возможен лишь один вполне определенный режим тока. Особая точка A характеристики $U = \varphi(I)$, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, так как в этой точке напряжения U_L и U_C взаимно компенсируются. Отсюда следует, что, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса в рассматриваемой цепи можно достичь изменением значения приложенного напряжения. Это объясняется тем, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от значения тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Это явление называют явлением феррорезонанса. В данном случае имеем дело с *феррорезонансом в последовательной цепи.*

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, приведенный на рис. 21.17 (сплошная линия). Вид этой кривой показывает, что, постепенно повышая напряжение, дойдем до точки a характеристики, а далее произойдет скачок из точки a в точку b, сопровождающийся резким увеличением тока. При дальнейшем повышении напряжения увеличение тока происходит плавно. При понижении напряжения ток плавно уменьшается до достижения точки c характеристики, в которой происходит скачок в точку d, сопровождающийся резким уменьшением тока. Эти скачки сопровождаются изменением знака угла сдвига в цепи.

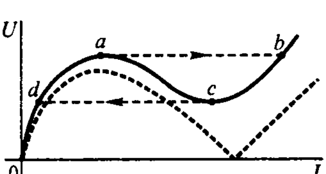

Рис. 21.17

При постоянстве напряжения U на зажимах цепи падающая часть ac характеристики является областью неустойчивых режимов. Действительно, пусть при $U = \text{const}$ режиму работы цепи отвечает некоторая точка на падающей части характеристики. Тогда всякое случайное увеличение тока приведет к уменьшению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему возрастанию тока.

Наоборот, всякое случайное уменьшение тока приведет к увеличению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему уменьшению тока. В обоих случаях ток будет изменяться до тех пор, пока не достигнет значения, определяемого соответствующей точкой пересечения прямой $U = \text{const}$ с одной из поднимающихся частей характеристики. В любой из этих точек режим будет устойчив, так как случайное увеличение тока приведет к увеличению падения напряжения и ток должен будет уменьшиться, а случайное уменьшение тока приведет к уменьшению падения напряжения и ток должен будет увеличиться. Включив последовательно с цепью достаточно большое дополнительное линейное сопротивление, можно получить устойчивую работу цепи и на падающем участке ее характеристики.

Покажем, каким образом при построении характеристики цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно учесть активное сопротивление r этой цепи. Обозначим приложенное к цепи напряжение через U, а его активную составляющую и абсолютное значение реактивной составляющей через $U_a = Ir$ и $|U_p| = |U_L - U_C|$.

Характер зависимости $|U_p|$ от I, представляющей собой характеристику цепи при пренебрежении ее активным сопротивлением и высшими гармониками, мы установили выше. Будем считать эту зависимость известной. Для дальнейших операций удобнее применять зависимость $|U_p|$ не непосредственно от тока, а от пропорциональной току величины $U_a = Ir$, причем масштабы по обеим осям координат должны быть одинаковы, т. е. зависимость $|U_p| = F(U_a)$.

Пользуясь эквивалентными синусоидами, мы должны считать, что падения напряжения U_a и U_p сдвинуты друг относительно друга на угол $\pm\pi/2$. Соответственно, имеем

$$U_a^2 + U_p^2 = U^2.$$

Уравнение $|U_p| = F(U_a)$ показывает, что $|U_p|$ и U_a связаны зависимостью, изображаемой характеристикой цепи для случая $r = 0$. Уравнение $U_a^2 + U_p^2 = U^2$ показывает, что, кроме того, между $|U_p|$ и U_a существует связь, определяемая окружностью с центром в начале координат и с радиусом, равным напряжению U на зажимах цепи. Оба эти условия для $|U_p|$ и U_a выполняются в точках пересечения окружности радиуса U с кривой $|U_p| = F(U_a)$, причем число таких точек равно числу режимов тока, возможных в цепи при данном значении U (рис. 21.18). Проведем из точки пересечения окружности радиуса U с осью ординат прямую, параллельную оси абсцисс, и снесем на нее значения U_a, соответствующие данному значению U. Проделав эту операцию для ряда окружностей, отвечающих различным значениям U, и соединив найденные точки плавной кривой, построим зависимость $U = F_1(U_a)$, которая в то же время из-за прямой пропорциональности между U_a и I даст зависимость между U и I, т. е. искомую характеристику цепи с учетом ее активного сопротивления.

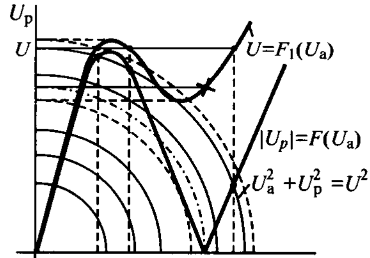

Рис. 21.18

На рис. 21.18 показана найденная таким методом характеристика цепи, причем штриховыми линиями нанесены окружности радиуса U, касающиеся кривой $|U_p| = F(U_a)$ и ограничивающие область напряжений, в которой одному значению напряжения могут отвечать три различных режима тока. Окружность радиуса U, отвечающая резонансу, выделена особо, а точка резонанса отмечена на характеристике крестом.

21.12. Явление феррорезонанса при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора

Рассматривая параллельное соединение катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора (рис. 21.19), пренебрежем, как и в предыдущем случае, потерями в цепи и наличием высших гармоник. Тогда ток I_L в реактивной катушке и ток I_C в конденсаторе по фазе будут противоположны друг другу, а ток I в неразветвленной части цепи будет равен абсолютному значению их разности $I = |I_L - I_C|$, причем возможен как случай преобладания I_L над I_C, так и случай преобладания I_C над I_L.

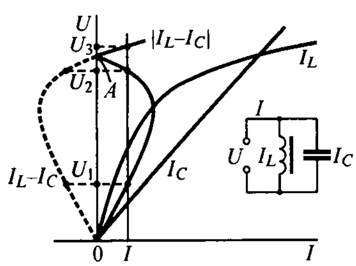

Рис. 21.19

Представляя токи I_L и I_C как функции напряжения на зажимах цепи, причем $I_L = F(U)$ изобразится характеристикой реактивной катушки, а $I_C = \omega CU$ — прямой, проходящей через начало координат, получим

$$I = |I_L - I_C| = |F(U) - \omega CU| = \varphi(U),$$

что и является *нелинейной характеристикой всей цепи.*

График разности $I_L - I_C = F(U) - \omega CU$ найдем, вычитая из абсцисс кривой $I_L = F(U)$ соответствующие абсциссы прямой $I_C = \omega CU$ (рис. 21.19). Напряжение, при котором ток во внешней цепи равен заданному значению I, определим, находя точки пересечения кривой $|I_L - I_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси ординат на расстоянии I от нее. Как видно из рис. 21.19, таких точек может быть три, откуда следует, что один и тот же ток в цепи может, вообще говоря, установиться при трех различных значениях напряжения на ее зажимах. Эта особенность рассматриваемой цепи исчезнет, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик многозначность зависимости напряжения от тока имеет место лишь в ограниченной области значений тока. А именно: если ток I в неразветвленной части цепи меньше того значения, при котором прямая I касается кривой $|I_L - I_C|$, то имеем три точки пересечения кривой $|I_L - I_C|$ с прямой I, причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакции емкости, а третья — преобладанию реакции самоиндукции. Если ток I превосходит указанный предел, то кривая $|I_L - I_C|$ пересекается с прямой I только в одной точке и, следовательно, этот ток может существовать в цепи лишь при одном вполне определенном значении напряжения на зажимах цепи.

Особая точка A характеристики $I = \varphi(U)$, лежащая на оси ординат, является точкой резонанса, так как в этой точке токи I_L и I_C взаимно компенсируются. Отсюда следует, что при параллельном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса можно достичь изменением значения приложенного напряжения.

Это явление также относится к феррорезонансу, причем в рассматриваемом случае имеем дело с *феррорезонансом в параллельной цепи.*

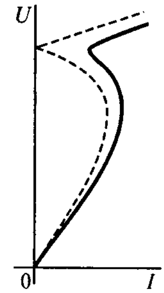

Рис. 21.20

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 21.20 сплошной линией. Из вида этой кривой следует, что при постепенном увеличении тока в цепи, а также и при уменьшении его будут происходить скачки, аналогичные скачкам при последовательном соединении и также сопровождающиеся изменением знака угла сдвига в цепи. Однако для получения этих скачков на практике необходимо иметь устройство, в котором регулируется ток, а не напряжение. Практически это можно осуществить, если цепь, изображенную на рис. 21.19, подключить не непосредственно к источнику изменяющегося напряжения, а через большое линейное сопротивление r, значительно превосходящее сопротивление контура из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора. В таком случае ток I будет определяться сопротивлением r, и при его изменении будут происходить скачки напряжения на зажимах этого контура. Если же контур из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора присоединен непосредственно к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением, то при изменении U на практике может быть получена вся кривая (рис. 21.20) без скачков.

Применяя рассмотренные способы построения характеристик для последовательного и параллельного соединений катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно построить характеристики более сложных нелинейных цепей, представляющих собой смешанное соединение реактивных элементов.

21.13. Ферромагнитные стабилизаторы напряжения

Особенности цепей, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, используют для создания *ферромагнитных стабилизаторов напряжения*, служащих для поддержания постоянства напряжения на зажимах приемника при изменении напряжения питающей сети. Основная часть всех стабилизаторов состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений — линейного и нелинейного.

Применим графический метод, изложенный в § 21.10, так же как мы делали это при рассмотрении явления феррорезонанса, для получения характеристик ферромагнитных стабилизаторов напряжения.

Рассмотрим простейший стабилизатор (рис. 21.21), состоящий из последовательно соединенных между собой конденсатора C и катушки L с ферромагнитным сердечником, при холостом ходе. Напряжение U_1 сети подводят к зажимам этой цепи, а зажимы катушки являются выходными зажимами стабилизатора, и, следовательно, выходное напряжение стабилизатора U_2 равно напряжению U_L на зажимах катушки.

Зная емкость C конденсатора и характеристику $U_L = F_2(I)$ катушки, можно построить (рис. 21.22) зависимость $U_1 = |U_L - U_C| = F_1(I)$, где U_C — напряжение на зажимах конденсатора. Предположим, что напряжение сети изменилось от U_1' до U_1''. Тогда, пользуясь кривыми $U_1 = F_1(I)$ и $U_2 = U_L = F_2(I)$, можно найти соответствующие значения выходного напряжения U_2' и U_2''. При этом значениям U_1' и U_2' отвечает ток I', а значениям U_1'' и U_2'' — ток I'' в цепи стабилизатора. Из рис. 21.22 видно, что значительное изменение напряжения $\Delta U_1 = U_1' - U_1''$ сети влечет за собой сравнительно малое изменение выходного напряжения $\Delta U_2 = U_2' - U_2''$.

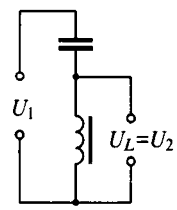

Рис. 21.21

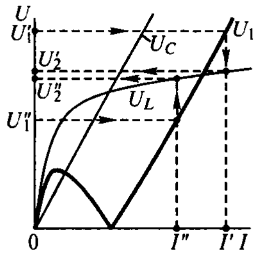

Рис. 21.22

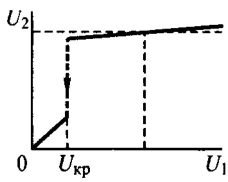

Рис. 21.23

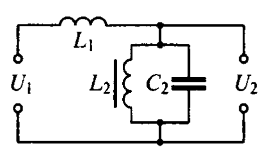

Рис. 21.24

Определив для ряда значений U_1 соответствующие значения U_2, можно построить зависимость $U_2 = F(U_1)$, из которой видно (рис. 21.23), что рассматриваемая схема может стабилизировать напряжение только при напряжениях сети, превышающих критическое напряжение $U_{кр}$. Из рис. 21.23 ясно, что стабилизатор будет тем лучше, чем более пологой является конечная часть характеристики катушки.

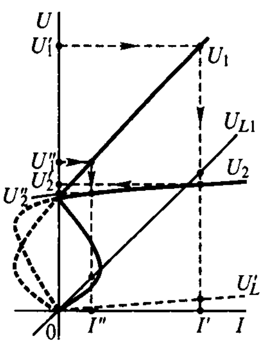

Рис. 21.25

Описанный стабилизатор не находит практического применения вследствие неудовлетворительных рабочих характеристик.

На практике часто применяют стабилизатор, основная часть схемы которого дана на рис. 21.24. В этой схеме линейным сопротивлением является катушка L_1 с ненасыщенным ферромагнитным сердечником, а нелинейным — цепь, состоящая из параллельно соединенных конденсатора C_2 и катушки L_2 с насыщенным ферромагнитным сердечником. Соответствующие характеристики $U_{L1} = F(I)$ катушки L_1, $U_2 = F_2(I)$ разветвленной части схемы и $U_1 = F_1(I)$ всей схемы приведены на рис. 21.25.

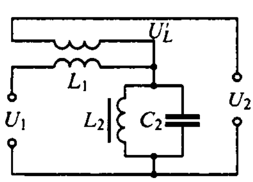

Рис. 21.26

Дальнейшего улучшения этой схемы можно достичь, вычитая из напряжения на контуре L_2, C_2 напряжение U_L', являющееся частью напряжения U_{L1} на зажимах катушки L_1. Это можно выполнить, наложив на сердечник катушки L_1 дополнительную обмотку с соответствующим числом витков и включив ее так как показано на рис. 21.26. Таким путем можно получить почти полную стабилизацию напряжения. Заметим, что присоединение нагрузки к стабилизатору ухудшает его характеристику, делая ее менее пологой. Следует иметь в виду, что номинальная мощность элементов стабилизатора значительно превосходит допустимую мощность нагрузки. К недостаткам обычных ферромагнитных стабилизаторов относится также зависимость выходного напряжения от частоты. Уменьшение этой зависимости возможно путем дополнительного усложнения схемы стабилизатора.

21.14. Управляемые индуктивные элементы нелинейной цепи. Ферромагнитный усилитель мощности

Как уже было отмечено в конце § 19.14, наложив на сердечник катушки с ферромагнитным сердечником дополнительную обмотку, можно, изменяя ток в этой обмотке, влиять на вид характеристики катушки со стороны основной обмотки. Таким образом, получаем возможность управлять процессом в цепи основной обмотки путем изменения управляющего тока в дополнительной обмотке.

Такие *управляемые индуктивные элементы* могут быть использованы в цепях переменного тока, например для регулирования напряжения в линиях электропередачи или в качестве переменной индуктивной нагрузки в установках для испытания электрических машин и т. д. Весьма широкое распространение получили так называемые *ферромагнитные усилители мощности*, в которых используются нелинейные управляемые ферромагнитные элементы.

На рис. 21.27 приведена принципиальная схема ферромагнитного усилителя мощности. Усилитель состоит из двух одинаковых ферромагнитных сердечников, на каждом из которых наложены по две обмотки с числом витков w и w_0. Обмотки с числом витков w включены последовательно с приемником, имеющим сопротивление r. Эта цепь питается от источника переменного напряжения U частоты f. Обмотки с числом витков w_0 составляют управляющую цепь. Пусть в управляющей цепи протекает некоторый постоянный ток i_0. Чем больше значение i_0, тем сильнее подмагничивание этим током сердечника катушек, тем меньше индуктивное сопротивление катушек переменному току со стороны обмоток w и, соответственно, тем меньше напряжение U_L на катушках при заданном токе I. На рис. 21.28 приведено семейство характеристик $U_L = f(Ir)$ при разных значениях подмагничивающего тока i_0. Для удобства дальнейших рассуждений по оси абсцисс вместо тока I отложено пропорциональное ему при $r = \text{const}$ падение напряжения на приемнике.

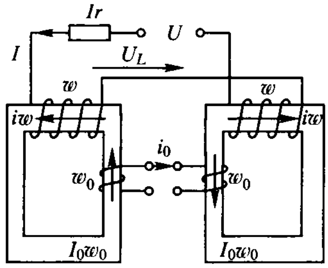

Рис. 21.27

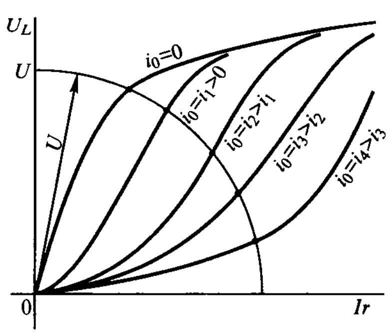

Рис. 21.28

Вводя в рассмотрение эквивалентные синусоиды и пренебрегая потерями в сердечниках и обмотках катушек, мы должны считать, что напряжения Ir и U_L сдвинуты по фазе на угол $\pi/2$. В таком случае можем написать

$$U_L^2 + (Ir)^2 = U^2.$$

При U = const это уравнение определяет окружность радиуса U с центром в начале координат (рис. 21.28). Точки пересечения окружности с характеристиками, построенными при различных значениях i_0, дают возможность найти зависимость I от i_0. Если ток i_0 в управляющей обмотке будет изменяться с частотой, значительно меньшей, чем частота f, то это вызовет соответствующее изменение действующего тока I в приемнике.

При условии $i_0^2 r_0 \ll I^2 r$ получаем возможность управления значительной мощностью в приемнике при незначительной мощности в управляющей цепи, т. е. получаем *усилитель мощности*. В усилителе на рис. 21.27 взяты два одинаковых сердечника и обмотки навиты в таком направлении, чтобы в цепи приемника взаимно компенсировались четные гармоники, появляющиеся в результате подмагничивания сердечников током i_0. При этом также компенсируются в управляющих обмотках ЭДС частоты f, вызываемые током I.

21.15. Метод гармонического баланса для расчета периодических процессов в нелинейных цепях

При расчете периодических процессов в нелинейных цепях можно пользоваться следующим способом отыскания неизвестных величин. Имея в виду, что в общем случае токи и напряжения в нелинейной цепи несинусоидальны, представим ожидаемое решение в виде суммы основной и ряда высших гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Подставляя эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, написанное для данной искомой величины, представим все члены, входящие в дифференциальное уравнение, в виде сумм гармоник. Суммируем справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих $\sin k\omega t$, и приравниваем эти суммы друг к другу. Проделываем ту же операцию с коэффициентами при $\cos k\omega t$. Повторяя эти операции для всех значений k, получаем систему из $2k$ алгебраических уравнений. Эту систему используем для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называют методом гармонического баланса. Точное решение нелинейной задачи этим методом в общем случае требует учета бесконечного множества гармоник, что практически невозможно осуществить. Поэтому при решении конкретных задач число гармоник в ожидаемом решении берется ограниченным, в большинстве случаев не превышающим двух-трех. В результате такого ограничения точный баланс гармоник в уравнении нарушается и решение становится приближенным.

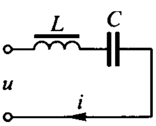

Рис. 21.29

В качестве примера рассмотрим путь отыскания периодического решения методом гармонического баланса для цепи, представленной на рис. 21.29, в случае, когда к зажимам цепи приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$. Пусть нелинейная характеристика катушки может быть представлена аналитически приближенно в виде $i = a\Psi^3$. Ищем решение для потокосцепления в виде суммы

$$\Psi = \Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) + \Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3),$$

т. е. ограничиваемся первой и третьей гармониками. Неизвестны четыре величины: Ψ_{1m}, θ_1, Ψ_{3m} и θ_3. Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{i}{C}.$$

Подставляя значения u, Ψ и i, получим

$$\omega U_m\cos\omega t = -\omega^2\Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2\Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3) + \frac{a\Psi^3}{C} =$$

$$= -\omega^2\Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2\Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3) +$$

$$+ \frac{a}{C}[\Psi_{1m}^3\sin^3(\omega t + \theta_1) + 3\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\sin^2(\omega t + \theta_1)\sin(3\omega t + \theta_3) +$$

$$+ 3\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\sin(\omega t + \theta_1)\sin^2(3\omega t + \theta_3) + \Psi_{3m}^3\sin^3(3\omega t + \theta_3)]. \qquad (*)$$

Представим все члены в данном уравнении в виде $A_k\sin k\omega t$ и $B_k\cos k\omega t$, после чего сгруппируем коэффициенты у гармоник одинакового порядка справа и слева от знака равенства. Не выписывая всех промежуточных преобразований, соответствующих этим операциям, получим нижеследующие четыре уравнения, связывающие искомые величины Ψ_{1m}, θ_1, Ψ_{3m} и θ_3. Первое уравнение получается от приравнивания коэффициентов при $\cos\omega t$, второе — при $\sin\omega t$, третье — при $\cos 3\omega t$ и четвертое — при $\sin 3\omega t$. Имеем

$$\omega U_m = \left(-\omega^2\Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\right)\sin\theta_1 - \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\sin(\theta_3 - 2\theta_1); \qquad (1)$$

$$0 = \left(-\omega^2\Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\right)\cos\theta_1 - \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\cos(\theta_3 - 2\theta_1); \qquad (2)$$

$$0 = \left(-9\omega^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{3m}^3\right)\sin\theta_3 - \frac{a}{4C}\Psi_{1m}^3\sin 3\theta_1; \qquad (3)$$

$$0 = \left(-9\omega^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{3m}^3\right)\cos\theta_3 - \frac{a}{4C}\Psi_{1m}^3\cos 3\theta_1. \qquad (4)$$

Решая совместно эти уравнения, можно найти все четыре интересующие нас величины. В данном частном случае ввиду того, что в цепи отсутствуют потери, следует ожидать, что углы θ_1 и θ_3 равны $\pm\pi/2$, так как при этом начальные фазы ЭДС всех гармонических составляющих равны нулю или π, что соответствует нулевой начальной фазе приложенного напряжения. Действительно, уравнения (2) и (4) удовлетворяются при $\theta_1 = \pm\pi/2$ и $\theta_3 = \pm\pi/2$. Синусы углов в уравнениях (1) и (3) равны при этом ±1, и из этих уравнений определяются Ψ_{1m} и Ψ_{3m}.

Заметим, что полученные уравнения являются приближенными, так как мы пренебрегли пятыми, седьмыми и девятыми гармониками, содержащимися в члене

$i/C = a\Psi^3/C$ в уравнении цепи, что легко усмотреть из выражения для этого члена в квадратных скобках в уравнении (*). Например, член $\Psi_{3m}^3 \sin^3(3\omega t + \theta_3) =$
$= \frac{3}{4}\Psi_{3m}^3 \sin(3\omega t + \theta_3) - \frac{\Psi_{3m}^3}{4}\sin(9\omega t + 3\theta_3)$ содержит девятую гармонику.

Чтобы выяснить некоторые качественные особенности явлений в рассматриваемой нелинейной цепи, предельно упростим решение, пренебрегая также и третьей гармоникой, как мы это делали, пользуясь методом эквивалентных синусоид. Первое и второе уравнения приобретают вид

$$\omega U_m = \left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right)\sin\theta_1; \qquad (1)$$

$$0 = \left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right)\cos\theta_1. \qquad (2)$$

Уравнения (3) и (4) отпадают, так как они были составлены, исходя из баланса для третьей гармоники. Из уравнения (2) имеем $\theta_1 = \pm\pi/2$; следовательно, $\sin\theta_1 = \pm 1$, и из первого уравнения определяется Ψ_{1m}:

$$\omega U_m = \pm\left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right).$$

Так как $i = a\Psi^3 = a\Psi_{1m}^3 \sin^3\omega t = \frac{3}{4}a\Psi_{1m}^3 \sin\omega t - \frac{a}{4}\Psi_{3m}^3 \sin 3\omega t \approx \frac{3}{4}a\Psi_{1m}^3 \sin\omega t$,

то, следовательно, $I_{1m} = \frac{3}{4}a\Psi_{1m}^3$. Подставляя отсюда значение потока в последнее уравнение, получаем

$$U_m = \mp\left(\omega\sqrt[3]{\frac{4}{3a}I_{1m}} - \frac{I_{1m}}{\omega C}\right) = \mp I_{1m}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

где $L = \sqrt[3]{\dfrac{4}{3aI_{1m}^2}}$ является нелинейной индуктивностью катушки.

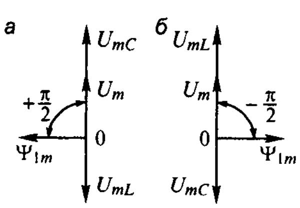

Рис. 21.30

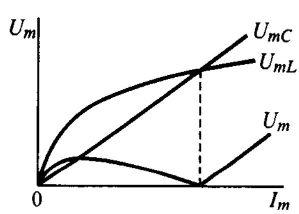

Рис. 21.31

Так как $U_m > 0$ как амплитуда, то знак «минус» относится к случаю $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ и знак «плюс» — к случаю $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. В самом деле, знак «минус» получается при $\sin\theta_1 = +1$, т. е. при $\theta_1 = +\pi/2$. Векторная диаграмма при этом имеет вид, представленный на рис. 21.30, *а*. Из нее видно, что $U_{mC} > U_{mL}$, т. е. $\frac{1}{\omega C} > \omega L$.

На рис. 21.30, *б* дан случай $\sin\theta_1 = -1$, $U_{mL} > U_{mC}$, т. е. $\omega L > \frac{1}{\omega C}$.

На основании последнего уравнения на рис. 21.31 построены зависимости величин U_{mL}, U_{mC} и U_m от амплитуды тока I_m. Таким образом, пользуясь методом гармонического баланса, мы нашли характеристики, полученные в § 21.11 при рассмотрении явления феррорезонанса методом эквивалентных синусоид.

21.16. Выделение высших гармоник в нелинейных цепях с целью преобразования частоты

До сих пор, пользуясь методом эквивалентных синусоид, мы, по сути дела, исключали из рассмотрения высшие гармоники в кривых тока и напряжения. Уже в предыдущем параграфе мы видели, что для аналитического определения первых гармоник необходимо принять во внимание наличие высших гармоник, и результат получается тем более точным, чем больший спектр гармоник принят во внимание.

В ряде случаев важным является определение самих высших гармоник. В таких случаях необходимо рассмотрение действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения. Такая задача возникает, например, если мы хотим воспользоваться наличием высших гармоник в нелинейных цепях с целью умножения частоты. В § 21.3 было отмечено, что наличие любого нелинейного безынерционного элемента в электрической цепи приводит к тому, что токи и напряжения в цепи оказываются несинусоидальными даже при синусоидальном напряжении, приложенном ко входным зажимам цепи. Выделяя ту или иную гармонику на выходе цепи, получаем, по существу, *умножение частоты*. Для получения достаточно высокого коэффициента полезного действия при таком преобразовании частоты целесообразно воспользоваться нелинейными элементами, в которых потери энергии невелики. Таковыми могут быть, например, нелинейные индуктивные и емкостные элементы. В следующих трех параграфах рассмотрим примеры умножителей, основанных на использовании нелинейных характеристик катушек с ферромагнитными сердечниками. В § 21.21 будет рассмотрена возможность применения с этой целью конденсаторов с нелинейной характеристикой.

Для преобразования частоты широко используются также устройства с управляемыми нелинейными элементами — электронными лампами и полупроводниковыми триодами.

21.17. Умножение частоты с помощью ферромагнитных элементов, основанное на выделении гармоник нулевой последовательности

Как было изложено в § 7.1, т. I, в симметричных многофазных системах гармоники, порядок которых равен или кратен числу фаз m, образуют симметричную систему нулевой последовательности. Остальные гармоники образуют симметричные системы прямой или обратной последовательности. Возьмем m одинаковых катушек с ферромагнитными сердечниками и соединим их обмотки в звезду без нейтрального провода. При питании этих обмоток от источника синусоидального симметричного m-фазного напряжения прямой последовательности вследствие нелинейности характеристик катушек в кривых тока появятся высшие гармоники. Однако гармоник, порядок которых равен или кратен m, в кривых тока не может быть, так как они, образуя систему нулевой последовательности, могут замыкаться только по нейтральному проводу, который в данном случае отсутствует. В таком случае эти гармоники появляются в кривых магнитного потока сердечников и, соответственно, в кривых фазовых напряжений на обмотках сердечников. Исходное условие отсутствия таких гармоник в линейном напряжении удовлетворяется, так как линейное напряжение равно разности фазовых. Если теперь наложить на все сердечники одинаковые вторичные обмотки, соединить их последовательно, то ЭДС гармоник, порядок которых равен или кратен m, сложатся арифметически, основные же гармоники ЭДС во вторичных обмотках в сумме дадут нуль. Таким образом, на вторичных зажимах частота напряжения будет в m раз превышать частоту напряжения первичной цепи, т. е. получаем умножение частоты в m раз.

Существенно отметить, что m-фазная система преобразуется в однофазную, т. е. происходит уменьшение числа фаз в m раз.

На этой идее основаны утроители и удвоители частоты. На рис. 21.32 схематически изображен утроитель частоты, а на рис. 21.33 — удвоитель частоты.

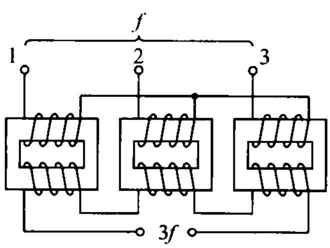

Рис. 21.32

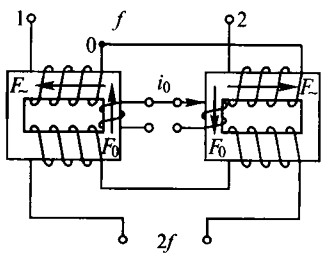

Рис. 21.33

Для утроителя частоты питание первичной цепи осуществляется от источника синусоидального симметричного трехфазного напряжения. На выходных зажимах получаем напряжение утроенной частоты в результате выделения третьей гармоники. В выходном напряжении будут содержаться также все нечетные гармоники, порядок которых кратен трем (9-я, 15-я, 21-я и т. д.). Четных гармоник нет вследствие симметрии кривой намагничивания сердечников.

Для удвоителя частоты питание первичной цепи осуществляется от источника синусоидального однофазного напряжения U_{12}. Два напряжения U_{01} и U_{02} между нейтральной точкой *0* и зажимами *1* и *2* образуют симметричную двухфазную систему со сдвигом фаз π. Согласно вышеизложенному, в соединенных последовательно вторичных обмотках могут быть выделены гармоники порядка $m = 2$ и порядка, кратного двум, т. е. все четные гармоники. Однако при симметрии кривой намагничивания четных гармоник быть не может. Для создания несимметрии в кривой намагничивания существует третья обмотка с постоянным подмагничивающим током i_0.

Кроме умножителей частоты, основанных на изложенном выше принципе, могут быть умножители резонансного выделения k-й гармоники. На рис. 21.34 приведена схема такого умножителя. Катушка L с ферромагнитным сердечником питается от источника частоты f. Конденсатор емкостью C_1 и катушка с индуктивностью L_1 служат для настройки всего первичного контура на частоту f. При этом ток в катушке L близок к синусоиде, а напряжение на ней имеет резко выраженный пикообразный характер. Вторичный контур L_2, C_2 настраивается в резонанс на k-ю гармонику несинусоидального напряжения, возникающего на зажимах катушки L. Таким образом, на приемнике с сопротивлением r выделяется частота kf, и, следовательно, получаем умножение частоты в k раз.

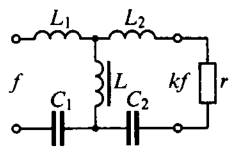

Рис. 21.34

На практике для умножения частоты применяются более сложные схемы, имеющие лучшие рабочие характеристики.

21.18. Расчет процессов в цепи методом сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов

Если заменить реальные характеристики нелинейных элементов кусочно-линейными характеристиками (рис. 21.35), то для расчета процессов в цепи можно воспользоваться следующим методом.

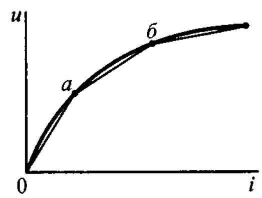

Рис. 21.35

В отдельные интервалы времени, пока во всех элементах цепи процессы соответствуют определенным прямолинейным отрезкам их характеристик, процесс во всей цепи описывается совокупностью линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых определяются параметрами этих линейных отрезков характеристик.

При переходе процесса в любом нелинейном элементе через точку излома характеристики (точки a и $б$ на рис. 21.35) изменяются параметры уравнений. Назовем момент каждого такого перехода моментом коммутации. Процесс за весь рассматриваемый промежуток времени разбивается на *интервалы*, заключенные между двумя любыми соседними моментами коммутации. Решения совокупности уравнений внутри каждого интервала содержат некоторое число своих произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные определяются из физических условий неизменности токов в индуктивных катушках и напряжений на конденсаторах в моменты коммутации, т. е. путем сопряжения решений, полученных для двух смежных интервалов. Соответственно этот метод можно назвать методом сопряжения интервалов. Подлежат определению также моменты коммутации из условий, что ток или напряжение достигает значения, соответствующего точке излома характеристики.

Периодические процессы повторяются через период T, и поэтому достаточно произвести расчет процессов в течение одного периода, используя условия, что значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах одинаковы в начале и в конце периода. В симметричных многофазных цепях процесс может повторяться за промежутки, составляющие целую долю периода. Такой промежуток можно назвать **интервалом повторяемости** процесса. Очевидно, при этом достаточно произвести расчет в пределах интервала повторяемости.

Метод сопряжения интервалов с успехом может быть применен, когда характеристики нелинейных элементов состоят из отрезков, близких к прямолинейным, например в случае использования элементов с ферритами, обладающими прямоугольной кривой намагничивания. Он широко используется для расчета цепей с ионными и полупроводниковыми вентилями.

21.19. О расчете нелинейных цепей с вентилями. Выпрямление переменного тока

На рис. 21.36 приведены характеристика $u(i)$ полупроводникового вентиля (диода) и кусочно-линейная аппроксимация этой характеристики. На рис. 21.37 изображены характеристика ионного вентиля и ее кусочно-линейная аппроксимация. Если пренебречь падением напряжения в вентиле при прохождении прямого тока и обратным током, то характеристика такого идеального вентиля принимает вид, показанный на рис. 21.38.

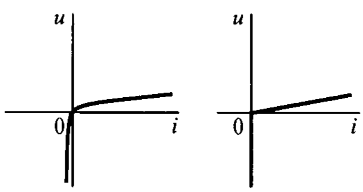

Рис. 21.36

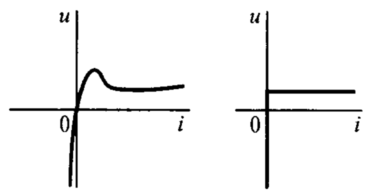

Рис. 21.37

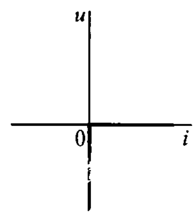

Рис. 21.38

В качестве примера применения метода сопряжения интервалов рассмотрим простую схему выпрямления тока, приведенную на рис. 21.39, полагая, что вентиль обладает идеальной характеристикой (рис. 21.38). Когда вентиль открыт, падение напряжения на нем равно нулю, а когда он закрыт, ток в нем равен нулю. Пусть приложенное напряжение изменяется по закону $u = U_m \sin \omega t$.

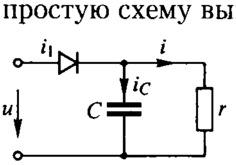

Рис. 21.39

В интервале $t_1 \le t \le t_2$ (рис. 21.40) вентиль открыт и конденсатор C заряжается. В этом интервале имеем уравнения:

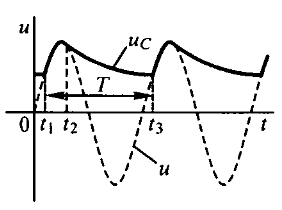

Рис. 21.40

$$u_C = u = U_m \sin \omega t; \quad i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t;$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t;$$

$$i_1 = i_C + i = \omega C U_m \cos \omega t + \frac{U_m}{r} \sin \omega t.$$

Вентиль гаснет в момент $t = t_2$, когда ток i_1, изменяясь, достигает точки излома характеристики (точка 0 на рис. 21.38), в данном случае когда ток i_1 падает до нуля. Отсюда для определения момента t_2 получаем уравнение

$$0 = \omega C U_m \cos\omega t_2 + \frac{U_m}{r}\sin\omega t_2 \quad \text{или} \quad \omega t_2 = -\operatorname{arctg}(\omega C r).$$

В интервале $t_2 \le t \le t_3$ вентиль не горит и конденсатор разряжается на сопротивление r. Имеем

$$u_C = ir = -i_C r = -rC\frac{du_C}{dt} \quad \text{или} \quad Cr\frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

откуда $u_C = Ae^{-\frac{t-t_2}{rC}}$, где A — значение u_C в начальный момент $t = t_2$ для этого интервала. Постоянную определим из условия сопряжения процессов в рассмотренных смежных интервалах, а именно в момент t_2, имея в виду, что напряжение на конденсаторе в этот момент не может измениться. Приравнивая значения для u_C в момент $t = t_2$, взятые из выражений для первого и второго интервалов, получаем

$$u_C(t_2) = U_m \sin(\omega t_2) = A.$$

Остается определить момент времени t_1 открытия вентиля. Его находим из условия, что интервалом повторяемости процесса в данном случае является период T приложенного напряжения. Следовательно, напряжение u_C в начале первого интервала в момент t_1 равно напряжению u_C в конце второго интервала в момент $t = t_1 + T$:

$$U_m \sin(\omega t_1) = U_m \sin(\omega t_2) e^{-\frac{t_1 + T - t_2}{rC}}$$

или

$$e^{\frac{t_1+T}{rC}} \sin(\omega t_1) = e^{\frac{t_2}{rC}} \sin(\omega t_2).$$

Из этого уравнения и определяется t_1.

Уже этот простой пример показывает, что для нахождения искомых величин необходимо решать трансцендентное уравнение. В более сложных цепях придется решать совокупность таких уравнений, в чем и заключается основная сложность метода. Вместе с тем этот метод открывает возможность с большой точностью находить действительные формы кривых тока и напряжения в тех случаях, когда характеристики нелинейных элементов близки к кусочно-линейным.

Роль конденсатора C в рассмотренной схеме легко усмотреть из рис. 21.40. Чем больше емкость C при заданном r, тем больше постоянная времени $\tau = rC$ разряда конденсатора, тем меньше будут различаться напряжения на приёмнике r в моменты времени t_2 и t_3 и, соответственно, будут меньше пульсации выпрямленного напряжения.

Обычно применяют более сложные схемы выпрямления. Так, на рис. 21.41 и 21.42 приведены схемы двухфазного и трехфазного выпрямителей с нейтральной точкой 0 во вторичных обмотках трансформатора. Если пренебречь индуктивностью цепи переменного тока, то ток во вторичной цепи проходит в каждый момент времени

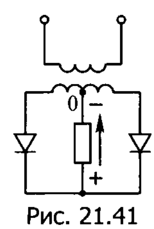

Рис. 21.41

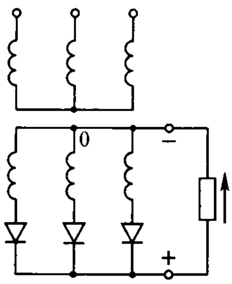

Рис. 21.42

только через один вентиль, присоединенный к обмотке трансформатора, напряжение на зажимах которой в данный момент наибольшее. Если пренебречь также и падением напряжения в вентилях, то напряжение на приемнике будет иметь вид, показанный на рис. 21.43, *а* и *б* жирными линиями. Рис. 21.43, *а* относится к схеме двухфазного выпрямителя (рис. 21.41), а рис. 21.43, *б* — к схеме трехфазного выпрямителя (рис. 21.42). Чем больше число фаз, тем меньше пульсации выпрямленного напряжения. Ток в приемнике все время протекает в одном направлении, указанном на рис. 21.41 и 21.42 стрелкой.

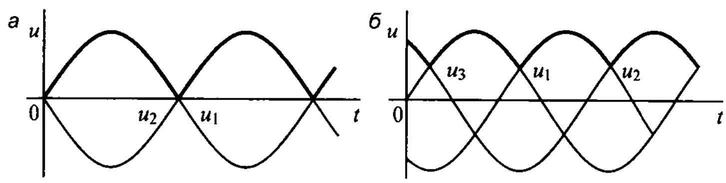

Рис. 21.43

Для выпрямления тока применяют также мостовые схемы. На рис. 21.44, *а* приведена однофазная, а на рис. 21.44, *б* — трехфазная мостовые схемы. Кривая выпрямленного напряжения для первой схемы имеет вид, показанный на рис. 21.43, *а*, а для второй — вид, приведенный на рис. 21.43, *б*.

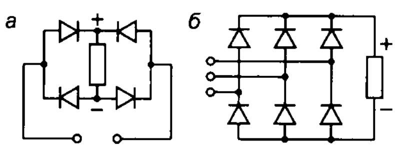

Рис. 21.44

Если в схемах, представленных на рис. 21.41, 21.42 и 21.44, учесть индуктивности цепи, а также если в этих схемах включены конденсаторы, то расчет процессов в них необходимо проводить по изложенному ранее методу сопряжения интервалов. При этом интервал повторяемости в схеме на рис. 21.41 и 21.44, *а* равен $T/2$, в схеме на рис. 21.42 он равен $T/3$ и в схеме на рис. 21.44, *б* — $T/6$.

21.20. Регулирование выпрямителей и преобразование постоянного тока в переменный с помощью управляемых вентилей

С помощью управляемых ионных или полупроводниковых вентилей можно осуществить регулирование процесса выпрямления переменного тока, а также преобразование постоянного тока в переменный, называемое *инвертированием*. Устройство для преобразования переменного тока в постоянный называют *выпрямителем*, а устройство для обратного преобразования — *инвертором*.

Рассмотрим процессы, происходящие при таких преобразованиях, на примере наиболее широко используемой для этой цели трехфазной мостовой схемы (рис. 21.45) с управляемыми ионными вентилями. Напряжение от вторичных обмоток трансформатора, образующее трехфазную систему, подается к зажимам *1*, *2*, *3* мостовой схемы.

Так как вентили проводят ток только в одном направлении (на рис. 21.45 — снизу вверх), то ток от зажимов *1*, или *2*, или *3* трансформатора может идти только вверх — через верхние вентили к зажиму *A* через цепь, приключенную к зажимам *A* и *B*, и от зажима *B* возвращаться через нижние вентили к одному из зажимов трансформатора. Поэтому в цепи, приключенной к зажимам *A* и *B*, ток течет всегда в одном направлении, т. е. происходит выпрямление тока

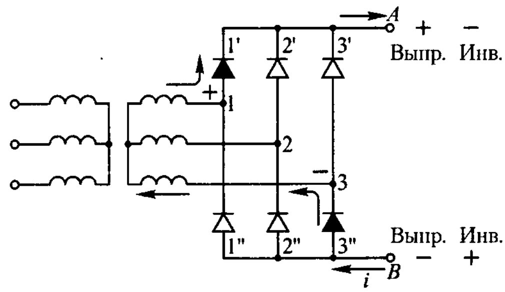

Рис. 21.45

Напряжение же между зажимами *A* и *B* может иметь различные знаки. Если зажим *A* положителен, а зажим *B* отрицателен, что отмечено на рис. 21.45 первой парой знаков, то энергия передается слева направо от преобразователя к приемнику, приключенному к зажимам *A* и *B* (не показанному на рисунке). Это соответствует режиму выпрямления, т. е. преобразованию переменного тока в постоянный.

Если зажим *A* отрицателен, а зажим *B* положителен (вторая пара знаков на рис 21.45), то энергия передается в обратном направлении, т. е. справа налево — от источника энергии, приключенного справа к зажимам *A* и *B* (не показанного на рисунке), к преобразователю. Это соответствует режиму инвертирования.

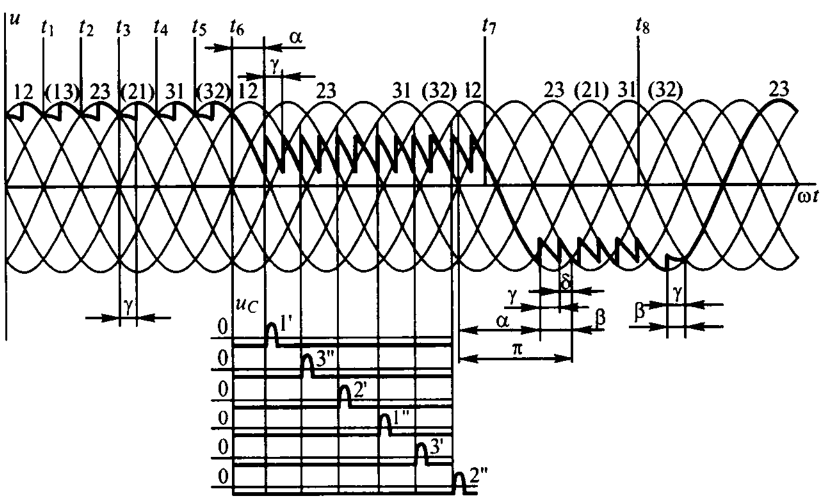

Рис. 21.46

На рис. 21.46 изображены синусоиды линейных напряжений u_{12}, u_{23} и u_{31} между зажимами *1* и *2*, *2* и *3*, *3* и *1* (они помечены парами цифр *12*, *23*, *31*). Эти напряжения положительны, когда потенциал зажима, соответствующий первому индексу, положителен по отношению к потенциалу зажима, соответствующему второму индексу. Здесь же показаны синусоиды линейных напряжений

$u_{21} = -u_{12}$, $u_{32} = -u_{23}$ и $u_{13} = -u_{31}$, т. е. напряжений между теми же зажимами, но взятых с другим знаком.

Если отсутствует сеточное управление, то в каждый момент времени должна гореть пара вентилей (один из верхней группы, другой из нижней группы), приключенных к зажимам трансформатора, напряжение между которыми в данный момент наибольшее. Так, например, в интервале $t_1 < t < t_2$, когда напряжение u_{13} превышает остальные напряжения, должны гореть вентили *1'* из верхней группы и *3''* из нижней группы, что отмечено на рис. 21.45 тем, что эти вентили зачернены. Вслед за моментом t_2 напряжение u_{23} становится больше напряжения u_{13}, и, следовательно, ток должен перейти от вентиля *1'* к вентилю *2'* верхней группы. Вентиль *1'* должен погаснуть, а вентиль *2'* — зажечься. Однако это не происходит мгновенно, так как обмотки трансформатора и обмотки подключенного к его первичным зажимам генератора переменного тока обладают индуктивностью. Поэтому переход тока с одного вентиля на другой будет происходить в течение некоторого промежутка времени γ/ω, соответствующего углу γ (рис. 21.46), называемому **углом коммутации**. Пока горят два верхних вентиля *1'* и *2'* и один нижний *3''*, напряжение на выходе между точками A и B, если пренебречь падением напряжения в вентилях, равно среднему значению напряжений u_{13} и u_{23}, т. е. $u_{AB} = (u_{13} + u_{23})/2$. Когда коммутация закончится, т. е. вентиль *1'* погаснет и в верхней группе останется гореть только вентиль *2'*, напряжение u_{AB} станет равным u_{23}. Так будет до момента t_3, когда начнется коммутация тока с вентиля *3''* на вентиль *1''* в нижней группе. Она закончится также через угол γ от момента t_3. Затем в момент t_4 начнется коммутация с вентиля *2'* на вентиль *3'* в верхней группе, в момент t_5 — с вентиля *1''* на вентиль *2''* в нижней группе, и в момент t_6 она должна начаться с вентиля *3'* на вентиль *1'* в верхней группе.

Так процесс продолжался бы, если бы выпрямитель оставался неуправляемым. Жирная линия на рис. 21.46 изображает кривую напряжения u_{AB} на выходе. До момента t_6 она представляет собой кривую выпрямленного напряжения неуправляемого выпрямителя.

Включим в промежутке между t_5 и t_6 сеточное управление, т. е. сообщим сеткам всех вентилей отрицательный потенциал по отношению к катодам, и будем подавать на сетки положительные импульсы напряжения, превышающие отрицательное напряжение на них. Импульсы будем подавать в порядке зажигания вентилей (*1'*, *3''*, *2'*, *1''*, *3'*, *2''*) через интервалы времени, соответствующие фазовому углу $\pi/6$ (нижняя часть рисунка).

При отсутствии управления в момент времени t_6 должна была начаться коммутация тока с вентиля *3'* на вентиль *1'*. Однако если сдвинем все импульсы вправо от этого момента на угол α, то в момент t_6 вентиль *1'* зажечься не сможет, так как напряжение на его сетке отрицательно, и, следовательно, будет продолжать гореть вентиль *3'*. В момент времени $t_6 + \alpha/\omega$ подается положительный импульс на сетку вентиля *1'* и он зажигается, так как его потенциал выше потенциала горящего вентиля *3'* верхней группы. В течение интервала времени γ/ω происходит коммутация тока на вентиль *1'*, после чего горят вентили *1'* и *2''* до момента подачи положительного импульса на сетку вентиля *3''*, когда начинается коммутация тока в нижней группе с вентиля *2''* на вентиль *3''*, и т. д.

Легко усмотреть, что среднее значение выпрямленного напряжения при этом получается меньше, чем при отсутствии регулирования. Чем больше угол α, тем меньше среднее значение выпрямленного напряжения. Поэтому угол α называют углом регулирования.

Предположим, что в момент времени t_7 положительные импульсы на сетке сдвинуты еще более вправо и угол α стал больше $\pi/2$, так что зажигание следующего вентиля происходит уже при напряжении другого знака. Вследствие этого и напряжение u_{AB} меняет свой знак. Преобразователь переходит в *инверторный режим*. Этот режим возможен, если к зажимам A и B справа от них присоединен другой источник энергии постоянного тока, например другой преобразователь с такой же схемой, работающий в выпрямительном режиме. Момент подачи положительного импульса при этом принято отсчитывать не от точки пересечения кривых положительных значений напряжений u_{32} и u_{12}, т. е. не с помощью угла α, а от точки пересечения кривых отрицательных значений тех же напряжений, т. е. с помощью угла β. Угол β называют углом опережения зажигания инвертора. Очевидно, $\beta = \pi - \alpha$.

При заданном среднем значении выпрямленного тока чем меньше β, тем больше u_{AB}, что легко усмотреть из рис. 21.46.

Угол $\delta = \beta - \gamma$ называют углом безопасности работы инвертора. Он должен быть больше нуля и больше угла δ_0, достаточного, чтобы к моменту очередного пересечения кривых напряжения успела закончиться деионизация пространства в только что погасшем вентиле.

Пусть в момент t_8 угол β уменьшился настолько, что получилось $\beta - \gamma < \delta_0$. Это значит, что к моменту пересечения кривых напряжений u_{32} и u_{21} погасающий вентиль *3''* или еще не погаснет, или, во всяком случае, в нем не успеет закончиться деионизация после погасания. Так как после момента пересечения этих кривых u_{23} становится больше u_{21}, то ток снова перейдет с вентиля *1'* обратно на вентиль *3''* и пара вентилей *2'* и *3''* будет продолжать гореть, что приведет к изменению знака напряжения на зажимах A и B.

Так как напряжение источника энергии, приключенного слева от этих зажимов, не изменило своего знака, то произойдет эффект короткого замыкания. Этот аварийный процесс называют опрокидыванием инвертора. Отсюда видно, что чрезвычайно важно поддерживать угол β достаточным, чтобы соблюдалось неравенство $\delta > \delta_0$.

Описанные устройства находят применение в электротехнике. Они имеют особое значение для осуществления мощных электрических передач энергии постоянным током высокого напряжения на большие расстояния, так как ионные вентили могут быть построены на большой ток и большое напряжение. Коэффициент полезного действия таких преобразователей весьма высок, так как падение напряжения в ионных вентилях мало. На рис. 21.47 дана принципиальная схема передачи постоянного тока.

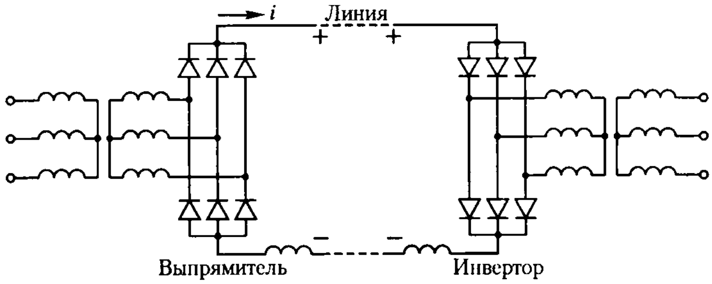

Рис. 21.47

При очень длинных и мощных линиях передача энергии постоянного тока высокого напряжения имеет большие технико-экономические преимущества по сравнению с передачей энергии переменного тока. При передаче энергии постоянного тока не требуется синхронной работы генераторов переменного тока, находящихся на различных концах линии передачи, отсутствуют индуктивное падение в линии и токи смещения между проводами линий, требуется меньше проводов в линии, облегчается изоляция проводов, так как действующее постоянное напряжение не отличается от максимального, как это имеет место при переменном токе, облегчаются опоры для проводов линии, сеточное управление дает возможность легко осуществить регулирование передачи и т. д.

Уже в 1919 г. изобретатель трехфазной системы передачи переменного тока М. О. Доливо-Добровольский указывал, что проблема передачи энергии на большие расстояния должна быть решена с использованием постоянного тока.

В каждом интервале времени горения определенных групп вентилей цепь можно рассматривать как линейную. Для нахождения токов необходимо найти полные интегралы системы линейных уравнений, описывающих процессы в этой цепи. При этом начальные условия в каждом последующем интервале должны соответствовать значениям токов и напряжений в конце предыдущего интервала. Весь этот расчет выполняется методом сопряжения интервалов.

21.21. Конденсаторы с нелинейными характеристиками в цепи переменного тока

Конденсаторы с сегнетоэлектриками, имеющие нелинейную характеристику $q = f(u)$, так же как и реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками, могут быть использованы для осуществления цепей переменного тока с особыми свойствами.

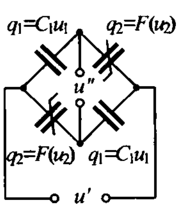

Рис. 21.48

Рассмотрим в виде примера мостовую схему (рис. 21.48), в которой в двух плечах включены одинаковые конденсаторы с постоянной емкостью C_1, т. е. имеющие одинаковые линейные характеристики $q_1 = C_1u_1$, а в двух других плечах включены конденсаторы с одинаковыми нелинейными характеристиками $q_2 = F(u_2)$

Если к одной из диагоналей моста подвести синусоидальное напряжение $u' = U'_{1m}\sin\omega t$, то ток в плечах моста будет содержать нечетные высшие гармоники, и, соответственно, нечетные высшие гармоники будут содержаться в кривых напряжений u_1 и u_2. Будем иметь

$$u_1 = U'_{1m}\sin(\omega t+\psi'_1)+U_{3m}\sin(3\omega t+\psi_3)+U_{5m}\sin(5\omega t+\psi_5)+\ldots;$$

$$u_2 = U''_{1m}\sin(\omega t+\psi''_1)-U_{3m}\sin(3\omega t+\psi_3)-U_{5m}\sin(5\omega t+\psi_5)-\ldots$$

Все высшие гармоники в кривой u_1 должны быть равны и противоположны соответствующим высшим гармоникам в кривой u_2, так как сумма $u_1 + u_2 = u' = U'_m \sin\omega t$ не содержит высших гармоник.

При изменении амплитуды U'_m приложенного напряжения изменяется ток в конденсаторах, а следовательно, изменяется соотношение между первыми гармониками напряжений u_1 и u_2, так как только один из последовательно включенных конденсаторов обладает нелинейной характеристикой. При этом изменяются также и значения высших гармоник. При надлежащем подборе параметров конденсаторов можно добиться того, чтобы при некотором значении U'_m величины $U'_m\sin(\omega t+\psi'_1)$ и $U''_{1m}\sin(\omega t+\psi''_1)$ были практически равны друг другу. Точное их равенство не удается получить из-за наличия углов ψ'_1 и ψ''_1, которые появляются вследствие потерь в конденсаторе с сегнетоэлектриками. Эти углы можно компенсировать, включив в другие плечи моста последовательно с конденсаторами C_1 сопротивления r_1 (рис. 21.49). Добившись равенства первых гармоник напряжений u_1 и u_2, получаем во второй диагонали моста напряжение u'', содержащее только высшие гармоники:

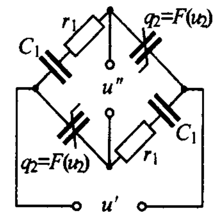

Рис. 21.49

$$u'' = u_1 - u_2 = 2U_{3m}\sin(3\omega t+\psi_3)+2U_{5m}\sin(5\omega t+\psi_5)+\ldots,$$

причем третья гармоника резко выделяется из всех остальных. Таким образом, рассмотренное простое устройство может служить утроителем частоты.

Можно осуществить схемы для выделения гармоник высокого порядка. Например, с помощью изображенной на рис. 21.50 схемы представляется возможным выделить в контуре L_1C_1 гармоники порядка $k = 21$ с достаточной амплитудой, настраивая контур в резонанс с этой гармоникой. Конденсатор C служит в этой схеме для того, чтобы дать путь высшим гармоникам помимо обмотки трансформатора. Нелинейный конденсатор в опытах, произведенных с такой схемой, имел в качестве диэлектрика титанат бария.

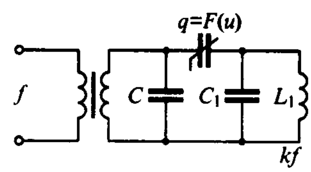

Рис. 21.50

Схема на рис. 21.49 в некотором диапазоне изменения напряжения U' работает как стабилизатор напряжения; действующее напряжение U'' на выходе при этом мало изменяется при значительном изменении напряжения U' на входе.

Можно осуществить усилитель с конденсаторами из сегнетоэлектриков наподобие ферромагнитным усилителям мощности. Если приложить к конденсатору медленно изменяющееся напряжение u_0, то для дополнительного переменного напряжения высокой частоты динамическая емкость и, соответственно, емкостное сопротивление конденсатора будут зависеть от величины u_0. Изменяя u_0 с низкой частотой, можно влиять на процессы в цепи высокой частоты, вызывая в ней значительное изменение мощности при весьма малой затрате энергии в цепи низкой частоты. Практически величина u_0 складывается из постоянного напряжения U_0 и управляющего напряжения U сравнительно низкой, например звуковой, частоты. Энергия в цепи высокой частоты вырабатывается включенным в эту цепь источником переменного напряжения высокой частоты, например ламповым генератором. На рис. 21.51 приведены три простые схемы включения диэлектрических усилителей с конденсаторами, обладающими нелинейными характеристиками. В качестве диэлектрика в таких конденсаторах могут быть использованы титанат бария, а также некоторые сочетания титанатов стронция и бария и цирконатов бария со свинцом. В зависимости от состава диэлектрика получается различная зависимость диэлектрической проницаемости от температуры. Диэлектрический усилитель обладает рядом достоинств: большой прочностью, высоким коэффициентом усиления, малыми размерами, высоким входным сопротивлением, отсутствием необходимости затрачивать время на разогрев, так как в нем нет нитей накала, имеющихся в ламповых усилителях. К недостаткам его относятся: значительные потери, необходимость для его питания источника высокой частоты и нестабильность коэффициента усиления при изменении температуры, что требует осуществления специальной компенсации.

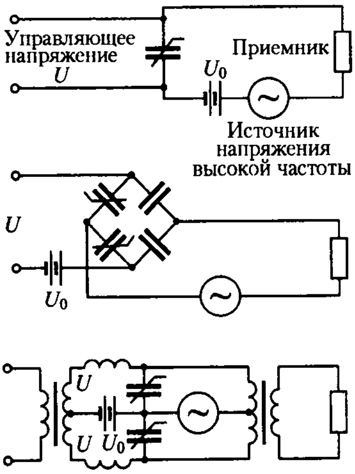

Рис. 21.51

21.22. О коэффициенте мощности при питании нелинейной цепи от источника синусоидального напряжения

В мощных электрических системах напряжение обычно близко к синусоидальному. Если к такой системе приключают приемник с нелинейной характеристикой, то ток, поступающий в приемник, содержит высшие гармоники.

Характерным случаем является питание выпрямительных установок от мощной электрической сети. В этом случае активная мощность определяется только основной гармоникой:

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 .$$

Вместе с тем имеем $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots} > I_1$ и $U = U_1$.

Следовательно, выражая P через U и I, получаем

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = UI\frac{I_1}{I}\cos\varphi_1 = UId\cos\varphi_1 = UI\lambda.$$

Таким образом, коэффициент мощности λ меньше $\cos\varphi_1$:

$$\lambda = d\cos\varphi_1 < \cos\varphi_1 ,$$

так как $d = I_1/I < 1$. Множитель d тем меньше единицы, чем больше содержится гармоник в кривой тока. Его называют иногда *коэффициентом искажения*. Отсюда видно, что с энергетической точки зрения появление высших гармоник в кривой тока нежелательно.

Глава двадцать вторая

Элементы теории колебаний и методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

22.1. Особенности колебательных процессов в нелинейных электрических цепях

Явления колебаний токов и напряжений в электрических цепях рассматривались ранее во многих разделах. К ним относились все периодические процессы как в линейных, так и в нелинейных электрических цепях, а также колебательные переходные процессы в линейных цепях. В линейных цепях при воздействии постоянных ЭДС установившимися могут быть только постоянные токи. При воздействии заданных периодических ЭДС в линейных цепях устанавливаются вполне определенные периодические токи. При переходных процессах в пассивных линейных цепях раз возникшие свободные колебания со временем затухают.

Существенно иной характер могут иметь колебательные процессы в нелинейных электрических цепях. При воздействии постоянных ЭДС в нелинейной цепи установившимися могут быть не только постоянные токи, но и колебательные токи. Последние возникают вследствие возможности неустойчивых состояний в нелинейной цепи, причем амплитуда установившихся колебаний определяется нелинейными свойствами цепи. При воздействии одной и той же периодической ЭДС в нелинейной цепи могут существовать различные колебательные установившиеся процессы, что зависит от исходных состоянии, из которых совершался переход к данному установившемуся процессу.

22.2. Устойчивость режима в цепи с индуктивностью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения

Рассмотрим цепь, в которую последовательно включены участок с постоянным сопротивлением r, индуктивная катушка с индуктивностью L и электрическая дуга (рис. 22.1). Пусть цепь находится под действием постоянного напряжения u_0. Электрическая дуга обладает падающей характеристикой $u = F(i)$, изображенной на рис. 22.2. Уравнение цепи имеет вид

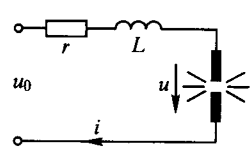

Рис. 22.1

$$u_0 = ri + L\frac{di}{dt} + u.$$

При равновесии в цепи ток не должен изменяться, т. е. должно быть $di/dt = 0$. Условимся обозначать все величины при равновесии с индексом «р». На рис. 22.2 проведена также прямая $u_0 - ri$. Равновесие имеет место при пересечении этой прямой с характеристикой дуги, т. е. в точках A и B. Выясним, какое из этих состояний равновесия будет устойчивым, а какое — неустойчивым. При равновесии имеем

$$u_0 = ri_\text{р} + u_\text{р}. \qquad (*)$$

Пусть в некоторый момент времени, который примем за начальный ($t = 0$), по какой-либо причине ток получил малое отклонение η_0 от положения равновесия. В следующие моменты времени это отклонение начнет изменяться, т. е. будет функцией времени. Обозначим его через η. При этом ток будет равен

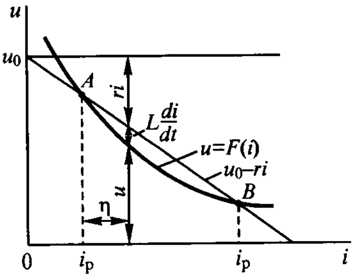

Рис. 22.2

$$i = i_\text{р} + \eta.$$

Напряжение u на дуге можно выразить через его значение $u_\text{р}$ при равновесии и через η, разлагая $u = F(i_\text{р} + \eta)$ в ряд по степеням η. Отбрасывая в первом приближении члены с η во второй и более высоких степенях, получаем

$$u = u_\text{р} + \Delta u = u_\text{р} + \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_\text{р}} \eta = u_\text{р} + r_\text{д}\eta,$$

где $r_\text{д} = \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_\text{р}}$ — динамическое сопротивление участка с электрической дугой при $i = i_\text{р}$.

Учитывая еще, что $di/dt = d\eta/dt$ и подставляя выражения для i, di/dt и u в основное уравнение цепи, находим

$$u_0 = ri_\text{р} + r\eta + L\frac{d\eta}{dt} + u_\text{р} + r_\text{д}\eta.$$

Вычитая отсюда уравнение равновесия (*), получаем уравнение для приращения тока η:

$$L\frac{d\eta}{dt} + (r + r_\text{д})\eta = 0.$$

Это уравнение оказалось *линейным*, поскольку мы ограничились первым приближением, т. е. ограничились первым членом в разложении Δu по степеням η. Его характеристическое уравнение

$$L\alpha + (r + r_\text{д}) = 0$$

имеет единственный корень

$$\alpha = -\frac{r + r_\text{д}}{L},$$

и решение для η с учетом начального его значения имеет вид

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{r + r_\text{д}}{L}t}.$$

Если $\alpha < 0$, т. е. если $(r + r_д) > 0$, то $\eta \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. ток i возвращается к его значению $i_р$ при равновесии.

Наоборот, при $\alpha > 0$, т. е. при $(r + r_д) < 0$, имеем $\eta \to \infty$ при $t \to \infty$, т. е. величина i удаляется от ее значения $i_р$ при равновесии.

Так как вследствие падающей характеристики дуги $r_д = \dfrac{du}{dt} < 0$, то условие $(r + r_д) > 0$ означает, что наклон прямой $u_0 - ri$ больше наклона кривой $u = F(i)$, что имеет место в точке B. Эта точка является точкой *устойчивого* равновесия.

Условие $(r + r_д) < 0$ означает, что наклон прямой $u_0 - ri$ меньше наклона кривой $u = F(i)$, что имеет место в точке A. Эта точка является точкой *неустойчивого* равновесия. Малейшее отклонение от нее ведет либо к переходу в точку B, либо к погасанию дуги.

Таким образом, устойчивое состояние соответствует *отрицательному* корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения η. Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что динамическое сопротивление $(r + r_д)$ всей цепи положительно.

22.3. Устойчивость режима в цепи с емкостью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 22.3, где участок с нелинейным сопротивлением имеет падающую характеристику типа характеристики, показанной на рис. 22.2. Для нее имеем уравнения

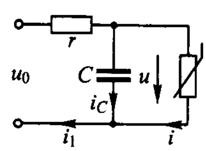

Рис. 22.3

$$u_0 = ri_1 + u; \quad i_1 = i + i_C = i + C\frac{du}{dt}.$$

Следовательно,

$$u_0 = ri + rC\frac{du}{dt} + u. \qquad (**)$$

При равновесии $u = u_р = \text{const}$ и $du/dt = 0$, т. е.

$$u_0 = ri_р + u_р. \qquad (***)$$

Пусть напряжение u получает вследствие какой-либо причины в момент $t = 0$ малое приращение η_0. Дальше это приращение η изменяется во времени. Имеем

$$u = u_р + \eta \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Ток i есть функция напряжения u, определяемая характеристикой участка с нелинейным сопротивлением, т. е. $i = \psi(u)$. Разлагая $i = \psi(u_р + \eta)$ по степеням η и отбрасывая в первом приближении все члены с η в степени выше первой, получаем

$$i = i_р + \left(\frac{di}{du}\right)_{u=u_р}\eta = i_р + g_д\eta,$$

где $g_д = (di/du)_{u=u_р}$ – динамическая проводимость участка с нелинейным сопротивлением при $u = u_р$.

Подставляя в основное уравнение (**) цепи величины i, du/dt и u и вычитая из него уравнение равновесия (***), получаем в этом первом приближении линейное уравнение для η:

$$rC\frac{d\eta}{dt}+(g_д r+1)\eta=0 \quad \text{или} \quad C\frac{d\eta}{dt}+(g_д+g)\eta=0,$$

где $g = 1/r$. Его характеристическое уравнение $C\alpha + (g + g_д) = 0$ имеет единственный корень $\alpha = -(g + g_д)/C$, и решение для η имеет вид

$$\eta=\eta_0 e^{-\frac{g+g_д}{C}t}.$$

При $\alpha < 0$, т. е. при $(g + g_д) > 0$, отклонение стремится к нулю при возрастании времени. При этом имеем *устойчивое* состояние.

Нетрудно убедиться, что точкой устойчивого равновесия теперь является точка A (рис. 22.2). Для этой точки $(r + r_д) < 0$, и следовательно, $\frac{r+r_д}{rr_д} > 0$, так как $r_д < 0$. Таким образом, для точки A удовлетворяется условие устойчивого равновесия

$$\frac{r+r_д}{rr_д}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r_д}=(g+g_д)>0.$$

Точка B теперь является точкой *неустойчивого* равновесия.

Таким образом, устойчивое состояние и в этом случае соответствует *отрицательному* корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения η. Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что сумма динамических проводимостей $(g + g_д)$ положительна.

22.4. О выборе эквивалентной схемы для рассмотрения вопроса об устойчивости

Рассмотрим простейший случай, когда цепь состоит только из последовательно включенных сопротивления r и нелинейного элемента, имеющего участок с падающей характеристикой (рис. 22.4), и в цепи нет явно включенных конденсатора и катушки. Пусть напряжение u_0, сопротивление r и характеристика $u = F(i)$ таковы, что имеют место две точки равновесия A и B (рис. 22.5). Возникает вопрос, какая из точек A или B может быть точкой устойчивого равновесия. Из рассмотрения в предыдущих параграфах видим, что решение этого вопроса зависит от наличия индуктивности или емкости в цепи. Любой участок реальной цепи, в том числе и любой реальный нелинейный элемент, обладает, как было сказано в главе 3, т. I, распределенными емкостью и индуктивностью. Учитывая только индуктивность, получим один ответ (см. § 22.2), а учитывая только емкость, получим другой ответ (см. § 22.3). При учете и индуктивности, и емкости можем представить эквивалентные схемы или

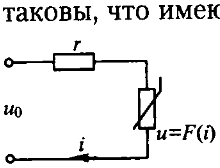

Рис. 22.4

в виде рис. 22.6, или в виде рис. 22.7. Обе схемы приближенные, так как в действительности и индуктивность, и емкость являются распределенными. Составляя для схем рис. 22.6 и 22.7 уравнения и решая их для малого отклонения η от состояния равновесия, получим также различные ответы в отношении точек устойчивого равновесия.

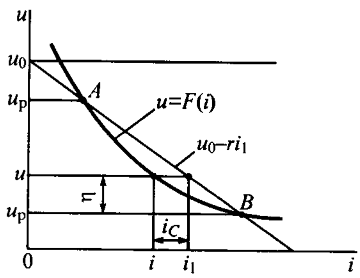

Рис. 22.5

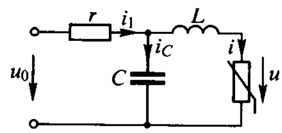

Рис. 22.6

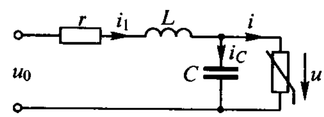

Рис. 22.7

Так, например, для схемы рис. 22.6 имеем уравнения:

$$i_1 = i_C + i; \quad u_0 = ri_1 + L\frac{di}{dt} + u; \quad \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt + u_C(0) = L\frac{di}{dt} + u.$$

Исключив из них i_C и i_1, получим

$$u_0 = rCL\frac{d^2 i}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + ri + rC\frac{du}{dt} + u.$$

Принимая $i = i_р + \eta$, имеем $u = u_р\left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_р}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{di^2}\right)_{i=i_р}\eta^2 + \ldots$ и, ограничиваясь первыми двумя членами, находим $u = u_р + r_д\eta$. Тогда для малого отклонения η тока от положения равновесия получаем уравнение

$$0 = rCL\frac{d^2\eta}{dt^2} + L\frac{d\eta}{dt} + r\eta + rr_д C\frac{d\eta}{dt} + r_д\eta \qquad (*)$$

или $\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0$, где $2\delta = \frac{1}{rC} + \frac{r_д}{L}$ и $\omega_0^2 = \frac{r + r_д}{rCL}$.

Легко заметить, что уравнение (*) переходит в уравнение, рассмотренное в § 22.2 при $C = 0$, и в уравнение, рассмотренное в § 22.3 при $L = 0$.

Корни характеристического уравнения равны

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Если $\omega_0^2 = \frac{r + r_д}{rCL} < 0$, т. е. $r + r_д < 0$, то оба корня вещественны и один корень положительный; следовательно, раз возникшее отклонение η нарастает со временем и состояние *неустойчивое*. Условию $r + r_д < 0$ отвечает точка A.

Если $\omega_0^2 > 0$, т. е. $r + r_д > 0$, то состояние характеризуется точкой B. При этом корни α_1 и α_2 могут быть вещественными или комплексными. При условии $\delta > 0$ вещественные части обоих корней отрицательны, раз возникшее отклонение η затухает во времени и состояние *устойчивое*. При $\delta < 0$ состояние *неустойчивое*.

Составляя аналогичным образом уравнения для схемы на рис. 22.7 и решая их для малого отклонения η от состояния равновесия, получим уравнение $\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\dfrac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0$, где $2\delta = \dfrac{1}{r_д C} + \dfrac{r}{L}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{r + r_д}{r_д CL}$.

Теперь $\omega_0^2 < 0$ при $r + r_д > 0$, и, следовательно, *неустойчивой* будет точка B. В случае $\omega_0^2 > 0$ точка A будет *устойчивой* при $\delta > 0$ и *неустойчивой* при $\delta < 0$.

Итак, в зависимости от выбора эквивалентной схемы ответ получается различным.

Сопоставляя результат, полученный в § 22.3 при $L = 0$, когда устойчивой была точка A, с результатом по схеме рис. 22.6 при $L \neq 0$, когда точка A оказалась неустойчивой при любом сколь угодно малом, но конечном значении L, видим, что чрезвычайно важно учитывать даже малые параметры. Сопоставление же результатов по рис. 22.6 и 22.7 показывает, что столь же важно правильно отразить в эквивалентной схеме взаимное расположение параметров L и C. Это зависит от характера самого нелинейного элемента. Если он имеет преимущественно индуктивный характер, т. е. в нем энергия магнитного поля преобладает над энергией электрического поля, что, например, наблюдается при электрической дуге, существующей при больших токах и малых напряжениях, то следует избрать схему рис. 22.6. Если нелинейный элемент имеет преимущественно емкостный характер, т. е. в нем энергия электрического поля преобладает над энергией магнитного поля, что наблюдается, например, в неоновой лампе, работающей при сравнительно больших напряжениях и ничтожных токах, то следует избрать схему на рис. 22.7.

22.5. Общие соображения об устойчивости режима в сложных нелинейных электрических цепях, питаемых от источников постоянного напряжения

В общем случае для сложной цепи, включенной под действие постоянного напряжения и содержащей нелинейные сопротивления с падающими участками характеристик, а также содержащей в отдельных ветвях индуктивные катушки, конденсаторы и резисторы с постоянными параметрами, для анализа устойчивости значений постоянных токов, которые являются частными решениями уравнений, описывающих систему, необходимо пользоваться тем же методом, который был применен при рассмотрении приведенных в предыдущих параграфах примеров.

Составив по законам Кирхгофа систему уравнений для рассматриваемой нелинейной цепи и решив ее, например, с помощью методов, изложенных в главе 20, находим значения постоянных токов в цепи, отвечающие состоянию равновесия, и динамические сопротивления нелинейных элементов при этих значениях токов. Если все эти сопротивления положительны, то соответствующее равновесие устойчиво. Если же хотя бы одно динамическое сопротивление отрицательно, то надлежит исследовать вопрос об устойчивости соответствующего состояния.

Давая малое приращение η току в одном из нелинейных элементов, находим, пользуясь системой уравнений цепи и найденными значениями динамических сопротивлений, приращения всех других токов и напряжений. При этом считаем, что динамические сопротивления нелинейных элементов остаются постоянными при малых отклонениях от рассматриваемого положения равновесия. Это соответствует тому первому приближению, которое было сделано в приведенных ранее примерах при отбрасывании членов с η в степенях, больших, чем первая. По сути дела, применяя такой метод, мы линеаризуем характеристики нелинейных элементов вблизи точек равновесия. Такой метод, соответственно, иногда называют методом л и н е а р и з а ц и и в м а л о м.

Имея систему уравнений с получившими приращения токами и систему уравнений при равновесии и вычитая вторую из первой, получаем систему *линейных* уравнений для приращений токов или напряжений при указанном первом приближении. Решая эту систему относительно приращений η отдельных токов, получим, вообще говоря, линейные уравнения n-го порядка.

Анализ переходных процессов вблизи точек равновесия для малых отклонений можно произвести всеми методами теории линейных цепей. Для этого достаточно в исходной цепи, содержащей в общем случае индуктивные катушки, конденсаторы и резисторы с нелинейными характеристиками, заменить эти нелинейные элементы линейными, параметры которых равны дифференциальным параметрам $L_д$, $C_д$, $r_д$. Если в исходной цепи имеются элементы с линейными характеристиками, то они вносятся в расчетную схему без изменений, так как для них дифференциальные и статические параметры тождественны.

При таком подходе получаем возможность непосредственно для приращений формировать систему уравнений. Характеристические уравнения, соответствующие им, имеют n корней α_k, и решения при отсутствии кратных корней имеют вид

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_{0k} e^{\alpha_k t}.$$

Корни α_k могут быть все вещественны или могут иметь в своем составе также пары сопряженных комплексных корней. В последнем случае происходят колебательные процессы.

С интересующей нас точки зрения важно следующее: *если вещественные части всех корней характеристических уравнений отрицательны, то* $\eta \to 0$ при $t \to \infty$, процесс оказывается затухающим и рассматриваемое *состояние равновесия устойчивое.*

Если хоть один корень имеет положительную вещественную часть, то η нарастает с увеличением t и *состояние равновесия неустойчивое.*

Если система уравнений сформирована относительно переменных состояния, то анализ устойчивости может быть произведен и без отыскания корней характеристического уравнения.

Пусть относительно приращений токов в индуктивных катушках и напряжений на зажимах конденсаторов (переменных состояния) получена система уравнений в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{Vmatrix} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{Vmatrix} \quad \text{при} \quad \begin{Vmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{Vmatrix}_{t=0} = \begin{Vmatrix} \mathbf{u}_C(0) \\ \mathbf{i}_L(0) \end{Vmatrix},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица, составленная из дифференциальных параметров элементов цепи согласно топологическим особенностям цепи. Заметим, что переходный процесс для малых приращений происходит только за счет энергии магнитных полей индуктивных катушек и энергии электрических полей конденсаторов, и поэтому в обобщенных ветвях остаются только пассивные элементы. Для коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

имеем $a_k = (-1)^k\,\Sigma$ — главные миноры k-го порядка.

Принимая во внимание критерий Рауса–Гурвица (см. § 14.8), для выяснения устойчивости процесса достаточно исследовать условия

$$a_0 > 0;\quad a_1 > 0;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и т. д.}$$

В качестве примера рассмотрим цепь, представленную на рис. 22.8, *а*, состоящую в общем случае только из нелинейных элементов. Эквивалентная схема этой цепи для малых приращений при условии U_0 = const представлена на рис. 22.8, *б*, а граф схемы — на рис. 22.8, *в*. Из графа для сечения по ветви *2* дерева имеем $i_2 = i_3 = i$; для контура, образованного связью *4*, имеем $u_1 = u_4 = u$.

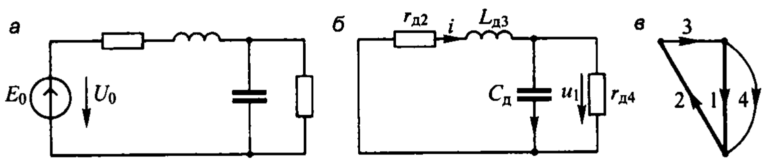

Рис. 22.8

Для токов, определяемых сечением *1*, и напряжений, определяемых контуром, образованным связью *3*, имеем систему уравнений:

$$C_д \frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1}{r_{д4}} + i_3 \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{r_{д4}C_д}u + \frac{1}{C_д}i;$$

$$L_д \frac{di_3}{dt} = -u_1 - r_{д2}i_3 \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L_д}u - \frac{r_{д2}}{L_д}i.$$

В матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{r_{д4}C_д} & \dfrac{1}{C_д} \\ -\dfrac{1}{L_д} & -\dfrac{r_{д2}}{L_д} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix}.$$

Главный минор порядка 0 равен единице. Главный минор первого порядка равен сумме диагональных элементов с обратным знаком. Главный минор второго порядка в данном случае есть определитель матрицы **A**. Таким образом, имеем

$$a_0 = 1; \quad a_1 = (-1)^1\left(-\frac{1}{r_{д4}C_д} - \frac{r_{д2}}{L_д}\right) = \frac{1}{r_{д4}C_д} + \frac{r_{д2}}{L_д}; \quad a_2 = \frac{r_{д2}}{r_{д4}L_дC_д} + \frac{1}{L_дC_д}.$$

Условиями устойчивости точки равновесия будут

$$\left(\frac{1}{r_{д4}C_д} + \frac{r_{д2}}{L_д}\right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{L_дC_д}\left(\frac{r_{д2}}{r_{д4}} + 1\right) > 0.$$

Приведенная ранее методика исследования устойчивости точки равновесия для сложных цепей требует большого объема вычислений. Так, например, число главных миноров k-го порядка для матрицы **A** порядка ($n \times n$) равно $C_n^k = n!/k!(n-k)!$. Суммарное число операций для вычисления коэффициентов a_k характеристического уравнения матриц высокого порядка может оказаться слишком большим даже для современных ЭВМ. Поэтому данную методику целесообразно применять для относительно простых цепей.

А. М. Ляпунов доказал, что указанное выше первое приближение, приводящее к *линейности* уравнений для малых отклонений от положения равновесия, вполне достаточно, чтобы по отмеченным критериям судить об устойчивости состояния. Особым является случай при нулевых значениях вещественной части корней, когда надо учитывать члены с η в более высокой степени, чем первая.

Если бы система уравнений оставалась линейной при любых сколь угодно больших η, то в случае неустойчивого состояния раз возникшее отклонение η возрастало бы до бесконечности. В действительности замена участков характеристик нелинейных элементов вблизи точек равновесия отрезками прямых допустима только при малых отклонениях η от положения равновесия. *При больших η надо учитывать нелинейность характеристик.* Это может привести к ограничению получающихся отклонений, т. е. к переходу системы в новые устойчивые состояния. Так, в рассмотренном в § 22.2 примере положительное отклонение тока от точки A неустойчивого равновесия переводит систему в точку B устойчивого равновесия, причем это связано именно с нелинейностью характеристики $u = F(i)$.

Особый интерес такие соображения имеют в отношении колебательных систем. Здесь выход системы из состояния неустойчивого равновесия приводит к возникновению колебаний с нарастающей амплитудой. Однако вследствие нелинейности характеристик элементов цепи нарастание амплитуды колебаний может оказаться ограниченным, и наступает *устойчивый периодический процесс.*

Такой процесс называют автоколебательным, так как цепь питается от источника постоянного напряжения и колебания возникают внутри самой цепи вследствие ее особых свойств. Теория устойчивости периодических движений детально разработана А. М. Ляпуновым. Мы рассмотрим этот вопрос на примерах транзисторного генератора и генератора релаксационных колебаний.

22.6. Возбуждение автоколебаний в нелинейной системе с обратной связью. Транзисторный генератор

В предыдущих параграфах мы видели, что при питании электрической цепи от источника постоянного напряжения могут возникнуть неустойчивые состояния равновесия. Возникшие вследствие случайного толчка небольшие отклонения от такого состояния равновесия в дальнейшем нарастают. Особый интерес представляют колебательные системы, в которых возникшие отклонения от положения неустойчивого равновесия развиваются в виде колебательного процесса. Как уже было сказано, амплитуда этих колебаний ограничивается вследствие нелинейных свойств цепи. В § 22.2, 22.3 и 22.4 были рассмотрены случаи, когда причиной неустойчивого состояния являлось наличие в цепи нелинейного элемента с падающей характеристикой.

В § 13.7, т. I отмечалась возможность возникновения неустойчивых состояний вследствие наличия достаточно большой положительной обратной связи.

Характерным примером этого последнего случая является транзисторный генератор. Простейшая схема такого генератора, построенная с использованием полевого транзистора (см. § 19.11), изображена на рис. 22.9.

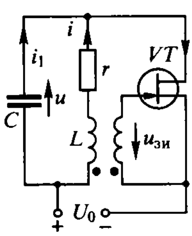

Рис. 22.9

Мы рассмотрим условия самовозбуждения колебаний в этой конкретной схеме именно с целью выявления роли обратной связи на основе общих положений об устойчивости, сформулированных в предыдущем параграфе, а также на основе общих зависимостей, характеризующих цепи с обратными связями.

Обратная связь в рассматриваемой схеме генератора осуществляется с помощью взаимной индукции между колебательным контуром L, C и цепью затвора полевого транзистора. Раз возникшие вследствие начального толчка колебания в контуре L, C создают переменное напряжение на затворе, поддерживающее эти колебания.

Выясним требования к значению коэффициента взаимной индукции M, при которых обеспечивается достаточная для самовозбуждения колебаний положительная обратная связь. Составим уравнения цепи. Напряжение на контуре u связано с током в ветви r, L контура уравнением

$$u = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Напряжение $u_{си}$ между стоком и истоком равно

$$u_{си} = U_0 - u = U_0 - ri - L\frac{di}{dt}.$$

Напряжение $u_{зи}$ между затвором и истоком равно ЭДС взаимной индукции: $u_{зи} = -M\dfrac{di}{dt}$, так как током затвора, а соответственно, и падением напряжения от него в цепи затвора пренебрегаем.

Ток в цепи стока равен сумме тока i в катушке контура и тока $i_1 = C\dfrac{du}{dt}$:

$$i_с = i + i_1 = i + C\frac{du}{dt} = i + rC\frac{di}{dt} + CL\frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Ток $i_с$ транзистора нелинейно зависит от напряжения $u_{си}$ между стоком и истоком и от напряжения $u_{зи}$ между затвором и истоком. Эту зависимость можно записать в общем виде: $i_с = \varphi(u_{зи}, u_{си})$.

При постоянном напряжении U_0 в цепи и отсутствии колебаний в контуре через триод будет протекать постоянный ток $i_{с0}$. Так как постоянный ток не проходит через конденсатор, то ток $i_{с0}$ проходит через катушку L и, следовательно, $i_{с0} = i_0$. Постоянный ток i_0 не индуцирует ЭДС в цепи затвора, и $u_{зи} = 0$. На контуре имеется малое постоянное напряжение $u_0 = ri_0$, а на стоке транзистора постоянное напряжение $u_{с0} = U_0 - u_0$. Это состояние равновесия на рис. 22.10 изображено точкой A на семействе характеристик триода.

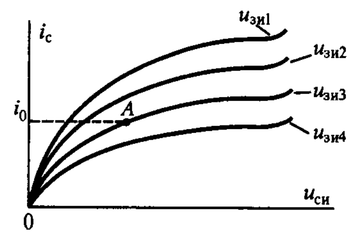

Рис. 22.10

Пусть в результате случайного толчка ток в катушке получил небольшое приращение η и принял значение $i = i_0 + \eta$. Соответственно, все величины получат приращения, определяемые вышеприведенными уравнениями цепи, а именно:

$$\Delta u = r\eta + L\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta u_{си} = -r\eta - L\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta u_{зи} = -M\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta i_с = \eta + rC\frac{d\eta}{dt} + LC\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Нелинейное уравнение $i_с = \varphi(u_{зи}, u_{си})$ дает связь между величинами $\Delta i_с$, $\Delta u_{зи}$ и $\Delta u_{си}$. Воспользуемся разложением функции $i_с = \varphi(u_{зи}, u_{си})$ в ряд по степеням малых величин $\Delta u_{зи}$ и $\Delta u_{си}$. Имеем

$$i_с = i_{с0} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\Delta u_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{си}}\Delta u_{си} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 i_с}{\partial u_{зи}^2}(\Delta u_{зи})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 i_с}{\partial u_{си}^2}(\Delta u_{си})^2 + \ldots$$

Пренебрегая малыми величинами второго и более высоких порядков, получаем

$$\Delta i_с = i_с - i_{с0} = \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\Delta u_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{си}}\Delta u_{си} = S\Delta u_{зи} + G\Delta u_{си}.$$

Здесь S — крутизна характеристики в точке равновесия A и $G = 1/R_{вн}$, причем G — выходная проводимость триода, а $R_{вн}$ — его внутреннее сопротивление.

Пренебрежение малыми величинами второго и более высоких порядков соответствует линеаризации характеристики вблизи точки равновесия. Иными словами, мы полагаем, что величины S и G постоянны в пределах малого отклонения тока $\Delta i_с$ от точки равновесия.

Подставляя в последнее уравнение величины $\Delta i_с$, $\Delta u_{зи}$ и $\Delta u_{си}$, выраженные через η, получим

$$\eta + rC\frac{d\eta}{dt} + LC\frac{d^2\eta}{dt^2} = -SM\frac{d\eta}{dt} - Gr\eta - GL\frac{d\eta}{dt},$$

или

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0, \text{ где } 2\delta = \frac{rC + SM + GL}{LC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1 + Gr}{LC}.$$

Характеристическое уравнение $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$ имеет корни

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega'.$$

Они будут сопряженными комплексными, когда $\delta < \omega_0$. При этом процесс будет колебательным с частотой ω'. Решение уравнения для η имеет вид

$$\eta = \sum_{k=1}^{2}\eta_{0k}e^{\alpha_k t} = \eta_{01}e^{\alpha_1 t} + \eta_{02}e^{\alpha_2 t} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega' t + \psi).$$

Величина $\eta_{01} + \eta_{02} = A\sin\psi$ является начальным отклонением тока i от его значения i_0.

Колебания будут затухающими и состояние равновесия устойчивым около значения тока i_0, если вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, т. е. $\delta > 0$.

Состояние будет неустойчивым и раз возникшие колебания будут нарастать, если вещественные части корней характеристического уравнения положительны, т. е. $\delta < 0$. Последнее и явится условием самовозбуждения колебаний. Имеем это условие в виде

$$SM + GL + rC < 0, \text{ т. е. } M < -\frac{GL + rC}{S}.$$

Таким образом, для положительности обратной связи необходимо, чтобы M было отрицательно, и для обеспечения самовозбуждения абсолютное его значение должно удовлетворять условию

$$|M| > \frac{GL + rC}{S}.$$

Эти колебания нарастали бы беспредельно, если бы прямолинейная часть характеристики простиралась в обе стороны до бесконечности. В действительности характеристика триода *нелинейна*, и это имеет решающее значение для установления устойчивых колебаний с вполне определенной амплитудой. Что это будет в действительности так, вытекает из простых физических соображений. Возрастание колебательной составляющей тока от точки A по характеристике вверх ограничено током насыщения триода, а вниз — невозможностью изменения направления тока через него. Вопрос об установлении устойчивой амплитуды количественно будет рассмотрен в § 22.15.

Для пояснения процессов в транзисторном генераторе на рис. 22.11 приведена векторная диаграмма для основных гармоник колебательных составляющих токов и напряжений. Ток в катушке $\dot{I}$ отстает от напряжения на контуре $\dot{U}$ на угол, меньший $\pi/2$, но близкий к $\pi/2$ вследствие высокой добротности контура. Ток в конденсаторе $\dot{I}_1$ упреждает напряжение $\dot{U}$ на угол $\pi/2$, поскольку потерями в конденсаторе пренебрегаем. Напряжение на затворе $\dot{U}_{зи} = -j\omega M\dot{I}$ опережает ток $\dot{I}$ на угол $\pi/2$, так как $M < 0$. Напряжение на стоке $\dot{U}_{си}$ равно и противоположно напряжению на контуре, так как для переменных составляющих имеем $\dot{U}_{си} = -\dot{U}$. Сумма токов в катушке $\dot{I}$ и в конденсаторе $\dot{I}_1$ равняется току $\dot{I}_с$.

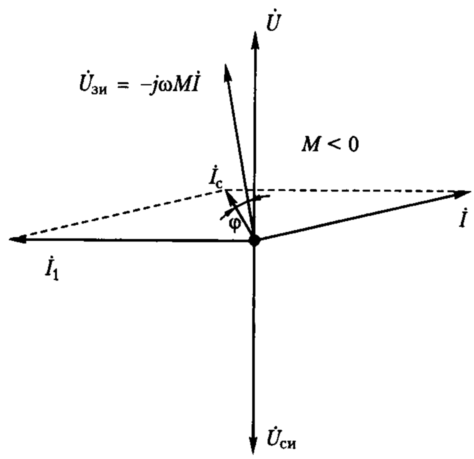

Рис. 22.11

Из диаграммы хорошо видно, что переменная составляющая напряжения $\dot{U}_{си}$ на стоке находится почти в противофазе с напряжением на затворе. При этом, поскольку сдвиг фаз φ между $\dot{U}$ и $\dot{I}_с$ близок к нулю, мощность $UI_с \cos\varphi > 0$ и энергия поступает в контур. Сдвиг фаз между током $\dot{I}_с$ и напряжением $\dot{U}_{си}$ равен $\pi - \varphi$. Поэтому

$$U_{си} I_с \cos(\pi - \varphi) = -UI_с \cos\varphi < 0,$$

и транзистор работает в режиме генератора колебаний.

Обычно на практике режим, в котором работает транзисторный генератор, отличается от рассмотренного тем, что напряжение на затворе имеет также постоянную составляющую. Этим достигается повышение коэффициента полезного действия генератора, так как работа происходит на нижнем участке характеристики триода и в моменты больших значений $u_{си}$ ток $i_с$ стока практически равен нулю, что и приводит к снижению потерь в триоде. Переменная составляющая тока $i_с$ при этом существенно отличается от синусоидальной, ток же i в контуре остается практически синусоидальным вследствие большой добротности контура.

Рассмотрим вопрос об условиях возбуждения автоколебаний в транзисторном генераторе (см. рис. 22.9), пользуясь эквивалентной схемой и понятием о передаточной функции замкнутой и разомкнутой систем.

Рассматривая процесс на малом участке характеристики, который принимается линейным, получаем линейные уравнения; следовательно, можем воспользоваться операторным методом. На рис. 22.12 изображена схема генератора, в которой полевой триод заменен его эквивалентной схемой.

По схеме рис. 22.12 легко рассчитать передаточную функцию всей замкнутой системы, если известны передаточные функции $K_1(p)$ и $K_2(p)$ разомкнутой системы и устройства обратной связи. Согласно изложенному в §§ 13.7, при наличии обратной связи для передаточной функции замкнутой системы имеем

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p)K_2(p)}.$$

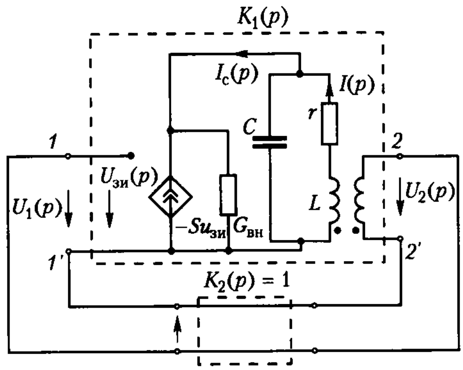

Рис. 22.12

В данном случае $K_2(p) = 1$, а $K_1(p)$ рассчитываем, полагая обратную связь отсутствующей. Операторное изображение $U_2'(p)$ напряжения на разомкнутых выходных зажимах равно

$$U_2'(p) = -pMI(p) = -pM\frac{U(p)}{r+pL} = \frac{-I_c(p)\dfrac{\frac{1}{pC}(r+pL)}{r+pL+\frac{1}{pC}}}{r+pL}pM.$$

Учитывая, что $I_c(p) = \dfrac{SU_{зи}(p)(1+rCp+LCp^2)}{LCp^2+(rC+GL)p+rG+1}$ получим

$$K_1(p) = \frac{U_2'(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{-SMp}{p^2LC+p(rC+GL)+rG+1}$$

и окончательно

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{-SMp}{p^2+p\left(\dfrac{r}{L}+\dfrac{G}{C}+\dfrac{SM}{LC}\right)+\dfrac{1}{LC}(1+Gr)}\frac{1}{LC}.$$

Знаменатель $K(p)$, приравненный к нулю, дает характеристическое уравнение дифференциального уравнения для напряжения $u_{зи}$ на затворе триода. Оно является одновременно также характеристическим уравнением для η, поскольку $u_{зи} = -M\dfrac{di}{dt} = -M\dfrac{d\eta}{dt}$. Содержащиеся в нем члены $\dfrac{r}{L}+\dfrac{G}{C}+\dfrac{SM}{LC} = 2\delta$ и $\dfrac{1}{LC}+\dfrac{Gr}{LC} = \omega_0^2$ являются теми же самыми, что были получены раньше.

Генераторы колебаний можно построить также на основе операционных усилителей, охваченных обратной связью.

Найдем условие самовозбуждения колебаний генератора, схема которого изображена на рис. 22.13, пользуясь понятиями передаточных функций замкнутой и разомкнутой систем.

Учитывая, что передаточная функция устройства при разомкнутой обратной связи $K(p) = \dfrac{kT_3 p}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)+T_3 p}$, где $T_1 = r_1 C_1$, $T_2 = r_2 C_2$, $T_3 = r_2 C_1$, записываем амплитудно-фазовую частотную характеристику $K(j\omega)$ и из условий $\operatorname{Re} K(j\omega) \geq -1$, $\operatorname{Im} K(j\omega) = 0$ частотного критерия устойчивости, рассмотренного в § 14.8, получаем частоту колебаний $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{r_1 r_2 C_1 C_2}}$, а также соотношение $k < -\dfrac{r_1 C_1 + r_2 C_2 + r_2 C_1}{r_2 C_1}$ между параметрами элементов цепи, при выполнении которого существуют автоколебания. Так как в полученном соотношении $k < 0$, то, следовательно, операционный усилитель должен быть инвертирующим, т. е. изменяющим фазу входного напряжения на 180°.

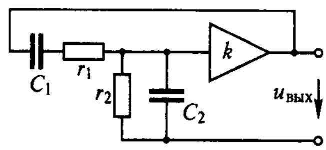

Рис. 22.13

В ряде случаев в цепь генератора вводят дополнительные элементы, позволяющие улучшить форму колебаний и приблизить ее к синусоидальной.

22.7. Релаксационные колебания

Колебания в транзисторном генераторе, рассмотренные в предыдущем параграфе, характеризуются переходом энергии из конденсатора в катушку и обратно в колебательном контуре L, C. Для осуществления таких колебаний необходимы два накопителя энергии в виде катушки и конденсатора. Используя нелинейные элементы с характеристиками, имеющими падающие участки, можно получить автоколебания при одном накопителе энергии, обычно конденсаторе. Такие колебания носят название релаксационных колебаний.

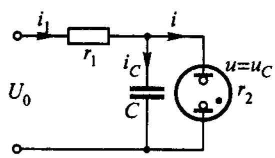

Рис. 22.14

Рассмотрим изображенную на рис. 22.14 цепь, в которой могут возникать релаксационные колебания.

Неоновая лампа с нелинейной характеристикой $u = \varphi(i)$, изображенной на рис. 22.15, включена параллельно конденсатору C. Между источником постоянного напряжения U_0 и лампой включено достаточно большое сопротивление r_1. Прямая $U_0 - r_1 i_1$ изображена также на рис. 22.15. Она пересекает характеристику лампы на падающем участке. Из рассмотрения в §§ 22.3 и 22.4 следует, что точка пересечения является точкой неустойчивого равновесия в цепи.

При включении цепи в момент $t = 0$ под постоянное напряжение U_0 конденсатор заряжается через сопротивление r_1. Лампа не горит, и ток в ней $i = 0$. Напряжение на конденсаторе (рис. 22.16) растет по закону (см. § 9.6, т. I)

$$u = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \text{ где } \tau_1 = r_1 C.$$

В момент $t = t_1$ напряжение u на конденсаторе и на лампе достигает значения U_2, при котором лампа вспыхивает. Ток в лампе резко возрастает, и происходит скачкообразный переход состояния лампы от точки B в точку G характеристики. С этого момента ток в лампе поддерживается за счет разряда конденсатора. Пусть r_2 есть среднее значение сопротивления лампы на участке GH характеристики. Так как $r_2 \ll r_1$, то при горении лампы можно не учитывать ток i_1. Полагая $r_2 = \text{const}$, получаем закон изменения напряжения на конденсаторе во время горения лампы в виде (см. § 9.6, т. I)

$$u = U_2 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}, \text{ где } \tau_2 = r_2 C.$$

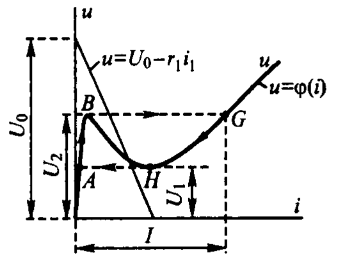

Рис. 22.15

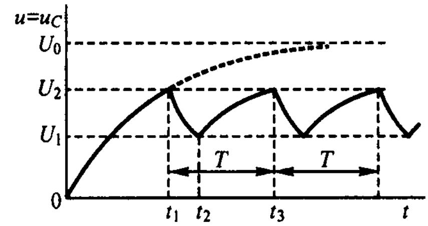

Рис. 22.16

К моменту $t = t_2$ напряжение упадет до значения U_1, при котором лампа гаснет. Ток в ней падает практически до нуля, и происходит скачкообразный переход состояния лампы из точки H в точку A характеристики. Интервал времени $t_2 - t_1$ определяется из выражения

$$U_1 = U_2 e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau_2}}, \text{ откуда } t_2 - t_1 = \tau_2 \ln\frac{U_2}{U_1}.$$

После погасания лампы конденсатор вновь начинает заряжаться от источника напряжения U_0 через сопротивление r_1 по закону

$$u = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

Произвольную постоянную A определяем из условия, что при $t = t_2$ имеем $u = U_1$, откуда

$$A = (U_1 - U_0)e^{\frac{t_2}{\tau_1}} \text{ и } u = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t-t_2}{\tau_1}}.$$

К моменту $t = t_3$ конденсатор зарядится до напряжения U_2, и лампа вновь вспыхнет. Интервал времени $t_3 - t_2$ определяется из уравнения

$$U_2 = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau_1}}, \text{ откуда } t_3 - t_2 = \tau_1 \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}.$$

В дальнейшем процесс периодически повторяется. Период колебаний равен

$$T = t_3 - t_1 = \tau_1 \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} + \tau_2 \ln\frac{U_2}{U_1}.$$

Релаксационные колебания с успехом могут быть использованы, например, для осуществления линейной развертки луча катодного осциллографа. Действительно, восходящие ветви кривой $u = F(t)$ (рис. 22.16) можно получить весьма близкими к прямолинейным, если они представляют собой только начальную часть кривой заряда конденсатора. Это будет иметь место, если U_0 взять достаточно большим, чтобы было

$$\frac{t_3 - t_2}{\tau_1} = \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} \ll 1.$$

Релаксационные колебания можно получить также в устройствах с другими схемами.

22.8. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Точное аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей возможно для весьма ограниченного круга задач. Основными инструментами расчета нелинейных электрических цепей на практике являются графические методы, те или иные приближенные аналитические методы, методы численного решения дифференциальных уравнений.

Среди приближенных аналитических методов следует выделить метод медленно меняющихся амплитуд, метод приближенного аналитического выражения характеристик нелинейных элементов, метод кусочно-линейного выражения характеристик нелинейных элементов. При использовании метода приближенного аналитического представления характеристик успех в значительной мере зависит от удачного выбора формулы для приближенного описания нелинейной характеристики. Это обстоятельство весьма ограничивает возможности метода. Наиболее простым способом приближенного представления нелинейной характеристики элемента является ее изображение совокупностью прямолинейных отрезков, т. е. кусочно-линейное выражение характеристики нелинейного элемента. При использовании этого метода, во-первых, упрощается аналитическая запись нелинейной характеристики, во-вторых, в пределах каждого линейного участка характеристики изменения токов и напряжений описываются линейными дифференциальными уравнениями, что дает возможность использовать весь аппарат расчета переходных процессов в линейных цепях. Однако при этом возникает задача определения постоянных интегрирования. Эти постоянные следует определять, приравнивая значения токов и напряжений в конце некоторого участка к их значениям в начале последующего участка. Такой подход приводит к решению системы трансцендентных уравнений.

С развитием вычислительной техники нашли широкое применение численные методы расчета переходных процессов в нелинейных цепях. Суть всех численных методов заключается в определении значений искомых токов и напряжений в отдельные моменты времени, разделенные некоторым интервалом. Если, например, имеем уравнение

$$\frac{di}{dt} = f(i, t, u_0),$$

то для момента времени t_{k+1}, когда значение тока равно i_{k+1}, имеем

$$i_{k+1} = i_k + \int_0^h f(i_k, t_k, u_0)\,dt = i_k + \int_0^h i'(i_k, t_k, u_0)\,dt,$$

где $h = t_{k+1} - t_k$.

В зависимости от способа интегрирования второго члена различают и методы решения дифференциальных уравнений. Наиболее простое выражение получают, полагая, что в интервале h производная искомой функции неизменна. Тогда имеют формулу

$$i_{k+1} = i_k + hf(i_k, t_k, u_0) \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i_{k+1} - i_k}{h} = f(i_k, t_k, u_0),$$

которой определяется метод Эйлера, или метод последовательных интервалов.

Согласно этому методу, весь интервал времени, в течение которого рассматривается процесс, разбивается на достаточно малые интервалы времени $\Delta t = h$. Соответственно, дифференциалы всех величин в уравнениях заменяются конечными приращениями этих величин за промежуток времени $\Delta t = h$. Получив в конце некоторого интервала времени значение одной из двух величин, связанных между собой нелинейной зависимостью, находят вторую из этих величин, пользуясь заданной в табличной формой или графически нелинейной характеристикой. Эти величины принимаются как начальные в следующем интервале времени. Подобные многократно повторяющиеся операции просто осуществить при помощи системы команд на ЭВМ.

Для численных методов исключительно большое значение имеет выбор подходящего интервала. Значение h сильно влияет на точность полученных результатов и на эффективность расчета в целом. Для нелинейных электрических цепей эта величина наперед неизвестна, и поэтому инженеру-расчетчику следует, исходя из физических соображений, опыта или знания некоторых особенностей рассматриваемого процесса, задавать наиболее приемлемые значения h.

В следующих параграфах показаны простейшие примеры применения некоторых из перечисленных ранее методов расчета нелинейных электрических цепей.

22.9. Метод графического интегрирования для расчета переходного процесса в нелинейной цепи

Метод графического интегрирования ценен тем, что при нем используется действительная характеристика нелинейного элемента без замены ее какой-либо другой близкой к ней характеристикой. В этом отношении метод графического интегрирования является наиболее точным. Однако в противоположность аналитическому методу, основанному на аналитическом выражении характеристики, он не дает общих связей, позволяющих судить о том, как изменяется процесс при изменении того или иного параметра. С некоторой неточностью, присущей всяким графическим построениям, в данном случае приходится мириться, так как и при аналитических методах решения нелинейных задач получаются только приближенные результаты вследствие необходимости принимать те или иные допущения.

Рассмотрим метод графического интегрирования на примерах замыкания накоротко катушки с ферромагнитным сердечником и включения такой катушки под действие постоянного напряжения.

Исследуя переходные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником различными методами, в данном случае графическим, не будем учитывать вихревые токи в сердечнике.

Уравнение, описывающее процесс короткого замыкания катушки, имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

где $\Psi = F(i)$ — потокосцепление с обмоткой катушки, нелинейно зависящее от тока i; r — сопротивление обмотки. Имеем

$$dt = -\frac{d\Psi}{ri},$$

откуда

$$t = -\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{ri} = \int_{\Psi}^{\Psi_0} \frac{d\Psi}{ri},$$

причем Ψ_0 — значение потокосцепления в момент замыкания катушки $t = 0$.

На рис. 22.17 изображены кривые намагничивания конкретной катушки (рис. 22.18) с замкнутым сердечником из листовой трансформаторной стали. Кривая *1* представляет собой первоначальную кривую намагничивания, кривая *2* — нисходящую ветвь при убывании потокосцепления от Ψ_0 до остаточного значения $\Psi_r = 0{,}2$ Вб. Пусть $\Psi_0 = 1{,}1$ Вб, чему соответствует ток $I_0 = 0{,}9$ А. Сопротивление обмотки рассматриваемой катушки $r = 8{,}5$ Ом.

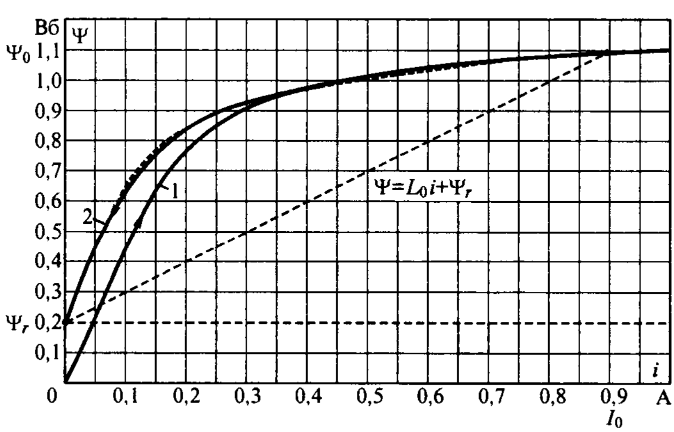

Рис. 22.17

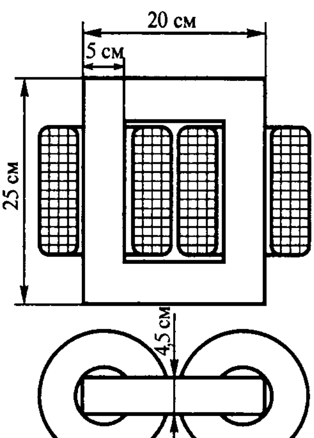

Рис. 22.18

Пользуясь кривой *2* на рис. 22.17, строим изображенную на рис. 22.19 кривую $1/(ri) = \varphi(\Psi)$, располагая которой, легко можно найти зависимость Ψ от t. Действительно, согласно последнему выражению, время t от момента замыкания, в течение которого потокосцепление изменяется от Ψ_0 до Ψ, определяется заштрихованной на рис. 22.19 площадью.

На рис. 22.20 построена полученная таким образом кривая $\Psi(t)$ для рассматриваемой катушки, а также кривая $i(t)$. Для построения последней значения i находятся по кривой *2* рис. 22.17 соответственно каждому значению Ψ. Здесь же для сравнения штриховыми линиями изображены кривые $\Psi(t)$ и $i(t)$, которые имели бы место при постоянной индуктивности $L_0 = \dfrac{\Psi_0 - \Psi_r}{I_0} = \dfrac{1{,}1 - 0{,}2}{0{,}9} = 1$ Гн,

т. е. если бы потокосцепление убывало от Ψ_0 до Ψ_r в зависимости от тока i по линейному закону $\Psi - \Psi_r = L_0 i$, чему соответствует штриховая прямая на рис. 22.17. Уравнения штриховых кривых на рис. 22.20 имеют вид

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}};\ \Psi = (\Psi_0 - \Psi_r)e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \Psi_r, \text{ где } \tau_0 = L_0/r = 1/8{,}5 = 0{,}118 \text{ с.}$$

На рис. 22.20 обозначено $\Psi_0 - \Psi_r = \psi$.

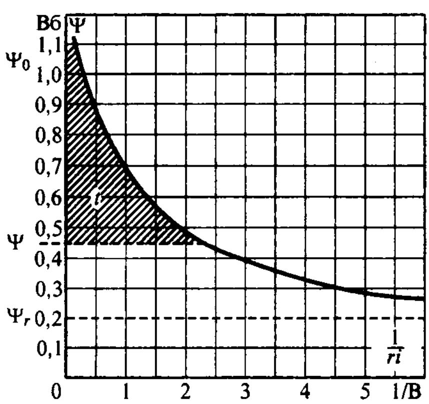

Рис. 22.19

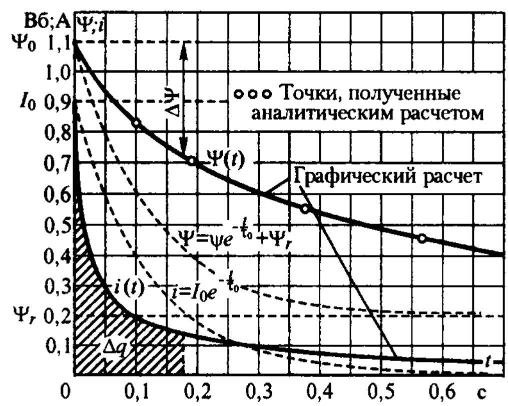

Рис. 22.20

Интересно обратить внимание на то, что вследствие нелинейности связи $\Psi = F(i)$, изображенной на рис. 22.17 (кривая *2*), ток вначале уменьшается быстрее, а поток — медленнее, чем при линейной зависимости между ними. Это можно пояснить следующим образом. Основное уравнение можно записать в виде

$$L_д \frac{di}{dt} + ri = 0,$$

где $L_д = d\Psi/di = \varphi(i)$ — динамическая индуктивность. Так как в начальный момент $L_д < L_0$ (см. рис. 22.17), то ток согласно последнему уравнению вначале падает быстрее, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Так как в те же моменты времени t ток i оказывается меньшим, то меньшей получается и ЭДС $-d\Psi/dt = ri$, т. е. потокосцепление убывает медленнее, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Из основного уравнения имеем

$$d\Psi = -ridt = -rdq; \quad \Delta\Psi = -r\Delta q,$$

где $\Delta\Psi$ — уменьшение потокосцепления; Δq — электрический заряд, перенесенный сквозь поперечное сечение цепи за промежуток времени от 0 до t. Величина Δq определяется площадью, заштрихованной на рис. 22.20; она меньше, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Соответственно, меньше получается и $\Delta\Psi$.

Так как величина $q = \int_0^\infty i\,dt = \frac{\Psi_0 - \Psi_r}{r}$ в обоих случаях должна быть одной и той же, то кривая $i(t)$ пересекается в некоторый момент времени с экспонентой $I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$. Замедление спадания тока при больших значениях t связано с большой динамической индуктивностью на крутой части кривой намагничивания.

Исследуем теперь методом графического интегрирования процесс включения катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения U_0 (рис. 22.21). Метод проиллюстрируем на примере той же конкретной катушки, для которой рассмотрен процесс короткого замыкания. Предположим, что перед включением сердечник был размагничен. В таком случае связь $\Psi = F(i)$ будет характеризоваться первоначальной кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). Дифференциальное уравнение теперь примет вид

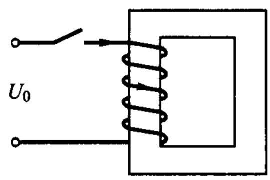

Рис. 22.21

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0,$$

откуда

$$\int_0^\Psi \frac{d\Psi}{U_0 - ri} = \int_0^t dt = t.$$

Пользуясь известной зависимостью $\Psi = F(i)$ (кривая *1* на рис. 22.17), строим кривую $\Psi = \varphi\left(\frac{1}{U_0 - ri}\right)$. Заштрихованная на рис. 22.22 площадь дает в соответствующем масштабе время t, в течение которого потокосцепление увеличивается от 0 до Ψ, т. е. позволяет найти зависимость $\Psi(t)$.

Напряжение U_0 выберем так, чтобы установившийся ток I_0, как и в предыдущем примере, был равен 0,9 А, т. е. примем $U_0 = I_0 r = 0{,}9 \cdot 8{,}5 = 7{,}65$ В.

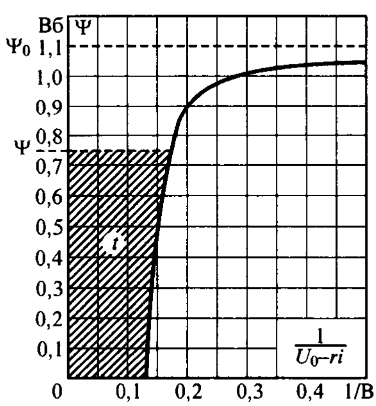

Рис. 22.22

На рис. 22.23 изображена рассчитанная таким путем кривая $\Psi(t)$, а также кривая $i(t)$. Для построения последней значения i для каждого момента времени берутся из кривой $\Psi(i)$ на рис. 22.17 - соответственно найденным значениям Ψ для этих моментов времени. Здесь же на рис. 22.23 штриховыми линиями изображены кривые $\Psi = \Psi_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$ и $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$, которые имели бы место при линейной связи потокосцепления и тока $\Psi = L_0' i$, где $L_0' = \Psi_0 / I_0 = = 1{,}1/0{,}9 = 1{,}22$ Гн, причем $\tau_0' = L_0'/r = 1{,}22/8{,}5 = 0{,}144$ с.

Ход кривой $i(t)$ можно, как и в предыдущем примере, пояснить, написав уравнение в виде

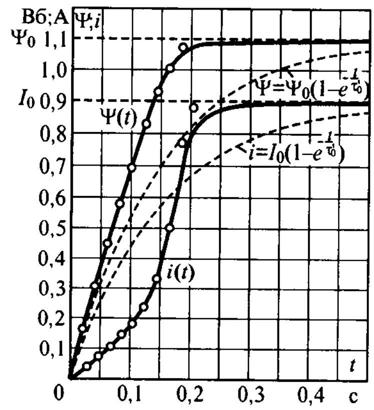

Рис. 22.23

$$L_д \frac{di}{dt} + ri = U_0.$$

Вначале $L_д > L_0$ и ток нарастает медленнее, чем при $L = L_0' = \text{const}$. При больших токах $L_д < L_0'$ и ток растет быстрее, чем при $L = L_0' = \text{const}$. Кривые $i(t)$ и $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$ должны в некоторый момент времени пересечься. Действительно, независимо от закона изменения тока во времени имеем

$$d\Psi = (U_0 - ri)dt,$$

и так как $U_0 = I_0 r$, то

$$\int_0^\infty (I_0 - i)dt = \frac{1}{r}\int_0^{\Psi_0} d\Psi = \frac{\Psi_0}{r},$$

т. е. площадь на рис. 22.23, ограниченная кривой $i(t)$ или $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$, осью ординат и горизонтальной линией I_0, не зависит от закона изменения тока во времени.

Потокосцепление возрастает значительно быстрее, чем при $L = L_0' = \text{const}$, и практически к моменту времени $t \approx 0{,}25$ с принимает свое установившееся значение Ψ_0.

22.10. Аналитический метод расчета переходных процессов, основанный на приближенном аналитическом выражении характеристики нелинейного элемента

Исследуем аналитическим методом задачу о замыкании накоротко катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 22.24), рассмотренную в начале предыдущего параграфа методом графического интегрирования. Выразим приближенно кривую намагничивания (кривую *2* на рис. 22.17) *аналитически* в виде

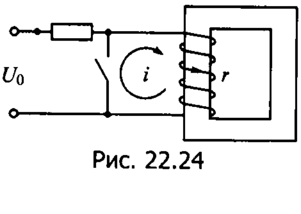

Рис. 22.24

$$i = a'(\Psi - \Psi_r) + b'(\Psi - \Psi_r)^{n+1}. \qquad (*)$$

Для краткости записи обозначим

$$\Psi - \Psi_r = \psi; \quad \Psi_0 - \Psi_r = \psi_0; \quad \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} = \frac{\psi}{\psi_0} = x.$$

При этом уравнение кривой, замещающей кривую намагничивания, запишется в виде

$$i = ax + bx^{n+1}, \qquad (^{**})$$

где $a = a'\psi_0$ и $b = b'\psi_0^{n+1}$ измеряются в амперах. Сделав подстановку $x = \sqrt[n]{a/b}\,y$, приведем уравнение к виду

$$i = a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y + a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y^{n+1} = Ay(1+y^n), \text{ где } A = a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

описывающее процесс в цепи, соответственно, принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + rAy(1+y^n) = 0,$$

или, так как $\psi = x\psi_0 = \psi_0\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y = \psi_0\frac{A}{a}y$, то

$$\frac{dy}{dt} + \frac{ar}{\psi_0}y(1+y^n) = 0,$$

откуда

$$-\frac{dy}{y(1+y^n)} = \frac{ar}{\psi_0}dt. \qquad (^{***})$$

Это уравнение легко интегрируется, так как

$$-\int\frac{dy}{y(1+y^n)} = \frac{1}{n}\ln(1+y^{-n}) + C,$$

что легко проверить дифференцированием.

При изменении времени от 0 до t потокосцепление изменяется от Ψ_0 до Ψ. Соответственно x изменяется от 1 до $x = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r}$, а y изменяется от $\sqrt[n]{b/a}$ до $\sqrt[n]{b/a}\,x$.

Интегрируя в этих пределах уравнение (***), получаем

$$\frac{1}{n}\left|\ln(1+y^{-n})\right|_{\sqrt[n]{b/a}}^{\sqrt[n]{b/a}\frac{\psi}{\psi_0}} = \frac{ar}{\psi_0}t \text{ или } \ln\left\{\frac{1+\frac{a}{b}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{-n}}{1+\frac{a}{b}}\right\} = n\frac{ar}{\psi_0}t.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b}\left(\frac{\Psi}{\psi_0}\right)^{-n} = \left(1+\frac{a}{b}\right)e^{\frac{nar}{\psi_0}t} - 1$$

и окончательно

$$\psi = \frac{\psi_0}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{b}{a}\right)e^{\frac{nar}{\psi_0}t} - \frac{b}{a}}} - 1 \qquad (****)$$

Зависимость $\Psi = F(i)$ для рассматриваемой катушки (кривая *2* на рис. 22.17) хорошо удовлетворяется, если принять в уравнении (*) $n = 6$, $a' = 0{,}21$ А/Вб и $b' = 1{,}45$ А/Вб^7, т. е. если выразить кривую *2* на рис. 22.17 уравнением

$$i = 0{,}21\psi + 1{,}45\psi^7.$$

Кривая замещения, соответствующая этому уравнению, изображена на рис. 22.17 штриховой линией. При этих числовых значениях коэффициентов имеем

$$\psi_0 = \Psi_0 - \Psi_r = 0{,}9\,\text{Вб}; \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\psi_0^n = \frac{1{,}45}{0{,}21}0{,}9^6 = 3{,}67;$$

$$\frac{nar}{\psi_0} = na'r = 6\cdot 0{,}21\cdot 8{,}5 = 10{,}7\ 1/\text{с}.$$

Искомое решение имеет вид

$$\psi = \frac{0{,}9}{\sqrt{4{,}67e^{10{,}7t} - 3{,}67}}\ \text{Вб}.$$

На рис. 22.20 нанесены на кривой $\Psi(t)$ кружками точки, вычисленные по этому уравнению. Точки отлично ложатся на кривую $\Psi(t)$, построенную графически, что объясняется хорошим совпадением кривой, выражаемой уравнением $i = 0{,}21\psi + 1{,}45\psi^7$, с действительной нисходящей кривой намагничивания $\Psi = F(i)$, т. е. удачным подбором аналитического выражения последней.

Достоинство аналитического метода заключается в том, что найденное общее выражение (****) для потокосцепления $\psi = \Psi - \Psi_r$ дает возможность рассмотреть влияние на ход кривой $\Psi(t)$ различных параметров: b, a, n, r, Ψ_0, Ψ_r.

Можно было бы получить аналитическим путем результат для случая включения той же катушки под действие постоянного напряжения (см. рис. 22.21), подобрав аналитическое выражение для кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). Новым и осложняющим решение фактором является теперь наличие в уравнении постоянного члена ($U_0 \neq 0$). Ограничимся только указанием возможного общего пути такого решения, так как он относится к любым нелинейным уравнениям первого порядка, описывающим процесс в той или иной электрической цепи при постоянном напряжении на ее зажимах.

Выразим $i = F(\Psi)$ в виде ряда

$$i = a_0 + a_1\Psi + a_2\Psi^2 + \ldots + a_k\Psi^k + \ldots = \sum_{k=0}^{n} a_k\Psi^k.$$

В частном случае (кривая *1* на рис. 22.17) $a_0 = 0$, но вообще это не обязательно. Для рассматриваемого примера имеем

$$U_0 - ri = U_0 - r\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^k = G(\Psi).$$

Уравнение цепи $d\Psi/dt + ri = U_0$ можно написать в виде

$$\frac{d\Psi}{G(\Psi)} = dt \quad \text{или} \quad \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = t - t_0,$$

где Ψ_0 — значение Ψ при $t = t_0$.

Если полином $G(\Psi)$ не имеет кратных корней, то, разлагая $1/G(\Psi)$ на простые дроби, получим

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = \sum_{s=1}^{n} \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{A_s d\Psi}{(\Psi - \Psi_s)} = \sum_{s=1}^{n} A_s \ln \frac{\Psi - \Psi_s}{\Psi_0 - \Psi_s},$$

где Ψ_s — корни уравнения $G(\Psi) = 0$, а постоянные A_s определяются следующим образом:

$$A_s = \frac{1}{G'(\Psi_s)} \quad \text{и} \quad G'(\Psi_s) = \left[\frac{dG(\Psi)}{d\Psi}\right]_{\Psi=\Psi_s}.$$

Задаваясь значениями Ψ, нетрудно найти соответствующие им значения t.

Чем больше членов возьмем в выражении $i = \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^k$, тем точнее удается представить аналитически заданную нелинейную характеристику элемента цепи, но тем более громоздким оказывается решение. При этом основная трудность заключается в отыскании корней уравнения $G(\Psi) = 0$ при высоком его порядке. Избежать наличия кратных корней всегда возможно, так как выражение $i = \Sigma a_k \Psi^k$ выбираем сами. Изложенное ценно тем, что дает общую методику решения подобных задач.

В конкретных случаях часто оказывается более целесообразным выразить $i = F(\Psi)$ не в виде ряда, а с помощью той или иной подходящей элементарной функции, которая позволяет сравнительно просто взять интеграл $\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)}$.

22.11. Метод последовательных интервалов для расчета переходных процессов в нелинейной цепи

Для иллюстрации метода последовательных интервалов произведем расчет этим методом задачи о включении катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения U_0 (см. рис. 22.21), исследованной в предыдущих параграфах другими методами.

Разобьем промежуток времени, в течение которого рассматривается процесс, на достаточно большое число малых и равных друг другу интервалов Δt. Для оценки выбора величины Δt можно подсчитать по известным конечным значениям Ψ_0 и I_0 постоянную времени $\tau_0' = L_0'/r = \Psi_0/(I_0 r)$, которая характеризовала бы процесс при $L = L_0 = \text{const}$. В данном случае $\tau_0' = 1{,}1/(0{,}9 \cdot 8{,}5) = 0{,}144$ с. Выберем, соответственно, $\Delta t = h = 0{,}01$ с.

Пусть k — порядковый номер интервала. Индекс будем приписывать значениям всех величин в конце k-го интервала. Тогда их значения в начале k-го интервала, равные их значениям в конце предыдущего интервала, будут иметь индексы $k-1$.

Дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_0 - ri = f(\Psi)$$

приближенно запишем в виде

$$(\Delta\Psi)_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} \approx (U_0 - ri_{k-1})\Delta t \quad \text{или} \quad \Psi_k = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1}).$$

В начале первого интервала $k = 1$, т. е. при $t = 0$ имеем

$$\Psi_{k-1} = \Psi_0 = 0; \quad i_{k-1} = i_0 = 0.$$

Следовательно, для первого интервала

$$(\Delta\Psi)_1 = \Psi_1 = U_0\Delta t = U_0 h.$$

Ток i_1 получаем из кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17) по найденному значению Ψ_1.

Приращение потокосцепления во втором интервале равно

$$(\Delta\Psi)_2 = \Psi_2 - \Psi_1 = (U_0 - ri_1)\Delta t.$$

Отсюда находим значение $\Psi_2 = \Psi_1 + (\Delta\Psi)_2$ и по нему из графика — ток i_2 и т. д.

Расчет для рассматриваемого нами конкретного примера приведен в таблице. Момент времени t_k к концу интервала, очевидно, равен $k\Delta t$.

k	t_k	$U_0 - ri_{k-1}$	$(\Delta\Psi)_k$	Ψ_k	i_k
1	0,01	7,65	0,0765	0,076	0,020
2	0,02	7,48	0,0748	0,151	0,036
3	0,03	7,34	0,0734	0,224	0,050
4	0,04	7,23	0,0723	0,296	0,067
5	0,05	7,08	0,0708	0,367	0,080
6	0,06	6,97	0,0697	0,437	0,100
7	0,07	6,80	0,0680	0,505	0,115
8	0,08	6,67	0,0667	0,572	0,130
9	0,09	6,55	0,0655	0,637	0,150
10	0,10	6,38	0,0638	0,701	0,170
11	0,11	6,21	0,0621	0,763	0,200
12	0,12	5,95	0,0595	0,822	0,230
13	0,13	5,70	0,0570	0,879	0,270
14	0,14	5,36	0,0536	0,933	0,325
15	0,15	4,90	0,0490	0,982	0,415

k	t_k	U_0-ri_{k-1}	$(\Delta\Psi)_k$	Ψ_k	i_k
16	0,16	4,13	0,0413	1,023	0,500
17	0,17	3,40	0,0340	1,057	0,605
18	0,18	2,50	0,0250	1,082	0,780
19	0,19	1,03	0,0103	1,092	0,850
20	0,20	0,45	0,0045	1,096	~0,9

На рис. 22.23 показаны кружками точки из таблицы. Эти точки хорошо ложатся на кривые, полученные методом графического интегрирования.

Метод последовательных интервалов, в принципе, должен обеспечивать тем большую точность, чем меньшими выбраны интервалы Δt. Однако при этом увеличивается количество вычислений, которые производятся с определенными погрешностями. Может оказаться, что погрешности будут нарастать, так как погрешность, допущенная при вычислении некоторой величины в каком-то интервале, отражается на значениях этой величины во всех последующих интервалах.

Действительно, из формулы $\Psi_k = \Psi_{k-1} + h(d\Psi/dt)_{k-1} = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1})$ следует, что если функция $f(\Psi)$ — монотонно возрастающая (убывающая) функция времени, то эта формула дает заниженное (завышенное) значение Ψ_k, так как в интервале $(k-1)h < t < kh$ значение $f(\Psi)$ принимается неизменным и равным $f(\Psi_{k-1})$, в то время как в действительности $f(\Psi_k) > f(\Psi_{k-1})$ $[f(\Psi_k) < f(\Psi_{k-1})]$. Результирующая погрешность будет тем большей, чем больше число интервалов.

Для повышения точности метода последовательных интервалов следует повысить точность вычисления производной, например, корректируя ее значение в точке $k-1$. Определим новое значение производной как среднее арифметическое ее значений в точках $k-1$ и k:

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{k-1} = f(\Psi_{k-1}) = \frac{1}{2}[f(\Psi_{k-1}) + f(\Psi_k)].$$

Тогда расчетная формула метода примет вид

$$\Psi_{k\,\text{кор}} = \Psi_{k-1} + \frac{h}{2}[f(\Psi_{k-1}) + f(\Psi_k)].$$

В новую формулу входит неизвестное еще значение $f(\Psi_k)$, которое можно прогнозировать, исходя из приближенного значения $\tilde{\Psi}_k$, вычисленного по обычной (без уточнения) формуле $\tilde{\Psi}_k = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1})$. Тогда $f(\Psi_k) \approx f(\tilde{\Psi}_k)$. Эта формула дает неточное, прогнозируемое значение производной в точке k. Однако даже при этом описанный прием коррекции производной $(d\Psi/dt)_{k-1}$ позволяет повысить точность метода последовательных интервалов. Графически суть коррекции проиллюстрирована на рис. 22.25, где крестиком обозначено значение $\Psi_{1\,\text{кор}}$ после коррекции.

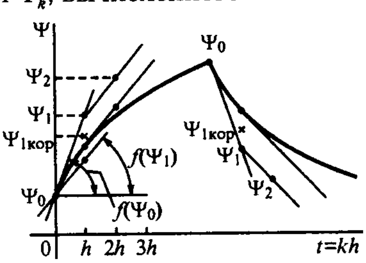

Рис. 22.25

В заключение необходимо отметить, что уменьшением шага Δt не только достигается более точный результат, но и устраняется неустойчивость процесса решения.

22.12. Метод расчета переходных процессов в нелинейной цепи, основанный на условной линеаризации уравнения цепи

Пусть в нелинейном дифференциальном уравнении, описывающем переходный процесс в цепи, член, содержащий коэффициент, зависящий от интенсивности процесса, имеет второстепенное значение по сравнению с другими членами уравнения, содержащими постоянные коэффициенты. Это значит, что максимальное значение этого члена в переходном процессе значительно меньше максимальных значений, достигаемых другими членами. В таком случае коэффициент при этом нелинейном члене приближенно может быть принят постоянным, равным некоторому среднему своему значению. Уравнение при этом становится линейным и может быть просто решено относительно искомой величины. Таким образом, этот метод основан на *условной линеаризации уравнения цепи.*

Применим этот метод к исследованию важного для практики случая включения катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение. Уравнение цепи имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Пусть член ri имеет второстепенное значение в указанном выше смысле по сравнению с членом $d\Psi/dt$. Такое условие соблюдается, например, при включении мощных ненагруженных во вторичной цепи трансформаторов, так как сопротивление r их обмоток обычно незначительно. Зависимость $\Psi = Li$ является нелинейной, так как L есть функция i. Если в уравнение подставить вместо Ψ его выражение через i, то уравнение относительно тока будет содержать нелинейность в главном члене. Если же выразить ток i через Ψ, то получим уравнение в виде

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L}\Psi = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

где нелинейный член $\frac{r}{L}\Psi$ является второстепенным и в нем можно приближенно принять $L = \text{const}$. Уравнение становится линейным и имеет решение

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Если $\Psi(0) = 0$, то $A = -\Psi_m \sin(\psi - \varphi)$. Переходный процесс проявляется наиболее интенсивно при включении цепи в такой момент, когда начальная фаза напряжения ψ равна $\varphi \pm \pi/2$. Пусть $\psi = \varphi - \pi/2$. При этом $A = \Psi_m$ и $\Psi(t) = -\Psi_m \cos \omega t + \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$.

На рис. 22.26, *а* приведены кривые потокосцепления $\Psi(t)$ и его составляющих $\Psi' = -\Psi_m \cos \omega t$ и $\Psi'' = \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$. Мы видим, что при большой постоянной времени L/r по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega$ потокосцепление может достичь через полпериода почти удвоенного значения своей амплитуды Ψ_m. На рис. 22.26, *б* приведена нелинейная характеристика $\Psi = \varphi(i)$. При установившемся процессе амплитуда тока I_m, соответствующая амплитуде потокосцепления Ψ_m, имеет незначительную величину. Однако при увеличении потокосцепления до $2\Psi_m$ ток получает весьма большое значение вследствие нелинейности характеристики сердечника. На рис. 22.27 показано изменение тока i во времени в переходном процессе, которое может быть найдено, если воспользоваться полученным выше выражением для $\Psi(t)$ и зависимостью тока от потокосцепления (рис. 22.26, *б*).

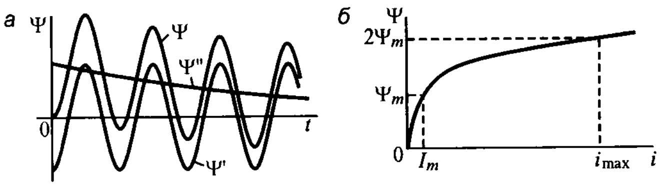

Рис. 22.26

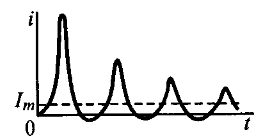

Рис. 22.27

Такой всплеск тока может вызвать механические разрушения обмотки, так как электродинамические усилия пропорциональны квадрату тока. Поэтому мощные ненагруженные трансформаторы включают через дополнительные сопротивления, которые затем замыкают накоротко.

Как было сказано выше, член ri можно считать второстепенным для достаточно больших катушек с ферромагнитным сердечником. Однако если бы мы стали рассматривать очень маленькую катушку с ферромагнитным сердечником, для которой r/L велико по сравнению с $1/T$, или рассмотрели бы случай, когда последовательно с катушкой в цепь включено большое активное сопротивление, то сделанное допущение могло бы оказаться несправедливым. Могло бы даже случиться, что второстепенным членом в вышеуказанном смысле оказалось слагаемое $d\Psi/dt$. В таком случае правильнее было бы принять $L = \text{const}$ в этом члене, т. е. написать

$$L\frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

и, приняв приближенно $L = \text{const}$, найти $i(t)$ путем решения этого линейного уравнения. Кривую же $\Psi(t)$ при этом следовало бы найти, пользуясь вычисленной зависимостью $i(t)$ и кривой намагничивания $\Psi = F(i)$. При этом оказалось бы, что ток содержит экспоненту с наложенной на нее синусоидой, а полуволны кривой потокосцепления, при которых сердечник насыщается, имели бы уплощенный вид.

Характер изменения величины r/L ни в том, ни в другом случае нельзя считать несущественным, если интересоваться действительной скоростью перехода процесса от начального, имеющего место сразу после включения, к установившемуся. В этом отношении выполненное выше решение является весьма приближенным, так как остается неясным, какое значение L следует подставить в выражение $Ae^{-\frac{r}{L}t}$. Можно рекомендовать подставить один раз наибольшее и другой раз наименьшее возможные значения, определяемые по кривой $\Psi = F(i)$. Этим путем определятся крайние пределы возможных процессов. Действительный процесс будет ближе к тому, который может быть рассчитан при некотором среднем значении L.

22.13. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости

Пусть исследуемый процесс в цепи описывается линейным или нелинейным уравнением первого или второго порядка, причем коэффициенты уравнения не являются явными функциями времени. Рассмотрим случай замыкания таких цепей накоротко или включения их под действие постоянной ЭДС, т. е. случай, когда свободный член уравнения не зависит от времени. Для уяснения характера процесса при этом оказывается весьма полезным изобразить его на так называемой фазовой плоскости. В этой плоскости одной из декартовых координат является изменяющаяся во времени величина $x(t)$, характеризующая исследуемый процесс, например ток в цепи $i(t)$, напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, потокосцепление катушки $\Psi(t)$ и т. п. Другой координатой является производная от этой величины по времени $y = dx/dt$, например, соответственно, di/dt, du_C/dt, $d\Psi/dt$ и т. д.

Точка (x, y) на фазовой плоскости называется изображающей точкой. Линия, которую вычерчивает на фазовой плоскости изображающая точка при протекании процесса во времени, называется фазовой траекторией.

Значения x и $y = dx/dt$, т. е. положение изображающей точки на плоскости, вполне определяют состояние процесса в данный момент времени.

Заметим, что *в верхней полуплоскости* $y = dx/dt > 0$, т. е. x увеличивается и, следовательно, *изображающая точка движется слева направо. В нижней полуплоскости* $y < 0$, x убывает и *изображающая точка движется справа налево.*

Если имеем уравнение первого порядка ($ax' + bx + c = 0$ или, соответственно, $ay + bx + c = 0$), то каждому значению x соответствует определенное значение y, определяемое из этого уравнения. Следовательно, на фазовой плоскости процесс изображается одной определенной фазовой траекторией (прямой, если уравнение линейное, т. е. a, b и c не зависят от x, и кривой, если уравнение нелинейное, причем a, b, c суть однозначные функции от x или y). В виде примера на рис. 22.28 сплошной кривой изображена фазовая траектория для случая включения катушки с ферромагнитным сердечником, рассмотренного в § 22.9 и 22.10, под действие постоянного напряжения $U_0 = 7{,}65$ В, т. е. для случая, исследованного различными методами, причем в качестве переменной x принят ток i в катушке. Из уравнения цепи

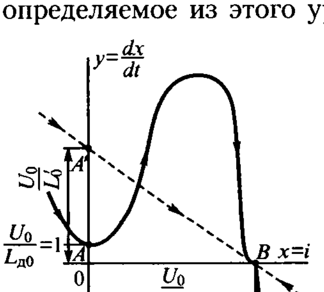

Рис. 22.28

$L_\text{д}\dfrac{di}{dt} + ri = U_0$ или, соответственно, $L_\text{д}y + rx = U_0$, где динамическая индуктивность $L_\text{д} = d\Psi/di = \varphi(i) = \varphi(x)$ находится по кривой намагничивания катушки (кривая *1* на рис. 22.17), определяем для каждого значения x соответствующее ему значение y и строим по точкам фазовую траекторию. Точка B является точкой установившегося режима ($i = I_0 = U_0/r$), к которой стремится изображающая точка, перемещаясь по фазовой траектории. Положение точки B на оси x зависит от значения и знака U_0. Скорость движения изображающей точки по мере приближения ее к точке B замедляется, и теоретически точка B достигается только при $t = \infty$.

Штриховая кривая на рис. 22.28 изображает фазовую траекторию для катушки с тем же сопротивлением r = 8,5 Ом, но при постоянной индуктивности L_0' = 1,22 Гн, т. е. когда процесс описывается линейным уравнением.

Точки A и A' являются точками начала процесса при $t = 0$. В данном примере начальное значение тока $i = x = 0$. Если бы начальное значение тока было иное, то процесс начинался бы в других точках фазовых траекторий, но во всех случаях изображающая точка стремится по той же траектории к точке B установившегося режима. Изменения тока во времени, соответствующие кривым на рис. 22.28, представлены кривыми $i(t)$ (сплошной и штриховой) на рис. 22.23.

Если в качестве переменной x для той же задачи принять потокосцепление Ψ, то уравнение будет иметь вид $\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L_{\text{ст}}}\Psi = U_0$ или, соответственно, $y + \frac{r}{L_{\text{ст}}}x = U_0$, где статическая индуктивность $L_{\text{ст}} = \Psi/i = F(\Psi)$ находится также по кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). На рис. 22.29 изображены фазовые траектории, дающие связь между потокосцеплением Ψ и скоростью его изменения $d\Psi/dt$ для той же катушки. Сплошная кривая соответствует нелинейной зависимости Ψ от i, а штриховая — линейной зависимости Ψ от i, т. е. предположению, что $L_0 = L_0'$ = const. Соответствующие кривые зависимости Ψ от времени приведены на рис. 22.23.

Если процесс описывается уравнением второго порядка, то в зависимости от начальных условий $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ изображающая точка будет описывать ту или иную фазовую траекторию, проходящую через эту начальную точку. При этом ни одна фазовая траектория не пересекается с другой, так как во всех случаях в реальной электрической цепи процесс от любого его состояния протекает определенным образом. Фазовые траектории могут только сходиться или расходиться в некоторых точках, что будет видно из дальнейшего.

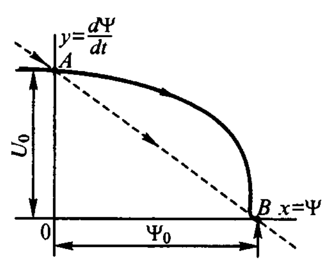

Рис. 22.29

Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим сначала вид фазовых траекторий для уже изученных случаев разряда конденсатора на цепь r, L для линейной цепи (см. § 9.8, т. I). Полагая в уравнении для тока в цепи $L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$, $i = x$ и $\frac{di}{dt} = \frac{dx}{dt} = y$, будем иметь

$$\frac{dy}{dt} + \frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x\right).$$

Разделив это уравнение на $dx/dt = y$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x}{y},$$

что и является уравнением фазовой траектории.

В случае, когда $r = 0$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{LC}\frac{x}{y},$$

т. е.

$$y^2 + \frac{1}{LC}x^2 = A^2,$$

причем A^2 определяется начальными значениями $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$. Таким образом, фазовая траектория является эллипсом с полуосями $A\sqrt{LC}$ и A. Так как при $x = x_{\max} = I_m$ имеем $y = 0$, то $A = I_m/\sqrt{LC} = y_{\max}$, где I_m — амплитуда тока, изменяющегося при $r = 0$ по синусоидальному закону (см. § 9.8). На рис. 22.30 приведены кривая тока $i(t)$ при $i(0) = 0$ и соответствующая ей фазовая траектория с начальной точкой A. При других начальных значениях тока и его производной изображающая точка будет также описывать эллипс, но в общем случае — с другими величинами полуосей. Все эти эллипсы охватывают точку M (в данном случае начало координат). Точка M, когда охватывающие ее фазовые траектории являются расположенными одна в другой замкнутыми кривыми, называется ц е н т р о м. В этом случае имеем устойчивые незатухающие колебания.

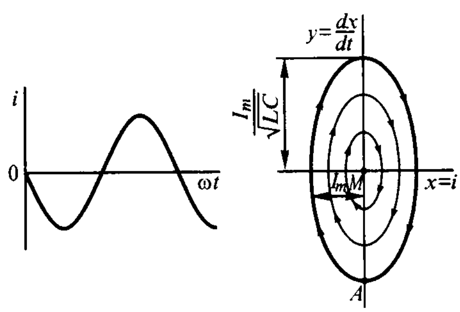

Рис. 22.30

Если $r \neq 0$, то разряд конденсатора будет либо затухающим колебательным при $r < 2\sqrt{L/C}$, либо апериодическим при $r > 2\sqrt{L/C}$. Кривые $i(t)$ для случая $i(0) = 0$ и соответствующие им фазовые траектории изображены на рис. 22.31 и 22.32.

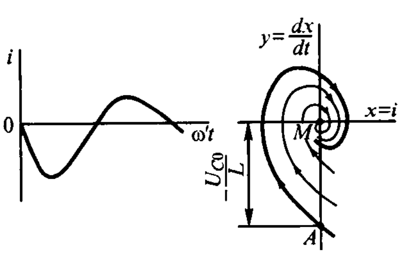

Рис. 22.31

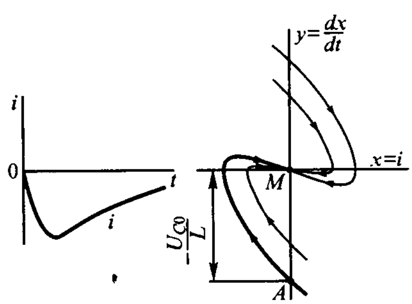

Рис. 22.32

В случае колебательного разряда ($r < 2\sqrt{L/C}$) фазовая траектория представляет собой свивающуюся к точке M спираль (см. рис. 22.31), причем каждому витку спирали соответствует один период колебаний. Теоретически около точки M располагается бесконечно большое число витков спирали, соответствующее бесконечному числу колебаний с убывающими в одном и том же отношении амплитудами. Практически же процесс затухает в течение конечного промежутка времени. Точка M, к которой сходятся спирали фазовых траекторий, носит название устойчивого фокуса.

В случае $r > 2\sqrt{L/C}$ процесс будет апериодическим, ток не меняет своего знака и на фазовой траектории изображающая точка не совершает более одного полуоборота. Точка M такого типа носит наименование устойчивого узла.

Во всех случаях, изображенных на рис. 22.30–22.32, начальная точка A имеет координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = (di/dt)_{t=0} = -U_{C0}/L$, где U_{C0} — начальное напряжение на конденсаторе, что вытекает из дифференциального уравнения цепи при условии $i(0) = 0$.

В рассмотренных случаях точки M являются точками устойчивого равновесия.

В нелинейных цепях, содержащих нелинейные элементы с падающими участками характеристик, как было показано в § 22.5, могут иметь место состояния как устойчивого, так и неустойчивого равновесия. Неустойчивое равновесие возможно также при наличии достаточной положительной обратной связи (см. § 22.6). В случае неустойчивого равновесия раз возникшее небольшое отклонение от положения равновесия в дальнейшем возрастает. При этом возможен случай апериодического перехода в другие устойчивые состояния равновесия или случай нарастания автоколебаний в цепи до некоторого устойчивого значения амплитуды колебаний, примером чего является транзисторный генератор (см. § 22.6). В обоих случаях новое устойчивое состояние или, соответственно, устойчивый периодический автоколебательный процесс определяются нелинейностью характеристик элементов цепи.

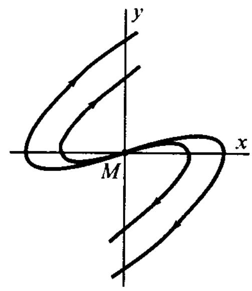

Рис. 22.33

При апериодическом процессе точке неустойчивого равновесия соответствует на фазовой плоскости точка M, называемая неустойчивым узлом (рис. 22.33). В этом случае расходящиеся от точки M фазовые траектории приходят в устойчивые узлы, не показанные на рисунке. При колебательном процессе это будет неустойчивый фокус (рис. 22.34). В этом случае расходящиеся от точки M спирали фазовых траекторий все свиваются к замкнутой кривой, называемой предельным циклом (рис. 22.34), который и соответствует установившимся автоколебаниям. Если, согласно начальным условиям, начальная точка окажется вне предельного цикла, то фазовая траектория, свиваясь, приходит также к этому предельному циклу.

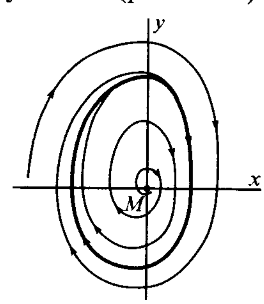

Рис. 22.34

Заметим, что хотя на фазовой траектории моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории, явно не фиксированы, однако они могут быть найдены методом, изложенным в следующем параграфе.

22.14. Метод изоклин для построения фазовых траекторий и расчета переходных процессов

Пусть процесс описывается уравнением второго порядка $F(x'', x', x) = 0$. Обозначая $dx/dt = y$, имеем $F(y', y, x) = 0$. Решая это уравнение относительно y', получаем

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y, x).$$

Разделив это последнее уравнение на $dx/dt = y$, находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y, x)}{y},$$

что представляет собой уравнение фазовой траектории. Величина dy/dx есть тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории в соответствующей точке. Если принять $dy/dx = k = \mathrm{const}$, то уравнение $k = \varphi(y, x)/y$ определит собой кривую, пересекающую фазовые траектории в точках, в которых касательные к ним имеют одинаковые углы наклона. Такая кривая носит наименование и з о к л и н ы. Выбирая разные значения k, получаем семейство изоклин (рис. 22.35). Если теперь на каждой изоклине нанести достаточное число черточек, тангенс угла наклона которых к оси абсцисс равен соответствующему данной изоклине числу k, то при достаточном числе изоклин на плоскости чертежа легко провести из данной начальной точки фазовую траекторию. Для этого только следует стремиться, чтобы она пересекала изоклины под углами, указанными черточками, нанесенными на изоклины.

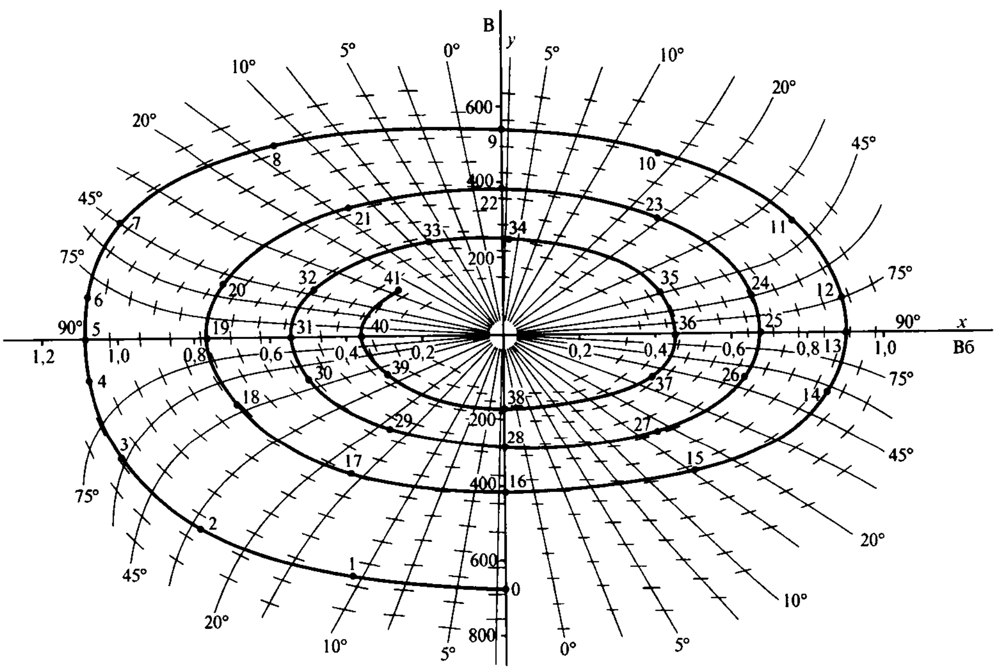

Рис. 22.35

Исследуем этим методом разряд конденсатора на цепь, состоящую из катушки с ферромагнитным сердечником и участка с сопротивлением. Пусть емкость конденсатора $C = 1$ мкФ и сопротивление цепи, включая и сопротивление обмотки катушки, $r = 200$ Ом. Возьмем катушку, рассмотренную в § 22.9 (см. рис. 22.18), и, пренебрегая явлением гистерезиса, будем считать, что кривая намагничивания как при возрастании, так и при убывании тока изображается кривой *1* на рис. 22.17.

Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = 0$$

или

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

В данном случае удобнее принять в качестве координаты x на фазовой плоскости значение потокосцепления Ψ. Соответственно, уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r\frac{di}{d\Psi}\frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C}\frac{i}{\Psi}\Psi = 0.$$

Величины $d\Psi/di = L_д$ и $\Psi/i = L_{ст}$ — динамическая и статическая индуктивности, являющиеся функциями Ψ, определяемыми из кривой намагничивания. Полагая $\Psi = x$ и $d\Psi/dt = y$, запишем уравнение в форме

$$y' + \frac{r}{L_д}y + \frac{1}{CL_{ст}}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{r}{L_д}y + \frac{1}{CL_{ст}}x\right).$$

Разделив последнее уравнение на $dx/dt = y$, получим уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{r}{L_д}y + \dfrac{1}{CL_{ст}}x}{y}.$$

Полагая $dy/dx = k$, находим уравнение изоклины

$$y = -\frac{x}{CL_{ст}(k + r/L_д)},$$

где $L_{ст} = F_1(x)$ и $L_д = F_2(x)$.

Задаваясь рядом значений $x = \Psi$, вычисляем из последнего уравнения y и по точкам строим изоклину для данного k. На рис. 22.35 построены изоклины для данной конкретной задачи, около изоклин помечены соответствующие им значения угла $\alpha = \operatorname{arctg} k$ наклона касательных к фазовой траектории. Под этим углом нанесены черточки, пересекающие изоклину, и по ним проведена фазовая траектория для начальных значений $U_C(0) = 680$ В и $\Psi(0) = 0$. По характеру фазовой траектории видно, что разряд имеет колебательный характер.

Для построения кривой $\Psi(t)$ необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежуток времени Δt, в течение которого совершается переход от ν-й точки (x_ν, y_ν) фазовой траектории к близкой к ней $(\nu+1)$-й точке $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$, можно приближенно определить следующим образом. Так как $y = \frac{dx}{dt}$, то $\Delta t = \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{1}{y}dx$. Обозначая $\frac{1}{y} = f(x)$, имеем по теореме о среднем $\Delta t = f(\xi)(x_{\nu+1} - x_\nu) = f(\xi)\,\Delta x$, где $x_\nu < \xi < x_{\nu+1}$. При небольшом интервале Δt и монотонном изменении y в этом интервале можно принять $f(\xi) \approx \frac{1}{y_{ср}}$, где $y_{ср} = \frac{y_\nu + y_{\nu+1}}{2}$. При этом имеем

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{y_{ср}}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является отрезком прямой с тангенсом угла наклона к оси абсцисс $\frac{dy}{dx} = k = \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{x_{\nu+1} - x_\nu}$, то $dt = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{y} = \frac{1}{k}\frac{dy}{y}$ и, следовательно,

$$\Delta t = \int\limits_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} \frac{1}{k}\frac{dy}{y} = \frac{1}{k}\ln\frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то Δt вычисляется следующим образом. Выразим координаты точек этой дуги окружности в виде $x = R\cos\varphi + x_0$, $y = R\sin\varphi$, где x_0 — координата центра окружности, R — радиус окружности и φ — угол между осью абсцисс и направлением радиуса, проведенного в точку (x, y) дуги. Получаем

$$\Delta t = \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{y} = -\int\limits_{\varphi_\nu}^{\varphi_{\nu+1}} d\varphi = \Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — центральный угол рассматриваемой дуги.

В случае, если отрезок фазовой траектории близко совпадает с отрезком прямой, то приближенно можно воспользоваться формулой $\Delta t = \frac{1}{k}\ln\frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}$, за исключением случаев, когда $y_\nu = 0$ или $y_{\nu+1} = 0$, а также когда $y_{\nu+1} = y_\nu$. В последнем случае хороший результат дает формула $\Delta t = \Delta x / y_{ср}$.

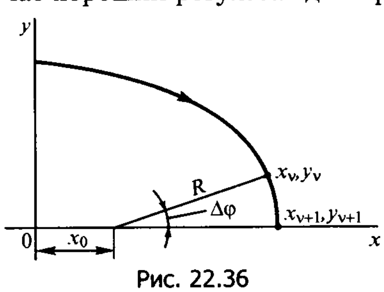

Рис. 22.36

Если отрезок фазовой траектории близко совпадает с дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то приближенно можно воспользоваться формулой $\Delta t = \Delta\varphi$. В частности, этой формулой рекомендуется пользоваться для случаев, когда $y_\nu = 0$ или $y_{\nu+1} = 0$ (рис. 22.36). Заметим, что в этом последнем случае величины Δt, вычисленные по формулам $\Delta t = \Delta x / y_{ср}$ и $\Delta t = \Delta\varphi$, отличаются меньше чем на 1 % при $\Delta\varphi \le 20°$.

Вычисляя промежутки времени, соответствующие последовательным отрезкам фазовой траектории, легко построить кривую $\Psi(t)$, что и сделано на рис. 22.37. На этом же рисунке построена кривая $i(t)$, причем значения тока брались из кривой намагничивания (см. рис. 22.17) по соответствующим значениям потокосцепления Ψ.

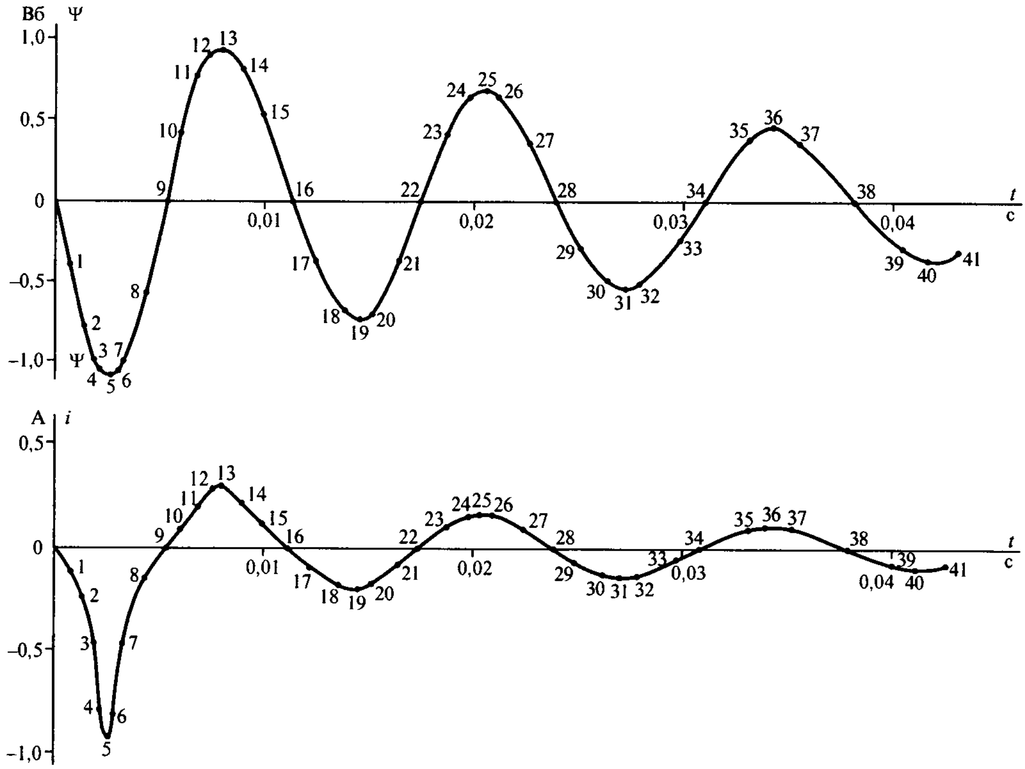

Рис. 22.37

Рассмотренное в настоящем и предыдущем параграфах изображение переходных процессов на фазовой плоскости дает возможность наглядно обозреть весь характер этих процессов. Этот метод применим в случаях, когда процесс описывается уравнениями первого или второго порядка со свободным членом, не зависящим от времени. Особенно ценным является то, что здесь открываются новые возможности расчета переходных процессов в нелинейных цепях.

22.15. Метод медленно меняющихся амплитуд — метод Ван-дер-Поля

Во многих нелинейных колебательных электрических цепях при установившемся режиме изменение во времени тока в колебательном контуре весьма близко к синусоидальному. Это означает, что в уравнении члены, содержащие нелинейные коэффициенты, малы по сравнению с остальными членами. В таких случаях может быть применен так называемый метод медленно меняющихся амплитуд, называемый также методом Ван-дер-Поля. Далее этот метод будет изложен на примере анализа тока в колебательном контуре лампового генератора и напряжения на сетке лампы, пропорционального производной от этого тока во времени (рис. 22.38). Нетрудно убедиться в том, что уравнение для тока в колебательном контуре имеет вид, аналогичный полученному в § 22.6 уравнению для тока в контуре транзисторного генератора

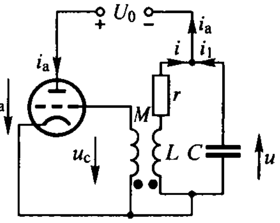

Рис. 22.38

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{I_0 + SDU_0}{LC},$$

где $2\delta = S\dfrac{M + DL}{LC} + \dfrac{r}{L}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{1 + rSD}{LC}$, S — крутизна характеристики, D — проницаемость лампы (см. § 19.8), I_0, U_0 — величины, определяющие состояние лампы при отсутствии колебаний.

Учитывая, что $rSD \ll 1$ вследствие применения в генераторах контуров с высокой добротностью, примем $\omega_0^2 = 1/(LC)$. Нам будет удобнее рассматривать напряжение u_c на сетке лампы, равное $u_c = -M\dfrac{di}{dt}$. Дифференцируя уравнение для i и умножая на $(-M)$, получим

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \qquad (*)$$

Нелинейным является член $2\delta\dfrac{du_c}{dt}$, так как наклон характеристики S зависит от u_c и, следовательно, $2\delta\dfrac{du_c}{dt} = f\left(u_c, \dfrac{du_c}{dt}\right)$. В ламповом генераторе этот член мал по сравнению с остальными членами, что вытекает из рассмотрения условий возбуждения колебаний в ламповом генераторе. Вместе с тем этот член хотя и является малым, оказывает определяющее влияние на процесс возбуждения колебаний и на процесс нарастания и установления амплитуды колебаний.

При $\delta = 0$ имели бы место незатухающие синусоидальные колебания.

Наличие малого нелинейного члена $2\delta\dfrac{du_c}{dt}$ приводит к тому, что и установившиеся колебания будут немного отличаться от синусоиды. В процессе установления амплитуда A нарастает. Обычно скорость изменения амплитуды A и начальной фазы ψ настолько мала, что $dA/dt \ll A\omega_0$ и $d\psi/dt \ll \omega_0$, т. е. за период $T = 2\pi/\omega_0$ изменение ΔA амплитуды составляет малую долю самой амплитуды A и изменение $\Delta\psi$ начальной фазы много меньше 2π. Величину u_c при этом можно записать в виде

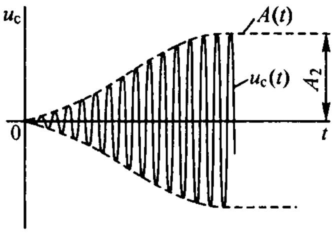

Рис. 22.39

$$u_c = A(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)] = A\cos(\omega_0 t + \psi).$$

Здесь как $A = A(t)$, так и $\psi = \psi(t)$ являются *медленно меняющимися* во времени величинами. При этих условиях кривая $A(t)$ определяет собой огибающую кривой $u_c(t)$ (рис. 22.39).

Скорость изменения напряжения u_c на сетке равна

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{dA}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) - A\left(\omega_0 + \frac{d\psi}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi) \approx -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Последнее приближение соответствует тому, что мы принимаем условие

$$\frac{dA}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) - A\frac{d\psi}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) = 0. \qquad (**)$$

Приняв такое условие, получаем

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \psi)] = -\omega_0\frac{dA}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) -$$

$$-\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \psi) - \omega_0 A\frac{d\psi}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi).$$

Подставляя в уравнение (*) значение d^2u_c/dt^2 и u_c и замечая, что главные члены $\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \psi)$ сокращаются, получаем уравнение для остающихся малых величин:

$$\frac{dA}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) + A\frac{d\psi}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) = \frac{2\delta}{\omega_0}\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\omega_0}f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right). \qquad (***)$$

Заметим, что сделанные нами приближения вносят определенную неточность в значения этих малых величин. В этом непосредственно можно убедиться, если составить величину d^2u_c/dt^2, взяв производную от полного выражения du_c/dt. Однако эти малые величины незначительно изменяют величины u_c, du_c/dt и d^2u_c/dt^2, и, следовательно, определенный таким образом процесс будет близок к истинному.

Из уравнений (**) и (***) определяются отдельно скорости изменения амплитуды и фазы. Умножаем эти уравнения, соответственно, на $\sin(\omega_0 t + \psi)$ и на $\cos(\omega_0 t + \psi)$; затем, складывая или вычитая полученные уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{1}{\omega_0}f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi);\\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{A\omega_0}f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\cos(\omega_0 t + \psi).\end{aligned}\right\} \qquad (****)$$

Усредняя правую часть в интервале от t до $t + T$, мы вправе считать в пределах этого интервала величины A и ψ неизменяющимися и равными их значениям в момент t. Действительно, было сказано, что эти величины мало меняются в течение любого периода. В результате такого усреднения получим

$$\frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi)dt = \Phi(A);$$

$$\frac{1}{T}\frac{1}{A\omega_0}\int\limits_t^{t+T} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\cos(\omega_0 t+\psi)dt = \Psi(A).$$

При выполнении операции интегрирования в соответствии со сказанным будем считать величины A и ψ постоянными, но в выражениях $\Phi(A)$ и $\Psi(A)$ величина A является функцией времени, равной своему значению в момент t в начале интервала усреднения.

В результате уравнения (****) после усреднения их правых частей приобретают вид

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) \quad \text{и} \quad \frac{d\psi}{dt} = \Psi(A).$$

Решая эти уравнения, находим законы изменения во времени медленно меняющихся амплитуды и начальной фазы. Амплитуда в установившемся режиме определяется из условия, что $dA/dt = \Phi(A) = 0$.

Изображая процесс на фазовой плоскости (u_c, du_c/dt), получим в установившемся режиме замкнутый предельный цикл. Можно показать, что этот установившийся режим и соответствующий ему цикл являются устойчивыми, если $d\Phi(A)/dA < 0$ при значении A, соответствующем этому циклу, и неустойчивыми, если $d\Phi(A)/dA > 0$ при этом значении A.

Применим эти общие соображения к уравнению (*) лампового генератора. Пусть характеристика лампы $i_a = f(u_c)$ может быть аппроксимирована зависимостью

$$i_a = au_c^3 + bu_c + c,$$

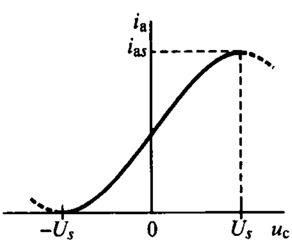

Рис. 22.40

причем коэффициенты a, b и c подобраны так, что вся кривая имеет вид, представленный на рис. 22.40, т. е. $a = -S_0/(3U_{cs}^2)$, $b = S_0$ и $c = i_{as}/2$, где S_0 — наклон характеристики при $u_c = 0$. Такая аппроксимация обеспечивает достаточно точное аналитическое выражение действительной характеристики лампы только в пределах $-U_{cs} \le u_c \le U_{cs}$. Наклон характеристики в любой ее точке в этих пределах получается равным

$$S = \frac{di_a}{du_c} = 3au_c^2 + b = S_0\left(1 - \frac{u_c^2}{U_{cs}^2}\right).$$

Таким образом, малый нелинейный член уравнения имеет вид

$$f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right) = 2\delta\frac{du_c}{dt} = \left[S\left(\frac{M+DL}{LC}\right) + \frac{r}{L}\right]\frac{du_c}{dt} = (nu_c^2 - m)\frac{du_c}{dt},$$

где

$$m = -\left(S_0\frac{M+DL}{LC} + \frac{r}{L}\right); \quad n = -\frac{S_0}{U_{cs}^2}\frac{M+DL}{LC}.$$

Отметим, что $n > 0$ и $m > 0$ из условия самовозбуждения $\delta < 0$.

Теперь, учитывая что мы приняли закон изменения напряжения на сетке в виде $u_c = A\cos(\omega_0 t + \psi)$ и $du_c/dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi)$, где A и ψ — *медленно меняющиеся* величины, получаем

$$\Phi(A) = \frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T}(nu_c^2 - m)\frac{du_c}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T}[nA^2\cos^2(\omega_0 t + \psi) - m][-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \psi)]\times$$

$$\times\sin(\omega_0 t + \psi)dt = +\frac{m}{2}A - \frac{n}{8}A^3 = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right).$$

Таким образом, уравнение для *медленно меняющейся амплитуды* имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right).$$

Состояния равновесия имеют место при $A = \text{const}$ или при $dA/dt = 0$, т. е. при $A = A_1 = 0$ и при $A = A_2 = 2\sqrt{m/n}$.

Первое значение амплитуды $A_1 = 0$ соответствует отсутствию колебаний. Это состояние неустойчиво. Действительно, при появлении вследствие случайного толчка колебаний даже с любой малой амплитудой $A_0 \neq 0$ получаем $dA/dt > 0$, так как $m > 0$ и $\left(m - \frac{n}{4}A_0^2\right) > 0$ при малом A_0. Соответствующая точка $u_c = 0$ и $du_c/dt = 0$ (начало координат) на фазовой плоскости является неустойчивым фокусом (рис. 22.41). Нарастание амплитуды возникших колебаний будет происходить до тех пор, пока снова величина dA/dt не станет равной нулю. Это будет при $A = A_2$, когда $\left(m - \frac{n}{4}A_2^2\right) = 0$. Легко заметить, что такое состояние является устойчивым, так как при $A < A_2$ имеем $dA/dt > 0$ и амплитуда возрастает, а при $A > A_2$ будет $dA/dt < 0$ и амплитуда убывает. Соответствующий предельный цикл на фазовой плоскости будет устойчивым, т. е. при любых отклонениях от этого цикла фазовые траектории свертываются к нему (см. рис. 22.41).

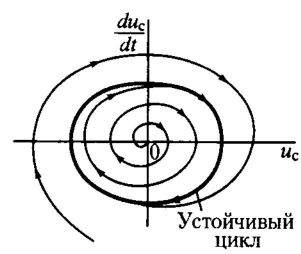

Рис. 22.41

Подставляя в формулу для A_2 выражения для m и n, получаем соотношение, связывающее амплитуду установившихся колебаний с параметрами характеристики лампы и колебательного контура:

$$A_2 = 2U_{cs}\sqrt{1 + \frac{rC}{S_0(M + DL)}} = 2U_{cs}\sqrt{1 - \frac{rC}{S_0|M + DL|}}.$$

Уравнение $\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right)$ позволяет определить не только установившуюся амплитуду колебаний, но и весь переходный процесс от начального толчка

$A = A_0$ при $t = 0$ до установления амплитуды A_2. Подстановкой $x = A^{-2}$ приведем это уравнение к виду $dx/dt + mx_0 = n/4$. Решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{n}{4m} + ce^{-mt} = \frac{1}{A_2^2} + ce^{-mt} \quad \text{или} \quad A = \frac{A_2}{\sqrt{1 + cA_2^2 e^{-mt}}}.$$

Произвольную постоянную c определим из условия, что $A = A_0$ при $t = 0$. Получаем $c = (1/A_0^2 - 1/A_2^2)$.

Если $m < 0$, т. е. если $\delta > 0$, то условия самовозбуждения не обеспечены и при случайном возникновении малых колебаний с амплитудой $\Delta A \neq 0$ получаем $dA/dt < 0$. Следовательно, раз возникшие колебания затухают. При этом на фазовой плоскости точка в начале координат является устойчивым фокусом.

22.16. Частотные свойства нелинейных цепей

В линейных электрических цепях в кривой тока возможны только те гармоники, которые содержатся в кривой ЭДС. В отличие от этого в нелинейной цепи в кривой тока появляются гармоники, не содержащиеся в кривой ЭДС.

Пусть ток и напряжение на зажимах нелинейной цепи в некоторых пределах их изменения связаны соотношением

$$i = au + bu^2.$$

Предположим, что $u = U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin \omega_2 t$, причем ω_2 и ω_1 вообще не кратны друг другу. Подставим это выражение для u в формулу для i и заменим квадраты синусов выражениями через косинусы двойных углов, а произведение синусов — через косинусы разности и суммы углов. Тогда увидим, что в выражении для тока i, кроме постоянной составляющей и составляющих с частотами ω_1 и ω_2, появляются также составляющие с удвоенными частотами $2\omega_1$, $2\omega_2$ и составляющие с комбинационными частотами $\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$, т. е.

$$i = \frac{b}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2) + aU_{1m} \sin \omega_1 t + aU_{2m} \sin \omega_2 t - \frac{b}{2} U_{1m}^2 \cos 2\omega_1 t -$$
$$- \frac{b}{2} U_{2m}^2 \cos 2\omega_2 t + bU_{1m} U_{2m} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + bU_{1m} U_{2m} \cos(\omega_1 + \omega_2)t.$$

Уже на этом простом примере наглядно видны особенности частотных свойств нелинейных цепей. Во-первых, среднее значение (постоянная составляющая) тока i зависит от амплитуды гармонических составляющих напряжения. Несмотря на то что кривая напряжения не содержит постоянной составляющей, в кривой тока в данном случае возникает постоянная составляющая, что является результатом несимметрии характеристики. Во-вторых, в кривой тока появляются гармоники с частотами более высокого порядка ($2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$) по сравнению с гармониками в кривой напряжения. В-третьих, в кривой тока возникают гармоники с комбинационными частотами ($\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$). Таким образом, в кривой тока появляется ряд новых гармоник с частотами, отличными от частоты гармоник в кривой напряжения. Это обстоятельство и дает возможность использовать нелинейные цепи для преобразования частоты, для модуляции и детектирования колебаний, что было рассмотрено ранее.

Если отношение ω_1 к ω_2 представляет собой рациональное число, то напряжение u есть периодическая функция. Если при этом $\omega_1/\omega_2 = n/m$, то период напряжения u будет равен $nT_1 = mT_2$. Если $\omega_1 > \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ имеет период, превышающий nT_1, то период тока окажется больше периода напряжения, что можно рассматривать как возникновение в кривой тока гармоник с частотой, меньшей частоты напряжения. Эти гармоники называют *субгармониками*.

Применяя приведенные рассуждения для нелинейных элементов, характеристики которых могут быть аппроксимированы полиномами более высоких порядков, придем к выводу, что в нелинейных цепях с подобными элементами возможны колебания, частоты которых заполняют широкий диапазон рациональных чисел.

Комбинационные колебания, в частности субгармоники, могут возникать и при действии на зажимах нелинейной цепи синусоидального напряжения, т. е. напряжения одной частоты. При этом напряжения на отдельных участках цепи с нелинейными элементами будут несинусоидальными, т. е. состоять из нескольких синусоидальных составляющих разных частот. Согласно вышеизложенному, в этом случае при надлежащих условиях могут возникать комбинационные колебания.

22.17. Значение нелинейных электрических цепей в современной технике

Все изложенное в настоящей части показывает исключительно широкие возможности, которые открываются при использовании нелинейных элементов для создания электрических цепей, обладающих самыми различными весьма важными для практики свойствами.

Мы видели, что, используя нелинейные элементы, можно осуществить стабилизаторы напряжения и тока, усилители мощности, модуляторы, генераторы незатухающих колебаний, выпрямители, инверторы и т. д. Рассмотренными примерами далеко не исчерпывается перечень возможных применений нелинейных элементов в электрических цепях. Так, например, очень важным является создание устройств для формирования импульсов напряжения различной формы, создание так называемых спусковых устройств — триггеров, в которых используется неустойчивое состояние и при плавном изменении входного напряжения происходит скачок напряжения или тока на выходе, создание на этой основе счетчиков импульсов и т. д.

Радиотехника, автоматика, телемеханика, электроизмерительная техника, техника электронных быстродействующих счетно-решающих и управляющих машин, электроэнергетика и другие области техники на современном этапе развития все шире используют особые свойства нелинейных цепей. Еще большие возможности открываются в этом направлении в будущем.

Вместе с тем явления в нелинейных системах представляют собой еще недостаточно разработанную и весьма интересную область для теоретических и экспериментальных исследований, хотя многое, как отмечалось, здесь уже сделано; причем весьма существенный вклад в решение нелинейных задач внесли русские ученые.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава двадцать третья

Уравнения электромагнитного поля

23.1. Электромагнитное поле и его уравнения в интегральной форме

В гл. 1, т. I были рассмотрены основные свойства электромагнитного поля и приведены основные понятия и законы, характеризующие электромагнитное поле.

Электромагнитное поле является особым видом материи. Всякая электрически заряженная частица окружена электромагнитным полем, составляющим с ней единое целое. Но электромагнитное поле может существовать и в свободном, отделенном от заряженных частиц состоянии в виде движущихся со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, фотонов или вообще в виде излученного движущегося с этой скоростью электромагнитного поля (электромагнитных волн).

Электромагнитное поле характеризуется непрерывным распределением в пространстве, и вместе с тем оно обнаруживает дискретную структуру в виде квантов излученного электромагнитного поля, например фотонов.

Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии, которая способна преобразовываться в другие виды энергии — химическую, тепловую, энергию механического движения и т. п.

Электромагнитное поле, являясь носителем определенного количества энергии, обладает также и определенной соответствующей этой энергии массой, которая может быть определена из общей связи $W = mc^2$ между полной энергией W и полной массой m, причем c есть скорость света в пустоте. Однако плотность массы в используемых обычно электромагнитных полях весьма мала. Пусть магнитная индукция равна 1 Тл и напряженность электрического поля равна 10^8 В/м = 10^6 В/см. Последнее может быть достигнуто только при весьма высоком вакууме. При этих условиях объемная плотность энергии электромагнитного поля, равная сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей, имеет значение

$$W' = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0} = \frac{10^{16}}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} + \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 4{,}42 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Соответственно, объемная плотность массы электромагнитного поля при этом равна

$$\frac{m}{V} = \frac{W'}{c^2} = \frac{4{,}42 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4{,}91 \cdot 10^{-12}\ \text{кг/м}^3,$$

т. е. представляет собой весьма малую величину.

Наличие массы поля имеет принципиальное значение. В частности, располагая значением массы поля, весьма легко подсчитать давление света на поверхность тела, на которую он падает. Давление света было экспериментально установлено и количественно измерено в блестящих опытах П. Н. Лебедева, подтвердивших выводы теории электромагнитного поля.

Ничтожная плотность массы используемых на практике электромагнитных полей дает основание обычно не интересоваться этой характеристикой поля и обращать внимание в основном на энергетическую сторону рассматриваемых явлений.

Электромагнитное поле наряду с вышеперечисленными свойствами характеризуется *особыми электромагнитными свойствами*, не рассматриваемыми в механике, а именно способностью оказывать силовое воздействие на заряженные частицы. Это воздействие зависит от скорости заряженных частиц.

В первой части курса было указано, что электрическое и магнитное поля являются лишь двумя сторонами всегда единого электромагнитного поля. Деление объективно существующего независимого от наших наблюдений электромагнитного поля на две его составляющие — поле электрическое и поле магнитное — является относительным, т. е. зависит от условий, при которых производится наблюдение электромагнитного поля с помощью тех или иных устройств. В первой части курса были установлены количественные соотношения, определяющие связь между этими двумя сторонами электромагнитных явлений.

Из всего рассмотренного в первой части курса вытекает, что всякий электрический ток обязательно сопровождается магнитным полем и, наоборот, магнитное поле неизбежно связано с электрическим током. Принято различать три вида электрического тока: ток проводимости, плотность которого пропорциональна напряженности электрического поля; ток смещения, плотность которого пропорциональна скорости изменения напряженности электрического поля, и ток переноса, плотность которого определяется скоростью движущихся свободных электрически заряженных частиц или тел, зависящей от электрического напряжения вдоль пути, пройденного этими частицами или телами. Однако физически следует различать лишь два вида электрического тока, характеризующихся иными признаками. Первый вид тока представляет собой движение элементарных частиц, обладающих электрическим зарядом. Сюда относятся ток переноса, ток проводимости и часть тока смещения, обязанная своим появлением изменению электрической поляризованности вещества. Второй вид тока, который не может быть представлен как движение известных нам заряженных элементарных частиц, есть ток электрического смещения в пустоте.

В пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существует как электрическое поле, так и магнитное поле. Эти поля определяют собой две стороны единого электромагнитного поля.

Токи электрического смещения в пустоте возникают при изменении электрического поля во времени и также окружены магнитным полем. Следовательно, при всяком изменении электрического поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним магнитное поле. Оба эти поля определяют и в этом случае единое электромагнитное поле.

Связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля устанавливается законом полного тока

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = i,$$

гласящим, что линейный интеграл напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному току сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение, выражающее закон полного тока, понимаемое в указанном выше обобщенном смысле, когда в правой его части содержатся все виды токов, в том числе и ток смещения в пустоте, дано Максвеллом. Посредством этого уравнения устанавливается одна из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами электромагнитных явлений, а именно: оно определяет магнитное поле, возникающее при движении заряженных частиц и при изменении электрического поля.

Вторая связь определяет электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля. Она открыта Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции. Максвеллу принадлежит заслуга обобщения этого закона для любой среды. Согласно максвелловой формулировке закона электромагнитной индукции, электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, равна взятой со знаком минус скорости изменения этого потока. Сущность обобщения Максвелла заключается в том, что контур, в котором возникает ЭДС, может быть представлен расположенным в любой среде. В частности, это может быть лишь мысленный контур, находящийся целиком в пустоте.

Возникновение ЭДС в таком контуре при изменении магнитного поля есть результат появления индуцированного электрического поля. При этом электродвижущая сила, действующая вдоль контура, равна линейному интегралу напряженности электрического поля, взятому вдоль этого контура. Таким образом, обобщенная максвеллова формулировка закона электромагнитной индукции представляется в виде

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Сущность явления электромагнитной индукции заключается в том, что при всяком изменении магнитного поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним электрическое поле.

Последнее уравнение определяет индуцированное электрическое поле, напряженность которого мы обозначали $E_{\text{инд}}$. Источниками электрического поля являются также электрически заряженные частицы и тела. Связь электрического поля, окружающего эти частицы и тела, с их электрическим зарядом определяется постулатом Максвелла

$$\oint_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q,$$

который гласит: поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Линии вектора напряженности индуцированного электрического поля всюду непрерывны. Линии вектора электрического смещения, связанного с зарядами тел и частиц, начинаются и кончаются на этих зарядах.

Линии вектора магнитной индукции всюду непрерывны, что выражается соотношением

$$\oint_s \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = 0.$$

Приведенные выше четыре соотношения и являются основными уравнениями электромагнитного поля в интегральной форме.

Изучение электромагнитного поля и методов его расчета имеет весьма большое значение.

В гл. 3, т. I, в которой были даны основные понятия теории электрических и магнитных цепей, была отмечена сложность физических явлений в этих цепях. Было показано, что возможность построения теории электрических и магнитных цепей основана на ряде научных абстракций, на пренебрежении рядом явлений, которые при определенных условиях можно считать второстепенными. Теория электрических и магнитных цепей оперирует с параметрами цепей, например с индуктивностью, емкостью, электрическим сопротивлением, магнитным сопротивлением и т. д., принимая значения этих параметров как данные. Однако для расчета параметров цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, образующиеся на участках цепей при наличии в этих участках токов и напряжений. Изучение электромагнитных полей важно не только для расчета параметров цепей. Оно необходимо, если мы желаем более полно рассмотреть картину электромагнитных явлений в том или ином устройстве, не ограничивая себя теми допущениями, на которых основана теория электрических и магнитных цепей. По существу, для полной характеристики электромагнитных явлений в любом устройстве необходимо знать пространственное распределение определяющих их физических величин — плотности тока, напряженности электрического поля, магнитной индукции и т. д. и их изменение во времени. Поэтому для глубокого изучения электромагнитных явлений необходимо изучить характеризующие их поля.

Далеко не всегда при анализе электромагнитных явлений могут быть введены и использованы понятия об электрической и магнитной цепях, хотя бы даже для получения приближенного решения. Существует много важных практических случаев, когда эти понятия теряют свой смысл и когда анализ электромагнитных явлений может быть произведен только путем детального изучения электромагнитного поля. В качестве одного из важнейших примеров можно указать на излучение и распространение электромагнитных волн.

Стройность уравнений электромагнитного поля отражает собой предельно высокую упорядоченность внутреннего движения материи, существующей в форме электромагнитного поля. Даже при самых сильных используемых нами электромагнитных полях в них не возникает турбулентное или хаотическое движение, свойственное тепловым процессам и процессам при движении жидкостей и газов. Отмеченная выше весьма малая плотность массы электромагнитного поля, связанная с отсутствием массы покоя, обусловливает то, что энергия электромагнитного поля легко передается со скоростью света вдоль проводов и в свободном пространстве. Эти свойства электромагнитного поля дают возможность с помощью электромагнитных устройств осуществлять управление большими потоками энергии, создавать сложные быстродействующие кибернетические системы управления, передавать огромные потоки информации, посылать сигналы на сотни миллионов километров в космическое пространство, производить вычисления с помощью электронных машин с исключительно большой скоростью.

Исследуя электромагнитное поле, необходимо определять все величины, его характеризующие, в каждой точке пространства. Поэтому мы не можем удовлетвориться интегральной формой уравнений и должны представить их в дифференциальной форме.

В дальнейшем будем рассматривать электромагнитное поле в неподвижных средах, и в частности в неподвижных проводниках. Соответственно во всех уравнениях будем вводить частные производные по времени.

23.2. Закон полного тока в дифференциальной форме — первое уравнение Максвелла

Согласно уравнению $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = i$, выражающему закон полного тока, линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по замкнутому контуру, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность s, ограниченную этим контуром. Однако по величине этого интеграла нельзя судить о распределении тока по поверхности s. Чтобы решить этот вопрос, необходимо воспользоваться этим же уравнением в дифференциальной форме. Допустим, мы желаем выяснить, проходит ли ток сквозь малую поверхность, на которой расположена точка A, и какова плотность тока в этой точке (рис. 23.1).

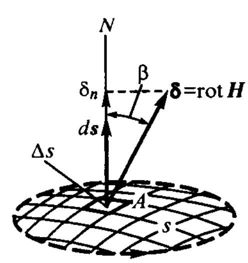

Рис. 23.1

Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый вдоль малого контура, ограничивающего поверхность Δs, равен малому току Δi, проходящему сквозь эту поверхность: $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \Delta i$, и может служить мерой тока Δi. Величина Δi зависит от размеров поверхности Δs. Чтобы получить вполне определенную величину, разделим правую и левую части равенства на Δs и найдем предел, к которому стремится отношение, когда Δs стремится к нулю, стягиваясь в точке A. Будем иметь

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{H}dl}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta s}.$$

Величина, стоящая в правой части равенства, представляет собой составляющую вектора плотности тока по направлению нормали к поверхности s в точке A:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta s}=\delta\cos\beta=\delta_n.$$

Величина, стоящая в левой части равенства, как известно из курса математики, представляет собой проекцию на направление нормали к поверхности s в точке A вектора, называемого **вихрем**, или **ротором**, вектора $\boldsymbol{H}$. Вихрь вектора $\boldsymbol{H}$ обозначают $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$. Соответственно для его проекции имеем обозначение

$$\operatorname{rot}_n\boldsymbol{H}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{H}\,dl}{\Delta s}.$$

Стало быть,

$$\operatorname{rot}_n\boldsymbol{H}=\delta_n.$$

Если элемент поверхности расположить так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плотности тока, то предел отношения $\Delta i/\Delta s$ получит наибольшее значение, равное плотности тока в точке A, причем направление положительной нормали мы связываем правилом правого винта с направлением обхода контура. При таком расположении элемента поверхности в правой части равенства, написанного в векторной форме, будет стоять вектор плотности тока, а в левой — вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$. Таким образом, в дифференциальной форме закон полного тока представится в виде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\delta.$$

Это уравнение электромагнитного поля носит название **первого уравнения Максвелла**. Ценность записи уравнения поля в векторной форме заключается в том, что такая запись не зависит от выбора системы координат. Однако выражения для составляющих вихря некоторого вектора $\boldsymbol{A}$, в частности вектора $\boldsymbol{H}$, через составляющие самого вектора $\boldsymbol{A}$ получаются различными в разных системах координат.

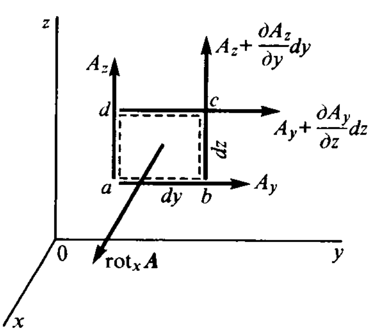

Рис. 23.2

Выразим составляющие вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах. Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный контур $abcda$ (рис. 23.2) в плоскости, параллельной плоскости YOZ, и составим сумму произведений $\boldsymbol{A}\,dl$ по всем сторонам контура. Имеем

$+ A_y\, dy$ вдоль стороны ab;

$+\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy\right) dz$ вдоль стороны bc,

$-\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz\right) dy$ вдоль стороны cd;

$- A_z\, dz$ вдоль стороны da.

При этом A_y, $\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy\right)$, $\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz\right)$ и A_z — средние в пределах соответствующей стороны значения составляющих вектора $\boldsymbol{A}$. Суммируя эти величины и деля сумму на величину площадки $dy\, dz$, ограниченной контуром, находим

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Определяя аналогичным образом другие составляющие, получаем

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\ \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};\ \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Последние два выражения легко получаются из первого циклической перестановкой букв x, y, z.

Таким образом, в декартовых координатах первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x;\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y;\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Пользуясь приведенными выше соображениями, можем получить выражения вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и в других системах координат. Например, в цилиндрических координатах ρ, α, z радиальная, тангенциальная и осевая составляющие равны

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z},\quad \operatorname{rot}_\alpha \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho},$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\alpha) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha}.$$

В сферических координатах ρ, θ, φ составляющие вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ равны

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi)\right],$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right].$$

23.3. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме — второе уравнение Максвелла

Напишем в дифференциальной форме уравнение $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, выражающее закон электромагнитной индукции. При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Составим линейный интеграл напряженности электрического поля по малому контуру, ограничивающему малую поверхность Δs (рис. 23.3); разделим его на величину поверхности и найдем предел, к которому стремится полученное отношение, когда поверхность Δs стремится к нулю, стягиваясь в некоторой точке A поля. При этом получим проекцию на направление нормали к выбранному элементу поверхности в точке A вихря вектора $\boldsymbol{E}$:

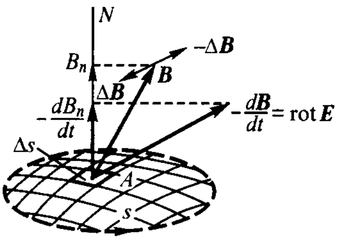

Рис. 23.3

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \mathrm{rot}_n \boldsymbol{E}.$$

В правой части уравнения мы должны поток $\Delta\Phi$ сквозь поверхность Δs разделить на поверхность Δs и найти предел, к которому стремится это отношение, когда $\Delta s \to 0$. При этом получим составляющую вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ в точке A, нормальную к выбранному элементу поверхности:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} = \frac{d\Phi}{ds} = B_n.$$

Таким образом, имеем

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{E} = -\frac{\partial B_n}{\partial t}.$$

Выберем положение элемента поверхности так, чтобы нормаль к нему совпала с вектором $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. Тогда в левой части равенства получим вихрь вектора $\boldsymbol{E}$. Будем иметь

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Это уравнение и представляет собой выражение закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Оно называется вторым уравнением Максвелла.

Направление вектора $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ есть направление, к которому стремится направление приращения $\Delta\boldsymbol{B}$ вектора магнитной индукции, происходящего за промежуток времени Δt, когда $\Delta t \to 0$. Если вектор $\boldsymbol{B}$ изменяется не только по величине, но и по направлению, то производная $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ не направлена по одной прямой с вектором $\boldsymbol{B}$.

В декартовой системе координат получаем

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t};\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t};\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

23.4. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема Гаусса в применении к электрическому полю гласит: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению электрического заряда, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды, т. е.

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}=\frac{q}{\varepsilon}.$$

Таким образом, интеграл напряженности электрического поля, распространенный по некоторой замкнутой поверхности (рис. 23.4), для однородной и изотропной среды может рассматриваться как мера электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности. Однако по величине этого интеграла еще нельзя судить о распределении электрического заряда внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Для решения этого вопроса необходимо применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Допустим, что мы желаем выяснить, находится ли электрический заряд в малом объеме ΔV, заключающем в себе точку A, и какова объемная плотность электрического заряда в этой точке.

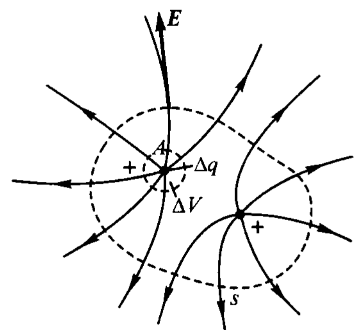

Рис. 23.4

Поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь малую поверхность, ограничивающую объем ΔV, равен деленному на ε малому заряду Δq, заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}=\frac{\Delta q}{\varepsilon}.$$

Разделим обе части уравнения на ΔV и найдем предел, к которому стремится отношение, когда $\Delta V \to 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\varepsilon\Delta V}.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, называется расхождением, или дивергенцией, вектора $\boldsymbol{E}$ и кратко обозначается div $\boldsymbol{E}$. В правой части получаем объемную плотность ρ электрического заряда в данной точке пространства, деленную на ε. Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Термин «расхождение» хорошо характеризует особенности поля в тех местах, где $\rho \neq 0$, и в тех местах, где $\rho = 0$. Положительный заряд можно рассматривать как «источник» линий напряженности электрического поля, около него начинаются эти линии. Отрицательный заряд является как бы «стоком» (отрицательным источником) линий, около него линии кончаются. Поэтому если в некотором объеме ΔV объемная плотность электрического заряда не равна нулю, то через поверхность, ограничивающую этот объем, линии напряженности электрического поля *расходятся* из него в окружающее пространство или *сходятся* в него (рис. 23.5, *а*, *б*), что кратко выражается словами: расхождение вектора $\boldsymbol{E}$ не равно нулю. В области поля, где отсутствуют объемные заряды ($\rho = 0$), линии напряженности поля не начинаются и не кончаются; через любой элемент объема такого пространства линии напряженности поля только проходят (рис. 23.5, *в*), но не расходятся от него и не сходятся к нему. Мы говорим, что расхождение вектора $\boldsymbol{E}$ во всех точках такой области равно нулю: $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$. Поле в области, где $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$, называется соленоидальным (от греческого слова σωληνοιδής — трубкообразный).

Значение расхождения вектора не зависит от выбора системы координат, и соответственно последнее уравнение инвариантно в отношении системы координат. Однако выражения расхождения некоторого вектора $\boldsymbol{A}$ через его составляющие получаются различными в разных системах координат.

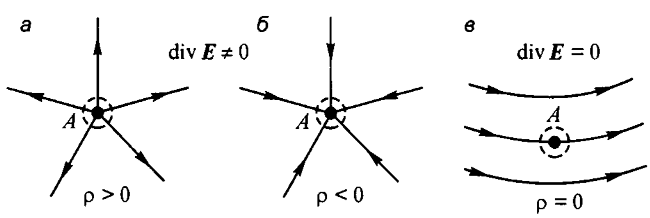

Рис. 23.5

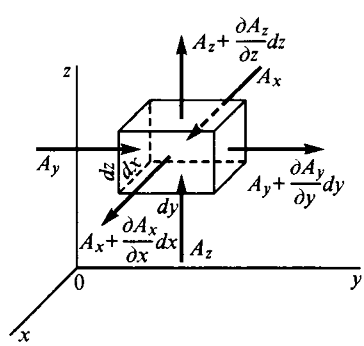

Рис. 23.6

Выразим $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ в декартовых координатах. Представим себе бесконечно малый параллелепипед со сторонами dx, dy и dz, параллельными осям координат (рис. 23.6). Поток вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность параллелепипеда слагается из потоков сквозь его грани. Имеем

$-A_x\, dy\, dz$ сквозь дальнюю грань;

$+\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}dx\right) dy\, dz$ сквозь ближнюю грань;

$-A_y\, dx\, dz$ сквозь левую грань;

$+\left(A_y+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz$ сквозь правую грань;

$-A_z\,dx\,dy$ сквозь нижнюю грань;

$+\left(A_z+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy$ сквозь верхнюю грань.

При этом A_x, $\left(A_x+\dfrac{\partial A_x}{\partial x}dx\right)$ и т. д. — средние в пределах соответствующей грани значения нормальных к поверхности грани составляющих вектора $\boldsymbol{A}$. Суммируя потоки через все грани и деля сумму на объем параллелепипеда $dx\,dy\,dz$, находим

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Расхождение вектора иногда обозначают $\nabla\boldsymbol{A}$, где ∇ (читается «набла») представляет собой символический дифференциальный векторный оператор Гамильтона. В декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы по осям OX, OY и OZ. Величины $\dfrac{\partial}{\partial x}=\nabla_x$, $\dfrac{\partial}{\partial y}=\nabla_y$, $\dfrac{\partial}{\partial z}=\nabla_z$ мы должны рассматривать как составляющие ∇ по осям координат.

Дифференциальное выражение $\nabla\boldsymbol{A}$ формально можно рассматривать как скалярное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{A}$. Действительно,

$$\nabla\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A},$$

так как $\boldsymbol{ii}=\boldsymbol{jj}=\boldsymbol{kk}=1$ и $\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0$.

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме можно написать также в виде

$$\nabla\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В декартовой системе координат она имеет вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Выражения для $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ принимают вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ — в цилиндрической и

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$ — в сферической системах координат.

Для неоднородной и анизотропной среды теорема Гаусса не применима. При этом следует пользоваться аналогичным, имеющим значительно более общий характер уравнением для вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$. Именно, согласно постулату Максвелла, поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному электрическому заряду, заключенному в пространстве, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_s \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s} = q.$$

В дифференциальной форме постулат Максвелла принимает вид

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$$

или в иной записи

$$\nabla \boldsymbol{D} = \rho.$$

В декартовых координатах это уравнение пишется в форме

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Заметим попутно, что выражение rot $\boldsymbol{A}$ может быть записано через знак ∇ в виде векторного произведения $[\nabla \boldsymbol{A}]$, в чем нетрудно убедиться.

23.5. Выражение в дифференциальной форме принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока

Имеющий фундаментальное значение принцип непрерывности магнитного потока утверждает, что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца – они всюду непрерывны. Иными словами, магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

В природе не существует магнитных масс, являющихся источниками линий магнитной индукции, подобных электрическим зарядам, которые дают начало линиям электрического смещения. Магнитное поле порождается только электрическими токами, и линии магнитной индукции, окружающие электрические токи, всегда замкнуты, непрерывны. Дифференциальной записью математической формулировки этого важного принципа является выражение

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

которое справедливо для всех точек любого магнитного поля.

Столь же фундаментальное значение имеет принцип непрерывности электрического тока, согласно которому линии тока нигде не прерываются, всегда являясь замкнутыми. Полный ток, включающий в себя токи проводимости, переноса и смещения, проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю:

$$\oint_s \delta\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

Как было указано в первой части, это важнейшее положение приобретает совершенно общий характер лишь с введением в рассмотрение, помимо токов, представляющих собой движение элементарных заряженных частиц, также и токов электрического смещения в пустоте. Дифференциальной записью последнего равенства является выражение

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = 0,$$

которое, так же как и выражение $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, справедливо во всех точках пространства.

С формальной стороны выражение $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = 0$ является прямым следствием первого уравнения Максвелла. Действительно, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$, но для любого вектора $\boldsymbol{A}$ расхождение его вихря тождественно равно нулю. Таким образом,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{A} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Поэтому в полной системе уравнений электромагнитного поля, в которую в качестве одного из основных входит первое уравнение Максвелла, из двух выражений, характеризующих принципы непрерывности магнитного потока и электрического тока, должно содержаться только первое.

23.6. Теорема Остроградского. Теорема Стокса

Установим два важных, имеющих большое значение в теории поля, равенства, выражающих собой теорему Остроградского и теорему Стокса. Эти равенства имеют чисто геометрический смысл и справедливы для произвольного вектора $\boldsymbol{A}$, но мы получим их сначала на основании имеющихся в нашем распоряжении уравнений для векторов напряженностей электрического и магнитного полей и затем уже дадим им геометрическую интерпретацию.

Пусть заряд q распределен некоторым образом по объему V, ограниченному поверхностью s. Тогда $q = \int_V \rho\, dV$. Используя теорему Гаусса в интегральной форме, можем написать: $\oint\limits_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \int\limits_V \frac{\rho}{\varepsilon}\,dV$. Заменяя ρ/ε через $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ согласно той же теореме в дифференциальной форме, получаем равенство

$$\oint\limits_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \int\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,dV.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора $\boldsymbol{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными в области V и на поверхности s:

$$\oint\limits_s \boldsymbol{A}d\boldsymbol{s} = \int\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV.$$

Оно является формулировкой теоремы Остроградского и имеет чисто геометрический смысл преобразования объемного интеграла в поверхностный. Действительно, представим себе объем V разделенным на элементы объема dV. Величина $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ в соответствии с ее определением есть отношение потока вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность, ограничивающую объем dV, к объему dV. Следовательно, $\operatorname{div} \boldsymbol{A}\; dV$ есть поток вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность, ограничивающую объем dV. Представим два соседних объема dV, соприкасающихся друг с другом по некоторой поверхности ds. Очевидно, если поток сквозь поверхность соприкосновения для одного объема будет выходящим из него, т. е. положительным, то для другого он будет входящим в него, т. е. отрицательным. Поэтому при составлении интеграла $\int\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV$ по всему объему V потоки сквозь все поверхности между смежными элементарными объемами dV в сумме дадут нуль. Останутся только потоки сквозь те поверхности ds крайних элементарных объемов dV, которые являются элементами поверхности s, ограничивающей весь объем V. Таким образом, интеграл $\int\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV$ действительно равен потоку вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность s, т. е. равен интегралу $\oint\limits_s \boldsymbol{A}d\boldsymbol{s}$.

Установим теперь второе важное равенство. Пусть сквозь некоторую незамкнутую поверхность s, ограниченную контуром l, проходит ток i. Имеем $i = \int\limits_s \boldsymbol{\delta}\,d\boldsymbol{s}$.

Согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме, можем написать $\oint\limits_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_s \boldsymbol{\delta}\,d\boldsymbol{s}$. Используя то же уравнение в дифференциальной форме, заменим $\boldsymbol{\delta}$ на $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$. Получим

$$\oint\limits_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_s \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{s}.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора $\boldsymbol{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными на поверхности s и на контуре l:

$$\oint\limits_l \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_s \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{s}.$$

Оно выражает собой теорему Стокса и имеет чисто геометрический смысл преобразования поверхностного интеграла в интеграл по контуру. Действительно, представим себе поверхность s разделенной на элементы ds. Величина нормальной составляющей вектора rot $\boldsymbol{A}$ в соответствии с ее определением есть отношение суммы произведений $\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ по всем сторонам контура, ограничивающего элементарную площадку ds, к величине поверхности ds. Следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}$ представляет собой эту сумму. При составлении интеграла $\int\limits_s \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}$ по всей поверхности s произведения $\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ для всех соприкасающихся сторон соседних элементарных площадок взаимно компенсируются, и остаются только произведения $\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ по всем элементам dl контура l, ограничивающего всю поверхность s, что и приводит к последнему равенству.

23.7. Полная система уравнений электромагнитного поля

Рассматривая элементарные заряженные частицы, движущиеся в пустоте, и окружающее их поле, мы различаем два вида электрического тока: ток переноса и ток электрического смещения в пустоте. В части пространства, занимаемой движущимися заряженными частицами, существуют токи переноса, плотность которых имеет выражение $\boldsymbol{J}_{\text{пер}} = \rho\boldsymbol{v}$. В остальном пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существуют токи электрического смещения, имеющие плотность $\boldsymbol{J}_{\text{см}} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$, где $\boldsymbol{D}$ — электрическое смещение в пустоте.

В общем виде можно написать: $\boldsymbol{\delta} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t + \rho\boldsymbol{v}$, причем в одних точках пространства первое слагаемое равно нулю, а в других точках равно нулю второе слагаемое.

Векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ электрического поля и соответственно векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ магнитного поля связаны через электрическую постоянную ε_0 и магнитную постоянную μ_0 соотношениями:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}.$$

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля в этом случае имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}; \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Используя связи $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$, можно эти уравнения переписать так, чтобы они содержали только векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Эти векторы следует рассматривать как основные векторы электромагнитного поля. Действительно, как мы видели (см. ч. I), сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле, определяется именно этими векторами. Учитывая, что ε_0 и μ_0 — постоянные величины, получаем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{\delta}; \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

При микроскопическом рассмотрении явлений только что приведенный случай является общим. При этом в некоторой области пространства элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, могут отсутствовать, и электрические токи могут быть замкнутыми на себя токами электрического смещения, что, например, имеет место в излученной электромагнитной волне.

При изучении электромагнитных процессов в веществе обычно нет необходимости рассматривать сложную микроструктуру вещества. Действительное электромагнитное поле в веществе весьма резко изменяется от точки к точке в пространстве между элементарными заряженными частицами, входящими в состав вещества, и в каждой точке величины, характеризующие поле, являются быстро изменяющимися функциями времени вследствие движения с большой скоростью этих частиц. Однако эти неоднородности имеют микроскопический характер, и мы имеем все основания их осреднить в пространстве и во времени при рассмотрении макроскопических процессов. При этом осредненные величины, вообще говоря, будут функциями координат и времени, но изменяющимися значительно медленнее, чем истинные величины при микроскопическом рассмотрении явления.

Если свободные заряженные частицы находятся в столь разреженном веществе, что они могут беспрепятственно ускоряться под действием электрического поля, не испытывая или почти не испытывая столкновений с молекулами вещества, то в таком случае под действием осредненного электрического поля возникает упорядоченный ток переноса. Примером может служить ток между электродами в сильно разреженном газе, когда расстояние между электродами меньше средней длины свободного пробега ионов и электронов.

Если элементарные заряженные частицы, движущиеся в веществе, многократно путем столкновения передают атомам вещества кинетическую энергию, приобретаемую при ускорении в осредненном электрическом поле, то под действием постоянного осредненного поля устанавливается постоянная средняя скорость заряженных частиц. При этом в изотропной среде осредненная плотность тока может быть выражена в форме произведения осредненной напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и величины γ, характеризующей электропроводность вещества и именуемой удельной проводимостью вещества. Такой ток называем током проводимости. Примерами могут служить токи в металлах, полупроводниках и электролитах.

Плотность тока переноса $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ и плотность тока проводимости $\boldsymbol{J}_{\text{пр}}$ могут быть представлены в виде произведения осредненной объемной плотности заряда движущихся частиц на осредненную их скорость. При этом если в движении участвуют как положительно, так и отрицательно заряженные частицы, то плотность тока может быть выражена в виде $\boldsymbol{J} = \rho_+\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{v}_-$, где ρ_+ и $\boldsymbol{v}_+$ — объемная плотность заряда и средняя скорость положительно заряженных частиц и ρ_- и $\boldsymbol{v}_-$ — тоже отрицательно заряженных частиц.

Для тока проводимости имеем возможность представить плотность тока в изотропной среде также в форме

$$\boldsymbol{J}_{\text{пр}} = \gamma\boldsymbol{E}.$$

Удельная проводимость γ зависит от температуры среды и в общем случае может зависеть также и от напряженности электрического поля.

Во всех остальных случаях, когда среду не представляется возможным характеризовать определенным образом зависящей от температуры и напряженности поля удельной электрической проводимостью, т. е. когда связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля не представляется возможным выразить в форме $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, условимся явление движения заряженных частиц именовать током переноса. При таком условии в окрестности данной точки пространства может быть либо ток проводимости, либо ток переноса, а не оба эти вида тока одновременно.

Всякое вещество под действием электрического поля поляризуется. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, смещаются: частицы с положительными зарядами — в направлении поля, с отрицательными зарядами — против поля. Этот процесс мы количественно характеризовали поляризованностью $\boldsymbol{P}$ вещества. Полное осредненное электрическое смещение $\boldsymbol{D}$ в веществе равно сумме осредненного электрического смещения $\boldsymbol{D}_0$ в пустоте и поляризованности $\boldsymbol{P}$ вещества:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Для осредненных значений $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ для изотропного вещества можно написать соотношение

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

где ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества.

В выражении для плотности тока смещения в диэлектрике

$$\boldsymbol{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t}$$

будем подразумевать под $\boldsymbol{J}_{\text{см}}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ также осредненные значения соответствующих величин.

При внесении вещества во внешнее магнитное поле в веществе возникают согласованные элементарные токи, создающие магнитные поля, направленные против внешнего поля, если вещества диамагнитные, и в сторону внешнего поля, если вещества парамагнитные и ферромагнитные. Осредненное значение магнитной индукции может быть представлено при этом в виде суммы

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M},$$

где $\boldsymbol{H}$ — осредненная напряженность магнитного поля и $\boldsymbol{M}$ — намагниченность вещества. Соотношение между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ для изотропного вещества пишется в виде

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость вещества.

Рассматривая в дальнейшем осредненные в указанном смысле значения всех величин, будем иметь для любого изотропного вещества следующую систему уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \gamma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Плотность тока для общности выражена в виде суммы трех составляющих. При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут быть одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь второй составляющей по сравнению с первой и в диэлектриках обычно можно пренебречь первой составляющей по сравнению со второй.

При решении конкретных задач к приведенным выше уравнениям электромагнитного поля необходимо добавить граничные условия на поверхностях, являющихся границами между различными средами — границами между диэлектриками и проводниками, между двумя диэлектриками с различными ε, между двумя проводящими средами с различными γ, между двумя средами с различными μ. Эти граничные условия будут сформулированы в следующем параграфе. При исследовании переменных полей в общем случае должны быть заданы также начальные условия.

Кроме того, для решения вопроса о передаче энергии электромагнитным полем необходимо использовать выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$W' = W_{\text{э}}' + W_{\text{м}}' = \frac{\boldsymbol{ED}}{2} + \frac{\boldsymbol{BH}}{2}.$$

23.8. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными электрическими и магнитными свойствами

Рассмотрение уравнений электромагнитного поля, записанных в дифференциальной форме в выбранной системе координат, показывает, что величины $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ должны быть непрерывными функциями координат, так как в противном случае их производные не существуют. Функции $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ могут быть разрывными в точках на границах раздела сред с различными электрическими или магнитными свойствами, а также в точках поверхностей с весьма тонкими распределенными на них слоями зарядов или токов.

Так как уравнения электромагнитного поля не могут быть записаны в таких точках, то задача нахождения электромагнитного поля не может быть решена, если не дополнить уравнения соотношениями, связывающими составляющие векторов $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ по обе стороны поверхностей, являющихся границами раздела сред с различными электрическими или магнитными свойствами, и называемыми граничными условиями.

Рассмотрим поведение поля на границе раздела двух однородных и изотропных сред с различными электрическими и магнитными свойствами.

В каждой из сред поле будем характеризовать векторами $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, связанными между собой соотношением $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X}$, где a — скалярная величина, и удовлетворяющими уравнениям rot $\boldsymbol{X} = 0$, div $\boldsymbol{Y} = 0$, или в интегральной форме: $\oint_l \boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint_s \boldsymbol{Y}\,d\boldsymbol{s} = 0$ (рис. 23.7).

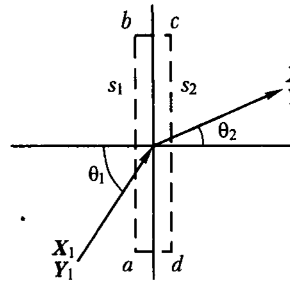

Рис. 23.7

Пусть вектор $\boldsymbol{X}$ в первой среде у поверхности раздела образует с нормалью к ней угол θ_1. Определим соответствующий угол θ_2 во второй среде. Для линейного интеграла $\oint_l \boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{l}$ по контуру $abcda$ имеем: $\oint_l \boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{l} = X_1 \sin\theta_1\, ab - X_2 \sin\theta_2\, cd = 0$, если bc и ad бесконечно малы по сравнению с ab и cd.

Ввиду того, что $ab = cd$, получаем:

$$X_1 \sin\theta_1 = X_2 \sin\theta_2, \qquad (*)$$

т. е. на поверхности раздела равны касательные составляющие вектора $\boldsymbol{X}$.

Вообразим замкнутую поверхность, образованную плоскими поверхностями s_1 и s_2, следы которых в плоскости рисунка суть линии ab и cd, и цилиндрической поверхностью, пересекающейся с плоскостью рисунка по линиям bc и ad. Поток вектора $\boldsymbol{Y}$ сквозь эту замкнутую поверхность равен нулю, так как внутри поверхности нет источников поля $\boldsymbol{Y}$. Пренебрегая потоком сквозь бесконечно малую цилиндрическую поверхность, получаем

$$\int_{s_1} \boldsymbol{Y}\,d\boldsymbol{s} + \int_{s_2} \boldsymbol{Y}\,d\boldsymbol{s} = -Y_1 \cos\theta_1 s_1 + Y_2 \cos\theta_2 s_2 = 0,$$

откуда, принимая во внимание, что $s_1 = s_2$, находим

$$Y_1 \cos\theta_1 = Y_2 \cos\theta_2, \qquad (**)$$

т. е. на поверхности раздела равны нормальные составляющие вектора $\boldsymbol{Y}$.

Разделив равенство (*) на (**), с учетом соотношения $Y_1 = a_1 X_1$ и $Y_2 = a_2 X_2$, получаем условие преломления линий при переходе их из одной среды в другую:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если линии вектора $\boldsymbol{X}$ нормальны к поверхности раздела, то векторы **Y** будут одинаковы в обеих средах: $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2$, но вектор $\boldsymbol{X}$ на поверхности раздела скачком изменяет свое значение, так как

$$X_1 = \frac{Y_1}{a_1} \neq X_2 = \frac{Y_2}{a_2}.$$

Понимая под функцией $\boldsymbol{X}$ одну из величин $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, а под функцией $\boldsymbol{Y}$ — $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$ или $\boldsymbol{B}$, можем записать соотношения, связывающие их касательные и нормальные составляющие на поверхности раздела двух сред с различными свойствами, характеризуемыми скалярной величиной a, равной ε, γ или μ.

Полученные условия непрерывности соответствующих составляющих величин $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B}$ на поверхности раздела двух сред сохраняются также и в случае анизотропных сред, свойства которых характеризуются тензорной величиной (a). Однако условия преломления линий при переходе их из одной среды в другую принимают более сложный вид.

В некоторых случаях на границах раздела сред с различными свойствами размещаются источники поля, такие как электрические заряды с поверхностной плотностью σ и подводимые извне сторонние токи с линейной плотностью j. В этих условиях граничные условия видоизменяются, так как интегралы $\oint\limits_s \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s}$, $\oint\limits_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ уже нельзя приравнять к нулю.

23.9. Электростатическое поле и поле постоянных токов как частные случаи электромагнитного поля

Уже было отмечено, что при движении заряженного тела около него возникают как электрическое, так и магнитное поля, т. е. обнаруживается электромагнитное поле, и что лишь в частном случае покоящегося заряженного тела около него обнаруживается только одно электрическое поле. Уже из этого простого факта следует, что уравнения, характеризующие электростатическое поле, должны вытекать как частный случай из общих уравнений электромагнитного поля. Очевидно, это будет простейший частный случай, характерный тем, что всюду плотность тока равна нулю. Рассмотрению этого частного случая будут посвящены следующие две главы.

Другим простейшим случаем является система неподвижных сверхпроводящих контуров, по которым протекают постоянные токи. Около таких контуров обнаруживается только статическое магнитное поле. Действительно, электрическое поле в такой системе полностью отсутствует, так как магнитный поток не изменяется во времени и, следовательно, в пространстве не индуцируется никаких ЭДС и, кроме того, сопротивление проводников, а следовательно, и падение напряжения в проводниках равны нулю. Магнитное поле неподвижных постоянных магнитов имеет такой же характер, как и поле около неподвижных сверхпроводящих контуров с токами, так как оно создается элементарными токами в теле магнита, протекающими без потерь энергии. Несколько более сложным и вместе с тем весьма важным частным случаем электромагнитного поля является поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, обладающих отличным от нуля электрическим сопротивлением. В этом случае около проводников и внутри них обнаруживаются как постоянное магнитное поле, так и постоянное электрическое поле. Рассмотрению этих случаев посвящаются двадцать шестая, двадцать седьмая и двадцать восьмая главы.

В последних двух главах будет рассмотрен общий случай — электромагнитное поле, изменяющееся во времени.

Проблема расчета электромагнитного поля при сложной форме геометрии области рассматривается в разделе математики, называемом математической физикой.

В дальнейшем мы приведем некоторые из методов математической физики, оптимальные для рассмотренных ранее задач. Из большой совокупности подходов могут быть выделены три: непосредственные аналитические методы расчета непрерывного распределения в пространстве и во времени рассчитываемых величин (напряженностей E, H поля, потенциалов U и других); численные методы, при которых искомые величины отыскиваются в конечней совокупности точек, называемых узлами, при помощи конечно-разностных уравнений; методы представления исходных уравнений поля в виде интегральных уравнений и методы физического и математического моделирования.

Глава двадцать четвертая

Электростатическое поле

24.1. Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала

Основной задачей настоящей главы является рассмотрение методов расчета электростатического поля, т. е. электрического поля системы неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел, то магнитное поле отсутствует. Следовательно, всюду

$$\boldsymbol{J}=0; \qquad \boldsymbol{B}=0; \qquad \boldsymbol{H}=0.$$

Наличие в электрическом поле свободных распределенных в проводящем электрический ток объеме зарядов привело бы к возникновению электрического тока. Поэтому предположение, что $\boldsymbol{J} = 0$, ведет к заключению, что всюду $\rho = 0$. Могут быть только заряды, распределенные по поверхностям заряженных тел.

Из системы уравнений электромагнитного поля остается следующая совокупность:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0; \qquad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}; \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=0.$$

Условие rot $\boldsymbol{E} = 0$ свидетельствует, что *электростатическое поле имеет безвихревой характер*. Поле, удовлетворяющее этому условию, называют безвихревым. Согласно теореме Стокса, для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=\int_s \operatorname{rot}\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}=0.$$

Таким образом, условие rot $\boldsymbol{E} = 0$ выражает в дифференциальной форме ранее высказанное важное положение: в электростатическом поле линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно в электростатическом поле линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$, взятый от точки A до точки B, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек A и B. Это обстоятельство дало нам возможность ввести понятие о потенциале электростатического поля. Потенциал электростатического поля в точке A мы определили как линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$, взятый от точки A до некоторой заданной точки P, т. е. $U_A = \int_A^P \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$. Потенциал в точке P равен нулю. Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль некоторого пути от точки A до точки B есть разность электрических потенциалов в точках A и B:

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=U_A-U_B.$$

Установим связь между напряженностью электрического поля и изменением потенциала в пространстве. Допустим, что положение точки A, в которой рассматриваем потенциал U, определяется ее расстоянием l от начальной точки O

вдоль некоторого пути (рис. 24.1), идущего в точку P, где потенциал принят равным нулю. Выражение для потенциала при этом можно написать в виде

$$U = \int_{l}^{l_P} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{l}^{l_P} E \cos\alpha\, dl,$$

причем l_P — длина всего пути от точки O до точки P; α — угол между направлением вектора $\boldsymbol{E}$ и касательной к пути.

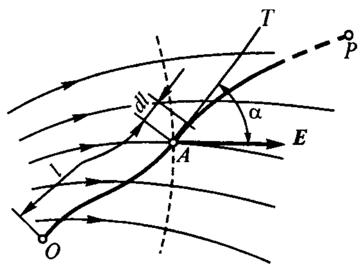

Рис. 24.1

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E\cos\alpha,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

В частности, в декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Если направление перемещения $d\boldsymbol{l}$ составляет прямой угол ($\alpha = \pi/2$) с вектором $\boldsymbol{E}$, то $\cos\alpha = 0$ и $\partial U/\partial l = 0$. Следовательно, мысленно перемещаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, будем иметь $U = \text{const}$, т. е. будем оставаться *на поверхности равного потенциала. Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала.* Уравнение $U(x, y, z) = \text{const}$ определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхностей равного потенциала в плоскости чертежа называют линиями равного потенциала. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Совмещая направление перемещения dl с направлением вектора $\boldsymbol{E}$, будем иметь

$$\alpha = 0; \quad \cos\alpha = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial l} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Поэтому условимся обозначать перемещение dl в этом направлении через dn, в соответствии с чем напишем:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Очевидно, dn есть элемент длины линии напряженности поля, причем координату n считаем растущей в направлении вектора $\boldsymbol{E}$.

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала и противоположном направлению вектора $\boldsymbol{E}$. Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора $\boldsymbol{E}$ и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают символом grad U.

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение:

$$|\mathrm{grad}\ U| = \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|.$$

Векторы $\boldsymbol{E}$ и grad U равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны:

$$\mathrm{grad}\ U = -\boldsymbol{E}.$$

Составляющие градиента электрического потенциала по осям в декартовой системе координат суть $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно,

$$\mathrm{grad}\ U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Градиент потенциала может быть обозначен при помощи символического оператора ∇ (знак «набла») в виде ∇U. При этом ∇U формально можно рассматривать как произведение символического вектора ∇ на скаляр U. В декартовых координатах имеем

$$\nabla U = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \mathrm{grad}\ U.$$

Следовательно, равенство $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\ U$ может быть написано в форме

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U.$$

Знак минус в этом равенстве указывает, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Это является следствием определения потенциала как линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого от рассматриваемой точки A до заданной точки P, в которой $U = 0$. Такое определение целесообразно, так как при этом потенциал положительно заряженного тела оказывается также положительным при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принимается равным нулю.

Все сказанное свидетельствует о том, что всякое *безвихревое поле есть поле потенциальное*, т. е. такое, которое может быть охарактеризовано потенциальной функцией $U(x, y, z)$.

Обратно, всякое потенциальное поле является безвихревым, что вытекает из тождества rot grad $U = 0$. Действительно,

$$\mathrm{rot}_x\ \mathrm{grad}\ U = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{grad}_z\ U - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{grad}_y\ U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0.$$

Аналогично $\text{rot}_y \text{grad}\, U = 0$ и $\text{rot}_z \text{grad}\, U = 0$. Подчеркнем еще раз, что для заданного поля потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора той точки, где принимается $U = 0$.

24.2. Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел

Во многих случаях существенно знать, как изменяется потенциал при удалении на весьма большое расстояние от системы заряженных тел.

Простейшие случаи были рассмотрены в первой части. Так, напряженность поля и потенциал уединенного точечного заряда q на расстоянии r от него в однородной и изотропной среде соответственно равны

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r^2}; \quad U = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r},$$

причем принимается равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек.

Любая система заряженных тел с отличным от нуля суммарным зарядом, расположенных в конечной области пространства, может рассматриваться на расстояниях, весьма больших по сравнению с размерами этой области, как точечный заряд. Поэтому при таких весьма больших расстояниях будут справедливы с точностью до малых более высокого порядка последние формулы, причем q — общий заряд системы. Следовательно, для любой системы заряженных тел, расположенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, отличный от нуля, потенциал стремится к нулю в бесконечности как $1/r$ и напряженность поля — как $1/r^2$.

В том случае, когда сумма зарядов всех тел, образующих систему, равна нулю, потенциал убывает в бесконечности еще быстрее. Такую систему можно подразделить на диполи, так как для каждого положительного заряда dq_1 можно подобрать в системе равный ему по значению отрицательный dq_2. Потенциал диполя на больших расстояниях r от него выражается формулой

$$U = \frac{qd\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2},$$

где $p = qd$ — электрический момент диполя; φ — угол между радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ и осью диполя, положительное направление которой принимаем от отрицательного заряда к положительному (рис. 24.2).

Заметим, что потенциал равен нулю не только в бесконечности, но и во всех точках плоскости, нормальной к оси диполя и проходящей через середину оси диполя, так как для этой плоскости $\cos\varphi = 0$.

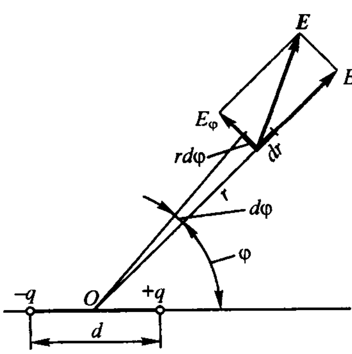

Рис. 24.2

Составляющие E_r и E_φ напряженности поля вдоль радиуса r и по касательной к окружности радиуса r в плоскости, проходящей через ось диполя, оказываются равными

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{p\sin\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

Таким образом,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$$

Итак, потенциал диполя на больших расстояниях от него убывает, как $1/r^2$, а напряженность поля — как $1/r^3$. Поэтому для любой совокупности заряженных тел, заключенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, равный нулю, потенциал убывает в бесконечности не медленнее, чем $1/r^2$, а напряженность поля — не медленнее, чем $1/r^3$. При этом возможно и более быстрое убывание потенциала, если оси отдельных диполей, на которые можно подразделить систему зарядов, ориентированы в противоположных направлениях и, следовательно, поля этих диполей ослабляют друг друга.

Во всех указанных задачах был принят равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек. Это не может быть сделано при рассмотрении поля бесконечно длинных проводов, суммарный заряд которых отличен от нуля. Хотя реальные провода всегда имеют конечную длину, однако при исследовании поля очень длинных параллельных прямолинейных проводов часто упрощают задачу, допуская, что провода имеют бесконечную длину. Как увидим дальше, этим достигается существенное упрощение задачи. Рассмотрим уединенный бесконечно длинный прямолинейный провод, равномерно по длине заряженный, с линейной плотностью заряда τ. Напряженность поля такого провода, как было получено в первой части, равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}.$$

Полагая, что точка P, в которой $U = 0$, удалена от оси провода на расстояние r_P, получим

$$U = \int_r^{r_P} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\,dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ln r_P - \ln r).$$

В частности, можно принять $U = 0$ при $r_P = 1$. Тогда будем иметь

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r.$$

Принять же $r_P = \infty$ нельзя, так как интеграл при этом теряет смысл — потенциал всюду при любом конечном r становится бесконечным.

Однако если существует несколько параллельных проводов и при этом суммарный заряд их равен нулю, т. е. $\tau = \Sigma\tau_k = 0$, что обычно и имеет место в реальных задачах, то потенциал в бесконечности можно принять равным нулю даже и в том случае, если условно рассматривать провода как бесконечно длинные. Рассмотрим сначала два провода с зарядами на единицу длины $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = -\tau$. На рис. 24.3 отмечены точки пересечения проводов с плоскостью рисунка. Провода нормальны к плоскости рисунка. Расстояние между проводами обозначим через d. Для потенциала в точке A имеем выражение

$$U = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_2}}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_1}}{r_{P_2}} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2},$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки A от проводов, r_{P_1} и r_{P_2} — расстояния точки P от проводов.

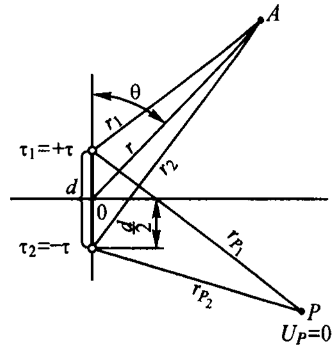

Рис. 24.3

При удалении точки P в бесконечность $r_{P_1} \to r_{P_2}$ и первое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, если принять равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек, то на всех конечных расстояниях r_1 и r_2 потенциал получается конечным:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Заметим, что при этом потенциал равен нулю также на плоскости, проходящей посередине между проводами, так как для всех точек этой плоскости $r_1 = r_2$.

Определим, как убывает потенциал на больших расстояниях от проводов. При $r \gg d$ имеем $r_1/r_2 \approx 1 - d\cos\theta/r_2 \approx 1 - d\cos\theta/r$, где r — расстояние точки A от середины отрезка, соединяющего оси проводов, а θ — угол между радиусом r и этим отрезком. Следовательно, при $r \gg d$

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r}\right).$$

Разлагая логарифм в ряд по степеням $d\cos\theta/r$ и пренебрегая членами высших порядков малости, находим

$$U = \frac{\tau d\cos\theta}{2\pi\varepsilon r}.$$

Составляющие напряженности поля при $r \gg d$ имеют выражения:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau d\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^2};\quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\tau d\sin\theta}{2\pi\varepsilon r^2},$$

и, следовательно,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\tau d}{2\pi\varepsilon r^2}.$$

Таким образом, для пары бесконечно длинных проводов, имеющих равные и противоположные по знаку заряды, потенциал в бесконечности стремится к нулю, как $1/r$, а напряженность поля — как $1/r^2$. Любую систему бесконечно длинных параллельных проводов, расположенных на конечных расстояниях друг от друга и имеющих суммарный заряд $\Sigma\tau_k$, равный нулю, можно разделить на пары проводов с равными и противоположными по знаку зарядами. Следовательно, потенциал такой системы убывает в бесконечности не медленнее, чем $1/r$, а напряженность поля — не медленнее, чем $1/r^2$.

24.3. Определение потенциала по заданному распределению зарядов

Выражение потенциала точечного заряда дает возможность указать для однородной среды общий метод вычисления потенциала при заданном распределении в конечной области пространства электрических зарядов. Здесь мы предполагаем, что свободные заряды распределены не только по поверхности тел, но также могут находиться в объеме диэлектрика и описываются в этом случае объемной плотностью заряда ρ.

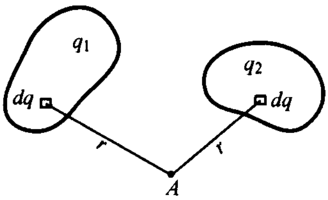

Рис. 24.4

Подразделив все распределенные в пространстве заряды (рис. 24.4) на элементарные части dq, будем рассматривать эти элементы dq как точечные заряды. Потенциал в точке A, определяемый каждым таким элементом, равен $dU = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{dq}{4\pi r}$. Следовательно, потенциал, определяемый всей совокупностью распределенных в пространстве зарядов, может быть найден из формулы

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{dq}{r}.$$

Если электрический заряд распределен по объему V, причем объемная плотность заряда в некоторой точке пространства есть ρ, то следует разбить весь объем на элементы dV. Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Если заряд распределен лишь в весьма тонких слоях у поверхности заряженных тел, как это имеет место у тел из проводящего материала, то можно считать, что заряд распределен на поверхности тел. Разбивая заряженные поверхности на элементы ds, можем написать $dq = \sigma\, ds$, где σ — поверхностная плотность заряда. Тогда выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\, ds}{r},$$

причем интеграл должен быть распространен по всем заряженным поверхностям. То обстоятельство, что в объемах, занятых самими заряженными телами, находится проводящая среда и, следовательно, среда во всем пространстве неоднородна, в данном случае несущественно, так как внутри проводящих тел поле отсутствует. Мы могли бы мысленно убрать проводящее вещество тел, заменив его диэлектриком с проницаемостью ε и сохранив все поверхностные заряды тел. При этом поле осталось бы без изменения.

В случае когда заряд распределен на проводах, диаметр сечения которых мал по сравнению с расстояниями от проводов до точек поля, в которых определяется потенциал, можно считать заряд сосредоточенным на осях проводов. Если τ — линейная плотность заряда, то $dq = \tau dl$ и

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{r}, \qquad (*)$$

причем интеграл распространяется вдоль всех заряженных проводов.

Наконец, при конечном числе n зарядов, которые могут рассматриваться как точечные, имеем

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{r_k}.$$

Учитывая соотношение $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U$, можем записать следующие выражения для напряженности электрического поля:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho \boldsymbol{r}}{r^3}dV, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma \boldsymbol{r}}{r^3}ds, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau \boldsymbol{r}}{r^3}dl.$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от точки расположения заряда к точке определения напряженности поля и равный расстоянию между ними.

Отметим еще раз, что формулами, приведенными в настоящем параграфе, можно пользоваться для вычисления потенциала только в том случае, если заряды распределены в конечной области пространства. В частности, формулой (*) можно пользоваться, если длина проводов конечна. Действительно, эта формула основана на выражении для потенциала точечного заряда, которое получено в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю. Однако, как было показано выше, для бесконечно длинных проводов потенциал в бесконечности не может быть принят равным нулю, так как при этом на всех конечных расстояниях потенциал получился бы бесконечно большим. Соответственно и интеграл $\int_l \frac{\tau\, dl}{r}$ в применении к бесконечно длинным проводам всюду обращается в бесконечность.

Заметим, что в случае объемного и поверхностного распределения зарядов потенциал остается конечным и в тех точках, где ρ или σ не равны нулю. В случае же линейного распределения зарядов потенциал самих заряженных нитей, если предположить их бесконечно тонкими, получается бесконечно большим. Поэтому точки нитей должны быть исключены из рассмотрения. Точно так же для системы точечных зарядов потенциал обращается в бесконечность в точках, где сосредоточены заряды. Эти точки также должны быть исключены из рассмотрения.

Физический смысл имеет только объемное распределение зарядов. Тем не менее условное представление о поверхностном, линейном или точечном распределении зарядов весьма полезно при решении многих конкретных практических задач.

24.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

Подставляя в уравнение

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме, вместо величин E_x, E_y и E_z их выражения через потенциал:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Это дифференциальное уравнение носит название уравнения Пуассона. Интеграл

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{r},$$

приведенный в предыдущем параграфе, является решением уравнения Пуассона в случае, когда заряды распределены в конечной области пространства.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение Пуассона получает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

и называется в этом частном случае уравнением Лапласа. Электростатическое поле удовлетворяет уравнению Лапласа.

Левые части уравнений Пуассона и Лапласа представляют собой расхождение градиента потенциала и могут быть записаны в форме, не зависящей от выбора системы координат:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0.$$

Нередко можно встретить запись левой части этих уравнений с помощью символического оператора в виде $\nabla^2 U$. Действительно,

$$\nabla^2 = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и, следовательно,

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Оператор ∇^2 часто обозначают Δ и называют оператором Лапласа или лапласианом. Следовательно, уравнения Пуассона и Лапласа могут быть написаны также в виде

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \quad \nabla^2 U = 0 \quad \text{или} \quad \Delta U = 0.$$

24.5. Граничные условия на поверхности проводников

Так как в электростатическом поле электрические токи отсутствуют, то из соотношения $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ следует, что внутри проводников ($\gamma \neq 0$) всюду должно быть $\boldsymbol{E} = 0$. Из выражения $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, U$ при этом следует, что для каждого проводника потенциал всех его точек имеет одно и то же значение. Поверхности проводников суть поверхности равного электрического потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним. Обозначим через E_n и E_t нормальную и касательную к поверхности проводника составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ в диэлектрике около поверхности проводника. Граничное условие для поля в диэлектрике на поверхности проводника может быть записано в виде U = const или, что то же самое, $E_t = 0$, $E = E_n = -\,\partial U/\partial n$. При этом $D = \varepsilon E = -\,\varepsilon \dfrac{\partial U}{\partial n} = \sigma$, где σ — плотность электрического заряда на поверхности проводника.

24.6. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

На границе раздела двух однородных и изотропных диэлектриков с абсолютными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, находящихся в электрическом поле (рис. 24.5), напряженность и электрическое смещение которого удовлетворяют уравнениям $\oint\limits_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$ и $\oint\limits_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = 0$, можем (см. § 23.8), принимая $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}$, $a_1 = \varepsilon_1$, $a_2 = \varepsilon_2$ на основании отношений (*), (**), записать условия $\boldsymbol{E}_1 \sin\theta_1 = \boldsymbol{E}_2 \sin\theta_2$ и $\boldsymbol{D}_1 \cos\theta_1 = \boldsymbol{D}_2 \cos\theta_2$, выражающие непрерывность касательных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ и нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{D}$. Условие преломления линий принимает вид:

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\mathrm{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

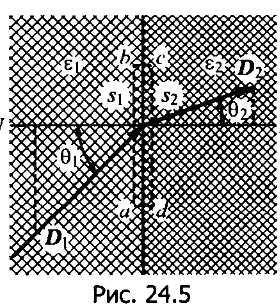

Рис. 24.5

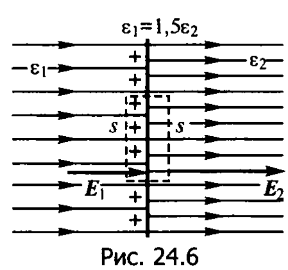

Рис. 24.6

Рассмотрим случай, когда линии напряженности поля нормальны к поверхности раздела (рис. 24.6) двух изотропных сред с абсолютными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Векторы смещения будут одинаковы в обеих средах: $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$, но напряженность поля на поверхности раздела скачком изменяет свое значение, так как

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \neq E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2}.$$

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и соответственно диэлектрическая восприимчивость χ_1 первой среды больше диэлектрической восприимчивости χ_2 второй. Тогда $E_1 < E_2$. На рис. 24.6 изображено для этого случая поле вектора $\boldsymbol{E}$.

У поверхности раздела двух диэлектриков из первой среды выступают положительные заряды диполей и из второй среды — отрицательные заряды диполей. Так как $\chi_1 > \chi_2$, то положительные заряды преобладают над отрицательными и в тонком слое у поверхности раздела образуется связанный положительный заряд. Ввиду чрезвычайной малости толщины этого слоя его заряд можно рассматривать как поверхностный с плотностью σ'. Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, след которой изображен на рис. 24.6 штриховой линией, получим $D_1 = D_2$, так как свободных зарядов на поверхности раздела двух диэлектриков нет. Следовательно,

$$\varepsilon_0 E_1 + P_1 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 \quad \text{или} \quad \varepsilon_0(E_2 - E_1) = P_1 - P_2.$$

С другой стороны, применяя теорему Гаусса в форме $\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \dfrac{q+q'}{\varepsilon_0}$ и учитывая, что $q = 0$, будем иметь

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \frac{q'}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad -E_1 s + E_2 s = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$\varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{q'}{s} = \sigma'.$$

Таким образом, $\sigma' = P_1 - P_2$.

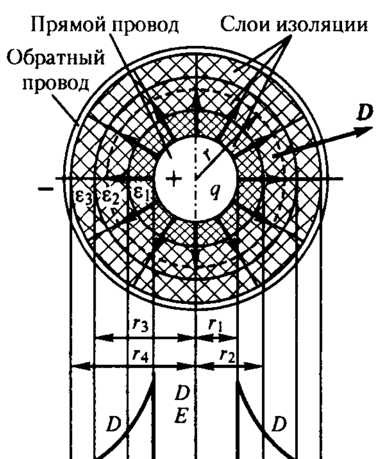

Рис. 24.7

Итак, вследствие неодинаковой способности диэлектриков поляризоваться на их поверхности возникает связанный поверхностный заряд с плотностью, равной разности поляризованностей диэлектрика, из которого линии напряженности поля выходят, и диэлектрика, в который они входят. В общем случае, когда линии напряженности поля подходят к поверхности раздела под некоторым углом, σ' равно, как нетрудно убедиться, разности нормальных составляющих векторов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$.

В виде примера рассмотрим концентрический кабель с несколькими слоями диэлектрика с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 24.7). Вообразим цилиндрическую поверхность радиуса r и длины l, ось которой совмещена с осью кабеля. Поток смещения сквозь эту поверхность равен заряду $q = \tau l$, расположенному на отрезке l внутреннего провода кабеля, т. е. $\int\limits_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q = \tau l$, причем τ — линейная плотность заряда.

Так как на всей поверхности ввиду симметрии $D = \text{const}$ и вектор $\boldsymbol{D}$ нормален к поверхности, то $\int\limits_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = Ds = 2\pi r l D$.

Итак,

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Напряженность в k-м слое изоляции равна

$$E_k = \frac{D}{\varepsilon_k} = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_k}.$$

В пределах каждого слоя напряженность поля убывает с увеличением r, при переходе же к следующему слою она изменяется скачком в связи с изменением ε. Этот скачок мы и можем объяснить появлением связанных зарядов на поверхности раздела двух слоев диэлектрика.

В каждом слое напряженность поля имеет максимальное значение у внутренней поверхности слоя, равное $E_{km} = \dfrac{\tau}{2\pi r_k \varepsilon_k}$, причем r_k — внутренний радиус слоя. Представляется возможным при проектировании кабеля подобрать величины $r_k \varepsilon_k$ для всех слоев так, чтобы величины E_{km} отвечали допустимым значениям напряженности, соответствующим электрической прочности слоев. В частности, если допустимая максимальная напряженность поля E_{km} во всех слоях одинакова, то следует стремиться к соблюдению условий:

$$r_1 \varepsilon_1 = r_2 \varepsilon_2 = \ldots = r_k \varepsilon_k = \ldots = \text{const}.$$

Применением многослойной изоляции достигается значительное выравнивание напряженности поля вдоль радиуса, что иллюстрируется эпюрой на рис. 24.7.

24.7. Основная задача электростатики

Общей задачей расчета электрического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел. Для электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат. Если полностью задано распределение электрических зарядов в однородной и изотропной среде, то решение может быть получено методом, изложенным в § 24.3. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению потенциала решается с помощью уравнения Лапласа и граничного условия $-\varepsilon \dfrac{\partial U}{\partial n} = \sigma$ поверхности заряженных проводящих тел.

Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы либо потенциалы всех тел: U_1, U_2, ..., U_k, либо полные заряды тел: q_1, q_2, ..., q_k. Распределение же зарядов по поверхности каждого тела неизвестно и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Также неизвестным является и распределение потенциала в пространстве. Особенно усложняется задача для неоднородной или неизотропной среды.

Решение такой задачи аналитическим путем в конечном виде возможно только для отдельных частных случаев. В некоторых случаях удается найти решение при помощи искусственных приемов. В связи с этим чрезвычайно важно установить те необходимые и достаточные требования, при удовлетворении которых поле определяется единственным образом. Этими требованиями являются следующие:

1. Поле в диэлектрике должно удовлетворять уравнениям:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0.$$

При этом уравнение $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$, как было показано в § 24.1, эквивалентно равенству $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,U$.

Для однородной среды эти уравнения приводятся к одному уравнению для потенциала U:

$$\mathrm{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = -\varepsilon\,\nabla^2 U = 0,$$

т. е. к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2. Поверхности проводящих тел должны быть поверхностями равного потенциала, т. е. для каждой такой поверхности должно быть соблюдено условие $U = \mathrm{const}$; этот же потенциал тело имеет, конечно, и во всем своем объеме.

3. Потенциалы на поверхности тел должны быть равны заданным значениям U_k, если по условиям задачи известны эти потенциалы. Если же заданы полные заряды тел, то для каждого тела должно быть удовлетворено условие

$$q_k = \int\limits_{s_k} \sigma ds = -\int\limits_{s_k} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Можно показать, что выполнение этих требований не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача была решена единственным образом. Это важное положение часто называют теоремой единственности.

24.8. Плоскопараллельное поле

Задача расчета весьма упрощается, если все величины, характеризующие поле, зависят только от двух координат. Такому условию удовлетворяет поле системы из нескольких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндрических проводов с зарядами, равномерно распределенными по их длине. Диэлектрик будем предполагать однородным. Направим ось $0z$ параллельно осям проводов. Тогда все линии напряженности поля будут лежать в плоскостях, параллельных плоскости XOY. Картина поля во всех этих плоскостях одинакова, и достаточно исследовать поле только в плоскости $x0y$. Поле такого вида будем называть плоскопараллельным полем. На рис. 24.8 изображены поперечные сечения двух проводов и картина поля около них. Потенциал плоскопараллельного поля есть функция только двух координат: x и y. Поверхности равного потенциала суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси $0z$. Линии равного потенциала в плоскости $x0y$ определяются уравнениями вида

$$U(x, y) = \text{const}.$$

Условимся наносить на чертеже линии равного потенциала через такие промежутки, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одинаковое приращение ΔU потенциала.

Уравнение линии напряженности поля может быть получено на основе следующих соображений. Пусть некоторая линия напряженности поля рассматривается как начальная (рис. 24.8). Соединим произвольную точку $M(x, y)$ с некоторой точкой A начальной линии криволинейным отрезком MmA. Обозначим через Ψ_E поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь поверхность, которую описал бы отрезок MmA, перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси $0z$ и проходя путь l. Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов и введем обозначение $V = \Psi_E/l$.

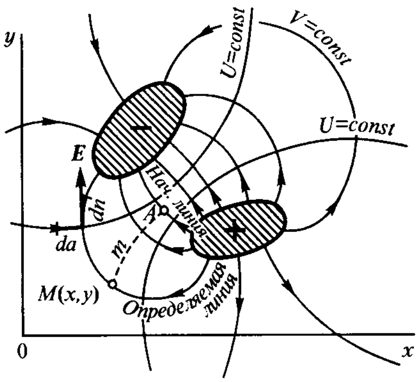

Рис. 24.8

Величина V, так же как и величина потока Ψ_E, зависит от положения точки M, т. е. является функцией ее координат, что мы запишем в виде $V(x, y)$. Ясно, что для всех точек $M(x, y)$, лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция $V(x, y)$ имеет одинаковые значения. Поэтому уравнение

$$V(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением этой линии напряженности поля. Функцию $V(x, y)$ называют функцией потока.

Функция $V(x, y)$ многозначна, так как если обойти по некоторому замкнутому контуру сечение какого-либо заряженного провода, то V получит приращение, равное $\Delta\Psi_E/l$, где Ψ_E — поток сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок этого провода длиной l. Эта многозначность не имеет существенного значения, так как напряженность поля, как сейчас будет показано, определяется в виде производной функции V по координате и значение постоянной слагающей функции не играет существенной роли.

Условимся наносить на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение ΔV функции потока.

Отметим, что уравнения $U(x, y)$ = const и $V(x, y)$ = const определяют два семейства кривых, пересекающихся всюду под прямым углом, т. е. образующих в плоскости $x0y$ ортогональную сетку. Пусть dn — элемент длины линии напряженности поля и da — элемент длины линии равного потенциала. Очевидно, во всех точках поля $dn \perp da$. Будем считать координату n возрастающей в направлении вектора $\boldsymbol{E}$. Координату a будем считать возрастающей влево от вектора $\boldsymbol{E}$ для наблюдателя, расположившегося так, что для него вектор $\boldsymbol{E}$ направлен снизу вверх. Потенциал U увеличивается в направлении против вектора $\boldsymbol{E}$, т. е. в сторону уменьшения координаты n. Условимся считать функцию потока V возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается a. Напряженность электрического поля при этих условиях может быть выражена через U и V в форме

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}. \qquad (*)$$

Равенство $E = -\,\partial U/\partial n$ нам уже знакомо. Оно говорит, что величина вектора $\boldsymbol{E}$ численно равна уменьшению потенциала на единицу длины в направлении линии напряженности поля. Соотношение же $E = \partial V/\partial a$ следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора $\boldsymbol{E}$, проходящему через единицу поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Давая приращение только одной координате a, получим соответствующее приращение потока $d_a\Psi_E$. Поток $d_a\Psi_E$ проходит через поверхность $l\,da$. Так как эта поверхность нормальна к линиям напряженности поля, то

$$E = \frac{d_a\Psi_E}{l da} = \frac{d_a V}{da} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Уравнение (*) выражено в системе криволинейных ортогональных координат n и a, где n отсчитывается вдоль линий напряженности поля и a — вдоль линий равного потенциала. Переходя к декартовым координатам, напишем:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}; \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Равенства $E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и $E_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ были уже приведены ранее.

Равенства $E_x = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ и $E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ вытекают из следующих соображений. Дадим приращение только координате y. Сквозь площадку $l\,dy$ проходит поток $d_y\Psi_E = E_x l\,dy$. Отсюда имеем

$$E_x = \frac{d_y\Psi_E}{l\,dy} = \frac{d_y V}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

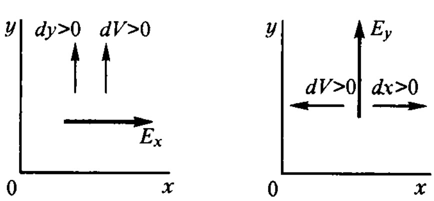

Рис. 24.9

Знак плюс (+) следует принять потому, что V и y возрастают оба влево от E_x (рис. 24.9). Давая приращение только координате x, найдем соответственно

$$d_x\Psi_E = -E_y l\,dx \quad \text{или} \quad E_y = -\frac{d_x\Psi_E}{l\,dx} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Здесь необходимо поставить знак минус (–), так как V возрастает влево, а x — вправо от E_y (см. рис. 24.9).

Обе функции, U и V, удовлетворяют уравнению Лапласа. Продифференцировав первое уравнение (**) еще раз по x и второе еще раз по y, получим $-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ и $-\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$, откуда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по y и второе по x, найдем $-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ и $-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, откуда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, любые функции U и V, удовлетворяющие совокупности уравнений (**), удовлетворяют и первому требованию, сформулированному в § 24.7.

Для заданной системы проводников эти функции должны быть такого вида, чтобы удовлетворялось второе требование — постоянство потенциала U на поверхности каждого проводника.

Кроме того, для определения постоянных в выражениях функций U и V необходимо использовать третье условие — количественное задание потенциалов или зарядов проводников.

Соотношения (**) вполне достаточны для вычисления составляющих напряженности поля, если тем или иным способом найдена либо функция $U(x, y)$, либо функция $V(x, y)$.

24.9. Применение функций комплексного переменного

Будем рассматривать плоскость, в которой расположены линии напряженности плоскопараллельного поля, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$, в которой по оси абсцисс откладываются вещественные количества (x), а по оси ординат — мнимые количества (jy). Назовем эту плоскость плоскостью z. Каждой точке такой плоскости соответствует вполне определенное комплексное число z.

Введем в рассмотрение комплексную величину $\zeta = \xi + j\eta$, где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — функции x и y.

Говорят, что ζ есть регулярная аналитическая функция комплексного переменного z в некоторой области, если она однозначна, непрерывна и имеет определенную непрерывную производную во всех точках этой области. При этом обозначают $\zeta = f(z)$.

Давая переменной z приращение Δz, получим приращение функции $\Delta\zeta = f(z + \Delta z) - f(z)$. Если отношение $\Delta\zeta/\Delta z$ стремится к определенному пределу

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

независимо от того, по какому закону стремится к нулю Δz, то этот предел и называется производной от функции комплексного переменного.

Выбирая приращение Δz один раз в направлении оси вещественных ($\Delta z = \Delta x$), другой раз — в направлении оси мнимых ($\Delta z = j\Delta y$) количеств, можем написать условие дифференцируемости функции в виде

$$\frac{d\zeta}{dz} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x\xi + j\Delta_x\eta}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y\xi + j\Delta_y\eta}{j\Delta y},$$

где $\Delta_x\xi$ и $\Delta_x\eta$ — изменение ξ и η при изменении только x на величину Δx; $\Delta_y\xi$ и $\Delta_y\eta$ — то же при изменении только y на величину Δy. Это равенство может быть переписано в виде

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + j\frac{\partial\eta}{\partial x} = -j\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial y};\quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Последние уравнения называют уравнениями Коши—Римана. Они необходимы и, как нетрудно показать, достаточны для того, чтобы функция $\zeta = f(z)$ комплексного переменного z имела определенную производную. Из этих уравнений получаем

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$$

или

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, а следовательно, и функция $\zeta = \xi + j\eta$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Сопоставляя уравнения Коши–Римана, связывающие ξ и η, с уравнениями (**) в предыдущем параграфе, дающими связь между V и U, замечаем их полное соответствие. Это означает, что можем непосредственно принять $\xi = V$ и $\eta = U$ и соответственно положить

$$\zeta = \xi + j\eta = V + jU = f(z).$$

Функция $\zeta = V + jU$, вещественная часть которой есть функция потока, а мнимая — потенциал, называется комплексным потенциалом поля.

Составляющие вектора напряженности поля могут быть получены из уравнений:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Нередко интересуются только модулем E вектора $\boldsymbol{E}$, так как вынужденное состояние диэлектрика определяется именно значением напряженности поля. Для вычисления E имеем соотношение

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}.$$

Но, согласно уравнениям Коши—Римана, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Следовательно,

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Из всего сказанного следует, что задача расчета поля решена, если найдена аналитическая функция $\zeta = f(z)$, удовлетворяющая граничным условиям на поверхности проводов, т. е. такая, мнимая часть которой принимает постоянное значение на контуре, ограничивающем сечение провода. Указать общий метод нахождения такой функции для любой формы сечений проводов не представляется возможным.

По заданной конфигурации контура сечения проводов функция $\zeta = f(z)$ может быть найдена только для некоторых форм сечений. Однако можно пойти обратным путем. Именно, исследуя различные аналитические функции, можно найти соответствующие им поля и получить таким путем решения для ряда конкретных случаев. Это очень существенно, так как создает возможность при сложной форме сечения проводов, для которой не может быть получено точное решение, подобрать близкий случай, рассмотренный теоретически, и выводы, полученные из последнего, приближенно применить к исследуемому реальному случаю.

24.10. Поле уединенного провода кругового сечения

Рассмотрим аналитическую функцию $\zeta = Aj \ln z + C$, где A — вещественная величина, а $C = C_1 + jC_2$.

Обозначив $z = re^{j\theta}$, получим

$$\zeta = \xi + j\eta = Aj \ln r - A\theta + C_1 + jC_2.$$

Полагая $\xi = V$ и $\eta = U$, находим

$$V = -A\theta + C_1; \quad U = A \ln r + C_2.$$

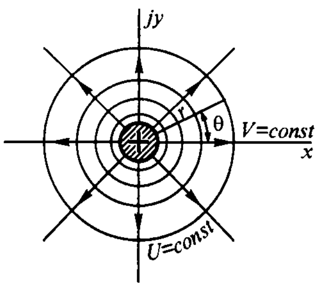

Рис. 24.10

Уравнение линий напряженности поля: V = const или θ = const. Уравнение линий равного потенциала: U = const или r = const.

Следовательно, функция $\zeta = Aj \ln z + C$ определяет поле, линии напряженности которого являются лучами, исходящими из начала координат (рис. 24.10). Линии равного потенциала являются окружностями с центром в начале координат, и поверхности равного потенциала — поверхностями круговых цилиндров. Если совместим с одной из этих поверхностей поверхность заряженного провода кругового сечения, то для поверхности провода будет удовлетворено основное требование — постоянство потенциала. Следовательно, можно утверждать, что рассматриваемая функция является комплексным потенциалом поля вне провода.

Постоянная A определяется на основании того, что при обходе по замкнутому контуру вокруг сечения провода угол θ возрастает на 2π, а функция V получает приращение, равное Ψ_E/l, где Ψ_E — поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок провода длиной l. Согласно теореме Гаусса, этот поток должен быть равен отношению заряда q отрезка провода к абсолютной диэлектрической проницаемости ε среды. Следовательно, $\dfrac{q}{\varepsilon l} = -A \cdot 2\pi$ и $A = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon l} = -\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}$, причем τ — заряд на единицу длины провода.

Итак,

$$V = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\theta + C_1; \quad U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят от выбора начальной линии напряженности поля, для которой принимается $V = 0$, и от выбора линии равного потенциала, на которой принимается $U = 0$.

Напряженность поля, согласно последнему выражению предыдущего параграфа, равна

$$E = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \left|-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \frac{1}{z}\right| = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}.$$

Приращение ΔU потенциала при переходе от линии равного потенциала, помеченной номером ν, к соседней, ($\nu + 1$)-й линии, согласно принятому допущению, должно быть постоянным, не зависящим от ν:

$$\Delta U = U_{\nu+1} - U_\nu = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ln r_{\nu+1} - \ln r_\nu) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \text{const},$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = B = \text{const}.$$

Следовательно, радиусы окружностей равного потенциала изменяются в геометрической прогрессии, знаменатель которой может быть выбран произвольно.

Приращение ΔV функции потока при переходе от ν-й линии напряженности поля к $(\nu + 1)$-й мы условились также принимать одинаковым для всех промежутков между линиями напряженности поля:

$$\Delta V = V_{\nu+1} - V_\nu = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_{\nu+1} - \theta_\nu) = \text{const},$$

откуда

$$\theta_{\nu+1} - \theta_\nu = \Delta\theta_\nu = \text{const},$$

т. е. линии напряженности поля должны отстоять друг от друга на равные углы. На рис. 24.10 вычерчено поле уединенного провода, причем принято $B = 1{,}5$ и $\Delta\theta = \pi/4$.

Поле вне провода такое же, как если бы весь заряд провода был сосредоточен на его оси. Следовательно, полученное решение справедливо для уединенного линейного провода любой формы сечения. Линейными проводами называем такие, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с расстоянием от проводов до точек, в которых рассматривается поле.

Заметим, что если бы ось провода проходила не через начало координат, а через точку $z_1 = x_1 + jy_1$, то поле характеризовалось бы функцией

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - z_1) + C.$$

24.11. Поле двух плоскостей, сходящихся под углом

Рассмотрим теперь функцию $\zeta = A \ln z + C$. Полагая опять $\xi = V$ и $\eta = U$, будем иметь

$$\zeta = V + jU = A\ln r + jA\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля $V = A \ln r + C_1 = \text{const}$, т. е. $r = \text{const}$. Уравнение линий равного потенциала $U = A\theta + C_2$, т. е. $\theta = \text{const}$.

Линии напряженности поля представляют собой окружности, линии равного потенциала — радиальные прямые, и поверхности равного потенциала — плоскости, проходящие через ось OZ. Совместим с любыми двумя поверхностями равного потенциала поверхности двух металлических пластин, имеющие электрические заряды, равные по значению, но противоположные по знаку (рис. 24.11). В начале координат пластины отделены друг от друга весьма тонким слоем диэлектрика. Так как основное требование постоянства потенциала на поверхности каждой пластины оказывается удовлетворенным, то, следовательно, поле таких пластин характеризуется рассмотренной функцией. Постоянные A и C_2 найдем из условий: $U = C_2 = U_1$ при $\theta = 0$, $U = A\alpha + C_2 = U_2$ при $\theta = \alpha$. Следовательно, $A\alpha = U_2 - U_1$, где α — угол между пластинами. Кроме того, $\ln r = 0$ и $C_1 = V_1$ при $r = 1$. Таким образом, функция, характеризующая поле, имеет вид

$$\zeta = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \ln z + V_1 + jU_1.$$

Напряженность поля равна

$$E = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \left|\frac{U_2 - U_1}{\alpha z}\right| = \frac{U_2 - U_1}{\alpha r},$$

т. е. так же, как и для уединенного провода, она изменяется обратно пропорционально r.

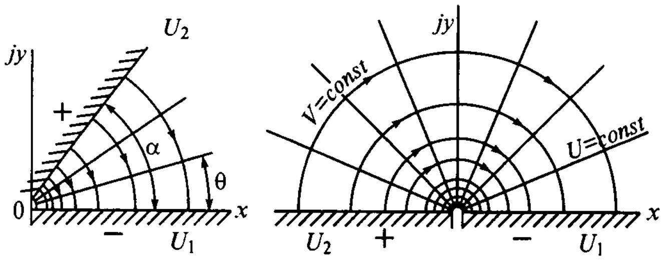

Рис. 24.11

Обратим внимание на то, что функция $\zeta = A \ln z + C$ отличается от функции, рассмотренной в предыдущем параграфе, только множителем j. Это приводит к перемене местами U и V и соответственно к перемене местами линий напряженности поля и линий равного потенциала (см. рис. 24.10 и 24.11).

24.12. Поле двухпроводной линии передачи

Рассмотрим важный для практики случай — поле двухпроводной линии передачи (рис. 24.12). Провода, расположенные друг от друга на расстоянии $2b$, вначале будем считать линейными.

Пользуясь принципом наложения, получаем выражение для комплексного потенциала

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - z_1) - \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - z_2) + C,$$

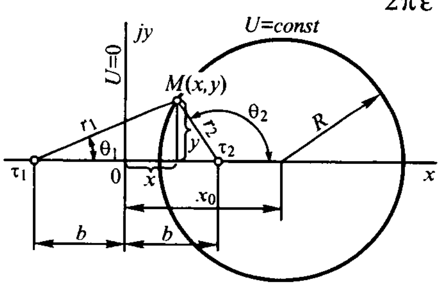

Рис. 24.12

где τ_1 и τ_2 — линейные плотности зарядов проводов; z_1 и z_2 — комплексные координаты точек пересечения проводов с плоскостью $x0y$.

Расположив оси координат так, как показано на рис. 24.12 ($z_1 = -b$, $z_2 = +b$), и учитывая, что для двухпроводной линии $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$, получаем

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln\left(\frac{z+b}{z-b}\right) + C.$$

Обозначая $z + b = r_1 e^{j\theta_1}$ и $z - b = r_2 e^{j\theta_2}$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки z до осей проводов и θ_1 и θ_2 — соответствующие углы с осью $0x$, находим

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2 - \theta_1) + C_1;$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2.$$

Положив $C_2 = 0$, получаем $U = 0$ при $r_1 = r_2$, т. е. линией нулевого потенциала при $C_2 = 0$ является ось ординат. Уравнение любой линии равного потенциала имеет вид

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = \text{const},$$

или

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}.$$

Покажем, что линии равного потенциала суть окружности с центрами на оси OX. Имеем

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k^2$$

или

$$(1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)bx + (1-k^2)y^2 = -b^2(1-k^2).$$

Разделим последнее уравнение на $(1 - k^2)$ и добавим с каждой стороны по члену $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$. Получим

$$x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}bx + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2 + y^2 = -b^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2,$$

или

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kb}{1-k^2}\right)^2,$$

что является уравнением окружности с координатами центра

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \quad \text{и} \quad y_0 = 0$$

и радиусом

$$R = \frac{2k}{\left|1-k^2\right|}b.$$

Чтобы приращение потенциала при переходе от любой линии равного потенциала к соседней оставалось постоянным, должно быть соблюдено условие

$$\Delta U = U_{\nu+1} - U_\nu = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{r_{2,\nu+1}}{r_{1,\nu+1}} - \ln\frac{r_{2,\nu}}{r_{1,\nu}}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{k_{\nu+1}}{k_\nu} = \text{const},$$

т. е. числа k при возрастании порядкового номера ν линий должны изменяться в геометрической прогрессии:

$$\frac{k_{\nu+1}}{k_\nu} = B = \text{const}.$$

Положив в выражении для функции потока $C_1 = 0$, получим $V = 0$ при $\theta_2 = \theta_1$, т. е. начальной линией напряженности поля при $C_1 = 0$ являются участки оси абсцисс, уходящие от проводов в бесконечность. Уравнение любой линии напряженности поля имеет форму

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2 - \theta_1) = \text{const}, \quad \text{или} \quad \theta_2 - \theta_1 = \vartheta = \text{const}$$

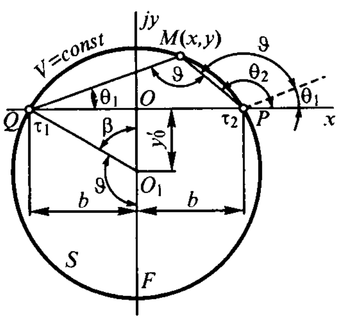

Рис. 24.13

и, следовательно, является уравнением дуги окружности, пересекающейся с проводами, что видно непосредственно из рис. 24.13. Действительно, угол QMP, под которым виден отрезок QP из точек $M(x, y)$, лежащих на линии напряженности поля, равен углу ϑ и остается постоянным. Координаты центра окружности: $x_0' = 0$ и $y_0' = -b\,\text{ctg}\,\beta$. Так как углы QO_1F и QMP равны между собой, как измеряемые одной и той же дугой QSF, то

$$y_0' = -b\,\text{ctg}(\pi - \vartheta) = b\,\text{ctg}\,\vartheta.$$

Чтобы подразделить поле на трубки равного потока, следует считать разность $\Delta V = V_{\nu+1} - V_\nu$ одинаковой для двух любых соседних линий. Для этого необходимо при переходе от любой линии напряженности поля к соседней изменять угол ϑ на постоянную величину $\Delta\vartheta$.

На рис. 24.14 построена картина поля двух линейных проводов, причем принято $B = \sqrt{3}$ и $\Delta\vartheta = \pi/6$.

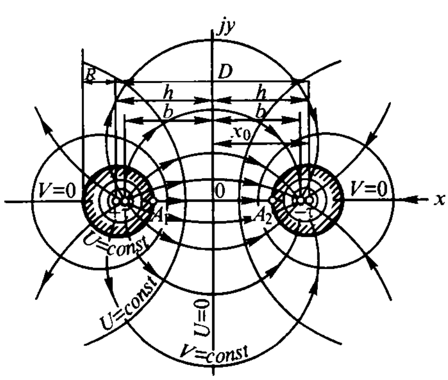

Рис. 24.14

Провода реальной линии передачи имеют конечные сечения. Распределение электрического заряда по поверхности проводов при этом зависит от формы их сечений и будет неравномерным даже для проводов кругового сечения. Последнее утверждение становится очевидным, если принять во внимание притяжение зарядов разного знака, расположенных на прямом и обратном проводах. Поверхностная плотность заряда должна иметь максимум в точках двух проводов, находящихся на кратчайшем расстоянии друг от друга. Распределение заряда по поверхности проводов неизвестно, что весьма осложняет задачу. Однако в важном частном случае для проводов кругового сечения задача может быть решена точно, если заметить, что в поле двух линейных проводов все поверхности равного потенциала являются поверхностями круговых цилиндров. Всегда можно так расположить оси линейных проводов, чтобы две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями реальных проводов (см. рис. 24.14).

Поле внутри металлических проводов будет отсутствовать. Поле же в диэлектрике при такой замене реальных проводов эквивалентными им линейными останется без изменения, так как при этом удовлетворяется основное граничное условие — постоянство потенциала на поверхности провода. Таким образом, задача расчета поля двух проводов кругового сечения сводится к отысканию положения эквивалентных им линейных проводов или, как говорят, к нахождению электрических осей проводов.

Обозначим через D расстояние между геометрическими осями проводов и через $h = D/2$ расстояние от геометрической оси до плоскости нулевого потенциала. Пусть x_0 и R — координата центра и радиус окружности равного потенциала, совпадающей с окружностью сечения провода. Имеем $h = |x_0|$ и согласно выражениям для x_0 и R получаем

$$h = \frac{1+k^2}{\left|1-k^2\right|}b; \quad R = \frac{2k}{\left|1-k^2\right|}b.$$

Отсюда нетрудно убедиться, что $h^2 - R^2 = b^2$ и, следовательно,

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}.$$

Эта формула и дает возможность определить положение электрических осей по заданным расстоянию $D = 2h$ между геометрическими осями и радиусу R сечений проводов.

На рис. 24.14 заштрихованы сечения проводов около контуров сечений. Так как поле подразделено на трубки равного потока ($\Delta V = \text{const}$), то густота линий напряженности поля всюду пропорциональна значению напряженности поля. Картина поля, изображенная на рисунке, отчетливо показывает, что напряженность поля имеет максимум в точках A_1 и A_2. Около этих точек диэлектрик находится в наиболее напряженном состоянии, и при повышении напряжения между проводами нарушение электрической прочности диэлектрика начинается именно в этих точках.

24.13. Поле параллельных несоосных цилиндров

Решенная в предыдущем параграфе задача для двух линейных проводов дает возможность найти поле между двумя параллельными несоосными цилиндрами, имеющими круговые сечения различных радиусов R_1 и R_2 (рис. 24.15). Действительно, всегда можно так расположить оси линейных проводов, чтобы в их поле две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями заданных проводящих цилиндров. Пусть D — расстояние между геометрическими осями цилиндров, h_1 и h_2 — расстояния от геометрических осей до плоскости по-

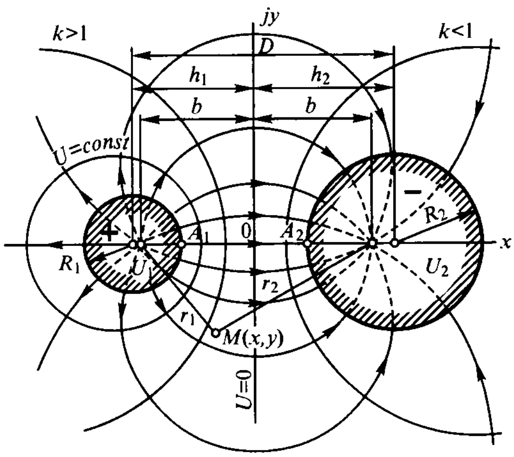

Рис. 24.15

стоянного (нулевого) потенциала, b — расстояние от электрических осей до этой плоскости. Согласно формуле $b = \sqrt{h^2 - R^2}$, справедливой для каждого провода, имеем

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_2^2,$$

или

$$(h_2 + h_1)(h_2 - h_1) = R_2^2 - R_1^2.$$

При расположении цилиндров согласно рис. 24.15 имеем $h_1 + h_2 = D$ и, следовательно, $h_2 - h_1 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{D}$.

В этом случае имеем

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

При расположении цилиндров один внутри другого (полого) (рис. 24.16) $h_2 - h_1 = D$, следовательно, $h_2 + h_1 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{D}$.

В этом случае имеем

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

Выражения для h_1 и h_2 можно написать в общем виде, справедливом для обоих расположений цилиндров при любом соотношении радиусов R_1 и R_2:

$$h_1 = \left|\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}\right|;$$

$$h_2 = \left|\frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}\right|.$$

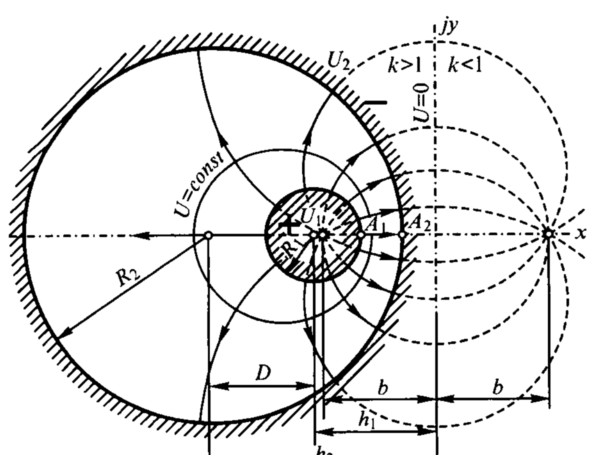

Рис. 24.16

Из этих формул определяется положение плоскости нулевого потенциала, и из формулы $b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$ находятся положения электрических осей, т. е. эквивалентных линейных проводов, что дает возможность построить поле по методу, изложенному в предыдущем параграфе.

24.14. Поле у края плоского конденсатора

Рассмотрим функцию $z = A(e^{a\zeta} + a\zeta)$, где a и A — вещественные и постоянные величины. Положив $\zeta = V + jU$, будем иметь

$$x + jy = A(e^{aV} \cos aU + je^{aV} \sin aU + aV + jaU),$$

или

$$x = A(e^{aV} \cos aU + aV); \quad y = A(e^{aV} \sin aU + aU).$$

В частном случае, когда $aU = \pm\,\pi$, выражения для x и y приобретают вид

$$x = A(aV - e^{aV}); \quad y = \pm A\pi.$$

Эти уравнения определяют две полупрямые, параллельные оси $0x$. Действительно, координата x при изменении функции потока V имеет один максимум, определяемый из условия

$$\frac{dx}{dV} = Aa(1 - e^{aV}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad V = 0.$$

Это максимальное значение равно $x_{\max} = -A$. Крайним значениям функции потока $V = -\infty$ и $V = +\infty$ соответствует значение $x = -\infty$. Следовательно, при изменении функции потока от $-\infty$ до $+\infty$ координата x принимает все значения между $-\infty$ и $-A$. Координата же y остается постоянной. Она имеет значения: для одной полупрямой $y_1 = +A\pi$ и для другой $y_2 = -A\pi$. На рис. 24.17 изображены эти полупрямые. Обозначив расстояние между ними через d, будем иметь $y_1 - y_2 = 2A\pi = d$ и, следовательно, $A = d/2\pi$.

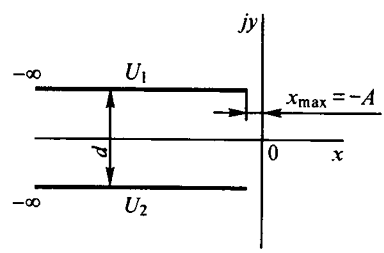

Рис. 24.17

Обнаруживается замечательное свойство исследуемой нами функции, а именно: две линии равного потенциала определяемого ею поля являются параллельными полупрямыми. Потенциал одной из них равен $U_1 = \pi/a$, потенциал другой имеет значение $U_2 = -\pi/a$. Таким образом, постоянная a определяется через разность потенциалов: $U_1 - U_2 = 2\pi/a$, откуда

$$a = \frac{2\pi}{U_1 - U_2}.$$

Если заметим, что эти полупрямые являются следами в плоскости z двух ограниченных с одной стороны бесконечных параллельных пластин, то нам станет ясно, что рассмотренная функция определяет поле между пластинами плоского конденсатора, ограниченными с одной стороны. Подставляя в выражение для z найденные значения постоянных A и a, получаем

$$z = \frac{d}{2\pi}\left(e^{\frac{2\pi}{U_1 - U_2}\zeta} + \frac{2\pi}{U_1 - U_2}\zeta\right),$$

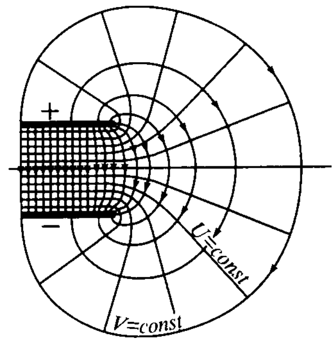

Рис. 24.18

причем $\zeta = V + jU$. Полагая $V = \text{const} = V_n$ и задаваясь рядом значений U в интервале $U_2 < U < U_1$, получим ряд точек, лежащих на одной линии напряженности поля, по которым и можем построить эту линию. Для построения других линий постоянную величину V_n будем изменять при переходе от одной линии к соседней каждый раз на одинаковую величину ΔV.

Полагая $U = \text{const} = U_n$, причем $U_2 < U_n < U_1$, и задаваясь рядом значений V, найдем точки, принадлежащие одной и той же линии равного потенциала. Линии равного потенциала строим так, чтобы для любых двух соседних линий имело место условие $\Delta U = \text{const}$. На рис. 24.18 построено поле у края плоского конденсатора.

Весьма существенно выяснить, на каком расстоянии от края конденсатора можно считать поле практически однородным. С этой целью найдем положение той точки на оси OX, в которой напряженность поля отличается на 1 % от напряженности $E_0 = \dfrac{U_1 - U_2}{d}$ однородного поля. Напряженность в любой точке поля имеет значение $E = \left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right|$. Следовательно,

$$\frac{1}{E} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = Aa\left|e^{a\zeta} + 1\right|.$$

На оси OX потенциал равен нулю, что нетрудно усмотреть из выражения для координаты y. Действительно, если принять в этом выражении $U = 0$, то получим $y = 0$. Поэтому для точек на оси OX имеем $\zeta = V$. Приняв еще во внимание, что $Aa = \dfrac{d}{U_1 - U_2} = \dfrac{1}{E_0}$, получаем для оси OX уравнение

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0}(e^{aV} + 1).$$

Стало быть,

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{1}{e^{aV} + 1} - 1 = -\frac{e^{aV}}{e^{aV} + 1}.$$

Полагая $\dfrac{E - E_0}{E_0} = -0{,}01$, получим $e^{aV} = 0{,}0101$ и $aV = -4{,}60$. Вводя эти числовые значения в выражение для координаты x, которое при $U = 0$ имеет вид $x = A(e^{aV} + aV)$, получаем $x \approx -4{,}6A$. Расстояние искомой точки от края конденсатора равно $(x - x_0) = 3{,}6A$, так как расстояние края пластин от оси OY есть $x_0 = -A$. Используя значение постоянной A, окончательно находим

$$|x - x_0| = 3{,}6\frac{d}{2\pi} = 0{,}57d.$$

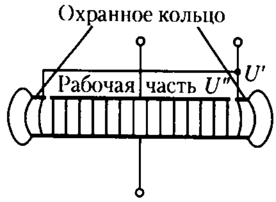

Рис. 24.19

Таким образом, уже на расстоянии от края конденсатора, имеющем порядок толщины диэлектрика между пластинами, поле можно считать однородным с весьма высокой степенью точности.

В эталонных воздушных конденсаторах, рассчитанных на высокое напряжение, и в которых расстояние между пластинами значительно, для исключения краевого эффекта выделяют в качестве рабочей части только среднюю часть пластины (рис. 24.19). Край пластины образует при этом так называемое охранное кольцо, изолированное от рабочей части пластины, но имеющее потенциал, по возможности близкий к потенциалу рабочей части. Произведенный расчет дает возможность определить требуемую ширину охранного кольца.

24.15. Графический метод построения картины плоскопараллельного поля

Во многих практических случаях форма сечений заряженных проводников и их взаимное расположение настолько сложны, что точный аналитический расчет поля оказывается невозможным. В связи с этим получает большое практическое значение графический метод построения картины поля, который разработан для плоскопараллельных полей и полей, окружающих заряженные тела вращения.

Наиболее просто построение осуществляется для плоскопараллельного поля. Должны быть соблюдены следующие условия:

1) линии напряженности поля и линии равного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) линии напряженности поля должны быть перпендикулярны к контурам, ограничивающим сечения проводников;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Третье условие соответствует требованию, чтобы приращение потенциала ΔU при переходе от любой линии равного потенциала к соседней было постоянным и чтобы поле было подразделено на трубки равного потока, т. е. чтобы $\Delta V = \text{const}$. При наличии такого требования третье условие вытекает из уравнений

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Если обозначить средние размеры ячейки сетки: Δn — по направлению линии напряженности поля и Δa — по направлению линии равного потенциала (рис. 24.20), то эти уравнения приближенно могут быть записаны в форме

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\Delta V}{\Delta a}.$$

При условиях $\Delta U = \text{const}$ и $\Delta V = \text{const}$ имеем

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_1 = \mathrm{const},$$

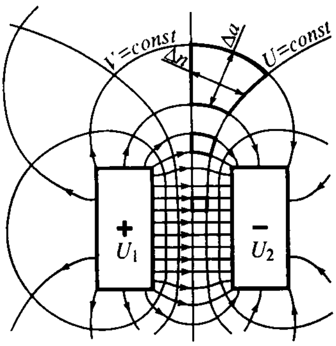

Рис. 24.20

откуда и следует, что при достаточно густой сетке ее ячейки должны представлять собой приблизительно подобные прямоугольники, если форма ячейки не слишком искажена кривизной линий. Но даже и при значительном искажении ячеек, когда трудно говорить об их подобии, последнее соотношение весьма помогает правильно построить картину поля. Обычно картину поля рисуют на глаз, стремясь удовлетворить первому и второму условиям, а затем уже постепенно вносят исправления так, чтобы удовлетворилось и третье условие. Рекомендуется для облегчения построения выбирать $\Delta n = \Delta a$. На рис. 24.20 в виде примера построено поле между двумя прямолинейными проводами прямоугольного сечения, имеющими одинаковые заряды разных знаков.

24.16. Графический метод построения картины поля тел вращения

Построение поля, образованного заряженными телами вращения с общей осью вращения, также может быть выполнено графическим путем. Поле строят в одной из меридианных плоскостей. В виде примера на рис. 24.21 построено поле около круглого стержня, проходящего через вырезанное в пластине круглое отверстие.

Первое и второе условия, сформулированные для плоскопараллельного поля в предыдущем параграфе, остаются без изменений, третье же условие, касающееся формы ячеек, несколько усложняется. При вращении картины поля вокруг оси заряженных тел каждая линия напряженности поля опишет поверхность вращения. Можно условиться выбирать эти поверхности так, чтобы поток $\Delta\Psi_E$, проходящий между двумя соседними поверхностями, всюду был одинаков. Тогда, если Δa — среднее в пределах ячейки поля расстояние между этими поверхностями, отсчитываемое в меридианной плоскости по направлению линии равного потенциала, и E — среднее значение напряженности в пределах отрезка Δa, то $\Delta\Psi_E = 2\pi r \Delta a E$, где r — расстояние от середины отрезка Δa до оси вращения. Таким образом, имеем

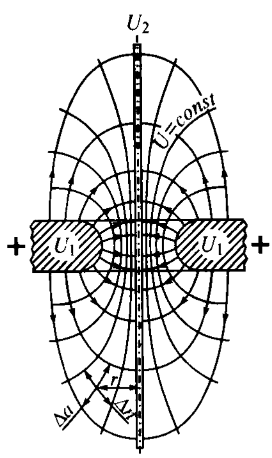

Рис. 24.21

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\Delta\Psi_E}{\Delta a}.$$

Так как $\Delta U = \mathrm{const}$ и $\Delta\Psi_E = \mathrm{const}$, то получаем

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_2 r,$$

где $k_2 = \mathrm{const}$.

Такому соотношению приблизительно и удовлетворяет поле, построенное на рис. 24.21.

24.17. Графический метод построения картины поля для неоднородной изолирующей среды

Все вышеизложенное относилось к однородной среде. Допустим, что изолирующая среда состоит из нескольких однородных диэлектриков с различными значениями ε, причем поверхности раздела между диэлектриками для плоскопараллельного поля являются цилиндрическими поверхностями и для поля тел вращения — поверхностями вращения вокруг общей оси. При этом лучше изображать на рисунке не линии напряженности поля, а линии электрического смещения, так как на поверхности раздела двух диэлектриков трубки смещения не претерпевают разрыва.

Так как $D = \varepsilon E$ и $\Delta\Psi_D = \varepsilon\Delta\Psi_E$, то будем иметь для плоскопараллельного поля

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{\varepsilon_p}\frac{\Delta\Psi_{1D}}{\Delta a},$$

где $\Psi_{1D} = \Psi_D/l$ — поток смещения, рассчитанный на единицу длины проводников. Следовательно, для плоскопараллельного поля получается условие

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = \varepsilon_p k_1,$$

где $k_1 = \text{const}$ и ε_p — абсолютная диэлектрическая проницаемость в той области, где строится ячейка сетки поля.

Для поля тел вращения

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r\varepsilon_p}\frac{\Delta\Psi_D}{\Delta a}$$

и

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = r\varepsilon_p k_2,$$

где $k_2 = \text{const}$.

Кроме того, необходимо принять во внимание условие преломления линий электрического смещения на поверхности раздела двух диэлектриков (см. § 24.6).

24.18. Тело из диэлектрика во внешнем электростатическом поле

Практическое значение имеет задача о расчете поля в случае, когда тело из диэлектрика вносится в заданное внешнее поле. Положительно заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул вещества, смещаются в направлении поля, а отрицательно заряженные частицы — в противоположном направлении. На поверхности тела появляются связанные заряды разных знаков. Эти связанные заряды создают свое поле как внутри тела, так и вне его. Напряженность $\boldsymbol{E}$ результирующего поля является геометрической суммой напряженности $\boldsymbol{E}_0$ внешнего поля и напряженности $\boldsymbol{E}_1$ поля связанных зарядов. Трудность задачи заключается в том, что поляризация вещества, а следовательно, и связанные заряды определяются результирующей напряженностью $\boldsymbol{E}$, которая сама зависит от связанных зарядов.

Если тело из диэлектрика находится в среде, диэлектрическая проницаемость которой меньше диэлектрической проницаемости вещества тела, то внутри тела поле связанных зарядов направлено против внешнего поля. Это нетрудно усмотреть из рис. 24.22. Такое поле связанных зарядов внутри тела называют деполяризующим электрическим полем, и его напряженность обозначают через $\boldsymbol{E}$.

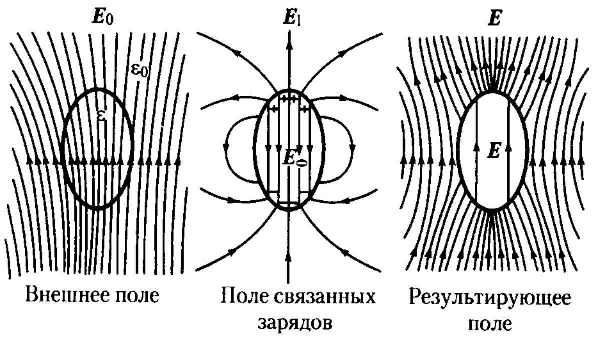

Рис. 24.22

Задача расчета заключается в следующем. Необходимо найти распределение связанных зарядов, создающих такое поле, которое, будучи наложенным на заданное внешнее поле, дает результирующее поле, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности тела — равенству касательных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ и равенству нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{D}$ по обе стороны поверхности. В следующем параграфе рассмотрен простейший пример задачи такого типа.

24.19. Диэлектрический шар во внешнем однородном поле

Пусть шар из диэлектрика внесен во внешнее однородное поле напряженности $\boldsymbol{E}_0$, существующее в пустоте. Предположим, что шар поляризуется однородно, т. е. что однородно результирующее поле, создающее поляризацию, и, следовательно, однородно и деполяризующее поле.

Обозначим напряженность деполяризующего поля через $\boldsymbol{E}$. Следовательно, напряженность результирующего поля внутри шара будет

$$E'' = E_0 - E.$$

Направим ось $0z$ в сторону внешнего поля (рис. 24.23). Вследствие симметрии относительно оси $0z$ достаточно рассмотреть поле в одной меридианной плоскости.

Потенциал U'' внутри шара найдется из условия

$$E'' = -\frac{\partial U''}{\partial z},$$

откуда

$$U'' = -E''z + \text{const}.$$

Полагая $U'' = 0$ при $z = 0$ и замечая, что $z = r\cos\varphi$, получим

$$U'' = -(E_0 - E)\, r\cos\varphi.$$

При этом составляющая $-E_0 r\cos\varphi$ представляет собой потенциал внешнего поля, а составляющая $E r\cos\varphi$ — потенциал поля связанных зарядов внутри шара.

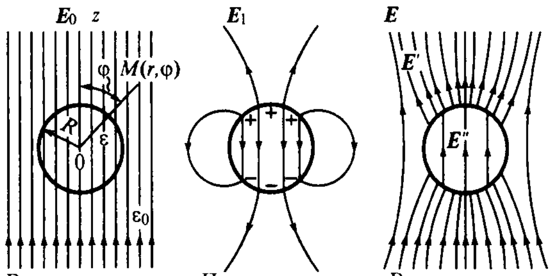

Рис. 24.23

Во внешнем пространстве однородно поляризованный шар создает поле такое же, как электрический диполь, помещенный в центре шара. Действительно, неполяризованный диэлектрический шар можно представить себе как две наложенные друг на друга разноименно заряженные сферы с зарядами, равномерно распределенными по их объему. Эти заряды образуются совокупностью положительных и соответственно отрицательных элементарных частиц, входящих в состав молекул диэлектрика. При однородной поляризации все молекулы поляризуются одинаково. Пусть d — длина осей элементарных диполей, т. е. среднее расстояние, на которое смещаются друг от друга в молекулах заряды противоположных знаков. Весь поляризованный шар эквивалентен двум равномерно и разноименно заряженным сферам, смещенным друг от друга на расстояние d. Но каждая сфера создает во внешнем пространстве такое же поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в ее центре. Следовательно, две смещенные относительно друг друга сферы эквивалентны диполю.

Так как радиус R шара много больше длины d диполя, то вне шара потенциал поля, вызванного поляризацией шара, определится приведенной в § 24.2 формулой $\dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где p — электрический момент диполя, эквивалентного поляризованному шару.

Налагая этот потенциал на потенциал внешнего однородного поля, вне шара будем иметь

$$U' = -E_0\, r\cos\varphi + \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Обозначим результирующую напряженность поля и электрическое смещение вне шара E' и D'. Используем граничные условия на поверхности шара.

При $r = R$ имеем

$$E_t' = E_t'' \quad \text{или} \quad \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U'}{\partial \varphi}\right)_{r=R} = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U''}{\partial \varphi}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$-E_0 \sin\varphi + \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -(E_0 - E)\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Кроме того, при $r = R$

$$D_n' = D_n'' \quad \text{или} \quad \varepsilon_0\left(-\frac{\partial U'}{\partial \varphi}\right)_{r=R} = \varepsilon\left(-\frac{\partial U''}{\partial \varphi}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi + \frac{p\cos\varphi}{2\pi R^3} = \varepsilon(E_0 - E)\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0 E_0 + \frac{p}{2\pi R^3} = \varepsilon E_0 - \varepsilon E.$$

Используя выражение $E = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, получаем

$$\varepsilon_0 E_0 + 2\varepsilon_0 E = \varepsilon E_0 - \varepsilon E$$

и

$$E = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0.$$

Таким образом, момент эквивалентного диполя равен

$$p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0.$$

Нам удалось выразить p и E через напряженность E_0 заданного внешнего поля. При этом граничные условия на поверхности шара удовлетворяются для всех точек поверхности, т. е. для любого значения φ при $r = R$. Следовательно, наше предположение, что шар в однородном поле поляризуется однородно, правильно.

Нетрудно найти распределение связанных зарядов по поверхности шара. Именно поверхностная плотность σ этих зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризованности:

$$\sigma = P_n = P\cos\varphi,$$

где

$$P = \frac{p}{\frac{4\pi}{3}R^3} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 = 3\varepsilon_0 E.$$

Мы нашли распределение связанных зарядов из условия, что шар поляризован однородно. Можно высказать обратное положение, что распределение связанных зарядов на поверхности шара с плотностью, пропорциональной $\cos\varphi$, вызывает однородное деполяризующее поле внутри шара.

Можно доказать, что таким же замечательным свойством поляризоваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид. Шар является его частным случаем.

Нетрудно сообразить, что тело произвольной формы будет поляризоваться в однородном поле неоднородно. Рассмотрим, например, цилиндр конечной длины, помещенный в однородное поле так, что его образующие совпадают с направлением поля (рис. 24.24). Если предположить, что цилиндр поляризуется однородно, то связанные заряды появятся только на его торцах. Очевидно, при этом поле связанных зарядов не может быть внутри цилиндра однородным, а следовательно, неоднородным будет и результирующее поле, что противоречит предположению об однородной поляризации.

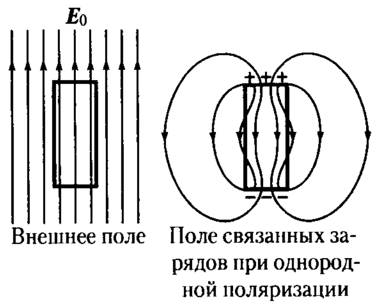

Рис. 24.24

24.20. Общий метод расчета электрического поля в неоднородной среде. Метод интегральных уравнений

В предыдущих параграфах были рассмотрены некоторые частные случаи расчета электрических полей в однородных средах. В § 24.3 приведен общий метод определения потенциала в однородной среде по заданному распределению зарядов. В § 24.18 показано, что в случае неоднородных сред на границах раздела однородных сред появляются связанные заряды. Если среда неоднородна, то под воздействием внешнего поля связанные заряды появляются по всему ее объему. Распределение этих зарядов определяется не только напряженностью электрического поля свободных зарядов, но и самими связанными зарядами. Напомним, что трудность решения рассматриваемой задачи заключается в том, что поляризация вещества, а следовательно, и связанные заряды определяются результирующей напряженностью $\boldsymbol{E}$, которая сама зависит от распределения связанных зарядов. Таким образом, для применения метода § 24.3 необходимо привести неоднородную среду к эквивалентной ей однородной.

Допустим, что поверхность s разделяет объем V_i с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_i(x, y, z)$, и объем V_e с однородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_e = \text{const}$. В объемах V_i и V_e распределены заряды с объемной плотностью ρ_i и ρ_e соответственно (рис. 24.25).

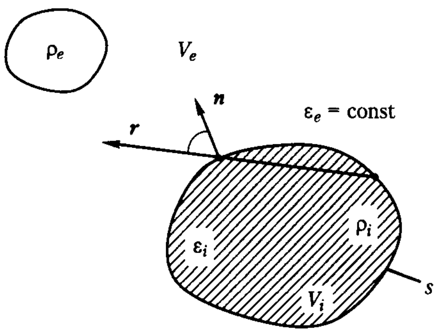

Рис. 24.25

Для нахождения величин связанных зарядов воспользуемся выражениями

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho,\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \text{ или } \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\,\nabla\varepsilon.$$

Тогда в среде с диэлектрической проницаемостью ε_i имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_i = \dfrac{\rho_i}{\varepsilon_i} - \dfrac{1}{\varepsilon_i}\boldsymbol{E}_i \cdot \nabla\varepsilon_i$, а в среде с диэлектрической проницаемостью ε_e имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_e = \dfrac{\rho_e}{\varepsilon_e} - \dfrac{1}{\varepsilon_e}\boldsymbol{E}_e \cdot \nabla\varepsilon_e$.

Допустим, что рассматриваемую задачу расчета поля в неоднородной среде мы хотим заменить задачей расчета поля в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε. Для этого следует определить объемную плотность зарядов, соответствующих новому значению диэлектрической проницаемости.

Для сохранения неизменными величин $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_i$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_e$ при переходе к однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε объемную плотность ρ_i заряда следует умножить на величину $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_i}$, а объемную плотность ρ_e заряда — на величину $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_e}$:

$$\rho' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\rho_i - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\boldsymbol{E}_i\,\nabla\varepsilon_i = \rho_i' + \rho \qquad (*)$$

в области V_i и $\rho_e' = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_e}\rho_e$ в области V_e.

При сведении среды к однородной необходимо аналогичным образом преобразовать поверхностную плотность σ заряда на границе раздела сред. Для ее нахождения воспользуемся выражением $\oint\limits_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q$ (рис. 24.26).

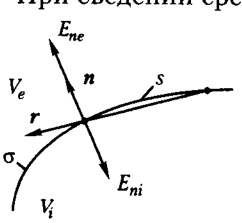

Рис. 24.26

Нормальная к поверхности s составляющая напряженности поля в однородной среде равна $+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ с одной и $-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ с другой стороны поверхности.

Напряженность электрического поля в точке на границе раздела сред можно разделить на две части: образованную всеми зарядами за исключением поверхностного заряда, расположенного в этой точке (E_n), и образованную поверхностным зарядом, расположенным в этой точке. Тогда нормальные составляющие напряженности поля с обеих сторон поверхности равны соответственно

$$E_{ne} = E_n + \frac{\sigma}{2\varepsilon}, \qquad E_{ni} = E_n - \frac{\sigma}{2\varepsilon}.$$

Если их подставить в выражающее граничное условие соотношение $\varepsilon_i E_{ni} = \varepsilon_e E_{ne}$, то можно найти величину σ:

$$\sigma = 2\varepsilon\,\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}E_n = 2\varepsilon\lambda E_n, \qquad (**)$$

где $\lambda = \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}$.

Таким образом, переход от неоднородной среды к однородной можно выполнить, если в точках неоднородности поместить электрические заряды, объемная ρ и поверхностная σ плотности которых определяются через неизвестные величины $\boldsymbol{E}$ и E_n, которые сами зависят не только от заданных сторонних, но и от искомых «вторичных» зарядов.

Для записи уравнений, которым удовлетворяют объемная ρ и поверхностная σ плотности вторичных источников, выразим величины $\boldsymbol{E}$ и E_n через плотности заданных и вторичных источников (см. § 24.3):

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\rho_i\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_e}\rho_e\frac{\varepsilon}{\varepsilon_e}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV_e + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_s\frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}ds,$$

($\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от точки, где расположен заряд, к точке, в которой находим величину $\boldsymbol{E}$, и равный расстоянию между ними), $E_n = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ и, подставляя их в полученные выше выражения (*), (**), находим:

$$\rho + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\int_{V_i}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\oint_s\frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}ds = -\frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\int_{V_i}\frac{\rho_i'\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i - \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\oint_{V_e}\frac{\rho_e'\boldsymbol{r}}{r^3}dV_e,$$

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds - \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho_i'\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_e}\rho_e'\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_e.$$

Решая систему из двух интегральных уравнений, можем определить плотности ρ и σ зарядов и рассчитать напряженность $\boldsymbol{E}$ поля.

В кусочно-однородной среде, когда диэлектрическая проницаемость ε_i вещества тела, находящегося в среде с проницаемостью ε_e, имеет одинаковое значение во всех точках, имеем $\operatorname{grad}\varepsilon_i = 0$, вследствие чего при переходе к однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε «вторичные» источники размещены только на поверхности s и подчиняются уравнению

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho_i'\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_e}\rho_e'\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_e.$$

Учитывая, что $\oint_s\sigma\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds = \oint_s\sigma\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}ds$ (см. рис. 24.26), и обозначая правую часть уравнения через $2\varepsilon\lambda E_{0n}$, получим окончательно

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}ds = 2\varepsilon\lambda E_{0n}. \qquad (***)$$

Решение интегральных уравнений является сложной задачей и может быть найдено в общем случае численными методами. В некоторых случаях, когда поверхность раздела является плоской, цилиндрической либо сферической, могут быть применены аналитические методы решения.

Свойства полученных уравнений, относящихся к интегральным уравнениям типа Фредгольма второго рода, зависят как от коэффициента при входящей под знак интеграла искомой плотности заряда, называемого ядром, так и от значения множителя λ. При расчете трехмерного электрического поля ядро имеет вид $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}$, тогда как при рассмотрении плоскопараллельного поля оно, как нетрудно убедиться, суть $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}$. Для двухмерных полей входящие в уравнение интегралы по объему переходят в поверхностные, а интегралы по поверхностям — в контурные.

Значение множителя λ определяется соотношением диэлектрических проницаемостей тела и окружающей его среды и находится в пределах $0 \le \lambda \le 1$, причем крайние значения получаются при $\varepsilon_i = 0$ и $\varepsilon_i = \infty$.

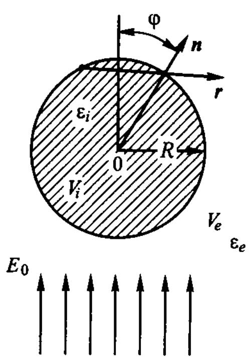

Рис. 24.27

В качестве примера решения задачи расчета электрического поля методом интегральных уравнений рассмотрим случай, когда бесконечно длинный цилиндр радиусом R из диэлектрика с абсолютной проницаемостью ε_i внесен в среду с проницаемостью ε_e. Принимая, что внешнее электрическое поле напряженностью $\boldsymbol{E}_0$ нормально к оси цилиндра, приведем среду к однородной с проницаемостью ε_e (рис. 24.27).

Поскольку на контуре цилиндра выполняется условие $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r} = \frac{1}{2R}$, то при $dl = R\,d\varphi$ интегральное уравнение

$$\sigma - \frac{\lambda}{\pi}\oint_l \sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dl = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}$$

переходит в уравнение

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma\,d\varphi = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}.$$

В данном случае решение этого уравнения тривиально, так как входящий в него интеграл равен нулю вследствие симметричного распределения зарядов на поверхности цилиндра: $\sigma = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}$.

При условии однородности внешнего поля имеет место соотношение $E_{0n} = E_0 \cos\varphi$ и, следовательно, $\sigma = 2\varepsilon_e \lambda E_0 \cos\varphi$.

Можно показать, что полученное распределение заряда создает внутри цилиндра однородное электрическое поле напряженностью $E = \lambda E_0 = \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0$, в связи с чем результирующее поле внутри цилиндра также является однородным напряженностью $E = (1 - \lambda)\, E_0 = \dfrac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0$.

При $\varepsilon_i > \varepsilon_e$ деполяризующее электрическое поле направлено навстречу внешнему, что имеет место при $\lambda > 0$.

Решим методом интегральных уравнений рассмотренную в § 24.19 задачу о шаре с диэлектрической проницаемостью ε_i, внесенном в однородное поле напряженностью $\boldsymbol{E}_0$, существующем в среде с диэлектрической проницаемостью ε.

Учитывая, что на поверхности шара справедливо соотношение $\dfrac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} = \dfrac{1}{2Rr}$, из интегрального уравнения (***) получаем

$$\sigma - \frac{\lambda}{4\pi R}\oint_s \frac{\sigma}{r}\, ds = 2\varepsilon\lambda E_{0n}.$$

Так как $E_{0n} = E_0 \cos\varphi$, то, исходя из условия однородности поля внутри шара, будем искать решение в виде $\sigma = \sigma_m \cos\varphi$.

Вычислив входящий в уравнение интеграл $\oint_s \dfrac{\sigma_m \cos\varphi}{r}\, ds = \dfrac{4\pi R}{3}\sigma_m \cos\varphi$, находим искомую плотность заряда $\sigma = 6\varepsilon \dfrac{\lambda}{3-\lambda} E_0 \cos\varphi = 3\dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon}\varepsilon E_{0n}$ и напряженность электрического поля внутри шара: $E_i = E_0 - \dfrac{\sigma_m}{3\varepsilon} = \dfrac{3\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} E_0$, где $\dfrac{\sigma_m}{3\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} E_0 = E$ — напряженность деполяризующего поля.

Аналитическое решение интегрального уравнения для плотности вторичных источников при неоднородной поляризации тела даже при его простой форме затруднительно. В таких задачах интегральное уравнение решают численно.

24.21. Проводящее тело во внешнем электростатическом поле. Электростатическое экранирование

Большое практическое значение имеют также задачи, в которых рассматриваются заряженные или незаряженные проводящие тела, внесенные в заданное внешнее электрическое поле. Поле внутри проводящего тела исчезает. В пространстве вне тела внешнее поле изменяется. На поверхности тела наводятся (индуцируются) электрические заряды. Это называется *явлением электростатической индукции*. На рис. 24.28 в виде примера показано результирующее поле около проводящего тела, внесенного в поле заряженных пластин.

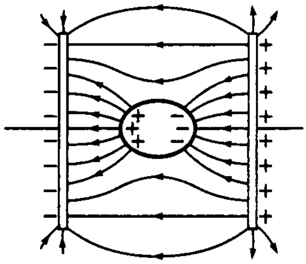

Рис. 24.28

Если внесенное тело не было заряжено, то сумма наведенных на нем зарядов оказывается равной нулю. Эти заряды распределяются так, чтобы их поле внутри проводящего тела в точности скомпенсировало поле всех внешних зарядов. Ничто не изменится, если проводящее тело будет полым — во всей полости тела поле также будет отсутствовать. Этим обстоятельством широко пользуются для *электростатического экранирования* электрических измерительных приборов и элементов измерительных схем от внешних электрических полей. С этой целью приборы помещают в замкнутые металлические оболочки, называемые *экранами*. Как показывает опыт, достаточно выполнить экраны из мелкой металлической сетки.

Если желательно придать самому экрану потенциал, равный нулю, то экран соединяют с землей. Это бывает полезно, например, в случае, если от прибора, заключенного в экран, выходят проводники к внешней схеме, которая находится при потенциале, близком к потенциалу земли.

Заземленный экран способен в равной мере защищать внешнее пространство от поля зарядов, помещенных внутри экрана.

Подобную экранирующую роль играет защитная свинцовая оболочка кабелей (рис. 24.29, *а*). Поле, существующее между отдельными проводами кабеля, не выходит за пределы свинцовой оболочки, и этим исключается электростатическое влияние кабеля на близлежащие провода линий связи. Иногда в кабеле экранируют каждый провод в отдельности (рис. 24.29, *б*), чем достигается более равномерное распределение поля около каждого из проводов кабеля.

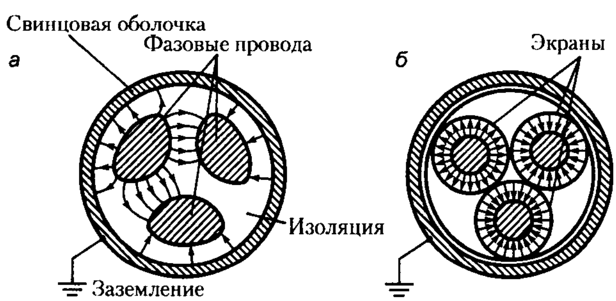

Рис. 24.29

Интересуясь результирующим полем, которое образуется вне проводящего тела, внесенного во внешнее поле, например в случае, показанном на рис. 24.28, мы должны рассматривать это поле как результат наложения поля наведенных на теле зарядов на заданное внешнее поле. Если, кроме того, внесенное тело имеет суммарный заряд, отличный от нуля, то необходимо наложить еще и поле этого заряда.

Пример расчета результирующего поля приведен в следующем параграфе.

24.22. Металлический шар во внешнем однородном поле

Задача, рассмотренная в § 24.19, позволяет найти поле, окружающее металлический шар, внесенный во внешнее однородное поле. Внутри шара поле должно отсутствовать, и потенциал в объеме шара должен иметь постоянное значение. Следовательно, заряды, которые наводятся на поверхности шара, должны создавать внутри шара однородное поле, полностью компенсирующее внешнее поле. Как вытекает из рассмотрения, произведенного в § 24.19, такое поле образуется зарядами, поверхностная плотность которых пропорциональна $\cos\varphi$. Во внешнем пространстве эти заряды создают поле такое же, как эквивалентный диполь, помещенный в центре шара. Таким образом, интересующая нас задача сводится к рассмотренной в § 24.19 задаче о диэлектрическом шаре, если в ней принять $E'' = E_0 - E = 0$, т. е. $E = E_0$. Согласно формуле $E = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$, это равенство достигается в пределе при $\varepsilon = \infty$. Поэтому поля вектора $\boldsymbol{E}$ одинаковы для металлического шара и шара из диэлектрика при $\varepsilon = \infty$. Вне шара в обоих случаях одинаковы и поля вектора $\boldsymbol{D}$. Однако внутри шара из диэлектрика вектор $\boldsymbol{D}$ и при $\varepsilon = \infty$ остается конечным и не равным нулю. Именно, учитывая равенства $P = 3\varepsilon_0 E$ и $E = E_0$, имеем

$$D'' = \varepsilon_0 E'' + P = P = 3\varepsilon_0 E_0.$$

Это связано с тем, что трубки электрического смещения непрерывны на границе диэлектрика и, сгущаясь внутри тела с большой диэлектрической проницаемостью, проходят через тело без разрывов. Связанные заряды на границе двух диэлектриков не дают начала новым трубкам смещения.

Внутри же металлического тела исчезает не только поле вектора $\boldsymbol{E}$, но и поле вектора $\boldsymbol{D}$. Заряды, наведенные на поверхности тела, являются теперь свободными, образовавшимися вследствие конечной проводимости тела. Трубки электрического смещения, существующие вне тела, заканчиваются на этих зарядах и не проникают внутрь тела. Отсюда видно, что рассмотрение проводника как диэлектрика с $\varepsilon = \infty$, по существу, является формальным.

Более сложной является задача определения поля вокруг заряженного или незаряженного металлического тела, внесенного во внешнее неоднородное поле. Ее можно решить, используя метод интегральных уравнений, формально рассматривая диэлектрик как проводник.

При $\varepsilon_i = \infty$ имеем $\lambda = 1$, и уравнение (***) § 24.20 для случая незаряженного тела переходит в интегральное уравнение

$$\sigma - \frac{1}{2\pi}\oint_s \sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} ds = 2\varepsilon E_{0n},$$

которое позволяет рассчитать плотность распределенных на поверхности проводящего тела свободных зарядов.

Если помещенное во внешнее поле проводящее тело имеет заряд q, то, прибавляя к обеим частям последнего уравнения соотношение $\frac{1}{s}\oint_s \sigma\, ds = \frac{q}{s}$, получаем уравнение

$$\sigma - \frac{1}{2\pi}\oint_s \sigma\left[\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} - \frac{2\pi}{s}\right]ds = \frac{q}{s} + 2\varepsilon E_{0n},$$

учитывающее заряд тела.

24.23. Метод зеркальных изображений

Расчет поля заряженных проводников, расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую среду, сводится при помощи метода зеркальных изображений к расчету поля нескольких проводников при отсутствии проводящей среды.

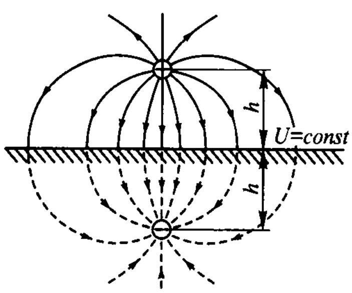

Рис. 24.30

Рассмотрим поле прямолинейного провода, расположенного на расстоянии h от плоской поверхности проводящей среды (рис. 24.30). Это соответствует, например, проводу, подвешенному на высоте h над поверхностью земли. Все линии напряженности поля, начинающиеся на положительно заряженном проводе, заканчиваются у поверхности проводящей среды, где появляется индуцированный отрицательный заряд. Поле определяется как зарядом провода, так и всем зарядом, распределенным по поверхности проводящей среды. Распределение индуцированного заряда из условий задачи не известно и также подлежит определению.

На первый взгляд задача расчета поля в такой системе кажется довольно сложной. Однако она решается весьма просто при помощи *метода зеркальных изображений*. Устраним мысленно проводящую среду и заменим ее проводом, являющимся зеркальным изображением реального провода в поверхности раздела и имеющим заряд той же величины, что и заряд реального провода, но противоположного знака (рис. 24.30). Действительный провод и его зеркальное изображение составляют двухпроводную линию, поле которой изображено на рис. 24.14. Из рис. 24.14 видно, что плоскость, расположенная посередине между действительным проводом и его зеркальным изображением, является поверхностью равного потенциала. В действительных условиях поверхность проводящей среды как раз совпадает с этой плоскостью и также является поверхностью равного потенциала. Отсюда следует, что *если заменить проводящую среду зеркальным изображением провода с изменением знака заряда, то в области над проводящей средой поле останется таким же, как и в действительных условиях*. В этом и заключается метод зеркальных изображений.

Этот метод применим и при любом числе проводов, протянутых параллельно друг другу и параллельно плоской поверхности, ограничивающей проводящую среду (рис. 24.31). Каждый провод должен быть зеркально отражен в поверхности проводящей среды с изменением знака заряда, после чего проводящая среда может быть мысленно удалена и рассмотрено поле совокупности действительных проводов и их зеркальных изображений. В таком поле плоскость, расположенная на месте поверхности проводящей среды, является поверхностью равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично относительно этой плоскости. Следовательно, найденное таким путем поле и будет действительным полем в области над поверхностью проводящей среды.

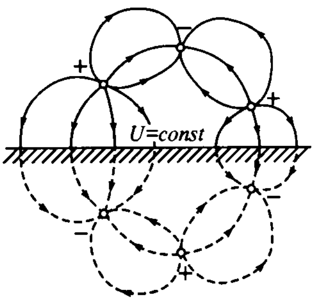

Рис. 24.31

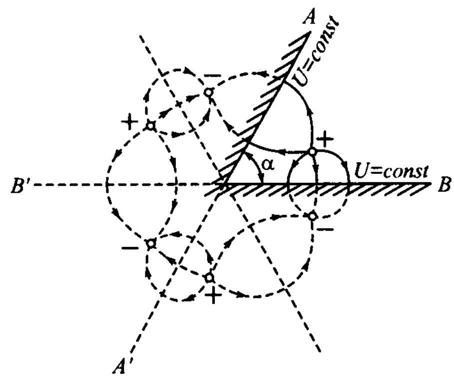

Рис. 24.32

Метод зеркальных изображений также может быть использован, когда проводящая среда ограничена двумя плоскостями, сходящимися под углом $\alpha = \pi/n$, где n — целое число, причем угол α отсчитывается в диэлектрике, где рассматривается поле. Разделив все пространство на одинаковые части плоскостями, пересекающимися под углом α (см. рис. 24.32), что возможно, только если n есть целое число, и последовательно отражая провод в этих плоскостях, получим систему из действительного провода и серии его зеркальных изображений. В поле такой системы плоскости $A - A'$ и $B - B'$ являются плоскостями равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично по отношению к ним. Поэтому поле этой системы совпадает с действительным полем в той части пространства, где последнее существует.

Метод зеркальных изображений в полной мере применим и для заряженных тел любой формы, расположенных в диэлектрике около плоскостей, ограничивающих проводящую среду. Естественно, поле при этом уже не будет плоскопараллельным.

Метод зеркальных изображений можно применить также в условиях, когда плоская поверхность разделяет две среды с различными диэлектрическими проницаемостями. Пусть источником электрического поля является положительный заряд q, помещенный в среде *1* с диэлектрической проницаемостью ε_1 на расстоянии h от плоской поверхности раздела сред (рис. 24.33).

При сведении среды к однородной с диэлектрической проницаемостью ε_1 поместим на плоской поверхности электрический заряд, плотность которого, как следует из соотношения (**) § 24.20, можно определить по формуле $\sigma = 2\varepsilon_1\lambda E_{0n}$, так как составляющая напряженности $E_n(\sigma)$ поля, обусловленная зарядами на плоскости, обращается в нуль.

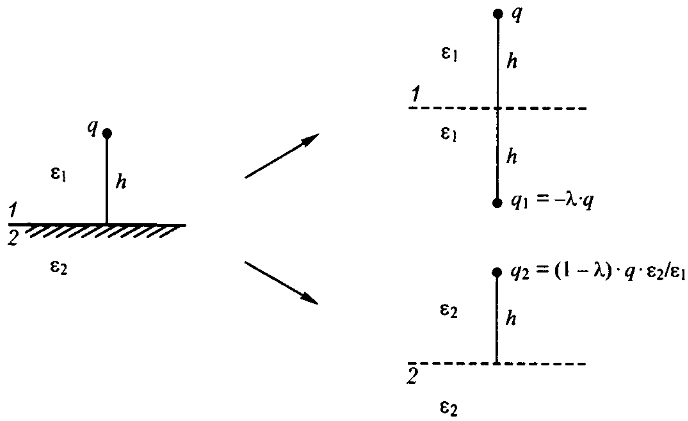

Рис. 24.33

При $\varepsilon_2 = \infty$, т. е. при формальной замене диэлектрика проводником, имеем $\lambda = 1$ и $\sigma = 2\varepsilon_1 E_{0n}$. Так как напряженность $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(q) + \boldsymbol{E}(\sigma)$ поля в проводящей среде, обусловленная зарядом q и распределенным на плоскости зарядом, равна нулю, то $\boldsymbol{E}(q) = -\boldsymbol{E}(\sigma)$ и, следовательно, поле поверхностных зарядов эквивалентно полю заряда $-q$. Поэтому электрическое поле в среде *1* определяется заданным зарядом q и его зеркально изображенным зарядом $q_1 = -q$, а поле в проводящей среде — зарядом q и зарядом $-q$, который эквивалентен поверхностному и помещен в ту же точку в среде *1*, т. е. зарядом, равным $q_2 = q - q = 0$, что дает значение напряженности поля в проводящей среде $\boldsymbol{E} = 0$.

При конечном значении ε_2 из выражения $\sigma = 2\varepsilon_1\lambda E_{0n}$ следует, что электрическое поле поверхностных зарядов эквивалентно полю заряда, равного $-q\lambda$, в связи с чем поле в среде *1* можно найти при наложении электрических полей заданного заряда q и зеркально изображенного заряда $q_1 = -q\lambda = -\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q$.

Для расчета поля в области *2* неоднородную среду заменяем однородной с диэлектрической проницаемостью ε_2, причем для сохранения неизменной составляющей напряженности электрического поля, создаваемого заданным зарядом q, последний должен быть изменен и стать равным $q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Поле в среде *2* определяется наложением полей заряда $q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ в области *1* и заряда $-\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, помещенного в ту же точку:

$$q_2 = q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q.$$

Изложенные рассуждения сохраняют силу и в тех случаях, когда источником поля является электрический заряд, распределенный вдоль провода с линейной плотностью τ. В полученных формулах достаточно заменить величину q на τ.

24.24. Применение метода разделения переменных для решения задач электростатики

Если проводники обладают простой формой поверхности, например плоской, цилиндрической, сферической или какой-либо другой, которую можно описать простым уравнением в подходяще выбранной системе координат, то при помощи аналитических методов удается рассчитать потенциал электростатического поля. Обычно на поверхности проводников задают значение потенциала или составляющей напряженности поля, и задача сводится к нахождению поля в пространстве между электродами. При условии, когда поле удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно искать методом, основанным на разделении переменных уравнения.

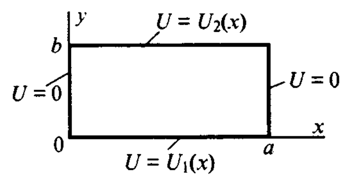

Рис. 24.34

Рассмотрим задачу расчета плоскопараллельного поля, созданного системой заряженных электродов плоской формы, потенциалы которых заданы (рис. 24.34).

При применении метода разделения переменных потенциал $U(x, y)$ в уравнении Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

внутри прямоугольной области представляется в виде $U(x, y) = X\,Y$, где $X(x)$ — функция только x и $Y(y)$ — функция только y. При замене $U(x, y)$ произведением $X\,Y$ уравнение Лапласа принимает вид

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0,$$

и после его деления на $X\,Y$ получаем

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Так как левая часть последнего уравнения зависит только от x, а правая — только от y, то оно удовлетворяется для любых x и y только в том случае, если и левая и правая его части равны некоторой постоянной величине $-\lambda^2$. При этом справедливы два уравнения:

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2 X=0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2 Y=0,$$

частные решения которых имеют вид

$$X=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x, \quad Y=C_3\mathrm{sh}\,\lambda y+C_4\mathrm{ch}\,\lambda y.$$

Величина λ и постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 выбираются таковыми, чтобы были удовлетворены заданные граничные условия. Так, если при $x = 0$ и при $x = a$ имеет место условие $U = 0$, то, следовательно, $C_2 = 0$ и $C_1 \sin \lambda a = 0$, откуда вытекает, что $\lambda a = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ в силу того, что $C_1 \neq 0$.

Таким образом, постоянная λ может принимать не произвольные значения, а лишь значения, удовлетворяющие равенству $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{a}$ и называемые собственными числами. Соответствующие им функции X_n, Y_n носят название собственных функций.

Общее решение уравнения запишем в виде

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n y + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n y) \sin \lambda_n x,$$

где через D_{1n}, D_{2n} обозначены величины $D_{1n} = C_{1n}C_{3n}$, $D_{2n} = C_{1n}C_{4n}$. Входящие в него постоянные D_{1n}, D_{2n} следует определить, исходя из необходимости удовлетворения условий $U = U_1(x)$ при $y = 0$, $U = U_2(x)$ при $y = b$, которые приводят к соотношениям

$$U_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \sin \lambda_n x,$$

$$U_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n b + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n b) \sin \lambda_n x.$$

Коэффициенты ряда можно найти с помощью известных для коэффициентов ряда Фурье выражений:

$$D_{20} = \frac{1}{a} \int_0^a U_1(x)\, dx, \qquad (*)$$

$$D_{2n} = \frac{2}{a} \int_0^a U_1(x) \sin \frac{\pi n}{a} x\, dx = U_{1n},$$

$$D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n b + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n b = \frac{2}{a} \int_0^a U_2(x) \sin \frac{\pi n}{a} x\, dx = U_{2n}, \qquad (**)$$

откуда

$$D_{1n} = \frac{U_{2n} - U_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b}.$$

В общем случае решение уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат методом разделения переменных можно записать в виде ряда

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} \sin \lambda_n x + C_{2n} \cos \lambda_n x)(C_{3n} \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{4n} \operatorname{ch} \lambda_n y)$$

либо в виде ряда

$$U(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_{1n}\mathrm{sh}\,\lambda_n x+C_{2n}\mathrm{ch}\,\lambda_n x)(C_{3n}\sin\lambda_n y+C_{4n}\cos\lambda_n y),$$

коэффициенты которого находятся при разложении функций, определяющих граничные условия, в ряд по собственным функциям задачи (в рассмотренной выше задаче по функциям $\sin\lambda_n x$).

Решение уравнения Лапласа, записанного в цилиндрической либо иной системе координат, также может быть представлено в виде ряда, однако собственные функции такого решения будут другие. Они определяются видом соответствующих уравнений.

Решение $U(x, y)$ имеет вид бесконечного ряда, и при расчете потенциала, напряженности поля либо интегральных параметров, таких как емкость, сила, приходится ограничить количество учитываемых в нем членов. Метод находит применение для расчета поля в однородной среде в областях с простой формой границ, так как при других условиях он становится весьма трудоемким.

Очевидным недостатком метода разделения переменных, кроме трудоемкости определения собственных функций и собственных значений, является существенная зависимость точности решения от количества удерживаемых членов ряда. Практика показывает, что для получения решения с удовлетворительной точностью приходится учитывать многие десятки членов ряда. Кроме того, метод разделения переменных ограничен в области своего применения в связи с необходимостью наличия простых граничных конфигураций.

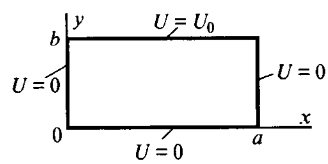

Рис. 24.35

Используя полученное решение, найдем потенциал в прямоугольной области (рис. 24.35) при условиях $U=0$ при $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $U=U_0$ при $y=b$.

Из условия $U_1(x)=0$ при $y=0$ получаем $D_{2n}=0$ (см. (*)), и из условия

$$U_2(x)=U_0=\sum_{n=0}^{\infty}D_{1n}\mathrm{sh}\,\lambda_n b\sin\lambda_n x \quad \text{при } y=b$$

$$D_{1n}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n b=\frac{2}{a}\int_0^a U_0\sin\lambda_n x\,dx=\frac{4U_0}{\pi n},\qquad n=1,3,5,\ldots$$

Таким образом, искомое решение принимает вид

$$U(x,y)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi n x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi n y}{a}}{n\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi n b}{a}},\qquad n=1,3,5,\ldots$$

Найденный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и заданным граничным условиям. Действительно, при $y=b$, $x\neq 0$ он равен

$$U(x,b)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{a}=U_0,\qquad n=1,3,5,\ldots$$

и обращается в нуль на других границах области.

24.25. Численный расчет электростатического поля методом сеток

В качестве иллюстрации численного метода расчета электромагнитного поля при помощи конечно-разностных уравнений и способа их получения рассмотрим случай расчета плоскопараллельного электростатического поля в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$.

Разностные уравнения могут быть записаны для системы узлов, произвольно размещенных в данной области. Однако при этом возникают большие трудности формирования системы разностных уравнений и их решения. В связи с этим наибольшее распространение получили методы, при которых узлы 1, 2, 3,... (рис. 24.36) располагаются в вершинах сетки прямоугольников, которые образуются при пересечении вертикальных и горизонтальных линий.

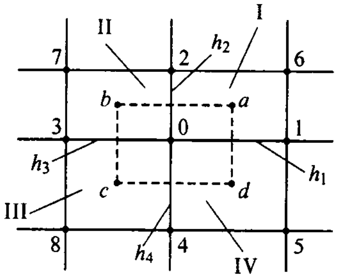

Рис. 24.36

Если электрический заряд распределен в пространстве с объемной плотностью $\rho(x, y)$, то уравнение для узла 0 сетки $\oint\limits_S \mathbf{D}\, d\mathbf{s} = \int\limits_V \rho\, dV$ можно записать в виде

$$\int\limits_{abcda} \varepsilon(x,y)\, E_n(x,y)\, dl = \int\limits_S \rho(x,y)\, ds,$$

где $E_n = -\dfrac{\partial U}{\partial n}$ — нормальная к контуру составляющая напряженности электрического поля.

Интеграл в левой части этого выражения можем представить в виде суммы четырех интегралов вдоль путей ab, bc, cd, da и вычислить их приближенно, используя известные методы приближенного вычисления интегралов. Применение метода прямоугольников приводит к выражениям

$$\int\limits_{ab} \varepsilon(x,y) E_y\, dx \cong \left(\varepsilon_{\text{Iср}} \frac{h_1}{2} + \varepsilon_{\text{IIср}} \frac{h_3}{2}\right) \frac{U_0 - U_2}{h_2} = k_2(U_0 - U_2),$$

$$\int\limits_{bc} \varepsilon(x,y) E_x\, dy \cong \left(\varepsilon_{\text{IIср}} \frac{h_2}{2} + \varepsilon_{\text{IIIср}} \frac{h_4}{2}\right) \frac{U_0 - U_3}{h_3} = k_3(U_0 - U_3),$$

$$\int\limits_{cd} \varepsilon(x,y) E_y\, dx \cong \left(\varepsilon_{\text{IIIср}} \frac{h_3}{2} + \varepsilon_{\text{IVср}} \frac{h_1}{2}\right) \frac{U_0 - U_4}{h_4} = k_4(U_0 - U_4),$$

$$\int\limits_{da} \varepsilon(x,y) E_x\, dy \cong \left(\varepsilon_{\text{IVср}} \frac{h_4}{2} + \varepsilon_{\text{Iср}} \frac{h_2}{2}\right) \frac{U_0 - U_1}{h_1} = k_1(U_0 - U_1),$$

$$\int\limits_{s} \rho(x,y)\, ds = \rho_{\text{Iср}} \frac{h_1 h_2}{4} + \rho_{\text{IIср}} \frac{h_2 h_3}{4} + \rho_{\text{IIIср}} \frac{h_3 h_4}{4} + \rho_{\text{IVср}} \frac{h_1 h_4}{4} = -f_0,$$

в которых величины $\varepsilon_{\text{Iср}}$, $\varepsilon_{\text{IIср}}$, ..., $\rho_{\text{Iср}}$, ..., $\rho_{\text{IVср}}$ являются средними функций $\varepsilon(x, y)$, $\rho(x, y)$ в соответствующих ячейках.

Полученное уравнение

$$k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 + k_4U_4 - U_0\sum_{i=1}^{4}k_i = f_0 \qquad (*)$$

выражает искомый потенциал U_0 через потенциалы четырех соседних узлов. Число входящих в уравнение потенциалов будет большим, если применить более точные соотношения для вычисления интегралов, выражая их не только через потенциалы узлов 1, 2, 3, 4, 0, но также, например, через потенциалы узлов 5, 6, 7, 8.

Уравнения вида (*) образуют систему разностных уравнений, которая может быть разрешена относительно искомых потенциалов узлов известными методами решения систем алгебраических уравнений.

Записывая систему алгебраических уравнений в матричной форме $\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F}$, отметим, что характерной особенностью системы разностных уравнений является редкая заполненность матрицы коэффициентов ненулевыми элементами. При использовании уравнений вида (*) строки матрицы содержат 5 отличных от нуля элементов, так что при полном числе элементов n^2 количество ненулевых элементов не превышает $5n$. Эта особенность разностных уравнений позволяет применить эффективные методы решения, учитывающие редкую заполненность их матриц коэффициентов.

Изложенный выше подход применим для расчета плоскомеридианных и трехмерных полей. В этих случаях элементы матрицы коэффициентов **K** выражаются с помощью других соотношений.

24.26. Вариационный подход к расчету электрического поля в неоднородной среде. Метод конечных элементов

Ранее было отмечено (см. § 2.1, т. I), что затрачиваемая внешними источниками энергия при создании электромагнитных полей минимальна, если процесс создания этих полей происходит без потерь энергии. Таким образом, и распределение энергии в электромагнитных полях происходит так, чтобы потребляемая от источника энергия была минимальной.

Если при решении задач расчета электромагнитных полей приходится оперировать такими понятиями, как потенциал и определяемые им производные величины, то можно утверждать, что эти функции должны быть такими, чтобы определяемая ими энергия поля была минимальной.

Исходя из этого принципа, конечно-разностные уравнения электромагнитного поля могут быть определены через таким образом подобранные функции, которые обеспечивают принцип минимума энергии, определяемой некоторым функционалом J.

Постановка задачи расчета потенциала, связанная с минимизацией функционала J, носит название вариационной, так как потенциал разыскивают путем вариации функционала и нахождения таких его значений, которые обеспечивают минимум функционала.

Один из путей отыскания потенциала вариационным методом связан с представлением его в виде интерполяционного полинома

$$U(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x, y, z),$$

где a_n — подлежащие определению коэффициенты, φ_n — так называемые базисные функции заданного вида.

Учитывая, что энергию электрического поля зарядов объемной плотностью ρ можно записать в форме $W_э = 0{,}5\int\limits_V \varepsilon(\mathrm{grad}\,U)^2 dV$ либо в форме $W_э = 0{,}5\int\limits_V \rho U dV$, энергетический функционал можно представить как

$$J(U) = \int\limits_V \varepsilon(\mathrm{grad}\,U)^2 dV - 2\int\limits_V \rho U dV. \qquad (*)$$

Здесь первый интеграл выражает удвоенную, а второй — учетверенную энергию поля.

В некоторых задачах объем V ограничен поверхностью s, на которой задан потенциал либо его производная $\frac{\partial U}{\partial n}$ по нормали к поверхности. При заданном на поверхности s потенциале минимизируемый энергетический функционал имеет вид (*), тогда как при заданной на ней функции $\frac{\partial U}{\partial n}$

$$J(U) = \int\limits_V \varepsilon\,[\mathrm{grad}\,U(x,y,z)]^2 dV - 2\int\limits_V \rho U(x,y,z)\,dV - \oint\limits_s U(x,y,z)\frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Коэффициенты a_n, входящие в выражение для потенциала $U(x, y, z)$, можем найти из условия $\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0$ ($n = 1, 2, ..., N$), порождающего систему алгебраических уравнений.

Энергию поля в объеме V можно представить как сумму энергий, заключенных в ее отдельных конечных элементах. Это позволяет в пределах элементов записать более простые выражения для потенциалов.

Вид и свойства вариационного метода определяются базисными функциями φ. Распространение получили базисные функции, каждая из которых отличается от нуля только в пределах своей подобласти, называемой конечным элементом.

Простейшими геометрическими элементами на плоскости могут быть заполняющие ее треугольники, а в пространстве – тетраэдры. Возможно использование и других плоских и объемных элементов.

Характер интерполяционного полинома определяет особенности распределения потенциала внутри элемента, однако количество узлов элемента (геометрическая форма элемента) задает количество членов этого полинома независимо от его степени. Другими словами, количество искомых коэффициентов интерполяционного полинома должно быть равным числу принадлежащих элементу узлов.

Число узлов треугольного элемента при линейной интерполяции потенциала $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ должно быть равным трем, так как полином содержит три коэффициента. Коэффициенты α_0, α_1, α_2 следует выразить через потенциалы узлов (в данном случае вершин) элемента, связав тем самым величины a_1, a_2, a_3 выражения $U(x, y) = \sum_n a_n \varphi_n$ с коэффициентами α_0, α_1, α_2.

Решая систему уравнений

$$U_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$
$$U_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j$$
$$U_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k$$

(здесь x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k – координаты вершин i, j, k элемента) относительно величин α_0, α_1, α_2, получаем:

$$\alpha_0 = U_i b_i + U_j b_j + U_k b_k$$
$$\alpha_1 = U_i c_i + U_j c_j + U_k c_k$$
$$\alpha_2 = U_i d_i + U_j d_j + U_k d_k,$$

где коэффициенты b, c, d определяются через координаты вершин треугольника.

Сопоставление выражений $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = U_i b_i + U_j b_j + U_k b_k + (U_i c_i + U_j c_j + U_k c_k)x + (U_i d_i + U_j d_j + U_k d_k)y$ и $U(x, y) = a_i \varphi_i(x, y) + a_j \varphi_j(x, y) + a_k \varphi_k(x, y)$ показывает, что $a_i = U_i$, $a_j = U_j$, $a_k = U_k$ и $\varphi_i(x, y) = b_i + c_i x + d_i y$, $\varphi_j(x, y) = b_j + c_j x + d_j y$, $\varphi_k(x, y) = b_k + c_k x + d_k y$.

Как видно, базисная функция $\varphi_i(x, y)$ равна 1 в вершине i элемента и, являясь линейной функцией координат x, y, обращается в нуль в вершинах j, k. Аналогичным свойством характеризуются и базисные функции $\varphi_j(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$.

В общем случае, когда элемент имеет p узлов, введение матриц

$$\boldsymbol{\alpha}^t = \| \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p \|,$$
$$\mathbf{U}^t = \| U_1, U_2, \ldots U_p \|,$$
$$\mathbf{x} = \| 1, x, y, z, x^2, y^2, \ldots \|,$$
$$\boldsymbol{\varphi} = \| \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p \|$$

позволяет записать выражение $U(x, y) = \mathbf{x}\,\boldsymbol{\alpha}$ и после решения уравнения $\mathbf{U} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\alpha}$, где

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} 1, x_1, y_1, z_1, x_1^2, \ldots \\ 1, x_2, y_2, z_2, x_2^2, \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ 1, x_p, y_p, z_p, x_p^2, \ldots \end{Vmatrix}$$

матрица размерностью $p \times p$, найти величину $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{U}$ и выразить потенциал $U(x, y)$ через базисные функции:

$$U(x, y) = \mathbf{x}\,\mathbf{X}^{-1}\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{U}.$$

Рассмотрим формирование системы уравнений метода конечных элементов при расчете плоскопараллельного электростатического поля.

Для получения алгебраических уравнений функционал $J(U)=\int\limits_s \varepsilon(\operatorname{grad} U)^2 ds - 2\int\limits_s \rho U ds$ следует представить через суммы функционалов J_e элементов. Определим вид матрицы системы уравнений $\sum\limits_{e=1}^{M}\dfrac{\partial J_e}{\partial U_n}=0$, $n = 1, 2, ..., N$, где M — число элементов области, N — число узлов внутри области s.

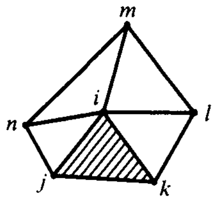

Рис. 24.37

Пусть узел с номером i является общим для нескольких треугольных элементов (рис. 24.37).

Производная $\dfrac{\partial J_e}{\partial U_i}$ функционала элемента с узлами i, j, k

$$\frac{\partial J_e}{\partial U_i} = 2\int\limits_{s_e} \varepsilon(\operatorname{grad} U)\frac{\partial}{\partial U_i}(\operatorname{grad} U)\, ds_e - 2\int\limits_{s_e} \rho \frac{\partial U}{\partial U_i} ds_e.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}U_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}U_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}U_k\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}U_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}U_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}U_k\right),$$

$$\frac{\partial(\operatorname{grad} U)}{\partial U_i} = \boldsymbol{i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial U_i} = \varphi_i$$

и вводя обозначения

$$a_{ii}^e = 2\int\limits_{s_e} \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right) ds_e,$$

$$a_{ij}^e = 2\int\limits_{s_e} \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right) ds_e,$$

$$a_{ik}^e = 2\int\limits_{s_e} \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) ds_e,$$

$$f_i^e = -2\int\limits_{s_e} \rho\varphi_i\, ds_e,$$

получаем

$$\frac{\partial J_e}{\partial U_i} = a_{ii}^e U_i + a_{ij}^e U_j + a_{ik}^e U_k + f_i^e.$$

Входящие в это соотношение коэффициенты при потенциалах вершин элементов, как и величину f_i^e, обычно рассчитывают аналитически. Для рассматриваемого случая, когда элемент содержит только три узла, производные вида $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ принимают постоянные значения, и соответствующие интегралы вычисляются особенно просто.

Рассчитывая производные функционалов всех элементов области по потенциалу узла i и суммируя соответствующие коэффициенты, находим (см. рис. 24.37)

$$k_{ii} = \sum_e a_{ii}^e,\ k_{ij} = \sum_e a_{ij}^e,\ k_{ik} = \sum_e a_{ik}^e,\ k_{il} = \sum_e a_{il}^e,\ k_{im} = \sum_e a_{im}^e,\ F_i = \sum_e f_i^e.$$

Таким образом, i-я строка матрицы **K** системы алгебраических уравнений **K U** = **F**, получаемая при вычислении производной функционала по потенциалу U_i узла i, в данном примере, когда узел i является общим лишь для 5 элементов, суть 0, 0, ...0, k_{ii}, k_{ij}, k_{ik}, k_{il}, k_{im}, k_{in}, 0, ..., 0, 0, если узлы i, j, k, l, m, n нумерованы один за другим.

Подобно рассмотренному можем рассчитать коэффициенты других строк матрицы **K**. Она имеет, как правило, не более 10% ненулевых коэффициентов, так как производные $\dfrac{\partial J_e}{\partial U_i}$ функционалов элементов, которые не включают в себя узел i, обращаются в нуль. В связи с тем, что матрица **K** является редкозаполненной, для решения уравнений метода конечных элементов применяют специальные экономичные методы, учитывающие это свойство системы уравнений.

Решив уравнение **KU** = **F**, можем рассчитать напряженность поля внутри элементов, а также другие дифференциальные и интегральные характеристики.

Метод конечных элементов применяют при численных расчетах полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах, когда получение аналитических решений затруднительно.

Глава двадцать пятая

Расчет электрической емкости

25.1. Емкость между круговыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передачи

Емкость между двумя уединенными проводящими телами равна отношению заряда $q_1 = q$ одного из тел к разности их потенциалов $U_1 - U_2$, причем предполагается, что заряды тел равны по абсолютному значению и противоположны по знаку, т. е. $q_2 = -q_1 = -q$. Вычисление емкости между двумя телами сводится к вычислению разности их потенциалов в этих условиях. В качестве важного примера найдем выражение для емкости между двумя параллельными круговыми проводящими цилиндрами. Цилиндры будем предполагать бесконечно длинными, емкость будем определять между их отрезками длиной l. В §§ 24.12 и 24.13 было исследовано поле таких цилиндров.

Потенциал в некоторой точке, удаленной на расстояния r_1 и r_2 от электрических осей цилиндров (см. рис. 24.12 и 24.15), определяется формулой

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln k + C_2.$$

Нас интересует разность потенциалов самих цилиндров. Для определения потенциалов цилиндров выберем на их поверхностях точки, например наиболее близкие друг к другу точки A_1 и A_2 (см. рис. 24.14 и 24.15). Пусть k_1 — значение отношения r_2/r_1 для точки A_1 и соответственно k_2 — значение этого отношения для точки A_2. Имеем

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{k_1}{k_2}.$$

Так как $q = \tau l$, то

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{k_1}{k_2}}.$$

Отношение r_2/r_1 для любой точки поля может быть выражено через радиус R окружности равного потенциала, проходящей через эту точку (см. рис. 24.12), и через расстояние $h = |x_0|$ от центра этой окружности до плоскости постоянного потенциала (на рис. 24.12 — до плоскости нулевого потенциала). Воспользовавшись формулами $h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|}b$ и $R = \frac{2k}{|1-k^2|}b$, приведенными в § 24.12, получаем $\frac{h}{R} = \frac{1+k^2}{2k}$, откуда $k^2 - 2\frac{h}{R}k + 1 = 0$ и

$$k = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}.$$

Знак плюс следует брать при $k > 1$, что соответствует случаю $r_2 > r_1$, т. е. расположению окружности равного потенциала слева от плоскости $U = \text{const}$ (см. рис. 24.15). Знак минус следует брать при $k < 1$, что соответствует расположению окружности равного потенциала справа от плоскости $U = \text{const}$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Емкость кругового цилиндра относительно плоскости (рис. 25.1).

Для плоскости постоянного потенциала $k_2 = r_2/r_1 = 1$, так как эта плоскость расположена посередине между электрическими осями (см. рис. 24.12). Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}\right]}.$$

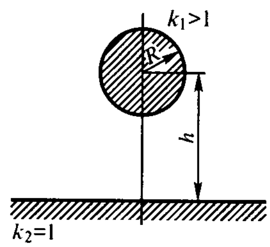

Рис. 25.1

Здесь h – расстояние от оси цилиндра до плоскости и R – радиус цилиндра. Полученной формулой можно пользоваться для вычисления емкости относительно земли провода, подвешенного на высоте h параллельно поверхности земли. Так как обычно $h \gg R$, то приближенно

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2h}{R}}.$$

2. Емкость между несоосными, не охватывающими друг друга круговыми цилиндрами (рис. 25.2).

Имеем $k_1 > 1$ и $k_2 < 1$, и, следовательно, перед знаком квадратного корня в формуле для k_1 надо взять знак плюс, а для k_2 – знак минус. Таким образом,

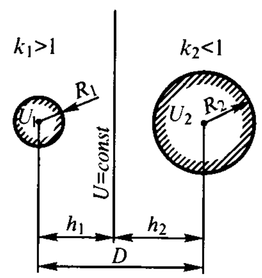

Рис. 25.2

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right) \Big/ \left(\frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

Учитывая, что для любого числа x существует тождество

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

можем переписать формулу для емкости между цилиндрами в виде

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right)\left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

Величины h_1 и h_2 определяются через расстояние между геометрическими осями цилиндров и через их радиусы R_1 и R_2 по формулам:

$$h_1 = \left|\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}\right|; \; h_2 = \left|\frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}\right|,$$

выведенным в § 24.13.

Для двух цилиндров одинаковых радиусов имеем $R_1 = R_2 = R$ и $h_1 = h_2 = D/2$. Формула для емкости при этом принимает вид

$$C = \frac{\pi \varepsilon l}{\ln\left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1}\right)}.$$

3. Емкость между тонкими проводами. Емкость двухпроводной линии передачи.

Если $R_1 \ll D$ и $R_2 \ll D$, то, согласно формулам для h_1 и h_2, имеем

$$h_1 \approx \frac{D}{2}; \; h_2 \approx \frac{D}{2}; \; \frac{h_1}{R_1} \approx \frac{D}{2R_1} >> 1 \text{ и } \frac{h_2}{R_2} \approx \frac{D}{2R_2} >> 1.$$

Поэтому формула для емкости может быть представлена в приближенной форме:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{D}{R_1}\frac{D}{R_2}\right)} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}.$$

Если радиусы проводов одинаковы: $R_1 = R_2 = R$, как это обычно имеет место для двухпроводной линии передачи, то получаем

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{D}{R}}.$$

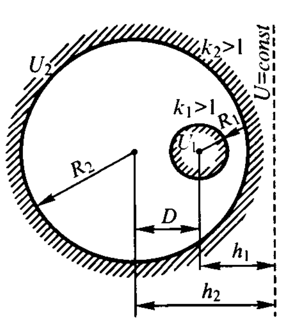

Рис. 25.3

4. Емкость между несоосными, охватывающими друг друга круговыми цилиндрами (рис. 25.3).

В этом случае имеем $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$ и, следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right) : \left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

При этом h_1 и h_2 определяются теми же формулами, что и в п. 2.

5. Емкость между соосными круговыми цилиндрами. Последняя формула переходит в формулу для емкости между соосными цилиндрами в пределе при $h_1/R_1 \to \infty$ и $h_2/R_2 \to \infty$.

Действительно, для соосных цилиндров $D = 0$ и, согласно выражениям для h_1 и h_2, имеем $h_1 = \infty$ и $h_2 = \infty$; причем $h_1/h_2 = 1$. Учитывая это, из последней формулы получаем

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

В системе нескольких заряженных тел потенциал каждого тела определяется не только зарядом данного тела, но также и зарядами всех остальных тел. При этом, если ε не зависит от напряженности поля, то потенциал является линейной функцией зарядов. Это положение было использовано (см. ч. I) при выводе выражения для энергии заряженных тел. Рассмотрим это положение и вытекающие из него соотношения более подробно.

Если внести незаряженное проводящее тело A_2 в поле другого тела A_1, имеющего заряд q_1, то тело A_2 приобретает некоторый потенциал U_2', отличный от нуля. Если вносимое тело A_2 имеет ничтожно малые размеры (рис. 25.4), то можно пренебречь искажением поля, возникающим от появления на вносимом теле индуцированных зарядов. При этом тело A_2 приобретает потенциал, который был в точке его расположения до его внесения. При значительных размерах вносимого тела (рис. 25.5) поле искажается, и потенциал U_2' будет определяться как зарядом q_1 тела A_1, так и зарядами, индуцированными на теле A_2. Следовательно, U_2' зависит от формы поверхностей обоих тел и от взаимного их расположения. Если диэлектрическая проницаемость среды не зависит от напряженности поля, то потенциал U_2' изменяется пропорционально заряду q_1, так как в этом случае при изменении заряда q_1 распределение зарядов на поверхности тел и соответственно картина поля не изменяются. Итак, можно написать:

$$U_2' = \alpha_{21} q_1.$$

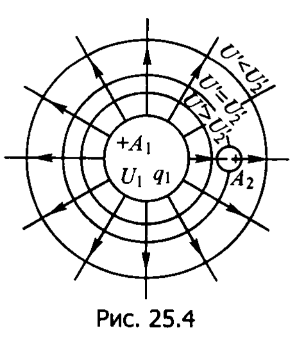

Рис. 25.4

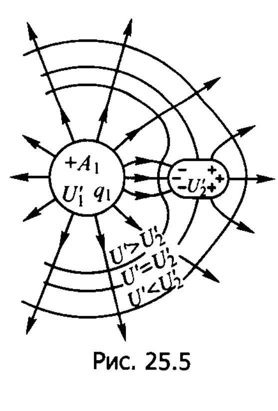

Рис. 25.5

Связь между потенциалом U_1' тела A_1 и его зарядом можно выразить в аналогичной форме:

$$U_1' = \alpha_{11} q_1 .$$

Следует подчеркнуть, что коэффициент α_{11} не равен величине $1/C_1$, где C_1 — емкость тела A_1, определяемая в предположении, что все другие тела от него бесконечно удалены. Такое равенство приближенно имеет место только в том случае, когда вносимое тело A_2 весьма мало (см. рис. 25.4). В общем случае (см. рис. 25.5) потенциал U_1 определяется как зарядом q_1, распределенным на поверхности тела A_1, так и зарядами, индуцированными на теле A_2. Таким образом, коэффициент α_{11}, так же как и коэффициент α_{21}, зависит от формы обоих тел и от их взаимного расположения.

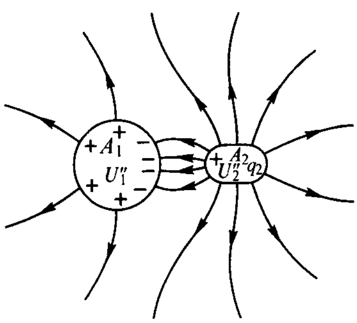

Рис. 25.6

Предположим теперь, что тело A_1 имеет суммарный заряд, равный нулю, в то время как заряд q_2 тела A_2 отличен от нуля (рис. 25.6). При этом тела приобретают потенциалы, значения которых пропорциональны заряду q_2:

$$U_1'' = \alpha_{12} q_2 \quad \text{и} \quad U_2'' = \alpha_{22} q_2 .$$

Если заряды обоих тел отличны от нуля, то потенциалы тел могут быть найдены на основе принципа наложения. Имеем

$$U_1 = U_1' + U_1'' = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2;$$
$$U_2 = U_2' + U_2'' = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 .$$

В общем случае, когда имеется n заряженных тел: $A_1, A_2, ..., A_n$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \ldots + \alpha_{1k} q_k + \ldots + \alpha_{1n} q_n;\\
U_2 &= \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \ldots + \alpha_{2k} q_k + \ldots + \alpha_{2n} q_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_k &= \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \ldots + \alpha_{kk} q_k + \ldots + \alpha_{kn} q_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_n &= \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + \ldots + \alpha_{nk} q_k + \ldots + \alpha_{nn} q_n .
\end{aligned}$$

Коэффициенты α носят название *потенциальных коэффициентов*. Они зависят от формы и размеров поверхностей тел, от взаимного расположения тел и от диэлектрической проницаемости среды. Коэффициенты α_{kk} с одинаковыми индексами называются *собственными потенциальными коэффициентами*, а коэффициенты α_{nk} с различными индексами — *взаимными потенциальными коэффициентами*. Эти уравнения служат для вычисления потенциалов тел по заданным их зарядам.

Нередко возникает обратная задача: известны потенциалы тел, требуется найти их заряды. Решая приведенные выше уравнения относительно зарядов, получим

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \ldots + \beta_{1k}U_k + \ldots + \beta_{1n}U_n; \\
q_2 &= \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \ldots + \beta_{2k}U_k + \ldots + \beta_{2n}U_n; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_k &= \beta_{k1}U_1 + \beta_{k2}U_2 + \ldots + \beta_{kk}U_k + \ldots + \beta_{kn}U_n; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_n &= \beta_{n1}U_1 + \beta_{n2}U_2 + \ldots + \beta_{nk}U_k + \ldots + \beta_{nn}U_n.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты β называются **коэффициентами электростатической индукции** — **собственными** при одинаковых индексах и **взаимными** при разных индексах. Они имеют размерность емкости.

Собственный коэффициент электростатической индукции β_{kk} может быть найден, если принять, что потенциалы всех тел, кроме тела A_k, равны нулю. При этом получим $q_k = \beta_{kk}U_k$.

На практике равным нулю принимают потенциал поверхности земли. Следовательно, для того чтобы тело приняло потенциал, равный нулю, его, как принято выражаться, необходимо «заземлить», т. е. соединить проводником с землей. Для определения опытным путем коэффициента β_{kk} следует, заземлив все тела, кроме тела A_k (рис. 25.7), сообщить последнему потенциал U_k, хотя бы присоединив это тело к полюсу электрической батареи, другой полюс которой заземлен. Измерив вольтметром напряжение U_k между телом и землей, отключим вольтметр и батарею и разрядим тело A_k на землю через баллистический гальванометр G_k. По отбросу гальванометра определим заряд q_k тела, а следовательно, сможем вычислить и искомый коэффициент β_{kk}. Все соединительные и заземляющие проводники в этом опыте должны быть весьма тонкими, чтобы присутствие их по возможности мало искажало поле. Коэффициенты с одинаковыми индексами все положительны: $\beta_{kk} > 0$, так как в описанном опыте потенциал и заряд тела A_k имеют одинаковые знаки.

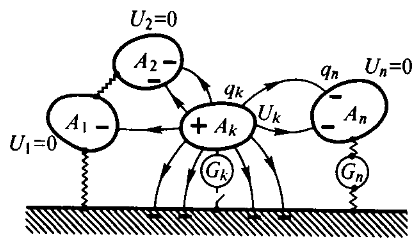

Рис. 25.7

Если в том же опыте измерить при помощи другого гальванометра G_n заряд q_n, который был связан на поверхности тела A_n и освободился при разряде тела A_k, то получим возможность определить и взаимный коэффициент электростатической индукции β_{nk} из соотношения $q_n = \beta_{nk}U_k$.

Очевидно, коэффициент β_{nk}, так же как и все взаимные коэффициенты электростатической индукции, отрицателен. Это непосредственно явствует из рис. 25.7: при $U_k > 0$ линии поля начинаются на теле A_k и заканчиваются на теле A_n и, следовательно, $q_n < 0$. Таким образом, вообще $\beta_{kp} < 0$ при $k \neq p$.

Нередко пользуются уравнениями в несколько иной форме, а именно: выражают заряд каждого тела не через потенциалы тел, а через разности потенциалов данного тела и других тел, в том числе и земли. Имеем

$$q_1 = C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + \ldots + C_{1k}(U_1 - U_k) + \ldots + C_{1n}(U_1 - U_n);$$

. . . .

$$q_k = C_{k1}(U_k - U_1) + C_{k2}(U_k - U_2) + \ldots + C_{kk}(U_k - 0) + \ldots + C_{kn}(U_k - U_n);$$

. . . .

$$q_n = C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \ldots + C_{nk}(U_n - U_k) + \ldots + C_{nn}(U_n - 0).$$

Коэффициенты C в этих уравнениях называются частичными емкостями — собственными при одинаковых индексах и взаимными при различных индексах. Для определения собственной частичной емкости C_{kk} следует принять потенциалы всех тел равными U_k. Тогда $q_k = C_{kk}U_k$.

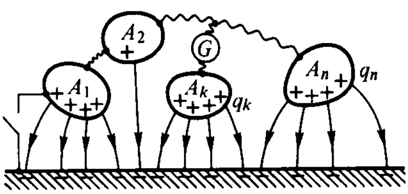

Рис. 25.8

Для измерения емкости C_{kk} необходимо соединить между собой все тела, зарядить всю эту систему до потенциала U_k относительно земли и затем, отключив источник ЭДС, разрядить систему на землю (рис. 25.8). При этом гальванометр должен быть включен так, чтобы был измерен только заряд q_k тела A_k.

Ясно, что $C_{kk} > 0$, так как при положительном потенциале системы и заряд на ней будет положителен. При этом же условии $U_1 = U_2 = \ldots = U_k = \ldots = U_n$ из уравнений, содержащих коэффициенты электростатической индукции, имеем

$$q_k = (\beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn})U_k.$$

Следовательно,

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn}.$$

Взаимная частичная емкость C_{nk} определяется из того же опыта, что и коэффициент β_{nk}. Действительно, при $U_1 = U_2 = \ldots = U_{k-1} = U_{k+1} = \ldots = U_n = 0$ и $U_k \neq 0$ из уравнений, содержащих частичные емкости, имеем $q_n = -C_{nk}U_k$. Следовательно, $C_{nk} = -\beta_{nk}$. Таким образом, вообще при $k \neq p$

$$C_{kp} = -\beta_{kp} \text{ и } C_{kp} > 0.$$

Преимущество уравнений, содержащих частичные емкости, по сравнению с уравнениями, содержащими коэффициенты электростатической индукции состоит в том, что в них все коэффициенты положительны.

Отметим, что имеет место равенство $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$, справедливость которого легко доказать из условия независимости энергии системы заряженных тел от последовательности, в которой устанавливаются заряды системы, аналогично тому, как было доказано равенство $M_{kp} = M_{pk}$ (см. ч. I). Пользуясь определителями, легко показать также, что $\beta_{kp} = \beta_{pk}$. И из условия $C_{kp} = -\beta_{kp}$ следует, что $C_{kp} = C_{pk}$. Это соотношение выражает принцип взаимности для системы заряженных тел.

25.3. Потенциальные коэффициенты в системе параллельных весьма длинных проводов

В виде примера, весьма важного для практики, рассмотрим систему проводов, протянутых параллельно друг другу над поверхностью земли (рис. 25.9). Длину проводов будем предполагать столь большой, что поле можно считать плоскопараллельным. Обычно диаметры проводов весьма малы по сравнению с расстоянием между их осями и с высотой их подвеса. В таком случае проще всего определяются потенциальные коэффициенты α. Для определения коэффициентов $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, ..., \alpha_{n1}$ достаточно принять $q_1 \neq 0$ и $q_2 = q_3 = ... = q_n = 0$. При этом ни один провод не должен быть заземлен. Уравнения приобретают вид

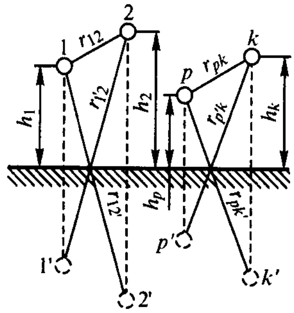

Рис. 25.9

$$U_1 = \alpha_{11}q_1;\ U_2 = \alpha_{21}q_1; \ldots;\ U_k = \alpha_{k1}q_1; \ldots$$

Поле заряженного первого провода будет таким же, как и при одном проводе, протянутом над поверхностью земли (см. рис. 24.27), так как искажением поля вследствие существования других проводов можно пренебречь ввиду малости их сечений. При таком условии коэффициент α_{11} является величиной, обратной емкости провода по отношению к земле, выражение для которой получено в § 25.1 в предположении отсутствия остальных проводов. Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{2h_1}{R_1}$$

и вообще

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{2h_k}{R_k}.$$

Коэффициент α_{21} нетрудно определить, если заметить, что незаряженные провода ввиду малости их сечений принимают в поле заряженного провода те потенциалы, которые получаются в местах их расположения и при отсутствии их. Найдем, пользуясь уравнением $U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2$, приведенным в § 24.12, потенциал на оси второго провода, определяемый зарядами первого провода и его зеркального изображения в поверхности земли. Постоянная C_2 в данном случае равна нулю, так как для точек на поверхности земли расстояния r_1 и r_2 до провода и его зеркального изображения равны между собой и, кроме того, для этих точек $U = 0$.

Замечая, что для точки, лежащей на оси второго провода, необходимо принять $r_1 = r_{12}$ и $r_2 = r_{1'2}$ (см. рис. 25.9), получаем

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Вообще будем иметь

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_{p'k}}{r_{pk}}.$$

Так как $r_{p'k} = r_{pk'}$ (см. рис. 25.9), то $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$, что было отмечено в предыдущем параграфе для общего случая.

Умение рассчитывать потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости весьма важно во многих практических задачах, например при расчете параметров линии передачи со сложным расположением проводов, при выяснении вопроса о влиянии линии передачи высокого напряжения на расположенные рядом с ней линии связи и т. д.

25.4. Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли

Полученные в предыдущем параграфе выражения для потенциальных коэффициентов в системе параллельных проводов, протянутых над поверхностью земли, дают возможность найти выражение для емкости двухпроводной линии передачи с учетом влияния земли.

Для двух проводов имеем

$$U_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2; \quad U_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2.$$

Пусть заряды проводов равны по абсолютному значению и противоположны по знаку: $q_2 = -q_1$. Заменяя q_2 на $-q_1$, получаем

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) q_1; \quad U_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22}) q_1.$$

Следовательно, искомая емкость имеет выражение

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$

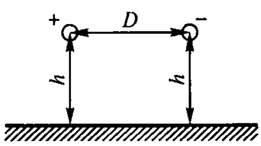

Рис. 25.10

Определим, пользуясь этой формулой, емкость двухпроводной линии, провода которой подвешены на одинаковой высоте h от земли и на расстоянии D друг от друга (рис. 25.10). Радиусы проводов одинаковы и равны R. Согласно формулам, полученным в предыдущем параграфе, имеем

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{2h}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + D^2}}{D}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{2h}{R} \frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}}\right)}.$$

Если высота подвеса h много больше расстояния между проводами D, то $\sqrt{4h^2+D^2} \approx 2h$ и

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{D}{R}},$$

т. е. получаем формулу, выведенную ранее (см. § 25.1) без учета влияния земли.

25.5. Емкость трехфазной линии передачи

Все полученные выше соотношения, строго говоря, справедливы только для электростатического поля. Однако с большой степенью точности они могут быть использованы и при вычислении параметров линий передачи при промышленной частоте. Критерием допустимости приближенного рассмотрения переменного электрического поля около проводов линии в отдельные моменты времени как электростатического поля может служить соотношение между линейными размерами области, в которой рассматривается поле, и длиной электромагнитной волны. Вопрос о длине λ электромагнитной волны и о скорости v ее распространения будет рассмотрен в §§ 29.1 и 29.2. Имеет место соотношение $\lambda = v/f$, где f — частота колебаний. В воздухе $v = 3 \cdot 10^5$ км/с, и при частоте 50 Гц имеем $\lambda = 6000$ км. На длине волны фаза колебаний напряженности поля меняется на 2π. В пределах области, линейные размеры которой значительно меньше λ, можно считать фазу колебаний напряженности поля одинаковой во всех точках области и с большой степенью точности рассматривать поле в каждый момент времени как электростатическое.

В уравнениях, связывающих заряды и потенциалы, необходимо под q и U понимать в этом случае мгновенные заряды проводов и мгновенные напряжения между проводами и землей. При синусоидальном режиме эти уравнения могут быть написаны в символической форме для комплексных действующих зарядов $\dot{q}$ и напряжений $\dot{U}$. Для трехпроводной линии уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \beta_{11}\dot{U}_1 + \beta_{12}\dot{U}_2 + \beta_{13}\dot{U}_3;\\
\dot{q}_2 &= \beta_{21}\dot{U}_1 + \beta_{22}\dot{U}_2 + \beta_{23}\dot{U}_3;\\
\dot{q}_3 &= \beta_{31}\dot{U}_1 + \beta_{32}\dot{U}_2 + \beta_{33}\dot{U}_3.
\end{aligned}$$

Предположим, что напряжения $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ образуют симметричную систему, т. е. $\dot{U}_2 = a^2\dot{U}_1$ и $\dot{U}_3 = a\dot{U}_1$, где a — комплексный множитель (см. т. I). Имеем

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = 1; \quad \frac{1}{a} = a^2; \quad \frac{1}{a^2} = a.$$

В этом случае уравнения могут быть записаны в форме

$$\dot{q}_1 = (\beta_{11} + a^2\beta_{12} + a\beta_{13})\dot{U}_1;$$
$$\dot{q}_2 = (\beta_{22} + a^2\beta_{23} + a\beta_{21})\dot{U}_2;$$
$$\dot{q}_3 = (\beta_{33} + a^2\beta_{31} + a\beta_{32})\dot{U}_3.$$

Величины, стоящие в скобках, вещественны при условии, что провода линии расположены симметрично относительно друг друга, т. е. если $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31}$, так как $(a + a^2) = -1$ есть вещественное число. При этом стоящие в скобках величины представляют собой емкости проводов относительно земли или, что то же, емкость линии на одну фазу при соединении звездой.

При отсутствии симметрии в расположении проводов, т. е. если $\beta_{12} \neq \beta_{23} \neq \beta_{31}$, стоящие в скобках величины оказываются комплексными. Их вещественные части являются емкостями проводов относительно земли, так как они определяют часть заряда, изменяющуюся в фазе с напряжением, и, следовательно, определяют реактивную составляющую тока, сдвинутую по фазе на угол $\pi/2$ относительно напряжения. Мнимые части величин, стоящих в скобках, определяют активные составляющие токов в проводах, находящиеся в фазе или в противофазе с напряжениями. Заметим, что сумма мнимых частей для всех трех фаз равна нулю, так как при суммировании получаем перед всеми коэффициентами β_{12}, β_{23} и β_{31} вещественные множители $(a + a^2) = -1$. Это значит, что если в одних фазах мнимые части определяют положительную активную мощность, то в других они определяют такую же по абсолютному значению, но отрицательную активную мощность. Физически это означает, что при несимметричном расположении проводов некоторое количество энергии передается за период путем электростатической индукции из одной фазы в другую. Это своеобразное явление обусловливает несимметрию токов при симметричных напряжениях. Естественно, что несимметрия токов определяется не только появлением разных по значению и по знаку активных составляющих, но также и различием реактивных составляющих вследствие того, что емкости проводов различны.

Полная симметрия в расположении проводов может быть достигнута только в кабеле, в котором заземленная оболочка охватывает симметрично все три провода (см. рис. 24.29, *б*). В воздушной линии даже при расположении проводов по вершинам равностороннего треугольника (рис. 25.11) наличие земли вносит несимметрию. Подавно несимметричной оказывается линия с расположением проводов согласно рис. 25.12.

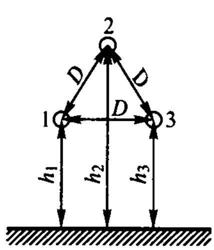

Рис. 25.11

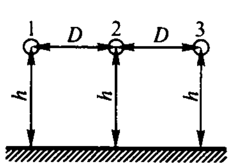

Рис. 25.12

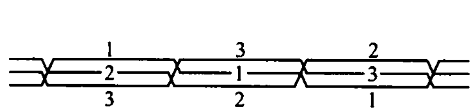

Рис. 25.13

Обычно через равные расстояния изменяют расположение проводов на опорах так, что постепенно осуществляется круговая перестановка (транспозиция) проводов (рис. 25.13). Основная цель круговой перестановки — уменьшить электростатическое и электромагнитное влияние проводов линии высокого напряжения и сильного тока на соседние линии связи. При наличии круговой перестановки средние значения параметров всей линии получаются одинаковыми для всех фаз, и всю линию можно рассматривать как симметричную. В среднем для всей линии не будет иметь места передача энергии за целый период из одной фазы в другую путем электростатической индукции.

С достаточной для практики точностью решение можно получить, вводя в систему уравнений

$$\dot{U}_1 = \alpha_{11}\dot{q}_1 + \alpha_{12}\dot{q}_2 + \alpha_{13}\dot{q}_3;$$
$$\dot{U}_2 = \alpha_{21}\dot{q}_1 + \alpha_{22}\dot{q}_2 + \alpha_{23}\dot{q}_3;$$
$$\dot{U}_3 = \alpha_{31}\dot{q}_1 + \alpha_{32}\dot{q}_2 + \alpha_{33}\dot{q}_3$$

средние для всей линии значения потенциальных коэффициентов α.

Обозначим

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{13}}{3}; \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3},$$

где α_{12}, α_{23}, α_{31}, α_{11}, α_{22}, α_{33} — истинные значения коэффициентов для одного из участков, и будем считать в дальнейшем, что для всей линии все коэффициенты α с разными индексами равны α_m и все коэффициенты α с одинаковыми индексами равны α_0.

Естественно, что в симметричной линии при симметричной системе напряжений и заряды $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ образуют также симметричную систему, т. е. $\dot{q}_2 = a^2\dot{q}_1$, $\dot{q}_3 = a\dot{q}_1$.

Уравнения в этом случае приобретают вид

$$\dot{U}_1 = \alpha_0\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = [\alpha_0 + (a + a^2)\alpha_m]\dot{q}_1 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_1;$$
$$\dot{U}_2 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_0\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_2;$$
$$\dot{U}_3 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_0\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_3.$$

Следовательно, искомая емкость провода относительно земли равна

$$C = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_m}.$$

Согласно формулам, приведенным в § 25.3, имеем

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{3}\left(\ln\frac{2h_1}{R_1} + \ln\frac{2h_2}{R_2} + \ln\frac{2h_3}{R_3}\right);$$
$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{3}\left(\ln\frac{r_{12'}}{r_{12}} + \ln\frac{r_{23'}}{r_{23}} + \ln\frac{r_{31'}}{r_{31}}\right).$$

Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(2\dfrac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}}\dfrac{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}}{\sqrt[3]{r_{12'} r_{23'} r_{31'}}}\right)}.$$

При расположении проводов согласно схеме рис. 25.12 имеем

$$r_{12} = r_{23} = D;\quad r_{31} = 2D;\quad h_1 = h_2 = h_3 = h;$$
$$r_{12'} = r_{23'} = \sqrt{4h^2 + D^2};\quad r_{31'} = \sqrt{4h^2 + 4D^2}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{2hD\sqrt[3]{2}}{R\sqrt[3]{(4h^2 + D^2)\sqrt{4h^2 + D^2}}}\right)}.$$

Пренебрегая влиянием земли, т. е. принимая $D \ll h$, получим

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{\sqrt[3]{2}\,D}{R}}.$$

25.6. Метод средних потенциалов для расчета потенциальных коэффициентов и емкостей в системе проводов

Для расчета емкости сложных систем, состоящих из нескольких проводов конечной длины, например емкости радиоантенн, широко используется приближенный метод, предложенный Хоу.

В электростатическом поле потенциал проводника одинаков во всех его точках, заряд же распределяется по поверхности проводника неравномерно. Хоу предложил для вычисления емкости исходить из обратного, по существу, не отвечающего действительности предположения. Именно: предполагается, что заряд распределяется равномерно по поверхности проводников и для линейных проводников — равномерно по их длине. Вычисляется распределение потенциала по поверхности или по длине проводников, и в формулу для емкости вводится среднее значение вычисленных таким образом потенциалов проводников. В соответствии с этим будем называть такой метод *методом средних потенциалов*. Этот метод, хотя и основан на предположении, не соответствующем реальным условиям, в ряде случаев, например при вычислении емкости системы, образованной параллельными проводами, дает достаточно точные результаты. Объясняется это тем, что неравномерность распределения заряда заметно сказывается лишь на концах таких проводов. Упрощение же расчета достигается весьма большое, так как при заданном распределении заряда потенциал вычисляется по формулам:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\, ds}{r} \quad \text{и} \quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{r}.$$

Предположим, что имеются два отрезка проводов, длины которых l_1 и l_2 (рис. 25.14). Требуется вычислить потенциальный коэффициент α_{12}. Предположим, что $q_1 = 0$ и $q_2 \neq 0$. При этом имеем

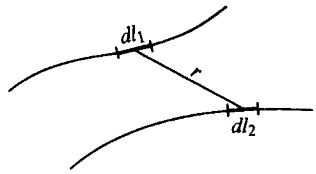

Рис. 25.14

$$U_1 = \alpha_{12} q_2.$$

Пользуясь приближенным методом, предполагаем, что заряд q_2 распределен равномерно вдоль второго провода с линейной плотностью $\tau_2 = q_2/l_2$. Потенциал в некоторой точке первого провода, определяемый зарядом q_2, будет равен

$$U_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l_2} \frac{\tau_2\, dl_2}{r} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon l_2}\int_{l_2} \frac{dl_2}{r},$$

причем интегрирование производится вдоль всего второго провода. Среднее значение потенциала первого провода получается в результате интегрирования вдоль первого провода:

$$U_1 = \frac{1}{l_1}\int_{l_1} U_1' dl_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon l_1 l_2}\int_{l_1}\int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Таким образом, искомый потенциальный коэффициент определяется формулой

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l_1 l_2}\int_{l_1}\int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Выражение для потенциального коэффициента с одинаковыми индексами, например α_{11} для прямолинейного отрезка провода круглого сечения, может быть найдено путем следующих рассуждений. Предполагаем соответственно принятому допущению, что заряд, находящийся на поверхности провода, равномерно распределен по длине провода. Находим потенциал U', создаваемый этим зарядом в разных точках оси провода, и вычисляем среднее значение U потенциала вдоль оси. Пусть r — расстояние от кольцевого элемента поверхности проводника, имеющего длину dl' в направлении оси проводника (рис. 25.15), до элемента dl оси проводника, l — длина проводника и r_0 — радиус его сечения. Потенциал U' в некоторой точке оси, определяемый всем зарядом q проводника, равен

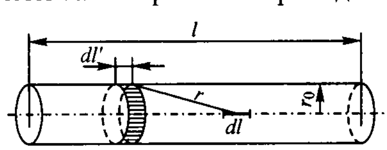

Рис. 25.15

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{l}\int_l \frac{dl'}{r}.$$

Среднее значение потенциала вдоль всей оси будет

$$U = \frac{1}{l}\int_l U'dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon l^2}\int_l\int_l \frac{dl'\,dl}{r}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_l\int_l \frac{dl'dl}{r},$$

причем наименьшее значение r есть r_0.

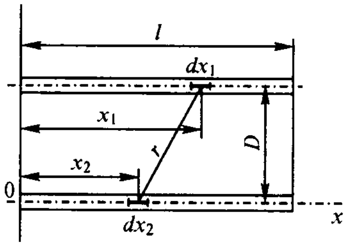

Рис. 25.16

В качестве примера определим, пользуясь методом средних потенциалов, потенциальный коэффициент α_{12} для параллельных отрезков проводов, расположенных на расстоянии D друг от друга и имеющих одинаковые длины $l_1 = l_2 = l$, причем начала отрезков лежат на одном перпендикуляре к ним. Оси координат расположим так, как показано на рис. 25.16. Имеем

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_0^l\int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{D^2+(x_2-x_1)^2}}.$$

Но

$$\int_0^l \frac{dx_2}{\sqrt{D^2+(x_2-x_1)^2}} = \int_{-x_1}^{l-x_1} \frac{d(x_2-x_1)}{\sqrt{D^2+(x_2-x_1)^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{l-x_1}{D} + \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_0^l\left(\operatorname{Arsh}\frac{l-x_1}{D} + \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\right)dx_1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{l-x_1}{D}\,dx_1 = \int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\,dx_1.$$

Замечая, что

$$\int \operatorname{Arsh} y\,dy = y\operatorname{Arsh} y - \int y\,d(\operatorname{Arsh} y) =$$

$$= y\operatorname{Arsh} y - \int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = y\operatorname{Arsh} y - \sqrt{1+y^2} + \text{const},$$

находим

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}2\int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\,dx_1 = \frac{D}{2\pi\varepsilon l^2}\left|\frac{x_1}{D}\operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D} - \sqrt{1+\frac{x_1^2}{D^2}}\right|_0^l =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{D}{l}\left(\frac{l}{D}\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{1+\frac{l^2}{D^2}} + 1\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2}+1} + \frac{D}{l}\right).$$

При вычислении коэффициентов α_{11} и α_{22} с одинаковыми индексами для прямолинейного проводника, имеющего круглое сечение радиуса r_0, результат интегрирования приведет к формуле, которая получается из только что полученной формулы путем замены D на r_0. Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l}\right).$$

Так как при выводе этой формулы наличие другого провода не учитывалось, то емкость уединенного цилиндра конечной длины получается из выражения

$$C = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l}}.$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} = \ln\left(\frac{l}{r_0} + \sqrt{\frac{l^2}{r_0^2}+1}\right).$$

При $l \gg r_0$ будет

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l} \approx \ln\frac{2l}{r_0} - 1 = \ln\frac{l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln\frac{l}{r_0} - 0{,}307.$$

Следовательно,

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{l}{r_0} - 0{,}307} \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{l}{r_0}}.$$

Емкость между цилиндрами найдется из системы уравнений:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \quad U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Принимая $q_2 = -q_1$ и учитывая, что $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ и $\alpha_{22} = \alpha_{11}$, получаем

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1; \quad U_2 = -(\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1;$$

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})},$$

где α_{12} и α_{11} находятся по только что полученным формулам.

При $l \gg r_0$ и $l \gg D$ имеем

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left[\left(\ln\frac{2l}{r_0} - 1\right) - \left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right)\right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{D}{r_0}$$

и, следовательно,

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln D/r_0},$$

что совпадает с выведенной ранее формулой для емкости двухпроводной линии передачи (см. § 25.1).

25.7. Вычисление емкости по картине поля

Емкость между двумя цилиндрическими телами большой длины или между двумя телами вращения с общей осью можно вычислить, пользуясь картиной поля, построенной хотя бы приближенным графическим методом, изложенным в §§ 24.15–24.17.

Отношение потока вектора смещения $\Delta\Psi_D$ сквозь сечение одной трубки к приращению потенциала ΔU между соседними линиями равного потенциала, согласно уравнениям, приведенным в § 24.17, равно:

для плоскопараллельного поля $\left|\dfrac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| = \varepsilon_p l \dfrac{\Delta a}{\Delta n} = \dfrac{1}{k_1} l;$

для поля тел вращения $\left|\dfrac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| = 2\pi r \varepsilon_p \dfrac{\Delta a}{\Delta n} = 2\pi \dfrac{1}{k_2}.$

Заряд тела равен, согласно постулату Максвелла, полному потоку смещения сквозь сечения всех трубок, начинающихся на теле. Если число этих трубок равно m_1, то $q = m_1 \Delta\Psi_D$. Разность потенциалов между двумя телами равна $U_1 - U_2 = m_2 \Delta U$, где m_2 — число интервалов между соседними линиями равного потенциала. Таким образом,

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \left|\frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| \frac{m_1}{m_2} = k_3 \frac{m_1}{m_2},$$

причем для плоскопараллельного поля $k_3 = l/k_1$, а для поля тел вращения $k_3 = 2\pi/k_2$. Число k_3 задают, приступая к графическому построению поля. Оно определяет форму ячеек поля, т. е. отношение $\Delta a/\Delta n$. Числа m_1 и m_2 находят из построенной картины поля.

Глава двадцать шестая

Электрическое поле постоянных токов

26.1. Уравнения электромагнитного поля постоянных токов

В настоящей главе будем рассматривать поле постоянных токов в неподвижных проводниках и проводящих средах. Постоянный ток может протекать только в замкнутой проводящей цепи. Если электрическое сопротивление цепи отлично от нуля, то прохождение тока в ней вызывает падение напряжения. Следовательно, как в диэлектрике, окружающем проводники с постоянным током, так и внутри самих проводников будет существовать не только магнитное, но и электрическое поле. Эти постоянные поля называют стационарными.

Первое уравнение Максвелла rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ в этом случае указывает, что $\boldsymbol{H}$, а следовательно, и $\boldsymbol{B}$, так же как и $\boldsymbol{J}$, не зависят от времени. Поэтому из второго уравнения Максвелла rot $\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ следует, что вне источников ЭДС rot $\boldsymbol{E} = 0$.

Таким образом, уравнения электромагнитного поля для постоянных токов в неподвижной проводящей среде вне источников ЭДС приобретают вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\ \ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0;\ \ \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E};$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\ \ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\ \ \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho;\ \ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Условие rot $\boldsymbol{E} = 0$ свидетельствует, что вне источника ЭДС электрическое поле постоянных токов является, так же как и электростатическое поле, *безвихревым*. Такое поле является *потенциальным*, т. е. для его характеристики может быть введена функция координат $U\ (x, y, z)$, называемая электрическим потенциалом, причем $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U$.

26.2. Электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами

Рассмотрим сначала электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами. Так как при отсутствии токов в диэлектрике следует принять в нем $\rho = 0$, то поле в диэлектрике характеризуется уравнениями:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0,\ \text{ т. е. }\ \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}U;\ \ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\ \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0.$$

Для однородной среды, когда $\varepsilon = \text{const}$, эти уравнения дают div $\boldsymbol{E} = 0$ или div grad $U = 0$, т. е. потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, в самом диэлектрике такое поле ничем не отличается от электростатического. Однако граничные условия на поверхности проводников уже не соответствуют тем, которые имеют место в электростатике. В электростатической задаче поверхность каждого проводника является поверхностью равного потенциала. При прохождении по проводнику электрического тока в проводнике возникает падение потенциала, и, следовательно, поверхность проводника уже не будет равнопотенциальной. Линии напряженности электрического поля в диэлектрике подходят к поверхности проводника не под прямым углом, так как на поверхности проводника появляется касательная составляющая напря-

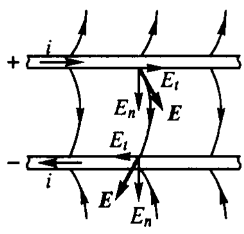

Рис. 26.1

женности поля в направлении линий тока. На рис. 26.1 показан характер линий напряженности электрического поля около проводов линии передачи. С принципиальной точки зрения указанное обстоятельство существенно осложняет расчет поля, однако практически во многих случаях его можно не учитывать, так как обычно падение напряжения вдоль проводников на длине, сравнимой с расстоянием между проводниками, ничтожно мало по сравнению с разностью потенциалов проводников.

В качестве примера сравним между собой касательную E_t и нормальную E_n — составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ в диэлектрике у поверхности проводов линии передачи (см. рис. 26.1). Касательная составляющая представляет собой падение напряжения, отнесенное к единице длины провода, и может быть определена из выражения $E_t = J/\gamma$. Если принять для медных проводов $\gamma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м и $J = 5 \cdot 10^6$ А/м², получим $E_t = 0{,}086$ В/м. Нормальная составляющая зависит от напряжения u между проводами и расстояния D между ними. Так как поле между проводами неоднородно и наиболее сильное поле сосредоточено около проводов, то $E_n > u/D$. Даже для проводов линии низкого напряжения, проложенных на значительном расстоянии друг от друга, как это бывает в сырых помещениях, величина E_n оказывается много больше E_t. Пусть, например, $u = 100$ В и $D = 10$ см. При этом $E_n > 1000$ В/м и, следовательно, $E_n/E_t > 10^4$. Для линий высокого напряжения величина E_n близка к критическому градиенту потенциала для воздуха, т. е. имеет порядок $E_n \approx 30$ кВ/см $= 3 \cdot 10^6$ В/м. Следовательно, для таких линий $E_n/E_t \approx 3{,}5 \cdot 10^7$.

Полученные числа показывают, что составляющая E_t ничтожно мала по сравнению с E_n, и при рассмотрении поля около проводов ею можно пренебречь без опасения внести этим сколь-нибудь заметную ошибку. В таком случае граничные условия на поверхности проводников оказываются тождественными условиям в электростатике. Поэтому при рассмотрении электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении соответствующих электростатических задач.

26.3. Электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде

Внутри проводников, по которым проходит электрический ток, также существует электрическое поле. Напряженность этого поля в изотропной по отношению к проводимости среде связана с плотностью тока соотношением $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, которое представляет собой выражение закона Ома в дифференциальной форме.

В изотропной среде направление линий электрического тока всюду совпадает с направлением линий напряженности электрического поля. Если, кроме того, среда однородна ($\gamma = \mathrm{const}$), то и густота линий тока всюду пропорциональна густоте линий напряженности электрического поля, т. е. картины линий тока и линий напряженности поля подобны друг другу.

Если среда неоднородна в отношении проводимости, то линии тока остаются в ней непрерывными, что следует из принципа непрерывности тока, выражаемого условием $\oint_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = 0$ или $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$, которое представляет собой обобщенную форму первого закона Кирхгофа соответственно в интегральной и в дифференциальной формах. Но в такой неоднородной среде линии напряженности электрического поля будут прерывными. На поверхности раздела двух сред с различными удельными проводимостями нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля изменяется скачкообразно.

Поверхности проводников, являющиеся границами между проводящей средой и диэлектриком, очевидно, образуются совокупностью линий тока, так как нормальная к ним составляющая вектора плотности тока равна нулю.

В настоящей главе будем исследовать пространственное распределение тока в массивных проводящих средах. Поле вектора плотности тока в таких средах, вообще говоря, будет неоднородным, и для вычисления тока i, проходящего сквозь некоторую поверхность s, взятую в проводящей среде, необходимо производить интегрирование $i = \int_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s}$.

Внутри проводящей среды вне источников ЭДС всюду соблюдается условие $\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$ или $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, что выражает второй закон Кирхгофа соответственно в интегральной и дифференциальной формах в области, где нет источников ЭДС. Поле оказывается потенциальным. Поверхности равного электрического потенциала, определяемые уравнением $U(x, y, z) = \text{const}$, пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, а следовательно, в изотропной среде они пересекаются под прямым углом и линиями тока.

Таким образом, электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде вне источников ЭДС характеризуются системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0.$$

Эти уравнения вытекают из приведенной в § 26.1 системы уравнений, причем уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$, как было указано в § 23.5, является следствием уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$.

Вопрос о пространственном распределении тока чрезвычайно важен при рассмотрении многих практических задач, например при исследовании токов в земле, токов в массивных проводниках, токов проводимости в изоляции и т. д.

26.4. Граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред

Установим соотношение между касательными и нормальными составляющими векторов напряженности электрического поля и плотности электрического тока на поверхности раздела двух проводников с различными удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2 (рис. 26.2)

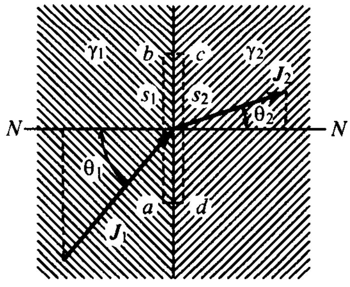

Рис. 26.2

Вследствие выполнения уравнений $\oint\limits_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint\limits_s \boldsymbol{J}_{\text{пр}}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{J}_{\text{пр}} = \gamma\boldsymbol{E}$ можем (см. § 23.8) принять $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{J}_{\text{пр}}$, $a_1 = \gamma_1$, $a_2 = \gamma_2$ и на основании условий (*), (**) из § 23.8 записать соотношения:

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2, \;\; J_1 \cos\theta_1 = J_2 \cos\theta_2, \;\; \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

выражающие непрерывность соответствующих составляющих напряженности электрического поля и плотности тока в проводящей среде, а также условие преломления линий тока проводимости.

Во многих практических случаях мы встречаемся с переходом тока из металлических тел в окружающую среду, удельная проводимость которой во много раз меньше удельной проводимости материала этих тел. Такие условия имеют место, например, в случае наличия токов утечки через изоляцию между проводами, находящимися при разных потенциалах. Ток утечки возникает вследствие несовершенства изоляции. Удельная проводимость изоляции во много раз меньше удельной проводимости материала проводов. Например, для кабельной бумаги имеем приблизительно $\gamma \approx 10^{-13}$ См/м, тогда как для меди $\gamma = 58 \cdot 10^6$ См/м, т. е. отношение удельной проводимости меди к удельной проводимости изоляции имеет порядок $6 \cdot 10^{20}$. В качестве другого примера можно указать случай перехода тока в землю через зарытые в землю металлические электроды. Обычно применяют стальные электроды. Удельная проводимость стали приблизительно равна $\gamma \approx 5 \cdot 10^6$ См/м.

Удельная проводимость почвы зависит от влажности почвы и от ее состава. В среднем ее можно считать равной $\gamma \approx 10^{-2}$ См/м. Таким образом, отношение удельной проводимости материала электродов к удельной проводимости почвы имеет порядок $5 \cdot 10^8$.

Во всех этих случаях при рассмотрении поля в среде с малой удельной проводимостью можно пренебречь падением напряжения внутри металлических тел и считать поверхности тел поверхностями равного потенциала.

26.5. Аналогия электрического поля в проводящей среде с электростатическим полем

Между соотношениями, характеризующими стационарное электрическое поле постоянных токов в проводящей среде, и соотношениями, характеризующими электростатическое поле в диэлектрике, можно провести формальную аналогию.

Для электрического поля токов в проводящей среде имеют место соотношения:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0; \;\; \int\limits_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = U_A - U_B; \;\; \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}; \;\; \operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0; \;\; \int\limits_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = \Delta i.$$

Они формально совпадут с соотношениями для электростатического поля в диэлектрике:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \int_A^B \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = U_A - U_B; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0; \quad \int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \Delta q,$$

если в последних заменить вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ вектором плотности тока $\boldsymbol{J}$, электрический заряд Δq — током Δi и абсолютную диэлектрическую проницаемость ε — удельной проводимостью γ.

В выражении $\int_s \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s} = \Delta i$ величина Δi есть ток сквозь сечение s трубки тока. Этот ток протекает сквозь любое сечение трубки, в частности в начале трубки, где ток вводится в рассматриваемую проводящую среду из электрода, погруженного в эту среду. В выражении $\int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \Delta q$ величина Δq есть заряд на поверхности заряженного тела в начале рассматриваемой трубки электрического смещения, а s — любое сечение этой трубки. Отсюда ясно, что если условия для вектора $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ на границе данной проводящей среды с удельной проводимостью γ совпадают с условиями для вектора $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ на границе такой же формы диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε, то электрические поля в проводящей среде и в диэлектрике должны быть аналогичны друг другу.

В электростатической задаче границей диэлектрика является поверхность проводящего тела. Эта поверхность есть поверхность равного потенциала, и вектор $\boldsymbol{D}$ к ней нормален. В примерах, рассмотренных в предыдущем параграфе, границей плохо проводящей среды (почвы или несовершенной изоляции) является поверхность проводников. С большой степенью точности эту поверхность можно считать поверхностью равного потенциала и вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ в плохо проводящей среде считать направленным по нормали к ней. На основании изложенного можно утверждать, что картина электрического поля токов (в почве или в изоляции) в этих задачах должна совпадать с картиной поля в соответствующих электростатических задачах.

На этом основан так называемый *метод электростатической аналогии*, позволяющий в ряде случаев при расчете токов в проводящей среде воспользоваться готовыми решениями соответствующих задач электростатики. Метод электростатической аналогии дает возможность также заменить исследование электростатического поля экспериментальным исследованием поля тока в проводящей среде, о чем будет сказано в § 30.13.

В частности, формулы для электрической проводимости $G = i/U$ сред, в которых протекает ток, могут быть получены из соответствующих формул для емкости $C = q/U$ тел, так как в аналогичных задачах ток i заменяется зарядом q. Электрическая емкость тела или емкость между телами определяется геометрическими параметрами тел и абсолютными диэлектрическими проницаемостями сред, окружающих тела. Поэтому, чтобы получить формулу для G, достаточно заменить в соответствующей формуле для C абсолютные диэлектрические проницаемости ε диэлектриков удельными проводимостями γ проводящих сред. Если проводящая среда и соответственно диэлектрик однородны, то в формулу для проводимости G удельная проводимость γ входит множителем и соответственно в формулу для емкости C абсолютная диэлектрическая проницаемость ε также входит множителем. В таком случае для аналогичных задач имеем

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

26.6. Ток утечки в кабеле и сопротивление изоляции кабеля

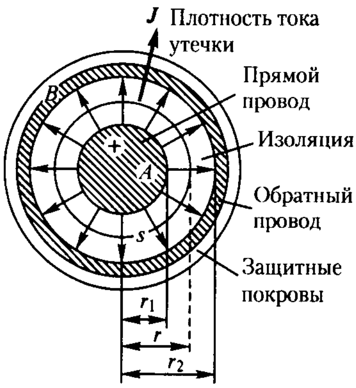

Рис. 26.3

Определим ток утечки i в кабеле, возникающий вследствие несовершенства изоляции. Сечение кабеля изображено на рис. 26.3. Линии напряженности поля и линии тока утечки в изоляции можно считать направленными по радиусам.

Проведем внутри изоляции цилиндрическую поверхность, имеющую радиус r и длину l в направлении оси кабеля. Имеем $i = 2\pi r l J$ и, следовательно, $E = \dfrac{J}{\gamma} = \dfrac{i}{2\pi r l \gamma}$.

Напряжение u_{AB} между проводами найдем, составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль радиуса:

$$u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr = \frac{i}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда находим сопротивление R и проводимость G изоляции кабеля:

$$R = \frac{u_{AB}}{i} = \frac{1}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi l \gamma}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Формулу для проводимости G можно было написать сразу, пользуясь методом электростатической аналогии. Для этого достаточно в формуле для емкости кабеля

$$C = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},$$

приведенной в § 25.1, п. 5, заменить ε на γ.

26.7. Сопротивление заземления

Для осуществления соединения какой-либо точки электрической цепи с землей зарывают в землю металлические проводники, к которым и присоединяют соответствующую точку цепи. Систему таких зарытых в землю проводников называют *заземлителем*. Так, например, при соединении в звезду обмоток высокого

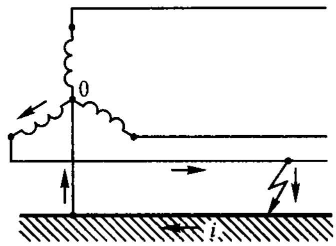

Рис. 26.4

напряжения трехфазного трансформатора, питающего линию передачи, обычно заземляют непосредственно или через некоторое сопротивление нейтральную точку трансформатора (рис. 26.4). Этим достигается то, что напряжения проводов линии по отношению к земле при нормальном режиме не могут быть больше фазных напряжений. При повреждении изоляции одного из фазных проводов возникает ток короткого замыкания, проходящий от места повреждения через землю и заземлитель к нейтральной точке трансформатора. Электрический ток, проходя через землю, встречает некоторое сопротивление, называемое *сопротивлением заземления*. По существу, это — сопротивление земли, которое встречает ток при растекании от заземлителя. Вдоль поверхности земли создается падение напряжения, которое вблизи от мест заземления может достигать опасных для жизни человека значений уже на длине шага человека. Поэтому весьма существенно уметь вычислить сопротивление растеканию тока в земле при различных конструкциях заземлителей.

С заземлением отдельных точек цепи встречаемся в цепях как переменного, так и постоянного тока. В приведенном примере в земле протекает переменный ток. Распределение переменного тока в проводящей среде, в принципе, должно отличаться от распределения постоянного тока, так как при переменном токе в контурах, которые можно себе представить в проводящей среде, возникают индуцированные электродвижущие силы, оказывающие влияние на распределение тока. Однако ввиду большого удельного сопротивления земли при вычислении токов вблизи электродов можно пренебречь, во всяком случае при промышленной частоте, индуцированными электродвижущими силами по сравнению с активным падением напряжения и вести расчет, как при постоянном токе.

Формулы для проводимости $G = i/U$ заземления могут быть написаны на основании метода электростатической аналогии по имеющимся формулам для емкости $C = q/U$ соответственно расположенных тел.

В электростатических задачах обычно равным нулю принимают потенциал бесконечно удаленных точек. В интересующих нас задачах, относящихся к токам в земле, также принимают равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек или практически достаточно удаленных от электрода точек. При этом в выражении $G = i/U$ величина U есть потенциал электрода, так же как в выражении $C = q/U$ величина U есть потенциал заряженного тела.

Необходимо еще заметить, что в земле линии тока не уходят в бесконечность, а собираются у другого электрода или, как в примере, показанном на рис. 26.4, у места повреждения изоляции линии. Однако это обстоятельство мало сказывается на распределении тока около данного электрода и на значении соответствующего ему сопротивления заземления, так как основное сопротивление растеканию тока сосредоточено вблизи электрода, где плотность тока в земле имеет наибольшие значения.

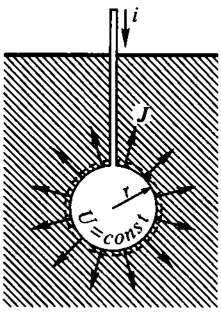

Рис. 26.5

Рассмотрим некоторые примеры. Так как емкость уединенного шара радиуса r равна

$$C = 4\pi\varepsilon r,$$

то проводимость заземления для шарового электрода, погруженного в землю столь глубоко, что можно пренебречь влиянием поверхности земли (рис. 26.5), должна быть равна

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\gamma r,$$

причем R — сопротивление заземления.

Если электрод расположен близко от поверхности земли, то линии тока искажаются, как это видно из рис. 26.6. В этом случае можно воспользоваться методом зеркальных изображений. Линии тока у поверхности земли должны быть к ней касательны. Это условие останется удовлетворенным, если мысленно заполнить воздушное пространство над поверхностью земли проводящей средой с такой же, как у земли, удельной проводимостью и поместить в эту среду электрод, являющийся зеркальным изображением действительного электрода относительно поверхности земли. Ток, выходящий из мнимого электрода, должен быть равен по значению и по знаку току, выходящему из действительного электрода в землю. Проводимость заземления для действительного электрода, очевидно, равна половине проводимости системы, образованной электродом и его зеркальным изображением. Так, например, проводимость для электрода в форме полушария, расположенного у поверхности земли так, как показано на рис. 26.7, равна

$$G = \frac{1}{R} = 2\pi\gamma r.$$

Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю (рис. 26.8).

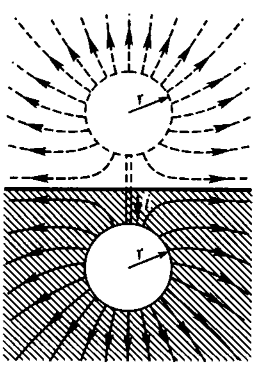

Рис. 26.6

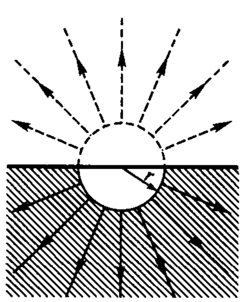

Рис. 26.7

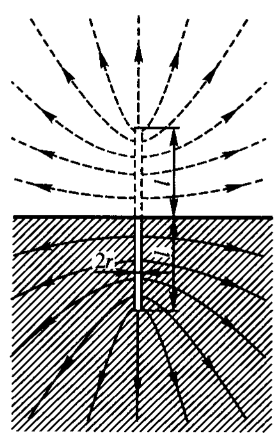

Рис. 26.8

Пусть l — длина трубы и r — ее радиус. Предположим, что один конец трубы находится у самой поверхности земли. Длина трубы вместе с ее зеркальным изображением равна $2l$.

Емкость цилиндра, имеющего длину $2l$ и радиус r, при $2l \gg r$ согласно формуле, приведенной в § 25.6, приближенно равна

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon 2l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Следовательно, проводимость для системы из электрода и его зеркального изображения равна

$$G \approx \frac{4\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Таким образом, проводимость заземления для электрода в форме вертикальной трубы выражается формулой

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Для уменьшения сопротивления заземления заземляющее устройство часто выполняют в виде рядов забитых в землю труб, соединенных между собой металлическими полосами. Расчет проводимости заземления при таком сложном заземлителе может быть выполнен по аналогии с расчетом емкости системы соединенных между собой прямолинейных отрезков проводников. С этой целью с успехом может быть использован метод средних потенциалов, изложенный в § 25.6.

Глава двадцать седьмая

Магнитное поле постоянных токов

27.1. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов

Уравнения магнитного поля постоянных токов, как это следует из системы уравнений, приведенных в § 26.1, имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Первое уравнение свидетельствует о том, что магнитное поле токов является *вихревым*. Следовательно, там, где $J \neq 0$, нельзя указать такую скалярную функцию координат $U_м(x, y, z)$, градиент которой пропорционален вектору $\boldsymbol{H}$, так как из-за тождества rot grad $U_м = 0$ при этом оказалось бы всюду rot $\boldsymbol{H} = 0$.

Иными словами, вихревое поле не является потенциальным.

Однако в той части пространства, где плотность тока равна нулю, имеем rot $\boldsymbol{H} = 0$ и, следовательно, в этой части пространства можно представить $\boldsymbol{H}$ в виде

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} U_м.$$

Величину $U_м$ называют скалярным потенциалом магнитного поля. Индекс «м» ставим, чтобы отличить магнитный потенциал от электрического. Имеем

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x};\quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y};\quad H_z = -\frac{\partial U_м}{\partial z},$$

и вообще составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ по любому направлению равна уменьшению магнитного потенциала, отнесенному к единице длины в этом направлении:

$$H_l = H\cos\alpha = -\frac{\partial U_м}{\partial l},$$

где α — угол между направлением вектора $\boldsymbol{H}$ и направлением, в котором определяется составляющая H_l.

Потенциал одинаков во всех точках поверхности, пересекаемой линиями напряженности поля под прямым углом, так как, перемещаясь по этой поверхности, имеем $\cos\alpha = 0$ и $\partial U_м/\partial l = 0$, т. е. $U_м = \text{const}$. Такую поверхность называют поверхностью равного магнитного потенциала. Ее уравнение имеет вид

$$U_м(x, y, z) = \text{const}.$$

Если обозначить через dn перемещение в сторону вектора $\boldsymbol{H}$ по нормали к поверхности равного потенциала или, что то же, по касательной к линии напряженности поля, то, очевидно, будем иметь

$$|\operatorname{grad} U_м| = H = -\frac{\partial U_м}{\partial n}.$$

Из сказанного ясно, что пользоваться понятием скалярного магнитного потенциала можно только в той области пространства, где $J = 0$. Однако и в этой части пространства $U_м$ является многозначной функцией. Чтобы показать это, рассмотрим магнитное поле около контура с током (рис. 27.1). Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любому замкнутому контуру, *не охватывающему контура с током*, равен нулю: $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0$. В частности, равен нулю интеграл по пути *AnBmA*, изображенному на рис. 27.1. Следовательно, $\int\limits_{AnB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$, т. е. интеграл, взятый между двумя заданными точками A и B, определяется только положением этих точек и не зависит от выбора пути интегрирования между точками при условии, что замкнутые контуры, образованные двумя различными путями интегрирования, не охватывают контуров с токами. При таком условии интеграл

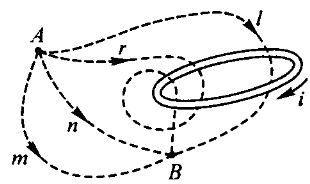

Рис. 27.1

$$\int\limits_A^B \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA} - U_{мB}$$

можно рассматривать как разность магнитных потенциалов $U_{мA}$ и $U_{мB}$ поля в точках A и B. Если условно принять равным нулю потенциал в некоторой заданной точке P ($U_{мP} = 0$), то разность потенциалов в точках A и P будет равна потенциалу в точке A:

$$\int\limits_A^P \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA}.$$

Однако если выбрать такой замкнутый путь интегрирования, который охватывает контур тока i, например путь *AlBmA* на рис. 27.1, то линейный интеграл напряженности магнитного поля по такому пути уже не равен нулю:

$$\oint\limits_{AlBmA} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AlB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} - \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i \neq 0,$$

откуда

$$\int\limits_{AlB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} + i = U_{мA} - U_{мB} + i.$$

Путь *ArBmA* охватывает два раза контур с током i. Для такого пути имеем $\oint\limits_{ArBmA} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 2i$ и, следовательно,

$$\int\limits_{ArB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} + 2i = U_{мA} - U_{мB} + 2i,$$

и вообще интеграл по некоторому пути *AxB* может отличаться от интеграла по пути *AmB* на ki, где k — целое число, если все пути проходят вне области пространства, занятой самими проводниками с током:

$$\int\limits_{AxB} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = U_{\text{м}A} - U_{\text{м}B} + ki.$$

Совместив точку B с точкой P, в которой потенциал принят равным нулю, получаем

$$\int\limits_{AxP} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = U_{\text{м}A} + ki.$$

Таким образом, скалярный магнитный потенциал оказывается величиной *многозначной.*

27.2. Векторный потенциал магнитного поля токов

Вектор магнитной индукции можно представить в виде вихря некоторого вспомогательного вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

причем вектор $\boldsymbol{A}$ при заданном распределении в пространстве электрических токов является функцией координат.

Вектор $\boldsymbol{A}$ носит название векторного потенциала магнитного поля. Определим его так, чтобы уравнения магнитного поля

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H};\quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

были удовлетворены во всем пространстве — и там, где отсутствуют токи, и там, где $J \neq 0$.

Условие $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока, удовлетворяется тождественно, если $\boldsymbol{B}$ представить через $\boldsymbol{A}$ в виде $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, так как всегда $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$ (см. § 23.5).

Найдем выражение векторного потенциала, определяющее его по заданному распределению токов так, чтобы были удовлетворены остальные два уравнения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \text{ и } \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

Ограничимся рассмотрением однородной среды. Умножим правую и левую части первого уравнения на абсолютную магнитную проницаемость μ среды. Получим

$$\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \mu \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J},$$

и так как $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, то имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J}.$$

В частности, для проекции на ось OX можем написать

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu J_x.$$

Развернем левую часть этого уравнения. Имеем

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Прибавим к этому выражению величину $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ и вычтем равную ей величину $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$. Получим

$$\mathrm{rot}_x\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \nabla^2 A_x.$$

Подчиним вектор $\boldsymbol{A}$ условию $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$, т. е. будем считать, что поле вектора $\boldsymbol{A}$ не имеет источников. Действительно, при условии $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \neq 0$ всегда можно принять $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}''$, причем $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}' = 0$ и $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}'' \neq 0$. Поле составляющей $\boldsymbol{A}''$ как созданное источниками является потенциальным, и, следовательно, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}'' = 0$. Поэтому $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}'$, т. е. наличие составляющей $\boldsymbol{A}''$ не изменяет величину $\boldsymbol{B}$ и можно принять $\boldsymbol{A}'' = 0$. Окончательно получаем

$$\mathrm{rot}_x\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = -\nabla^2 A_x.$$

Уравнение $\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mu J_x$ переписывается в виде

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x.$$

Это есть уравнение Пуассона, оно полностью совпадает с уравнением Пуассона для электрического потенциала (см. § 24.4), если заменить A_x на U и μJ_x на ρ/ε. Поэтому его решение можно написать по аналогии с решением уравнения Пуассона для электрического потенциала. Для электрического потенциала мы имели

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\,dV}{r}.$$

Заменяя U на A_x и ρ/ε на μJ_x, получаем

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x dV}{r}.$$

Интегрирование достаточно распространить по всему объему, где $J_x \neq 0$. Величина r — это расстояние от центра элемента объема dV, в котором проекция вектора плотности тока есть J_x, до точки, в которой определяется A_x.

Аналогичным путем нетрудно получить выражения для других составляющих векторного потенциала. Окончательно будем иметь

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x dV}{r};\quad A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_y dV}{r};\quad A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_z dV}{r};$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{(\boldsymbol{i}J_x + \boldsymbol{j}J_y + \boldsymbol{k}J_z)\,dV}{r},$$

что можно записать кратко:

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int_V J \frac{dV}{r},$$

понимая здесь интегрирование как геометрическое суммирование.

Полученные выражения, служащие для определения составляющих векторного потенциала по заданному распределению тока в пространстве, справедливы всюду, в частности и там, где $J \neq 0$. Они пригодны при условии, что токи существуют в ограниченном объеме пространства, а это физически всегда и имеет место. При этом значение векторного потенциала убывает по мере удаления в бесконечность от области, занятой токами, не медленнее, чем $1/r$, что нетрудно усмотреть из последнего выражения. Так как составляющие вектора $\boldsymbol{B}$ выражаются через пространственные производные от составляющих вектора $\boldsymbol{A}$, то значение магнитной индукции B, а следовательно, и значение напряженности поля H убывают в бесконечности не медленнее, чем $1/r^2$.

Выражение для $\boldsymbol{A}$ может быть упрощено, если токи протекают по контурам из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстояниями от проводников до точек, в которых определяется $\boldsymbol{A}$. Представим элемент объема проводника в виде $dV = \boldsymbol{dl}\, \boldsymbol{ds}$, где $\boldsymbol{ds}$ — элемент поверхности s поперечного сечения и $\boldsymbol{dl}$ — элемент длины l проводника.

Выберем направления $\boldsymbol{dl}$ всюду так, чтобы они совпадали с направлениями вектора плотности тока $\boldsymbol{J}$, т. е. разобьем проводник на отрезки трубок тока. При этом $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{ds}\,\boldsymbol{dl}) = (\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{ds})\,\boldsymbol{dl}$ и

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \int_s \boldsymbol{J} \frac{(\boldsymbol{ds}\,\boldsymbol{dl})}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \int_s (\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{ds}) \frac{\boldsymbol{dl}}{r}.$$

Но при соблюдении вышеуказанных условий можно считать, что расстояния r до точки, в которой определяется $\boldsymbol{A}$, одинаковы для всех элементов ds данного сечения s. Точно так же можно считать одинаковыми все отрезки dl между двумя поперечными сечениями. Следовательно, можно написать

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{\boldsymbol{dl}}{r} \int_s \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{ds} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{i\,\boldsymbol{dl}}{r},$$

где $i = \int_s \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{ds}$ — ток в проводнике.

27.3. Метод приведения вихревого магнитного поля к безвихревому

Метод приведения вихревого магнитного поля к безвихревому основан на разложении вектора напряженности $\boldsymbol{H}$ магнитного поля на вихревую $\boldsymbol{H}_в$ и безвихревую $\boldsymbol{H}_р$ составляющие, т. е. на представлении напряженности магнитного поля в виде суммы $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_р + \boldsymbol{H}_в$. При этом допускается, что вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ порождает только неизвестную напряженность $\boldsymbol{H}_в$, которая и определяет вихревую часть магнитного поля т. е. $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$. Основой метода приведения вихревого магнитного поля к безвихревому является возможность раздельного расчета вихревой составляющей, который может быть выполнен более простыми способами. Так как величина div $\boldsymbol{H}_в$ не задана, то уравнение rot $\boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$ имеет множество не зависящих от магнитных свойств вещества решений. По этой причине уравнение rot $\boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$ может быть решено для случая однородной среды.

Поскольку div $\boldsymbol{J} = 0$ и $\boldsymbol{J} = \text{rot}\, \boldsymbol{H}_в$, то для выделенной безвихревой составляющей, равной $\boldsymbol{H}_р = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_в$, справедливо уравнение

$$\text{rot}\,(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_в) = \text{rot}\,\boldsymbol{H}_р = 0,\ \boldsymbol{H}_р = -\text{grad}\ U_м,$$

т. е. $\boldsymbol{H}_р$ можно представить в виде градиента скалярного магнитного потенциала $U_м$ и напряженность магнитного поля записать в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_в - \text{grad}\ U_м.$$

В этом случае уравнение div $\boldsymbol{B} = 0$ можно записать как div $\mu(\boldsymbol{H}_в - \text{grad}\ U_м) = 0$, откуда

$$\text{div}\,\mu\,\text{grad}\ U_м = \text{div}\,\mu\,\boldsymbol{H}_в, \qquad (*)$$

в котором неизвестными являются $U_м$ и $\boldsymbol{H}_в$. В наиболее общем случае трехмерного магнитного поля должны быть определены четыре скалярные функции — три составляющие $\boldsymbol{H}_в$ и скалярный магнитный потенциал $U_м$. В уравнении (*) задающим для расчета $U_м$ является $\boldsymbol{H}_в$. Поэтому прежде всего должно быть найдено решение уравнения rot $\boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$.

Возможность выбора произвольного распределения div $\boldsymbol{H}_в$ является существенным преимуществом метода преобразования вихревого магнитного поля в безвихревое. Появляется возможность выбирать из множества решений наиболее оптимальное. Одним из способов расчета величины $\boldsymbol{H}_в$ является использование закона Био—Саварра:

$$\boldsymbol{H}_в = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}\boldsymbol{r}}{r^3}dV,$$

где объем V является односвязной областью с токами. При помощи этого выражения величина $\boldsymbol{H}_в$ может быть рассчитана во всех точках проводников с токами. Оговорка относительно односвязности объема интегрирования при вычислении вихревой составляющей $\boldsymbol{H}_в$ искомого поля связана с тем обстоятельством, что объем может занимать не только часть пространства, где протекает электрический ток, но и часть, где ток отсутствует. Интеграл $\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ по контуру, охватывающему ток, равен этому току, тогда как интеграл $-\oint_l \nabla U_м\, d\boldsymbol{l}$ равен нулю всегда. Это противоречие устраняется, если область интегрирования является односвязной.

Для обеспечения односвязности области интегрирования приходится вводить непроницаемые для обхода тока поверхности. Таковой в случае изображенного на рис. 27.1 контура с током может быть любая поверхность, натянутая на произвольный контур, образованный линией тока, лежащей на поверхности проводника.

Из аналогии уравнений для скалярного потенциала div ε grad $U = -\rho$ электростатического поля и для скалярного магнитного потенциала div μ grad $U_м$ = div μ $\boldsymbol{H}_в$ следует, что величину – div μ $\boldsymbol{H}_в$ можно рассматривать как объемную плотность $\rho_м = -$div μ $\boldsymbol{H}_в$ фиктивного магнитного заряда m, являющегося формально введенной расчетной величиной. Из этой аналогии вытекает, что соотношению $-\oint_s \varepsilon \,\mathrm{grad}\, U_э d\boldsymbol{s} = q$ соответствует аналогичное соотношение $-\oint_s \mu \,\mathrm{grad}\, U_м d\boldsymbol{s} = m$.

В однородной среде с магнитной проницаемостью μ скалярный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона div grad $U_м$= div $\boldsymbol{H}_в = -\rho_м/\mu$, решение которого в силу сказанного выше можно записать как

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_в = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{\rho_м \boldsymbol{r}}{r^3} dV,$$

и получить выражение для искомой напряженности магнитного поля в виде

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{\rho_м \boldsymbol{r}}{r^3} dV + \boldsymbol{H}_в.$$

В качестве примера рассмотрим случай приведения вихревого магнитного поля тороидального с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 проводника высоты h с постоянным током плотностью $\boldsymbol{J}$ (рис. 27.2, *а*).

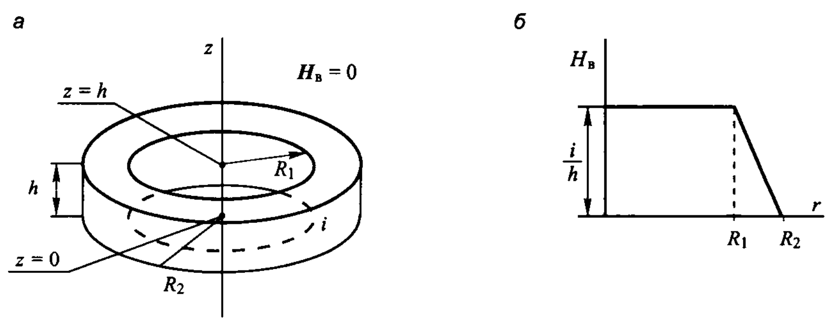

Рис. 27.2

Примем магнитную проницаемость μ постоянной всюду.

Ограничим односвязную область с током нижней (с координатой $z = 0$), верхней (с координатой $z = h$) и боковой поверхностями цилиндра радиусом R_2. Это означает, что $\boldsymbol{H}_в = 0$ всюду вне образованного этими поверхностями объема. В цилиндрической системе координат вектор $\boldsymbol{J}$ имеет составляющую J_α. Поскольку rot $\boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$, то при $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}\, J_\alpha$ можно оперировать единственной составляющей $H_в = H_{вz}$. Тогда для $H_в$ имеем

$$-\frac{dH_в}{dr} = J_\alpha, \text{ или } H_в(r) = -\int_{R_2}^{r} J_\alpha\, dr = (R_2 - r)J_\alpha,$$

так что $H_в(r) = (R_2 - r)\, J_\alpha$ при $R_1 < r < R_2$ и $H_в(r) = (R_2 - R_1)\, J_\alpha$ при $0 < r < R_1$.

Зависимость $H_в(r)$ изображена на рис. 27.2, *б*.

Пусть ток направлен таким образом, что положительное направление вектора $\boldsymbol{H}_в$ совпадает с таковым для оси z. При этом $H_в$ скачкообразно меняется на величину $H_в$ на поверхности $z = 0$ и на величину $-H_в$ на поверхности $z = h$. В соответствии с условием $\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H}_в = \mu \frac{\partial H_{вz}}{\partial z} = -\rho_м$ на этих поверхностях появятся магнитные заряды: $-m$ на нижней поверхности и $+m$ на верхней, тогда как во всех остальных точках области магнитных зарядов не будет. Хотя объемная плотность магнитных зарядов на указанных поверхностях обращается в бесконечность, их поверхностная плотность конечна и равна $\sigma_м(r) = -\mu H_в(r) < 0$ на нижней и $\sigma_м(r) = = +\mu H_в(r) > 0$ на верхней поверхности.

Найденные магнитные заряды полностью определяют магнитное поле во всех точках области, где $\boldsymbol{H}_в = 0$, т. е. там, где его можно описать с помощью скалярного магнитного потенциала. В той же части пространства, в которой присутствует вихревая составляющая $H_в$, составляющие напряженности магнитного поля равны $H_r = -\frac{\partial U_м}{\partial r}$, $H_\alpha = -\frac{\partial U_м}{r\partial \alpha}$, $H_z = H_в - \frac{\partial U_м}{\partial z}$.

27.4. Выражение магнитного потока и энергии магнитного поля через векторный потенциал

Установим связь между магнитным потоком Ф сквозь некоторую поверхность s и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$ магнитного поля. Имеем

$$\Phi = \int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s}.$$

Согласно теореме Стокса, $\int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} = \oint_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l}$. Следовательно,

$$\Phi = \oint_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l}.$$

Таким образом, *магнитный поток сквозь поверхность s равен линейному интегралу векторного потенциала по замкнутому контуру, ограничивающему эту поверхность.*

Для вычисления магнитного потока через вектор магнитной индукции при помощи интеграла $\int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$ необходимо определить вектор $\boldsymbol{B}$ во всех точках поверхности s. При вычислении магнитного потока через векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ достаточно знать последний только на контуре, ограничивающем эту поверхность. Интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по контуру, что во многих случаях оказывается весьма полезным.

Вычисление энергии магнитного поля в объеме на основе выражения $W_м = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\, dV$ сопряжено с большими затруднениями, так как необходимо рассчитать напряженность $\boldsymbol{H}$ и индукцию $\boldsymbol{B}$ магнитного поля во всех точках бесконечного пространства. Вычисление энергии магнитного поля $W_м$ можно упростить, если преобразовать интеграл по неограниченному объему V в интеграл по объему V_J, в котором существует создающий магнитное поле электрический ток плотностью $\boldsymbol{J}$.

Для такого преобразования воспользуемся соотношением $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ и известным из векторной алгебры выражением $\mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}] = \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$, или $\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}]$. После подстановки в формулу для энергии магнитного поля выражения $\boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}]$ вместо $\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ имеем

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}]dV. \qquad (*)$$

Можно показать, что второе слагаемое в (*) стремится к нулю, поэтому

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int\limits_{V_J} \boldsymbol{AJ}\,dV_J,$$

что позволяет ограничить вычисление интеграла лишь в той части объема, в которой плотность электрического тока не равна нулю.

Оперирование векторным потенциалом облегчает рассмотрение ряда важных положений теории магнитного поля, так же как пользование скалярным потенциалом упрощает рассмотрение многих вопросов электростатики.

27.5. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов

Общей задачей расчета магнитного поля постоянных токов является нахождение вектора магнитной индукции или вектора напряженности магнитного поля во всех точках пространства по заданному распределению тока в пространстве. Эта задача полностью решается нахождением векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ как функции координат. При этом магнитная индукция определяется из соотношения $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$. В общем случае аналитическими методами эту задачу удается решить в ограниченном числе случаев.

Решение задачи расчета трехмерного магнитного поля в неоднородных средах при использовании векторного потенциала, как правило, связано с большими трудностями. Они определяются, во-первых, тем, что для трехмерного магнитного поля в неоднородных средах за редким исключением невозможно найти аналитическое решение и поэтому приходится прибегать к различным численным методам. Во-вторых, при использовании численных методов наличие трех скалярных составляющих векторного магнитного потенциала и необходимость удовлетворить граничные условия приводит к тому, что системы конечно-разностных уравнений оказываются громоздкими и плохообусловленными.

Интересуясь магнитным полем вне проводников с током, т. е. только в области пространства, где плотность тока равна нулю, имеется возможность воспользоваться также другим методом. В этой области пространства магнитное поле можно охарактеризовать скалярным магнитным потенциалом $U_{\text{м}}$. Вектор напряженности поля при этом определяется из соотношения $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\,U_{\text{м}}$.

Методы расчета магнитного поля на основе скалярного магнитного потенциала аналогичны примененным при расчете электростатических полей, и в этом их большое достоинство. Такая аналогия дает возможность решить ряд задач, относящихся к расчету магнитных полей, путем сопоставления их с соответствующими решениями задач электростатики. Однако существенным недостатком метода является невозможность расчета магнитного поля в областях с токами.

Расчет магнитного поля в областях с токами на основе использования скалярного магнитного потенциала может быть реализован при условии приведения вихревого магнитного поля к безвихревому. При таком подходе можно использовать все численные методы, изложенные в главе 24 для расчета электростатических полей.

27.6. Плоскопараллельное поле

Рассмотрим магнитное поле системы бесконечно длинных параллельных цилиндрических проводников с токами в однородной среде. Ось $0z$ направим параллельно осям проводников. В таком случае линии напряженности поля целиком лежат в плоскостях, параллельных плоскости $x0y$, и картина поля во всех этих плоскостях одинакова, т. е. поле такой системы токов плоскопараллельное. Поверхности равного магнитного потенциала $U_м$ суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси $0z$. Линии равного потенциала в плоскости $x0y$ определяются уравнением

$$U_м(x, y) = \text{const}.$$

Интервалы между соседними линиями равного потенциала будем выбирать так, чтобы при переходе от одной линии к другой соблюдалось условие $\Delta U_м = \text{const}$.

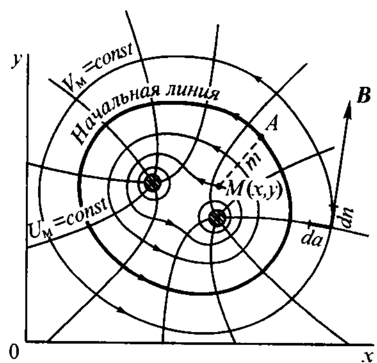

Рис. 27.3

Уравнение линии напряженности поля можно получить на основе соображений, аналогичных тем, которые были использованы для получения уравнения линии напряженности электрического поля. Условимся считать положительными токи, направленные к наблюдателю. Выберем одну линию напряженности поля в качестве начальной. На рис. 27.3 она отмечена жирной линией.

Соединим произвольную точку M (x, y) с некоторой точкой A начальной линии отрезком MmA. Пусть Ψ_H есть поток вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь поверхность, которую описал бы отрезок MmA, перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси $0z$ и проходя путь l. Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов. Введем обозначение $V_м = \Psi_H/l$. Величина $V_м$, называемая ф у н к ц и е й п о т о к а, зависит от положения точки M и, следовательно, является функцией координат этой точки. Для всех точек, лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция $V_м(x, y)$ имеет одинаковое значение. Следовательно, уравнение

$$V_м(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением линии напряженности поля.

Условимся располагать на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение $\Delta V_м$ функции потока.

Обозначив через dn элемент длины линии напряженности поля и через da элемент длины линии равного потенциала, будем иметь всюду $dn \perp da$. Координату n условимся считать возрастающей в направлении вектора $\boldsymbol{H}$. Координату a будем считать возрастающей влево от вектора $\boldsymbol{H}$ для наблюдателя, расположившегося так, что вектор $\boldsymbol{H}$ кажется ему направленным снизу вверх (см. рис. 27.3). Функцию потока будем считать возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается a.

Напряженность магнитного поля выражается через $U_м$ и $V_м$ в виде

$$H = -\frac{\partial U_м}{\partial n} = +\frac{\partial V_м}{\partial a}. \qquad (*)$$

Первое равенство уже было приведено ранее. Второе выражение следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь единицу поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Пусть $d_a\Psi_H$ — приращение потока вектора $\boldsymbol{H}$, соответствующее приращению только одной координаты a. Поток $d_a\Psi_H$ проходит через поверхность $l\,da$, нормальную к линиям напряженности поля. Следовательно,

$$H = \frac{d_a\Psi_H}{l\,da} = \frac{d_aV_м}{da} = \frac{\partial V_м}{\partial a}.$$

Выражения (*) совершенно аналогичны соответствующим выражениям в § 24.8, определяющим напряженность электрического поля.

Составляющие вектора $\boldsymbol{H}$ в декартовых координатах выражаются в виде

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x} = +\frac{\partial V_м}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y} = -\frac{\partial V_м}{\partial x}. \qquad (**)$$

Эти равенства пишутся на основании тех же соображений, что и соответствующие равенства (**) в § 24.8. Из них путем повторного дифференцирования получаем уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_м}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_м}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. обе функции, $U_м$ и $V_м$, удовлетворяют уравнению Лапласа. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это имеет место только в области пространства, не занятой электрическим током. Только в этой области возможно выразить напряженность поля в виде градиента скалярного потенциала $U_м$. Такая оговорка не относится к выражениям напряженности поля через функцию потока:

$$H = \frac{\partial V_м}{\partial a}; \quad H_x = \frac{\partial V_м}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial V_м}{\partial x},$$

которые по самому их смыслу должны быть *справедливы также и внутри проводников с током.*

Наконец, отметим, что функция потока $V_м$, введенная для характеристики плоскопараллельного поля, весьма просто связана с векторным потенциалом. В рассматриваемом случае векторный потенциал направлен всюду параллельно оси $0z$, т. е. $A_x = A_y = 0$; $A_z \neq 0$, так как вектор плотности тока всюду параллелен этой оси. Поэтому имеем

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0.$$

Умножая равенства (**) на μ и сопоставляя их с последними равенствами, получаем

$$A_z = \mu V_м + C,$$

причем постоянная C может быть отброшена как не имеющая существенного значения.

27.7. Применение функций комплексного переменного

Магнитный потенциал $U_м$ и функция потока $V_м$ в области, не занятой токами, связаны между собой соотношениями (**), совпадающими с уравнениями Коши–Римана, которым должны удовлетворять функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, определяющие вещественную и мнимую части аналитической функции $\zeta = \xi + j\eta = f(z)$ комплексного переменного $z = x + jy$. Поэтому для описания плоскопараллельных магнитных полей вне токов, так же как и при описании плоскопараллельных электрических полей, можем воспользоваться аналитическими функциями комплексного переменного, положив $\xi = V_м$ и $\eta = U_м$, т. е. принимая

$$\zeta = \xi + j\eta = V_м + jU_м = f(z).$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{H}$ могут быть получены из уравнений:

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{H}$ равен

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

27.8. Поле линейных проводов. Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей

Рассмотрим функцию $\zeta = K \ln z + C$, где K — вещественная величина и $C = C_1 + j C_2$. Выражая переменную z в полярных координатах, будем иметь $z = re^{j\theta}$ и

$$\zeta = V_м + jU_м = K \ln r + jK\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля можно написать в виде

$$V_м = K \ln r + C_1 = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad r = \text{const}.$$

Уравнение линий равного потенциала имеет вид

$$U_м = K\theta + C_2 = \mathrm{const}, \quad \text{т. е.} \quad \theta = \mathrm{const}.$$

Линии напряженности поля суть окружности с общим центром в начале координат. Линии равного потенциала — радиальные лучи. Такой характер имеет магнитное поле линейного провода с током, проходящего перпендикулярно к плоскости $x0y$ через начало координат. Постоянная K определяется из условия, что при обходе вокруг тока i в положительном направлении угол θ изменяется на 2π, а магнитный потенциал получает приращение, равное $\Delta U_м = -i$. Стало быть, $i = -K\,2\pi$, и $K = -i/(2\pi)$. Окончательно получаем выражения для $V_м$ и $U_м$:

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}\ln r + C_1; \quad U_м = -\frac{i}{2\pi}\theta + C_2.$$

Чтобы интервал между двумя линиями равного потенциала соответствовал определенному приращению $\Delta U_м$ потенциала, эти линии должны отстоять друг от друга на равные углы $\Delta\theta$.

Для того чтобы линии напряженности поля делили поле на трубки равного потока, необходимо соблюсти для двух соседних, ν-й и $(\nu + 1)$-й, линий условие

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}(\ln r_{\nu+1} - \ln r_\nu) = -\frac{i}{2\pi}\ln\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \mathrm{const},$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = N = \mathrm{const}.$$

Следовательно, радиусы линий напряженности поля должны возрастать в геометрической прогрессии, знаменатель которой можно выбрать произвольно.

На рис. 27.4 изображено магнитное поле уединенного провода, причем принято $N = 1{,}5$ и $\Delta\theta = \pi/4$.

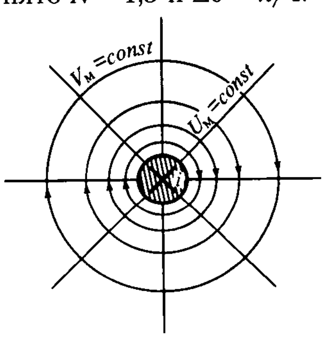

Рис. 27.4

В том случае, когда имеется n линейных проводов с токами, можно воспользоваться принципом наложения и находить комплексный потенциал из выражения

$$\zeta = V_м + jU_м = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n} i_k \ln(z - z_k) + C,$$

где z_k определяет точку, через которую проходит провод с током i_k.

Сравнивая полученные выражения для потенциала и функции потока магнитного поля линейных проводов с токами с соответствующими выражениями для потенциала и функции потока электрического поля линейных заряженных проводов (см. § 24.10) и сопоставляя картину магнитного поля на рис. 27.4 с картиной электрического поля на рис. 24.10, замечаем их соответствие с той лишь разницей, что U и V поменялись местами. Отсюда следует замечательный вывод:

Картина магнитного поля линейных токов совпадает с картиной электрического поля линейных зарядов, если токи и заряды распределены в пространстве одинаково. Различие между этими картинами заключается лишь в том, что на месте линий напряженности электрического поля располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала располагаются линии напряженности магнитного поля.

Поэтому достаточно построить только картину одного поля, электрического или магнитного, второе же получается на основе только что высказанного положения, которое можно назвать принципом соответствия плоскопараллельных электрического и магнитного полей.

27.9. Прямолинейный провод с током во внешнем однородном поле

Функция $\zeta = Dz + C$ определяет собой однородное магнитное поле. Действительно, имеем

$$\zeta = V_{м} + jU_{м} = Dx + jDy + C_1 + jC_2.$$

Линии напряженности поля суть прямые, параллельные оси $0y$. Они выражаются уравнением

$$V_{м} = Dx + C_1 = \text{const}$$

или

$$x = \text{const}.$$

Вектор напряженности поля направлен параллельно оси $0y$. Напряженность поля равна

$$H_y = -\frac{\partial V_{м}}{\partial x} = -D = -H_0.$$

На основании принципа наложения можем утверждать, что функция

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi}\ln z + H_0 z + C$$

определяет собой поле прямолинейного провода с током i во внешнем однородном поле, напряженность которого $H_y = -H_0$. Так как

$$\ln z = \ln r + j\theta = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + j\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x},$$

то уравнение линий напряженности поля может быть написано в виде

$$V_{м} = -\frac{i}{2\pi}\ln(x^2 + y^2) + H_0 x + C_1 = \text{const},$$

а уравнение линий равного потенциала может быть представлено в виде

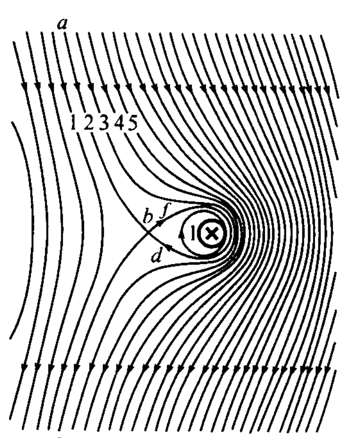

Рис. 27.5

$$U_м = -\frac{i}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + H_0 y + C_2 = \text{const}.$$

Такое поле изображено на рис. 27.5. В точке b напряженность поля равна нулю. Линию напряженности поля, проходящую через эту точку и помеченную цифрой 2, можно рассматривать как одну линию $abfdbc$. В этом случае она подобна линиям 3, 4 и 5, расположенным вправо от провода с током. Ее можно рассматривать и как две линии: линию abc и замкнутую линию $bfdb$. В таком случае она подобна двум линиям, отмеченным цифрой 1, одна из которых проходит слева от провода, а другая охватывает провод.

27.10. Поле проводов, имеющих конечное сечение произвольной формы

При исследовании магнитного поля вблизи массивных проводов, имеющих сечение сложной формы, эти провода уже нельзя рассматривать как линейные. Разобьем провод на бесконечно тонкие параллельные нити. Координаты центра сечения нити в плоскости $x0y$ обозначим через x' и y' (рис. 27.6). Поверхность сечения нити равна $ds = dx'\,dy'$. Каждая такая нить является линейным проводом с током $di = J\,ds$, где J — плотность тока, и по отношению к ней справедливы полученные выше выражения для функции потока и потенциала. Функция потока и потенциал, определяемые в точке $M(x, y)$ током i, протекающим во всем проводе, получаются суммированием функций потока и потенциалов, определяемых в этой точке токами, протекающими в отдельных нитях. Следовательно, выражения для величин $V_м$ и $U_м$ в точке $M(x, y)$ должны быть получены интегрированием по сечению s провода выражений для функции потока и потенциала, определяемых в точке $M(x, y)$ токами в нитях. Таким образом, можно написать

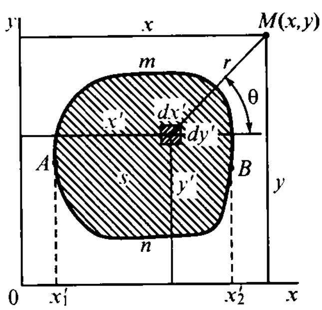

Рис. 27.6

$$V_м = -\int\limits_s \frac{J}{2\pi}\ln r\,ds + C_1;\quad U_м = -\int\limits_s \frac{J}{2\pi}\theta\,ds + C_2,$$

где r — расстояние от центра сечения нити тока до точки $M(x, y)$ и θ — угол, составляемый осью $0x$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$.

Формулой для $U_м$ можно пользоваться лишь при рассмотрении поля вне провода с током, так как понятие скалярного потенциала только здесь имеет смысл. Формула же для $V_м$ пригодна при рассмотрении поля как вне провода с током, так и внутри него.

Полученное общее выражение функции потока в случае $J = \text{const}$ может быть написано в виде

$$V_м = -\frac{Js}{2\pi}\frac{1}{s}\int\limits_s \ln r\,ds + C_1 = -\frac{i}{2\pi}\frac{1}{s}\int\limits_s \ln r\,ds + C_1,$$

где s — поверхность сечения провода. Величину $\frac{1}{s}\int\limits_s \ln r\,ds$, входящую в это выражение, обозначают следующим образом:

$$\frac{1}{s}\int\limits_s \ln r\,ds = \ln g.$$

Здесь r — расстояние от точки M до элемента ds поверхности. Величину g называют с р е д н и м г е о м е т р и ч е с к и м р а с с т о я н и е м от точки M до поверхности s. Поясним этот термин. Разобьем площадь s на n равных частей Δs (рис. 27.7) так, что $s = n\,\Delta s$. Среднее геометрическое всех n расстояний от точки M до центров всех площадок Δs равно $g = \sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}$ или

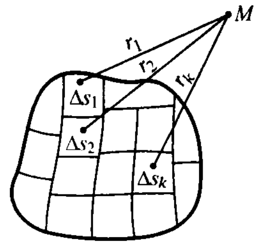

Рис. 27.7

$$\ln g = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln r_k = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n}\ln r_k \Delta s.$$

Увеличивая число площадок, получаем в пределе при $n \to \infty$

$$\ln g = \frac{1}{s}\int\limits_s \ln r\,ds.$$

Таким образом, имеем

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}\ln g + C_1.$$

Ясно, что среднее геометрическое расстояние от точки до плоской поверхности зависит только от формы контура, ограничивающего эту поверхность, и от положения точки по отношению к этой поверхности.

27.11. Поле проводов кругового сечения

Поле вне провода кругового сечения такое же, как если бы весь ток i проходил по оси провода. Поэтому вне провода, согласно изложенному в § 27.8, имеем

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}\ln r_0 + C_1,$$

где r_0 — расстояние от точки M, в которой определяется $V_м$, до центра сечения.

Найдем выражение для функции потока внутри провода. Напряженность поля на расстоянии r_0 от оси провода определяется на основании закона полного тока и соображений симметрии:

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H 2\pi r_0 = J\pi r_0^2 = i\frac{r_0^2}{R^2},$$

где R — радиус сечения провода ($r_0 < R$). Имеем

$$H = i\frac{r_0}{2\pi R^2}.$$

Поток вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь площадку, имеющую длину в направлении оси провода, равную единице, и ширину dr_0, равен $H\,dr_0$. Следовательно,

$$dV_м = -H\,dr_0 = -\frac{ir_0}{2\pi R^2}dr_0.$$

Знак минус необходимо поставить, так как $V_м$ и r_0 возрастают при $i > 0$ в противоположных направлениях.

Интегрируя, находим

$$V_м = -i\frac{r_0^2}{4\pi R^2} + C_1.$$

Подразделяя поле на трубки равного потока $\Delta V_м$, получаем

$$\Delta V_м = -\frac{i}{4\pi R^2}(r_{0,\nu+1}^2 - r_{0,\nu}^2) = \text{const}$$

или

$$r_{0,\nu+1}^2 = r_{0,\nu}^2 + K.$$

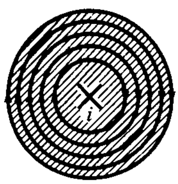

Рис. 27.8

Так как внутренний радиус внутренней трубки равен нулю, то имеем связь между радиусами линий магнитной индукции:

$$r_{0,1}^2 = K;\quad r_{0,2}^2 = r_{0,1}^2 + K = 2K;\ \ldots;\quad r_{0,\nu}^2 = \nu K.$$

На рис. 27.8 изображено поле внутри провода, причем поток подразделен на пять трубок равного потока.

27.12. Поле двухпроводной линии передачи

Магнитное поле нескольких постоянных токов, протекающих в прямолинейных проводах, имеющих круговые сечения любых размеров, вне проводов такое же, как если бы эти токи протекали по линейным проводам, совмещенным с осями действительных проводов. В самом деле, постоянное магнитное поле соседних проводов не индуцирует в теле данного провода электродвижущих сил. Поэтому распределение тока в теле каждого провода остается таким же, как и в том случае, когда этот провод уединен. Так как магнитное поле тока, протекающего в уединенном проводе кругового сечения, вне провода такое же, как если бы весь ток был сосредоточен на оси провода, то и при любом числе проводов кругового сечения при рассмотрении поля вне проводов можно их заменить линейными проводами, совмещенными с геометрическими осями действительных проводов. Необходимо подчеркнуть, что это правило справедливо только по отношению к пространству вне проводов, только при постоянном токе и только в том случае, если магнитная проницаемость материала проводов равна магнитной проницаемости окружающей среды, например для медных или алюминиевых проводов в воздухе.

Такое правило неверно по отношению к электрическому полю нескольких массивных проводов кругового сечения, так как близость соседних проводов вызывает перераспределение заряда на поверхности данного провода.

Для построения картины магнитного поля токов, протекающих в двух линейных проводах, образующих двухпроводную линию передачи, воспользуемся ранее рассчитанной картиной электрического поля двух заряженных линейных проводов (см. рис. 24.14), заменив в этой картине на основании принципа соответствия (см. § 27.8) линии напряженности электрического поля линиями равного магнитного потенциала и линии равного электрического потенциала — линиями напряженности магнитного поля. Выражения для функции потока и для потенциала имеют вид

$$V_м = -\frac{1}{2\pi}(i_1 \ln r_1 + i_2 \ln r_2) + C_1 = \frac{i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_1;$$

$$U_м = -\frac{1}{2\pi}(i_1\theta_1 + i_2\theta_2) + C_2 = \frac{i}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + C_2,$$

так как

$$i_1 = -i_2 = i.$$

Линии напряженности поля суть окружности с центрами на прямой, пересекающейся с осями проводов. Координаты центров и радиусы этих окружностей определяются из выражений, полученных в § 24.12 при расчете электрического поля. Линиями равного магнитного потенциала являются дуги окружностей, проходящих через оси обоих проводов. На рис. 27.9 изображена картина магнитного поля двухпроводной линии передачи.

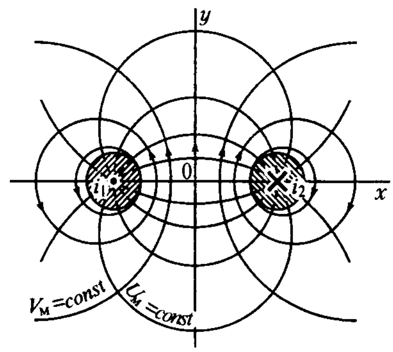

Рис. 27.9

В реальных условиях провода имеют сечения конечных размеров. При этом вне проводов поле такое же, как если бы токи были сосредоточены на геометрических осях проводов. В этом отношении магнитное поле отличается от электрического, так как электрическое поле около проводов круглого сечения оказывается таким же, как если бы заряды были сосредоточены на электрических осях проводов, не совпадающих с их геометрическими осями. Внутри проводов магнитные линии представляют собой сложные кривые. Так, функция потока внутри прямого провода имеет выражение

$$V_м = -\frac{ir_1^2}{4\pi R^2} + \frac{i}{2\pi}\ln r_2 + C_1$$

и линии $V_м$ = const имеют сложную форму.

27.13. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями

Если линии магнитной индукции пересекают поверхность раздела двух участков магнитной цепи, имеющих различные магнитные проницаемости, под некоторым углом к нормали к этой поверхности, то на поверхности раздела линии магнитной индукции изменяют свое направление.

Найдем общие условия, которым подчиняются составляющие векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля на границе двух сред с раз-

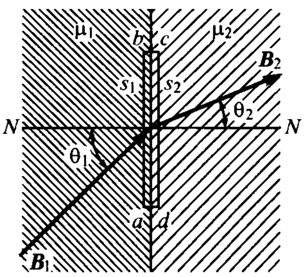

Рис. 27.10

личными абсолютными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Обе среды будем предполагать однородными и изотропными. Пусть θ_1 и θ_2 — углы между направлениями линий магнитной индукции и направлением нормали к поверхности раздела в первой и второй среде (рис. 27.10).

Сопоставление уравнений $\oint\limits_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint\limits_s \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ с уравнениями $\oint\limits_l \boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint\limits_s \boldsymbol{Y}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X}$ (см. § 23.8) позволяет принять $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$, $a_1 = \mu_1$, $a_2 = \mu_2$ и записать искомые соотношения $H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$, $B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$, $\dfrac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$, выражающие условия непрерывности соответствующих составляющих векторов $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$, а также условия преломления линий магнитной индукции на поверхности сред с различными магнитными проницаемостями.

Большое практическое значение имеет вопрос о характере магнитного поля в воздухе около поверхностей стальных частей машин, трансформаторов, электромагнитов и других электротехнических устройств. Магнитные проницаемости ферромагнитной среды и воздуха сильно разнятся между собой. Для воздуха практически $\mu_2 = \mu_0$. Пусть для ферромагнитной среды $\mu_1 = 1000\,\mu_0$. В таком случае имеем $\operatorname{tg}\theta_1 = 1000 \operatorname{tg}\theta_2$. Если линии магнитной индукции внутри ферромагнитной среды (рис. 27.11) составляют с нормалью угол $\theta_1 = 89°$, то соответствующий угол в воздухе оказывается равным $\theta_2 \approx 3°20'$. Поэтому во всех случаях, когда магнитное поле создается токами, протекающими по проводникам, расположенным в воздухе, практически можно принять $\theta_2 = 0$, т. е. считать, что линии магнитной индукции в воздухе нормальны к поверхности тел из ферромагнитных материалов.

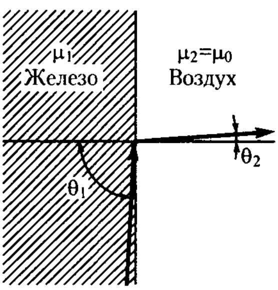

Рис. 27.11

27.14. Поле токов вблизи плоских поверхностей ферромагнитных тел. Метод зеркальных изображений

Пусть около бесконечной плоскости, ограничивающей ферромагнитную среду, для которой примем $\mu = \infty$, расположен в воздухе параллельно плоскости провод с током i (рис. 27.12). Поверхность ферромагнитной среды является поверхностью равного магнитного потенциала, так как линии напряженности поля в воздухе к ней перпендикулярны.

Удалим мысленно ферромагнитную среду, заменив ее током i', являющимся зеркальным изображением в поверхности раздела действительного тока i. Ток i' примем равным току i и имеющим то же направление.

Средняя плоскость между действительным током и его зеркальным изображением, совпадающая с поверхностью раздела в действительной задаче, является плоскостью равного магнитного потенциала. Это вытекает хотя бы из того, что линии магнитной индукции, охватывающие оба тока, должны расположиться симметрично относительно этой плоскости, что возможно, только если они ее пересекают под прямым углом.

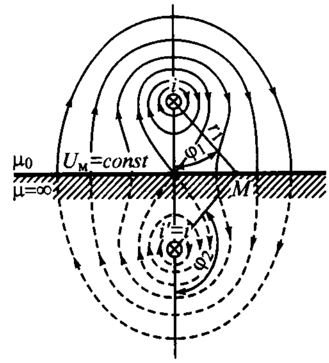

Рис. 27.12

Итак, после замены ферромагнитной среды током i' условия на граничной плоскости не изменились. Остался без изменения и ток i в области действительного поля. Поэтому приходим к следующему весьма существенному выводу: *поле прямолинейного тока i, проходящего в воздухе параллельно плоской поверхности массивного тела из ферромагнитного материала, совпадает в воздухе с полем, которое образуется двумя токами — действительным током i и его зеркальным изображением $i' = i$ в поверхности тела, в предположении, что ферромагнитная среда удалена.*

Основанный на этом положении метод расчета поля называют методом зеркальных изображений. С аналогичным методом мы ознакомились в главе о расчете электростатического поля. Однако электрические заряды должны быть отражены в поверхности проводящей среды с изменением знака заряда, ток же отражается в поверхности ферромагнитной среды без изменения направления.

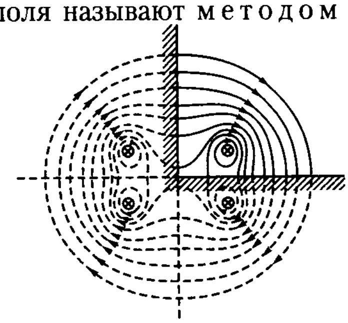
Рис. 27.13

Метод зеркальных изображений, очевидно, может быть распространен на любое число проводников с токами, причем проводники могут иметь сечения любой формы. Этот метод, так же как и для электростатического поля, может быть использован, когда две поверхности, ограничивающие ферромагнитную среду, сходятся под углом $\alpha = \pi/n$, где n — целое число, причем угол α отсчитывается в воздухе. Поле при $\alpha = \pi/2$ показано на рис. 27.13.

27.15. Графический метод построения картины поля

В сложных случаях аналитический расчет поля оказывается невозможным и приходится прибегать к приближенным графическим методам построения картины поля. Такой метод весьма полезен при построении картины поля около стальных полюсов электрических машин и аппаратов. На помощь нам при этом приходит то обстоятельство, что линии магнитной индукции в воздухе около полюсов нормальны к их поверхностям, и, следовательно, поверхности полюсов можно считать поверхностями равного магнитного потенциала. Такое условие верно в том случае, когда поле создается токами, проходящими по проводникам и обмоткам, расположенным в воздухе, что обычно и имеет место. Установим сначала метод построения картины поля в области, не занятой проводниками с токами, создающими исследуемое поле, т. е. около тех частей полюсов, которые выступают за пределы обмоток с током, наложенных на сердечники полюсов. Если, помимо того, в данной области пространства поле приближенно можно считать плоскопараллельным, то, очевидно, следует руководствоваться правилами, аналогичными тем, которые были установлены в § 24.15 для построения электрического поля, а именно:

1) линии напряженности поля и линии равного магнитного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) поверхности ферромагнитных сред следует считать поверхностями равного магнитного потенциала и линии напряженности поля в воздухе следует проводить перпендикулярно к ним;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Обозначим средние размеры ячейки сетки в направлении линии напряженности поля через Δn и в направлении линии равного магнитного потенциала — через Δa. Тогда последнее правило можно выразить в форме

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k = \text{const}.$$

Путем ряда последовательных приближений удается построить картину поля, удовлетворяющую всем указанным требованиям.

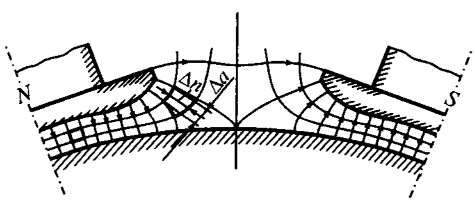

Рис. 27.14

На рис. 27.14 изображена построенная таким способом картина поля около полюсов электрической машины.

Если построена картина поля, то из нее может быть найдено магнитное сопротивление $R_м$ или магнитная проводимость $\Lambda = 1/R_м = \Phi/F$ воздушного промежутка между полюсом и якорем, причем Φ — магнитный поток в рассматриваемом промежутке и F — м. д. с. на длине промежутка. Если m_1 — число трубок магнитной индукции, то

$$\Phi = m_1 \Delta\Phi = m_1 l \mu_0 H \Delta a,$$

где $\Delta\Phi$ — поток в одной трубке и l — длина в направлении оси $0z$ (перпендикулярном плоскости рисунка). Если m_2 — число интервалов между соседними линиями равного потенциала, то $F = m_2 \Delta U_м = m_2 H \Delta n$, где $\Delta U_м$ — изменение потенциала на протяжении одного интервала.

Таким образом,

$$\Lambda = \mu_0 l \frac{\Delta a}{\Delta n} \frac{m_1}{m_2} = l\lambda.$$

Величина λ представляет собой магнитную проводимость на единицу длины в направлении оси $0z$. Она зависит исключительно от конфигурации рассматриваемого участка магнитной цепи.

Приведенные правила построения картины поля справедливы только в области, не занятой электрическим током. В области, где расположены проводники или катушки с током, эти правила неприменимы, так как здесь теряет смысл понятие скалярного магнитного потенциала. Для построения приближенной картины поля и в тех местах, где около сердечника полюса расположены катушки с током, поступают следующим образом. Сжимают сечение катушки в направлении к поверхности сердечника до нулевых размеров. Иначе говоря, предполагают, что ток течет по бесконечно тонкому слою, прилегающему к поверхности сердечника. При таком предположении во всем пространстве около полюса токов нет, и понятие скалярного магнитного потенциала может быть использовано. При этом поле всюду должно удовлетворять первому и третьему условиям. Однако второе условие — перпендикулярность линий напряженности поля к поверхности ферромагнитной среды — сохраняется только там, где на поверхности ферромагнитной среды нет токов. В местах, где имеются распределенные поверхностные токи, соответствующие токам в катушках, это условие не соблюдается. Рассмотрим плоскую поверхность ферромагнитной среды, по которой протекает в тонком слое ток (рис. 27.15). Пусть ток протекает в направлении, нормальном к плоскости рисунка. Составим линейный интеграл вектора $\boldsymbol{H}$ по контуру $abcda$. Если для ферромагнитной среды принять $\mu = \infty$, то будем иметь внутри ферромагнитной среды $H = 0$. Пусть ad и bc весьма малы по сравнению с ab. Тогда

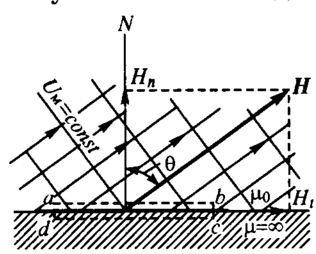

Рис. 27.15

$$\oint\limits_{abcda} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H_t ab,$$

где H_t — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ в воздухе около поверхности ферромагнитной среды. Но этот интеграл равен току i, проходящему сквозь контур $abcda$. Поэтому

$$H_t = \frac{i}{ab},$$

т. е. *касательная составляющая напряженности поля в воздухе отлична от нуля и равна линейной плотности тока.* Следовательно, линии напряженности поля около таких поверхностей не перпендикулярны к ним. Направление линий остается неизвестным, так как неизвестна нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$.

При построении поля поступают следующим образом. Строят сначала поле около тех частей полюсов, где нет токов, пользуясь вышеизложенными правилами. Поверхности полюсов в этих местах считают равнопотенциальными. Остальные линии равного потенциала этого поля подводят к соответствующим точкам контура полюса в местах, где протекают поверхностные токи. Положение этих точек зависит от распределения тока в поверхностном слое. Разность по-

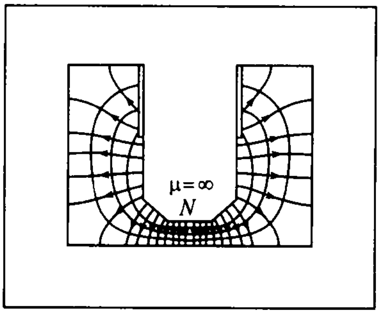

Рис. 27.16

тенциалов двух соседних линий равна току, протекающему между соответствующими двумя точками, к которым необходимо подвести эти линии. Линии равного потенциала, так же как и линии напряженности поля, в местах, где протекают токи, наклонны к контуру полюса (см. рис. 27.15). Затем строят все поле, стремясь к тому, чтобы всюду удовлетворялись первое и третье требования. Когда это удается, поле построено правильно. На рис. 27.16 приведен пример построенного таким путем поля около полюса, обтекаемого током.

Если поле создается несколькими токами и при этом легко может быть построено поле каждого тока в отдельности, то для построения результирующего поля можно применить графический метод наложения полей, предложенный Максвеллом.

Пусть имеются два параллельных провода круглого сечения с токами i_1 и i_2 в однородной среде. Картины поля каждого тока в отдельности строятся весьма просто (см. § 27.8).

Построим на одном рисунке картину линий напряженности поля тока i_1 и картину линий напряженности поля тока i_2 с такой густотой, чтобы имело место равенство $|\Delta V_{м1}| = |\Delta V_{м2}|$. При соблюдении этого условия получающаяся в итоге наложения двух полей сетка позволяет легко построить картину линий напряженности результирующего поля обоих токов, i_1 и i_2. Действительно, уравнение линии напряженности результирующего поля имеет вид $V_{м1} + V_{м2} = \text{const}$ и, следовательно, для любых двух точек, лежащих на этой линии, имеем $\Delta V_{м1} + \Delta V_{м2} = 0$, т. е. $\Delta V_{м1} = -\Delta V_{м2}$.

Если при построении отдельных полей соблюдено условие $|\Delta V_{м1}| = |\Delta V_{м2}|$, то ряд точек пересечения линий напряженности отдельных полей будет принадлежать одной и той же линии напряженности результирующего поля. Для того чтобы перейти от одной такой точки к другой, необходимо, переходя в одном поле на соседнюю линию, переходить и в другом поле также на соседнюю линию. При этом, если токи i_1 и i_2 одинаково направлены, то, удаляясь от одного тока, следует приближаться к другому; если же токи i_1 и i_2 имеют разные направления, то следует одновременно удаляться от обоих токов или одновременно приближаться к ним. Практически это означает, что линия напряженности результирующего поля переходит через ячейку сетки, получающейся от наложения отдельных полей, по криволинейной диагонали этой ячейки, причем следует избрать ту или иную диагональ в зависимости от знаков токов. На рис. 27.17, *а* (верхняя часть рисунка) построена картина линий напряженности поля при $i_2 = -2i_1$, а на рис. 27.18, *а* — при $i_2 = 2i_1$. Аналогичный прием может быть использован для построения картины линий равного магнитного потенциала результирующего поля, которые описываются уравнением $U_{м1} + U_{м2} = \text{const}$. На рис. 27.17, *б* (нижняя часть рисунка) осуществлено такое построение для случая $i_2 = -2i_1$, а на рис. 27.18, *б* — для случая $i_2 = 2i_1$.

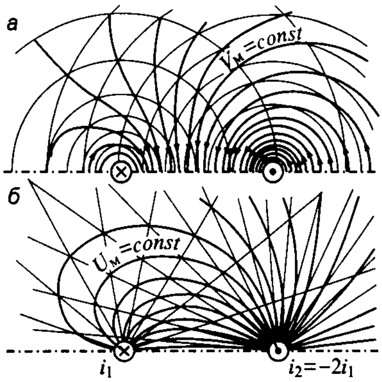

Рис. 27.17

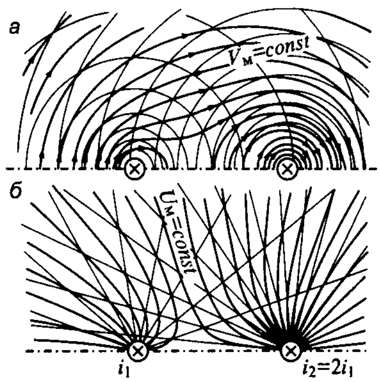

Рис. 27.18

Если наложим картины линий напряженности на картины линий равного магнитного потенциала результирующего поля для соответствующих случаев, то получим ортогональную сетку.

Пользуясь принципом соответствия плоскопараллельных электрического и магнитного полей (см. § 27.8), можем утверждать, что для двух заряженных линейных проводов рис. 27.17, *а* и 27.18, *а* дают картины линий равного электрического потенциала при $\tau_2 = -2\tau_1$ и при $\tau_2 = 2\tau_1$ и соответственно рис. 27.17, *б* и 27.18, *б* дают картины линий напряженности электрического поля. Этот метод может быть использован и в более сложных случаях. Например, если поле в электромагните создается токами в двух катушках и построены поля, создаваемые отдельно током в одной и током в другой катушке, то указанным методом легко построить результирующее поле как при $i_2/i_1 > 0$, так и при $i_2/i_1 < 0$.

27.16. Пространственная задача. Поле кругового контура с током

Расчет магнитных полей токов, протекающих по контурам, имеющим во всех направлениях конечные размеры, представляет собой весьма сложную задачу. При этом все величины, характеризующие поле, являются функциями трех координат. Общий метод решения заключается для однородной среды в нахождении по заданному распределению токов векторного потенциала по формулам, указанным в § 27.2. Вектор магнитной индукции определяется из соотношения $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$.

Простейший пример пространственной задачи — поле токов, протекающих по круговым контурам, лежащим в параллельных плоскостях и имеющим центры на общей оси. Достаточно рассмотреть картину такого поля в одной плоскости, проходящей через эту ось, так как все поле получается вращением найденной картины вокруг оси. Сюда относится важный случай — магнитное поле катушек с током, состоящих из круговых витков.

Определим поле одного кругового контура с током i (рис. 27.19). Естественно рассматривать поле в цилиндрических координатах z, ρ, α. Начало координат поместим в центре контура с током. Ось $0z$ направим перпендикулярно плоскости контура.

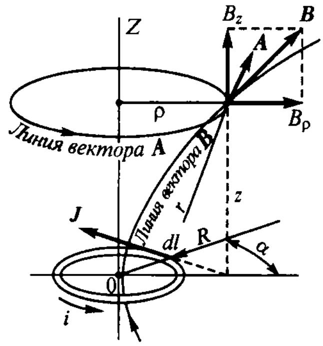

Рис. 27.19

Пусть поперечные размеры сечения s проводника весьма малы по сравнению с радиусом R кольца. Рассматривая поле на расстояниях от проводника, значительно превышающих поперечные размеры его сечения, можем вычислять векторный потенциал по формуле (см. § 27.2)

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i\,dl}{r}.$$

Интегрирование производится вдоль всего контура с током. Вследствие симметрии относительно оси OZ линии векторного потенциала должны быть окружностями, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости контура тока, и имеющими центры на оси OZ. Следовательно, $\boldsymbol{A}$ имеет единственную составляющую A_α. Она равна

$$A = A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i\cos\alpha\,dl}{r}.$$

Так как

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha}, \quad dl = R\,d\alpha,$$

то

$$A = \frac{\mu i R}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha}}.$$

Приведем этот интеграл к эллиптическим интегралам, для которых имеются таблицы. Примем $\alpha = \pi - 2\beta$, $d\alpha = 2d\beta$,

$$\frac{4R\rho}{z^2 + (R+\rho)^2} = k^2.$$

Число k лежит в пределах $0 \le k \le 1$. Значение $k = 1$ получается при $z = 0$ и $\rho = R$, т. е. на оси контура с током, который предполагаем весьма тонким. Здесь A обращается в бесконечность, но, как было отмечено, принятая упрощенная формула для A может быть использована только на достаточном расстоянии от проводника. Имеем $\cos\alpha = -\cos\beta = 2\sin^2\beta - 1$,

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 4R\rho\sin^2\beta + 2R\rho} = \frac{2\sqrt{R\rho}}{k}\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}.$$

Следовательно,

$$A = -\frac{\mu i}{8\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\,k\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2(2\sin^2\beta - 1)\,d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}$$

или

$$A = \frac{\mu i}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\,k\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}\,d\beta = \frac{\mu i}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\,f(k).$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} - 2\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\right),$$

можем написать

$$f(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right)K - \frac{2}{k}E,$$

где

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

и

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\, d\beta$$

представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Они являются функциям модуля k. На рис. 27.20 приведены кривые, выражающие эти функции, и кривые, дающие величину $f(k)$, входящую в выражение для векторного потенциала.

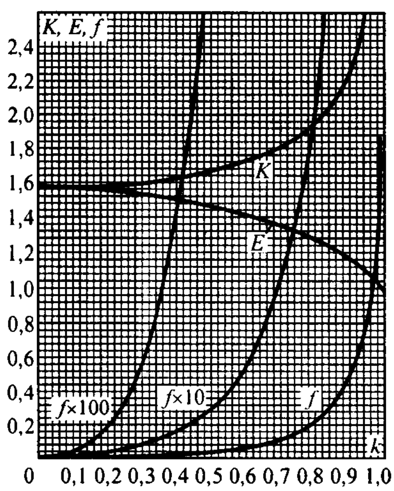

Рис. 27.20

Линии магнитной индукции исследуемого поля лежат в плоскостях, проходящих через ось OZ. Вектор магнитной индукции имеет только две составляющие, B_z и B_ρ, которые находятся из выражений:

$$B_z = \mathrm{rot}_z \boldsymbol{A};\quad B_\rho = \mathrm{rot}_\rho \boldsymbol{A}.$$

Для вычисления этих составляющих необходимо использовать выражения составляющих вектора rot $\boldsymbol{A}$ через составляющие вектора $\boldsymbol{A}$ в цилиндрических координатах.

27.17. Выражение скалярного потенциала через телесный угол, под которым виден контур тока

Покажем, что скалярный магнитный потенциал $U_м$ в некоторой точке M поля замкнутого тока i пропорционален телесному углу ω, под которым видна из этой точки поверхность, ограниченная контуром тока (рис. 27.21). При перемещении из точки M в точку M' на расстояние dl' потенциал получает приращение

$$dU_м = -H\cos\alpha\, dl' = -\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}'.$$

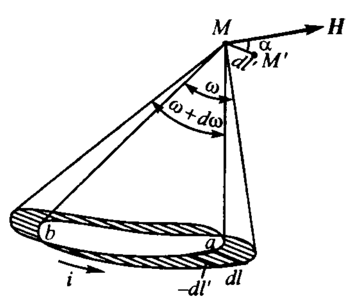

Рис. 27.21

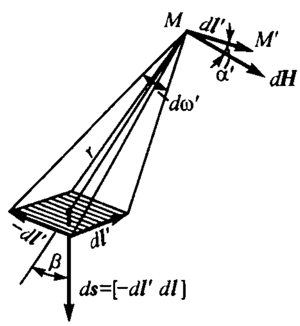

Рис. 27.22

Точно такое же приращение получил бы потенциал в точке M, если весь контур переместить параллельно самому себе на расстояние $-dl'$ в противоположном направлении.

Выделим элемент длины dl контура тока и рассмотрим приращение потенциала $dU'_м$ в точке M, вызванное перемещением этого элемента по пути $-dl'$ (рис. 27.22). Имеем

$$dU'_м = -d\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}',$$

где $d\boldsymbol{H}$ — напряженность поля в точке M от тока i в элементе dl. Согласно закону Био–Савара–Лапласа,

$$d\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{i}{r^2}\left[d\boldsymbol{l}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right].$$

Следовательно,

$$dU'_м = -\frac{1}{4\pi}\frac{i}{r^2}\,d\boldsymbol{l}'\left[d\boldsymbol{l}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] = \frac{i}{4\pi r^2}[-d\boldsymbol{l}'\ d\boldsymbol{l}]\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Но $[-d\boldsymbol{l}'\ d\boldsymbol{l}] = d\boldsymbol{s}$ есть вектор, нормальный к площадке, описываемой отрезком dl при перемещении его на пути $-dl'$, и равный по величине этой площадке. Следовательно, $d\boldsymbol{s}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \cos\beta\, ds$ есть проекция этой площадки на сферу радиуса r с центром в точке M и $\frac{1}{r^2}\left(d\boldsymbol{s}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = d\omega'$ есть телесный угол, под которым видна площадка из точки M. Итак,

$$dU'_м = \frac{i}{4\pi}d\omega'.$$

Чтобы получить изменение $dU_м$ потенциала, вызванного в точке M током во всем замкнутом контуре (см. рис. 27.21), необходимо просуммировать величины $dU'_м$ по всем элементам dl контура. При этом, суммируя в правой части величины $d\omega'$, получим телесный угол $d\omega$, под которым видна из точки поверхность, описываемая всем контуром при перемещении его на пути $-dl'$. Очевидно, $d\omega$ есть приращение телесного угла ω, под которым видна из точки M поверхность, ограниченная контуром тока. Таким образом,

$$dU_м = \frac{i}{4\pi}d\omega \quad и \quad U_м = \frac{i}{4\pi}\omega + C.$$

Если принять $U_м = 0$ в бесконечно удаленных от контура тока точках, для которых $\omega = 0$, то будем иметь $C = 0$ и

$$U_м = \frac{i}{4\pi}\omega.$$

Телесный угол ω положителен, если из точки M ток в контуре кажется направленным против часовой стрелки (см. рис. 27.21).

27.18. Магнитное поле контура произвольной формы на большом расстоянии от контура

Обозначим через r расстояние точки M, в которой отыскивается потенциал $U_м$, от некоторой точки O внутри контура (рис. 27.23). Пусть r много больше линейных размеров контура. Пусть ON — направление от O к M, при котором при заданном r телесный угол ω получается наибольшим, равным ω_{max}. При всяком другом направлении, составляющем с этим направлением угол φ, при том же r будем иметь $\omega = \omega_{max} \cos\varphi$. Но $\omega_{max} = s/r^2$, где s — часть поверхности сферы радиуса r, вырезаемая центральным конусом с телесным углом ω_{max}. Таким образом, согласно выражению $U_м = \frac{i}{4\pi}\omega$, имеем

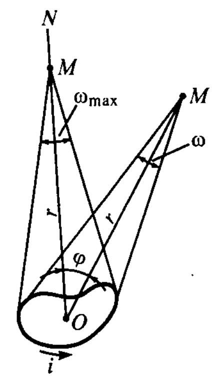

Рис. 27.23

$$U_м = \frac{is}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Для плоского контура при r, намного большем размеров контура, s есть площадь, ограниченная контуром, и ON — направление нормали к ней.

Так как произведение $is = m$ есть магнитный момент тока i в замкнутом контуре, то формулу для $U_м$ можно представить в виде

$$U_м = \frac{m\cos\varphi}{4\pi r^2}.$$

Составляющие напряженности поля на больших расстояниях от контура имеют выражения:

$$H_r = -\frac{\partial U_м}{\partial r} = \frac{2m\cos\varphi}{4\pi r^3};$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_м}{\partial \varphi} = \frac{m\sin\varphi}{4\pi r^3}.$$

Из изложенного вытекает следующее важное положение. На больших расстояниях от контура тока напряженность магнитного поля убывает обратно пропорционально кубу расстояния, и характер поля совершенно не зависит от формы контура тока. Напряженность поля полностью определяется магнитным моментом.

Весьма интересно отметить, что характер магнитного поля на больших расстояниях от контура тока такой же, как и характер электрического поля диполя на больших от него расстояниях. Это становится ясным, если сопоставить полученные в настоящем параграфе формулы с формулами в § 24.2 для поля электрического диполя.

27.19. Тело во внешнем магнитном поле. Аналогия с электростатической задачей

Задача о расчете магнитного поля при наличии во внешнем магнитном поле тела из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью μ аналогична рассмотренной в §§ 24.18 и 24.19 задаче о расчете электрического поля при наличии во внешнем электрическом поле тела из диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε.

Действительно, как уравнения поля, так и граничные условия аналогичны в обоих случаях.

Для магнитного поля имеем во всей интересующей нас области пространства rot $\boldsymbol{H} = 0$, так как в этой области отсутствуют макроскопические токи. Следовательно, уравнения магнитного поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0; \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

В соответствующей электростатической задаче в рассматриваемой области пространства div $\boldsymbol{D} = 0$, так как в этой области нет свободных зарядов. Поэтому уравнения электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0.$$

Заметим, что уравнения rot $\boldsymbol{H} = 0$ и rot $\boldsymbol{E} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} U_{\text{м}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U.$$

Граничными условиями на поверхности тела, внесенного во внешнее магнитное поле, являются равенство в обоих средах нормальных составляющих вектора магнитной индукции и касательных составляющих вектора напряженности поля:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

Для тела из диэлектрика, внесенного во внешнее электрическое поле, граничные условия имеют аналогичный вид:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{и} \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Таким образом, при исследовании поля тел во внешнем магнитном поле можем воспользоваться аналогичными задачами, решенными в электростатике, с заменой $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ на $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}$ на $\mu_0\boldsymbol{M}$ и ε на μ. Так как поляризованность вещества $P = dp/dV$, а намагниченность $M = dm/dV$, то в аналогичных задачах электрический момент соответствует умноженному на μ_0 магнитному моменту.

27.20. Шар и эллипсоид вращения во внешнем однородном магнитном поле

В § 24.19 был рассмотрен шар из диэлектрика, находящийся во внешнем электрическом поле. Было найдено, что шар поляризуется однородно.

Точно так же шар из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью μ, помещенный во внешнее однородное магнитное поле, поляризуется однородно. Пусть шар помещен в пустоте и $\mu > \mu_0$. Тогда вектор напряженности $\boldsymbol{H}$ поля, определяемого намагниченностью шара, оказывается внутри шара направленным против вектора напряженности $\boldsymbol{H}_0$ внешнего поля. В этом случае поле вектора $\boldsymbol{H}$ называется р а з м а г н и ч и в а ю щ и м п о л е м. Используя формулы, полученные в § 24.19, и произведя в них соответствующую замену, получим формулы для интересующего нас случая. Напряженность размагничивающего поля определяется формулой

$$H = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0.$$

Вне шара поле, вызванное намагниченностью шара, такое же, как поле тока в весьма малом замкнутом контуре, находящемся в центре шара, имеющего магнитный момент m, равный геометрической сумме магнитных моментов всех элементарных токов в объеме шара.

Пользуясь формулами, полученными в § 24.19, находим

$$\mu_0 m = 4\pi\mu_0 R^3 H = 4\pi R^3 \mu_0 \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0+2\mu_0}H_0,$$

где R — радиус шара.

Намагниченность M вещества шара равна магнитному моменту, отнесенному к единице объема шара. Следовательно,

$$\mu_0 M = \frac{\mu_0 m}{\frac{4\pi}{3}R^3} = 3\mu_0\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0+2\mu_0}H_0 = 3\mu_0 H.$$

Результирующая напряженность и результирующая магнитная индукция внутри шара равны:

$$H = H_0 - H = \frac{3\mu_0}{\mu_0+2\mu_0}H_0;$$

$$B = \frac{3\mu}{\mu_0+2\mu_0}\mu_0 H_0 = \frac{3\mu}{\mu_0+2\mu_0}B_0.$$

Чем больше μ, тем сильнее размагничивающее поле и тем слабее поле H, но тем сильнее поле B. В пределе при $\mu \to \infty$ имеем

$$H = H_0; \quad H = 0; \quad B = 3B_0.$$

Таким замечательным свойством намагничиваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид, частным случаем которого является шар. На рис. 27.24 для эллипсоида изображены внешнее однородное поле, поле вектора $\boldsymbol{H}$, определяемое намагниченностью эллипсоида и связанное с условным представлением о наведенных магнитных массах, результирующее поле вектора $\boldsymbol{H}$ и результирующее поле вектора $\boldsymbol{B}$.

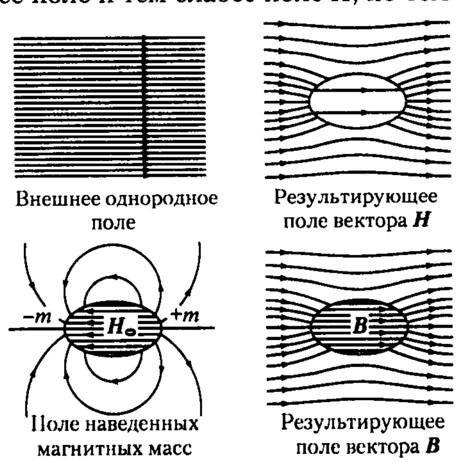

Рис. 27.24

27.21. Магнитное поле в неоднородной среде. Применение метода интегральных уравнений

Решение задачи расчета магнитного поля в неоднородной среде становится полностью аналогичным соответствующей задаче электростатики при введении в рассмотрение магнитных зарядов объемной и поверхностной плотностью $\rho_м$ и $\sigma_м$, эквивалентных создающим поле токам.

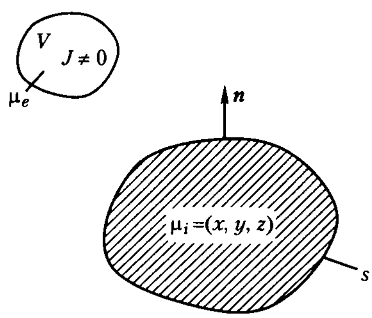

Рис. 27.25

Для расчета магнитного поля постоянного тока, протекающего в области V со средой, имеющей магнитную проницаемость μ_e, применим рассмотренный в § 24.20 метод интегральных уравнений. В части пространства, ограниченной замкнутой поверхностью s, магнитная проницаемость определяется функцией $\mu_i(x, y, z)$. Повторяя рассуждения, выполненные в § 24.20 при введении вторичных источников электростатического поля, и приводя среду к однородной с магнитной проницаемостью μ_e, получаем соотношения для плотности вторичных источников в виде (рис. 27.25)

$$\rho_м = -\frac{\mu_e}{\mu_i}\boldsymbol{H}_i \operatorname{grad} \mu_i, \quad \sigma_м = 2\mu_e\lambda H_n, \tag{*}$$

где H_n — нормальная к поверхности s составляющая напряженности магнитного поля, $\lambda = \dfrac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e}$.

При расчете поля в кусочно-однородной среде по аналогии с интегральным уравнением (***), полученным в § 24.20, находим интегральное уравнение относительно размещенных на поверхности s магнитных зарядов плотностью $\sigma_м$:

$$\sigma_м - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s \frac{\sigma_м \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} ds = 2\mu_e\lambda H_{0n}. \tag{**}$$

Свойства этого интегрального уравнения такие же, что и уравнения (***) § 24.20. При использовании скалярного магнитного потенциала и введении эквивалентных электрическим токам магнитных зарядов расчет входящей в правую часть уравнения (**) величины H_{0n} становится полностью аналогичным расчету величины E_{0n} в соответствующей задаче электростатики.

Правая часть уравнения (**) может быть выражена также и через создающие внешнее магнитное поле электрические токи, если для расчета напряженности магнитного поля применить закон Био—Саварра. Рассчитывая величину H_{0n}, целесообразно сопоставить затраты на вычисление интеграла $H_{0n} = -\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{4\pi\mu_e}\displaystyle\int \frac{\rho_м dV}{r}$ при замене токов магнитными зарядами и интеграла $H_{0n} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \frac{[\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{r}]_n}{r^3} dV$, если такая замена не выполняется.

Изложенный подход можно применить для расчета как трехмерных, так и двухмерных магнитных полей. В случае плоскопараллельного поля входящая под знак интеграла функция в уравнении (**) будет иной, так как составляющая напряженности магнитного поля, нормальная к контуру l сечения поверхности раздела сред плоскостью $x0y$, выражается формулой

$$H_n = \frac{1}{2\pi\dot{\mu}_e}\int_s \rho_{\text{мв}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds + \frac{1}{2\pi\mu_e}\oint_l \frac{\sigma_{\text{м}}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}dl,$$

где s — сечение плоскостью $x0y$ области с источниками внешнего поля, $\rho_{\text{мв}}$ — объемная плотность магнитных зарядов, определяющих внешнее поле.

Уравнение (**) можно теперь записать в виде

$$\sigma_{\text{м}} - \frac{\lambda}{\pi}\oint_l \frac{\sigma_{\text{м}}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}dl = \frac{\lambda}{\pi}\int_s \rho_{\text{мв}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds.$$

Как отмечалось, применение векторного магнитного потенциала для расчета двухмерных магнитных полей так же эффективно, как и скалярного магнитного потенциала при преобразовании вихревых полей к потенциальным. Поэтому для расчета плоскопараллельного магнитного поля постоянного тока в кусочно-однородной среде в качестве вторичных источников используем размещенные на поверхности раздела сред электрические токи плотностью j.

Пусть контур l разделяет среды с магнитными проницаемостями μ_i и μ_e (рис. 27.26).

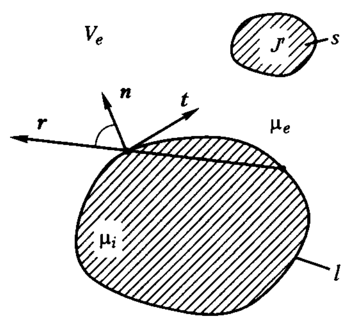

Рис. 27.26

Плотность j токов, расположенных на контуре сечения тела с магнитной проницаемостью μ_i, должна быть выбрана так, чтобы обеспечить при переходе к однородной среде с проницаемостью μ скачок касательной составляющей магнитной индукции $\frac{B_{te}}{B_{ti}} = \frac{\mu_e}{\mu_i}$. Размещение на контуре l в однородной среде с некоторой магнитной проницаемостью μ слоя тока плотностью j (см. рис. 27.26) вызывает скачок касательных составляющих напряженности магнитного поля $H_{ti} - H_{te} = j$ и магнитной индукции $B_{ti} - B_{te} = \mu j$. Обозначив через B_t касательную к контуру составляющую магнитной индукции в однородной среде, обусловленную всеми источниками за исключением расположенного в рассматриваемой точке, можем записать: $B_{te} = B_t - \frac{\mu j}{2}$, $B_{ti} = B_t + \frac{\mu j}{2}$. Подставляя эти выражения в соотношение $\frac{B_{te}}{B_{ti}} = \frac{\mu_e}{\mu_i}$, получаем после простых преобразований уравнение $j = \frac{2}{\mu}\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e}B_t = \frac{2}{\mu}\lambda B_t$, которое после подстановки величины

$$B_t = \frac{\partial A}{\partial n} = -\frac{\mu}{2\pi}\int_s J'\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds - \frac{\mu}{2\pi}\oint_l j\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}dl$$

приводит к интегральному уравнению

$$j+\frac{\lambda}{\pi}\oint_l j\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}dl=-\frac{\lambda}{\pi}\int_s J'\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds.$$

Здесь s— сечение проводов с током плотностью J', задающим внешнее магнитное поле.

Если электрический ток, создающий внешнее магнитное поле, протекает в среде с магнитной проницаемостью μ_i, то под входящей под знак интеграла плотностью тока следует понимать величину, равную $J'=\frac{\mu_i}{\mu}J$. В случаях, когда электрический ток протекает в среде с магнитной проницаемостью μ_e, имеем $J'=\frac{\mu_e}{\mu}J$.

Как и полученное выше уравнение (**), данное уравнение является интегральным уравнением относительно плотности вторичных источников и характеризуется аналогичными свойствами. Его решение может быть в некоторых случаях получено аналитически, однако в общем случае оно требует численного решения.

Найденное выше соотношение $j=(2/\mu)\lambda B_t$ можем использовать для расчета плоскопараллельного магнитного поля постоянного тока i, протекающего по прямолинейному проводу, расположенному в среде с магнитной проницаемостью μ_1 параллельно плоской поверхности раздела сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Повторяя рассуждения, приведенные в § 24.23, найдем значения токов

$$i_1=i\lambda=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i,\quad i_2=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i.$$

Подобно зеркальному изображению в электрическом поле, для расчета магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ_1 следует ввести зеркально изображенный ток i_1 и после замены μ_2 на μ_1 учесть токи i и i_1 (рис. 27.27, *а*). Для расчета поля в среде с магнитной проницаемостью μ_2 ток i заменяем на i_2, а магнитную проницаемость принимаем равной μ_2 во всем пространстве (рис. 27.27, *б*).

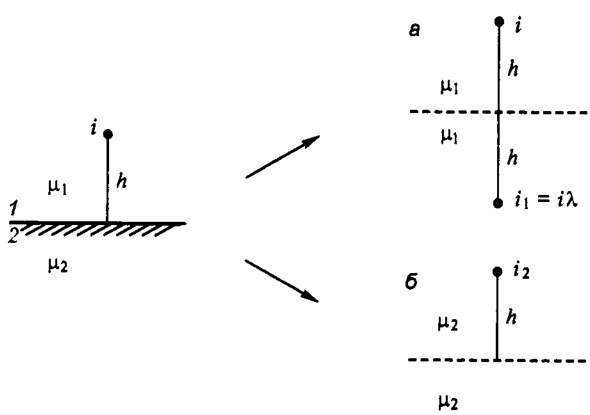

Рис. 27.27

27.22. Коэффициенты размагничивания

Для эллипсоидов как H , так и M пропорциональны напряженности H_0 внешнего поля. Стало быть, можно написать

$$H \ = NM.$$

Коэффициент пропорциональности N называют **к о э ф ф и ц и е н т о м р а з м а г н и ч и в а н и я**. От него зависит при данной намагниченности значение напряженности размагничивающего поля. Коэффициент размагничивания зависит только от формы намагничиваемого тела. Для шара получаем

$$N = \frac{H}{M} = \frac{1}{3}.$$

Расчет дает для эллипсоида вращения формулу

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})-1}{\lambda^2-1} = \frac{1-\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\arccos\lambda}{1-\lambda^2},$$

причем λ есть отношение оси вращения эллипсоида, которая предполагается направленной вдоль линии внешнего поля, к оси, ей перпендикулярной. Первым выражением для N удобно пользоваться при $\lambda > 1$, вторым — при $\lambda < 1$.

Для бесконечной, расположенной поперек поля пластины, которую можно рассматривать как сплющенный эллипсоид, находим $N = 1$, приняв $\lambda = 0$. Это — наивысшее возможное значение N. Для шара, полагая $\lambda = 1$ и раскрывая неопределенность, получаем $N = 1/3$. Для бесконечно длинного стержня, расположенного вдоль поля, полагая $\lambda = \infty$ и раскрывая неопределенность, получаем $N = 0$.

Свойство эллипсоидов однородно намагничиваться в однородном внешнем поле используется в магнитометрии. Для исследования магнитных свойств ферромагнитных материалов можно изготовить из этих материалов образцы, имеющие форму эллипсоида вращения или близкую к ней форму. Однородность намагничивания особенно важна именно при испытании ферромагнитных материалов, так как их магнитная проницаемость μ зависит от напряженности поля и только при однородном намагничивании значение μ во всем объеме образца будет одинаковым.

Ввести в рассмотрение коэффициент размагничивания, *зависящий только от формы тела*, строго говоря, возможно только для эллипсоидов и их частных случаев: шара, пластины, бесконечно длинного цилиндра с эллиптическим или круглым сечением. Однако для приближенных практических расчетов магнитного поля, которое образуется при внесении в однородное внешнее поле тел иной формы, например коротких цилиндров, все же вводят в расчет коэффициенты размагничивания таких тел. Такой расчет является только ориентировочным, так как тела, отличные по форме от эллипсоидов, намагничиваются неоднородно в однородном внешнем магнитном поле.

27.23. Магнитное экранирование

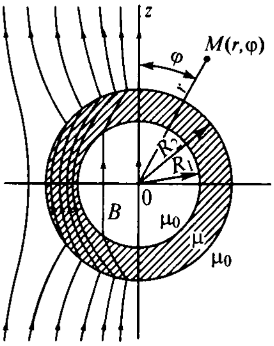

Рис. 27.28

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния посторонних магнитных полей их системы помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитного материала. Такие оболочки называют магнитными экранами. Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем.

Для экрана в форме полого шара с радиусами R_1 и R_2 (рис. 27.28) и с абсолютной магнитной проницаемостью стенок μ, помещенного во внешнее однородное поле с индукцией B_0, магнитная индукция B в полости экрана может быть рассчитана и оказывается равной

$$B = B_0 \frac{1}{1+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{R_1^3}{R_2^3}\right)\left(\dfrac{\mu_0}{\mu}+\dfrac{\mu}{\mu_0}-2\right)}.$$

Например, если $R_1 = 0{,}9R_2$ и $\mu = 500\mu_0$, то $B = 0{,}031B_0$, т. е. напряженность поля внутри экрана составляет 3 % от напряженности внешнего поля. Для ферромагнитного вещества $\mu \gg \mu_0$, и экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением, сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость.

Нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных тел, расположенных одно внутри другого.

27.24. Расчет магнитного поля в неоднородной среде методом конечных разностей

Численный расчет магнитного поля постоянных токов в неоднородной среде можно выполнить методом конечных разностей аналогично расчету электростатического поля. Аналогия решения уравнений Лапласа и Пуассона будет полной, если выполнить эквивалентную замену электрических токов магнитными зарядами плотностью $\rho_м$. Численный расчет трехмерного магнитного поля целесообразно выполнять, заменяя электрические токи магнитными зарядами, так как в этом случае вместо векторного уравнения можно перейти к решению скалярного уравнения для скалярного магнитного потенциала. Для формирования конечно-разностных уравнений воспользуемся соотношением

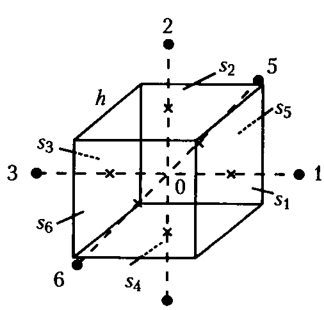

Рис. 27.29

$$\oint_s \mu \operatorname{grad} U\, d\boldsymbol{s} = \oint_s \mu \frac{\partial U}{\partial n} ds = -m \; (m \text{ — магнитный заряд}).$$

Разобьем рассматриваемый объем V на совокупность одинаковых кубов с длиной ребра h (рис. 27.29).

Разместим магнитный заряд m в центре 0 куба, представим интеграл $\oint\limits_s \mu \dfrac{\partial U}{\partial n} ds$ по поверхности s куба в виде суммы шести интегралов по поверхностям s_1, s_2, ..., s_6 и вычислим их приближенно:

$$\int\limits_{s_1} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_x U\, ds \cong (\mu_{1\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_1 - U_0}{h} = k_1(U_1 - U_0),$$

$$\int\limits_{s_2} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_y U\, ds \cong (\mu_{2\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_2 - U_0}{h} = k_2(U_2 - U_0),$$

$$\vdots$$

$$\int\limits_{s_6} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_z U\, ds \cong (\mu_{6\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_6 - U_0}{h} = k_6(U_6 - U_0).$$

Здесь величины $\mu_{0\text{ср}}$, $\mu_{1\text{ср}}$, ..., $\mu_{6\text{ср}}$ являются средними функций $\mu(x, y, z)$ в соответствующих кубах.

Конечно-разностное уравнение

$$k_1U_1 + k_2U_2 + ... + k_6U_6 - U_0\sum_{i=1}^{6} k_i = -\rho_{\text{мср}} h^3, \qquad (*)$$

в котором $\rho_{\text{мср}} = m/h^3$, выражает потенциал U_0 узла 0 через потенциалы соседних шести узлов. Совокупность таких уравнений образует систему, которая может быть разрешена относительно искомых потенциалов узлов.

При численном расчете плоскопараллельного магнитного поля в неоднородной среде получим разностное уравнение относительно векторного магнитного потенциала, принимая за исходное соотношение $\oint\limits_l \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = i$. При этом исключается необходимость перехода от токов к эквивалентным им магнитным зарядам.

Разобьем область на совокупность квадратов с длиной стороны h.

На рис. 27.30 изображены четыре смежных квадрата, в каждом из которых магнитные проницаемости μ_1, ..., μ_4 и плотности J_1, ..., J_4 тока имеют в общем случае различные значения.

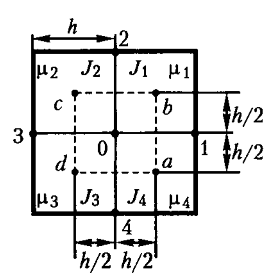

Рис. 27.30

Вычислим интеграл $\oint\limits_l \boldsymbol{B}/\mu\, d\boldsymbol{l}$ вдоль контура $abcd$, для чего разобьем его на четыре интеграла по сторонам ab, bc, cd, da контура:

$$\int\limits_{ab} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_4} + \frac{h}{2\mu_1}\right)\frac{A_0 - A_1}{h} = k_1(A_0 - A_1),$$

$$\int\limits_{bc} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_1} + \frac{h}{2\mu_2}\right)\frac{A_0 - A_2}{h} = k_2(A_0 - A_2),$$

$$\int\limits_{cd} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} dl \cong \left(\frac{h}{2\mu_2} + \frac{h}{2\mu_3} \right) \frac{A_0 - A_3}{h} = k_3 (A_0 - A_3),$$

$$\int\limits_{da} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} dl \cong \left(\frac{h}{2\mu_4} + \frac{h}{2\mu_3} \right) \frac{A_0 - A_4}{h} = k_4 (A_0 - A_4).$$

Входящий в разностное уравнение $(A_0 - A_1) k_1 + (A_0 - A_2) k_2 + (A_0 - A_3) k_3 + (A_0 - A_4) k_4 = i$ ток i сквозь площадку, ограниченную контуром *abcda*, выразим через плотности $J_1, ..., J_4$ тока в квадратах $i \cong J_{\text{ср}} h^2 = 0{,}25\,(J_1 + J_2 + J_3 + J_4)\, h^2$ и получим окончательно:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i A_i - A_0 \sum_{i=1}^{4} k_i = -J_{\text{ср}}\, h^2. \qquad (**)$$

По аналогии с разностными уравнениями (*) уравнения (**), записанные для совокупности ячеек сетки, образуют систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить векторный потенциал в совокупности точек области.

Глава двадцать восьмая

Расчет индуктивностей

28.1. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей

В настоящей главе будем рассматривать статические индуктивности. Соответственно магнитные потоки, определяющие эти индуктивности, будем находить при постоянном токе. Статические индуктивности зависят от геометрических параметров, определяющих форму, размеры и взаимное расположение контуров, и от магнитной проницаемости среды, окружающей контуры, а также от магнитной проницаемости вещества самих проводящих контуров. Если $\mu = \text{const}$, то индуктивности контуров не зависят от токов в них.

Обратим особое внимание на то, что индуктивности определяются потокосцеплением, т. е. для вычисления индуктивности электрического контура необходимо определить полное число сцеплений единичных линий магнитной индукции с контуром.

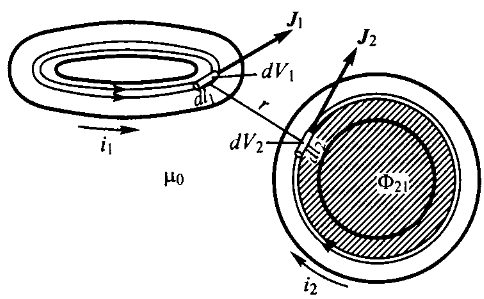

Рис. 28.1

Получим общее выражение для взаимной индуктивности двух контуров произвольно заданной формы (рис. 28.1).

Предположим, что контуры находятся в воздухе и материал проводников неферромагнитный. Примем всюду $\mu = \mu_0$. Условимся обозначать потокосцепление взаимной индукции буквой с двумя индексами: первый индекс будет указывать, с каким контуром сцепляется поток, второй — каким током обусловливается поток. Будем искать потокосцепление Ψ_{21} со вторым контуром, обусловленное током i_1 в первом контуре.

Представим себе весь проводник второго контура подразделенным на элементарные трубки тока i_2 (рис. 28.1). Поток, сцепляющийся с одной из таких трубок, равен линейному интегралу векторного потенциала вдоль оси этой трубки

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2 \, d\boldsymbol{l}_2.$$

На рис. 28.1 заштрихована поверхность, сквозь которую проходит поток Φ_{21}.

Этот поток сцепляется с током di_2, протекающим в рассматриваемой трубке тока и составляющим долю di_2/i_2 всего тока i_2 во втором контуре. Следовательно, он вносит в величину Ψ_{21} долю, равную

$$d\Psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2 \, d\boldsymbol{l}_2.$$

Так как ток di_2 имеет постоянное значение вдоль всей трубки тока, то его можно внести под знак интеграла. Обозначая через ds_2 сечение трубки тока и через $\boldsymbol{J}_2$ плотность тока в этом сечении, можем написать $di_2 = \boldsymbol{J}_2 d\boldsymbol{s}_2$. Последнее равенство приобретает вид

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2 d\boldsymbol{s}_2)(\boldsymbol{A}_2 d\boldsymbol{l}_2).$$

Так как векторы $\boldsymbol{J}_2$ и $d\boldsymbol{l}_2$ имеют одно и то же направление, то $(\boldsymbol{J}_2 d\boldsymbol{s}_2)(\boldsymbol{A}_2 d\boldsymbol{l}_2) = (d\boldsymbol{l}_2\, d\boldsymbol{s}_2)(\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{J}_2)$ и, следовательно,

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{A}_2)(d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{l}_2).$$

Интегрируя по всему сечению s_2 второго проводника, получим

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\int_{s_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{A}_2)(d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{l}_2).$$

Произведение $d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{l}_2$ есть элемент объема dV_2 второго проводника. Поэтому потокосцепление Ψ_{21} может быть представлено в виде

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{A}_2\, dV_2.$$

Так как мы желаем определить величину Ψ_{21} как потокосцепление взаимной индукции, обусловленное током i_1, то соответственно и векторный потенциал $\boldsymbol{A}_2$ необходимо выразить через ток i_1. Согласно изложенному в § 27.2, имеем

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\boldsymbol{J}_1 \frac{dV_1}{r},$$

где V_1 — объем пространства, занимаемого первым контуром; r — расстояние от элемента объема dV_1 до точки, в которой определяется векторный потенциал, и $\boldsymbol{J}_1$ — вектор плотности тока в точках элемента объема dV_1. Подставляя выражение для векторного потенциала в последнее выражение для Ψ_{21}, получаем

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi i_2}\int_{V_1}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{J}_2 \frac{dV_1\, dV_2}{r}.$$

Отсюда находим общее выражение для взаимной индуктивности:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2}\int_{V_1}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{J}_2 \frac{dV_1\, dV_2}{r}.$$

Интегрирование должно быть произведено один раз по всему объему первого проводника и другой раз — по всему объему второго проводника, причем r есть расстояние между элементами объемов dV_1 и dV_2. Полученная формула верна только для однородной в магнитном отношении среды, так как использованное при ее выводе выражение для векторного потенциала справедливо только в этом случае. В частности, и магнитная проницаемость материала самих проводников должна быть такой же, как и проницаемость окружающей среды. Как было ранее отмечено, при $\mu = \mathrm{const}$ взаимная индуктивность не зависит от токов в контурах. Наличие токов i_1 и i_2 в последнем выражении не противоречит этому положению. Действительно, внеся токи под знаки интегралов, получим в подынтегральном выражении отношения J_1/i_1 и J_2/i_2, которые характеризуют распределение токов в проводниках. Но при постоянном токе распределение тока зависит только от формы проводника и не изменяется при изменении тока. Поэтому отношение плотности тока в каждой точке проводника ко всему току полностью определяется формой проводника.

Если бы мы стали определять потокосцепление взаимной индукции Ψ_{12} с первым контуром, обусловленное током во втором контуре, то, очевидно, получили бы

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1}\int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2} \boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{J}_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Следовательно, для взаимной индуктивности $M_{12} = \Psi_{12}/i_2$ мы имели бы то же самое выражение, что и для M_{21}. Тем самым подтверждается важный вывод, полученный в первой части из условия независимости энергии магнитного поля токов от порядка установления токов, а именно: при $\mu = \mathrm{const}$ имеет место равенство

$$M_{kp} = M_{pk}.$$

Получим общее выражение для собственной индуктивности L контура, пользуясь найденным общим выражением для взаимной индуктивности M_{21} двух контуров. Представим себе два совершенно одинаковых контура, сближающихся до полного слияния так, что один из них занимает объем другого. После такого слияния, по существу, уже остается только один контур. Из выражения для M_{21} нетрудно получить выражение для L такого контура, приняв $i_1 = i_2 = i$ и $V_1 = V_2 = V$. Имеем

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2}\int\limits_{V}\int\limits_{V} \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}' \frac{dV\, dV'}{r},$$

причем $\boldsymbol{J}$ — плотность тока в элементе объема dV; $\boldsymbol{J}'$ — плотность тока в элементе dV' и r — расстояние между элементами объема dV и dV'. Интегрирование производится дважды по объему всего проводника (рис. 28.2).

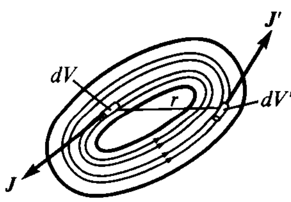

Рис. 28.2

Приведенное выше выражение для расчета индуктивности L можно получить, используя также соотношение $W = \frac{1}{2}\int\limits_{V_J} \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\, dV_J$ (см. § 27.4), связывающее величины W, $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{A}$. Учитывая, что $\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_J} \boldsymbol{J}\frac{dV_J}{r}$, для индуктивности $L = 2W_м/i^2$ находим выражение, совпадающее с найденным выше при $V_J = V$ и $V_J' = V_J$.

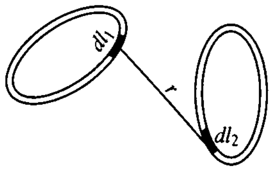

Рис. 28.3

Выражение для M_{21} весьма упрощается для контуров из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстоянием между ними (рис. 28.3). В таком случае нет необходимости делить проводники на трубки тока. Векторный потенциал в центре элемента dl_2 проводника второго контура можно вычислить по формуле (см. § 27.2)

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{i_1\,d\boldsymbol{l}_1}{r}.$$

Потокосцепление Ψ_{21} при этом может быть принято равным потоку Φ_{21} сквозь поверхность, ограниченную осью проводника второго контура, т. е.

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}_2\,d\boldsymbol{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{i_1\,d\boldsymbol{l}_1\,d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Разделив Ψ_{21} на i_1, получаем

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1\,d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Представляется возможным упростить и выражение для L контура, образованного из тонкого проводника. Однако упрощенную формулу нельзя при этом привести в точности к тому виду, к которому было приведено выражение для M_{21}, т. е. нельзя свести в формуле для L двукратное интегрирование по объему проводника к двукратному интегрированию по оси проводника, так как такой интеграл обращается в бесконечность.

Упрощение формулы для L контура из тонкого проводника круглого сечения можно выполнить следующим путем. Разделим потокосцепление Ψ на две части: $\Psi = \Psi_{внеш} + \Psi_{внутр}$, причем $\Psi_{внеш}$ определяется линиями магнитной индукции, охватывающими весь проводник, следовательно, расположенными целиком во внешней по отношению к проводнику среде, и $\Psi_{внутр}$ определяется линиями магнитной индукции, проходящими внутри тела проводника. Линии, определяющие величину $\Psi_{внеш}$, проходят сквозь заштрихованную на рис. 28.4 поверхность, ограниченную контуром l_2, лежащим на внутренней поверхности проводника. В случае если проводник образует один виток, то каждая такая линия сцепляется один раз с проводником и, следовательно,

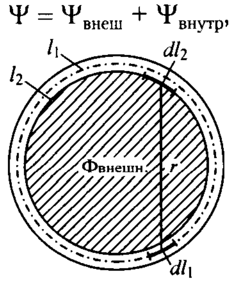

Рис. 28.4

$$\Psi_{внеш} = \Phi_{внеш} = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}_2\,d\boldsymbol{l}_2,$$

где $\boldsymbol{A}_2$ — значение векторного потенциала на контуре l_2. Величину $\boldsymbol{A}_2$ можем приближенно вычислить по формуле

$$A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1\, dl_1}{r}.$$

Предположим, что весь ток i течет по оси проводника. При этом интегрирование производится по всей оси l_1 проводника. Интеграл имеет конечное значение, так как все точки контура l_2, в которых определяется A_2, лежат на конечном расстоянии r от точек контура l_1.

Таким образом,

$$\Psi_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Величину $\Psi_{\text{внутр}}$ приближенно можно принять равной внутреннему потокосцеплению в отрезке длиной l_1 бесконечно длинного прямолинейного провода круглого сечения, поскольку радиус кривизны контура проводника велик по сравнению с поперечными размерами сечения. Согласно выражению, полученному в ч. I, имеем

$$\Psi_{\text{внутр}} = \frac{\mu}{8\pi} i l_1,$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Индуктивность L можно представить в виде

$$L = \frac{\Psi_{\text{внеш}}}{i} + \frac{\Psi_{\text{внутр}}}{i} = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}},$$

причем $L_{\text{внеш}}$ называют в н е ш н е й, а $L_{\text{внутр}}$ — в н у т р е н н е й индуктивностью. Итак, можем написать следующее упрощенное выражение для индуктивности контура из тонкого проводника круглого сечения:

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} + \frac{\mu l_1}{8\pi}.$$

28.2. Взаимная индуктивность двух круговых контуров

Найдем выражение для взаимной индуктивности круговых контуров, расположенных в параллельных плоскостях так, что их центры лежат на одной прямой, нормальной к этим плоскостям (рис. 28.5).

Искомую формулу получим, выполнив двукратное интегрирование вдоль обоих контуров согласно выражению

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

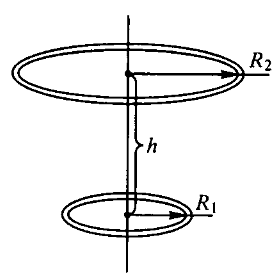

Рис. 28.5

Однако интегрирование уже было выполнено в § 27.16 при отыскании векторного потенциала в поле кругового тока. Именно для векторного потенциала A_2 на оси второго проводника, определяемого током i_1, протекающим в первом контуре, имеем выражение

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,f(k).$$

При этом в соответствии с принятым в § 27.16 обозначением получаем

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{h^2 + (R_1 + R_2)^2}.$$

Здесь R_1 и R_2 — радиусы контуров и h — расстояние между их центрами. Принято $\mu = \mu_0$, так как предполагается, что контуры находятся в воздухе.

Функция $f(k)$ изображена в виде кривой на рис. 27.20. Она может быть представлена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода согласно выражениям, приведенным в § 27.16. Вектор $\boldsymbol{A}_2$ касателен к оси проводника второго контура и вследствие симметрии имеет одинаковую величину вдоль всего второго контура. Следовательно, потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром, обусловленное током i_1 в первом контуре, получается равным

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2 = \oint_{l_2} A_2\, dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = A_2 2\pi R_2 = \mu_0 i_1 \sqrt{R_1 R_2}\, f(k).$$

Таким образом, искомая взаимная индуктивность выражается формулой

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2}\, f(k).$$

28.3. Индуктивность кругового контура

Найдем формулу для индуктивности круглого кольца из тонкого проводника кругового сечения (рис. 28.6). Внешняя индуктивность $L_{внеш}$, определяемая потоком $\Phi_{внеш}$, линии которого охватывают все сечение проводника, равна взаимной индуктивности между бесконечно тонкими круговыми контурами, один из которых, l_1, совпадает с осью проводника и другой, l_2, является внутренней, т. е. наименьшей, окружностью на поверхности проводника. Следовательно, полагая в последнем выражении § 28.2 $R_1 = R$ и $R_2 = R - a$, можем написать

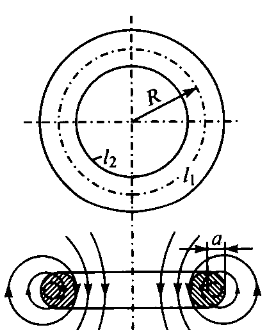

Рис. 28.6

$$L_{внеш} = \mu_0 \sqrt{R(R-a)}\, f(k) \approx \mu_0 R f(k),$$

где a — радиус сечения проводника и R — радиус кольца, причем $a \ll R$. Так как контуры l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то в выражении для k^2 следует принять $h = 0$. Имеем

$$k^2 = \frac{4(R-a)R}{(R-a+R)^2} = 1 - \frac{a^2}{4R^2 - 4Ra + a^2} \approx 1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2.$$

Следовательно,

$$k \approx \sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2} \approx 1-\frac{a^2}{8R^2}.$$

Величина $f(k)$, входящая в выражение для $L_{\text{внеш}}$, может быть определена из кривой на рис. 27.20. Однако для рассматриваемого случая $a \ll R$ можно получить приближенное выражение для $f(k)$. Так как $k \approx 1$, то приближенно имеем

$$f(k) = \left(\frac{2}{k}-k\right)K - \frac{2}{k}E \approx K - 2E.$$

Можно показать, что при $k \approx 1$ эллиптические интегралы $K(k)$ и $E(k)$ имеют следующие приближенные значения:

$$K \approx \ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \approx \ln\frac{8R}{a} \quad \text{и} \quad E \approx 1.$$

Следовательно,

$$L_{\text{внеш}} = \mu_0 R f(k) \approx \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a}-2\right).$$

Так как $l_1 = 2\pi R$, то внутренняя индуктивность выражается формулой

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu l_1}{8\pi} = \frac{\mu R}{4}.$$

Следовательно,

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a}-2\right) + \frac{\mu}{4}R.$$

Если провод из неферромагнитного материала, то $\mu \approx \mu_0$ и

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a}-1{,}75\right).$$

Выражение для внутренней индуктивности получено в предположении равномерного распределения тока по сечению проводника, что соблюдается при постоянном токе. При переменном токе высокой частоты в случае резкого проявления поверхностного эффекта внутренний поток при $\mu = \mu_0$ будет мал, и точнее вычислять индуктивность по формуле

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a}-2\right),$$

пренебрегая величиной $L_{\text{внутр}}$.

28.4. Метод участков

Полученные в § 28.1 выражения для индуктивностей контуров из тонких проводников дают основание ввести метод расчета, основанный на условных понятиях о взаимной индуктивности между участками проводников и об индуктивностях участков проводников.

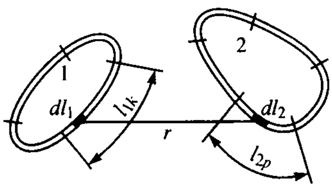

Рис. 28.7

Пусть имеются два контура. Разобьем первый контур на m участков и второй контур — на n участков (рис. 28.7). Длину k-го участка первого контура обозначим через l_{1k} и длину p-го участка второго контура — через l_{2p}. Разбивая в выражении для M_{21} интегралы по замкнутым контурам l_1 и l_2 на суммы интегралов, взятых вдоль участков контуров, будем иметь

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Выражение, стоящее под знаком двойной суммы, можем рассматривать как взаимную индуктивность $M_{1k,2p}$ между k-м участком первого контура и p-м участком второго контура. Таким образом,

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} M_{1k,2p}.$$

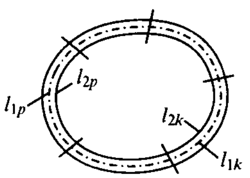

Рис. 28.8

Аналогично можно поступить при вычислении индуктивности контура. Разобьем весь контур на m участков (рис. 28.8). При этом пусть l_{1k} есть отрезок k-го участка по оси проводника, а l_{2p} — отрезок p-го участка по внутреннему контуру, лежащему на поверхности проводника. Хотя для тонкого проводника $l_{1k} = l_{2k}$, но необходимо различать эти два участка, так как в формуле для L интегрирование производится один раз по оси проводника, другой раз — по указанному внутреннему контуру. Формула для L принимает вид

$$L = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} + L_{\text{внутр}}.$$

Выражение под знаком двойной суммы можно условно рассматривать при $k = p$ как внешнюю индуктивность $L_{\text{внеш}}$ k-го участка контура и при $k \neq p$ — как взаимную индуктивность M_{kp} между k-м и p-м участками контура. При вычислении M_{kp} можно интегрирование по отрезку внутреннего контура l_{2p} заменить интегрированием по отрезку оси l_{1p} того же p-го участка. Тогда будем иметь

$$M_{1k,2p} \approx M_{1k,1p} = M_{kp} \quad \text{и} \quad M_{1p,2k} \approx M_{1p,1k} = M_{pk}.$$

Учитывая, что $M_{kp} = M_{pk}$, получаем

$$L = \sum_{k=1}^{m} L_{\text{внеш}\,k} + 2\sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} M_{kp} + L_{\text{внутр}},$$

где

$$L_{\text{внеш}\,k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2k}} \frac{dl_1 dl_2}{r}; \quad M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{1p}} \frac{dl_1 dl_1'}{r},$$

причем dl_1 — элемент на оси k-го участка, dl_1' — элемент на оси p-го участка.

В выражении для L во втором члене $p \neq k$ и определенное сочетание индексов k и p встречается только один раз независимо от порядка, в котором они стоят.

Рассмотренный метод облегчает расчет индуктивностей в тех случаях, когда контуры можно разбить на участки, имеющие простую форму, например на прямолинейные отрезки или на дуги окружностей.

28.5. Индуктивности контуров, составленных из прямолинейных отрезков

Формулы для взаимной индуктивности $M_{1k,\,2p}$ и индуктивности $L_{\text{внеш}\,k}$ участков проводов сходны с формулами для потенциальных коэффициентов отрезков проводов, полученными в § 25.6 по методу средних потенциалов. Различие заключается в множителях, стоящих перед знаками интегралов, и в том, что в формулы для индуктивностей входит скалярное произведение векторов $\boldsymbol{dl}_1$ и $\boldsymbol{dl}_2$, т. е. величина $\boldsymbol{dl}_1\boldsymbol{dl}_2 = \cos\theta\, dl_1 dl_2$, где θ — угол между направлениями элементарных отрезков dl_1 и dl_2, а в формулы для потенциальных коэффициентов входит произведение $dl_1 dl_2$ длин отрезков.

В случае когда отрезки l_1 и l_2 прямолинейны, величина $\cos\theta$ одинакова для всех элементов dl_1 и dl_2 и может быть вынесена за знак интеграла. При этом формула для взаимной индуктивности между этими отрезками приобретает вид

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cos\theta \int\limits_{l_1}\int\limits_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

В формуле для собственной индуктивности $L_{\text{внеш}}$ прямолинейного отрезка необходимо принять $\cos\theta = 1$, и, следовательно,

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{l}\int\limits_{l} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Эти формулы отличаются от формул для потенциальных коэффициентов α_{12} и α_{11} только множителями. Имеем

$$\frac{M_{12}}{\alpha_{12}} = \mu_0\varepsilon_0 l_1 l_2 \cos\theta; \quad \frac{L_{\text{внеш}}}{\alpha_{11}} = \mu_0\varepsilon_0 l^2.$$

На это обстоятельство обратил внимание в одной из своих работ Л. А. Цейтлин. Оно имеет важное значение, так как дает возможность имеющиеся в литературе формулы для индуктивностей использовать для вычисления потенциальных коэффициентов и обратно.

В § 25.6 была выведена формула для коэффициентов α_{12} двух параллельных отрезков прямых проводов одинаковой длины l, расположенных так, что начала отрезков находятся на одном к ним перпендикуляре. Расстояние между осями проводов равно D.

Если направления обхода, которые считаем положительными, для обоих отрезков совпадают, то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Если положительные направления обоих отрезков противоположны, то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Используя выражения для отношения M_{12}/α_{12}, получаем

$$M = \pm\mu_0\varepsilon_0 l^2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2}+1} + \frac{D}{l}\right).$$

Учитывая равенство

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} = \ln\left(\frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2}+1}\right),$$

можем написать

$$M = \pm\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{l+\sqrt{l^2+D^2}}{D} - \frac{\sqrt{l^2+D^2}-D}{l}\right).$$

В частном случае при $l \gg D$ получаем

$$M = \pm\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right).$$

Из последней формулы непосредственно вытекает выражение для внешней индуктивности прямолинейного отрезка проводника длиной l, имеющего круглое сечение радиуса r_0, причем $r_0 \ll l$. В этой формуле необходимо заменить D на r_0 и взять знак плюс. Имеем

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_0} - 1\right).$$

Обратим особое внимание на то, что коэффициенты α_{12} были вычислены в § 25.6 приближенным методом средних потенциалов, основанным на допущении, что заряд распределен равномерно по длине провода, т. е. что линейная плотность заряда одинакова по всей длине провода. Однако формулы для M и L в этом отношении вполне точны, так как постоянный ток имеет одно и то же значение на всей длине провода.

28.6. Индуктивность прямоугольной рамки

Воспользуемся методом участков для вычисления индуктивности прямоугольной рамки из провода кругового сечения (рис. 28.9). Длины сторон рамки обозначим через a и b, радиус сечения — через r_0. Пусть $a \gg r_0$ и $b \gg r_0$.

Взаимная индуктивность между взаимно перпендикулярными сторонами рамки равна нулю, так как здесь $\cos\theta = 0$. Следовательно, достаточно учесть только взаимные индуктивности между парами противоположных параллельных сторон рамки. Для этих сторон $\cos\theta = -1$, так как, перемещаясь вдоль контура рамки, мы обходим противолежащие стороны в противоположных направлениях.

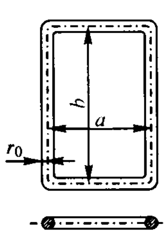

Рис. 28.9

Для сторон рамки, имеющих длину $l = a$ и расстояние между осями проводников $D = b$, обозначив через $d = \sqrt{a^2+b^2}$ диагональ рамки, получаем

$$M_a = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{a+d}{b} - \frac{d-b}{a}\right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a+d} + \frac{d-b}{a}\right).$$

Соответственно для сторон, имеющих длину b и расстояние между осями проводов a, можем написать:

$$M_b = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\frac{a}{b+d} + \frac{d-a}{b}\right).$$

Внешние индуктивности сторон, имеющих длины a и b, равны

$$L_{\text{внеш}\,a} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{2a}{r_0} - 1\right);\quad L_{\text{внеш}\,b} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\frac{2b}{r_0} - 1\right).$$

Внутреннюю индуктивность всей рамки находим, замечая, что длина контура равна $2(a + b)$. Следовательно,

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu}{4\pi}(a+b),$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Таким образом, получаем окончательно

$$L = 2L_{\text{внеш}\,a} + 2L_{\text{внеш}\,b} + 2M_a + 2M_b + L_{\text{внутр}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi}\left[a\ln\frac{2ab}{r_0(a+d)} + b\ln\frac{2ab}{r_0(b+d)} - 2(a+b-d)\right] + \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{a+b}{4}\right).$$

28.7. Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями

Найдем выражение для взаимной индуктивности между двумя двухпроводными линиями, образованными проводами кругового сечения. На рис. 28.10 цифрой 1 помечено сечение прямого провода первой линии и цифрой 1′ — сечение обратного провода этой линии. Соответственно цифрами 2 и 2′ помечены сечения прямого и обратного проводов второй линии. Пусть длина линии l много больше всех расстояний между проводами. В таком случае при подсчете величины M можно пренебречь отрезками, соединяющими провода в начале и в конце линии и изображенными на рис. 28.10 штрихами. Пользуясь методом участков, находим

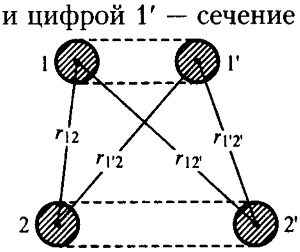

Рис. 28.10

$$M = M_{12} + M_{12'} + M_{1'2'} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{12}} - 1\right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{12'}} - 1\right) +$$

$$+ \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{1'2'}} - 1\right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{1'2}} - 1\right) = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_{12'}r_{1'2}}{r_{12}r_{1'2'}}.$$

В числителе под знаком логарифма стоят расстояния между прямым проводом одной линии и обратным проводом другой линии, а в знаменателе — расстояния между прямыми и обратными проводами обеих линий. Величина M может оказаться положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли величина, стоящая под знаком логарифма, больше или меньше единицы. Для расположения проводов, показанного на рис. 28.10, $M > 0$. Это значит, что при обоих положительных токах в линиях потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены согласно.

Если бы мы поменяли местами прямой и обратный провода в одной из линий, т. е. изменили условное положительное направление тока в одной из линий, то получили бы для такого же расположения проводов $M < 0$. Это значит, что при обоих положительных токах потоки были бы направлены встречно.

28.8. Индуктивность двухпроводной линии

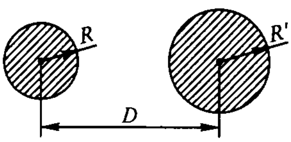

Рис. 28.11

Определим, пользуясь методом участков, индуктивность петли, образованной двумя параллельными проводами кругового сечения (рис. 28.11). Расстояние между осями проводов — D, радиусы их сечений — R и R', длина петли — l. Можем написать

$$L = L_{\text{внеш}\,1} + L_{\text{внеш}\,1'} + 2M_{11'} + L_{\text{внутр}},$$

где

$$L_{\text{внеш}\,1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R} - 1\right); \quad L_{\text{внеш}\,1'} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R'} - 1\right);$$

$$M_{11'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right); \quad L_{\text{внутр}} = \frac{\mu 2l}{8\pi} = \frac{\mu l}{4\pi},$$

причем μ — абсолютная магнитная проницаемость материала проводов. Получаем

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{D^2}{RR'} + \frac{\mu l}{4\pi} = \frac{l}{\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{\sqrt{RR'}} + \frac{\mu}{4}\right).$$

В важном частном случае для двухпроводной линии обычно $R' = R$. При этом

$$L = \frac{l}{\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{R} + \frac{\mu}{4}\right).$$

При $\mu > \mu_0$, например для стальных проводов, эта формула является приближенной, так как наличие ферромагнитной среды искажает поле около проводов. Однако этим искажением можно пренебречь, если радиусы сечений проводов малы по сравнению с расстоянием между проводами. При $\mu = \mu_0$ эта формула, как можно показать, дает при $l \gg D$ точное значение статической индуктивности для любых соотношений между D и R.

28.9. Индуктивность трехфазной линии

В каждом проводе трехфазной линии передачи индуцируется не только ЭДС самоиндукции, обусловленная переменным током в этом проводе, но также и ЭДС взаимной индукции, обусловленная токами в других проводах линии. Рассмотрим трехпроводную линию, т. е. линию, в которой отсутствует нейтральный провод. Обычно активные сопротивления r и индуктивности L одинаковы для всех трех проводов. Однако взаимные индуктивности M_{12}, M_{23} и M_{31} между проводами при несимметричном расположении проводов будут отличаться друг от друга. Если токи в линии изменяются по синусоидальному закону, то можно воспользоваться символическим методом и для падения напряжений в проводах написать выражения:

$$\dot{U}_1 = (r + j\omega L)\dot{I}_1 + j\omega M_{12}\dot{I}_2 + j\omega M_{13}\dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_2 = (r + j\omega L)\dot{I}_2 + j\omega M_{23}\dot{I}_3 + j\omega M_{21}\dot{I}_1;$$

$$\dot{U}_3 = (r + j\omega L)\dot{I}_3 + j\omega M_{31}\dot{I}_1 + j\omega M_{32}\dot{I}_2.$$

Предположим, что токи в линии образуют симметричную систему, т. е. $\dot{I}_2 = a^2\dot{I}_1$; $\dot{I}_3 = a\dot{I}_1$, где $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Учитывая, что $a^3 = 1$, можем переписать уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r + j\omega\,(L + a^2 M_{12} + aM_{13})]\,\dot{I}_1; \\ \dot{U}_2 &= [r + j\omega\,(L + a^2 M_{23} + aM_{21})]\,\dot{I}_2; \\ \dot{U}_3 &= [r + j\omega\,(L + a^2 M_{31} + aM_{32})]\,\dot{I}_3. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, все вещественны только в случае симметричного расположения проводов, когда

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M.$$

Действительно, принимая во внимание, что $a^2 + a = -1$, в этом случае получаем

$$\dot{U}_1 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_1;$$

$$\dot{U}_2 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_3 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_3.$$

Разность $L - M = L'$ в последних уравнениях можно рассматривать как эквивалентную индуктивность одного провода. Индуктивность L уединенного провода длиной l и с радиусом сечения R выражается формулой

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R} - 1\right) + \frac{\mu l}{8\pi},$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода.

Взаимная индуктивность M между параллельными проводами диной l с расстоянием между осями D при $l \gg D$ выражается формулой

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right).$$

При этом перед формулой следует взять знак плюс, так как положительные направления токов во всех проводах мы принимаем в одну сторону вдоль линии передачи. Таким образом,

$$L' = L - M = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{R} + \frac{\mu}{4}\right).$$

При несимметричном расположении проводов расстояния между осями проводов не равны друг другу: $D_{12} \neq D_{23} \neq D_{31}$.

Однако если через равные интервалы вдоль линии осуществлена транспозиция проводов, то выражение для L' сохранит свой вид, если под M понимать среднее значение взаимной индуктивности для трех участков линии:

$$M = \frac{1}{3}(M_{12} + M_{23} + M_{31}) = \frac{l}{2\pi}\mu_0\left(\ln\frac{2l}{D'} - 1\right),$$

где

$$D' = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}.$$

В несимметричной трехфазной линии при прохождении по ней переменного тока имеют место своеобразные энергетические процессы. В уравнениях (*) при $M_{12} \neq M_{23} \neq M_{31}$ выражения, стоящие в круглых скобках, являются комплексными. Их мнимые части после умножения на $j\omega$ дадут вещественные величины, имеющие смысл активных сопротивлений.

Складывая выражения, стоящие в уравнениях (*) в круглых скобках для всех трех фаз, получим при каждой взаимной индуктивности вещественный множитель $a^2 + a = -1$. Следовательно, сумма дополнительных активных сопротивлений во всех трех фазах равна нулю, т. е. если в отдельных фазах они положительны, то в других они отрицательны. Иными словами, если из одних фаз энергия отдается, то в другие она поступает в том же количестве, т. е. совершается перенос энергии путем электромагнитной индукции из одной фазы в другую.

В заключение главы отметим, что разработке методов расчета индуктивностей посвящен ряд работ советских авторов: Г. Н. Петрова, Л. А. Цейтлина, В. А. Фока и других.

Глава двадцать девятая

Переменное электромагнитное поле в диэлектрике

29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны

В предыдущих главах были исследованы частные проявления электромагнитного поля: электрические поля, окружающие системы неподвижных заряженных тел, и электрические и магнитные поля, окружающие системы неподвижных контуров с постоянными токами.

В общем случае для изменяющихся во времени зарядов, изменяющихся во времени токов, движущихся заряженных или намагниченных тел или движущихся контуров с токами в окружающем их пространстве существует переменное электромагнитное поле.

Ограничимся рассмотрением переменного электромагнитного поля в неподвижных однородных и изотропных средах. Для исследования этого поля необходимо обратиться к полной системе уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}; \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \gamma\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

В декартовой системе координат первые два уравнения запишутся в виде шести уравнений соответственно трем проекциям на оси координат. Используя еще выражения для векторов $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$, получаем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + J_{\text{пер}\,x}; \tag{а}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + J_{\text{пер}\,y}; \tag{б}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + J_{\text{пер}\,z}; \tag{в}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \tag{г}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \tag{д}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{е}$$

Предположим, что проводимость диэлектрика равна нулю ($\gamma = 0$) и что свободные заряды в диэлектрике отсутствуют ($\rho = 0$). В такой среде могут существовать только токи электрического смещения.

Для того чтобы лучше выявить основные соотношения в электромагнитном поле, рассмотрим сначала простейший случай — плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в однородном и изотропном диэлектрике. Электромагнитная волна называется плоской, когда все величины, характеризующие интенсивность электромагнитного процесса, зависят только от одной из декартовых координат, например от координаты z. Приблизительно такой характер имеет электромагнитная волна, излученная антенной, если эту волну рассматривать в небольшой области пространства на большом расстоянии от излучающего центра.

Итак, предположим, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не зависят от координат x и y, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y}=0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются функциями только z и t. Учитывая еще условия $\gamma = 0$ и $\rho = 0$, получаем уравнения поля в виде

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t};\ (a')\qquad -\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t};\ (г')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t};\ (б')\qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t};\ (д')$$

$$0=\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t};\ (в')\qquad 0=\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}.\quad (е')$$

Предположим, что поле вызвано источниками, не содержащими постоянных токов и постоянных зарядов, как это и имеет место в случае излучения волн антенной. Ток и напряжение в антенне не имеют постоянных составляющих. В таком случае векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не могут иметь составляющих, не зависящих от времени, и уравнения ($в'$) и ($е'$) дают

$$E_z=\text{const}=0;\quad H_z=\text{const}=0.$$

Выберем направление осей $0x$ и $0y$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{E}$ был направлен по оси $0x$. Это всегда можно сделать, если вектор $\boldsymbol{E}$ все время остается параллельным некоторому направлению, т. е. когда волна является поляризованной. Такие условия, в частности, обеспечиваются при излучении электромагнитных волн неподвижной антенной. В таком случае имеем $E_y = 0$. При этом уравнения ($б'$) и ($г'$) дают $\frac{\partial H_x}{\partial z}=0$ и $\frac{\partial H_x}{\partial t}=0$, т. е. $H_x = \text{const} = 0$.

Следовательно, вектор $\boldsymbol{H}$ направлен по оси OY. Мы получаем первый существенный вывод: *в электромагнитной волне, свободно распространяющейся в однородном и изотропном диэлектрике, векторы* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{H}$ *взаимно перпендикулярны*:

$$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}.$$

Итак, остаются два уравнения (a') и ($д'$):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t};\ (a')\qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}.\ (д')$$

Дифференцируя второе уравнение по z и первое по t, получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t\,\partial z}; \qquad -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z\,\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \qquad (*)$$

причем $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Уравнения (a'), (∂') и (*) по форме совершенно аналогичны уравнениям

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L\frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

(причем $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$), полученным в гл. 17 и использовались в гл. 18 при рассмотрении переходных процессов в неискажающей однородной линии. Решение последних уравнений было найдено в виде

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt);$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)].$$

Пользуясь этим решением, можем написать выражения для E_x и H_y, заменив в последних выражениях u_1 на E_x, i_1 на H_y, x на z, C на ε и L на μ. Произведя эту замену и обозначая функции от $(z - vt)$ и от $(z + vt)$ через $F_1(z - vt)$ и $F_2(z + vt)$, будем иметь искомые выражения в виде

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt);$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[F_1(z - vt) - F_2(z + vt)].$$

Так как по условию E_x и H_y не имеют составляющих, не зависящих от времени, то и функции F_1 и F_2 не имеют этих составляющих.

Выясним смысл, который имеют частные решения:

$$E_{x1} = F_1(z - vt); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z - vt).$$

В любой точке, движущейся в положительную сторону оси $0z$ со скоростью $dz/dt = v$, значения E_{x1} и H_{y1} остаются постоянными. Действительно, положение такой точки определяется координатой $z = vt + z_0$ и, следовательно, величины E_{x1} и H_{y1} в этой движущейся точке имеют значения:

$$E_{x1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{const};$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z_0) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что каждое определенное значение величины E_{x1} или величины H_{y1} распространяется в сторону положительной оси $0z$ со скоростью v. Поэтому можем утверждать, что эти частные решения определяют собой электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью v в положительном направлении оси $0z$ (*прямую волну*). Так как с величинами E и H связана определенная плотность энергии электромагнитного поля, то движущаяся электромагнитная волна несет с собой определенное количество электромагнитной энергии.

При помощи аналогичных рассуждений приходим к заключению, что частные решения

$$E_{x2} = F_2(z+vt); \quad H_{y2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_2(z+vt)$$

определяют собой электромагнитную волну, движущуюся со скоростью v в отрицательном направлении оси $0z$ (*обратную волну*).

Итак, мы получили, что *электромагнитная волна распространяется в пространстве со скоростью*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Эта скорость зависит только от магнитных и электрических свойств среды. В пустоте она равна

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2{,}998\cdot 10^8\ \text{м/с} \approx 3\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Абсолютные значения напряженностей магнитного и электрического полей связаны как в прямой, так и в обратной волне соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E,$$

откуда получаем

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2}.$$

Следовательно, *если существует только прямая или только обратная волна, то энергии магнитного и электрического полей равны между собой.*

Обратим внимание на аналогию, которую можно провести между рассмотренным явлением распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике, характеризующейся напряженностями E_x и H_y, и явлением распространения волн напряжения u и тока i в однородной линии при отсутствии потерь в линии. Уже было отмечено, что выражение для E_x совершенно аналогично выражению для u и соответственно выражение для H_y аналогично выражению для i. Это обстоятельство не является случайным. Действительно, можно рассматривать величину E как падение напряжения, отнесенное к единице длины линии напряженности электрического поля, и соответственно величину H — как ток, отнесенный к единице длины линии напряженности магнитного поля. При этом отношение $E_{x1}/H_{y1} = \sqrt{\mu/\varepsilon} = z$ имеет размерность электрического сопротивления и может рассматриваться как волновое сопротивление среды аналогично волновому сопротивлению $z = \sqrt{L/C}$ однородной линии. В случае распространения волны в пустоте имеем

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{1/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)}} = 120\pi = 377 \text{ Ом}.$$

Выражение для скорости $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ распространения электромагнитной волны в диэлектрике аналогично выражению для скорости $v = 1/\sqrt{LC}$ распространения волн в линии.

Можно было бы ввести вместо электромагнитных констант ε_0 и μ_0 две другие, выражающиеся через них, физические константы, а именно:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}},$$

что лучше бы выражало волновые свойства поля.

Чтобы уяснить возможность существования одновременно и прямой и обратной волн, рассмотрим переход волны из среды с абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 в среду с проницаемостями ε_2 и μ_2. Предположим, что среды разделены плоскостью и что волна распространяется в направлении, нормальном к плоскости раздела. *Падающая* в первой среде на поверхность раздела волна ($E_{\varphi1}$, $H_{\varphi1}$) (прямая волна) частично проходит сквозь поверхность раздела, образуя во второй среде *преломленную* (прямую) волну ($E_{\varphi2}$, $H_{\varphi2}$) и частично отражается от поверхности раздела, образуя в первой среде *отраженную* (обратную) волну ($E_{\psi1}$, $H_{\psi1}$). Соотношения между напряженностями поля для этих волн на поверхности раздела можно написать, использовав на основании вышеотмеченной аналогии соотношения между напряжениями и токами в падающих, преломленных и отраженных волнах тока и напряжения.

Имеем на поверхности раздела:

$$E_{\varphi2} = \frac{2z_2}{z_2+z_1}E_{\varphi1};\quad E_{\psi1} = \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1}E_{\varphi1};$$

$$H_{\varphi2} = \frac{2z_1}{z_1+z_2}H_{\varphi1};\quad H_{\psi1} = \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}H_{\varphi1},$$

где $z_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ и $z_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$ — соответствующие волновые сопротивления первой и второй среды.

Если $z_2 = z_1$, то отраженные волны отсутствуют.

Если $z_2 > z_1$, то $E_{\varphi1}$ и $E_{\psi1}$ имеют одинаковые знаки, а $H_{\varphi1}$ и $H_{\psi1}$ — разные знаки. В первой среде в результате частичного отражения волны напряженность электрического поля $E_1 = E_{\varphi1} + E_{\psi1}$ возрастает, а напряженность магнитного поля $H_1 = H_{\varphi1} + H_{\psi1}$ убывает. При $z_2 < z_1$ имеем обратную картину.

Все остальные выводы, полученные при исследовании распространения волн в однородных линиях без потерь, могут быть соответствующим образом перенесены на исследуемый случай распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике.

В общем случае, когда направление распространения падающей волны составляет некоторый угол с нормалью к поверхности раздела сред, для нахождения отраженной и преломленной волн необходимо использовать все граничные условия для векторов ***E***, ***D***, ***H*** и ***B***.

29.2. Вектор Пойнтинга

Определим мощность потока энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны. Будем предполагать, что существует только волна, движущаяся в одном направлении. В таком случае объемная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}=\frac{\varepsilon E}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H+\frac{\mu H}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E=\sqrt{\varepsilon\mu}\,EH=\frac{1}{v}EH$$

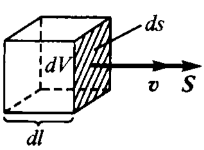

Рис. 29.1

и, следовательно, в объеме $dV = dl\,ds$ (рис. 29.1) заключена энергия

$$\frac{1}{v}EH\,dl\,ds.$$

Отрезок пути dl волна проходит за промежуток времени dt, который связан с dl соотношением $dl = v\,dt$.

Мощность потока энергии, отнесенная к единице поверхности, нормальной к вектору скорости $\boldsymbol{v}$, численно равна количеству энергии, которая проходит через единицу поверхности, нормальной к вектору $\boldsymbol{v}$, в единицу времени. Она получается равной

$$S=\frac{\frac{EH}{v}dl\,ds}{ds\,dt}.$$

Принимая во внимание, что $dl/dt = v$, находим

$$S = EH.$$

Эта величина может рассматриваться как вектор ***S***, направленный в сторону движения волны, т. е. в направлении вектора скорости $\boldsymbol{v}$.

Представления о потоке энергии и о мощности потока энергии, отнесенной к единице поверхности, были развиты в 1874 г. в работе Н. А. Умова, в которой он применил эти представления к случаю передачи энергии в упругих средах. На одиннадцать лет позже Пойнтинг применил эти представления к случаю передачи электромагнитной энергии и получил выражение вектора ***S*** через векторы ***E*** и ***H***. Соответственно, вектор ***S*** получил наименование в е к т о р а П о й н т и н г а.

Найдем связь между направлением вектора Пойнтинга и направлениями векторов ***E*** и ***H***. В прямой волне, как это следует из выражений, полученных в предыдущем параграфе, E_{x1} и H_{y1} всегда одного знака, т. е. в тот момент, когда вектор

E направлен в сторону положительной оси 0*x*, вектор **H** направлен в сторону положительной оси 0*y*. Вектор же скорости **v** в прямой волне направлен в сторону положительной оси 0*z*. Взаимное расположение векторов **E**, **H** и **S** для прямой волны показано на рис. 29.2.

В обратной волне E_{x2} и H_{y2} всегда имеют различные знаки и вектор **v** направлен в отрицательную сторону оси 0*z*. Взаимное расположение векторов **E**, **H** и **S** в обратной волне изображено на рис. 29.3.

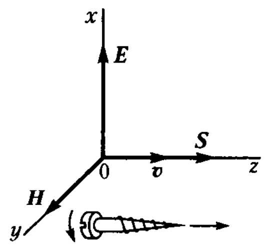

Рис. 29.2

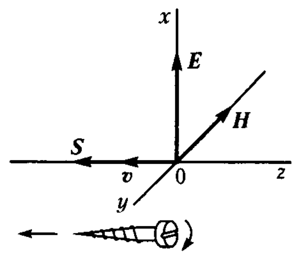

Рис. 29.3

Мы видим, что *направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы **E** и **H**, в направлении от **E** к **H** по кратчайшему расстоянию.*

Следовательно, вектор **S** можно представить как векторное произведение векторов **E** и **H**:

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Он определяет собой *мощность потока электромагнитной энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны.* Выражение для вектора Пойнтинга было получено в предположении, что среда однородна и изотропна и что существует только прямая или только обратная волна. В следующем параграфе будет показано, что это выражение справедливо в общем случае.

Остановимся на важном практическом случае, когда E_x и H_y изменяются во времени по закону синуса. Предположим, что существует только одна прямая волна. Имеем

$$E_{x1} = F_1(z - vt) = E_{xm}\sin(\omega t + \psi);$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{xm}\sin(\omega t + \psi),$$

причем ω — угловая частота колебаний.

Последние уравнения удовлетворяются при условии, что существует равенство $\omega t + \psi = k(z - vt)$, где k — постоянная величина. Так как это равенство должно удовлетворяться для любого момента времени t, то, приняв $t = 0$, найдем $\psi = kz$. Следовательно, $\omega t = -kvt$ и $k = -\omega/v$. Таким образом, начальная фаза ψ может быть представлена в виде $\psi = -\dfrac{\omega}{v}z$. Стало быть, имеем

$$E_{x1} = E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right).$$

На рис. 29.4 изображены векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в разных точках оси $0z$ для момента времени $t = 0$. Величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ распределены в пространстве по закону синуса, и все это распределение перемещается в положительную сторону оси $0z$ со скоростью v. Действительно, точка, в которой $E_x = 0$, определяется условием: $\omega t - \frac{\omega}{v} z = 0$, или $z = vt$, т. е. движется со скоростью v в положительном направлении оси $0z$. На рис. 29.4 штриховыми линиями изображено распределение поля в некоторый момент времени $t_1 > 0$.

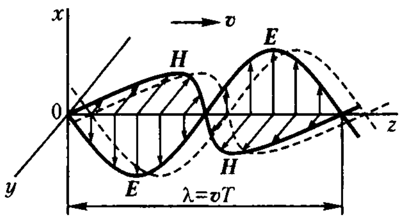

Рис. 29.4

Расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна в течение одного периода колебаний, называется д л и н о й в о л н ы. Обозначая длину волны через λ, будем иметь

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

где f — частота колебаний.

Разность фаз колебаний в двух точках, удаленных друг от друга в направлении распространения волны на расстояние λ, имеет значение $\frac{\omega}{v}\lambda = \omega T = 2\pi$. Следовательно, *длина волны есть расстояние между двумя ближайшими точками, в которых напряженность поля имеет максимальное положительное значение.*

Чтобы наглядно представить себе все поле плоской волны, необходимо вообразить два взаимно перпендикулярных семейства линий напряженности электрического и магнитного полей, заполняющих собой все пространство, в котором распространяется волна (рис. 29.5). В каждой плоскости, параллельной плоскости $x0y$, линии напряженности поля распределены равномерно, но в направлении оси $0z$ густота линий меняется по закону синуса. Все это распределение движется со скоростью v в положительном направлении оси $0z$.

Рис. 29.5

29.3. Поток электромагнитной энергии

Вектор Пойнтинга, определяющий значение и направление потока электромагнитной энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, нормальной к направлению распространения волны, равен

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Покажем справедливость этого утверждения для любой среды, которая в общем случае может быть и неоднородной и анизотропной, и для любого характера поля. Свое рассмотрение ограничим только одним предположением, что электрические (ε и γ) и магнитные (μ) свойства среды не зависят от напряженностей электрического и магнитного полей и не являются функциями времени.

Рассмотрим некоторый произвольно выбранный объем V пространства, ограниченный замкнутой поверхностью s.

Предположим, что энергия ($W_э + W_м$) электрического и магнитного полей, заключенная в объеме V, изменяется во времени. Скорость ее уменьшения равна

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}}{2} + \frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}{2}\right) dV.$$

В общем случае для анизотропной среды имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z}{2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2}{2}\right) = E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} = \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

и точно так же

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}{2}\right) = \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \left(-\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) dV.$$

Выражая плотность тока смещения в виде разности результирующей плотности тока и плотностей токов проводимости и переноса и используя первое уравнение Максвелла, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \delta - \gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_{пер} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_{пер}.$$

Кроме того, второе уравнение Максвелла дает

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V (-\boldsymbol{E}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \gamma E^2 + \boldsymbol{J}_{пер}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\, dV.$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \mathrm{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Действительно, векторное произведение $[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]$ выражается в виде

$$[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{i}(E_yH_z - E_zH_y) + \boldsymbol{j}(E_zH_x - E_xH_z) + \boldsymbol{k}(E_xH_y - E_yH_x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] &= \frac{\partial}{\partial x}(E_yH_z - E_zH_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_zH_x - E_xH_z) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(E_xH_y - E_yH_x) = H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \\ &+ H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - \\ &- E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = H_x \operatorname{rot}_x\boldsymbol{E} + H_y \operatorname{rot}_y\boldsymbol{E} + H_z \operatorname{rot}_z\boldsymbol{E} - \\ &- E_x \operatorname{rot}_x\boldsymbol{H} - E_y \operatorname{rot}_y\boldsymbol{H} - E_z \operatorname{rot}_z\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}.\end{aligned}$$

Согласно этому тождеству и на основании теоремы Остроградского можем написать

$$\int_V (\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H})\,dV = \int_V \operatorname{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,dV = \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}.$$

Таким образом, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \boldsymbol{J}_{пер}\boldsymbol{E}\,dV + \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}. \qquad (*)$$

Первый интеграл в правой части полученного уравнения представляет собой энергию, поглощаемую в объеме V в единицу времени вследствие конечной проводимости среды, т. е. энергию, переходящую в теплоту в тех частях объема V, где среда обладает удельной проводимостью γ и где, следовательно, существуют токи проводимости. Второй интеграл представляет собой работу, затрачиваемую в единицу времени на ускорение свободных заряженных частиц в объеме V, т. е. на увеличение кинетической энергии этих частиц в тех частях объема V, где существуют токи переноса свободных заряженных частиц. Если имеет место столкновение этих частиц с молекулами вещества, то часть сообщенной им кинетической энергии также переходит в теплоту.

Наличие третьего интеграла показывает, что не вся убыль энергии электрического и магнитного полей в объеме V превращается внутри этого объема в теплоту и в кинетическую энергию свободных заряженных частиц. Величина этого третьего интеграла представляет собой мощность, численно равную той энергии, которая передается в единицу времени из объема V сквозь поверхность s.

Таким образом, мощность потока электромагнитной энергии сквозь поверхность s выражается в виде

$$p = \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} = \oint_s \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{s}.$$

Отсюда следует, что удельная мощность потока электромагнитной энергии, численно равная количеству энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны, может быть представлена вектором

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Уравнение (*) получено в предположении, что в области V не совершается механической работы по перемещению в пространстве заряженных проводящих тел и проводящих контуров с токами, а также по перемещению отдельных частей среды, неоднородных в электрическом и магнитном отношении. Это предположение заключалось в том, что величины γ, μ и ε были приняты постоянными в каждой точке пространства. Следовательно, все части неоднородной среды, и в частности проводники, предполагались неподвижными. Кроме того, не было предположено существование в области V каких-либо источников электродвижущей силы. Уравнение (*) представляет собой выражение закона сохранения энергии в применении к такому случаю.

В более общем случае внутри области V могут существовать источники электромагнитной энергии, в которых совершается преобразование энергии какого-либо вида (тепловой, химической и т. д.) или механической работы в электромагнитную энергию. Обозначив через p_e мощность этих источников, можем написать на основании закона сохранения энергии следующее равенство:

$$p_e = \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \boldsymbol{J}_{пер}\boldsymbol{E}\,dV + \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}. \qquad (**)$$

Умножив это уравнение на dt, получим, что работа, совершаемая всеми источниками за время dt, идет на изменение запаса энергии в магнитном и электрическом полях в объеме V, на выделение теплоты в этом объеме, на увеличение кинетической энергии находящихся в объеме V свободных заряженных частиц и что, кроме того, часть этой работы соответствует энергии, передаваемой за пределы области сквозь поверхность s.

29.4. Излучение электромагнитных волн антенной. Опыты Г. Герца. Работы П. Н. Лебедева. Изобретение радио А. С. Поповым

Всякая цепь переменного тока, строго говоря, излучает электромагнитные волны. Это принципиальное положение следует из решения системы уравнений электромагнитного поля, которое может быть получено для контуров той или иной формы. В следующих параграфах будет приведено решение для электрического диполя с переменными зарядами. Здесь остановимся лишь на некоторых общих соображениях, связанных с вопросом об излучении электромагнитных волн.

Предположим, что ток в некотором контуре увеличивается от нуля до конечного значения и затем вновь уменьшается до нуля. Если увеличивать ток в контуре бесконечно медленно, то потокосцепление самоиндукции Ψ при токе i принимает то значение, которое оно имеет при том же значении установившегося и весьма длительно существующего постоянного тока. Энергия, израсходованная внешним источником ЭДС при увеличении тока и равная $A = \int i\frac{\partial\Psi}{\partial t}dt = \int i\,d\Psi$, преобразуется при этом в энергию магнитного поля. При бесконечно медленном уменьшении тока в контуре вся энергия, запасенная в магнитном поле, возвращается обратно источнику ЭДС. Однако полный возврат энергии поля источнику ЭДС имеет место только при бесконечно медленном изменении тока. При конечной же скорости установления и уменьшения тока часть энергии уносится излученной электромагнитной волной.

Самый факт излучения связан с тем, что скорость v распространения электромагнитного поля имеет конечное значение. Пусть в момент времени $t = 0$ ток в контуре начинает увеличиваться. До момента $t = 0$ ток в контуре отсутствовал. К моменту времени t_1, когда ток в контуре достигает максимального значения, электромагнитное поле успевает распространиться только на конечное расстояние от контура, равное vt_1. Если вслед за тем ток в контуре уменьшается, то энергия поля частично возвращается источнику. Однако граница электромагнитного поля продолжает распространяться в прежнем направлении с той же скоростью v, и к моменту времени t_2, когда ток в контуре вновь станет равен нулю, поле распространится на расстояние от контура, равное vt_2. Поэтому энергия поля не возвращается полностью источнику ЭДС. Часть энергии оказывается связанной с электромагнитной волной, свободно распространяющейся в пространстве.

Из сказанного ясно, что количество энергии излученной волны за некоторый промежуток времени зависит от скорости изменения тока в контуре. При постоянном токе и постоянных зарядах излучение не имеет места. Всякий контур, в котором протекает переменный ток, принципиально говоря, излучает электромагнитные волны. Однако при промышленной частоте $f = 50$ Гц в системах, с которыми мы имеем дело в технических устройствах, количество энергии излученной волны практически ничтожно, и при расчетах мы эту энергию не принимаем во внимание. Излучение незначительно и в диапазоне звуковых частот. Поэтому в радиотехнике используются высокие частоты — приблизительно от $f = 10^5$ Гц и выше.

Способность контура к излучению сильно зависит от его геометрической конфигурации. Для увеличения этой способности необходимо создать такие условия, чтобы магнитное и электрическое поля, связанные с переменным током и переменным напряжением в контуре, были распределены в одной и той же области пространства, окружающего контур. Так, например, контур, изображенный на рис. 29.6, содержащий катушку самоиндукции с плотно навитыми витками обмотки и конденсатор с небольшим расстоянием между пластинами, обладает весьма слабой способностью к излучению, так как основное магнитное поле и основное электрическое поле сосредоточены в разных областях пространства. Излучение незначительно также и у контура, изображенного на рис. 29.7. Магнитное поле распределено вдоль такого контура, но основное электрическое поле остается сосредоточенным в небольшом пространстве между обкладками конденсатора. Но если раздвинуть обкладки на возможно большее расстояние друг от друга, выпрямив соединяющий их провод так, как показано на рис. 29.8, то электрическое и магнитное поля оказываются распределенными в одной и той же области пространства. Такая система обладает высокой способностью к излучению.

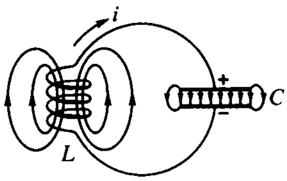

Рис. 29.6

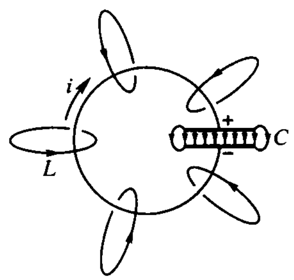

Рис. 29.7

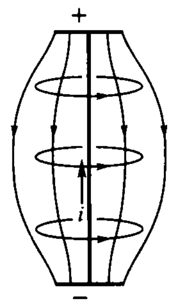

Рис. 29.8

Первые замечательные опыты, экспериментально подтвердившие теорию Максвелла, были поставлены Герцем. Основной колебательный контур, так называемый вибратор, которым пользовался Герц, по существу, был подобен контуру, изображенному на рис. 29.8. Обкладки конденсатора, выполненные либо в виде пластин, либо в виде шаров, могли передвигаться вдоль стержней l_1 и l_2 (рис. 29.9), чем достигалось изменение емкости системы. Чтобы иметь возможность зарядить конденсатор, в проводе, соединяющем его обкладки, был образован между двумя маленькими шариками искровой промежуток K. Обкладки конденсатора Герц присоединял ко вторичным зажимам индукционной катушки R. Каждое прерывание тока в первичной обмотке катушки вызывало импульс ЭДС во вторичной обмотке. Конденсатор заряжался до напряжения, при котором проскакивала искра между шариками. Заряженный конденсатор оказывался короткозамкнутым через искру, и в системе вибратора возникали колебания весьма высокой частоты. Частота колебаний зависела от емкости и индуктивности вибратора. Эти колебания весьма быстро затухали, так как их энергия расходовалась на излучение и на выделение теплоты в контуре.

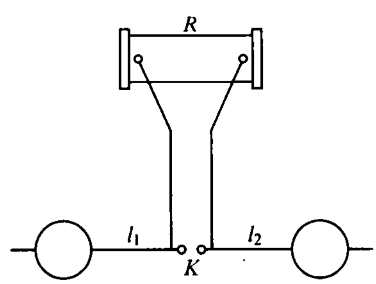

Рис. 29.9

Для обнаружения электромагнитных волн, излученных вибратором, Герц применял так называемый резонатор, состоявший из колебательного контура, снабженного искровым промежутком. При настройке резонатора в резонанс с частотой электромагнитных колебаний в вибраторе в контуре резонатора возникали достаточно сильные колебания, вызывавшие проскакивание искры в его искровом промежутке. По длине этой искры можно было судить об интенсивности электромагнитного поля в месте расположения резонатора. Герцу удалось обнаружить электромагнитное излучение на расстоянии 12 м от вибратора, имевшего геометрические размеры порядка 1 м.

Опыты Герца показали, что электромагнитные волны распространяются в соответствии с законами, которые вытекают из теории Максвелла. Эти опыты подтвердили также гипотезу Максвелла об электромагнитной природе света. Направляя излучение вибратора на большую металлическую пластину нормально к ее поверхности, Герц наблюдал стоячие волны, образующиеся в результате наложения на прямую волну волны, отраженной от пластины. Обнаруживая резонатором узлы и пучности колебаний в стоячей волне, он получал возможность измерять длину волны и, зная частоту электромагнитных колебаний в вибраторе, мог вычислить скорость распространения электромагнитных волн. Эта скорость оказалась равной скорости света.

Герц обнаружил, что электромагнитные волны, излучаемые вибратором, отражаются от металлических зеркал по тем же законам, по которым происходит отражение от зеркала и светового луча, и наблюдал также преломление электромагнитной волны при прохождении ее сквозь большую призму, сделанную из асфальта.

Блестящие опыты по исследованию распространения и преломления в различных средах электромагнитных волн и по экспериментальному доказательству электромагнитной природы света были произведены выдающимся физиком-экспериментатором П. Н. Лебедевым. П. Н. Лебедев впервые осуществил в созданной им лаборатории вибратор весьма малых размеров, который излучал весьма короткие волны, имеющие длину меньше 1 см. Он осуществил также резонатор с термопреобразователем, позволяющий принимать столь короткие волны. Герц, оперировавший волнами, имевшими длину порядка метра, вынужден был создавать призмы и зеркала больших размеров. П. Н. Лебедев в своей установке получил возможность пользоваться преломляющими и отражающими волны устройствами весьма малых размеров. Это не только сделало всю экспериментальную установку негромоздкой, но и открыло новые возможности для исследования, а именно: оказалось возможным исследовать прохождение электромагнитных волн через кристаллические тела. Результаты этого замечательного экспериментального исследования П. Н. Лебедев опубликовал в 1895 г. в работе под названием «О двойном преломлении лучей электрической силы».

Мировую славу принесли П. Н. Лебедеву его блестящие опыты, в которых он впервые экспериментально доказал давление света. В первых опытах, успешно завершенных в 1900 г., П. Н. Лебедев обнаружил и измерил давление света на твердые тела. В последующих, еще более трудных опытах, завершившихся к 1910 г., П. Н. Лебедев экспериментально доказал существование светового давления на газы. Результаты экспериментальных работ П. Н. Лебедева оказались в согласии с выводами максвелловой теории электромагнитного поля.

Имеющее мировое значение изобретение первого радиотелеграфа было сделано выдающимся русским физиком и электротехником А. С. Поповым. А. С. Попову принадлежит заслуга создания первого радиотелеграфа и применения радиосвязи для практических целей. А. С. Попов создал первый приемник радиотелеграфных сигналов. В этом приемнике он использовал для регистрации проходящих электромагнитных волн так называемый когерер, представляющий собой стеклянную трубку с металлическим порошком. Такая трубка имеет весьма большое электрическое сопротивление, но при прохождении в месте ее расположения электромагнитных волн сопротивление трубки резко падает. Включив такую трубку в цепь источника ЭДС, можно по резкому увеличению тока судить о появлении электромагнитных волн. Однако после прекращения действия электромагнитных волн сопротивление трубки вновь не восстанавливается, и для его восстановления требуется встряхнуть трубку. А. С. Попов ввел в свой приемник устройство для автоматического встряхивания трубки, действующее под влиянием тока, возникающего в цепи трубки в результате прохождения электромагнитной волны. Таким образом, трубка автоматически приводилась в состояние готовности зарегистрировать новый сигнал. Это изобретение сразу же дало возможность регистрировать сигналы азбуки Морзе.

Для увеличения чувствительности приема А. С. Попов первый предложил использовать антенну — вертикальный провод, одним концом присоединенный к приемному устройству. Первоначально А. С. Попов применял свое приемное устройство для регистрации приближающихся грозовых разрядов, в связи с чем и назвал изобретенное им устройство грозоотметчиком. Затем он применил это устройство для осуществления радиосвязи в военно-морском деле.

Официальной датой изобретения радио принято считать 7 мая 1895 г., когда А. С. Попов выступил с публичным докладом на заседании физического отделения Русского физико-химического общества на тему «Об отношении металлических порошков к электромагнитным колебаниям». Во время этого доклада А. С. Попов демонстрировал действие своего приемного устройства.

Современные антенны передающих и приемных радиостанций осуществляются по тому же принципу, который был положен в основу конструкции первой антенны А. С. Попова. При конструировании антенны ставится задача создания развернутого колебательного контура. Антенны, расположенные над поверхностью земли, обычно состоят из вертикальных проводов, соединенных с более или менее развитой горизонтальной сетью проводов. Для передающей радиостанции нижний конец антенны присоединяют к одному из зажимов катушки генератора электромагнитных колебаний высокой частоты. Другой зажим катушки соединяют с землей через специальную систему заземлителя. ЭДС высокой частоты, возбужденная в катушке генератора, создает мощные колебания тока в антенне, контур которой обычно настраивают в резонанс с частотой колебаний в генераторе.

Мощность излучения антенны может быть вычислена следующим путем. Если антенна расположена над поверхностью хорошо проводящей земли, то можно представить себе землю замененной зеркальным изображением антенны (рис. 29.10). Окружив антенну и ее зеркальное изображение замкнутой поверхностью s, применим к объему V, ограниченному этой поверхностью, уравнение (**) предыдущего параграфа. Подразумевая под величиной p_e только мощность, равную скорости перехода энергии из антенны

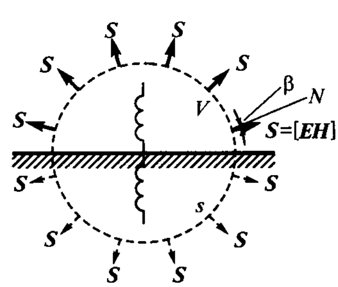

Рис. 29.10

в окружающее ее поле, т. е. исключая из рассмотрения потери энергии в окружающем антенну пространстве: $\gamma = 0$ и $\rho = 0$, $J_{\text{пер}} = 0$, получаем

$$p_e - \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \oint\limits_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} = \oint\limits_s \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{s} = \oint\limits_s S_n ds,$$

где S_n — нормальная к поверхности s составляющая вектора Пойнтинга.

Изменение запаса энергии полей ($W_э + W_м$) в объеме V за целый период колебаний тока в антенне равно нулю. Поэтому средняя мощность волны, излученной антенной и ее зеркальным изображением, равна

$$P_e = \frac{1}{T}\int\limits_0^T p_e dt = \oint\limits_s \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T S_n dt\right) ds = \oint\limits_s S_{n\,\text{ср}} ds,$$

причем $S_{n\,\text{ср}}$ есть среднее арифметическое за период колебаний значение нормальной составляющей вектора Пойнтинга. Таким образом, для вычисления мощности излучения необходимо определить в каждой точке поверхности s для каждого момента времени вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$ и, следовательно, найти величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ путем решения системы уравнений электромагнитного поля.

29.5. Электродинамические векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

Представляется возможным аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении статических и стационарных полей, выразить и в общем случае для переменного электромагнитного поля векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ через вспомогательные величины — векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал U поля. Введение этих вспомогательных величин ценно тем, что они для однородной и изотропной среды довольно просто вычисляются по заданным распределению в пространстве и изменению во времени свободных зарядов и токов проводимости и переноса. Естественно, что при этом $\boldsymbol{A}$ и U являются функциями не только координат, но и времени.

Будем исходить из совокупности уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta};\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{см}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}} = (\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho;\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Здесь обозначены: $\boldsymbol{J}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости; $\boldsymbol{J}_{\text{см}} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ — плотность тока смещения и $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ — плотность тока переноса.

Умножая первое уравнение на μ и используя третье, четвертое и пятое уравнения, можем при $\mu = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$ привести эту совокупность к четырем уравнениям:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Последнее уравнение дает возможность представить вектор $\boldsymbol{B}$ через *векторный потенциал* $\boldsymbol{A}$ электромагнитного поля в виде

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \qquad (*)$$

так как всегда $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0$. Из второго уравнения имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right),$$

что удовлетворяется, если положить

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U, \qquad (**)$$

так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$. Величина U есть *скалярный потенциал* электромагнитного поля.

Подставив выражения (*) и (**) в первое уравнение электромагнитного поля, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Как было показано в § 27.2, имеет место тождество

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2 A_x = \operatorname{grad}_x(\operatorname{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2 A_x.$$

Составляя такие же выражения для проекций A_y и A_z, умножая эти выражения на орты и складывая их, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Вектор $\boldsymbol{A}$ пока выбран так, что определен его вихрь ($\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$). Мы можем еще тем или иным способом определить расхождение этого вектора. Сделаем это так, чтобы упростилось последнее уравнение, а именно, чтобы в нем сократились первый член в левой части с последним членом в правой части. С этой целью примем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (***)$$

После сокращения указанных членов в правой и левой частях уравнения получаем уравнение Даламбера для вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}).$$

Это уравнение распадается на три соответствующих уравнения для проекций A_x, A_y и A_z, причем в правых частях будут содержаться соответственно проекции векторов плотности тока.

Подставляя выражение (**) для $\boldsymbol{E}$ в оставшееся третье уравнение электромагнитного поля, получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}U = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Заменяя div $\boldsymbol{A}$ его выражением через U согласно равенству (***) и замечая, что div grad $U = \nabla^2 U$, находим

$$\nabla^2 U - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

т. е. скалярный потенциал при этом также удовлетворяет уравнению Даламбера.

Заметим, что при постоянных полях, когда $\partial\boldsymbol{A}/\partial t = 0$ и $\partial U/\partial t = 0$, уравнения Даламбера переходят в уже известные нам уравнения Пуассона для U и $\boldsymbol{A}$.

Исследуя поле в области, где нет свободных зарядов ($\rho = 0$) и нет токов проводимости и переноса ($J_{\text{пр}} = 0$, $J_{\text{пер}} = 0$), будем иметь уравнения:

$$\nabla^2 U = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\quad \nabla^2\mathbf{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},$$

которые носят название в о л н о в ы х у р а в н е н и й.

Получим, пользуясь некоторыми общими соображениями, выражения для U, A_x, A_y и A_z, определяющие эти величины по заданному распределению зарядов и токов и их изменению во времени и являющиеся частными интегралами приведенных выше уравнений Даламбера.

Предположим, что в некотором малом элементе объема пространства содержится изменяющийся во времени заряд q. Естественно, это осуществимо физически только путем притекания свободных заряженных частиц в данный элемент объема из смежных с ним элементов объема или утекания их из данного элемента объема в смежные с ним элементы объема. Однако сначала рассмотрим поле, создаваемое только зарядом, находящимся в данном элементе объема. Пусть элемент объема столь мал, что заряд q можно рассматривать как точечный.

Вне заряда q потенциал U удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

причем $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Найдем решение этого уравнения для рассматриваемого случая. Полагая, что заряд находится в начале координат и обозначая через r расстояние от заряда до точки, в которой определяется U, будем иметь

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;\quad 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

и аналогично

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Поле заряда q обладает сферической симметрией, и, следовательно, U является функцией только r и t. При этом вектор grad U направлен по радиусу и имеет величину, равную $\mathrm{grad}_r\, U = \partial U/\partial r$. При таком условии имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)x\frac{\partial U}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{x}{r}x\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Составляя такие же выражения для $\partial^2 U/\partial y^2$ и $\partial^2 U/\partial z^2$ и складывая их, получаем

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}.$$

Волновое уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2}.$$

Последнее уравнение для rU совершенно аналогично уравнению (*) для E_x, которое мы имели при исследовании плоской волны в § 29.1. Следовательно, по аналогии можем написать его решение в виде

$$rU = F_1(r - vt) + F_2(r + vt).$$

Интересуясь только прямой волной, распространяющейся от заряда, ограничимся рассмотрением частного решения $F_1(r - vt)$, причем запишем его в виде

$$rU = F_1\left[-v\left(t - \frac{r}{v}\right)\right] = f\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

При этом $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ есть скорость распространения волны. Итак, имеем

$$U = \frac{f(t - r/v)}{r}.$$

Так как в частном случае для не изменяющегося во времени заряда q эта формула должна приобрести вид $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, то, следовательно, $f\left(t - \dfrac{r}{v}\right) = \dfrac{q(t - r/v)}{4\pi\varepsilon}$.

Здесь $q(t - r/v)$ — *значение заряда q в момент времени $(t - r/v)$, предшествующий моменту времени t, в который определяется U. При этом r/v есть промежуток времени, в течение которого волна, движущаяся со скоростью v, проходит путь r.*

Если заряды распределены в некотором объеме V пространства с объемной плотностью $\rho(x, y, z, t)$, являющейся функцией координат и времени, то, применяя полученное решение к элементарному заряду $dq = \rho dV$, заключенному в элементе объема dV, и суммируя потенциалы в некоторой точке поля от всех элементарных зарядов, получаем

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(t - r/v)dV}{r},$$

где r — расстояние от элемента объема dV до точки, в которой определяется U.

Последнее выражение является частным решением уравнения Даламбера для U.

Аналогичным путем получаем частные решения уравнений Даламбера для проекций вектора $\boldsymbol{A}$:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x(t - r/v)\,dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_y(t - r/v)\,dV}{r}; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_z(t - r/v)\,dV}{r}.$$

Здесь $J_x(t - r/v)$, $J_y(t - r/v)$ и $J_z(t - r/v)$ — значения проекций вектора плотности тока проводимости или переноса в элементе объема dV в момент $(t - r/v)$, *предшествующий* моменту t, в который определяются A_x, A_y и A_z.

Полученные выражения переходят при постоянных токах в найденные ранее выражения (см. § 27.2).

Полученный результат имеет глубокое принципиальное значение — он выражает то существенное обстоятельство, что электромагнитные возмущения распространяются от центров возмущения с конечной скоростью v, и чем дальше от центра возмущения, тем больше запаздывает их действие. Соответственно *скалярный* U и *векторный* $\boldsymbol{A}$ потенциалы, выражаемые последними формулами, называют электродинамическими запаздывающими потенциалами.

В заключение обратим внимание на то, что выражение для напряженности электрического поля (**), помимо члена (−grad U), содержит еще член $(-\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$. Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого произвольного замкнутого контура, будем иметь

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \oint\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U\right)d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

так как $\oint \operatorname{grad} U\,d\boldsymbol{l} = 0$ и так как интеграл $\oint \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$ равен магнитному потоку Φ сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования.

Таким образом, составляющая $(-\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$ напряженности электрического поля имеет смысл ЭДС, индуцируемой переменным магнитным потоком, отнесенной к единице длины в направлении этой составляющей.

В электростатическом поле и электрическом стационарном поле около неподвижных проводников с постоянными токами электродвижущие силы индукции отсутствуют, и напряженность электрического поля в этом случае определяется только членом (−grad U), причем U не зависит от времени.

29.6. Электрический диполь с переменными зарядами

Рассмотрим электрическую колебательную систему, образованную двумя малыми металлическими сферами, соединенными проводником длиной l. Предположим, что вся емкость такого вибратора есть емкость между сферами и что соединительный проводник обладает только индуктивностью. При возникновении колебаний в такой системе переменный ток i в проводнике в каждый момент времени имеет одно и то же значение вдоль всего проводника.

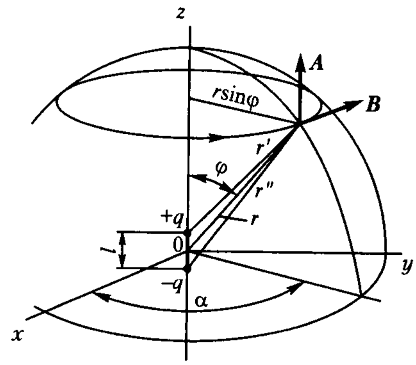

Рис. 29.11

Такой вибратор на расстояниях r от него, намного превышающих l, можно рассматривать как диполь с переменным электрическим моментом ql. Поместим диполь в начале координат и направим его ось по оси $0z$ (рис. 29.11).

Запаздывающий векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ в точке, удаленной на расстояние r от вибратора, равен

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_l \frac{i(t-r/v)\,dl}{r} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{i(t-r/v)\,l}{r}.$$

Последнее выражение получается, если учесть, что при $r \gg l$ величину $1/r$, а также, в соответствии с вышеотмеченным положением об одинаковости тока вдоль проводника, и величину $i(t - r/v)$ можно вынести за знак интеграла.

Запаздывающий скалярный потенциал в той же точке равен

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q(t-r'/v)}{r'} - \frac{q(t-r''/v)}{r''}\right].$$

При $r \gg l$ имеем

$$r' \approx r - \frac{l}{2}\cos\varphi; \quad r'' \approx r + \frac{l}{2}\cos\varphi.$$

Разлагая эти выражения в ряд по степеням малой величины $\frac{l}{2}\cos\varphi$ и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем

$$\frac{q(t-r'/v)}{r'} = \frac{q(t-r/v)}{r} - \frac{l}{2}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right];$$

$$\frac{q(t-r''/v)}{r''} = \frac{q(t-r/v)}{r} + \frac{l}{2}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right].$$

Следовательно,

$$U = -\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right].$$

Условимся в дальнейшем опускать обозначение аргумента $(t - r/v)$ и кратко писать

$$q(t-r/v)=q,\quad i(t-r/v)=i.$$

Заметив, что

$$\frac{\partial q}{\partial r}=-\frac{1}{v}\frac{\partial q}{\partial t}\quad \text{и}\quad \frac{\partial i}{\partial r}=-\frac{1}{v}\frac{\partial i}{\partial t},$$

будем, пользуясь этими соотношениями, производные $\partial q/\partial r$ и $\partial i/\partial r$ заменять умноженными на $(-1/v)$ производными $\partial q/\partial t$ и $\partial i/\partial t$. Кроме того, заметим, что $\partial q/\partial t = i$ и $\partial^2 q/\partial t^2 = \partial i/\partial t$.

Составляющие вектора магнитной индукции определяются из соотношений:

$$B_x=\mathrm{rot}_x\boldsymbol{A};\quad B_y=\mathrm{rot}_y\boldsymbol{A};\quad B_z=\mathrm{rot}_z\boldsymbol{A}.$$

Заметив, что $A_x = A_y = 0$ и $A_z=\dfrac{\mu i l}{4\pi r}$, находим

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\mu l}{4\pi}\left(-\frac{i}{r^2}-\frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\frac{y}{r};$$

$$B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}=-\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\mu l}{4\pi}\left(-\frac{i}{r^2}-\frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\frac{x}{r};\quad B_z=0.$$

Так как $B_x/B_y = -y/x$, то вектор $\boldsymbol{B}$ касателен к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси $0z$ и имеющей центр на этой оси (см. рис. 29.11). Эти окружности являются магнитными линиями. Следовательно, в сферической системе координат r, φ, α вектор $\boldsymbol{B}$ имеет единственную составляющую B_α, равную по значению $|B_\alpha|=\sqrt{B_x^2+B_y^2}$. Так как $\sqrt{x^2+y^2}=r\sin\varphi$ и знак B_α должен совпадать со знаком B_y при $y = 0$ и $x > 0$ (см. рис. 29.11), то

$$B_\alpha=\frac{\mu l}{4\pi}\left(\frac{i}{r^2}+\frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\sin\varphi=\frac{\mu l\sin\varphi}{4\pi r v}\left(\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{v}{r}i\right).\qquad (*)$$

Определим составляющие E_α, E_r и E_φ в сферических координатах, пользуясь выражением

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,U,$$

причем заметим, что $A_\alpha = 0$, $A_r = A_z\cos\varphi$ и $A_\varphi = -A_z\sin\varphi$ и что U можно представить в виде

$$U=-\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right)=-\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{rv}\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{q}{r^2}\right)=\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{i}{rv}+\frac{q}{r^2}\right).$$

Так как A_α и U не зависят от α, то $E_\alpha = 0$. Далее имеем

$$E_r=-\frac{\partial A_r}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{\mu l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial i}{\partial t}-\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{rv^2}\frac{\partial i}{\partial t}-\frac{i}{r^2v}-\frac{1}{r^2v}\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{2q}{r^3}\right).$$

Так как $\frac{1}{\varepsilon v^2} = \mu$, то первое слагаемое и первый член в скобках сокращаются и получаем

$$E_r = \frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2i}{r^2 v} + \frac{2q}{r^3}\right) = \frac{2\mu l\cos\varphi}{4\pi r}\left(\frac{v}{r}i + \frac{v^2}{r^2}q\right). \qquad (**)$$

Наконец,

$$E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\mu l\sin\varphi}{4\pi r}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{l\sin\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^2 v}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{r^3}\right)$$

или

$$E_\varphi = \frac{\mu l\sin\varphi}{4\pi r}\left(\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r}i + \frac{v^2}{r^2}q\right). \qquad (***)$$

Поскольку $E_\alpha = 0$, то $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$.

В дальнейшем будем рассматривать важный практический случай синусоидального изменения тока в диполе: $I_m \sin \omega t$. С учетом конечной скорости распространения электромагнитных волн в выражении для напряженности электрического поля и для магнитной индукции мы должны подставить величину $i = I_m \sin \omega (t - r/v)$. Замечая, что $\omega r/v = 2\pi r/(Tv) = 2\pi r/\lambda$, где T — период колебаний и $\lambda = vT$ — длина волны, получаем

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega I_m \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right); \quad \frac{v}{r}i = \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)\omega I_m \sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right);$$

$$\frac{v^2}{r^2}q = -\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 \omega I_m \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Следовательно, в выражениях для B_α, E_r и E_φ амплитуда каждого последующего члена отличается от амплитуды предыдущего множителем $\frac{\lambda}{2\pi r}$.

29.7. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны

Пусть $r \ll \lambda$. В этом случае можно оставить только последние члены в выражениях для B_α, E_r и E_φ. Имеем

$$B_\alpha = \frac{\mu l i \sin\varphi}{4\pi r^2}; \quad E_r = \frac{2lq\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}; \quad E_\varphi = \frac{lq\sin\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

При этом приближенная формула для B_α совпадает с формулой Био–Савара–Лапласа, справедливой для постоянного тока. Приближенные формулы для E_r и E_φ совпадают с формулами, выведенными ранее для статического диполя (см. § 24.2).

Рассмотренные здесь члены общих выражений для составляющих векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ определяют только реактивную мощность в связи с тем, что мгновенные напряженности магнитного и электрического полей сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол $\pi/2$, так как на этот угол сдвинуты по фазе i и q. Заметим, что составляющие, которыми мы здесь пренебрегли, но которые существуют и в рассматриваемой области ($r \ll \lambda$), определяют активную мощность, что будет показано в следующем параграфе.

29.8. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину волны

При $r \gg \lambda$ в выражениях для B_α и для E_φ можно пренебречь всеми членами, кроме первых. Величиной E_r можно пренебречь полностью, так как оба ее члена весьма малы по сравнению с первым членом составляющей E_φ. Имеем

$$B_\alpha = \frac{\mu l \sin\varphi}{4\pi r v}\omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = \frac{\mu l I_m}{2r\lambda}\sin\varphi\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right);$$

$$E_\varphi = \frac{\mu l \sin\varphi}{4\pi r}\omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = vB_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}B_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_\alpha.$$

Волна, имеющая такой характер, называется сферической.

Мы приходим к замечательному соотношению, полученному ранее при исследовании плоской волны:

$$\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

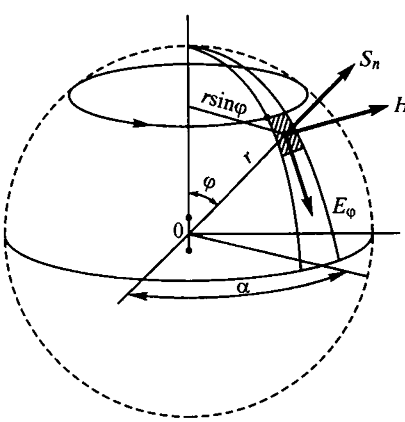

Рис. 29.12

Таким образом, и для сферической электромагнитной волны энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Отметим особо, что E и H имеют одинаковую фазу колебаний и, следовательно, определяют собой активную мощность. Вектор Пойнтинга, как это видно из рис. 29.12, в любой момент времени и в любой точке направлен по радиусу r в сторону от диполя и, следовательно, энергия передается в направлении радиусов от диполя. Эта энергия уже не возвращается обратно к источнику и является энергией излученного электромагнитного поля.

29.9. Мощность и сопротивление излучения диполя и антенны

Окружим диполь сферической поверхностью, имеющей центр в месте расположения диполя (рис. 29.12), и вычислим мощность потока электромагнитной энергии, проходящей сквозь эту поверхность. Нормальная к поверхности сферы составляющая вектора Пойнтинга равна $S_n = E_\varphi H_\alpha$. Отличное от нуля среднее арифметическое за период значение этой составляющей вектора Пойнтинга $S_{n\,\text{ср}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T E_\varphi H_\alpha dt$ может получиться только от тех составляющих произведения

$E_\varphi H_\alpha = E_\varphi B_\alpha/\mu$, которые являются произведениями членов выражений (*) и (***) в § 29.6 для B_α и E_φ, находящихся в одинаковой фазе. К ним относятся произведение первых членов B_α и E_φ, произведение первого члена B_α и третьего члена E_φ и произведение вторых членов B_α и E_φ. Легко убедиться, что два последних произведения в сумме не дают отличной от нуля средней мощности.

Таким образом, остается только произведение первых членов B_α и E_φ, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Имеем

$$S_{n\,\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2 l^2}{4r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dt.$$

Учитывая, что $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dt = \frac{1}{2}$, получаем

$$S_{n\,\text{ср}} = \frac{I_m^2 l^2}{8r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi = \frac{I^2 l^2}{4r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi,$$

где $I = I_m/\sqrt{2}$ — действующий ток.

Элемент поверхности сферы (см. рис. 29.12) равен $ds = r\,d\varphi\, r\sin\varphi\, d\alpha$. Средняя мощность всего потока электромагнитной энергии сквозь поверхность сферы оказывается равной

$$P = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{I^2 l^2}{4r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi\right)r^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\alpha = \frac{\pi I^2 l^2}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi.$$

Но

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi = \int_1^{-1} -\sin^2\varphi\, d\cos\varphi = \int_1^{-1}(\cos^2\varphi - 1)\,d\cos\varphi = \frac{4}{3}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{\lambda^2}I^2.$$

Итак, средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой сквозь поверхность сферы, оказалась отличной от нуля. Эта мощность численно равна энергии электромагнитного поля, *излучаемого* диполем, отнесенной к единице времени.

Множитель при I^2 представляет собой активное сопротивление колебательного контура, характеризующее его способность к излучению. Его называют с о п р о т и в л е н и е м и з л у ч е н и я. Для электрического диполя сопротивление излучения R' выражается формулой

$$R' = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Реальная антенна представляет собой более сложную, чем диполь, излучающую систему. Обычно антенна состоит из проводов, расположенных над поверхностью земли. Участки антенны обладают емкостью по отношению к земле и относительно друг друга. Вследствие этого мгновенный ток неодинаков вдоль проводов антенны, так как ток ответвляется от проводов в диэлектрик в виде тока смещения. Однако всегда можно разделить провод на элементарные отрезки длиной dl, в пределах которых ток можно считать одинаковым в каждый данный момент времени. Эти отрезки с переменным током i представляют собой не что иное, как элементарные диполи. Электромагнитное поле всей антенны определится путем наложения полей всех диполей, т. е. путем интегрирования вдоль проводов антенны.

Наиболее просто можно использовать результаты, полученные для диполя, для антенны, расположенной над поверхностью весьма хорошо проводящей земли и образованной вертикальным проводом, заканчивающимся в верхней своей части сильно развитой системой горизонтальных проводов (рис. 29.13). При этих условиях землю можно заменить зеркальным изображением антенны, а также можно пренебречь емкостью вертикального провода. Заметим еще, что горизонтальные провода и их зеркальные изображения практически мало излучают энергию, так как токи в действительных горизонтальных проводах и в их зеркальных изображениях направлены в противоположные стороны (рис. 29.13). Эти горизонтальные участки предназначены для увеличения емкости системы, что приводит к увеличению тока в вертикальном проводе, а следовательно, к увеличению мощности излучения. Таким образом, рассматриваемая антенна приводится к переменному электрическому диполю, имеющему длину $l = 2h$, где h — высота действительной антенны. Электромагнитное поле на расстояниях $r \gg h$ характеризуется теми же соотношениями, что и для диполя.

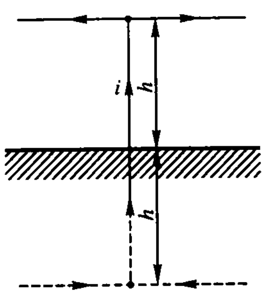

Рис. 29.13

Сопротивление излучения R' такой антенны вместе с ее зеркальным изображением найдется из последней формулы, если в ней положить $l = 2h$. В действительности излучает только сама антенна. Поэтому сопротивление излучения антенны определится формулой

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{(2h)^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Обычно антенна расположена в воздухе и $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Подставив числовые значения ε_0 и μ_0, получаем $R = (4\pi)^2 \cdot 10 \frac{h^2}{\lambda^2} = 1580 \frac{h^2}{\lambda^2}$ Ом.

29.10. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся в диэлектрике вдоль проводов линии. Провода линии служат направляющими электромагнитного поля.

Окружим часть линии вместе с приемником замкнутой поверхностью s (рис. 29.14). На основании уравнения (*), полученного в § 29.3, можем написать:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \gamma E^2 dV + \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s},$$

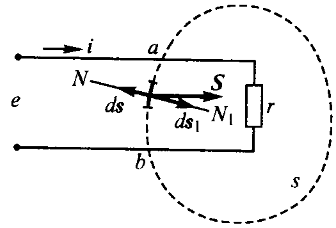

Рис. 29.14

если в пространстве, окружающем провода линии, нет свободных зарядов ($\rho = 0$; $J_{пер} = 0$).

Если V — объем области, заключенной внутри поверхности s, то вектор $d\boldsymbol{s}$ должен быть направлен по нормали N, внешней к этой области. Если мы желаем считать положительной энергию, передаваемую внутрь области V сквозь поверхность s, то необходимо изменить направление положительной нормали на обратное, т. е. принять положительной внутреннюю нормаль N_1 (рис. 29.14). Вектор $d\boldsymbol{s}_1$, направленный по нормали N_1, равен $d\boldsymbol{s}_1 = -d\boldsymbol{s}$. Заменяя в последнем равенстве $d\boldsymbol{s}$ на $d\boldsymbol{s}_1$, получим

$$\oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) + \int_V \gamma E^2 dV.$$

Мы видим, что приращение энергии электрического и магнитного полей в объеме V и поглощение энергии в приемнике и в проводах линии, расположенных в этом объеме, происходит за счет передачи электромагнитной энергии в область V сквозь ограничивающую ее поверхность s.

В частном случае, когда ток в цепи постоянный, энергия полей не изменяется во времени. Следовательно, первый член в правой части последнего уравнения равен нулю, и имеем

$$\oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}_1 = \int_V \gamma E^2 dV,$$

т. е. энергия, поглощаемая в цепи в виде теплоты, равна энергии, передаваемой в область V через поверхность s.

Таким образом, энергия, выделяемая в проводнике в виде теплоты, передается в проводник сквозь поверхность проводника из диэлектрика, окружающего проводник.

В простейшем случае для отрезка l прямолинейного провода круглого сечения радиуса R (рис. 29.15) это положение подтверждается непосредственным вычислением напряженностей полей на поверхности провода. Вычислим поток электромагнитной энергии сквозь поверхность s отрезка провода. Имеем $H = \frac{i}{2\pi R}$ и $E_t = \frac{ir}{l}$, причем E_t — составляющая напряженности электрического поля по касательной к поверхности провода и r — сопротивление отрезка провода. Следовательно, нормальная составляющая вектора Пойнтинга равна

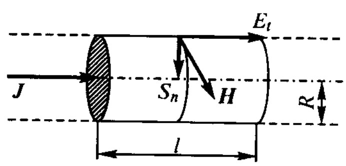

Рис. 29.15

$$S_n = E_t H = \frac{i^2 r}{2\pi R l}.$$

Величина $2\pi Rl = s$ есть площадь цилиндрической поверхности отрезка провода. Мощность, передаваемая в провод сквозь его поверхность из окружающей среды, оказывается равной

$$S_n s = i^2 r.$$

На рис. 29.16 показаны направления линий напряженности магнитного и электрического полей около проводов линии передачи. Линии напряженности электрического поля несколько изогнуты, так как вследствие наличия активного сопротивления самих проводов вектор $\boldsymbol{E}$ у поверхности провода имеет касательную к этой поверхности составляющую по направлению тока в проводе. Определяя направление вектора Пойнтинга в разных точках поля, получаем картину, изображенную на рисунке. Мы видим, что поток электромагнитной энергии направлен в диэлектрике от генератора к приемнику и частично — внутрь провода вследствие наличия активного сопротивления проводов.

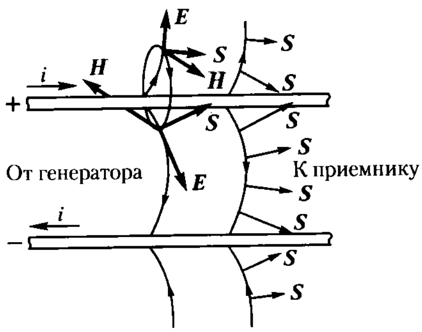

Рис. 29.16

Необходимо отметить, что изгиб линий напряженности электрического поля на рис. 29.16 сильно преувеличен. В поле действительной линии передачи этот изгиб ничтожен, так как касательная составляющая вектора $\boldsymbol{E}$ у поверхности провода весьма мала по сравнению с нормальной составляющей (см. § 26.2).

При исследовании однородных линий было показано, что скорость v движения волн электрического тока и напряжения вдоль линии (см. т. II) равна $\sqrt{LC}$, где L и C — индуктивность и емкость линии на единицу ее длины. Так как энергия передается электромагнитным полем в диэлектрике, окружающем провода линии, то скорость v должна равняться скорости движения электромагнитной волны в диэлектрике. Следовательно, должно иметь место равенство

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

где ε и μ — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика. В этом выражении L есть внешняя индуктивность, определяемая магнитным потоком в диэлектрике. Например, для кабеля имеем (см. т. § 3.5)

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Следовательно,

$$LC = \mu\varepsilon.$$

29.11. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб

В предыдущем параграфе мы видели, что провода линии передачи служат направляющими электромагнитного поля, движущегося в диэлектрике, окружающем эти провода. Однако такую направляющую роль провода линии могут выполнять только при условии, что длина электромагнитной волны в диэлектрике во много раз превосходит расстояние между проводами, т. е. только при условии, что частота напряжения и тока не слишком велика. В противном случае провода линии будут весьма эффективно излучать электромагнитное поле в окружающее пространство, т. е. будут действовать подобно антенне.

Таким образом, при весьма высоких частотах, соответствующих так называемым ультракоротким волнам с длиной волны порядка нескольких сантиметров, которыми пользуется современная радиотехника, уже становится затруднительным передавать энергию по линиям обычного вида. Затруднения при этом возрастают еще потому, что при столь больших частотах в изоляции проводов возникают значительные потери энергии. При креплении проводов на отдельных изоляторах имеем в местах расположения изоляторов среду с повышенной диэлектрической проницаемостью, что превращает линию в своего рода фильтр, срезающий высокие частоты.

В связи со всем сказанным относительно свойств линии передачи при весьма высоких частотах представляет большой интерес возможность передачи электромагнитным полем энергии внутри металлических труб.

Стенки трубы, если они выполнены из материала с весьма высокой удельной проводимостью, не пропускают сквозь себя электромагнитные волны. В предельном случае, когда труба имеет стенки из сверхпроводящего материала, электрические токи, возникающие в стенках трубы, не создают падения напряжения и, следовательно, касательная составляющая напряженности электрического поля на внутренней поверхности стенок всюду должна быть равна нулю. Следовательно, вектор Пойнтинга не имеет составляющей, нормальной к поверхности стенки. Электромагнитное поле не проникает внутрь стенок и может при надлежащих условиях передавать энергию только в направлении оси трубы.

При детальном анализе условий распространения электромагнитных волн вдоль трубы, который произведем в следующем параграфе, выясняется одна интересная и важная особенность, а именно: вдоль трубы возможно распространение только коротких волн, для которых длина волны в свободном пространстве одного порядка с поперечными размерами полости трубы или меньше их. В связи с этим такие трубы получили применение в радиотехнических устройствах ультракоротких волн для передачи электромагнитной энергии от генератора электромагнитных колебаний к излучающему устройству и получили название *волноводов*. Длина волноводов обычно невелика, и, следовательно, потери энергии в их стенках, вызванные конечной удельной проводимостью материала стенок, незначительны. Поэтому при исследовании вопроса о распространении электромагнитных волн в волноводах предположим, что удельная проводимость материала стенок бесконечно велика, не допуская при этом существенных отклонений от практических условий.

29.12. Волноводы

Для уяснения особенностей распространения электромагнитных волн в металлических трубах рассмотрим наиболее простой и вместе с тем имеющий большое практическое значение волновод прямоугольного сечения. Ось $0z$ направим вдоль трубы. Оси $0x$ и $0y$ расположим так, как показано на рис. 29.17.

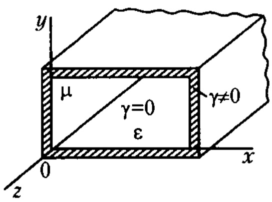

Рис. 29.17

Рассмотрим случай, когда линии напряженности электрического поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси $0z$, т. е. когда $E_z = 0$.

Предполагая, что все величины изменяются во времени по синусоидальному закону, воспользуемся символическим методом. Кроме того, предположим, что волновод имеет бесконечную длину по оси $0z$. По аналогии со случаем движения волн тока и напряжения вдоль длинных однородных линий (см. гл. 18) предположим, что изменение напряженностей полей вдоль оси $0z$ выражается функцией вида $e^{-\gamma' z}$, что соответствует наличию одной прямой бегущей волны. (Здесь через γ' обозначена величина, имеющая смысл коэффициента распространения, в отличие от γ, которая обозначает удельную электрическую проводимость вещества.)

При этих условиях комплексные выражения мгновенных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей будут иметь вид

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{H}_z = \dot{H}_{mz} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z},$$

где комплексные амплитуды $\dot{E}_{mx}$, $\dot{E}_{my}$, $\dot{H}_{mx}$, $\dot{H}_{my}$ и $\dot{H}_{mz}$ являются функциями x и y.

Подставляя эти выражения в уравнения (*а*)–(*е*) в § 29.1 и учитывая, что в диэлектрике $\gamma = 0$ и $\rho = 0$ и что, кроме того, по условию $\dot{E}_z = 0$, после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}$ получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + \gamma' \dot{H}_{my} = j\omega\varepsilon \dot{H}_{mx}; \quad (а) \qquad \gamma' \dot{E}_{my} = -j\omega\mu \dot{H}_{mx}; \quad (г)$$

$$-\gamma' \dot{H}_{mx} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = j\omega\varepsilon \dot{E}_{my}; \quad (б) \qquad -\gamma' \dot{E}_{mx} = -j\omega\mu \dot{H}_{my}; \quad (д)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0 \quad (в) \qquad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -j\omega\mu \dot{H}_{mz}. \quad (е)$$

Подставляя E_{my} из (*г*) в (*б*) и E_{mx} из (*д*) в (*а*), находим

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}; \quad \dot{H}_{my} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \qquad (*)$$

где $k^2 = \gamma'^2 + \omega\mu\varepsilon$.

Уравнение (*в*), если в него подставить выражения (*), удовлетворяется автоматически. Остается уравнение (*е*). Подставляя в него $\dot{E}_{mx}$ и $\dot{E}_{my}$ из (*д*) и (*г*) и затем вместо $\dot{H}_{mx}$ и $\dot{H}_{my}$ их выражения (*), получаем уравнение для H_{mz}:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0. \qquad (**)$$

Будем искать $\dot{H}_{mz}$ в форме $H_{mz} = XY$, где X — функция только x и Y — функция только y. Последнее уравнение принимает вид

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 XY = 0.$$

Разделив его на XY, находим

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Левая часть последнего уравнения является функцией только x, правая — функцией только y. Следовательно, уравнение удовлетворяется для любых x и y только в том случае, если и левая и правая его части равны некоторой постоянной величине η^2. При этом уравнение распадается на два:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \xi^2 X = 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \eta^2 Y = 0,$$

где $\xi = k^2 - \eta^2$.

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$X = A\cos(\xi x + \varphi); \quad Y = B\cos(\eta y + \psi);$$
$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos(\xi x + \varphi)\cos(\eta y + \psi),$$

где $\dot{H}_0 = AB$.

Постоянные ξ, η, φ и ψ определяются из граничных условий на поверхностях стенок волновода. При сверхпроводящих стенках падение напряжения в них равно нулю и, следовательно, внутри стенок всюду $E_m = 0$. Поэтому граничным условием для поля в диэлектрике внутри волновода является равенство нулю у поверхности стенки касательной к этой поверхности составляющей вектора $\boldsymbol{E}$. Используя это условие, имеем (рис. 29.18)

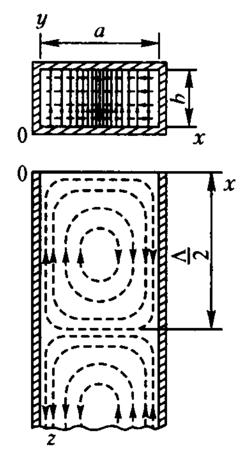

Рис. 29.18

$$\dot{E}_{my} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \;\text{ и }\; x = a;$$

$$\dot{E}_{mx} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \;\text{ и }\; y = b.$$

Из уравнений (*г*), (*д*) и (*) при этом получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ \text{ и } \ x = a;$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \ \text{ и } \ y = b.$$

Это дает $\varphi = 0$; $\xi = m\pi/a$; $\psi = 0$; $\eta = n\pi/b$, где m и n — целые числа. Имеем окончательно

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*) и используя уравнения (*г*) и (*д*), находим комплексные выражения мгновенных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' m\pi}{ak^2}\dot{H}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{H}_y = \frac{\gamma' n\pi}{bk^2}\dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{bk^2}\dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu m\pi}{ak^2}\dot{H}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0.$$

Кроме того, уравнение (**) после подстановки в него выражения $\dot{H}_{mz}$ и его вторых производных дает

$$\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2\right]\dot{H}_{mz} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2.$$

Найденное решение показывает, что в волноводе может существовать ряд волн, причем каждая волна соответствует паре целых чисел m и n. Задание одновременно m и n равными нулю приводит к равенству нулю всех составляющих E. Следовательно, простейший случай получается, если одно из этих чисел равно нулю, а другое равно единице. Пусть, например, $m = 1$ и $n = 0$. Согласно последнему соотношению, при этом $k = \pi/a$ и уравнения для составляющих напряженностей поля приобретают вид

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' a}{\pi}\dot{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{H}_y = 0; \quad \dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_x = 0; \quad \dot{E}_y = -j\frac{\omega\mu a}{\pi}\dot{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0.$$

Постоянная γ' имеет такой же смысл, как *коэффициент распространения* в теории однородных линии (см. гл. 17). В общем случае можно ее представить в виде $\gamma' = \alpha + j\beta$, где величина α характеризует затухание волны вдоль оси $0z$ и может быть названа *коэффициентом затухания*, а величина β характеризует изменение фазы вдоль оси $0z$ и может быть названа *коэффициентом фазы.*

Из соотношений $k^2 = \gamma'^2 + \omega^2\mu\varepsilon$ и $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2$ получаем для прямоугольного волновода со сверхпроводящими стенками

$$\gamma'^2 = k^2 - \omega^2\mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon. \qquad (***)$$

При $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \omega^2\mu\varepsilon$ имеем $\gamma'^2 > 0$ и γ' — вещественное число, т. е. $\gamma' = \alpha$ и $\beta = 0$. В этом случае получаем *затухающую волну.*

При $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \omega^2\mu\varepsilon$ имеем $\gamma' < 0$ и γ' — мнимое число, т. е. $\gamma' = j\beta$ и $\alpha = 0$. В этом случае получаем волну, распространяющуюся вдоль волновода *без затухания.*

Мы приходим к интересному заключению, что для волновода с заданными размерами a и b существует к р и т и ч е с к а я ч а с т о т а, определяемая из условия $\gamma' = 0$ выражением

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

При частотах ниже ω_0 *невозможно* распространение вдоль волновода волн без затухания. При частотах выше ω_0 волны распространяются без затухания.

Обозначая, как и ранее, через λ длину электромагнитной волны при ее распространении в свободном пространстве (вне стенок волновода), будем иметь (см. § 29.2)

$$\lambda = vT = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\omega}.$$

Следовательно, критической частоте ω_0 соответствует к р и т и ч е с к а я д л и н а в о л н ы λ_0 в свободном пространстве:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}.$$

Величины ω_0 и λ_0 зависят от чисел m и n, определяющих характер волны. Если $a > b$, то самая малая критическая частота получается при $m = 1$ и $n = 0$. Она оказывается равной $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\pi}{a}$ и, следовательно, наибольшая критическая длина волны имеет значение $\lambda_0 = 2a$. Если $a = 10$ см, то $\lambda_0 = 20$ см и $f_0 = \omega_0/(2\pi) = v/\lambda_0 = = 3\cdot10^{10}/20 = 1{,}5\cdot10^9$ Гц. Из этого примера видно, что волновод способен пропускать электромагнитные волны только весьма высокой частоты.

Так как при $\omega > \omega_0$ имеем $\gamma' = j\beta$ и $e^{j\omega t-\gamma' z} = e^{j(\omega t-\beta z)}$, то для получения выражений для действительных мгновенных величин H_x, H_y, H_z, E_x и E_y необходимо в их комплексных выражениях заменить множитель $e^{j\omega t-\gamma' z}$ на $\sin(\omega t - \beta z)$. Величина $\omega/\beta = v'$ есть *фазовая скорость* волны.

Длина волны Λ в волноводе получается из соотношения $\beta\Lambda = 2\pi$. Заменяя в соотношении (***) γ'^2 через $(-\beta^2)$ и $\omega^2\mu\varepsilon$ через $(2\pi/\lambda)^2$, находим

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Тогда

$$\frac{2}{\Lambda} = \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

Отсюда видно, что длина волны Λ в волноводе больше длины волны λ в свободном пространстве при той же частоте. Эта разница тем больше, чем больше λ приближается к критической длине волны λ_0, и при $\lambda = \lambda_0$ получаем $\Lambda = \infty$.

Фазовая скорость может быть представлена в виде $v' = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{2\pi}\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\Lambda}{\lambda} = v\frac{\Lambda}{\lambda}$. Следовательно, фазовая скорость v' электромагнитных волн в волноводе больше скорости движения электромагнитных волн в свободном пространстве. Это, конечно, не означает, что электромагнитное поле движется со скоростью, большей, чем v, так как v' есть только скорость, с которой в установившемся режиме движется фазовое распределение вдоль оси $0z$.

В вышеисследованном случае вдоль оси $0z$ волновода имеет отличную от нуля составляющую только напряженность магнитного поля. Соответственно волны такого типа получили наименование «магнитных волн». Их принято обозначать буквой H. Так как линии напряженности электрического поля при этом лежат целиком в поперечных сечениях волновода, то волны этого типа называют также «поперечными электрическими волнами» и обозначают буквами TE. Для прямоугольных волноводов вводят обозначение H_{mn} (или соответственно TE_{mn}), причем индексы соответствуют вышеуказанным числам m и n. На рис. 29.18 изображена в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода картина поля для волны H_{10} (или TE_{10}). Сплошными линиями изображены линии напряженности электрического поля, штриховыми — линии напряженности магнитного поля. При боль-

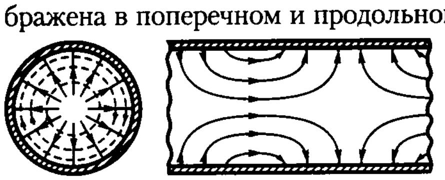

Рис. 29.19

ших значениях чисел m и n картина получается более сложной.

Могут существовать также так называемые электрические волны, обозначаемые буквой E с соответствующими индексами. Волны этого типа характеризуются тем, что в них вдоль оси волновода отличную от нуля составляющую имеет только напряженность электрического поля. Эти волны называют также «поперечными магнитными волнами», обозначая их при этом буквами TM.

На рис. 29.19 изображены линии напряженности магнитного поля (штриховые линии) и электрического поля (сплошные линии) для простейшего случая — «электрической» волны в цилиндрическом волноводе. Этот случай интересен тем, что картина поля в нем имеет много общего с картиной поля при распространении электромагнитных волн вдоль концентрического кабеля. В отличие от кабеля в волноводе отсутствует внутренний провод и роль токов проводимости во внутреннем металлическом проводе кабеля в волноводе играет ток смещения.

Возникновение того или иного типа волн в однородном волноводе зависит от свойств концевых устройств, в частности от устройства, генерирующего волны в начале волновода.

Для возбуждения желаемого типа волн можно ввести в волновод металлический стерженек, расположив его ось в месте, где должно возникать наиболее сильное электрическое поле желаемой волны, и направив ось стерженька в направлении линий напряженности этого поля. Подводя напряжение высокой частоты между стерженьком и волноводом хотя бы по концентрическому кабелю, можно возбудить колебания в волноводе. Можно также ввести в волновод небольшую петлю из проволоки, обтекаемую током, расположив петлю в месте ожидаемого максимума напряженности магнитного поля так, чтобы плоскость петли была перпендикулярна к направлению магнитных линий требуемого поля.

На приемном конце волновода можно применить аналогичные устройства. Можно также оставить этот конец открытым или снабдить его рупором для излучения волн в пространство.

При сравнении характера электромагнитных волн в волноводе и в однородной линии обнаруживаются наряду с общими их чертами и существенные различия в них. В теории однородных линий был рассмотрен только простейший тип волн, характеризующихся тем, что при отсутствии сопротивления проводов линии напряженности как магнитного, так и электрического поля располагаются целиком в плоскостях, нормальных к направлению проводов. Если направление проводов параллельно оси $0z$, то для таких волн всюду $H_z = E_z = 0$. Эти волны называют п о п е р е ч н ы м и или также о с н о в н ы м и для линии передачи. Как мы видели, фазовая скорость распространения этих волн $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ независимо от формы кривой тока и напряжения или от их частоты равна скорости распространения электромагнитных волн в свободном пространстве (при отсутствии проводов). Соответственно при периодическом процессе длина волны $\lambda = vT$ равна длине электромагнитной волны в свободном пространстве.

Волны такого типа не могут существовать в волноводе. Действительно, если в волноводе всюду $E_z = 0$, т. е. если линии напряженности электрического поля лежат только в поперечных плоскостях, то только в этих плоскостях располагаются и линии тока смещения, которые могут быть замкнуты на себя или кончаться у стенок волновода и продолжаться в стенках в виде линий тока проводимости. Ясно, что такие линии тока смещения должны охватываться замкнутыми на себя линиями напряженности магнитного поля, а следовательно, вектор $\boldsymbol{H}$, вообще говоря, должен иметь отличную от нуля составляющую вдоль оси $0z$ ($H_z \neq 0$).

Если в волноводе всюду $H_z = 0$, т. е. линии напряженности магнитного поля лежат целиком в поперечных плоскостях, то неизбежно должен существовать продольный ток смещения, охватываемый этими линиями, а следовательно, $E_z \neq 0$. Таким образом, волны, которые являются основными в линии передачи, не могут существовать в волноводе. В волноводе могут распространяться только волны, в которых либо вектор $\boldsymbol{H}$, либо вектор $\boldsymbol{E}$ имеет продольные составляющие. При этом весьма существенно, что распространение этих волн вдоль волновода возможно, только если частота f выше критической частоты f_0. Критическая длина волны $\lambda_0 = v/f_0$ имеет порядок линейных размеров поперечного сечения волновода.

Интересно отметить, что и в линии передачи возможно возникновение волн этого типа, если длина волны λ будет сравнима с расстоянием между проводами линии, но при этом линия будет представлять собой антенну и электромагнитное поле будет весьма интенсивно излучаться в окружающее пространство, что приведет к быстрому затуханию волн вдоль линии. Если линия имеет вид концентрического кабеля, излучение этих волн не будет происходить, так как область, в которой распространяются волны, экранирована от внешнего пространства наружным трубчатым проводом кабеля. Однако кабель используют обычно при более низких частотах, так как он проводит упомянутые выше поперечные волны, а при частотах выше критической можно воспользоваться волноводом.

Для волн, распространяющихся вдоль волновода, можно также ввести понятие волнового сопротивления. Передача энергии вдоль волновода определяется взаимно перпендикулярными составляющими векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, перпендикулярными оси волновода. В рассмотренном выше примере прямоугольного волновода это были составляющие E_x и H_y и составляющие E_y и H_x. Положительное значение вектора Пойнтинга (в положительном направлении оси $0z$) получается от умножения E_x и H_y одного знака и от умножения E_y и H_x разных знаков. Поэтому волновое сопротивление следует определять из соотношений:

$$z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} \quad \text{или} \quad z = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}.$$

Из вышеприведенных уравнений получаем для волн типа H (типа TE)

$$z = \frac{j\omega\mu}{\gamma'} = \frac{\omega\mu}{\beta} = v\mu\frac{\Lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Но $\sqrt{\mu/\varepsilon} = z'$ есть волновое сопротивление в случае, когда среда, заполняющая волновод, не ограничена стенками волновода. Кроме того,

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$z = \frac{z'}{\sqrt{1-(f_0/f)^2}}.$$

Таким образом, волновое сопротивление z не определяется как z' только параметрами среды, а зависит от частоты f и характера волны, т. е. от чисел m и n, от которых зависит критическая частота f_0. Оно зависит также от типа волны. Так, для волн типа E (типа TM) имеем выражение

$$z = z'\sqrt{1-(f_0/f)^2}.$$

Столь сложная зависимость z от многих величин, характеризующих не только передающее устройство, но и процессы в нем, есть результат того, что волновод не может быть рассмотрен как электрическая цепь с определенными параметрами. Для исследования процессов в волноводе необходимо, как это и было сделано, обратиться к системе уравнений электромагнитного поля.

Глава тридцатая

Переменное электромагнитное поле в проводящей среде

30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к плоской поверхности, ограничивающей с одной стороны проводящую среду (рис. 30.1). Будем предполагать, что проводящая среда простирается во всех остальных направлениях до бесконечности. Падающая волна частью отражается от поверхности проводящей среды, частью проникает в эту среду и поглощается в ней. Рассмотрим волну, прошедшую сквозь поверхность раздела и распространяющуюся в проводящей среде. Направим ось $0z$ в глубь проводящей среды нормально к ее поверхности. Плоскость $x0y$ совместим с этой поверхностью.

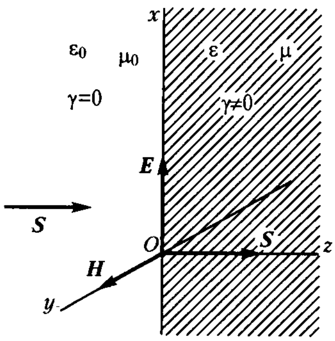

Рис. 30.1

В проводящей среде практически всегда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таком случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E};\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

Предположим, что напряженности полей не имеют составляющих, постоянных во времени.

Направив ось $0x$ по вектору $\boldsymbol{E}$ и учитывая, что в плоской волне $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не зависят от x и y, из уравнения ($г$) из § 29.1 получаем

$$0 = -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t},\ \text{т. е.}\quad H_x = \text{const} = 0.$$

Из уравнений ($а$) и (∂) находим

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x;\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Предположим, что напряженности электрического и магнитного полей изменяются во времени по закону

$$E_x = E_m\sin(\omega t + \psi_E);\quad H_y = H_m\sin(\omega t + \psi_H).$$

Выражая мгновенные напряженности полей в символической форме, будем иметь

$$\dot{E}_x = E_m e^{j(\omega t + \psi_E)} = E_m e^{j\psi_E} e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t};$$
$$\dot{H}_y = H_m e^{j(\omega t + \psi_H)} = H_m e^{j\psi_H} e^{j\omega t} = \dot{H}_m e^{j\omega t}.$$

Амплитуды E_m и H_m и начальные фазы ψ_E и ψ_H, а следовательно, и комплексные амплитуды $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ являются функциями только одной координаты z. Подставляя выражения величин $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$ в символической форме в уравнения, связывающие E_x и H_y, получаем после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t}$ эти уравнения в виде

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma\dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_m. \qquad (*)$$

Дифференцируя первое уравнение по z и используя второе, находим

$$\frac{d^2\dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu\gamma\dot{H}_m.$$

Решение этого линейного уравнения с постоянным коэффициентом имеет вид

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{+\alpha z},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma}.$$

Так как $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$, что легко проверяется возведением этого равенства в квадрат, то, вводя еще обозначение

$$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = k,$$

получаем

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k.$$

Второй член в выражении для $\dot{H}_m$ при $A_2 \neq 0$ увеличивается до бесконечности при возрастании z, так как вещественная часть α положительна. Напряженность поля не может расти до бесконечности, и, следовательно, мы должны принять $A_2 = 0$. Таким образом,

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z}.$$

Постоянная A_1 получается из условия, что при $z = 0$ величина $\dot{H}_m$ имеет заданное значение $\dot{H}_{me} = H_m e^{j\psi_{He}}$ на поверхности среды. Все величины, относящиеся к поверхности среды, будем отмечать индексом e. Стало быть, $A_1 = \dot{H}_{me}$, и решение имеет вид

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$H_y = H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz).$$

Выражение для напряженности электрического поля находим из первого уравнения (*). Имеем

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma}(1+j)k\dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{me} e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right),$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ и } \frac{1}{\gamma}(1+j)k = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Плотность тока изменяется по такому же закону, как напряженность электрического поля, так как $J = \gamma E$.

Волновое сопротивление для проводящей среды оказывается комплексным и равным

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+j)k}{\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Располагая этим выражением, можно найти соотношения между напряженностями волн: падающей из диэлектрика на поверхность проводящей среды ($\dot{E}_{\varphi 1}$, $\dot{H}_{\varphi 1}$), отраженной от поверхности среды ($\dot{E}_{\psi 1}$, $\dot{H}_{\psi 1}$) и преломленной ($\dot{E}_{\varphi 2}$, $\dot{H}_{\varphi 2}$), т. е. прошедшей в проводящую среду. Для этой цели могут быть использованы формулы, выведенные в гл.18 при исследовании распространения периодических волн в однородной линии, замкнутой в конце на сопротивление Z. Имеем на поверхности раздела

$$\dot{E}_{\varphi 2} = \frac{2Z}{Z + z_1}\dot{E}_{\varphi 1}; \quad \dot{E}_{\psi 1} = \frac{Z - z_1}{Z + z_1}\dot{E}_{\varphi 1};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + Z}\dot{H}_{\varphi 1}; \quad \dot{H}_{\psi 1} = \frac{z_1 - Z}{z_1 + Z}\dot{H}_{\varphi 1},$$

где $z_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ — волновое сопротивление для падающей и отраженной волн в диэлектрике, причем μ_1 и ε_1 — абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости диэлектрика.

В предельном случае, когда удельная проводимость проводящей среды бесконечна, получаем $Z = 0$,

$$\dot{E}_{\psi 1} = -\dot{E}_{\varphi 1} \text{ и } \dot{H}_{\psi 1} = \dot{H}_{\varphi 1}$$

и, следовательно, на поверхности раздела

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\varphi 1} + \dot{E}_{\psi 1} = 0 \text{ и } \dot{H}_1 = 2\dot{H}_{\varphi 1},$$

т. е. волна полностью отражается от поверхности сверхпроводящей среды. В диэлектрике при этом в результате интерференции падающей и отраженной волн устанавливаются стоячие волны. Этот случай аналогичен режиму короткого замыкания однородной линии передачи.

30.2. Длина волны и затухание волны

Полученные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей прежде всего свидетельствуют о том, что амплитуды напряженностей по мере проникновения волны в глубь проводящей среды при плоской волне убывают по показательному закону. Кроме того, начальная фаза колебаний изменяется пропорционально z, причем по мере проникновения волны в глубь среды колебания все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности среды. Во всех точках среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол $\pi/4$.

Длина волны λ, т. е. расстояние, на котором фаза изменяется на 2π, определяется из условия $\sqrt{\omega\mu\gamma/2}\,\lambda = 2\pi$, откуда находим

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{f\mu\gamma}},$$

так как $\omega = 2\pi f$, где f — частота колебаний. Отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии $z = \lambda$ от поверхности среды к их значениям на поверхности равно $e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} = 0{,}00187$, т. е. на этом расстоянии волна практически полностью затухает.

В нижеследующей таблице приведены значения длины волны при частоте колебаний $f = 50$ Гц и 500 кГц в меди, в ферромагнитном веществе (если считать $\mu = \text{const}$), в морской воде и в сухой почве. Мы видим, что при промышленной частоте $f = 50$ Гц электромагнитная волна проникает в медь на несколько сантиметров, а в ферромагнитное вещество — всего лишь на несколько миллиметров. При радиочастотах глубина проникновения измеряется в меди десятыми долями миллиметра, а в ферромагнитном веществе — сотыми долями миллиметра. При высоких частотах глубина проникновения волны в морской воде и даже в сухой почве незначительна.

Частота f	Длина волны λ для различных веществ			
	Медь $\gamma = 5{,}8\cdot10^7$См/м, $\mu = \mu_0$	Ферромагнитное вещество $\gamma \approx 10^7$См/м, $\mu \approx 1000\,\mu_0$	Морская вода $\gamma \approx 1$См/м, $\mu = \mu_0$	Сухая почва $\gamma \approx 10^{-2}$См/м, $\mu = \mu_0$
50 Гц	5,9 см	0,45 см	450 м	4500 м
500 кГц	0,059 см	$0{,}45\cdot10^{-2}$ см	4,5 м	45 м

Вектор Пойнтинга имеет значение

$$S = E_x H_y = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{me}^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz)\sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right).$$

Среднее значение $S_{\text{ср}}$ вектора Пойнтинга за период колебаний равно

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\frac{H_{me}^2}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}z}\cos\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, на расстояние от поверхности, равное $z = \lambda/2$, проникает только $e^{-2\pi} \cdot 100 = 0{,}187\,\%$ энергии, поглощаемой в проводящей среде. Поэтому практически можно считать, что волна затухает уже на расстоянии, в два-три раза меньшем по сравнению с приведенными в таблице.

30.3. Явление поверхностного эффекта

Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшие значения на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности в глубь провода. Это явление называется поверхностным эффектом.

Переменный магнитный поток в телах, обладающих конечной проводимостью, вызывает в этих телах *вихревые токи*, которые ослабляют магнитный поток внутри проводящего тела. Этот эффект иногда называют размагничивающим действием вихревых токов. По существу, и в этом случае имеем дело с явлением поверхностного эффекта.

Явление поверхностного эффекта можно объяснить, рассматривая проникновение электромагнитного поля в глубь провода из пространства, окружающего провод. В § 29.10 было показано, что потери энергии на нагревание провода током следует рассматривать как поглощение внутри провода электромагнитной энергии, передаваемой в тело провода через его поверхность из окружающего пространства. В предыдущем параграфе мы убедились, что переменная электромагнитная волна затухает по мере проникновения в глубь проводящей среды. Поэтому вполне естественно, что амплитуды плотности тока и напряженностей электрического и магнитного полей при переменном токе и при переменном потоке имеют наибольшее значение у поверхности тел из проводящего материала.

30.4. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводов

Общую индуктивность L контура тока можно просто разделить на внутреннюю и внешнюю только в случае, когда линии магнитной индукции располагаются либо целиком внутри тела проводов контура, образуя внутренний магнитный поток $\Phi_{внутр}$, либо целиком вне проводов, образуя внешний поток $\Phi_{внеш}$. При этом контуры сечения проводов совпадают с линиями магнитной индукции. Эти условия соблюдаются точно в единственном случае — для прямолинейного концентрического кабеля (рис. 30.2), в котором прямым проводом является провод круглого сечения, а обратным — соосный с ним трубчатый провод, сечение которого ограничено двумя концентрическими окружностями.

Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля по контуру *agdmcfbna*, будем иметь

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_{agd} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{dmc} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{cfb} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{bna} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_{внеш}}{dt}.$$

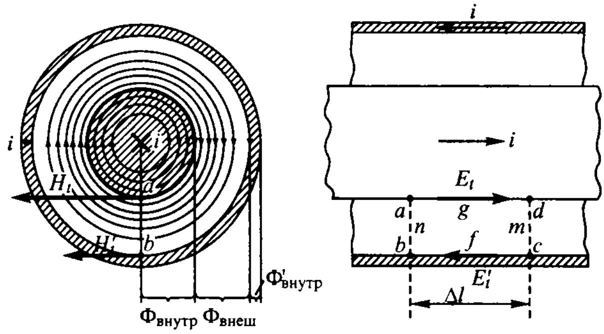

Рис. 30.2

Величина

$$\int\limits_{anb} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} - \int\limits_{dmc} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = u_{anb} - u_{dmc},$$

равная разности напряжений между проводами контура по путям anb и dmc, представляет собой падение напряжения на участке линии длиной Δl. Отрезок Δl берем столь малым, чтобы можно было считать ток i одинаковым на его длине, т. е. чтобы можно было не считаться с токами смещения между проводами. В этом случае рассматриваемое падение напряжения можно представить в виде

$$u_{anb} - u_{dmc} = ir + L\frac{di}{dt},$$

где r и L — сопротивление и индуктивность рассматриваемой пары проводов на участке длиной Δl.

Используя написанное выше выражение для величины $\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$, получаем

$$\int\limits_{agd} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{cfb} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int\limits_{anb} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} - \int\limits_{dmc} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt} = ir + L\frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt}$$

и, наконец, осуществляя замену $\dfrac{d\Phi_{внеш}}{dt} = L_{внеш}\dfrac{di}{dt}$ и $L = L_{внеш} + L_{внутр}$, будем иметь

$$\int\limits_{agd} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int\limits_{cfb} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = ir + L_{внутр}\frac{di}{dt}.$$

Это соотношение можно рассматривать как определяющее величины r и $L_{внутр}$.

Для упрощения рассмотрения сначала предположим, что обратный трубчатый провод образован из сверхпроводящего материала, т. е. имеет бесконечно большую удельную проводимость. При этом его активное сопротивление будет равно нулю. Равна нулю будет и его внутренняя индуктивность, так как, согласно сказанному в § 30.2, длина электромагнитной волны в металле при $\gamma = \infty$ равна нулю, т. е. электромагнитное поле не проникает внутрь провода. На поверхности обратного трубчатого провода касательная составляющая E_t' напряженности электрического поля при этом равна нулю, и соответственно падение напряжения вдоль этого провода также равно нулю, т. е.

$$\int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0.$$

Величина E_t на поверхности внутреннего провода постоянна вдоль отрезка Δl, так как ток i не изменяется вдоль этого отрезка. Следовательно,

$$\int_{agd} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = E_t \Delta l.$$

При синусоидальном изменении тока с угловой частотой ω можем написать:

$$\dot{E}_{tm}\Delta l = r\dot{I}_m + j\omega L_{\text{внутр}}\dot{I}_m = (r + jx_{\text{внутр}})\dot{I}_m.$$

Так как, согласно закону полного тока, $\dot{I}_m = \dot{H}_{tm}u$, где $u = 2\pi R$ — периметр сечения прямого провода, а H_{tm} — напряженность магнитного поля на его поверхности, то

$$Z_{\text{внутр}} = r + jx_{\text{внутр}} = \frac{\Delta l}{u}\frac{\dot{E}_{tm}}{\dot{H}_{tm}}.$$

Таким образом, для вычисления $Z_{\text{внутр}}$ прямого провода в данном случае достаточно найти комплексные амплитуды касательных к поверхности провода составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности провода.

Если бы удельная проводимость материала обратного трубчатого провода, так же как и материала прямого провода, имела конечное значение, то падение напряжения вдоль пути cfb также было бы отлично от нуля:

$$\int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \dot{E}'_t \Delta l = r' i + L'_{\text{внутр}}\frac{di}{dt},$$

где r' и $L'_{\text{внутр}}$ — активное сопротивление и внутренняя индуктивность обратного провода, а E'_t — касательная составляющая вектора E на внутренней его поверхности. При этом ток i в обратном проводе равен $H'_t u'$, где H'_t — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ на внутренней поверхности обратного провода, а u' — длина внутренней окружности, ограничивающей сечение этого провода. При синусоидальном процессе имеем

$$r' + j\omega L'_{\text{внутр}} = \frac{\Delta l}{u'}\frac{\dot{E}'_{tm}}{\dot{H}'_{tm}}.$$

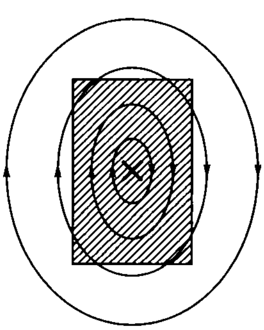

Рис. 30.3

Для сложной формы сечения провода, например для случая, изображенного на рис. 30.3, уже не представляется возможным столь определенно разделить магнитный поток на внешний и внутренний. На рис. 30.3 изображена картина поля при постоянном токе для провода прямоугольного сечения из неферромагнитного материала. Как видно из этой картины, кроме линий магнитной индукции, замыкающихся целиком либо внутри, либо вне провода, имеются линии, проходящие частично в теле провода и частично вне его. При переменном токе картина поля еще усложняется, так как переменный ток распределяется неравномерно по сечению и, кроме того, вся картина меняется в течение периода, так как плотность тока в разных точках сечения провода имеет различные фазы.

Вследствие этого нельзя предложить в общем случае столь же простой и притом точный способ вычисления активного и внутреннего индуктивного сопротивлений, как для рассмотренного выше концентрического кабеля.

Однако для проводников фигурного сечения из ферромагнитного вещества (рис. 30.4) при резком проявлении поверхностного эффекта может быть применен с весьма большой точностью аналогичный изложенному выше простой метод расчета (см. § 30.6), так как вследствие высокой магнитной проницаемости вещества линии магнитной индукции для большой части внутреннего магнитного потока замыкаются внутри тела проводника и имеют форму, весьма близкую к форме контура сечения проводника. Только для незначительной части магнитного потока линии магнитной индукции проходят частично внутри проводника и частично в воздухе вне его.

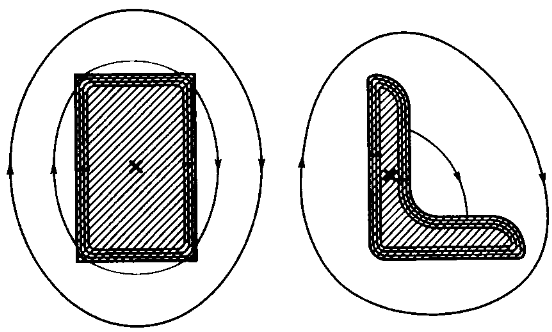

Рис. 30.4

Такой приближенный метод расчета имеет большое значение также в связи с тем, что внутреннее реактивное сопротивление $x_{\text{внутр}}$ таких проводов обычно составляет большую, а часто и основную часть всего индуктивного сопротивления.

Точное значение активного сопротивления r провода сложной формы сечения, очевидно, всегда определяется из соотношения $r = P/I^2$, причем мощность P, поглощаемая в проводе, может быть вычислена как интеграл по поверхности провода от среднего значения за период нормальной к этой поверхности составляющей вектора Пойнтинга. Однако для проводов сложной формы сечения такой общий метод расчета большей частью мало что дает практически, так как не известно точное распределение поля во все моменты времени по всей поверхности провода. Поэтому большую ценность представляют также возможные приближенные методы расчета.

30.5. Сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта

Рассмотрим прямолинейный провод круглого сечения (рис. 30.5) и предположим, что обратный провод удален от него на столь большое расстояние, что его влиянием на распределение тока в рассматриваемом проводе можно пренебречь. Пусть длина электромагнитной волны λ в веществе провода значительно меньше радиуса R сечения, т. е. $\lambda \ll R$. На рисунке величина λ показана толщиной

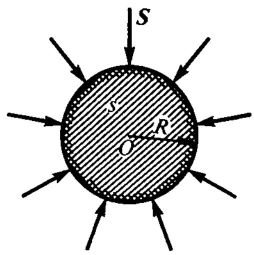

Рис. 30.5

дополнительно заштрихованного слоя. В таком случае, поскольку на длине λ волна в проводе практически полностью затухает, можно пренебречь кривизной поверхности провода, считать волну, проникшую в тело провода, плоской и воспользоваться зависимостями, полученными в § 30.1 при исследовании плоской волны. На поверхности провода (при $z = 0$) имеем

$$\dot{H}_{tm} = \dot{H}_{me}; \quad \dot{E}_{tm} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\dot{H}_{me}.$$

Следовательно, согласно формуле предыдущего параграфа

$$Z_{\text{внутр}} = r + jx_{\text{внутр}} = (1+j)\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}},$$

откуда

$$r = x_{\text{внутр}} = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Отношение активного сопротивления провода при переменном токе к его сопротивлению при постоянном токе получается равным

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\right) : \left(\frac{l}{\gamma s}\right) = \frac{s}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}},$$

где s — сечение провода.

Явление поверхностного эффекта, как было указано выше, следует рассматривать как результат затухания в проводе электромагнитной волны, проникающей через поверхность провода из окружающего его диэлектрика. Интересно получить выражения для r и $x_{\text{внутр}}$, исходя из этого физического представления.

Средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой внутрь провода сквозь его поверхность и выделяющейся в проводе в виде теплоты, равна $P = S_{\text{ср}}ul$, где $S_{\text{ср}}$ — среднее за период значение вектора Пойнтинга на поверхности провода; $u = 2\pi R$ — периметр сечения провода и ul — поверхность провода, сквозь которую проникает электромагнитная волна. Принимая $z = 0$ в выражении для $S_{\text{ср}}$ в конце § 30.2, получаем

$$S_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\frac{H_{me}^2}{2}$$

и, следовательно,

$$P = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}ul\frac{H_{me}^2}{2}.$$

Амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности связана с действующим током I в проводе законом полного тока $H_{me}u = \sqrt{2}I$. Стало быть,

$$P = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,I^2 = rI^2.$$

Таким образом, имеем

$$r = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Как было получено в § 30.1, напряженность магнитного поля отстает по фазе от напряженности электрического поля на угол $\pi/4$, что соответствует одной восьмой периода колебания. На рис. 30.6 изображены кривые изменения величин E, H и S на поверхности провода в функции времени. В течение большей части периода колебаний, равной трем восьмым периода изменения E и H, величина вектора Пойнтинга положительна и, следовательно, энергия поступает в провод из внешнего пространства и идет на изменение энергии магнитного поля в объеме провода и на выделение теплоты в проводе. В течение меньшей части периода колебаний, равной одной восьмой периода изменения E и H, вектор Пойнтинга имеет отрицательную величину и, следовательно, поток энергии направлен от провода в окружающее его пространство. В течение этого промежутка времени энергия, запасенная в магнитном поле в объеме провода, частично возвращается в окружающее провод пространство и частично преобразуется в теплоту. Эти колебания энергии с частичным возвратом ее в пространство, окружающее провод, можно рассматривать как результат наличия внутреннего реактивного сопротивления $x_{\text{внутр}}$ провода. Как известно, между реактивным x и активным r сопротивлениями цепи и разностью φ фаз напряжения и тока в этой цепи существует соотношение $x/r = \operatorname{tg}\varphi$.

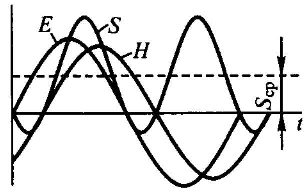

Рис. 30.6

В случае, который мы рассматриваем, напряженность магнитного поля на поверхности провода совпадает по фазе с током в проводе. Напряженность электрического поля на поверхности провода представляет собой напряжение на единицу длины провода, которое может рассматриваться как напряжение, преодолевающее активное r и внутреннее реактивное $x_{\text{внутр}}$ сопротивления провода. Так как разность φ фаз напряженностей электрического и магнитного полей равна $\pi/4$, то имеем

$$\frac{x_{\text{внутр}}}{r} = \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Следовательно,

$$x_{\text{внутр}} = r = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Таким образом, исследуя процесс передачи электромагнитным полем энергии сквозь поверхность провода, приходим к тем же выражениям для r и $x_{\text{внутр}}$, которые были получены выше иным путем.

Полученное в настоящем параграфе выражение

$$S_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\frac{H_{me}^2}{2}$$

для средней мощности, выделяемой в проводе и отнесенной к единице поверхности провода, позволяет очень просто при резком проявлении поверхностного эффекта вычислить потери в проводе, если известно распределение по поверхности амплитуды касательной составляющей $H_{tm} = H_{me}$ напряженности магнитного поля на поверхности. В вышеприведенном простейшем примере провода круглого сечения величина $H_{tm} = H_{me}$ во всех точках поверхности одинакова, и мощность подсчитывалась простым умножением $S_{\text{ср}}$ на величину поверхности провода. В более сложных случаях ее необходимо вычислять путем интегрирования по поверхности s провода:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\int_s H_{tm}^2\,ds.$$

Обычно резкое проявление поверхностного эффекта имеет место при высоких частотах, например при распространении электромагнитных волн в волноводах. Зная распределение H_{tm} по внутренней поверхности волновода, нетрудно, пользуясь последней формулой, вычислить мощность, теряемую в стенках волновода.

30.6. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала

Все соотношения в предыдущих параграфах получены в предположении, что магнитная проницаемость среды постоянна. Для проводов из ферромагнитного материала это условие не соблюдается. Магнитная проницаемость ферромагнитных веществ сильно зависит от напряженности магнитного поля. Поэтому величина μ в каждой точке среды изменяется в течение периода изменения напряженности поля. Пусть μ есть некоторое среднее за период значение абсолютной магнитной проницаемости. Это среднее значение является функцией амплитуды H_m напряженности поля, так как гистерезисная петля изменяется с изменением H_m.

Величина H_m убывает по мере удаления от поверхности провода в глубь его. Поэтому, если амплитуда напряженности поля H_m на поверхности имеет достаточно большое значение (рис. 30.7), то μ сначала растет по мере удаления от поверхности в глубь провода, а затем, достигнув максимума, вновь убывает. Возрастание μ приводит к более резкому проявлению поверхностного эффекта по сравнению с тем случаем, когда во всем проводе имеется такое же значение μ_e, как на поверхности провода. Такой характер влияния непостоянства μ можно предвидеть на основании вышеприведенных формул, полученных при условии $\mu = \text{const}$; из них следует, что чем больше μ, тем быстрее затухает волна.

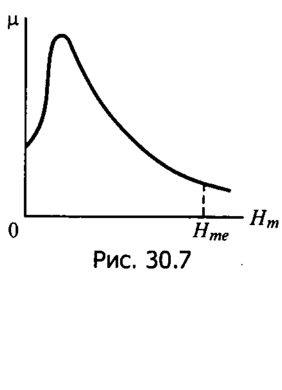

Рис. 30.7

На рис. 30.8 приведены кривые зависимости амплитуды плотности тока J_m от координаты z для плоской волны в случаях $\mu = \mu_e = \text{const}$ и $\mu \neq \text{const}$. При этом z есть расстояние от поверхности ферромагнитной среды, отсчитываемое в глубь ее. Кривые, изображенные на рис. 30.8, построены при одинаковых в обоих случаях значениях тока. На рис. 30.9 приведены кривые изменения амплитуды магнитной индукции. При $\mu \neq \text{const}$ величина B_m сначала убывает медленно вследствие явления насыщения, а на некоторой глубине резко падает практически до нуля.

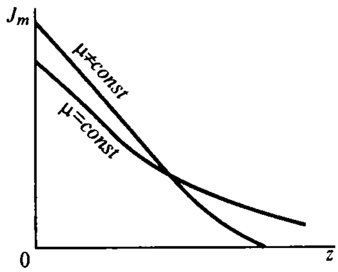

Рис. 30.8

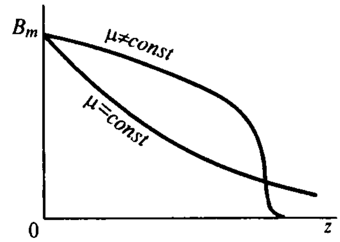

Рис. 30.9

Непостоянство μ и связанное с ним быстрое затухание волны приводят к увеличению активного сопротивления провода. Этому способствуют также потери на гистерезис. Можно показать (Л. Р. Н е й м а н. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах), что активное и внутреннее реактивное сопротивления проводов из ферромагнитного материала при резком проявлении поверхностного эффекта с большой точностью выражаются формулами, аналогичными по своей структуре формулам при $\mu = \text{const}$, а именно:

$$r = 1{,}4\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu_e}{2\gamma}} = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu_e}{\gamma}} \quad \text{и} \quad x_{\text{внутр}} = 0{,}6r,$$

где μ_e — значение абсолютной магнитной проницаемости на поверхности провода, определяемое по основной кривой намагничивания при действующей напряженности магнитного поля $H_{\text{дейст}}$ на поверхности провода. Величина $H_{\text{дейст}}$ находится из соотношения $H_{\text{дейст}} = I/u$, вытекающего из закона полного тока, причем I — действующий ток в проводе и u — периметр сечения провода. Эти формулы весьма точны, если H_{me} больше того значения H_m, при котором μ имеет максимум, но и при меньших значениях H_{me} они могут быть использованы для ориентировочных подсчетов.

Из таблицы, приведенной в § 30.2, видно, что электромагнитная волна в ферромагнитной среде даже в предположении $\mu = \text{const}$ уже при частоте $f = 50$ Гц практически полностью затухает на глубине нескольких миллиметров. Непостоянство μ способствует еще более быстрому затуханию волны. Поэтому последние формулы, полученные из уравнения плоской волны, оказываются справедливыми практически во всех случаях, когда в качестве токоведущих частей тех или иных устройств используют рельсы или другие стальные массивные проводники фасонного профиля.

30.7. О комплексных магнитной и диэлектрической проницаемостях

При исследовании периодических электромагнитных процессов в ферромагнитных средах потери энергии, связанные с перемагничиванием среды, могут быть учтены введением в уравнения электромагнитного поля комплексной абсолютной магнитной проницаемости:

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{B}_m}{\dot{H}_m} = \mu e^{-j\psi} = \mu\cos\psi - j\mu\sin\psi,$$

равной отношению комплексных амплитуд магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Понятие о комплексной магнитной проницаемости впервые было введено в 1913 г. В. К. Аркадьевым и оказалось весьма полезным при многих исследованиях и расчетах. В частности, формулы, приведенные в предыдущем параграфе, получены с использованием понятия о комплексной магнитной проницаемости и с дополнительным учетом зависимости μ от H_m, характерной для ферромагнитных веществ.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность учесть потери на гистерезис, а также, когда это существенно, и потери, возникающие в ферромагнитной среде вследствие явления магнитной вязкости. Введение комплексной магнитной проницаемости с целью учета потерь на гистерезис соответствует замене гистерезисной петли равным ей по площади эквивалентным эллипсом, что дает возможность пользоваться при исследовании периодических процессов в ферромагнитной среде символическим методом.

Аргумент ψ комплексной магнитной проницаемости представляет собой угол запаздывания по фазе эквивалентной синусоиды магнитной индукции от эквивалентной синусоиды напряженности магнитного поля. Модуль μ равен отношению амплитуд B_m/H_m этих эквивалентных синусоид.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность при периодических процессах написать второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды, в которой имеют место потери на перемагничивание, в той же форме, что и для среды, в которой эти потери отсутствуют. В частности, для плоской волны второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды приобретает вид

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my},$$

тогда как для среды, в которой отсутствуют потери на перемагничивание, это уравнение имеет вид

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_{my}.$$

При исследовании электромагнитных процессов в несовершенном диэлектрике, в котором имеют место потери энергии при изменении поляризации, в случае синусоидального изменения напряженности электрического поля во времени весьма полезным является введение комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{D}_m}{\dot{E}_m} = \varepsilon e^{-j\psi} = \varepsilon\cos\psi - j\varepsilon\sin\psi.$$

При этом ψ есть угол, на который запаздывает по фазе синусоидально изменяющееся электрическое смещение D от синусоидально изменяющейся напряженности электрического поля E. Этот угол представляет собой так называемый угол потерь в диэлектрике.

В этом случае первое уравнение Максвелла для плоской электромагнитной волны приобретает вид

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx}.$$

Введением комплексной диэлектрической проницаемости можно учесть и потери в среде от токов проводимости, что весьма важно, когда рассматривается электромагнитное поле в несовершенном диэлектрике, имеющем отличную от нуля удельную проводимость γ, и когда плотности токов смещения и проводимости соизмеримы друг с другом. При этом первое уравнение Максвелла принимает вид

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = \gamma\dot{E}_{mx} + j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx} = j\omega\left(\dot{\varepsilon} - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{E}_{mx}.$$

Обозначая

$$\dot{\varepsilon} - j\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon\cos\psi - j\left(\varepsilon\sin\psi + \frac{\gamma}{\omega}\right) = \dot{\varepsilon}' = \varepsilon' e^{-j\psi'},$$

можем это уравнение написать в форме

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}'\dot{E}_m,$$

совершенно аналогичной форме этого же уравнения

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\varepsilon\dot{E}_m$$

для диэлектрика, в котором отсутствуют потери.

Таким образом, использование понятий о комплексной магнитной проницаемости и о комплексной диэлектрической проницаемости дает возможность написать основные уравнения электромагнитного поля при периодических процессах в простой и симметричной форме и в общем случае, когда в среде имеют место потери энергии того или иного вида.

30.8. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе

Исследуем случай, когда плоский проводящий лист пронизывается переменным синусоидальным потоком Ф, линии магнитной индукции которого направлены вдоль листа перпендикулярно заштрихованному на рис. 30.10 сечению. Рассмотрение этого случая представляет большой интерес, так как сердечники трансформаторов и электромагнитов, а также участки магнитных цепей электрических машин, пронизываемые переменным магнитным потоком, обычно собирают из листовой электротехнической стали. Переменный магнитный поток индуцирует электродвижущие силы в контурах, расположенных в плоскостях, нормальных к линиям магнитной индукции. В этих контурах под действием индуцированных ЭДС возникают вихревые токи. Как магнитный поток, так и вихревой ток распределяются неравномерно по сечению листа. Обычно длина l листа и его высота h (рис. 30.10) значительно превосходят его толщину d. При этом можно пренебречь искривлением линий тока у краев листа и считать линии тока прямыми, направленными параллельно поверхности листа и перпендикулярно линиям магнитной индукции. Расположим оси координат так, как показано на рис. 30.10, т. е. так, чтобы, как и раньше, вектор $\boldsymbol{E}$ был параллелен оси $0x$ и вектор $\boldsymbol{H}$ был параллелен оси $0y$. Начало координат поместим в середине сечения листа. При $h \gg d$ и $l \gg d$ электромагнитную волну можно считать плоской. Сделаем допущение, что $\mu = \text{const}$. При этом остаются в силе уравнения, полученные в § 30.1. Следовательно, имеем

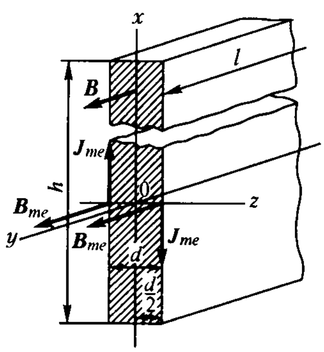

Рис. 30.10

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}; \quad \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}_m}{dz},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k.$$

Однако граничные условия теперь оказываются иными, нежели для случая, исследованного в § 30.1. Электромагнитные волны проникают в лист с двух его сторон, и на обеих поверхностях листа векторы $\boldsymbol{B}$ и соответственно векторы $\boldsymbol{H}$ должны быть одинаковы по величине и направлению. Это требование соблюдается при условии $A_1 = A_2 = A$. Следовательно,

$$\dot{H}_m = A(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}) = 2A\,\text{ch}\,\alpha z;$$

$$\dot{B}_m = 2A\mu\,\text{ch}\,\alpha z = \dot{B}_{m0}\text{ch}\,\alpha z;$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_m = \gamma\dot{E}_m = -2A\alpha\,\text{sh}\,\alpha z = -\frac{\dot{B}_{m0}\alpha}{\mu}\text{sh}\,\alpha z,$$

где $\dot{B}_{m0} = 2A\mu$ представляет собой значение $\dot{B}_m$ в середине листа (при $z = 0$). Обычно нас интересует среднее значение $B_{\text{ср}}$ индукции по сечению листа. Комплексная амплитуда этого среднего значения получается как среднее значение комплексной величины $\dot{B}_m$ на толщине листа:

$$\dot{B}_{m\,\text{ср}} = \frac{1}{d}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \dot{B}_m\, dz = \frac{\dot{B}_{m0}}{d}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \operatorname{ch}\alpha z\, dz = \dot{B}_{m0}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\alpha d}{2}}{\dfrac{\alpha d}{2}}.$$

Для нахождения самих действительных амплитуд индукции и плотности тока необходимо взять модули найденных выражений. Имеем

$$\left|\frac{\alpha d}{2}\right| = \sqrt{2}\,k\frac{d}{2};$$

$$\left|\operatorname{sh}\alpha z\right|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz)\operatorname{sh}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch}2kz - \cos 2kz}{2};$$

$$\left|\operatorname{ch}\alpha z\right|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz)\operatorname{ch}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch}2kz + \cos 2kz}{2}.$$

Следовательно,

$$B_m = B_{m0}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2kz + \cos 2kz}{2}};\quad J_m = |\alpha|\frac{B_{m0}}{\mu}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2kz - \cos 2kz}{2}}.$$

На рис. 30.11 приведена кривая B_m/B_{m0} в функции $2kz$. На поверхности листа $z = d/2$ и $2kz = kd$. Для электротехнической листовой стали имеем $\mu \approx 1000\ \mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м, и при $f = 50$ Гц, $d = 0{,}5$ мм параметр $kd = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}\,d$ имеет значение $kd = 0{,}7$.

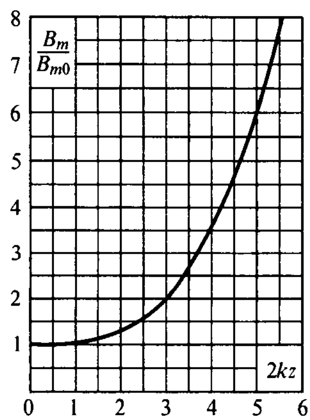

Рис. 30.11

Из кривой на рис. 30.11 видно, что при этом значении kd неравномерность распределения магнитного потока еще практически не заметна.

Однако при той же толщине листа и $f = 2000$ Гц получаем $kd = 4{,}4$, и соответственно отношение амплитуды индукции на поверхности B_{me} к амплитуде индукции B_{m0} в середине листа оказывается равным $B_{me}/B_{m0} = 4{,}5$. Отсюда видно, что для звуковых частот толщина листа 0,5 мм недопустимо велика. При звуковых частотах она должна быть порядка 0,05—0,10 мм. При радиочастотах уже и при таких малых толщинах листа поток распределяется весьма неравномерно по толщине листа — вихревые токи сильно ослабляют поле в середине листа. При высоких частотах находят применение сердечники, спрессованные из тончайшего ферромагнитного порошка и изолирующего материала.

Определим потери $P_в$ на вихревые токи в листе с учетом неравномерности распределения магнитного потока. Активная мощность, расходуемая в проводящей среде и отнесенная к единице объема, равна квадрату действующей плотности тока, деленному на удельную проводимость среды. Следовательно,

$$\frac{dP_в}{dV} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{J_m}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2 B_{m0}^2}{4\mu^2\gamma}(\operatorname{ch}2kz - \cos 2kz).$$

Так как $|\alpha| = \sqrt{\omega\mu\gamma}$, то

$$\frac{dP_в}{dV} = \frac{\omega}{4\mu} B_{m0}^2 (\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz).$$

Выразим B_{m0} через амплитуду средней по сечению листа индукции из уравнения

$$B_{m\,ср} = B_{m0}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}}\right| = B_{m0}\frac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd - \cos kd}{2}}}{\sqrt{2}\,\frac{kd}{2}} = B_{m0}\frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{kd}.$$

Следовательно,

$$\frac{dP_в}{dV} = B_{m\,ср}^2 \frac{\omega}{4\mu} k^2 d^2 \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Потери $P_в$ в объеме всего листа получим, умножая удельные потери $dP_в/dV$ на длину l, на высоту h и на элемент толщины dz листа и интегрируя по толщине листа:

$$P_в = lh\int\limits_{-d/2}^{d/2} \frac{dP_в}{dV}\,dz = B_{m\,ср}^2 lh \frac{\omega}{4\mu} kd^2 \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Таким образом, потери, отнесенные к единице объема всего листа, выражаются в виде

$$P'_в = \frac{P_в}{lhd} = B_{m\,ср}^2 \frac{\omega}{4\mu} kd \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Нетрудно убедиться, что если при $kd < 1$ пренебречь явлением поверхностного эффекта, то это выражение переходит в формулу

$$P'_в = \frac{4}{3} k_ф^2 f^2 \gamma d^2 B_{m\,ср}^2,$$

полученную в гл. 21. В последней формуле $k_ф = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ — коэффициент формы синусоиды.

30.9. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе круглого сечения

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении переменного тока по цилиндрическому проводу круглого сечения. Предположим, что обратный провод находится настолько далеко, что влиянием переменного магнитного потока, вызванного током в нем, на распределение тока в исследуемом проводе можно пренебречь. Естественно выбрать цилиндрические координаты r, z и θ, совместив ось $0z$ с осью провода (рис. 30.12). Линии электрического тока направлены параллельно оси $0z$. Вследствие осевой симметрии линии магнитной индукции представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, нормальных к оси провода, с центрами на этой оси. Таким образом, вектор $\boldsymbol{J}$ имеет единственную составляющую J_z и вектор $\boldsymbol{H}$ — единственную составляющую H_θ. Поэтому в дальнейшем опустим индексы у J_z и H_θ. Однако будем помнить, что J и H суть проекции векторов, а не их модули и, следовательно, они могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. В силу осевой симметрии J и H зависят только от r.

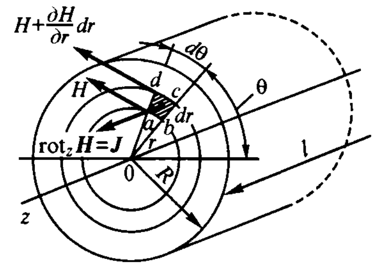

Рис. 30.12

Для нахождения связи между J и H воспользуемся уравнениями:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t};\quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{J}.$$

Магнитодвижущая сила вдоль контура $abcda$, ограничивающего заштрихованную на рис. 30.12 площадку, равна

$$-Hr\,d\theta + \left(H + \frac{\partial H}{\partial r}dr\right)(r+dr)\,d\theta = \frac{\partial H}{\partial r}r\,dr\,d\theta + H\,dr\,d\theta,$$

причем в правой части отброшен член третьего порядка малости.

Величина площадки, ограниченной контуром $abcda$, равна $ds = r\,d\theta\,dr$. Следовательно, в данном случае, когда вектор $\boldsymbol{H}$ имеет только одну составляющую $H_\theta = H$, получим

$$\mathrm{rot}_z\boldsymbol{H} = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r},$$

и первое уравнение Максвелла представляется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = J. \qquad (*)$$

Электродвижущая сила вдоль контура $gkmng$, ограничивающего заштрихованную на рис. 30.13 площадку, имеет значение

$$E\,dz - \left(E + \frac{\partial E}{\partial r}dr\right)dz = -\frac{\partial E}{\partial r}dr\,dz.$$

Разделив на величину площадки $ds = dr\,dz$, получаем в данном случае, когда вектор $\boldsymbol{E}$ имеет только одну составляющую $E_z = E$,

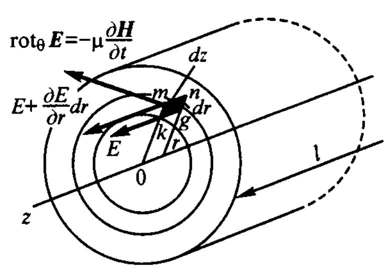

Рис. 30.13

$$\mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{E} = -\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Следовательно, второе уравнение Максвелла может быть написано в форме

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial J}{\partial r} = \mu\gamma\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (**)$$

Дифференцируя уравнение (*) по t, а уравнение (**) по r, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t}=\frac{\partial J}{\partial t};\quad \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}=\mu\gamma\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t}.$$

Из этих соотношений с учетом уравнения (**) получаем уравнение для плотности тока:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial J}{\partial r}=\mu\gamma\frac{\partial J}{\partial t}.$$

Дифференцируя уравнение (*) по r и используя уравнение (**), получаем уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}-\frac{H}{r^2}=\mu\gamma\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если ток, а следовательно, также J и H являются синусоидальными функциями времени, то, вводя комплексные выражения мгновенных плотности тока и напряженности магнитного поля

$$\dot{J}=\dot{J}_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \dot{H}=\dot{H}_m e^{j\omega t}$$

в уравнения (*) и (**) и сокращая на общий множитель $e^{j\omega t}$, получаем их в виде

$$\frac{d\dot{H}_m}{dr}+\frac{\dot{H}_m}{r}=\dot{J}_m; \tag{*}$$

$$\frac{d\dot{J}_m}{dr}=j\omega\mu\gamma\dot{H}_m. \tag{**}$$

Соответственно вместо уравнений с частными производными для J и H получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения для их комплексных амплитуд:

$$\frac{d^2\dot{J}_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{J}_m}{dr}=j\omega\mu\gamma\dot{J}_m;\quad \frac{d^2\dot{H}_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{H}_m}{dr}-\frac{\dot{H}_m}{r^2}=j\omega\mu\gamma\dot{H}_m.$$

Введением новой переменной

$$x=r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$$

последние два уравнения приводятся к более простому виду:

$$\frac{d^2\dot{J}_m}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\dot{J}_m}{dx}+\dot{J}_m=0;\quad \frac{d^2\dot{H}_m}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\dot{H}_m}{dx}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\dot{H}_m=0.$$

Эти уравнения являются частными случаями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя, называются функциями Бесселя. Общий интеграл уравнения может быть написан в виде

$$y=AJ_n(x)+BN_n(x),$$

где A и B — произвольные постоянные; $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n; $N_n(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка n.

Уравнение для плотности тока получается из общего уравнения Бесселя, если в нем положить $n = 0$. Уравнение для напряженности магнитного поля получается, если положить $n = 1$. Следовательно, общие интегралы этих уравнений могут быть представлены в виде

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x); \quad \dot{H}_m = A_1 J_1(x) + B_1 N_1(x),$$

где $J_0(x)$ и $N_0(x)$ — бесселевы функции первого и второго рода нулевого порядка, а $J_1(x)$ и $N_1(x)$ — бесселевы функции первого и второго рода первого порядка.

Обозначим радиус сечения провода через R. Постоянные A_0 и B_0 и соответственно A_1 и B_1 определяются из граничных условий при $r = 0$ и $r = R$, т. е. при $x = 0$ и $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$.

Из подробного рассмотрения бесселевых функций следует, что $J_0(0) = 1$ и $J_1(0) = 0$, в то время как $N_0(0) = \infty$ и $N_1(0) = \infty$. Так как ни J_m, ни H_m на оси провода не могут иметь бесконечно больших значений, то $B_0 = 0$ и $B_1 = 0$.

Итак, для плотности тока имеем

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x).$$

Функцию $J_0(x)$ можно представить в виде ряда:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots,$$

что легко проверить подстановкой последнего выражения в уравнение для $\dot{J}_m$.

Постоянная A_0 равна комплексной амплитуде плотности тока $\dot{J}_{m0}$ на оси провода. Следовательно,

$$\dot{J}_m = \dot{J}_{m0}\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots\right] = \dot{J}_{m0} J_0(x) = \dot{J}_{m0} b_0 e^{j\beta_0}. \qquad (***)$$

Функция $J_0(x)$ есть комплексное число, так как x является числом комплексным. Через b_0 обозначен модуль, а через β_0 — аргумент комплексного числа $J_0(x)$.

Напряженность магнитного поля может быть получена из уравнения (**):

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu\gamma}\frac{d\dot{J}_m}{dr} = \frac{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{j\omega\mu\gamma}\frac{d\dot{J}_m}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\frac{d\dot{J}_m}{dx}$$

или

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\left(-\frac{d\dot{J}_0(x)}{dx}\right).$$

Дифференцируя ряд $J_0(x)$, находим

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{(2\cdot 4)^2\cdot 6} - \frac{x^7}{(2\cdot 4\cdot 6)^2\cdot 8} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} J_1(x) = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} b_1 e^{j\beta_1}. \qquad (****)$$

Полученный новый ряд представляет собой не что иное, как бесселеву функцию $J_1(x)$ первого рода первого порядка. Через b_1 обозначен модуль, а через β_1 — аргумент комплексного числа $J_1(x)$.

$r\sqrt{\omega\mu\gamma}$	b_0	β_0°	b_1	β_1°
0	1	0	0	−45
1	1,015	14,22	0,501	−37,84
2	1,229	52,28	1,041	−16,73
3	1,950	96,52	1,800	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,500	173,51
8	40,817	300,92	39,070	213,69
9	77,957	341,52	74,971	253,95
10	149,831	382,10	144,586	294,27

В таблице даны значения модулей b_0 и b_1 и аргументов β_0 и β_1 комплексных величин $J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$ и $J_1(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$ при нескольких значениях величины $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$.

Так как b_0 с увеличением $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ монотонно возрастает, то амплитуда плотности тока имеет наименьшее значение на оси провода, и отношение амплитуд тока на поверхности провода и на его оси будет тем больше, чем больше угловая частота, удельная проводимость, магнитная проницаемость и радиус провода R. Что же касается угла β_0, то он также монотонно возрастает с увеличением $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$, и в тех случаях, когда $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ достигает больших значений, фаза плотности тока на некотором расстоянии от оси может оказаться прямо противоположной фазе плотности тока на оси, а при дальнейшем увеличении r может снова совпасть с фазой плотности тока на оси и т. д. Зависимости величин $J_m/J_{m0} = b_0$ и β_0 от $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ даны на рис. 30.14. На рис. 30.15 показаны на временн'ой диаграмме векторы, характеризующие распределение плотности тока по величине и фазе вдоль радиуса провода, причем в конце каждого вектора помечено соответствующее значение $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$.

Рассмотрение рис. 30.14 и 30.15 приводит нас к тем же общим физическим положениям, которые были установлены выше и которые характеризуют явление поверхностного эффекта во всех без исключения случаях. Электромагнитная волна проникает внутрь провода сквозь его поверхность из диэлектрика, окружающего провод. По мере проникновения в глубь провода волна постепенно затухает, и амплитуды напряженности электрического поля и соответственно плотности тока убывают. При этом колебания по мере проникновения в глубь провода все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности провода.

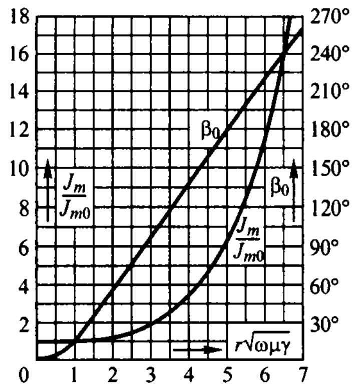

Рис. 30.14

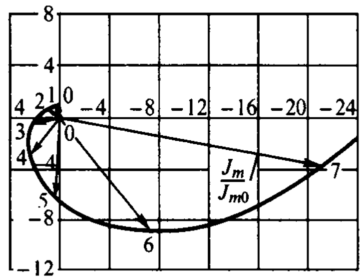

Рис. 30.15

30.10. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрических проводов круглого сечения

Согласно соотношению, установленному в § 30.4 для провода круглого сечения, имеем

$$Z_{\text{внутр}} = r + jx_{\text{внутр}} = \frac{l\dot{E}_{me}}{u\dot{H}_{me}},$$

где $\dot{E}_{me}$ и $\dot{H}_{me}$ — значения $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ на поверхности провода, т. е. при $r = R$; l — длина провода и u — периметр его сечения. Используя выражения (***) и (****) из предыдущего параграфа и связь $\dot{J}_m = \gamma\dot{E}_m$, получаем

$$r + jx_{\text{внутр}} = \frac{l}{\gamma 2\pi R}\sqrt{-j\omega\mu\gamma}\,\frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Сопротивление провода при постоянном токе равно $r_0 = \dfrac{1}{\gamma\pi R^2}$. Следовательно,

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{r}{r_0} + j\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{2}\,\frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Так как $\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4}$, то имеем

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2}\,\frac{b_{0e}}{b_{1e}}\,e^{j\left(\beta_{0e}-\beta_{1e}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{z_{\text{внутр}}}{r_0}e^{j\varphi};$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{z_{\text{внутр}}\cos\varphi}{r_0}; \quad \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{z_{\text{внутр}}\sin\varphi}{r_0}.$$

Здесь b_{0e} и b_{1e} — значения модулей b_0 и b_1, а β_{0e} и β_{1e} — значения аргументов β_0 и β_1 комплексных величин $J_0(x)$ и $J_1(x)$ при $r = R$, т. е. на поверхности провода (при $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$).

Угол, на который запаздывает по фазе напряженность магнитного поля относительно напряженности электрического поля на поверхности провода, равен

$$\varphi = \beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4}.$$

Отношение внутренней индуктивности $L_{\text{внутр}}$ при переменном токе к ее значению $L_{\text{внутр}\,0}$ при постоянном токе нетрудно найти, если принять во внимание, что $L_{\text{внутр}} = x_{\text{внутр}}/\omega$ и что $L_{\text{внутр}\,0} = \mu l/(8\pi)$. Имеем

$$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}\,0}} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{r_0}{\omega L_{\text{внутр}\,0}} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{l}{\gamma\pi R^2}\frac{8\pi}{\omega\mu l} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{8}{(R\sqrt{\omega\mu\gamma})^2}.$$

В таблице даны отношения $z_{\text{внутр}}/r_0$, $x_{\text{внутр}}/r_0$, r/r_0, $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внутр}\,0}$ и угол φ в зависимости от $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$.

$R\sqrt{\omega\mu\gamma}$	$\frac{z_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\varphi°$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}\,0}}$
0	1	0	1	0	1
1	1,013	7,06	1,0001	0,1247	0,9976
2	1,180	24,01	1,080	0,481	0,961
3	1,625	35,81	1,318	0,951	0,846
4	2,168	39,29	1,678	1,373	0,686
5	2,680	40,39	2,043	1,737	0,556
6	3,180	41,17	2,394	2,093	0,465
7	3,679	41,78	2,744	2,450	0,400
8	4,179	42,23	3,096	2,814	0,352
9	4,679	42,57	3,446	3,165	0,313
10	5,179	42,83	3,796	3,522	0,275

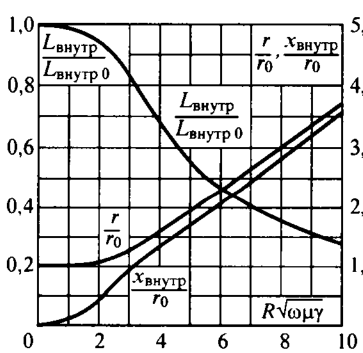

Рис. 30.16

На рис. 30.16 приведены кривые r/r_0, $x_{\text{внутр}}/r_0$ и $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внутр}\,0}$, характеризующие возрастание активного и внутреннего индуктивного сопротивлений провода и уменьшение его внутренней индуктивности при увеличении параметра $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$. При возрастании параметра $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$ отношение b_{0e}/b_{1e} стремится к единице и разность $\beta_{0e} - \beta_{1e}$ стремится к $\pi/2$, а следовательно, угол φ стремится к $\pi/4$. Поэтому при больших значениях этого параметра имеем

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} \approx \frac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}};$$

$$\frac{r}{r_0} \approx \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} \approx \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}},$$

что совпадает с результатом, полученным в § 30.5 при рассмотрении случая резкого проявления поверхностного эффекта, если учесть, что для провода круглого сечения необходимо принять $s/u = \pi R^2/(2\pi R) = R/2$.

Введя обозначение $\frac{R}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \chi$, можно дать приведенные в таблицах приближенные выражения для отношений r/r_0, $x_{внутр}/r_0$ и $L_{внутр}/L_{внутр\ 0}$:

χ	$\chi < 1$	$\chi > 1$	$\chi > 30$
$\frac{r}{r_0}$	$1 + \frac{\chi^4}{3}$	$\chi + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\chi}$	$\chi + 0{,}265 \approx \chi$

χ	$\chi \ll 1$	$\chi \gg 1$
$\frac{x_{внутр}}{r_0}$	$\chi^2 - \frac{\chi^6}{6}$	$\chi - \frac{3}{64\chi} \approx \chi$
$\frac{L_{внутр}}{L_{внутр\,0}}$	$1 - \frac{\chi^4}{6}$	$\frac{1}{\chi} - \frac{3}{64\chi^5} \approx \frac{1}{\chi}$

Если $\chi > 30$, то при расчете активного сопротивления провода его условно можно заменить эквивалентным трубчатым проводом с тем же внешним радиусом и равномерным распределением тока по сечению. Для определения толщины b стенки эквивалентного трубчатого провода, называемой иногда *эквивалентной глубиной проникновения* тока, имеем выражение

$$\frac{l}{2\pi R b\gamma} = r = r_0\chi = \frac{l}{\pi R^2\gamma}\chi.$$

Следовательно,

$$b = \frac{R}{2\chi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}.$$

30.11. Эффект близости. Поверхностная закалка индукционным методом

Если в непосредственной близости друг от друга расположено несколько проводников с переменными токами и каждый из них находится не только в собственном переменном магнитном поле, но и в магнитном поле других проводников, то распределение переменного тока в каждом проводнике будет несколько отличаться от того, которое имело бы место, если бы этот проводник был уединен. Этот эффект носит наименование *эффекта близости*. Он приводит к дополнительному увеличению активного сопротивления проводников.

В двухпроводной линии передачи, в проводах которой токи протекают в противоположных направлениях, эффект близости приводит к тому, что плотность тока на сторонах проводов, обращенных друг к другу, оказывается большей, чем на противоположных сторонах. Это можно объяснить стремлением тока избрать путь, при котором полное сопротивление получается наименьшим. Хотя дополнительная неравномерность распределения тока ведет к возрастанию активного сопротивления провода, индуктивное сопротивление при этом уменьшается, так как вследствие сближения прямого и обратного токов уменьшается эквивалентная индуктивность контура.

Поверхностный эффект и эффект близости широко используются при поверхностной закалке стальных изделий индукционным методом. В виде примера рассмотрим плоский контур, по которому протекает ток высокой частоты. Если поднести контур близко к плоской поверхности стального тела, то в этом теле вблизи его поверхности возникнут индуцированные токи. Эти токи, согласно принципу электромагнитной инерции, будут направлены противоположно току в указанном выше контуре, называемом в данном случае индуктором. Эффект близости при этом проявляется в том, что ток в теле стремится следовать за проводниками индуктора. Придавая проводникам индуктора ту или иную форму, можно соответствующим образом направлять токи в теле и получать нагревание поверхностного слоя тела для целей последующей закалки только в требуемых местах. Если поверхность тела не плоская, то и индуктору необходимо придать соответствующую форму. Метод поверхностной закалки был разработан в СССР В. П. Вологдиным и другими.

30.12. Электромагнитное экранирование

Для защиты элементов электрических цепей, например катушек самоиндукции, электронных ламп, электроизмерительных приборов и т. д., от влияния на них переменных электромагнитных полей применяют металлические экраны. Если защищаемый элемент цепи окружить сплошной металлической оболочкой, то при достаточной ее толщине внешнее электромагнитное поле практически не проникает внутрь оболочки, что ясно из произведенного выше рассмотрения процесса проникновения электромагнитной волны в проводящую среду. Подобные оболочки носят название *электромагнитных экранов*. Ясно, что такой экран оказывается также практически непроницаемым и для переменного электромагнитного поля, созданного элементом электрической цепи, заключенным в его полости, т. е. экран защищает также все приборы, расположенные вне его, от влияния поля, существующего внутри его.

Физически экранирующее действие может быть объяснено возникновением токов в стенках экрана, создающих поле, которое компенсирует их вызывающее внешнее поле. Эти токи могут рассматриваться как вихревые токи.

Для получения эффективного экранирующего действия толщину стенок экрана необходимо взять порядка длины волны λ в веществе экрана. Действительно, в § 30.2 мы убедились, что на расстоянии, равном длине волны в проводящей среде, электромагнитная волна практически полностью затухает. Как видно из таблицы, приведенной в § 30.2, при частоте $f = 500$ кГц длина волны в меди получается примерно равной 0,6 мм. Поэтому при радиочастотах нет необходимости применять для экранов ферромагнитные материалы, которые нежелательны вследствие зависимости их магнитной проницаемости от напряженности поля и явления гистерезиса. Обычно применяют экраны из хорошо проводящего материала, например из меди или алюминия. При промышленной частоте $f = 50$ Гц медный экран оказывается эффективным лишь при значительной толщине стенок, так как длина волны в меди при этой частоте равна 6 см. При таких низких частотах можно воспользоваться экраном из ферромагнитного материала, в котором электромагнитная волна затухает значительно быстрее, чем в меди, если, конечно, потери в ферромагнитном экране не препятствуют его применению. Ферромагнитный экран оказывает экранирующее действие и при постоянном поле, как это было показано в § 27.23. При переменном поле его экранирующее действие значительно возрастает вследствие дополнительного экранирующего эффекта токов, возникающих в стенках экрана.

30.13. Экспериментальное исследование и моделирование электрических и магнитных полей

Наряду с расчетом электрических, магнитных и электромагнитных полей имеет большое практическое значение их непосредственное экспериментальное исследование в реальных устройствах, а также их экспериментальное исследование методом моделирования.

Для экспериментального исследования электрического поля, например электрического поля в воздухе около изолятора высокого напряжения, можно воспользоваться тем обстоятельством, что удлиненное тело из металла или из диэлектрика с $\varepsilon > \varepsilon_0$, внесенное во внешнее электрическое поле, стремится расположиться вдоль линий напряженности этого поля. Прикрепим маленькую стрелку из тонкой и узкой алюминиевой ленты или из соломинки в ее середине к волосу, натянутому между концами небольшой стеклянной вилки. Вилку прикрепим к концу длинного стержня из изолирующего материала, служащего для ввода стрелки в исследуемое поле. Стрелка должна свободно вращаться на волосе. При внесении стрелки в исследуемое поле она располагается вдоль линий напряженности поля.

Поместим изолятор и стрелку между источником света и белым листом бумаги и устроим освещение так, чтобы на листе бумаги получалась резкая тень от изолятора и от стрелки. При этом получаем возможность обрисовать на листе бумаги тень изолятора и тень стрелки. Перемещая стрелку в различные положения в поле изолятора, каждый раз будем проводить черточку на бумаге вдоль ее тени. При большом числе черточек на бумаге отчетливо намечается направление линий напряженности исследуемого поля. Эти линии надлежит проводить так, чтобы черточки были к ним касательны. Имея картину линий напряженности поля, легко провести перпендикулярные им линии равного потенциала. Если подобрать расстояния между линиями напряженности поля и между линиями равного потенциала так, чтобы удовлетворились требования к форме ячеек сетки поля, сформулированные в §§ 24.15, 24.16, то картина поля даст возможность судить и о значении напряженности поля в разных точках.

Значение напряженности поля можно измерить и непосредственно, пользуясь маленькой безэлектродной неоновой лампой. Располагая лампу в некоторой точке поля в направлении линий напряженности, увеличиваем напряжение на изоляторе до тех пор, пока лампа не вспыхнет. Лампа вспыхивает при определенной напряженности поля, которая может быть найдена предварительно путем помещения лампы в нарастающее известное поле. Производя опыт в разных точках исследуемого поля, определяем напряжения на изоляторе, при которых вспыхивает лампа в этих точках поля. Результаты измерений дают возможность путем пропорционального пересчета получить напряженность в разных точках поля при одном напряжении на изоляторе.

Для исследования постоянного магнитного поля или магнитного поля, изменяющегося с небольшой частотой, но не меняющего своей конфигурации, можно воспользоваться аналогичным методом, помещая в различные точки поля свободно вращающуюся стрелку из ферромагнитного материала и наблюдая положения, которые занимает стрелка в этих точках поля. Для исследования магнитного поля можно использовать также явление электромагнитной индукции. Помещая в разные точки поля небольшой виток или катушку и измеряя с помощью баллистического гальванометра электрический заряд, переносимый сквозь поперечное сечение провода катушки при убывании потока до нуля, или измеряя действующее значение или амплитуду ЭДС, индуцируемой в катушке при периодически изменяющемся потоке, можно вычислить значение потока, сцепляющегося с витками катушки. Отыскивая положение катушки около данной точки поля, при котором поток имеет наибольшее значение, получаем направление вектора $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное плоскости катушки. По значению потока при этом находим значение магнитной индукции в середине катушки. Катушка должна быть столь малых размеров, чтобы в ее пределах поле мало отличалось от однородного.

Исследование электрического поля постоянного тока в проводящей среде производится весьма просто. Если среда твердая, можно исследовать поле только на ее поверхности. Если же среда жидкая или рыхлая, то поле можно исследовать и внутри ее. С этой целью вводят в среду зонд, представляющий собой тонкий металлический стержень, изолированный по всей длине, кроме небольшого отрезка на конце.

Зонд принимает потенциал той точки среды, в которой находится его открытый конец. Разность потенциала зонда и потенциала какой-либо другой неизменной точки среды может быть измерена вольтметром или при малых разностях потенциалов — высокочувствительным гальванометром. Сопротивление вольтметра или гальванометра должно быть достаточно велико, чтобы ток через них, выходящий из конца зонда в среду, не вызывал заметного изменения потенциала в месте расположения конца зонда. Наиболее точные результаты могут быть получены при использовании для измерения разности потенциалов компенсационного метода. Помещая конец зонда в различные точки исследуемого поля, можно найти в них потенциалы, что дает возможность построить поверхности равного потенциала или линии равного потенциала на поверхности среды или в каком-нибудь сечении среды. Линии напряженности электрического поля, а в однородной в отношении проводимости среде и линии тока проводят перпендикулярно поверхностям равного потенциала. На поверхности среды линии тока лежат в этой поверхности, и, следовательно, они перпендикулярны к линиям равного потенциала на этой поверхности.

Зная разность потенциалов двух близлежащих поверхностей равного потенциала и расстояние между ними в данном месте поля, можно без труда определить значение напряженности электрического поля в этом месте. Можно напряженность поля измерить и непосредственно, если воспользоваться двойным зондом, состоящим из двух вышеописанных одиночных зондов, открытые концы которых расположены на небольшом определенном расстоянии друг от друга. Измеряя разность потенциалов зондов и деля ее на расстояние между концами зондов, получаем значение составляющей вектора напряженности электрического поля в направлении линии, соединяющей концы зондов.

Экспериментальное исследование электрических и магнитных полей в тех или иных технических устройствах — изоляторах, приборах, машинах, аппаратах — имеет большое значение для правильного проектирования этих устройств. Экспериментальное исследование растекания тока в проводящей среде имеет большое значение для правильного проектирования заземляющих устройств, а также для определения так называемых блуждающих постоянных токов в земле, ответвляющихся в землю от рельсовых путей городского электрического транспорта и вызывающих разъедание проложенных в земле металлических труб и оболочек кабелей.

Постоянное электрическое поле в диэлектрике при отсутствии объемных зарядов, постоянное магнитное поле в области вне токов и постоянное электрическое поле в проводящей среде в области вне источников ЭДС описываются аналогичными уравнениями, имеющими соответственно вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0\,(\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}U);\quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0; \qquad (а)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0\,(\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}U_{\text{м}});\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0; \qquad (б)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0\,(\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}U);\quad \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0. \qquad (в)$$

Поэтому если одинаковы геометрические конфигурации областей пространства, в которых существуют эти поля, если аналогичны граничные условия на границах областей и если подобны относительные распределения значений ε, μ и γ внутри областей, то картины этих полей будут подобны друг другу.

Это обстоятельство может быть использовано для моделирования одного поля другим. Из вышеизложенного следует, что проще всего и с наибольшей точностью удается экспериментально исследовать электрическое поле в проводящей среде. Поэтому естественно исследование постоянных электрических полей в диэлектрике и постоянных магнитных полей вне токов заменять исследованием электрического поля в проводящей среде на соответствующих моделях. Важно при этом, чтобы при моделировании было соблюдено геометрическое подобие областей, в которых существует поле, а также соблюдены требуемые граничные условия. Если среда однородна, то требование правильного распределения значений γ внутри области отпадает.

Для исследования плоскопараллельных полей используют металлические листы или листы из проводящей бумаги, вырезанные по определенной фигуре, изображающей область рассматриваемого поля. К некоторым частям границ листа подводят, а от некоторых частей отводят ток, определенным образом распределяя его вдоль этих частей границ. Остальные части границ будут, очевидно, линиями тока. Если моделируется, например, плоскопараллельное магнитное поле около каких-нибудь частей машин или аппаратов, то границы листа, вдоль которых подводится ток, соответствуют границам, вдоль которых распределена магнитодвижущая сила, вызывающая магнитное поле; границы, вдоль которых в листе ток не подводится и которые являются линиями тока, соответствуют границам, вдоль которых не распределена м. д. с. и которые, следовательно, являются линиями равного магнитного потенциала.

На рис. 30.17 изображена область *abcdefga* в электрической машине, в которой существует магнитное поле в воздухе между полюсом и якорем и в пространстве между полюсами. На рис. 30.18 показан фигурный лист, на котором может быть исследовано поле тока, аналогичное магнитному полю в машине. Чтобы исключить в машине область, где протекают токи, обмотка на сердечнике полюса условно предположена сжатой к линии *ab*. Вдоль этой линии определенным образом распределена МДС. Так же следует распределить ток, входящий в лист по линии *ab*. Линии *bcd* и *efga* в машине суть линии равного магнитного потенциала. Линии *bcd* и *efga* в листе — линии тока. Поэтому всем линиям равного магнитного потенциала в поле машины будут соответствовать линии тока в листе, и всем магнитным линиям в поле машины будут соответствовать линии равного электрического потенциала в листе. Последние легко могут быть экспериментально найдены при помощи щупа *K* и гальванометра *G*.

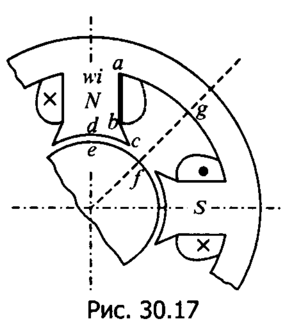

Рис. 30.17

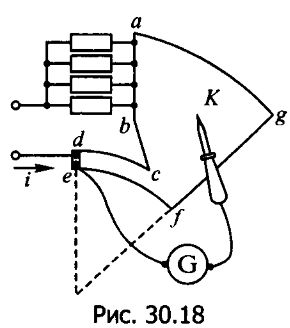

Рис. 30.18

Для исследования пространственных полей можно применить ванну со слабо проводящей жидкостью, в которую погружены металлические тела (электроды) и тела из изолирующего вещества определенной формы. К металлическим телам линии тока подходят перпендикулярно их поверхностям, тела из изолирующего вещества обтекаются линиями тока. Надлежащим образом подбирая форму тел и самой ванны, можно моделировать в такой ванне магнитное поле или электрическое поле в диэлектрике около той или иной интересующей нас системы намагниченных или заряженных тел. Во избежание появления ЭДС. поляризации около электродов пользуются переменным током низкой частоты, который распределяется в ванне практически так же, как и постоянный ток при отсутствии этих ЭДС.

В электролитической ванне можно моделировать не только постоянные и изменяющиеся с малой частотой магнитные и электрические поля, но и поля вектора скорости в газовой или жидкой среде при отсутствии турбулентного движения, а также поля других физических величин, если эти поля описываются уравнениями, аналогичными по форме уравнениям электрического поля постоянного тока в проводящей среде (для однородной среды — уравнением Лапласа).

Сплошную среду электрической модели можно заменить, допуская известную степень приближения, большим числом элементов, составленных из сопротивлений, т. е. заменить, как говорят, электрической решеткой или сеткой. На рис. 30.19 изображен элемент из шести сопротивлений, заменяющий параллелепипед, вырезанный из сплошной среды. Применение электрических сеток для приближенного решения уравнений Лапласа предложено С. А. Гершгориным в 1929 г.

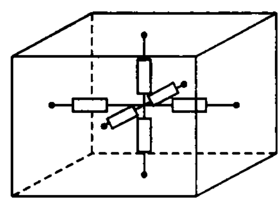

Рис. 30.19

Этот метод может быть распространен и на исследования быстропеременных полей, уже не описываемых уравнением Лапласа. Переменные электромагнитные поля отличаются от постоянных электрических и магнитных полей тем, что в них появляются токи электрического смещения и индуцируемые переменным магнитным потоком ЭДС. В электрической модели это можно учесть введением в каждый элемент модели помимо сопротивлений также емкостей и индуктивностей. На этом принципе Л. И. Гутенмахером разработаны так называемые электроинтеграторы. Вводя в эти элементы кроме вышеуказанных деталей еще усилители и дополнительные проводимости, определяющие отбор или генерирование энергии в элементе, представляется возможным решать при помощи электроинтеграторов весьма разнообразные задачи.

Отметим, наконец, что для непосредственного изучения переменного электромагнитного поля в проводящей среде, т. е. для изучения явления поверхностного эффекта, можно исследование вести в устройствах, геометрически подобных действительным устройствам, но линейные размеры l которых уменьшены или увеличены в некоторое число раз. При этом, как следует из вышеизложенной теории поверхностного эффекта, необходимо, чтобы в модели и в оригинале оставалась неизменной безразмерная величина $l\sqrt{\omega\mu\gamma}$, называемая критерием подобия.

Для непосредственного исследования переменного электромагнитного поля в диэлектрике в геометрически подобных моделях критерием подобия является при периодических процессах величина $l\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ и при любых процессах — величина $\frac{l}{t}\sqrt{\mu\varepsilon}$, где t — промежуток времени, отсчитываемый от начального момента времени. Действительно, отношение l/t в модели (l_1/t_1) и в оригинале (l_2/t_2) должно быть равно отношению скоростей распространения электромагнитных волн в модели $v_1 = 1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ и в оригинале $v_2 = 1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$, откуда $\frac{l_1}{t_1}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{l_2}{t_2}\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \text{const}$.

В области теории и практики моделирования приоритет и большие заслуги принадлежат советским ученым Н. Н. Павловскому, А. Н. Крылову, М. В. Кирпичеву, а также С. А. Гершгорину, Л. И. Гутенмахеру, Н. В. Королькову, Д. Ю. Панову и др.

30.14. О критериях разграничения задач теории электрических и магнитных цепей и задач теории электромагнитного поля

Из всего вышеизложенного следует, что, по существу, все электромагнитные явления при полном и детальном их рассмотрении требуют исследования электромагнитных полей и соответственно в той или иной мере относятся к теории электромагнитного поля. Вместе с тем, представляет большую ценность возможность сведения задач из области электромагнитных явлений к задачам теории электрических и магнитных цепей, которая оперирует только интегральными величинами — электрическим током, напряжением, магнитным потоком и т. д. Весьма важным является установление критериев, в каких случаях допустимо рассмотрение задач как относящихся к теории цепей и когда необходимо их рассматривать как задачи теории поля.

Теория электрических цепей базируется на введении параметров отдельных участков цепи, из которых основными являются индуктивности, емкости и сопротивления. Помимо этих параметров вводят в рассмотрение еще множество других, находящихся в известной связи с ними или имеющих самостоятельное значение. Так, магнитные цепи принято характеризовать их магнитным сопротивлением. При синусоидальном изменении магнитного потока можно ввести более общий параметр — комплексное магнитное сопротивление, характеризующее также и потери энергии на гистерезис и на вихревые токи в магнитной цепи. При исследовании электрических цепей при синусоидальных переменных токах вводят понятия об активных и реактивных сопротивлениях и проводимостях участков цепи, которые в простейших цепях находятся в функциональной зависимости от индуктивностей, емкостей и сопротивлений отдельных элементов цепи. При синусоидальном изменении токов вводят также более общие параметры — комплексное электрическое сопротивление и комплексную проводимость. Многие элементы цепей характеризуются их специфическими параметрами. Так, например, основные свойства трехэлектродной электронной лампы определяются не только ее внутренним сопротивлением, но и коэффициентом усиления.

Из всего рассмотренного выше следует, что только для статических или стационарных режимов всем этим параметрам может быть придано вполне определенное значение и что при переменных процессах использование их существенно осложняется. Так, например, распределение магнитного поля около какого-либо электрического контура при заданном электрическом токе в контуре зависит не только от формы контура, но и от распределения тока внутри проводника, образующего контур. Только при постоянном токе распределение тока при заданных электрических свойствах проводника однозначно определяется геометрической формой проводника. Соответственно только при постоянном токе такой важнейший параметр электрической цепи, как ее индуктивность, вполне определяется при заданных магнитных свойствах среды геометрическими размерами и формой контура цепи. При изменении тока во времени изменяется распределение тока по сечению проводников, образующих контур тока, и соответственно изменяется распределение в пространстве магнитного потока, сцепленного с контуром, а следовательно, изменяется и индуктивность контура. Так, при периодических процессах, как мы имели возможность убедиться в этой главе, электрический ток распределяется преимущественно в поверхностном слое проводника, что ведет к ослаблению магнитного поля внутри проводника и к уменьшению индуктивности цепи. При синусоидальном токе индуктивность является функцией угловой частоты тока. При несинусоидальном периодическом токе она, очевидно, будет являться функцией также формы кривой тока. При непериодических изменениях тока индуктивность, строго говоря, будет являться, хотя бы по одной только указанной причине — неравномерности распределения тока в проводнике — сложной функцией времени.

От скорости изменения тока зависит в еще большей мере активное сопротивление проводника. Строго говоря, это утверждение относится и к емкости конденсатора, так как неравномерное распределение переменного тока по ширине обкладок конденсатора должно вызывать перераспределение потока электрического смещения в диэлектрике, а следовательно, приводить к некоторому изменению емкости конденсатора.

Критерием того, следует ли считаться с рассмотренными явлениями, служит соотношение между промежутком времени, необходимым для прохождения электромагнитной волны внутрь проводника от его поверхности до центральных частей поперечного сечения, и промежутком времени, в течение которого ток в проводнике успевает измениться на заметную величину по сравнению со своим максимальным значением. При периодических процессах этот критерий сводится к соотношению между длиной электромагнитной волны внутри проводника и линейными размерами поперечного сечения проводника. Если длина волны в проводящей среде имеет порядок или меньше линейных размеров поперечного сечения проводника, то явление поверхностного эффекта становится заметным. Мы видели, что длина электромагнитной волны в проводящей среде даже при сравнительно низких частотах весьма невелика.

Мы начали здесь рассмотрение вопроса о параметрах цепей при переменных токах с анализа влияния на значения этих параметров процессов, происходящих внутри проводников, потому что эти процессы приходится учитывать уже при сравнительно медленных изменениях тока. Вопрос о параметрах цепи еще больше осложняется, когда токи и напряжения в цепи изменяются столь быстро, что за время заметного их изменения электромагнитные волны не успевают распространиться в диэлектрике вдоль всей цепи. Так как скорость распространения электромагнитных волн в диэлектрике велика, например в воздухе она равна приблизительно $3\cdot10^8$ м/с, то учитывать ее конечное значение при не очень протяженных цепях приходится лишь при весьма быстрых изменениях тока и напряжения.

В тех случаях, когда можно не считаться с конечной скоростью распространения волн в диэлектрике, электрическую цепь называют цепью с сосредоточенными параметрами. При периодических процессах критерием допустимости рассмотрения цепи как цепи с сосредоточенными параметрами является малость линейных размеров цепи и ее элементов по сравнению с длиной электромагнитной волны в диэлектрике. При частоте $f = 50$ Гц длина электромагнитной волны в воздухе равна $\lambda = 3 \cdot 10^8/50 = 6 \cdot 10^6$ м = 6000 км. Поэтому при этой частоте обычные электромагнитные устройства и электрические цепи, за исключением длинных линий, рассматриваются как обладающие сосредоточенными параметрами. Периодические процессы в них часто называют квазистационарными процессами.

Если протяженность электрической цепи столь велика, что промежуток времени, необходимый для прохождения электромагнитной волны вдоль цепи, становится сравнимым с промежутком времени, в течение которого токи или напряжения в отдельных участках цепи успевают заметно измениться, то такую цепь уже нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами. В простейшем случае, когда цепь имеет большую протяженность лишь в одном направлении, вводят понятие о параметрах, распределенных по длине цепи. Примером таких цепей являются однородные линии. Другим примером могут служить обмотки трансформаторов и электрических машин, которые при распространении вдоль них волн тока и напряжения с длительностью, измеряемой микросекундами, должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами. Для характеристики подобных цепей вводят параметры, отнесенные к единице длины цепи.

Однако и этот метод становится уже невозможным в тех случаях, когда длина электромагнитной волны в диэлектрике сравнима с размерами устройств во всех направлениях. С такими условиями мы встречаемся в технике ультракоротких волн, длины которых измеряются сантиметрами и которые находят широкое применение в современной радиотехнике. При столь быстрых процессах уже невозможно характеризовать устройство определенными параметрами: индуктивностью, емкостью и сопротивлением. Невозможно говорить также и о параметрах, распределенных вдоль какого-то одного направления. Электрические колебательные системы при столь коротких волнах приобретают весьма своеобразный вид — это полые металлические тела, внутри полостей которых возбуждаются электромагнитные волны в диэлектрике, многократно отражающиеся от стенок тел. В таких системах возможна настройка в резонанс, причем резонансные частоты определяются размерами и формой тел. Весьма своеобразную форму принимают при столь коротких волнах и устройства, служащие для передачи электромагнитной энергии, получившие название волноводов. Это — металлические трубы, внутри которых распространяются электромагнитные волны в направлении осей труб. По отношению к подобным устройствам затруднительно применение понятия электрической цепи в его обычном смысле. Для расчета электромагнитных процессов в подобных системах необходимо прибегать к решению уравнений электромагнитного поля с учетом соответствующих граничных условий.

Алфавитный указатель

О

П

Камо Серопович Демирчян, Леонид Робертович Нейман,
Николай Владимирович Коровкин

Теоретические основы электротехники
Учебник для вузов
5-е изд. Том 2

Заведующий редакцией	*А. Сандрыкин*
Руководитель проекта	*П. Маннинен*
Ведущий редактор	*Ю. Сергиенко*
Художественный редактор	*К. Радзевич*
Корректор	*В. Ганчурина*
Верстка	*Л. Харитонов*

ООО «Питер Пресс», 198206, Санкт-Петербург, Петергофское шоссе, д. 73, лит. А29.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.
Подписано в печать 15.12.08. Формат 70x100/16. Усл. п. л. 34,83. Тираж 3000. Заказ 10672.
Отпечатано по технологии CtP в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., д. 15.