Л. А. Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электрические цепи.

Издание седьмое,
переработанное
и дополненное

Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебника для студентов
электротехнических, энергетических
и приборостроительных специальностей
высших учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

ББК 31.2
Б53
УДК 621.3(075.8)

Рецензент
кафедра «Теоретические основы электротехники»
Московского авиационного института

Бессонов Л. А.

Б53 Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. — 7-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа, 1978. — 528 с., ил.

В пер.: 1 р. 30 к.

В книге рассмотрены линейные и нелинейные электрические цепи, т. е. весь материал курса ТОЭ, изучение которого предусмотрено программой в течение двух первых семестров. Все главы данного издания подверглись переработке и дополнению. По линейным цепям включен следующий новый материал: основы метода пространства состояний, аппроксимация частотных характеристик, дополняющие двухполюсники, перенос идеальных источников, конверторы и инверторы и др.; по нелинейным цепям — применение интегральных уравнений, селективное выпрямление, субгармонические колебания, автомодуляция, метод неопределенной матрицы и двойного алгебраического дополнения и др. Введены вопросы и задачи для самопроверки.

$\text{Б}\,\dfrac{30306-280}{001(01)-78}\,99-78$

ББК 31.2
6П2.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) являются основой для профилирующих дисциплин многих высших технических учебных заведений.

Студенты изучают курс ТОЭ в течение трех семестров. В соответствии с этим материал учебника разделен на три части. Учебник издан в двух книгах. В первой книге рассмотрена теория линейных и нелинейных электрических цепей (ч. I и II), во второй — теория электромагнитного поля (ч. III). Той или иной переработке подверглись все главы книги.

По сравнению с предыдущим изданием в учебник включены следующие новые вопросы по теории цепей: дополняющие двухполюсники, конвертор и инвертор сопротивлений, синтез по Бруне, четырехполюсники для фазовой коррекции, аппроксимация частотных характеристик, понятие о видах чувствительности системных функций, приведение графа с несколькими источниками сигнала одинаковой частоты к графу с одним источником, изменение токов ветвей при вариации сопротивления одной ветви, перенос идеальных источников тока и напряжения, переходное и импульсное сопротивления, метод неопределенной матрицы узловых проводимостей и двойного алгебраического дополнения, формирующая линия, селективное выпрямление, появление постоянных составляющих потоков и зарядов у нелинейных индуктивностей и нелинейных емкостей при отсутствии постоянных составляющих токов и соответственно напряжений, субгармонические колебания, автомодуляция, метод интегральных уравнений для исследования процессов в нелинейных цепях, частотные характеристики нелинейных цепей, основы метода пространства состояний. Полностью переработана глава о четырехполюснике, полнее рассмотрен вопрос о фазовой плоскости, ряд примеров заменен новыми. По теории поля включены следующие новые вопросы: распространение электромагнитных волн в гиротропной среде, второй вариант метода интегральных уравнений для расчета электромагнитных полей, понятие о запредельном волноводе, граничные условия Леонтовича, формулы Френеля, линии с поверхностными волнами, вывод формулы для групповой скорости, интеграл Шварца, вывод связи между напряженностями поля на конформно преобразуемых плоскостях, отражения в сфере и цилиндре, графическое построение картины плоскомеридианного поля.

В учебник включено приложение об истории развития электротехники и становлении курса ТОЭ.

Материал курса ТОЭ, как и в предыдущем издании, разделен на о б щ и й, *обязательный для студентов всех специальностей,* в учебных планах которых имеется этот курс, и на с п е ц и а л ь н ы й, *в неодинаковой степени обязательный для студентов различных специальностей*. Общий материал набран нормальным шрифтом (корпусом), специальный — петитом.

Кроме того, одна часть специального материала расположена в основном тексте; как правило, в эту часть входит материал, представляющий собой развитие отдельных положений, изложенных в основном тексте, а также материал, который, по мнению автора, нужен для большего числа специальностей. Другая часть специального материала сосредоточена в приложениях к каждой части курса. В приложениях рассмотрены вопросы, обязательные для меньшего числа специальностей. При этом автор книги отдает себе отчет в том, что при отнесении специального материала к одной из двух указанных категорий неизбежен некоторый субъективный подход.

В зависимости от специфики института, факультета и специальности кафедра ТОЭ рекомендует студенту изучить соответствующие разделы специального материала.

Символический метод расчета электрических цепей излагается в книге после рассмотрения свойств линейных электрических цепей и методов их расчета. Опыт показывает, что времени на изучение студент при этом затрачивает не больше, а качество усвоения оказывается значительно лучшим, чем в том случае, когда изложение основ теории и методов расчета линейных цепей проводится одновременно с рассмотрением символического метода.

Учебник написан так, что допускает возможность некоторой перестановки его глав, если в этом возникнет необходимость в каком-либо вузе, где исторически сложилась традиция несколько иной последовательности изложения материала. Например, без ущерба для понимания можно поместить гл. 11 сразу после гл. 7, поменять местами гл. 25 и 26, отнести гл. 27 и 28 в раздел приложений и т. п. Возможность перестановки некоторых глав соответствует тому, что действующая программа курса ТОЭ является объемной и строго не регламентирует последовательность изучения материала.

Для облегчения усвоения материала в учебнике дано решение свыше 230 числовых примеров, равномерно распределенных по всем разделам курса. Физические пояснения к математическим операциям, например к операциям векторного анализа, даются в книге непосредственно перед тем, как та или иная из них по ходу изложения впервые используется. Наиболее приспособлен для совместной работы с данным учебником задачник [26]. В конце глав учебника приведены вопросы для самопроверки и даны номера задач по [26], которые рекомендуется решить после проработки соответствующей главы.

При подготовке учебника к переизданию были учтены все полезные замечания, высказанные товарищами по кафедре, а также рецензентами — сотрудниками кафедры ТОЭ МАИ во главе с проф. Колосовым С. П. Большую помощь при издании книги оказала старший преподаватель кафедры ТОЭ МИРЭА Расовская С. Э. и доцент С. А. Миленина. Всем им выражаю благодарность.

Автор

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 1.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей. Электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом — электрической цепью.

Электрической цепью называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий «ток», «напряжение», «э. д. с.», «сопротивление» (проводимость), «индуктивность», «емкость».

Постоянным током называют ток, неизменный во времени. Постоянный ток представляет собой направленное упорядоченное движение частиц, несущих электрические заряды.

Как известно из курса физики, носителями зарядов в металлах являются свободные электроны, а в жидкостях — ионы. Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках вызывается электрическим полем, созданным в них источниками электрической энергии. Источники электрической энергии преобразуют химическую, механическую и другие виды энергии в электрическую. Источник электрической энергии характеризуется величиной и направлением э. д. с. и величиной внутреннего сопротивления.

Постоянный ток принято обозначать буквой I, э. д. с. источника — E, сопротивление — R и проводимость — g. В Международной системе единиц (СИ) ток измеряют в амперах (А), э. д. с. — в вольтах (В), сопротивление — в омах (Ом) и проводимость — в сименсах (См).

Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют *электрической схемой* (рис. 1.1, *а*).

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению, от напряжения на этом сопротивлении принято называть *вольт-амперной характеристикой* (по оси абсцисс на графике обычно откладывают напряжение, а по оси ординат — ток).

Сопротивления, вольт-амперные характеристики которых являются прямыми линиями (рис. 1.1, *б*), называют *линейными сопротивлениями*, а электрические цепи только с линейными сопротивлениями — *линейными электрическими цепями*.

Сопротивления, вольт-амперные характеристики (в. а. х.) которых не являются прямыми линиями (рис. 1.1, *в*), т. е. они нелинейны, называют *нелинейными сопротивлениями*, а электрические цепи с нелинейными сопротивлениями — *нелинейными электрическими цепями*.

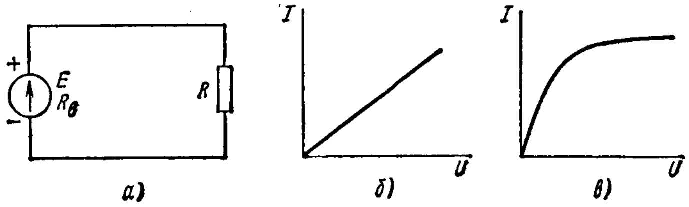


Рис. 1.1

§ 1.2. Источник э. д. с. и источник тока. Источник электрической энергии имеет э. д. с. E и внутреннее сопротивление $R_в$. Если через него под действием э. д. с. E протекает ток I, то напряжение на его зажимах $U = E - IR_в$ при увеличении I уменьшается. Зависимость напряжения U на зажимах реального источника от тока I изображена на рис. 1.2, *а*.

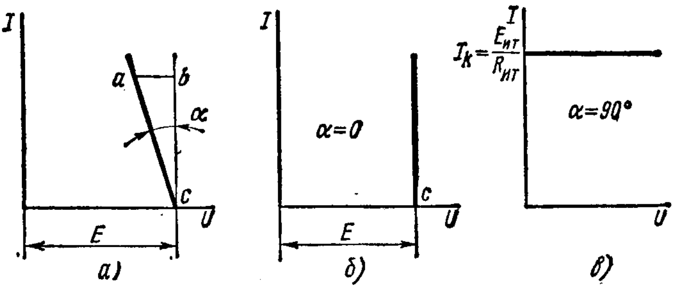


Рис. 1.2

Обозначим m_U — масштаб по оси U, m_I — масштаб по оси I. Тогда для произвольной точки на характеристике рис. 1.2, *а*:

$$abm_U = IR_в; \quad bcm_I = I; \quad \operatorname{tg}\alpha = ab/bc = R_в m_I/m_U.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha$ пропорционален $R_в$. Рассмотрим два крайних случая.

1. Если у некоторого источника внутреннее сопротивление $R_в = 0$, то вольт-амперная характеристика его будет в виде прямой (рис. 1.2, *б*). Такой характеристикой обладает идеализированный источник питания, называемый *источником э. д. с.*

Следовательно, источник э. д. с. представляет собой такой идеализированный источник питания, напряжение на зажимах которого постоянно (не зависит от тока I) и равно э. д. с. E, а внутреннее сопротивление равно нулю.

2. Если у некоторого источника беспредельно увеличивать э. д. с. E и внутреннее сопротивление $R_в$, то точка c (рис. 1.2, *а*) отодви-

гается по оси абсцисс в бесконечность, а угол α стремится к 90° (рис. 1.2, *в*). Такой источник питания называют *источником тока*.

Следовательно, источник тока представляет собой идеализированный источник питания, который создает ток $I = I_k$, не зависящий от сопротивления нагрузки, к которой он присоединен, а его э. д. с. $E_{ит}$ и внутреннее сопротивление $R_{ит}$ равны бесконечности. Отношение двух бесконечно больших величин $E_{ит}/R_{ит}$ равно конечной величине — току I_k источника тока.

При расчете и анализе электрических цепей *реальный источник* электрической энергии с конечным значением $R_в$ заменяют *расчетным эквивалентом*. В качестве эквивалента может быть взят:

1) источник э. д. с. E с последовательно включенным сопротивлением $R_в$, равным внутреннему сопротивлению реального источника (рис. 1.3, *а*; стрелка в кружке указывает направление возрастания потенциала внутри источника э. д. с.);

2) источник тока с током $I_k = E/R_в$ и параллельно с ним включенным сопротивлением $R_в$ (рис. 1.3, *б*; стрелка в кружке указывает положительное направление тока источника тока).

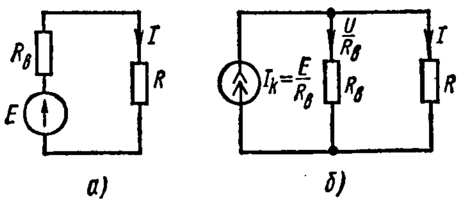


Рис. 1.3

Ток в нагрузке (в сопротивлении R) для схем рис. 1.3, *а*, *б* одинаков и равен $I = E/(R + R_в)$, т. е. равен току для схемы рис. 1.1, *а*. Для схемы рис. 1.3, *а* это следует из того, что при последовательном соединении сопротивления R и $R_в$ складываются. В схеме рис. 1.3, *б* ток $I_k = E/R_в$ распределяется обратно пропорционально сопротивлениям R и $R_в$ двух параллельных ветвей. Ток в нагрузке R

$$I = I_k \frac{R_в}{R + R_в} = \frac{E}{R_в} \cdot \frac{R_в}{R + R_в} = \frac{E}{R + R_в}.$$

Каким из двух расчетных эквивалентов пользоваться, совершенно безразлично. В дальнейшем используется в основном первый эквивалент.

Обратим внимание на следующее:

1) источник э. д. с. и источник тока — это идеализированные источники, физически осуществить которые, строго говоря, невозможно;

2) схема рис. 1.3, *б* эквивалентна схеме рис. 1.3, *а* в отношении энергии, выделяющейся в сопротивлении нагрузки R, и не эквивалентна ей в отношении энергии, выделяющейся во внутреннем сопротивлении источника питания;

3) идеальный источник э. д. с. нельзя заменить идеальным источником тока.

Пример 1а. В схеме рис. 1.3, *б* источник тока дает ток $I_k = 50$А. Шунтирующее его сопротивление $R_в = 2$ Ом. Найти э. д. с. эквивалентного источника э. д. с. в схеме рис. 1.3, *а*.

Решение. Э. д. с. $E = I_k R_в = 100$ В. Следовательно, параметры эквивалентной схемы рис. 1.3, *а* таковы: $E = 100$ В и $R_в = 2$ Ом.

§ 1.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи. Электрические цепи подразделяют на неразветвленные и разветвленные. На рис. 1.1, *а* представлена схема простейшей неразветвленной цепи. Во всех элементах ее течет один и тот же ток. Простейшая разветвленная цепь изображена на рис. 1.4, *а*; в ней имеются три ветви и два узла. В каждой ветви течет свой ток. *Ветвь* можно определить как участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами (через которые течет одинаковый ток) и заключенный между двумя узлами. В свою очередь *узел* есть точка цепи, в которой сходятся не менее трех ветвей. Если в месте пересечения двух линий на электрической схеме поставлена точка (рис. 1.4, *б*), то в этом месте есть электрическое соединение двух линий, в противном случае (рис. 1. 4, *в*) его нет. Узел, в котором сходятся две ветви, одна из которых является продолжением другой, называют *устранимым узлом.*

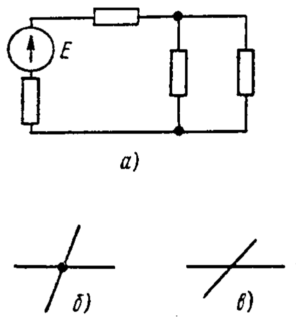


Рис. 1.4

§ 1.4. Напряжение на участке цепи. Под *напряжением* на некотором участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка.

На рис. 1.5 изображен участок цепи, крайние точки которого обозначены буквами a и b. Пусть ток I течет от точки a к точке b (от более высокого потенциала к более низкому). Следовательно, потенциал точки a (φ_a) выше потенциала точки b (φ_b) на величину, равную произведению тока I на сопротивление R:

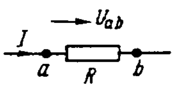


Рис. 1.5

$$\varphi_a = \varphi_b + IR.$$

В соответствии с определением напряжение между точками a и b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Следовательно, $U_{ab} = IR$, т. е. напряжение на сопротивлении равно произведению тока, протекающего по сопротивлению, на величину этого сопротивления.

В электротехнике разность потенциалов на концах сопротивления принято называть либо *напряжением на сопротивлении*, либо *падением напряжения*. В дальнейшем разность потенциалов на концах сопротивления, т. е. произведение IR, будем именовать падением напряжения.

Положительное направление падения напряжения на каком-либо участке (направление отсчета этого напряжения), указываемое на рисунках стрелкой, совпадает с положительным направлением отсчета тока, протекающего по данному сопротивлению.

В свою очередь положительное направление отсчета тока I (ток — это скаляр алгебраического характера) совпадает с положительным направлением нормали к поперечному сечению проводника при вычислении тока по формуле $I=\int\limits_s \vec{\delta}\, \vec{ds}$, где $\vec{\delta}$ — плотность тока и $\vec{ds}$ — элемент площади поперечного сечения (подробнее см. § 20.1).

Рассмотрим вопрос о напряжении на участке цепи, содержащем не только сопротивление, но и э. д. с.

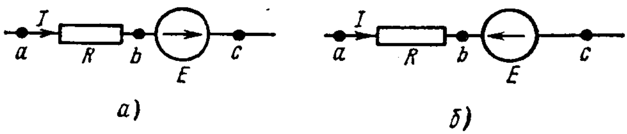


Рис. 1.6

На рис. 1.6, *а*, *б* показаны участки некоторых цепей, по которым протекает ток I. Найдем разность потенциалов (напряжение) между точками a и c для этих участков. По определению,

$$U_{ac}=\varphi_a-\varphi_c. \tag{1.1}$$

Выразим потенциал точки a через потенциал точки c. При перемещении от точки c к точке b встречно направлению э. д. с. E (рис. 1.6, *а*) потенциал точки b оказывается ниже (меньше), чем потенциал точки c, на величину э. д. с. E:

$$\varphi_b=\varphi_c-E.$$

При перемещении от точки c к точке b согласно направлению э. д. с. E (рис. 1.6, *б*) потенциал точки b оказывается выше (больше), чем потенциал точки c, на величину э. д. с. E:

$$\varphi_b=\varphi_c+E.$$

Так как ток течет от более высокого потенциала к более низкому, в обеих схемах рис. 1.6 потенциал точки a выше потенциала точки b на величину падения напряжения на сопротивлении R:

$$\varphi_a=\varphi_b+IR.$$

Таким образом, для рис. 1.6, *а*

$$\varphi_a=\varphi_c-E+IR,$$

или

$$U_{ac}=\varphi_a-\varphi_c=IR-E, \tag{1.2а}$$

и для рис. 1.6, *б*

$$\varphi_a=\varphi_c+E+IR,$$

или

$$U_{ac}=\varphi_a-\varphi_c=IR+E. \tag{1.2б}$$

Положительное направление напряжения U_{ac} показывают стрелкой от a к c. Согласно определению напряжения, $U_{ca}=\varphi_c-\varphi_a$.

Поэтому $U_{ca} = -U_{ac}$, т. е. изменение чередования (последовательности) индексов равносильно изменению знака этого напряжения. Следовательно, напряжение может быть и положительной, и отрицательной величиной.

§ 1.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с. Закон (правило) Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с., устанавливает связь между током и напряжением на этом участке. Применительно к рис. 1.5

$$U_{ab} = IR,$$

или

$$I = U_{ab}/R = (\varphi_a - \varphi_b)/R. \tag{1.3}$$

§ 1.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. Закон (правило) Ома для участка цепи, содержащего э. д. с., позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов $(\varphi_a - \varphi_c)$ на концах участка цепи и имеющейся на этом участке э. д. с. E. Так, из уравнения (1.2а) для схемы рис. 1.6, *а*

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R};$$

из уравнения (1.2б) для схемы рис. 1.6, *б*

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}.$$

В общем случае

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R} = \frac{U_{ac} \pm E}{R}. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) математически выражает закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.; знак плюс перед E соответствует рис. 1.6, *а*, знак минус — рис. 1.6, *б*. В частном случае при $E = 0$ уравнение (1.4) переходит в уравнение (1.3).

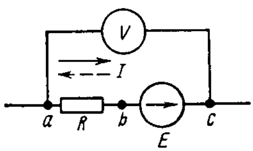


Рис. 1.7

Пример 1. К зажимам *а* и *с* схемы рис. 1.7 подключен вольтметр, имеющий очень большое, теоретически бесконечно большое сопротивление (следовательно, его подключение или отключение не влияет на режим работы цепи).

Если ток $I = 10$ А течет от *а* к *с*, то показание вольтметра $U'_{ac} = -18$ В; если ток $I = 10$ А течет от *с* к *а*, то $U''_{ac} = -20$ В. Определить сопротивление R и э. д. с. E.

Решение. В первом режиме $U'_{ac} = -18 = -E + IR = -E + 10R$. Во втором режиме $U''_{ac} = -20 = -E - IR = -E - 10R$. Совместное решение дает $E = 19$ В и $R = 0{,}1$ Ом.

§ 1.7. Законы Кирхгофа. Все электрические цепи подчиняются первому и второму законам (правилам) Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю*;

2) *сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов.*

Так, применительно к рис. 1.8, если подтекающие к узлу токи считать положительными, а утекающие — отрицательными, то согласно первой формулировке

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$

согласно второй —

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Физически первый закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Если мысленно рассечь любую схему произвольной плоскостью и все находящееся по одну сторону от нее рассматривать как некоторый большой «узел», то алгебраическая сумма токов, входящих в этот «узел», будет равна нулю.

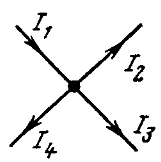


Рис. 1.8

Второй закон Кирхгофа также можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с. вдоль того же контура*:

$$\sum IR = \sum E$$

(в каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним);

2) *алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения!) вдоль любого замкнутого контура равна нулю*:

$$\sum U_k = 0.$$

Так, для периферийного контура схемы рис. 1.9

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения во времени токов и напряжений.

§ 1.8. Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа. Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Обозначим число всех ветвей схемы $в$, число ветвей, содержащих источники тока, — $в_{ит}$ и число узлов — $у$. В каждой ветви схемы течет свой ток. Так как токи в ветвях с источниками тока известны, то число неизвестных токов равняется $в - в_{ит}$. Перед тем как составлять уравнения, необходимо произвольно выбрать:

а) положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме;

б) положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

С целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми, например по часовой стрелке.

Чтобы получить линейно независимые уравнения, по первому закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу узлов без единицы, т. е. $y-1$.

Уравнение для последнего y-го узла не составляют, так как оно совпало бы с уравнением, полученным при суммировании уже составленных уравнений для $y-1$ узлов, поскольку в эту сумму входили бы дважды и с противоположными знаками токи ветвей, не подходящих к y-му узлу, а токи ветвей, подходящих к y-му узлу, входили бы в эту сумму со знаками, противоположными тем, с какими они вошли бы в уравнение для y-го узла.

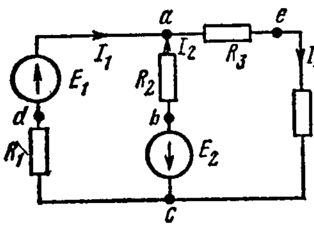


Рис. 1.9

По второму закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу ветвей без источников тока $(в-в_{ит})$, за вычетом уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т. е. $(в-в_{ит})-(y-1)=в-в_{ит}-y+1$.

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, следует охватить все ветви схемы, исключая лишь ветви с источниками тока. При записи линейно независимых уравнений по второму закону Кирхгофа стремятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону Кирхгофа. Такие контуры условимся называть *независимыми*.

Для того чтобы пояснить, что такое независимый контур, используют понятия «дерево», «ветвь», «хорда» (см. § Б.3). В том же § Б.3 говорится о том, что уравнения по законам Кирхгофа иногда составляют, используя матрицы фундаментальных контуров и матрицы отсечений.

Требование, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, является достаточным, но не необходимым условием, а потому его не всегда выполняют. В таких случаях часть уравнений по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, все ветви которых уже вошли в предыдущие контуры.

Пример 2. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.9, в которой $E_1=80$ В, $E_2=64$ В, $R_1=6$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=3$ Ом, $R_4=1$ Ом.

Решение. Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях. В схеме рис. 1.9 $в=3$; $в_{ит}=0$; $y=2$. Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить только одно уравнение:

$$I_1+I_2=I_3. \qquad (а)$$

Нетрудно убедиться, что для второго узла получили бы аналогичное уравнение. По второму закону Кирхгофа составим $в-в_{ит}-(y-1)=3-0-(2-1)=2$ уравнения. Положительные направления обхода контуров выбираем по часовой стрелке.

Для контура $R_1E_1R_2E_2$

$$I_1R_1-I_2R_2=E_1+E_2. \qquad (б)$$

Знак плюс перед I_1R_1 взят потому, что направление тока I_1 совпадает с направлением обхода контура; знак минус перед I_2R_2 — потому, что направление I_2 встречно обходу контура.

Для контура $E_2R_2R_3R_4$

$$I_2R_2 + I_3(R_3 + R_4) = -E_2. \tag{в}$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в) дает: $I_1 = 14$ А, $I_2 = -15$ А, $I_3 = -1$ А.

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета какой-либо один или несколько токов могут оказаться отрицательными. В рассмотренном примере отрицательными оказались токи I_2 и I_3, что следует понимать так: направления токов I_2 и I_3 не совпадают с направлениями, принятыми для них на рис. 1.9 за положительные, т. е. в действительности токи I_2 и I_3 проходят в обратном направлении.

§ 1.9. Заземление одной точки схемы. При заземлении любой одной точки схемы токораспределение в схеме не меняется, так как никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, при этом не образуется. Иначе будет, если заземлить две или большее число точек схемы, имеющих различные потенциалы. В этом случае через землю (любую проводящую среду) образуются дополнительные ветви, сама схема становится отличной от исходной и токораспределение в ней меняется.

§ 1.10. Потенциальная диаграмма. Под потенциальной диаграммой понимают график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс на нем откладывают сопротивления вдоль контура, начиная с какой-либо произвольной точки, по оси ординат — потенциалы. Каждой точке участка цепи или замкнутого контура соответствует своя точка на потенциальной диаграмме.

Рассмотрим последовательность построения потенциальной диаграммы по данным примера 2.

Пример 3. Построить потенциальную диаграмму для контура *abcea* (рис. 1.9).

Решение. Подсчитаем суммарное сопротивление контура: $4+3+1=8$ Ом. Выберем масштабы по оси абсцисс (ось x) и по оси ординат (ось y).

Произвольно примем потенциал одной из точек, например точки a, $\varphi_a = 0$. Эту точку на диаграмме рис. 1.10 поместим в начало координат.

Потенциал точки b $\varphi_b = \varphi_a + I_2 4 = \varphi_a - 60 = -60$ В; ее координаты: $x = 4$, $y = -60$. Потенциал точки c $\varphi_c = \varphi_b + E_2 = 4$ В; ее координаты: $x = 4$, $y = 4$. Потенциал точки e $\varphi_e = \varphi_c + I_3R_4 = 4 - 1 \cdot 1 =$ 3В; ее координаты: $x = 5$, $y = 3$.

Тангенс угла α_1 наклона прямой ab к оси абсцисс пропорционален току I_2, а тангенс угла α_2 наклона прямой ce — току I_3; $\operatorname{tg}\alpha = I\dfrac{m_R}{m_\varphi}$, где m_R и m_φ — масштабы по осям x и y.

§ 1.11. Энергетический баланс в электрических цепях. При протекании токов по сопротивлениям в последних выделяется тепло. На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в сопротивлениях схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Если направление тока I, протекающего через источник э. д. с. E, совпадает с направлением э. д. с., то источник э. д. с. доставляет в цепь энергию в единицу времени (мощность), равную EI, и произведение EI входит с положительным знаком в уравнение энергетического баланса.

Если же направление тока I встречно направлению э. д. с. E, то источник э. д. с. не поставляет энергию, а потребляет ее (например, заряжается аккумулятор), и произведение EI войдет в уравнение энергетического баланса с отрицательным знаком.

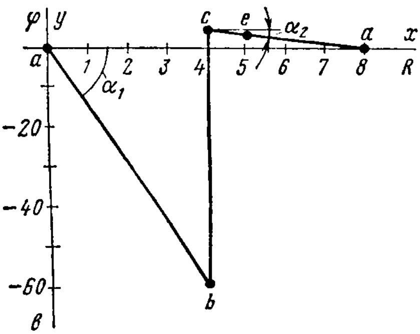


Рис. 1.10

Уравнение энергетического баланса при питании только от источников э. д. с. имеет вид

$$\sum I^2R = \sum EI.$$

Когда схема питается не только от источников э. д. с., но и от источников тока, т. е. к отдельным узлам схемы подтекают и от них утекают токи источников тока, при составлении уравнения энергетического баланса необходимо учесть и энергию, доставляемую источниками тока. Допустим, что к узлу a схемы подтекает ток I_k от источника тока, а от узла b этот ток утекает. Доставляемая источником тока мощность равна $U_{ab}I_k$. Напряжение U_{ab} и токи в ветвях схемы должны быть подсчитаны с учетом тока, подтекающего от источника тока. Последнее проще всего сделать по методу узловых потенциалов (см. § 1.22). Общий вид уравнения энергетического баланса

$$\sum I^2R = \sum EI + \sum U_{ab}I_k.$$

Для практических расчетов электрических цепей разработаны методы, более экономичные в смысле затраты времени и труда, чем метод расчета цепей по законам Кирхгофа. Рассмотрим эти методы.

§ 1.12. Метод пропорциональных величин. Согласно методу пропорциональных величин, в самой удаленной от источника э. д. с. ветви схемы (исходной ветви) произвольно задаемся некоторым током, например током в 1 А. Далее, продвигаясь к входным зажимам mn, находим токи в ветвях и напряжения на различных участках схемы. В результате расчета получим значение напряжения U_{mn} схемы и токов в ветвях, *если бы* в исходной ветви протекал ток в 1 А.

Так как найденное значение напряжения U_{mn} в общем случае не будет равно э. д. с. источника, то следует во всех ветвях изменить токи, умножив их на коэффициент, равный отношению э. д. с. источника к найденному значению напряжения в начале схемы.

Метод пропорциональных величин, если рассматривать его обособленно от других методов, применим для расчета цепей, состоящих только из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений и при наличии в схеме одного источника.

Однако этот метод можно использовать и совместно с другими методами (преобразование треугольника в звезду, метод наложения и т. п.), которые рассмотрены далее.

Пример 4. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.11 методом пропорциональных величин. Сопротивления схемы даны в омах.

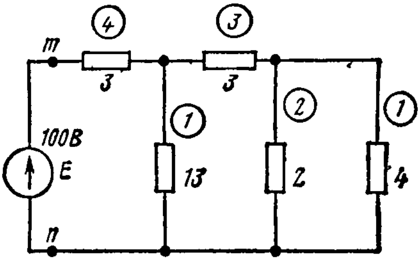


Рис. 1.11

Р е ш е н и е. Задаемся током в ветви с сопротивлением 4 Ом, равным 1 А, и подсчитываем токи в остальных ветвях (числовые значения токов обведены на рисунке кружками). Напряжение между точками m и n равно $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 25$ В. Так как э. д. с. $E = 100$ В, все токи следует умножить на коэффициент $k = 100/25 = 4$.

§ 1.13. Метод контурных токов. При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего определяют токи ветвей через контурные токи.

Таким образом, *метод контурных токов* можно определить как метод расчета, в котором за искомые принимают контурные токи. Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа.

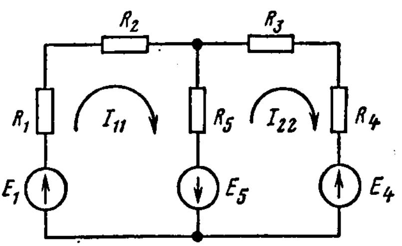


Рис. 1.12

Следовательно, метод контурных токов более экономен при вычислительной работе, чем метод на основе законов Кирхгофа (в нем меньшее число уравнений).

Вывод основных расчетных уравнений проведем применительно к схеме рис. 1.12, в которой два независимых контура. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток I_{11}, а в правом (также по часовой стрелке) — контурный ток I_{22}. Для каждого из контуров составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением R_5) течет сверху вниз ток $I_{11} - I_{22}$. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.

Для первого контура

$$(R_1+R_2)\,I_{11}+R_5\,(I_{11}-I_{22})=E_1+E_5 \qquad \text{(а)}$$

или

$$(R_1+R_2+R_5)\,I_{11}+(-R_5)\,I_{22}=E_1+E_5. \qquad \text{(б)}$$

Для второго контура

$$-R_5\,(I_{11}-I_{22})+(R_3+R_4)\,I_{22}=-E_5-E_4$$

или

$$(-R_5)\,I_{11}+(R_3+R_4+R_5)\,I_{22}=-E_4-E_5.$$

В уравнении (б) множитель при токе I_{11}, являющийся суммой сопротивлений первого контура, обозначим через R_{11}, множитель при токе I_{22} (сопротивление смежной ветви, взятое со знаком минус) — через R_{12}.

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11}+R_{12}I_{22}&=E_{11};\\ R_{21}I_{11}+R_{22}I_{22}&=E_{22}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.4')$$

Здесь

$$R_{11}=R_1+R_2+R_5;\quad E_{11}=E_1+E_5;\quad R_{12}=R_{21}=-R_5;$$

$$R_{22}=R_3+R_4+R_5;\quad E_{22}=-E_4-E_5,$$

где R_{11} — полное или собственное сопротивление первого контура; R_{12} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{11} — контурная э.д.с. первого контура, равная алгебраической сумме э.д.с. этого контура (в нее со знаком плюс входят те э.д.с., направления которых совпадают с направлением обхода контура); R_{22} — полное или собственное сопротивление второго контура; R_{21} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{22} — контурная э.д.с. второго контура.

В общем случае можно сказать, что сопротивление смежной ветви между k и m контурами (R_{km}) входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов I_{kk} и I_{mm} вдоль этой ветви встречны, и со знаком плюс, если направления этих токов согласны.

Если в схеме больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11}+R_{12}I_{22}+R_{13}I_{33}&=E_{11};\\ R_{21}I_{11}+R_{22}I_{22}+R_{23}I_{33}&=E_{22};\\ R_{31}I_{11}+R_{32}I_{22}+R_{33}I_{33}&=E_{33},\end{aligned}\right\} \qquad (1.4'')$$

или в матричной форме (см. § Б.3):

$$[R]\,[I]=[E];$$

$$[R]=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{bmatrix};\quad [I]=\begin{bmatrix} I_{11}\\ I_{22}\\ I_{33}\end{bmatrix};\quad [E]=\begin{bmatrix} E_{11}\\ E_{22}\\ E_{33}\end{bmatrix}.$$

Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например все по часовой стрелке.

Если в результате решения системы уравнений какой-либо контурный ток окажется отрицательным, то это означает, что в действительности направление контурного тока обратно принятому за положительное.

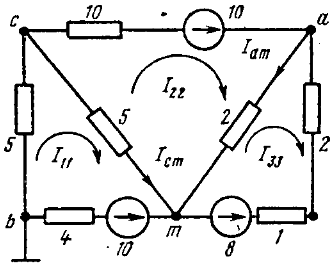


Рис. 1.13

В ветвях, не являющихся смежными между соседними контурами (например, в ветви с сопротивлениями R_1, R_2 схемы рис. 1.12), найденный контурный ток является истинным током. В смежных ветвях через контурные токи определяют истинные. Например, в ветви с сопротивлением R_5 протекающий сверху вниз ток равен разности $I_{11} - I_{22}$.

Если в электрической цепи имеется n независимых контуров, то число уравнений тоже равно n.

Общее решение системы n уравнений относительно тока I_{kk} таково:

$$I_{kk} = E_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \ldots + E_{nn}\frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \ldots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \ldots & R_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \ldots & R_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

— определитель системы.

Алгебраическое дополнение Δ_{km} получено из определителя Δ путем вычеркивания k-го столбца и m-й строки и умножения полученного определителя на $(-1)^{k+m}$.

Если из левого верхнего угла определителя провести диагональ в его правый нижний угол (главная диагональ) и учесть, что $R_{km} = R_{mk}$, то можно убедиться в том, что определитель делится на две части, являющиеся зеркальным отображением одна другой. Это свойство определителя называют *симметрией относительно главной диагонали*. В силу симметрии определителя относительно главной диагонали $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$.

Пример 5. Найти токи в схеме рис. 1.13 с помощью метода контурных токов. Числовые значения сопротивлений и э.д.с. указаны на рисунке.

Решение. Выбираем направления всех контурных токов I_{11}, I_{22} и I_{33} по часовой стрелке.

Определяем: $R_{11} = 5+5+4 = 14$ Ом; $R_{22} = 5+10+2 = 17$ Ом; $R_{33} = 2+2+1 = 5$ Ом; $R_{12} = R_{21} = -5$ Ом; $R_{13} = R_{31} = 0$; $R_{23} = R_{32} = -2$ Ом; $E_{11} = -10$ В; $E_{22} = 10$ В; $E_{33} = -8$ В.

Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 14I_{11} - 5I_{22} \qquad\qquad &= -10; \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\ -2I_{22} + 5I_{33} &= -8. \end{aligned}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

Подсчитаем контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0{,}634 \text{ A};$$

$$I_{22} = 0{,}224 \text{ A}; \quad I_{33} = -1{,}51 \text{ A}.$$

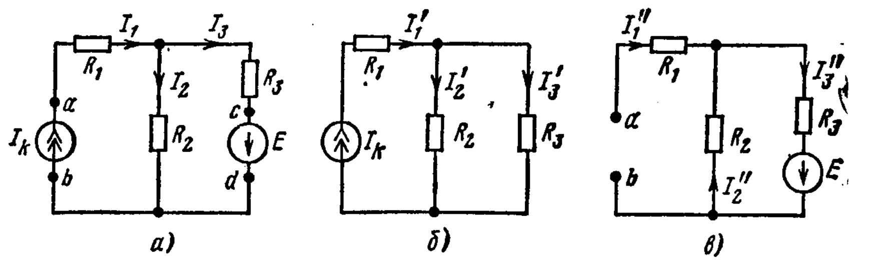
Ток в ветви *cm*

$$I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0{,}634 - 0{,}224 = -0{,}86 \text{ A}.$$

Ток в ветви *am*

$$I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0{,}224 + 1{,}51 = 1{,}734 \text{ A}.$$

Формула (1.5) в ряде параграфов используется в качестве исходной при рассмотрении таких важных вопросов теории линейных



а) б) в)

Рис. 1.14

электрических цепей, как определение входных и взаимных проводимостей ветвей, принцип взаимности, метод наложения и линейные соотношения в электрических цепях.

Составлению уравнений по методу контурных токов для схем с источниками тока присущи некоторые особенности. В этом случае полагаем, что каждая ветвь с источником тока входит в контур, замыкающийся через ветви с источниками э.д.с. и сопротивлениями, и что эти токи известны и равны токам соответствующих источников тока. Уравнения составляют лишь для контуров с неизвестными контурными токами. Если для схемы рис. 1.14, *а* принять, что контурный ток $I_{11} = I_k$ течет согласно направлению часовой стрелки по первой и второй ветвям, а контурный ток $I_{22}=I_3$ замыкается также по часовой стрелке по второй и третьей ветвям, то согласно методу контурных токов получим только одно уравнение с неизвестным током I_{22}

$$(R_2+R_3)\,I_{22}-R_2I_k=E.$$

Отсюда $I_{22}=\dfrac{E+I_kR_2}{R_2+R_3}$ и ток второй ветви $I_2=I_{11}-I_{22}$.

§ 1.14. Принцип наложения и метод наложения. Чтобы составить общее выражение для тока в k-ветви сложной схемы, составим уравнения по методу контурных токов, выбрав контуры так, чтобы k-ветвь входила *только* в один k-контур (это всегда возможно).

Тогда ток в k-ветви будет равен контурному току I_{kk} по уравнению (1.5). Каждое слагаемое правой части (1.5) представляет собой ток, вызванный в k-ветви соответствующей контурной э.д.с. Например, $E_{11}\dfrac{\Delta_{k1}}{\Delta}$ есть составляющая тока k-ветви, вызванная контурной э.д.с. E_{11}. Каждую из контурных э.д.с. можно выразить через э.д.с. ветвей E_1, E_2, E_3, …, E_k, …, E_n, сгруппировать коэффициенты при этих э.д.с. и получить выражение следующего вида:

$$I_k=E_1g_{k1}+E_2g_{k2}+E_3g_{k3}+\ldots+E_kg_{kk}+\ldots+E_ng_{kn}. \qquad (1.7)$$

Если контуры выбраны таким образом, что какая-либо из э.д.с., например E_m, входит только в один m-контур и в другие контуры не входит, то $g_{km}=\Delta_{km}/\Delta$.

Уравнение (1.7) выражает собой принцип наложения.

Принцип наложения формулируется следующим образом: *ток в k-ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из э.д.с. схемы в отдельности.* Этот принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.

Принцип наложения используется в методе расчета, получившем название метода наложения.

При расчете цепей по методу наложения поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из э.д.с., мысленно удаляя остальные из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников, и затем находят токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов. Заметим, что методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей как суммы мощностей от частичных токов, поскольку мощность является квадратичной функцией тока ($P=RI^2$).

Так, если через некоторое сопротивление R протекают согласно направленные частичные токи I_1 и I_2, то выделяемая в нем мощность $P=R\,(I_1+I_2)^2$ и не равна сумме мощностей от частичных токов: $P\neq RI_1^2+RI_2^2$.

Пример 6. Для схемы рис. 1.14, *а* с помощью метода наложения найти токи в ветвях, определить мощности, доставляемые в схему источником тока и источником э.д.с., полагая $R_1=2$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=6$ Ом; $I_k=5$ А; $E=20$ В.

Решение. Положительные направления токов в ветвях принимаем в соответствии с рис. 1.14, *а*. С помощью схемы рис. 1.14, *б* (источник э.д.с. удален и зажимы *cd* закорочены) находим токи в ветвях от действия источника тока:

$$I'_1 = I_k = 5\ \text{А};\quad I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2+R_3} = 5\cdot\frac{6}{4+6} = 3\ \text{А};\quad I'_3 = 2\ \text{А}.$$

Используя схему рис. 1.14, *в*, подсчитываем токи в ветвях от действия источника э.д.с. (зажимы *ab* разомкнуты, так как внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности):

$$I''_1 = 0;\quad I''_2 = I''_3 = \frac{E}{R_2+R_3} = 2\ \text{А}.$$

Результирующие токи в ветвях найдем, алгебраически суммируя соответствующие частичные токи этих двух режимов:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 5+0 = 5\ \text{А};\quad I_2 = I'_2 - I''_2 = 3-2 = 1\ \text{А};$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2+2 = 4\ \text{А};\quad \varphi_a = \varphi_b + I_2R_2 + I_1R_1;$$

$$U_{ab} = 1\cdot 4 + 5\cdot 2 = 14\ \text{В}.$$

Мощность, доставляемая в схему источником тока, $U_{ab}I_k = 14\cdot 5 = 70$ Вт. Мощность, доставляемая в схему источником э.д.с., $EI_3 = 20\cdot 4 = 80$ Вт.

Уравнение баланса мощности $I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 = U_{ab}I_k + EI_3$.

§ 1.15. Входные и взаимные проводимости ветвей. Входное сопротивление. На рис. 1.15, *а* изображена так называемая *скелетная схема* пассивной цепи. На ней показаны только ветви и узлы.

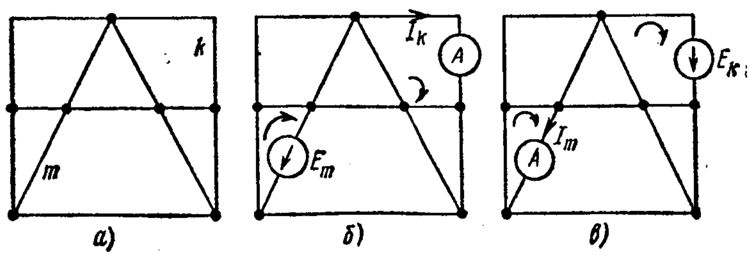


Рис. 1.15

В каждой ветви имеется сопротивление. Выделим в схеме две ветви; одну из них назовем ветвью *m*, другую — ветвью *k*. Поместим в ветвь *m* э.д.с. E_m (других э.д.с. в схеме нет). Выберем контуры в схеме так, чтобы *k*-ветвь входила только в *k*-контур, а *m*-ветвь — только в *m*-контур. Э.д.с. *m* вызовет токи в ветвях *k* и *m*:

$$\left.\begin{aligned} I_k &= E_m g_{km};\\ I_m &= E_m g_{mm}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Коэффициенты *g* имеют размерность проводимости.

Коэффициент g с одинаковыми индексами (g_{mm}) называют *входной проводимостью* ветви (ветви m). Он *численно* равен току в ветви m, возникающему от действия э.д.с. $E_m = 1$ В (единичной э.д.с.): $I_m = 1 \cdot g_{mm}$.

Коэффициенты g с разными индексами называют *взаимными проводимостями*. Так, g_{km} есть взаимная проводимость k- и m-ветвей. Взаимная проводимость g_{km} численно равна току в k-ветви, возникающему от действия единичной э.д.с. в m-ветви *.

Входные и взаимные проводимости ветвей используются при выводе общих свойств линейных электрических цепей (см. § 1.16 и 1.18) и при расчете цепей по методу наложения [см. формулу (1.7)].

Входные и взаимные проводимости могут быть определены расчетным и опытным путями.

При их расчетном определении составляют для схемы уравнения по методу контурных токов, следя за тем, чтобы ветви, взаимные и входные проводимости которых представляют интерес, входили бы каждая только в свой контур. Далее находят определитель системы Δ и по нему необходимые алгебраические дополнения:

$$g_{mm} = \Delta_{mm}/\Delta; \tag{1.9}$$

$$g_{km} = \Delta_{km}/\Delta. \tag{1.10}$$

По формуле (1.10) g_{km} может получиться либо положительной, либо отрицательной величиной. Отрицательный знак означает, что э.д.с. E_m, направленная согласно с контурным током в m-ветви, вызывает ток в k-ветви, не совпадающий по направлению с произвольно выбранным направлением контурного тока I_k по k-ветви.

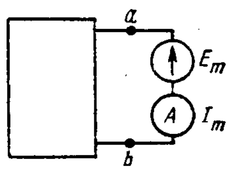


Рис. 1.16

При опытном определении g_{mm} и g_{km} в m-ветвь схемы (рис. 1.15, *б*) включают э.д.с. E_m и в k-ветвь — амперметр (миллиамперметр). Поделим ток I_k на э.д.с. E_m и найдем значение g_{km}. Для нахождения входной проводимости ветви m (g_{mm}) необходимо измерить ток в m-ветви, вызванный э.д.с., включенной в m-ветвь. Частное от деления тока m-ветви на э.д.с. m-ветви и дает g_{mm}.

Выделим m-ветвь, обозначив всю остальную часть схемы (не содержащую э.д.с.) некоторым прямоугольником (рис. 1.16). Вся схема, обозначенная прямоугольником, по отношению к зажимам ab обладает некоторым сопротивлением. Его называют *входным сопротивлением*. Так как в рассматриваемом примере речь идет о входном сопротивлении для m-ветви, то обозначим его $R_{\text{вх}m}$:

$$R_{\text{вх}m} = E_m/I_m = 1/g_{mm}. \tag{1.11}$$

---

* Входные и взаимные проводимости ветвей можно определить и иначе: входная проводимость m-ветви — это коэффициент пропорциональности между током этой ветви и э.д.с. той же ветви (при отсутствии э.д.с в других ветвях схемы); взаимная проводимость ветвей k и m есть коэффициент пропорциональности между током k-ветви и э.д.с. m-ветви при отсутствии э.д.с. в других ветвях схемы.

Таким образом, входное сопротивление m-ветви есть величина, обратная входной проводимости m-ветви. Его не следует смешивать с полным сопротивлением m-контура в методе контурных токов, которое не имеет с ним ничего общего.

Пример 7. Определить входную проводимость g_{11} и взаимную проводимость g_{12} в схеме рис. 1.13.

Решение. Контуры на схеме рис. 1.13 выбраны так, что ветвь *1* (ветвь cbm) с э.д.с. E_1 входит только в первый контур, а ветвь *2* (ветвь ca) с э.д.с. E_2 — во второй. Поэтому можно воспользоваться определителем системы Δ и алгебраическими дополнениями Δ_{11} и Δ_{12}, составленными по данным примера 5:

$$g_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix}(-1)^{1+2}}{1009}=\frac{25}{1009}=0{,}025\ \text{Ом}^{-1}\,*;$$

$$g_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}17 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}(-1)^{1+1}}{1009}=\frac{81}{1009}=0{,}081\ \text{Ом}^{-1}.$$

§ 1.16. Теорема взаимности.

Теорема взаимности формулируется следующим образом: *для любой линейной цепи ток в k-ветви, вызванный* э.д.с. E_m, находящейся в m-ветви,

$$I_k=E_m g_{km}$$

будет равен току I_m в m-ветви, вызванному э.д.с. E_k (численно равной э.д.с. E_m), *находящейся в k-ветви,*

$$I_m=E_k g_{mk}.$$

Для доказательства теоремы взаимности обратимся к рис. 1.15, *а*. Как и при выводах в § 1.15, выделим две ветви схемы: ветвь k и ветвь m. Включим в ветвь m источник э.д.с. E_m, в ветвь k — амперметр A** для измерения тока I_k. Пусть каждая из ветвей k и m входит соответственно только в k- и m-контуры. Тогда по методу контурных токов $I_k=E_k\Delta_{km}/\Delta$. Затем поменяем местами источник э.д.с. и амперметр, т. е. источник э.д.с. переместим из ветви m в ветвь k и назовем теперь E_k, а амперметр — из ветви k в ветвь m. В этом случае ток

$$I_m=E_k\Delta_{mk}/\Delta.$$

Так как $E_k=E_m$, а $\Delta_{mk}=\Delta_{km}$ в силу симметрии определителя системы Δ относительно главной диагонали (см. § 1.13), то ток I_k в схеме рис. 1.15, *б* равняется току I_m в схеме рис. 1.15, *в*.

При практическом использовании теоремы взаимности важно иметь в виду взаимное соответствие направлений токов и э.д.с. в схемах рис. 1.15, *б*, *в*.

---

* Единица проводимости Ом^{-1} в СИ называется сименс (См).

** Амперметр включаем только для наглядности; сопротивление амперметра полагаем равным нулю.

Так, если э.д.с. E_k источника э.д.с., находящегося в k-ветви схемы рис. 1.15, *в*, направлена согласно с контурным током I_k в схеме рис. 1.15, *б*, то положительное направление тока I_m в схеме рис. 1.15, *в* совпадает с направлением э.д.с. E_m в схеме рис. 1.15, *б*.

Для нелинейных цепей теорема (принцип) взаимности невыполнима. Цепи, для которых не выполняется принцип взаимности, называют *необратимыми*.

Пример 8. В схеме рис. 1.17 переключатели P_1, P_2, P_3 и P_4 находятся либо в первом, либо во втором положении. Если они находятся в положении *1*, то в схеме включена только одна э.д.с. E_4. Под действием э.д.с. E_4 протекают токи $I_1 = 1{,}5$ *А*, $I_2 = 3$ *А*, $I_3 = 1$ А.

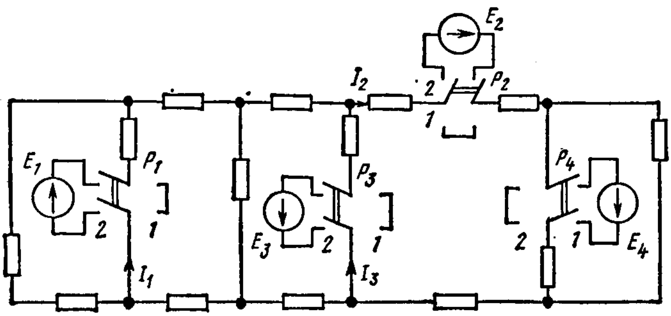


Рис. 1.17

Найти ток I_4, если все переключатели находятся в положении *2*, полагая, что $E_1 = 20$ В, $E_2 = 40$ В, $E_3 = 50$ В, $E_4 = 10$ В.

Решение. Для определения тока I_4 воспользуемся принципом наложения и принципом взаимности. Если бы в схеме была включена лишь одна э.д.с. $E_1 = 10$ В, а остальные э.д.с. (E_2 и E_3) отсутствовали, то в ветви *4** по принципу взаимности протекал бы сверху вниз ток в 1,5 А. Так как э.д.с. $E_1 = 20$ В, то в ветви *4* протекает ток, равный $1{,}5 \cdot 20/10 = 3$ А. Аналогичным образом определим токи в ветви *4* от действия э.д.с. E_2 и э.д.с. E_3 и произведем алгебраическое сложение частичных токов (с учетом их направления):

$$I_4 = 1{,}5 \cdot \frac{20}{10} + 3 \cdot \frac{40}{10} - 1 \cdot \frac{50}{10} = 10 \text{ А}.$$

§ **1.17. Теорема компенсации.** В любой электрической цепи без изменения токораспределения *сопротивление можно заменить э.д.с.*, численно равной падению напряжения на заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении.

Для доказательства теоремы компенсации выделим из схемы одну ветвь с сопротивлением R, по которой течет ток I, а всю остальную часть схемы условно обозначим прямоугольником (рис. 1.18, *а*).

Если в выделенную ветвь включить две одинаковых и противоположно направленных э.д.с. E, численно равных падению напряжения

* Номер ветви соответствует индексу э.д.с.

на сопротивлении R под действием тока I ($E=IR$; рис. 1.18, *б*), то ток I в цепи от этого не изменится. Убедимся, что разность потенциалов между точками a и c в схеме рис. 1.18, *б* при этом будет равна нулю. Действительно,

$$\varphi_c=\varphi_a-IR+E=\varphi_a-IR+IR=\varphi_a.$$

Но если $\varphi_c=\varphi_a$, то точки a и c можно объединить в одну, т. е. закоротить участок ac и получить схему рис. 1.18, *в*. В ней вместо сопротивления R включен источник э.д.с. E.

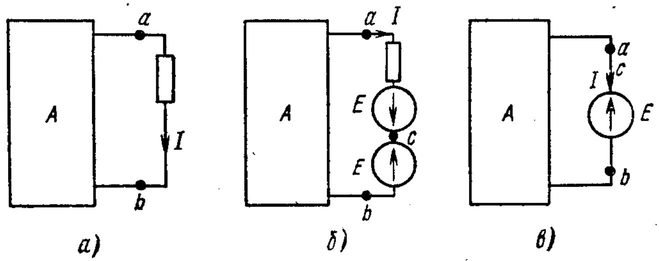


Рис. 1.18

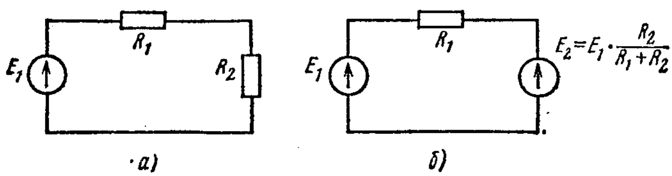


Рис. 1.19

Пример 9. Убедиться в тождественности схем рис. 1.19, *а*, *б*.

Решение. В схеме рис. 1.19, *а* ток $I=E_1/(R_1+R_2)$. Для схемы рис. 1.19, *б*

$$I=\frac{E_1-E_2}{R_1}=\frac{E_1-E_1\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{R_1}=\frac{E_1}{R_1+R_2},$$

Таким образом, замена сопротивления R_2 на источник э.д.с. E_2, как это и следует из теоремы компенсации, не вызвала изменения тока в схеме.

§ 1.18. Линейные соотношения в электрических цепях. Если в линейной электрической цепи изменяется э.д.с. или сопротивление в какой-либо *одной ветви*, то *две любые величины* (токи и напряжения) *двух любых ветвей* связаны друг с другом линейными зависимостями вида $y=a+bx$.

Роль x выполняет ток или напряжение одной ветви, роль y — ток или напряжение другой ветви.

Доказательство. Согласно методу контурных токов, общее выражение для тока в k-ветви записывается в виде (1.7). Если в схеме изменяется только одна э. д. с., например э. д. с. E_m, то все слагаемые в (1.7), кроме слагаемого $E_m g_{km}$, постоянны и могут быть для сокращения записи заменены некоторым слагаемым A_k. Следовательно,

$$I_k = A_k + E_m g_{km}. \tag{1.12}$$

Аналогично, для какой-то p-ветви

$$I_p = A_p + E_m g_{pm}. \tag{1.13}$$

Найдем E_m из (1.13):

$$E_m = (I_p - A_p)/g_{pm}$$

и подставим в (1.12). Получим

$$I_k = a_k + b_k I_p, \tag{1.14}$$

где

$$a_k = A_k - A_p g_{km}/g_{pm}; \quad b_k = g_{km}/g_{pm}.$$

Коэффициенты a_k и b_k могут быть $\gtrless 0$. В частном случае либо a_k, либо b_k может быть равно нулю.

Равенство (1.14) свидетельствует о том, что при изменении э. д. с. E_m токи I_k и I_p связаны линейной зависимостью. Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление можно заменить э. д. с. Следовательно, изменение сопротивления в m-ветви эквивалентно изменению э. д. с. E_m. Таким образом, линейное соотношение между двумя любыми токами (1.14) имеет место при изменении не только э. д. с. E_m, но и сопротивления какой-то m-ветви.

Если обе части (1.12) умножить на сопротивление k-ветви R_k и проделать аналогичные выкладки, то можно убедиться в том, что напряжение на k-ветви линейно связано с током в p-ветви.

Коэффициенты a_k и b_k из (1.14) и в других подобных выражениях могут быть найдены либо расчетным, либо опытным путем.

При опытном определении коэффициентов достаточно найти значения двух токов (или соответственно напряжений) при двух различных режимах работы схемы и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть, например, в первом опыте $I_k = I_{k1}$ и $I_p = I_{p1}$, а во втором опыте $I_k = I_{k2}$ и $I_p = I_{p2}$, тогда

$$I_{k1} = a_k + b_k I_{p1} \text{ и } I_{k2} = a_k + b_k I_{p2}.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{I_{k2} - \frac{I_{p2}}{I_{p1}} I_{k1}}{1 - \frac{I_{p2}}{I_{p1}}}; \quad b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}.$$

Если в схеме одновременно изменяются э. д. с. или сопротивления в каких-либо *двух ветвях*, *то любые три величины* в этой схеме (токи, напряжения) связаны друг с другом линейным соотношением вида

$$y = a + bx + cz.$$

Доказательство этого состношения проводится аналогично приведенному ранее.

Пример 10. На рис. 1.20 изображена схема, в которой выделены три ветви. В ветви *1* включен амперметр A_1, в ветви *2* — амперметр A_2. В ветви *3* имеется ключ K и сопротивление R_3. Если K разомкнут, то A_1 показывает 1 А, а A_2 — 5 А. При замкнутом ключе амперметр A_1 показывает 2 А, а A_2 — 4 А. При замкнутом ключе сопротивление R_3 изменили так, что показание амперметра A_2 стало 4,5 А. Каково показание амперметра A_1 в этом режиме?

Решение. Выразим I_1 через I_2:

$$I_1 = a + bI_2.$$

Составим два уравнения для определения a и b:

$$1 = a + 5b; \quad 2 = a + 4b.$$

Отсюда $a = 6$ и $b = -1$.

При $I_2 = 4{,}5$ А $\quad I_1 = 6 - 4{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$ А.

§ 1.19. Изменения токов ветвей, вызванные приращением сопротивления одной ветви (теорема вариаций). На рис. 1.21, *а* выделим ветви *1* и *2* с токами I_1 и I_2, заключив остальную часть схемы вместе с источниками энергии в прямоугольник A (активный); проводимости g_{12} и g_{22} полагаем известными. Пусть сопротивление ветви *2* изменилось на ΔR (рис. 1.21, *б*), в результате чего токи стали $I_1 + \Delta I_1$ и $I_2 + \Delta I_2$. В соответствии с теоремой компенсации заменим ΔR на э. д. с. $\Delta E = \Delta R\ (I_2 + \Delta I_2)$, направленную встречно току I_2. На основании принципа наложения можно сказать, что приращения токов ΔI_1 и ΔI_2 вызваны э. д. с. ΔE в схеме рис. 1.21, *в*, в которой часть схемы, заключенная в прямоугольник, стала пассивной (буква $П$). Так как схема внутренних соединений и значения сопротивлений в схеме прямоугольника оста-

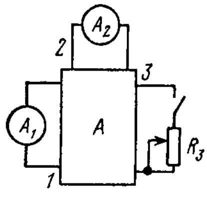


Рис. 1.20

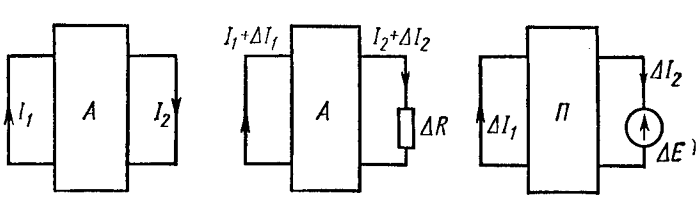


Рис. 1.21

лись без изменений, то проводимости g_{12} и g_{22} для схемы рис. 1.21, *в* имеют те же значения, что и в схеме рис. 1.21, *а*. Для схемы рис. 1.21, *в* имеем:

$$\Delta I_1 = -\Delta E g_{21} = -g_{21} \Delta R\ (I_2 + \Delta I_2);$$

$$\Delta I_2 = -\Delta E g_{22} = -g_{22} \Delta R\ (I_2 + \Delta I_2),$$

отсюда

$$\Delta I_2 = -\frac{g_{22}\Delta R I_2}{1+\Delta R g_{22}}; \quad \Delta I_1 = -\frac{g_{21}\Delta R I_2}{1+\Delta R g_{22}}. \qquad (1.15)$$

Соотношения (1.15) позволяют определить изменение токов в ветвях *1* и *2*, вызванные изменением сопротивления в ветви *2*.

§ 1.20. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники э. д. с. и источники тока, одной эквивалентной. При расчете сложных схем существенное облегчение дает замена нескольких параллельно включенных ветвей, содержащих источники э. д. с. и источники тока и сопротивления, одной эквивалентной ветвью.

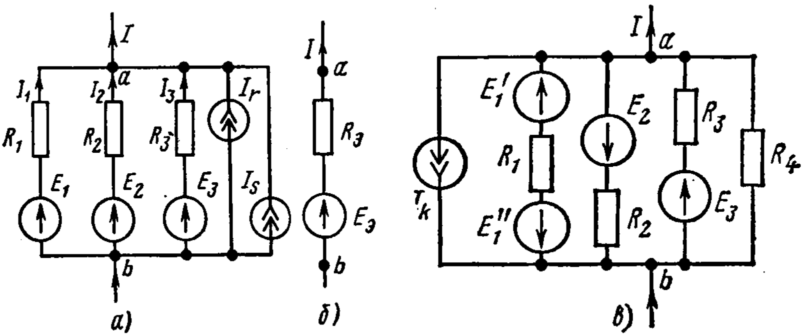


Рис. 1.22

Участок цепи рис. 1.22, *б* эквивалентен участку цепи, изображенному на рис. 1.22, *а*, если при любых значениях тока I, подтекающего из всей остальной, не показанной на рисунке части схемы, напряжение на зажимах a и b (U_{ab}) в обеих схемах одинаково. Для того чтобы выяснить, чему равняются $R_э$ и $E_э$, составим уравнения для обеих схем.

Для схемы рис. 1.22, *а*

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_r + I_s = I,$$

но

$$I_1 = (E_1 - U_{ab})/R_1 = (E_1 - U_{ab})\,g_1;$$

$$I_2 = (E_2 - U_{ab})\,g_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_n = (E_n - U_{ab})\,g_n. \qquad (1.16')$$

Следовательно,

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} E_k g_k + \sum_{k=1}^{q} I_k - U_{ab}\sum_{k=1}^{n} g_k, \qquad (1.16)$$

где n — число параллельных ветвей с источниками э. д. с.; q — число ветвей с источниками тока. Для схемы рис. 1.22, *б*

$$I = E_э g_э - U_{ab} g_э, \qquad (1.17)$$

где $g_э = 1/R_э$.

Равенство токов I в схемах рис. 1.22, *а*, *б* должно иметь место при любых значениях U_{ab}, а это возможно только в том случае, когда коэффициент при U_{ab} в (1.17) равен коэффициенту при U_{ab} в (1.16). Следовательно,

$$g_э = \sum_{k=1}^{n} g_k. \tag{1.18}$$

Но если слагаемые с U_{ab} в (1.16) и (1.17) равны и токи I по условию эквивалентности двух схем также равны, то

$$\sum_{k=1}^{n} E_k g_k + \sum_{k=1}^{q} I_k = E_э g_э,$$

отсюда

$$E_э = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k g_k + \sum\limits_{k=1}^{q} I_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} g_k}. \tag{1.19}$$

Формула (1.18) дает возможность найти проводимость $g_э$ и по ней $R_э$ в схеме рис. 1.22, *б*. Из формулы (1.18) видно, что проводимость $g_э$ не зависит от того, есть в ветвях схемы рис. 1.22, *а* э. д. с. или нет.

При подсчетах по формуле (1.19) следует иметь в виду следующее: если в какой-либо ветви схемы э. д. с. отсутствует, то соответствующее слагаемое в числителе (1.19) выпадает, но проводимость этой ветви в знаменателе (1.19) остается; если какая-либо э. д. с. в исходной схеме имеет направление, обратное изображенному на рис. 1.22, *а*, то соответствующее слагаемое войдет в числитель формулы (1.19) со знаком минус.

Ветви схемы рис. 1.22, *а* и ветвь схемы рис. 1.22, *б* эквивалентны только в смысле поведения их по отношению ко всей остальной части схемы, не показанной на рисунке, но они не эквивалентны в отношении мощности, выделяющейся в них. Качественно поясним это. В ветвях схемы рис. 1.22, *а* токи могут протекать даже при $I=0$, тогда как в ветви *ab* рис. 1.22, *б* при $I=0$ ток и потребление энергии отсутствуют.

Пример 11. Заменить параллельные ветви рис. 1.22, *в* одной эквивалентной. Дано: $E_1'=10$ В; $E_1''=30$ В; $E_2=40$ В; $E_3=60$ В; $R_1=2$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=1$ Ом; $R_4=5$ Ом; $I_k=6$ А.

Решение. Находим:

$$g_1=0{,}5 \text{ См};\ g_2=0{,}25 \text{ См};\ g_3=1 \text{ См};\ g_4=0{,}2 \text{ См};$$

$$R_э=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{4} g_k}=\frac{1}{0{,}5+0{,}25+1+0{,}2}=0{,}513 \text{ Ом};$$

$$E_э=\frac{\sum\limits_{k=1}^{4} E_k g_k - I_k}{\sum g_k}=\frac{(10-30)\cdot 0{,}5-40\cdot 0{,}25+60\cdot 1-6}{1{,}95}=18{,}4 \text{ В}.$$

Таким образом, параметры эквивалентной ветви рис. 1.22, *б*

$$R_э = 0{,}513 \text{ Ом и } E_э = 18{,}4 \text{ В}.$$

§ 1.21. Метод двух узлов. Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла; на рис. 1.23 изображена одна из таких схем. Наиболее рациональным методом расчета токов в них является метод двух узлов.

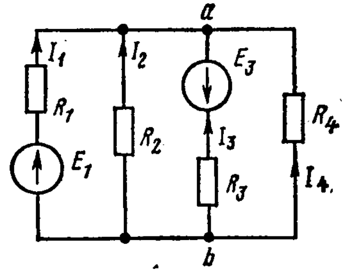


Рис. 1.23

Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое (с его помощью определяют затем токи ветвей) принимают напряжение между двумя узлами схемы.

Расчетные формулы этого метода получают на основе формул (1.16) и (1.16′); их также можно просто получить из более общего метода — метода узловых потенциалов (см. § 1.22).

В отличие от схемы рис. 1.21, *а* ток I к узлам a и b схемы рис. 1.23 не подтекает. Поэтому если в формуле (1.16) принять $I = 0$, то из нее может быть найдено напряжение U_{ab} между двумя узлами:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k + \sum I_k}{\sum g_k}. \qquad (1.20)$$

После определения напряжения U_{ab} находят ток в любой (n) ветви по формуле $I_n = (E_n - U_{ab})g_n$.

Пример 12. Найти токи в схеме рис. 1.23 и сделать проверку баланса мощности, если $E_1 = 120$ В, $E_3 = 50$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 1$ Ом и $R_4 = 10$ Ом.

Решение.

$$U_{ab} = \frac{120 \cdot 0{,}5 - 50 \cdot 1}{0{,}5 + 0{,}25 + 1 + 0{,}1} = \frac{10}{1{,}85} = 5{,}4 \text{ В};$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{120 - 5{,}4}{2} = 57{,}3 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_2} = \frac{0 - 5{,}4}{4} = -1{,}35 \text{ А};$$

$$I_3 = -55{,}4 \text{ А}; \; I_4 = -0{,}54 \text{ А}.$$

В схеме потребляется мощность

$$I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4 = 57{,}3^2 \cdot 2 + $$
$$+ 1{,}35^2 \cdot 4 + 55{,}4^2 \cdot 1 + 0{,}54^2 \cdot 10 = 9647 \text{ Вт}.$$

Источники э. д. с. доставляют мощность $E_1I_1 - E_3I_3 = 120 \cdot 57{,}3 + $ $+ 50 \cdot 55{,}4 = 9647$ Вт.

§ 1.22. Метод узловых потенциалов. Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Для того чтобы можно было применить закон Ома, необходимо знать потенциалы узлов схемы. Метод расчета электрических цепей, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют *методом узловых потенциалов.*

Допустим, что в схеме n узлов. Так как любая (одна) точка схемы может быть заземлена без изменения токораспределения в схеме, то один из узлов схемы можно мысленно заземлить, т. е. принять потенциал его равным нулю. При этом число неизвестных уменьшается с n до $n-1$.

Число неизвестных в методе узловых потенциалов равно числу уравнений, которые необходимо составить для схемы по первому закону Кирхгофа. Метод узловых потенциалов, как и метод контурных токов, — один из основных расчетных приемов. В том случае, когда число узлов без единицы меньше числа независимых контуров в схеме, данный метод является более экономичным, чем метод контурных токов.

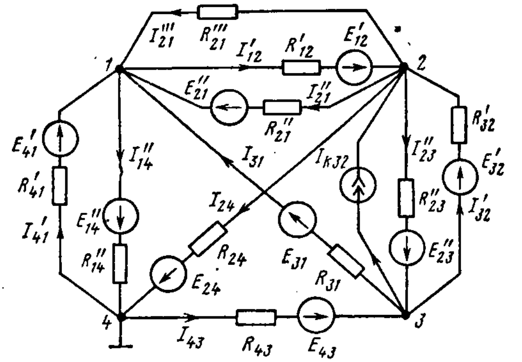


Рис. 1.24

Обратимся к схеме рис. 1.24, которая имеет довольно большое число ветвей (11) и сравнительно небольшое число узлов (4). Если узел *4* мысленно заземлить, т. е. принять $\varphi_4 = 0$, то необходимо определить потенциалы только трех узлов: φ_1, φ_2, φ_3. Для единообразия в обозначениях условимся в § 1.22 токи писать с двумя индексами: первый индекс соответствует номеру узла, от которого ток утекает, второй индекс — номеру узла, к которому ток подтекает. Проводимости ветвей также будем снабжать двумя индексами. Необходимо заметить, что эти проводимости не имеют ничего общего с входными и взаимными проводимостями ветвей, которые рассматривались в § 1.15.

В соответствии с обозначениями токов на рис. 1.24 составим уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла:

$$I'_{41} - I''_{14} + I'''_{21} - I'_{12} + I''_{21} + I_{31} = 0,$$

или

$$\begin{gathered}[E'_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)]\,g'_{41} - [E''_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)]\,g''_{41} + \\ + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]\,g'''_{12} - [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)]\,g'_{12} + \\ + [E''_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)]\,g''_{12} + [E_{31} - (\varphi_1 - \varphi_3)]\,g_{13} = 0.\end{gathered}$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}, \tag{1.21}$$

где

$$G_{11}=g'_{41}+g_{13}+g''_{12}+g''_{41}+g'_{12}+g'''_{12};$$

$$G_{12}=-(g'_{12}+g'''_{12}+g''_{12});\quad G_{13}=-g_{13};$$

$$I_{11}=E'_{41}g'_{41}+E_{31}g_{31}+E''_{21}g''_{21}-E''_{14}g''_{41}-E'_{12}g'_{12}.$$

Обсудим структуру уравнения (1.21). Множителем при φ_1 в нем является коэффициент G_{11}, равный сумме проводимостей всех ветвей, сходящихся в первом узле. Проводимость G_{12} равняется сумме проводимостей всех ветвей, соединяющих узел *1* с узлом *2*, взятой со знаком минус. Аналогично, G_{13} есть сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узел *1* с узлом *3*, взятая со знаком минус. Ток I_{11}, называемый *узловым током* первого узла, — это расчетная величина, равная алгебраической сумме токов, полученных от деления э. д. с. ветвей, подходящих к узлу *1*, на сопротивления данных ветвей. В эту сумму со знаком плюс входят токи тех ветвей, э. д. с. которых направлены к узлу *1*.

Подобные же уравнения могут быть записаны и для остальных узлов схемы. Если схема имеет n узлов, то ей соответствует система из $n-1$ уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1G_{11}+\varphi_2G_{12}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{1,n-1}=I_{11};\\
&\varphi_1G_{21}+\varphi_2G_{22}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{2,n-1}=I_{22};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_1G_{n-1,1}+\varphi_2G_{n-1,2}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{n-1,n-1}=I_{n-1,n-1},
\end{aligned}\right\}\qquad(1.22)$$

где G_{kk} — сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле k; G_{km} — сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы k и m, взятая со знаком минус; I_{kk} — узловой ток k-узла. Если к k-узлу подтекает ток от источника тока, то он должен быть включен в ток I_{kk} со знаком плюс, если утекает, то со знаком минус.

Если между какими-либо двумя узлами нет ветви, то соответствующая проводимость равна нулю. После решения системы (1.22) относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Максвеллом было установлено, что распределение токов в электрической цепи всегда происходит так, что тепловая функция системы

$$P=\frac{1}{2}\sum_{N=1,\,2,\,3,\,\ldots}\;\sum_{m=1,\,2,\,3,\,\ldots}[E_{Nm}-(\varphi_N-\varphi_m)]^2g_{Nm}$$

минимальна.

Коэффициент $^1/_2$ обусловлен тем, что при двойном суммировании мощность каждой ветви учитывается дважды.

Доказательство основано на том, что совокупность уравнений (1.22) является совокупностью условий минимума функции P, т. е. совокупностью условий $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial P}{\partial\varphi_1}=0$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial P}{\partial\varphi_2}=0$ и т. д. Так как вторые производные $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2P}{\partial\varphi_1^2}=G_{11}>0$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2P}{\partial\varphi_2^2}=G_{22}>0$ и т. д. положительны, то, действительно, это есть условия минимума тепловой функции.

Пример 13. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.24 и сделать проверку по второму закону Кирхгофа. Дано: $E'_{41}=10$ В; $E''_{14}=6$ В;

$$E'_{12}=20 \text{ В};\ E''_{21}=30 \text{ В};\ E_{31}=14 \text{ В};\ E_{24}=10 \text{ В};\ E_{43}=8 \text{ В};$$
$$E''_{23}=12 \text{ В};\ E'_{32}=7 \text{ В};\ R'_{41}=1 \text{ Ом};\ R''_{14}=2 \text{ Ом};\ R'_{12}=10 \text{ Ом};$$
$$R''_{21}=10 \text{ Ом};\ R'''_{21}=5 \text{ Ом};\ R_{31}=2 \text{ Ом};\ R_{24}=4 \text{ Ом};\ R_{34}=2 \text{ Ом};$$
$$R''_{23}=4 \text{ Ом};\ R'_{32}=2 \text{ Ом}.$$

Источник тока, включенный между узлами *3* и *2*, дает ток $I_{k32}=1{,}5$ А.

Решение. Записываем систему уравнений:

$$\varphi_1 G_{11}+\varphi_2 G_{12}+\varphi_3 G_{13}=I_{11};$$
$$\varphi_1 G_{21}+\varphi_2 G_{22}+\varphi_3 G_{23}=I_{22};$$
$$\varphi_1 G_{31}+\varphi_2 G_{32}+\varphi_3 G_{33}=I_{33}.$$

Подсчитываем проводимости:

$$G_{11}=\frac{1}{R'_{41}}+\frac{1}{R''_{14}}+\frac{1}{R'_{12}}+\frac{1}{R''_{21}}+\frac{1}{R'''_{21}}+\frac{1}{R_{31}}=2{,}4 \text{ См};$$
$$G_{22}=\frac{1}{R'_{12}}+\frac{1}{R''_{21}}+\frac{1}{R'''_{21}}+\frac{1}{R_{24}}+\frac{1}{R'_{32}}+\frac{1}{R''_{23}}=1{,}4 \text{ См};$$
$$G_{33}=\frac{1}{R'_{32}}+\frac{1}{R''_{23}}+\frac{1}{R_{31}}+\frac{1}{R_{43}}=1{,}75 \text{ См};$$
$$G_{12}=G_{21}=-\left(\frac{1}{R'''_{21}}+\frac{1}{R'_{12}}+\frac{1}{R''_{21}}\right)=-0{,}4 \text{ См};$$
$$G_{13}=G_{31}=-\frac{1}{R_{31}}=-0{,}5 \text{ См};$$
$$G_{23}=G_{32}=-(0{,}25+0{,}5)=-0{,}75 \text{ См}.$$

При подсчете G_{22}, G_{33} и G_{23} учтено, что проводимость ветви с источником тока равна нулю (сопротивление источника тока равно бесконечности).

Узловые токи:

$$I_{11}=\frac{E'_{41}}{R'_{41}}-\frac{E''_{14}}{R''_{14}}+\frac{E_{31}}{R_{31}}-\frac{E'_{12}}{R'_{12}}+\frac{E''_{21}}{R''_{21}}=15 \text{ А};$$
$$I_{22}=\frac{E'_{32}}{R'_{32}}-\frac{E''_{23}}{R''_{23}}+\frac{E'_{12}}{R'_{12}}-\frac{E''_{21}}{R''_{21}}-\frac{E_{24}}{R_{24}}+I_{k32}=-1{,}5 \text{ А};$$
$$I_{33}=-3{,}5+3-7+4-1{,}5=-5 \text{ А}.$$

Система уравнений

$$2{,}4\varphi_1-0{,}4\varphi_2-0{,}5\varphi_3=15;$$
$$-0{,}4\varphi_1+1{,}4\varphi_2-0{,}75\varphi_3=-1{,}5;$$
$$-0{,}5\varphi_1-0{,}75\varphi_2+1{,}75\varphi_3=-5$$

имеет решение: $\varphi_1=6$ В; $\varphi_2=0{,}06$ В; $\varphi_3=-1{,}07$ В.

Заключительный этап расчета состоит в подсчете токов по закону Ома. Перед определением токов в ветвях схемы следует эти токи обозначить и выбрать для них положительные направления:

$$I'_{41}=\frac{E'_{41}-(\varphi'_1-\varphi_4)}{R'_{41}}=\frac{10-(6-0)}{1}=4\ \text{А};\quad I'''_{21}=\frac{\varphi_2-\varphi'_1}{R'''_{21}}=-1{,}185\ \text{А};$$

$$I'_{32}=\frac{\varphi_3-\varphi_2+E'_{32}}{R'_{32}}=2{,}92\text{А};\quad I_{43}=\frac{\varphi_4-\varphi_3+E_{43}}{R_{43}}\approx 4{,}55\ \text{А и т. д.}$$

Сделаем проверку решения по второму закону Кирхгофа для периферийного контура.

Алгебраическая сумма падений напряжений

$$4\cdot 1+1{,}185\cdot 5-2{,}92\cdot 2-4{,}55\cdot 2\approx -5\ \text{В}.$$

Алгебраическая сумма э. д. с.

$$10-7-8=-5\ \text{В}.$$

Покажем, что основная формула (1.20) метода двух узлов получается как частный случай из формулы (1.22). Действительно, если один узел схемы рис. 1.23, например узел b, заземлить, то остается найти только один потенциал $\varphi_a=U_{ab}$. Для получения формулы (1.20) из (1.22) следует положить: $\varphi_1=\varphi_a=U_{ab}$; $\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=\ldots=0$.

§ 1.23. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду. Соединение трех сопротивлений, имеющее вид трехлучевой

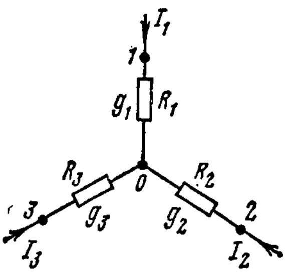


Рис. 1.25

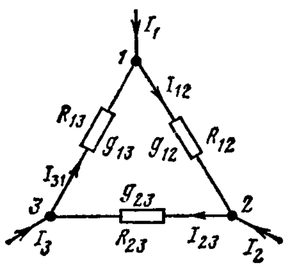


Рис. 1.26

звезды (рис. 1.25), называют соединением *звезда*, а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника (рис. 1.26), — соединением *треугольник*. В узлах *1*, *2*, *3* (потенциалы их φ_1, φ_2 и φ_3) и треугольник и звезда соединяются с остальной частью схемы (не показанной на рисунках).

Обозначим токи, подтекающие к узлам *1*, *2*, *3*, через I_1, I_2 и I_3.

Очень часто при расчете электрических цепей оказывается полезным преобразовать треугольник в звезду или, наоборот, звезду в треугольник. Практически чаще бывает необходимо преобразовывать треугольник в звезду. Если преобразование выполнить таким образом, что при одинаковых значениях потенциалов одноименных точек треугольника и звезды подтекающие к этим точкам токи одинаковы, то вся внешняя схема «не заметит» произведенной замены. Выведем формулы преобразований. С этой целью выразим токи I_1, I_2 и I_3 в звезде и в треугольнике через разности потенциалов точек и соответствующие проводимости.

Для звезды

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \tag{1.23}$$

но

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1; \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) g_2; \quad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) g_3. \tag{1.24}$$

Подставим (1.24) в (1.23) и найдем φ_0:

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 - \varphi_0 (g_1 + g_2 + g_3) = 0,$$

откуда

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \tag{1.25}$$

Далее введем φ_0 в выражение (1.24) для тока I_1:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1 = \frac{[\varphi_1 (g_2 + g_3) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3] g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \tag{1.26}$$

Для треугольника в соответствии с обозначениями на рис. 1.26

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) g_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) g_{13} = \varphi_1 (g_{12} + g_{13}) - \\ - \varphi_3 g_{13} - \varphi_2 g_{12}. \tag{1.27}$$

Так как ток I_1 в схеме рис. 1.25 должен равняться току I_1 в схеме рис. 1.26 при любых значениях потенциалов φ_1, φ_2, φ_3, то коэффициент при φ_2 в правой части (1.27) должен равняться коэффициенту при φ_2 в правой части (1.26), а коэффициент при φ_3 в правой части (1.27) должен равняться коэффициенту при φ_3 в правой части (1.26).

Следовательно,

$$g_{12} = g_1 g_2 / (g_1 + g_2 + g_3); \tag{1.28}$$

$$g_{13} = g_1 g_3 / (g_1 + g_2 + g_3). \tag{1.29}$$

Аналогично,

$$g_{23} = g_2 g_3 / (g_1 + g_2 + g_3). \tag{1.30}$$

Формулы (1.28)—(1.30) дают возможность найти проводимости сторон треугольника через проводимости лучей звезды. Они имеют легко запоминающуюся структуру: индексы у проводимостей в числителе правой части соответствуют индексам у проводимости в левой части, в знаменателе — сумма проводимостей лучей звезды.

Из уравнений (1.28)—(1.30) выразим сопротивления лучей звезды $R_1 = 1/g_1$; $R_2 = 1/g_2$ и $R_3 = 1/g_3$ через сопротивления сторон треугольника:

$$R_{12} = 1/g_{12}; \quad R_{23} = 1/g_{23}; \quad R_{13} = 1/g_{13}.$$

С этой целью запишем дроби, обратные (1.28)—(1.30):

$$R_{12} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3}}{\frac{1}{R_1 R_2}} = \frac{m}{R_3}. \tag{1.31}$$

Здесь

$$m = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1; \qquad (1.32)$$

$$R_{23} = m/R_1; \qquad (1.33)$$

$$R_{13} = m/R_2. \qquad (1.34)$$

Подставив (1.31), (1.33) и (1.34) в (1.32), получим

$$m = m^2\left(\frac{1}{R_{23}R_{13}} + \frac{1}{R_{13}R_{12}} + \frac{1}{R_{12}R_{23}}\right) = m^2\frac{R_{12}+R_{23}+R_{31}}{R_{12}R_{23}R_{31}}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{R_{12}R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}.$$

Подставим m в (1.33) и найдем

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (1.35)$$

Аналогично,

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \qquad (1.36)$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}. \qquad (1.37)$$

Структура формул (1.35)—(1.37) аналогична структуре формул (1.28)—(1.30).

Полезность преобразования треугольника в звезду можно пояснить, например, схемой рис. 1.27. На рис. 1.27, *а* изображена схема до преобразования, пунктиром обведен преобразуемый треугольник. На рис. 1.27, *б* представлена та же схема после преобразования. Расчет токов производить для нее проще (например, методом двух узлов), чем расчет токов в схеме рис. 1.27, *а*.

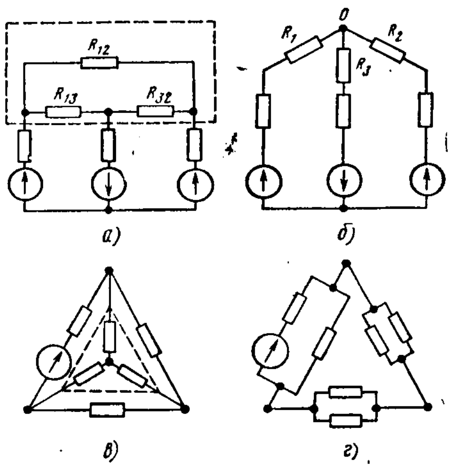


Рис. 1.27

В полезности преобразования звезды в треугольник можно убедиться на примере схемы рис. 1.27, *в*, *г*. На рис. 1.27, *в* изображена схема до преобразования, пунктиром обведена преобразуемая в треугольник звезда. На рис. 1.27, *г* представлена схема после преобразования, которая свелась к последовательному и параллельному соединению сопротивлений *.

* В § 3.31 рассмотрен еще один вид преобразований — преобразование последовательно-параллельного соединения в параллельное.

Пример 14. Найти значения сопротивлений R_1, R_2, R_3 в схеме рис. 1.27, *б*, если сопротивления R_{12}, R_{13}, R_{32} в схеме рис. 1.27, *а* равны соответственно 2, 3, 5 Ом.

Решение. По формуле (1.35), $R_1 = 2 \cdot 3/(2+3+5) = 0{,}6$ Ом; по формуле (1.36), $R_2 = (5 \cdot 2)/10 = 1$ Ом;
по формуле (1.37), $R_3 = (3 \cdot 5)/10 = 1{,}5$ Ом.

§ 1.24. Перенос источников э.д.с. и источников тока. На участке цепи рис. 1.28, *а* между узлами *a* и *b* имеется источник э. д. с. *E*. Этот источник можно перенести в ветви *1* и *2*, а узел *a* устранить и получить участок на рис. 1.28, *б*. Эквивалентный переход поясняется рис. 1.28, *в*. Точки *c*, *d*, *b* имеют одинаковый потенциал и потому могут быть объединены в одну точку *b*.

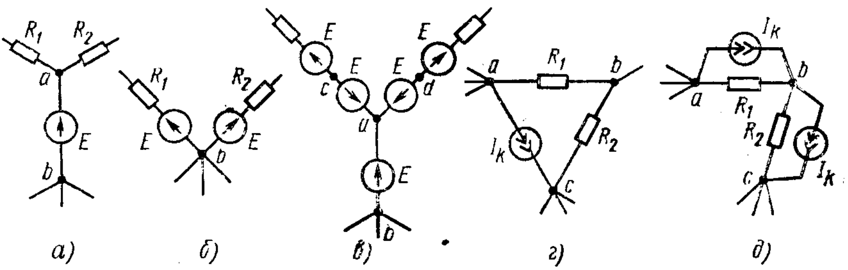


Рис. 1.28

Участок *abc* на рис. 1.28, *г*, между крайними точками *a* и *c* которого присоединен источник тока I_k, может быть заменен участком *abc* рис. 1.28, *д*, отличающимся от участка рис. 1.28, *г* тем, что источник тока между точками *a* и *c* заменен на два источника, присоединенных параллельно R_1 и R_2. Эквивалентность замены следует из неизменности значений токов в каждом из узлов. Ток в узле *b* не изменился, так как в этот узел добавили и вычли ток I_k. Практически источники переносят при преобразованиях схем с целью их упрощения и при записи уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов в матричном виде (см. приложение Б).

§ 1.25. Активный и пассивный двухполюсники. В любой электрической схеме всегда можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы независимо от ее структуры и сложности условно изобразить некоторым прямоугольником (рис. 1.29, *а*). (Такой прием был использован в § 1.17 без специальных объяснений.) По отношению к выделенной ветви вся схема, обозначенная прямоугольником, представляет собой так называемый двухполюсник.

Таким образом, двухполюсник — это обобщенное название схемы, которая двумя выходными зажимами (полюсами) присоединена к выделенной ветви.

Если в двухполюснике есть источник э. д. с. или (и) тока, то такой двухполюсник называют *активным*. В этом случае в прямоугольнике ставят букву *A* (рис. 1.29, *а*—*в*).

Если в двухполюснике нет источника э. д. с. и (или) тока, то его называют *пассивным*. В этом случае в прямоугольнике либо не ставят никакой буквы, либо ставят букву *П* (рис. 1.29, *г*).

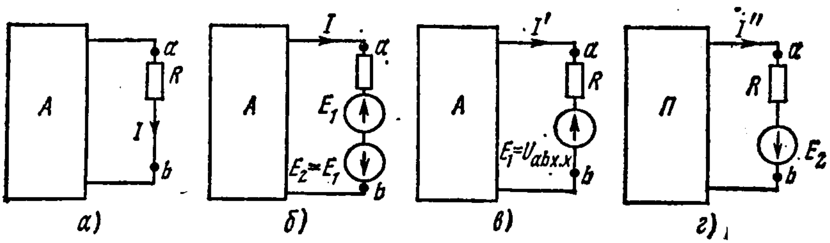


Рис. 1.29

§ 1.26. Метод эквивалентного генератора. По отношению к выделенной ветви при расчете двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором, э. д. с. которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Пусть задана некоторая схема и требуется найти ток в одной ее ветви. Мысленно заключим всю схему, содержащую э. д. с. и сопротивления, в прямоугольник, выделив из нее одну ветвь *ab*, в которой требуется найти ток I (рис. 1.29, *а*).

Ток I не изменится, если в ветвь *ab* включить две равные и противоположно направленные э. д. с. E_1 и E_2 (рис. 1.29, *б*).

На основании принципа наложения ток можно представить в виде суммы двух токов I' и I'':

$$I = I' + I''.$$

Под током I' будем понимать ток, вызванный э. д. с. E_1 и всеми источниками э. д. с. и тока активного двухполюсника, заключенными в прямоугольник, а ток I'' вызывается только одной э. д. с. E_2. В соответствии с этим для нахождения токов I' и I'' используем схемы рис. 1.29, *в*, *г*. В прямоугольнике *П* схемы рис. 1.29, *г* отсутствуют все э. д. с., но оставлены внутренние сопротивления источников.

Э. д. с. E_1 направлена встречно напряжению U_{ab}. По закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.,

$$I' = (U_{ab} - E_1)/R. \qquad \text{(а)}$$

Выберем E_1 так, чтобы ток I' был равен нулю. Отсутствие тока в ветви *ab* эквивалентно ее размыканию (холостому ходу). Напряжение на зажимах *ab* при холостом ходе (х. х) ветви обозначим $U_{ab\,\text{х.х}}$.

Следовательно, если выбрать $E_1 = U_{ab\,\text{х.х}}$, то $I' = 0$. Так как $I = I' + I''$, а $I' = 0$, то $I = I''$. Но ток I'' в соответствии со схемой рис. 1.29, *г* определяется как

$$I'' = E_2/(R + R_{\text{вх}}) = U_{ab\,\text{х.х}}/(R + R_{\text{вх}}), \qquad \text{(б)}$$

где $R_{вх}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab; R — сопротивление ветви ab. Уравнению (б) отвечает эквивалентная схема рис. 1.30, *а*, где вместо двухполюсника изображены источник э. д. с. $U_{ab\,х.\,х} = E_2$ и сопротивление $R_{вх}$ (схема Гельмгольца — Тевенена).

Совокупность э. д. с. $E_2 = U_{ab\,х.\,х}$ и сопротивления $R_{вх}$ можно рассматривать как некоторый *эквивалентный генератор* ($R_{вх}$ является его внутренним сопротивлением, а $U_{ab\,х.\,х}$ — его э. д. с.).

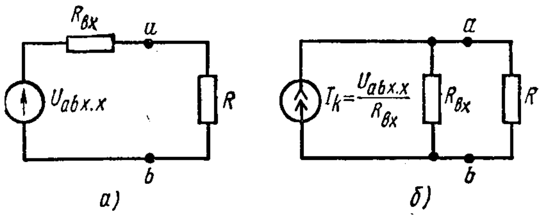


Рис. 1.30

Таким образом, по отношению к выделенной ветви (ветви рис. 1.29, *а*) всю остальную часть схемы можно заменить эквивалентным генератором с названными значениями параметров.

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть *методом эквивалентного генератора*, *методом активного двухполюсника* или *методом холостого хода и короткого замыкания*.

В дальнейшем чаще используется первое название.

Последовательность расчета тока этим методом рекомендуется такая:

а) найти напряжение на зажимах разомкнутой ветви ab;

б) определить входное сопротивление $R_{вх}$ всей схемы по отношению к зажимам ab при закороченных источниках э. д. с. *;

в) подсчитать ток по формуле

$$I = U_{ab\,х.\,х}/(R + R_{вх}). \tag{1.38}$$

Если сопротивление ветви ab равно нулю ($R = 0$), то для нее имеет место режим короткого замыкания, а протекающий по ней ток есть ток короткого замыкания ($I_{к.\,з}$). Из (1.38) при $R = 0$

$$I_{к.\,з} = U_{ab\,х.\,х}/R_{вх}, \tag{1.39}$$

или

$$R_{вх} = U_{ab\,х.\,х}/I_{к.\,з}. \tag{1.40}$$

Из формулы (1.40) следует простой метод опытного определения входного сопротивления. Для этого необходимо измерить напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой ветви ($U_{ab\,х.\,х}$) и ток короткого замыкания ($I_{к.\,з}$) ветви, а затем найти $R_{вх}$ как частное от деления $U_{ab\,х.х}$ на $I_{к.\,з}$.

---

* Если среди источников питания схемы есть источники тока, то при определении входного сопротивления всей схемы по отношению к зажимам ab ветви с источниками тока следует считать разомкнутыми. Это станет понятным, если вспомнить, что внутреннее сопротивление источников тока равно бесконечности (см. § 1.2).

Название метода — метод холостого хода и короткого замыкания — объясняется тем, что при решении этим методом для нахождения $U_{ab\,\text{х.х}}$ используется холостой ход ветви ab и для определения входного сопротивления двухполюсника может быть использовано короткое замыкание ветви ab.

Заменив источник э. д. с. источником тока, получим схему эквивалентного генератора в виде рис. 1.30, *б* (схема Нортона).

Пример 15. Определить ток в диагонали ab мостовой схемы рис. 1.31, *а*, полагая $R_1=R_4=1$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=2$ Ом; $R_5=2$ Ом; $E_1=10$ В.

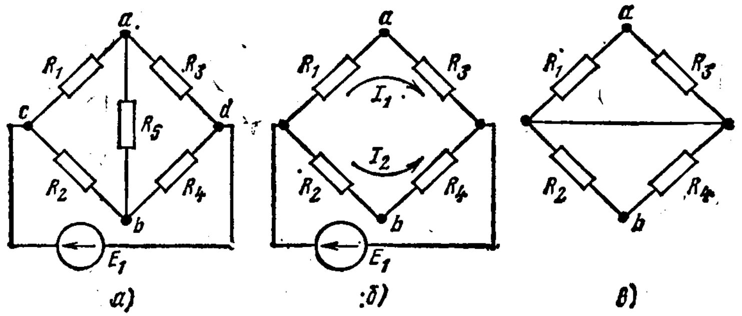


Рис. 1.31

Решение. Размыкаем ветвь ab (рис. 1.31, *б*) и находим напряжение холостого хода:

$$\varphi_a=\varphi_b+I_2R_2-I_1R_1=\varphi_b+\frac{E_1R_2}{R_2+R_4}-\frac{E_1R_1}{R_1+R_3}=$$
$$=\varphi_b+E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4}-\frac{R_1}{R_1+R_3}\right);$$

$$U_{ab\,\text{х.х}}=\varphi_a-\varphi_b=E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4}-\frac{R_1}{R_1+R_3}\right)=10\left(\frac{4}{4+1}-\frac{1}{1+2}\right)=4{,}67 \text{ В}.$$

Подсчитываем входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам ab при закороченном источнике э. д. с. (рис. 1.31, *в*).

Точки c и d схемы оказываются соединенными накоротко. Поэтому

$$R_{\text{вх}}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=\frac{1\cdot 2}{1+2}+\frac{4\cdot 1}{4+1}=1{,}47 \text{ Ом}.$$

Определим ток в ветви по формуле (1.38):

$$I=U_{ab\,\text{х.х}}/(R_5+R_{\text{вх}})=4{,}67/(2+1{,}47)=1{,}346 \text{ А}.$$

§ 1.27. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке. Если нагрузка R подключена к активному двухполюснику (см. рис. 1.29, *а*), то через нее пойдет ток $I=U_{ab\,\text{х.х}}/(R+R_{\text{вх}})$ и в ней будет выделяться мощность

$$P=I^2R=\frac{U^2_{ab\,\text{х.х}}}{(R+R_{\text{вх}})^2}R. \tag{1.41}$$

Выясним, каково должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки R и входным сопротивлением двухполюсника $R_{вх}$, чтобы в сопротивлении нагрузки выделялась максимальная мощность; чему она равна и каков при этом к. п. д. передачи. С этой целью определим первую производную P по R и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR}=\frac{(R+R_{вх})^2-2R\,(R+R_{вх})}{(R+R_{вх})^4}=0.$$

Отсюда

$$R=R_{вх}. \tag{1.42}$$

Нетрудно найти вторую производную и убедиться в том, что она отрицательна $\left(\frac{d^2P}{dR^2}<0\right)$, поэтому соотношение (1.42) соответствует максимуму функции $P=f\,(R)$.

Подставив (1.42) в (1.41), получим максимальную мощность, которая может быть выделена в нагрузке R:

$$P_{max}=U_{ab\,х.\,х}^2/4R_{вх}. \tag{1.43}$$

Полезная мощность, выделяющаяся в нагрузке, определяется уравнением (1.41). Полная мощность, выделяемая эквивалентным генератором,

$$P_{полн}=U_{ab\,х.\,х}I=U_{ab\,х.\,х}^2/(R_{вх}+R).$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta=P/P_{полн}=R/(R+R_{вх}). \tag{1.44}$$

Если $R=R_{вх}$, то $\eta=0{,}5$.

Если мощность P значительна, то работать с таким низким к. п. д., как 0,5, совершенно недопустимо. Но если мощность P мала и составляет всего несколько милливатт (такой мощностью обладают, например, различные датчики устройств автоматики), то с низким к. п. д. можно не считаться, поскольку в этом режиме датчик отдает нагрузке максимально возможную мощность. Выбор сопротивления нагрузки R, равного входному сопротивлению $R_{вх}$ активного двухполюсника, называют *согласованием нагрузки*.

Пример 16. Найти, при каком значении сопротивления R_5 схемы рис. 1.31, *а* в нем выделяется максимальная мощность и чему она равна.

Решение. Из условия (1.42) находим:

$$R_5=R_{вх}=1{,}47\ Ом;$$

$$P_{max}=U_{ab\,х.\,х}^2/4R_{вх}=4{,}67^2/(4\cdot1{,}47)=3{,}71\ Вт.$$

§ 1.28. Передача энергии по линии передачи. Схема линии передачи электрической энергии изображена на рис. 1.32, где U_1 — напряжение генератора в начале линии; U_2 — напряжение на нагрузке в конце линии R_2; $R_л$ — сопротивление проводов линии.

При передаче больших мощностей (например, нескольких десятков мегаватт) в реальных линиях передач к. п. д. составляет 0,94—0,97, а U_2 лишь на несколько процентов меньше U_1. Ясно, что каждый процент повышения к. п. д. при передаче больших мощностей имеет существенное экономическое значение.

Характер изменения мощности в начале линии P_1, мощности в на-

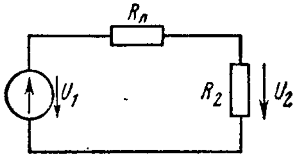


Рис. 1.32

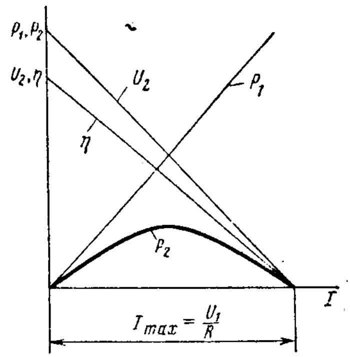


Рис. 1.33

грузке P_2, к. п. д. η и напряжения на нагрузке U_2 в функции от тока по линии при неизменном напряжении на входе линии U_1 и неизменном сопротивлении проводов линии $R_л$ иллюстрируется кривыми рис. 1.33. По оси абсцисс на этом рисунке отложен ток I, по оси ординат — P_1, P_2, U_2, η.

Максимальное значение тока $I_{max} = U_1/R_л$ имеет место при коротком замыкании нагрузки. Кривые построены по уравнениям

$$P_1 = U_1 I;\quad P_2 = U_1 I - I^2 R_л;$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{R_л I}{U_1} = \frac{R_2}{R_л + R_2};\quad U_2 = U_1 - R_л I.$$

Если по линии передачи с сопротивлением $R_л$ и сопротивлением нагрузки R_2 должна быть передана мощность

$$P_2 = I^2 R_2, \tag{а}$$

то к. п. д. передачи тем выше, чем выше напряжение U_1 в начале линии.

Выведем формулу, показывающую, как к. п. д. зависит от напряжения в начале линии. Из (а) определим $R_2 = P_2/I^2$, но $I = U_1/(R_л + R_2)$, поэтому

$$R_2 = \frac{P_2 (R_л + R_2)}{U_1^2}. \tag{б}$$

Разрешим (б) относительно R_2 [знак минус в формуле (в) перед корнем отброшен, так как он соответствует правой части кривой $P_2 = f(I)$ с меньшим η]:

$$R_2 = \left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_л\right) + \sqrt{\left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_л\right)^2 - R_л^2}. \tag{в}$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{R_2}{R_л + R_2} = \frac{R_2 + R_л - R_л}{R_л + R_2} = 1 - \frac{R_л}{\frac{U_1^2}{2P_2} + \sqrt{\left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_л\right)^2 - R_л^2}}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Определите понятия «электрическая цепь», «электрическая схема», «узел», «ветвь», «источник э. д. с.», «источник тока». 2. Как выбирают положительные направления для токов ветвей, как связаны с ними положительные направления напряжений на сопротивлениях? 3. Что понимают под в. а. х.? 4. Нарисуйте в. а. х. реального источника, источника э. д. с., источника тока, линейного сопротивления. 5. Сформулируйте закон Ома для участка цепи с э. д. с., первый и второй законы Кирхгофа. Запишите в буквенном виде сколько уравнений следует составлять по первому и второму законам Кирхгофа. 6. В чем отличие напряжения от падения напряжения? 7. Охарактеризуйте основные этапы метода контурных токов (МКТ) и метода узловых потенциалов (МУП). При каком условии число уравнений по МУП меньше числа уравнений по МКТ? 8. Сформулируйте принцип и метод наложения. 9. Запишите и поясните линейные соотношения в электрических цепях. 10. Что понимают под входными и взаимными проводимостями? Как их определяют аналитически и как — опытным путем? 11. Покажите, что метод двух узлов есть частный случай МУП. 12. Приведите примеры, показывающие полезность преобразования звезды в треугольник. 13. Сформулируйте теорему компенсации и теорему вариаций. 14. Дайте определение активного двухполюсника, начертите две его схемы замещения, найдите их параметры, перечислите этапы расчета методом эквивалентного генератора. 15. Запишите условие передачи максимальной мощности нагрузке. Каков при этом к. п. д.? 16. Решите задачи 1.2; 1.7; 1.10; 1.13; 1.20; 1.24; 1,33; 1.40; 1.41; 1.45.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ИНДУКТИВНОСТЬ И ЕМКОСТЬ КАК ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 2.1. Явление электромагнитной индукции. Электрические токи создают магнитное поле. В каждой точке оно характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$, которые связаны соотношением $\vec{B}=\mu_a\vec{H}$, где $\mu_a=\mu_0\mu$ — абсолютная магнитная проницаемость; $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ — магнитная постоянная, Г/м.

Единицы измерения: $[B]=\text{В}\cdot\text{с/м}^2=\text{Вб/м}^2$, $[H]=\text{А/м}$.

Магнитному полю присущи два проявления — силовое воздействие на ток (на движущийся заряд) и наведение э. д. с. В основу определения вектора $\vec{B}$ положено силовое проявление магнитного поля. Индукцию $\vec{B}$ определяют как силу, действующую на проводник единичной длины с током в 1 А, расположенный перпендикулярно вектору $\vec{B}$ (см. § 14.1). Напряженность определяют как разность двух физических величин: $\vec{H}=(\vec{B}/\mu_0)-\vec{J}$, где $\vec{J}$ — магнитный момент единицы объема вещества (см. § 14.24). Поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S называют *магнитным потоком* $\Phi=\int\limits_S\vec{B}\,d\vec{S}$; $[\Phi]=\text{В}\cdot\text{с}=\text{Вб}$.

Явление электромагнитной индукции было открыто в 1831 г. английским ученым Майклом Фарадеем. Суть явления в том, что при изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (обмотку), независимо от того, чем вызвано изменение потока, в контуре (обмотке) наводится электродвижущая сила e.

Опыт показывает, что наведенная э. д. с. прямо пропорциональна скорости изменения потокосцепления контура ψ:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}. \qquad (2.1)$$

Потокосцепление контура ψ равно алгебраической сумме потоков, пронизывающих отдельные витки обмотки:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_n. \qquad (2.2)$$

Если все витки обмотки w пронизываются потоком Φ, то

$$\psi = w\Phi. \qquad (2.3)$$

Так как w — безразмерная величина, то ψ измеряют в тех же единицах, что и Φ. Важно обратить внимание на следующее:

1) ψ — это полное или результирующее потокосцепление контура (обмотки); оно создается не только внешним по отношению к данному контуру потоком, но и собственным потоком, пронизывающим контур при протекании по нему электрического тока;

2) знак минус объясняется тем, что положительное направление отсчета для наведенной э. д. с. и положительное направление линий магнитной индукции, пронизывающих контур при возрастании потока, принято связывать *правилом правого винта*: если закручивать правый винт так, что его острие двигается по направлению магнитных силовых линий при возрастании потока, то положительное направление для наведенной э. д. с. совпадает с направлением вращения головки этого винта.

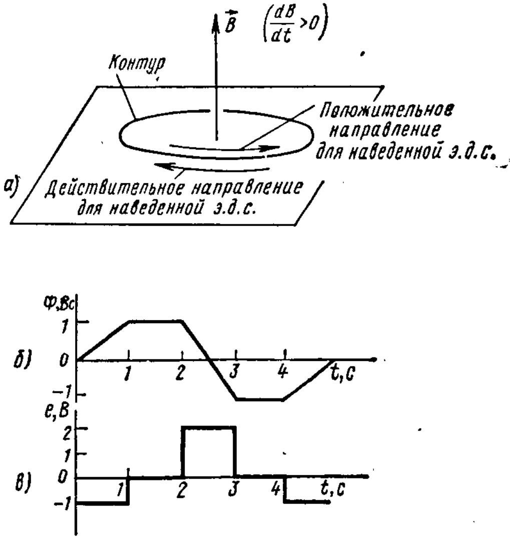


Рис. 2.1

Знак минус в формуле (2.1) поставлен с целью приведения в соответствие действительного (полученного из опыта) направления э. д. с. при оговоренных условиях с направлением отсчета, принятым для нее за положительное (рис. 2.1, *а*).

Формулу (2.1) иллюстрируют рис. 2.1, *б*, *в*: на рис. 2.1, *б* показана зависимость потока, пронизывающего одновитковый контур рис. 2.1, *а* от времени: $\Phi = f(t)$; на рис. 2.1, *в* — зависимость э. д. с. $e = f(t)$, наводимой в контуре, от времени.

Свои эксперименты Фарадей проводил с замкнутыми проводниковыми контурами. Наведение э. д. с. он объяснял как следствие пересечения проводами контура магнитных силовых линий.

В 1873 г. английский ученый Джеймс Кларк Максвелл обобщил и развил идеи Фарадея (см. ч. III учебника). Он показал, что явление электромагнитной индукции наблюдается не только в замкнутых проводниковых, но и в замкнутых непроводниковых контурах.

Э. д. с., наведенную в проводнике длиной dl, пересекающем магнитные силовые линии *неизменного* во времени магнитного поля, часто определяют по формуле

$$de = \vec{B}\,[\vec{dl}\,\vec{v}], \tag{2.4}$$

где de — э. д. с., наводимая на участке проводника длиной dl; $\vec{v}$ — скорость перемещения проводника относительно внешнего магнитного поля.

В формуле (2.4) индукция $\vec{B}$ скалярно умножается на векторное произведение $\vec{dl}$ и $\vec{v}$. Если в результате расчета по формуле (2.4) э. д. с. окажется положительной, то это означает, что э. д. с. de направлена согласно с положительным направлением элемента проводника $\vec{dl}$.

Формула (2.4) в одинаковой степени пригодна для определения э. д. с. при движении проводника в неравномерном и в равномерном магнитном полях, если магнитное поле неизменно во времени.

При движении проводника длиной l в *равномерном неизменном во времени* поле э. д. с. удобнее определять по формуле

$$e = Blv_n, \tag{2.5}$$

где B — индукция внешнего равномерного поля; l — длина активной части проводника (пересекающей магнитные силовые линии); v_n — составляющая скорости движения проводника, нормальная (перпендикулярная) магнитному полю.

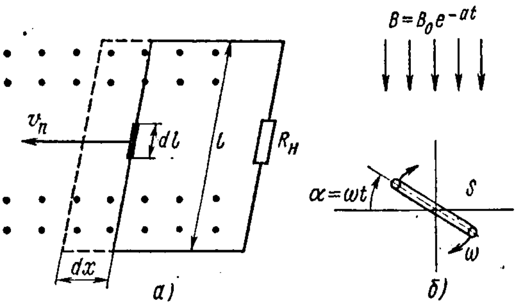


Рис. 2.2

Направление наведенной э. д. с. при использовании формулы (2.5) определяют *по правилу правой руки* (известному из курса физики): если расположить правую руку таким образом, что магнитная индукция входит в ладонь, а отогнутый большой палец направить по нормальной составляющей скорости проводника, то возникающая в проводнике э. д. с. совпадает с направлением четырех остальных вытянутых пальцев правой руки.

Из формулы (2.5) можно получить формулу (2.1). Пусть в неравномерном магнитном поле, направленном перпендикулярно рис. 2.2, *а*, перемещается проводник длиной l, являющийся составной частью некоторого контура. Нормальная полю составляющая скорости движения проводника $v_n = dx/dt$, где x — координата в направлении v_n. В отрезке проводника длиной l наводится э. д. с., которую определим в соответствии с формулой (2.5): $de = Bv_n\,dl$. Э. д. с. в проводнике длиной l

$$e = \int_0^l Bv_n dl = \int_0^l B\,(dx\,dl)/dt.$$

Произведение $dx\,dl$ представляет собой элементарную площадку dS, пронизываемую магнитным потоком. Приращение потока в контуре $d\Phi = \int \vec{B}\,d\vec{S}$. Таким образом, числовое значение э. д. с. равно $d\Phi/dt$. Имея в виду, что положительное направление для наведенной э. д. с. и положительное направление линий $\vec{B}$ при возрастании потока связаны правилом правого винта, получим при $w = 1$

$$e = -d\Phi/dt.$$

Возникновение э. д. с. в проводнике, движущемся в магнитном поле, поясним, используя понятие о силе Лоренца. На электрический заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила $q[\vec{v}\vec{B}]$*. Если проводник при своем перемещении движется так, что имеет составляющую скорости, перпендикулярную силовым линиям магнитного поля, то на заряды, входящие в состав атомов и молекул этого проводника, действуют силы, направленные вдоль этого проводника. На отрицательные заряды силы действуют в одну сторону, на положительные — в противоположную. Вследствие большой способности к перемещению свободных электронов в проводнике на одном конце его образуется избыток, на другом — недостаток электронов (т. е. избыток положительных зарядов).

Явление разделения зарядов в проводнике, движущемся в магнитном поле, представляет собой возникновение в нем индуктированной э. д. с.

Пример 17. Вывести формулу для определения э. д. с. в обмотке с числом витков w, намотанной на прямоугольной рамке площадью S. Рамка вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией $B = B_0 e^{-at}$ (рис. 2.2, *б*).

Подсчитать числовое значение э. д. с. e при $\omega t = \pi/2$, $B_0 = 1$ Т; $a = 10$ с$^{-1}$; $S = 4$ см^2; $\omega = 31{,}4$ с$^{-1}$; $w = 100$.

Решение. Потокосцепление обмотки

$$\psi = w\Phi = wBS\cos\alpha = wB_0 S e^{-at}\cos\omega t,$$

где $\alpha = \omega t$ — угол, образованный плоскостью рамки и горизонтальной плоскостью;

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -B_0 S w\,(-ae^{-at}\cos\omega t - \omega e^{-at}\sin\omega t) = B_0 S w e^{-at}\,(a\cos\omega t + \omega\sin\omega t).$$

Подсчитаем числовое значение e при $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\cdot 31{,}4};\quad at = 0{,}5;$$

$$e = 1\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 100 e^{-0{,}5}\cdot 31{,}4 = 0{,}761\ \text{В}.$$

§ 2.2. Явление самоиндукции и э. д. с. самоиндукции. Индуктивность. Явление наведения э. д. с. в каком-либо контуре при изменении тока, протекающего по этому контуру, называют *самоиндукцией*.

---

* Здесь сила Лоренца определена при отсутствии электрического поля напряженностью $\vec{E}$. В электромагнитном поле с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля индукции $\vec{B}$ сила Лоренца равна $q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}])$.

Наведенную (индуктированную) э. д. с. называют *э. д. с. самоиндукции* и обозначают e_L. Для ее определения необходимо продифференцировать потокосцепление контура ψ, вызванное собственным током i.

Из опыта известно, что для контуров (катушек) с неферромагнитным сердечником или для катушек с сердечником из магнитодиэлектриков, у которых μ почти постоянна и не зависит от напряженности магнитного поля, потокосцепление ψ пропорционально току i:

$$\psi = Li. \tag{2.6}$$

Коэффициент пропорциональности L между ψ и i называют *индуктивностью*. Индуктивность как элемент схемы замещения реальной цепи дает возможность учитывать при расчете явление самоиндукции и явление накопления энергии в магнитном поле катушки.

Индуктивность L зависит от геометрических размеров контура (катушки) и от числа витков w, но не зависит от величины тока, протекающего по катушке, если сердечник катушки неферромагнитный или ферромагнитный, но его магнитная проницаемость постоянна. Индуктивность измеряется в В·с/А = Ом·с = генри (Г). Таким образом,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L\frac{di}{dt}; \quad e_L = -L\frac{di}{dt}. \tag{2.7}$$

Следовательно, э. д. с. самоиндукции в катушке пропорциональна скорости изменения тока в этой катушке. Она равна нулю, если ток не изменяется.

Положительное направление э. д. с. совпадает и с положительным направлением тока.

Знак минус в формуле (2.7) свидетельствует о том, что мгновенное значение э. д. с. отрицательно при $\frac{di}{dt} > 0$.

Для катушек с ферромагнитным сердечником потокосцепление является нелинейной функцией тока $\psi(i)$ и э. д. с. самоиндукции по правилам дифференцирования сложной функции

$$e_L = -\frac{d\psi}{di}\cdot\frac{di}{dt} = -L_д\frac{di}{dt}. \tag{2.8}$$

Производную $d\psi/di$ называют *дифференциальной индуктивностью* и обозначают $L_д$; $L_д$ является функцией тока i.

Значение e_L определяется произведением $di/dt\cdot d\psi/di$, где $\frac{di}{dt}$ и $\frac{d\psi}{di}$ соответствуют взятому моменту времени t.

Пример 18. Определить индуктивность катушки, равномерно намотанной на сердечник прямоугольного сечения (рис. 2.3), внутренний радиус которого $R_1 = 4$ см, наружный $R_2 = 6$ см, высота $h = 2$ см; число витков $w = 1000$; $\mu = 80$ (сердечник из магнитодиэлектрика).

Решение. Напряженность поля в сердечнике определим по закону полного тока:

$$H = Iw/(2\pi R).$$

Поток через полоску $h\,dR$, заштрихованную на рис. 2.3,

$$d\Phi = Bh\,dR = \frac{\mu_0 \mu I w h}{2\pi R}\,dR.$$

Полный поток

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 \mu I w h}{2\pi} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 \mu I w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Потокосцепление $\psi = w\Phi$.

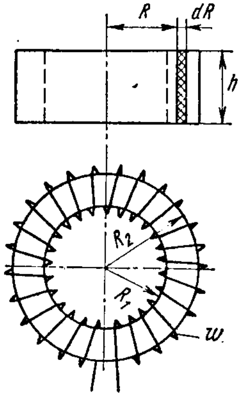


Рис. 2.3

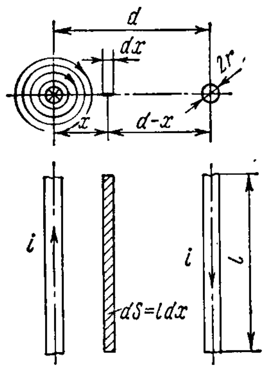


Рис. 2.4

Индуктивность

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{w^2 \mu_0 \mu h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$L = \frac{1000^2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln \frac{6}{4} = 0{,}131 \text{ Г}.$$

Пример 19. По катушке примера 18 течет ток $i = I_m \sin \omega t$. Определить э. д. с. самоиндукции в катушке при $I_m = 0{,}1$ А и $\omega = 10^3$ с$^{-1}$.

Решение.

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t;$$

$$e_L = -10^3 \cdot 0{,}131 \cdot 0{,}1 \cos \omega t = -13{,}1 \cos \omega t \text{ В}.$$

Пример 20. Определить индуктивность двухпроводной линии передачи длиной $l = 10$ км при расстоянии между проводами $d = 2$ м. Диаметр проводов 12 мм.

Решение. Двухпроводная линия (рис. 2.4) представляет собой как бы один большой виток с током $i = I$. Напряженность поля в пространстве между проводами в произвольной точке на линии, соединяющей оси проводов, создается обоими проводами и равна сумме напряженностей, каждая из которых находится по закону полного тока (см. § 14.7):

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi (d - x)},$$

где $d-r \gg x \gg r$. Поток через элементарную площадку $dS=l dx$

$$d\Phi = B\,dS = Bl\,dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx.$$

Полный поток *

$$\Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\int\limits_r^{d-r}\frac{dx}{x}+\int\limits_r^{d-r}\frac{dx}{d-x}\right)=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}.$$

Если $d \gg r$, то

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d}{r};\quad L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r}. \tag{2.10}$$

Подставим числовые значения: $L=\frac{1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 10^4}{\pi}\ln\frac{200}{0{,}6}=0{,}0232$ Г.

§ 2.3. Явление самоиндукции и э. д. с. взаимоиндукции. Взаимная индуктивность. Явление наведения э. д. с. в каком-либо контуре при изменении тока в другом контуре называют *взаимоиндукцией*.

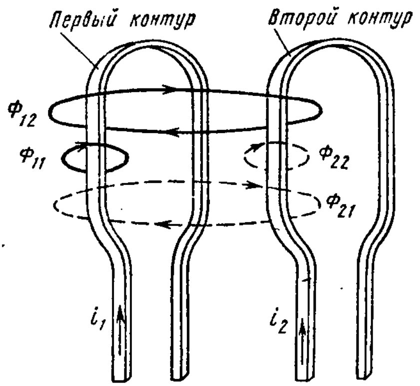


Рис. 2.5

Наведенную (индуктированную) э. д. с. называют *э. д. с. взаимоиндукции* и обозначают e_M. Пусть, например, есть два контура, удаленных на некоторое расстояние друг от друга (рис. 2.5). По первому контуру протекает ток i_1, по второму — ток i_2.

Поток Φ_1, создаваемый током i_1, частично замыкается, минуя второй контур (Φ_{11}), частично проходит через него (Φ_{12}) **:

$$\Phi_1=\Phi_{11}+\Phi_{12}. \tag{2.11}$$

В свою очередь поток Φ_2, создаваемый током i_2, частично замыкается, минуя первый контур (Φ_{22}), частично проходит через него (Φ_{21}):

$$\Phi_2=\Phi_{22}+\Phi_{21}. \tag{2.12}$$

Полное потокосцепление первого контура (число витков его w_1)

$$\psi_{1\,\text{полн}}=w_1(\Phi_1\pm\Phi_{21})=\psi_1\pm\psi_{21}. \tag{2.13}$$

Полное потокосцепление второго контура (число витков его w_2)

$$\psi_{2\,\text{полн}}=w_2(\Phi_2\pm\Phi_{12})=\psi_2\pm\psi_{12}. \tag{2.14}$$

---

* Потокосцеплением в проводах при решении задачи пренебрегаем. Считаем длину l достаточно большой по сравнению с d, что дает основание не учитывать поток поперечных сторон петли.

** Чтобы рис. 2.5 был более понятным, на нем изображено только по одной силовой линии каждого из потоков.

Если поток взаимоиндукции направлен согласно с потоком самоиндукции, создаваемым током данного контура, в выражениях (2.13) и (2.14) ставят знак плюс; при несогласном (встречном) направлении — знак минус.

Из опыта известно, что если сердечники катушек выполнены из неферромагнитных материалов или из ферромагнитных, но имеющих постоянную μ, то ψ_{21} пропорционально i_2, а ψ_{12} пропорционально i_1.

Коэффициенты пропорциональности обозначают буквой M с соответствующими индексами. Так,

$$\psi_{21} = M_{21} i_2; \tag{2.15}$$

$$\psi_{12} = M_{12} i_1. \tag{2.16}$$

Коэффициенты M_{21} и M_{12} численно равны друг другу (доказательство см. в § 2.6):

$$M_{21} = M_{12} = M. \tag{2.17}$$

Коэффициент M называют *взаимной индуктивностью контуров* (катушек). Он имеет ту же размерность, что и индуктивность L.

Полная э. д. с., индуктируемая в первом контуре,

$$e_{1\,\text{полн}} = -\frac{d\psi_{1\,\text{полн}}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\psi_1 \pm \psi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} + e_{1M}; \tag{2.18}$$

во втором контуре

$$e_{2\,\text{полн}} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} + e_{2M}. \tag{2.19}$$

Э. д. с. взаимоиндукции

$$e_{1M} = \mp M \frac{di_2}{dt}; \tag{2.20}$$

$$e_{2M} = \mp M \frac{di_1}{dt}. \tag{2.21}$$

В выражениях (2.20) и (2.21) знак минус соответствует согласному направлению потоков самоиндукции и взаимоиндукции, а знак плюс — встречному. При таком обозначении взаимная индуктивность M всегда положительна.

Как элемент схемы замещения реальной цепи M позволяет при расчете учесть явление взаимоиндукции и явление накопления энергии в магнитном поле магнитносвязанных катушек.

В литературе встречается и другой способ записи э. д. с. взаимоиндукции:

$$e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}; \tag{2.20'}$$

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}. \tag{2.21'}$$

Считают, что коэффициент M может быть либо положительным (при согласном направлении потоков самоиндукции и взаимоиндукции), либо отрицательным (при встречном направлении потоков).

Взаимную индуктивность M определяют как отношение ψ_{21}/i_2 или ψ_{12}/i_1. Ни от ψ_{21}, ни от i_2 (и соответственно от ψ_{12} и i_1) порознь она не зависит, если сердечники катушек неферромагнитны или сердечники выполнены из ферромагнитного материала с постоянной μ. Взаимная индуктивность M зависит только от взаимного расположения катушек, числа их витков, геометрических размеров катушек и от постоянной для данного сердечника μ.

При любой форме и любом расположении магнитносвязанных катушек взаимную индуктивность M между ними без затруднений можно определить опытным путем на переменном токе (см. § 3.38). Расчет же M при сложном распределении магнитного поля в силу трудностей математического характера производят обычно для катушек простейших геометрических форм.

Если магнитносвязанные катушки имеют ферромагнитные сердечники с непостоянной μ, например обмотки намотаны на одном сердечнике, μ которого является функцией результирующей напряженности магнитного поля, то M — непостоянная величина.

Пример 21. На сердечник примера 18 кроме первой обмотки с числом витков $w_1=1000$ намотана вторая с $w_2=500$. Определить взаимную индуктивность между обмотками.

Решение. Если принять, что весь поток, созданный первой обмоткой, $\Phi=\frac{\mu_0\mu I_1 w_1 h \ln R_2/R_1}{2\pi}$ (см. пример 18) пронизывает и вторую обмотку (потоком рассеяния пренебрегаем), то $\psi_{12}=w_2\Phi$ и

$$M=\frac{\psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0\mu w_1 w_2 h \ln R_2/R_1}{2\pi} \tag{2.22}$$

Подставляем числовые значения:

$$M=\frac{1{,}256\cdot10^{-6}\cdot80\cdot1000\cdot500\cdot2\cdot10^{-2}\cdot0{,}41}{2\pi}=0{,}0655\ \text{Г}.$$

§ 2.4. Энергия магнитного поля уединенной катушки. Подключим к источнику э. д. с. E индуктивную катушку с сопротивлением R и индуктивностью L. Пусть в момент времени $t=0$ в ней $i=0$ и $\psi=0$.

По второму закону Кирхгофа,

$$E=u_R+u_L=iR+\frac{d\psi}{dt}. \tag{2.23}$$

Умножив обе части равенства (2.23) на idt, получим

$$Ei\,dt=i^2R\,dt+i\,d\psi. \tag{2.24}$$

Левая часть (2.24) представляет собой энергию, отдаваемую источником э. д. с. за время dt, слагаемое $i^2R\,dt$ — энергию, выделяющуюся в виде теплоты за время dt в сопротивлении R, слагаемое $id\psi$ — энергию, идущую на создание магнитного поля уединенной неподвижной недеформирующейся катушки; обозначим ее $dW_м$:

$$dW_м=i\,d\psi. \tag{2.25}$$

Полная энергия, запасенная в магнитном поле катушки при изменении ψ от 0 до ψ_m,

$$W_м = \int_0^{\psi_m} i\, d\psi.$$

Для катушек с неферромагнитным сердечником $\psi = Li$ и $d\psi = L\, di$. Поэтому

$$W_м = L \int_0^I i\, di = \frac{LI^2}{2}, \tag{2.26}$$

где I — некоторое установившееся значение тока в цепи.

Пример 22. По уединенному с постоянной μ цилиндрическому проводу радиусом R, длиной l протекает ток I (рис. 2.6). Вывести формулу для определения внутренней индуктивности провода, обусловленной потокосцеплением в теле самого провода.

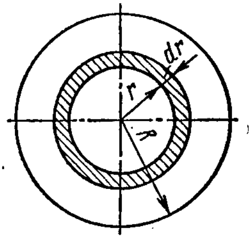


Рис. 2.6

Решение. В соответствии с формулой (2.26) $L = 2W_м/I^2$, где под $W_м$ понимают магнитную энергию, запасенную в теле провода. В цилиндрическом пояске объемом $dV = 2\pi rl\, dr$ (заштрихован на рис. 2.6) запасена энергия $dW_м = \frac{HB}{2} dV$. По закону полного тока, напряженность поля H равна току $\frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$, охваченному окружностью радиусом r и деленному на длину окружности $2\pi r$: $H = Ir/(2\pi R^2)$. Индукция $B = \mu_а H$. Магнитная энергия

$$W_м = \int_0^R \frac{HB}{2} 2\pi rl\, dr = \frac{\mu_а I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3\, dr = \frac{\mu_а I^2 l}{16\pi}.$$

Внутренняя индуктивность провода

$$L = 2W_м/I^2 = \mu_а l/8\pi.$$

§ 2.5. Плотность энергии магнитного поля. Положим, что на кольцевой сердечник, у которого отношение внутреннего радиуса к внешнему близко к единице (при этом можно с известным приближением считать, что напряженность в теле сердечника во всех точках одна и та же), равномерно намотано w витков; l — длина средней линии сердечника. На основании закона полного тока $Hl = iw$ или $i = Hl/w$. В свою очередь, $d\psi = wS\, dB$ и

$$W_м = \int_0^{\psi} i\, d\psi = \frac{lwS}{w} \int_0^B H\, dB = V \int_0^B H\, dB.$$

Разделив обе части равенства на объем сердечника V, получим плотность энергии магнитного поля:

$$w_м = W_м/V = \int_0^B H\, dB. \tag{2.27}$$

Если $\mu=\text{const}$, то $B=\mu_0\mu H$ и $dB=\mu_0\mu\, dH$. Следовательно, в каждой единице объема, занятого полем, запасена энергия магнитного поля плотностью

$$w_м=\mu_0\mu\int_0^H H\,dH=\mu_0\mu H^2/2=HB/2. \tag{2.28}$$

Для ферромагнитного сердечника $\mu\neq\text{const}$. Поэтому при подсчете энергии единицы объема следует использовать формулу не (2.28), а (2.27).

§ 2.6. Магнитная энергия магнитносвязанных контуров. Пусть имеются два неподвижных магнитносвязанных контура, не изменяющих свои размеры и находящихся в неферромагнитной среде. Индуктивность первого контура L_1, второго L_2, взаимная индуктивность между контурами M. Подсчитаем магнитную энергию двух контуров для двух режимов, отличающихся только последовательностью установления токов i_1 и i_2 в контурах.

В первом режиме последовательность установления токов выберем такую: сначала подключим первый контур к источнику э. д. с. при разомкнутом втором контуре, затем подключим второй контур к источнику э. д. с. и будем поддерживать ток первого контура постоянным.

Во втором режиме последовательность установления токов такая: сначала подключим к источнику э. д. с. второй контур при разомкнутом первом, а затем подключим первый, поддерживая постоянным ток второго контура.

Подсчитаем магнитную энергию контуров в первом режиме.

При росте тока i_1 в первом контуре от 0 до i_1 и разомкнутом втором контуре запасенная первым контуром магнитная энергия

$$\int_0^{i_1} i_1\, d(L_1 i_1)=L_1 i_1^2/2.$$

При росте тока i_2 от 0 до i_2 и при $i_1=\text{const}$ энергия запасается не только вторым, но и первым контуром. Энергия, запасаемая вторым контуром, $\int i_2\, d\psi_2$. Но $\psi_2=L_2 i_2+M_{12} i_1$ (положим, что имеет место согласное включение). Так как $i_1=\text{const}$, то $d\psi_2=L_2\, di_2$ и

$$\int_0^{i_2} i_2\, d\psi_2=L_2\int_0^{i_2} i_2\, di_2=L_2 i_2^2/2.$$

Рост тока i_2 вызывает изменение потокосцепления первого контура ψ_1. Оно становится равным $\psi_1=L_1 i_1+M_{21} i_2$. Поэтому энергия, обусловленная потоком взаимоиндукции,

$$\int_0^{i_2} i_1 M_{21}\, di_2=M_{21} i_1 i_2.$$

Суммарная магнитная энергия двух магнитносвязанных контуров при установлении токов в них по первому режиму

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}+M_{21} i_1 i_2.$$

Рассуждая аналогично, при установлении токов по второму режиму получим

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}+M_{12} i_1 i_2.$$

Так как режимы отличаются только последовательностью установления токов, магнитная энергия в этих режимах одинакова. Отсюда следует, во-первых, что

$$M_{21}=M_{12}=M, \tag{2.29}$$

и, во-вторых, что

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}\pm M i_1 i_2. \tag{2.30}$$

Знак плюс перед слагаемым Mi_1i_2 соответствует согласному включению контуров, минус — встречному.

Запишем общее выражение для магнитной энергии системы магнитносвязанных контуров. С этой целью уравнение (2.30) перепишем следующим образом:

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}\pm\frac{M i_1 i_2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}\pm\frac{M i_1 i_2}{2}=\frac{(L_1 i_1\pm M i_2)\, i_1}{2}+\frac{(L_2 i_2\pm M i_1)\, i_2}{2}=$$

$$=\frac{i_1\psi_1}{2}+\frac{i_2\psi_2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} i_k\psi_k.$$

Аналогичное выражение будет иметь место, если магнитно связаны не два, а n контуров:

$$W_м=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\psi_k, \tag{2.30'}$$

где ψ_k — полное потокосцепление k-контура.

Пример 23. По обмотке w_1 примера 21 течет ток 0,5 А и по обмотке w_2 — ток 0,4 А. Определить магнитную энергию при согласном и встречном направлениях потоков обмоток.

Решение. По формуле (2.9), индуктивность второй обмотки $L_2=0{,}0327$ Г. В соответствии с (2.30) при согласном направлении потоков

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}+M i_1 i_2=\frac{0{,}131\cdot 0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}0327\cdot 0{,}4^2}{2}+0{,}0655\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}032\ \text{Дж};$$

при встречном направлении потоков

$$W_м=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}-M i_1 i_2=0{,}00585\ \text{Дж}.$$

§ 2.7. Принцип взаимности взаимной индукции. Проделаем два опыта. В первом из них изменяющийся во времени ток $i_1(t)$ пропустим по первой катушке (контуру) и измерим (подсчитаем) э. д. с. взаимоиндукции, возникающую во второй катушке (контуре), магнитносвязанной с первой:

$$e_{2M}=-M\frac{di_1}{dt}.$$

Во втором опыте тот же ток (той же амплитуды и изменяющийся по тому же закону во времени, что и в первом опыте), назовем его i_2, пропустим по второй катушке и измерим (подсчитаем) э. д. с. взаимоиндукции, возникающую в первой катушке:

$$e_{1M}=-M\frac{di_2}{dt}.$$

По условию опыта, $i_1(t)=i_2(t)$, поэтому $e_{1M}=e_{2M}$, т. е. э. д. с. взаимоиндукции в описанных опытах одинаковы. Это положение называют *принципом взаимности взаимной индукции*.

Так как $M_{12}=M_{21}=M$, то при определении M следует выбирать наиболее простой и удобный путь из двух возможных.

Пусть, например, через равномерно нанесенную на сердечник обмотку проходит произвольно расположенный внутри сердечника провод (рис. 2.7). Этот провод является частью одновиткового контура, полностью не показанного на рисунке. Требуется найти аналитическое выражение для M между обмоткой сердечника и одновитковым контуром. Это можно сделать двумя путями.

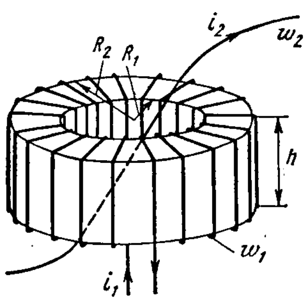


Рис. 2.7

Первый путь: мысленно пропустим по первому контуру (обмотке w_1 сердечника) ток i_1, найдем потокосцепление второго (одновиткового) контура ψ_{12} с потоком первого и определим $M=\psi_{12}/i_1$.

Второй путь: мысленно пропустим по второму (одновитковому) контуру (обмотке $w_2=1$) ток i_2, найдем потокосцепление первого контура ψ_{21} с потоком второго и определим $M=\psi_{21}/i_2$.

В расчетном отношении эти пути не эквивалентны. Первый путь много проще второго. Объясняется это тем, что поток, создаваемый первым контуром, весь замыкается внутри сердечника и полностью сцепляется с одновитковым контуром. Следовательно, потокосцепление ψ_{12} можно легко найти. Определить же поток, создаваемый одновитковым контуром и сцепляющийся со вторым контуром, если провод расположен внутри сердечника произвольно, затруднительно.

Поток сердечника

$$\Phi_1=\frac{i_1\mu_0\mu w_1 h}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R}=\frac{i_1\mu_0\mu w_1 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Потокосцепление $\psi_{12}=w_2\Phi_1=1\cdot\Phi_1=\Phi_1$.

Взаимная индуктивность между обмоткой w_1 и одновитковым контуром

$$M=\frac{\psi_{12}}{i_1}=\frac{\mu_0\mu w_1 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{2.31}$$

Пример 24. Через сердечник примера 18 пропущен одиночный провод. Найти M между одиночным проводом и обмоткой w.

Решение. По формуле (2.31) [ср. с (2.22)], при $w_2=1$

$$M=\frac{1{,}256\cdot10^{-6}\cdot80\cdot1000\cdot2\cdot10^{-2}\cdot0{,}41}{2\pi}=0{,}131\ \text{мГ}.$$

Пример 25. По одиночному проводу примера 24 проходит ток $i_2=100(1-e^{-2t})$. Определить э. д. с., наводимую в обмотке w_1.

Решение.

$$e_{M1}=-M\frac{di_2}{dt}=-0{,}131\cdot10^{-3}\cdot100\cdot2e^{-2t}=-0{,}0262e^{-2t}\ \text{В}.$$

§ 2.8. Коэффициент связи. Под коэффициентом связи k двух магнитносвязанных контуров с индуктивностями L_1 и L_2 и взаимной индуктивностью M понимают отношение M* к $\sqrt{L_1L_2}$:

$$k=M/\sqrt{L_1L_2}. \tag{2.32}$$

* Заметим, что M может быть больше L_1 (или L_2), но не может быть больше и L_1 и L_2.

Докажем, что k не может быть больше единицы. Для этого составим выражение для k^2, и если выяснится, что $k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2} \leqslant 1$, то и $k \leqslant 1$. Воспользовавшись обозначениями § 2.3, запишем

$$k^2 = \frac{MM}{L_1L_2} = \frac{\dfrac{w_2\Phi_{12}}{i_1} \cdot \dfrac{w_1\Phi_{21}}{i_2}}{\dfrac{w_1(\Phi_{12}+\Phi_{11})}{i_1} \cdot \dfrac{w_2(\Phi_{21}+\Phi_{22})}{i_2}} = \frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{(\Phi_{12}+\Phi_{11})(\Phi_{21}+\Phi_{22})} < 1.$$

Коэффициент связи $k^2 = 1$ только в случае, если весь поток, создаваемый первым контуром, сцепляется со вторым.

§ 2.9. Закон электромагнитной инерции. Правило Ленца. В 1883 г. русский академик Э. Х. Ленц установил закон электромагнитной инерции, получивший название закона или правила Ленца. Формулируется он следующим образом: *при всяком изменении магнитного потока, сцепляющегося с каким-либо проводящим контуром, в последнем возникают силы электрического и механического характера, стремящиеся сохранить постоянство магнитного потока.*

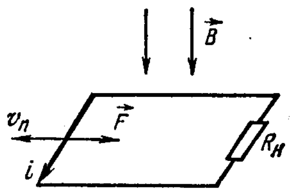


Рис. 2.8

«Сила электрического характера» означает, что при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с замкнутым проводящим контуром, в этом контуре возникает индуктированная э. д. с., которая стремится вызвать в контуре ток, препятствующий изменению потокосцепления контура.

Механическая сила, воздействующая на контур, препятствует изменению линейных размеров контура или повороту контура.

Пример 26. Перпендикулярно равномерному и неизменному во времени магнитному полю (рис. 2.8) индукции $B = 1{,}5$ Т расположен прямой провод длиной $l = 0{,}5$ м. Гибкими проводниками он соединен с нагрузкой $R_н$. Полное сопротивление замкнутого контура $R = 20$ Ом. Рассмотреть, что́ будет происходить при движении провода.

Решение. Если провод неподвижен, то в нем не наведется э. д. с. и на него не действует механическая сила.

Если же провод начнет двигаться, например, влево со скоростью $v_n = 10$ м/с, так что контур будет оставаться замкнутым, то в нем наведется э. д. с. [см. (2.5)]

$$e = Blv_n = 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 7{,}5 \text{ В} \qquad \text{(а)}$$

и по проводу пойдет ток

$$i = e/R = 0{,}375 \text{ А}. \qquad \text{(б)}$$

При движении провода влево поток в контуре от внешнего магнитного поля возрастает. Индуктированный ток (направлен по часовой стрелке) вызывает магнитное поле, направленное встречно внешнему полю, и *препятствует* росту потока контура.

На провод действует механическая сила. Эта сила направлена противоположно скорости v_n и *стремится сохранить* постоянство магнитного потока.

Формула (б) приближенна. Если учесть, что потокосцепление контура создано не только внешним магнитным полем индукции B, но и током i, протекающим по контуру, а также то, что с увеличением длины боковых сторон контура изменяется индуктивность L контура, то, по второму закону Кирхгофа,

$$Blv_n + L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt} + iR = 0. \qquad (в)$$

За положительное направление тока в формуле (в) принято направление против часовой стрелки, противоположное направлению для формулы (б). Формула (б) следует из (в), если второе и третье слагаемые формулы (в) по модулю много меньше первого и четвертого слагаемых.

§ 2.10. Емкость как параметр электрической цепи. Если между двумя проводящими телами *1* и *2*, находящимися в диэлектрике с абсолютной электрической проницаемостью $\varepsilon_а = \varepsilon_0\varepsilon$, где $\varepsilon_0 = 8{,}86 \times \times 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная вакуума; ε — электрическая проницаемость диэлектрика, создана разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, то в пространстве, окружающем эти тела, существует электрическое поле (см. гл. 19). Поле в каждой точке характеризуется векторной величиной — напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и скалярной величиной — потенциалом φ (см. § 19.3).

Размерности: $[E] =$ В/м, $[\varphi] =$ В.

Разность потенциалов между телами равна линейному интегралу от напряженности $\vec{E}$ между ними:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l},$$

где $\vec{dl}$ — элемент пути от тела *1* к телу *2* по диэлектрику.

Вектор $\vec{D} = \varepsilon_а\vec{E}$ называют *электрическим смещением.*

Согласно теореме Гаусса (см. § 19.13), поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность S равен сумме зарядов $\sum q$, окруженных этой поверхностью:

$$\oint \vec{D}\,\vec{dS} = \sum q,$$

где $d\vec{S}$ — элемент поверхности.

На рис. 2.9, *а* изображен цилиндрический конденсатор длиной l. На внутреннем электроде радиусом r_1 находится заряд q, на наружном электроде радиусом r_2 — заряд $-q$. Пространство между электродами заполнено диэлектриком, характеризующимся величиной ε. Напряженность поля E найдем по теореме Гаусса:

$$E = q/(2\pi\varepsilon_а r l).$$

Напряжение между обкладками конденсатора (рис. 2.9, *а*)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 E\,dr = \frac{q}{(2\pi\varepsilon_a l)}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Под *емкостью* C между двумя телами понимают отношение абсолютной величины заряда q на одном из тел к разности потенциалов U между телами, обусловленной зарядом на этих телах:

$$C = q/U.$$

Емкость цилиндрического конденсатора $C = (2\pi\varepsilon_a l)/\ln \frac{r_2}{r_1}$.

Емкость плоского конденсатора рис. 2.9, *б*

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d.$$

Емкость — это параметр электрической цепи, характеризующий в интегральном смысле электрическое поле участка цепи (конденсатора). Она зависит от геометрических размеров и формы электродов, а также

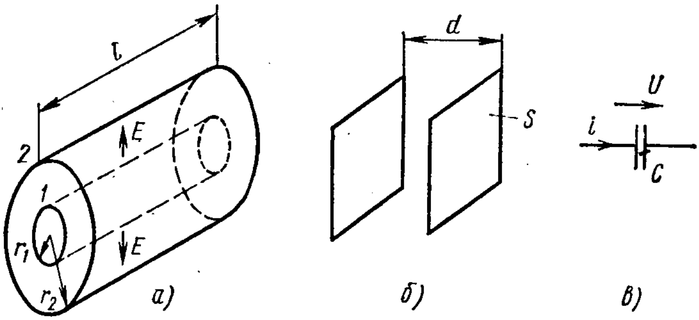


Рис. 2.9

от электрических свойств среды между электродами конденсатора. От величины напряжения U между электродами и величины заряда q емкость не зависит (исключение составляют конденсаторы с сегнетоэлектриком, когда ε зависит от E).

Емкость C измеряется в фарадах или в более мелких единицах — микро-, нано- и пикофарадах:

$$1\ \text{мкФ} = 10^{-6}\ \text{Ф},\quad 1\ \text{нФ} = 10^{-9}\ \text{Ф},\quad 1\ \text{пФ} = 10^{-12}\ \text{Ф}.$$

В электрическом поле конденсатора запасается электрическая энергия

$$W_э = CU^2/2 = q^2/(2C).$$

Ток i, протекающий через конденсатор при его зарядке, определяется скоростью изменения заряда:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{C\,du}{dt}.$$

Если заряд q во времени не изменяется, то ток через конденсатор не протекает.

Положительные направления отсчета для тока i и напряжения на конденсаторе совпадают (рис. 2.9, *в*).

Вопросы для самопроверки

1. Какие Вам известны проявления магнитного поля? 2. Запишите и прокомментируйте формулу для наведенной э. д. с. 3. Что понимают под явлениями само- и взаимоиндукции? 4. Дайте определение L и M. Как определить L и M расчетным и опытным путями? 5. В опыте было получено $L_1 = L_2 = 0{,}1$ Г, $M = 0{,}11$ Г. Можно ли верить этим данным? 6. Какую роль выполняют L и M как элементы схем замещения реальных электрических цепей? 7. Сформулируйте принцип взаимности взаимной индукции. 8. Дайте определение понятию «емкость». Какие функции она выполняет как элемент схемы замещения электрической цепи? 9. Решите задачи 4.7; 4.20.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

§ 3.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины. Синусоидальный ток представляет собой ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону (рис. 3.1):

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi). \tag{3.1}$$

Максимальное значение функции называют *амплитудой*. Амплитуду тока обозначают I_m; *период* T — это время, за которое совершается одно полное колебание.

Частота равна числу колебаний в 1 с;

$$f = 1/T. \tag{3.2}$$

Частоту f измеряют в герцах (Гц) или $с^{-1}$, угловую частоту

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \tag{3.3}$$

— в рад/с или $с^{-1}$.

Аргумент синуса, т. е. $(\omega t + \psi)$, называют *фазой*. Фаза характеризует состояние колебания (числовое значение) в данный момент времени t.

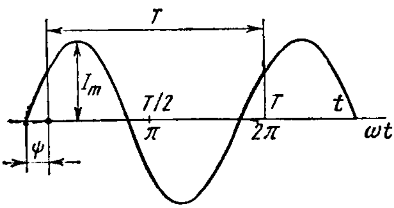


Рис. 3.1

Любая синусоидально изменяющаяся функция определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой и начальной фазой.

В СССР и в Западной Европе наибольшее распространение получили установки синусоидального тока частотой 50 Гц, принятой в энергетике за стандартную. В США стандартной является частота 60 Гц. Диапазон частот практически применяемых синусоидальных токов очень широк: от долей герца, например в геологоразведке, до миллиардов герц в радиотехнике.

Синусоидальные токи и э. д. с. сравнительно низких частот (до нескольких килогерц) получают с помощью синхронных генераторов (их изучают в курсе электрических машин). Синусоидальные токи и э. д. с. высоких частот получают с помощью ламповых или полупроводниковых генераторов (подробно рассматриваемых в курсе радиотехники и менее подробно — в курсе ТОЭ). Принцип получения синусоидальной э. д. с. путем вращения витка с постоянной угловой скоростью в равномерном магнитном поле рассматривается в примере 33 (при $a=0$). Источник синусоидальной э. д. с. и источник синусоидального тока обозначают на электрических схемах так же, как и источники постоянной э. д. с. и тока, но над $\dot{E}$ и $\dot{I}_k$ ставят точки.

§ 3.2. Среднее и действующее значения синусоидально изменяющейся величины. Под *средним значением* синусоидально изменяющейся величины понимают ее среднее значение за полпериода. Так, среднее значение тока

$$I_{\text{ср}}=\frac{1}{T/2}\int\limits_0^{T/2} I_m \sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}I_m, \tag{3.4}$$

т. е. среднее значение синусоидального тока составляет $2/\pi=0{,}638$ от амплитудного. Аналогично, $E_{\text{ср}}=2E_m/\pi$; $U_{\text{ср}}=2U_m/\pi$.

Широко применяют понятие действующего значения синусоидально изменяющейся величины (его называют также эффективным или среднеквадратичным). Действующее значение тока

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T i^2\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T I_m^2\sin^2\omega t\,dt}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0{,}707I_m. \tag{3.5}$$

Следовательно, действующее значение синусоидального тока равно 0,707 от амплитуды. Аналогично,

$$E=E_m/\sqrt{2} \text{ и } U=U_m/\sqrt{2}.$$

Можно сопоставить тепловое действие синусоидального тока с тепловым действием постоянного тока $I_{\text{пост}}$, текущего то же время по тому же сопротивлению.

Количество теплоты, выделенное за один период синусоидальным током,

$$\int\limits_0^T Ri^2\,dt=RI_m^2\frac{T}{2}.$$

Выделенная за то же время постоянным током теплота равна $RI_{\text{пост}}^2T$. Приравняем их:

$$RI_m^2\frac{T}{2}=RI_{\text{пост}}^2T \quad \text{или} \quad I_{\text{пост}}=I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, *действующее значение* синусоидального тока I численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.

Большинство измерительных приборов показывает действующее значение измеряемой величины *.

§ 3.3. **Коэффициент амплитуды и коэффициент формы.** Коэффициент амплитуды $k_а$ — это отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к ее действующему значению. Так, для синусоидального тока

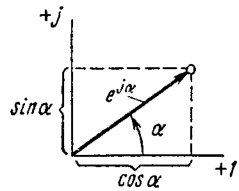


Рис. 3.2

$$k_а = I_m/I = \sqrt{2}. \qquad (3.6)$$

Под коэффициентом формы $k_ф$ понимают отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к ее среднему за полпериода значению. Для синусоидального тока

$$k_ф = \frac{I}{I_{ср}} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{2I_m/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11\ ^{**}. \qquad (3.7)$$

Иногда пользуются понятием коэффициента формы несинусоидальной функции, определенного следующим образом:

$$k'_ф = \frac{I}{I_{\substack{ср \\ \text{по модулю}}}},$$

где $I_{\substack{ср \\ \text{по модулю}}}$ — среднее по модулю значение тока.

§ 3.4. **Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости. Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения.** На рис. 3.2 дана комплексная плоскость, на которой можно изобразить комплексные числа. Комплексное число имеет действительную (вещественную) и мнимую части. По оси абсцисс комплексной плоскости откладывают действительную часть комплексного числа, а по оси ординат — мнимую часть. На оси действительных значений ставим $+1$, а на оси мнимых значений $+j$ $(j = \sqrt{-1})$.

Из курса математики известна формула Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha. \qquad (3.8)$$

Комплексное число $e^{j\alpha}$ изображают на комплексной плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол α с осью вещественных значений (осью $+1$). Угол α отсчитываем против часовой стрелки от оси $+1$. Модуль функции

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

---

* Действующее значение измеряют приборами электромагнитной, электродинамической и тепловой систем. Принцип действия измерительных приборов различных систем изучают в курсе электрических измерений.

** Для несинусоидальных периодических токов $k_а \neq \sqrt{2}$ и $k_ф \neq 1{,}11$. Это отклонение косвенно свидетельствует о том, насколько несинусоидальный ток отличается от синусоидального.

Проекция функции $e^{j\alpha}$ на ось $+1$ равна $\cos\alpha$, а на ось $+j$ равна $\sin\alpha$. Если вместо функции $e^{j\alpha}$ взять функцию $I_m e^{j\alpha}$, то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos\alpha + jI_m \sin\alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция $e^{j\alpha}$, изобразится под углом α к оси $+1$, но величина вектора будет в I_m раз больше.

Угол α в формуле (3.8) может быть любым. Положим, что $\alpha = \omega t + \psi$, т. е. угол α изменяется прямо пропорционально времени. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t+\psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + jI_m \sin(\omega t + \psi). \qquad (3.9)$$

Слагаемое $I_m \cos(\omega t + \psi)$ представляет собой действительную часть (Re) выражения $I_m e^{(j\omega t+\psi)}$:

$$I_m \cos(\omega t + \psi) = \mathrm{Re}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)}, \qquad (3.10а)$$

а функция $I_m \sin(\omega t + \psi)$ есть коэффициент при мнимой части (Im) выражения $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \mathrm{Im}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)}. \qquad (3.10б)$$

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток i [ср. (3.1) и (3.10б)] можно представить как $\mathrm{Im}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)}$, или, что то же самое, как проекцию вращающегося вектора $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ на ось $+j$ (рис. 3.3).

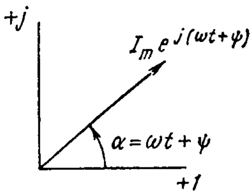


Рис. 3.3

Исторически сложилось так, что в радиотехнической литературе за основу обычно принимают не синусоиду, а косинусоиду и потому пользуются формулой (3.10а).

С целью единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени $\omega t = 0$. При этом вектор $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ равен

$$I_m e^{j(\omega t+\psi)} = I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m, \qquad (3.11)$$

где $\dot{I}_m$ — комплексная величина, модуль которой равен I_m, а угол, под которым вектор $\dot{I}_m$ проведен к оси $+1$ на комплексной плоскости, равен начальной фазе ψ.

Величину $\dot{I}_m$ называют *комплексной амплитудой* тока i. Комплексная амплитуда изображает ток i на комплексной плоскости для момента времени $\omega t = 0$.

Рассмотрим два числовых примера на переход от мгновенного значения тока к комплексной амплитуде и от комплексной амплитуды к мгновенному значению.

Пример 27. Ток $i = 8\sin(\omega t + 20°)$ А. Записать выражение для комплексной амплитуды этого тока.

Решение. В данном случае $I_m = 8$ А, $\psi = 20°$. Следовательно, $\dot{I}_m = 8\, e^{j20°}$ А.

Пример 28. Комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = 25\, e^{-j30°}$ А. Записать выражение для мгновенного значения этого тока.

Решение. Для перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению надо умножить $\dot{I}_m$ на $e^{j\omega t}$ и взять коэффициент при мнимой части от полученного произведения [см. формулу (3.10б)]:

$$i = \operatorname{Im} 25e^{-j30°}e^{j\omega t} = \operatorname{Im} 25e^{j(\omega t - 30°)} = 25 \sin(\omega t - 30°).$$

Под *комплексом действующего значения тока*, или под *комплексом тока* (комплексным током), $\dot{I}$ понимают частное от деления комплексной амплитуды на $\sqrt{2}$:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = Ie^{j\psi}. \qquad (3.12)$$

Пример 29. Записать выражение комплекса действующего значения тока для примера 27.

Решение.

$$\dot{I} = 8e^{j20°}/\sqrt{2} = 5{,}67e^{j20°} \text{ А}.$$

§ 3.5. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени с помощью комплексной плоскости. Векторная диаграмма. Положим, что необходимо сложить два тока (i_1 и i_2) одинаковой частоты. Сумма их дает некоторый ток с той же частотой:

$$i = i_1 + i_2;$$

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \; i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

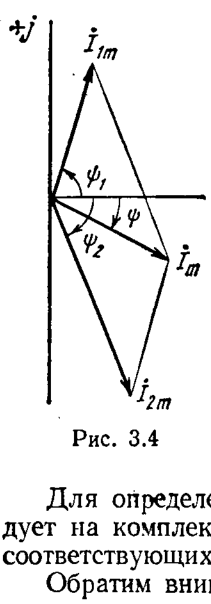


Рис. 3.4

Требуется найти амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока i. С этой целью ток i_1 изобразим на комплексной плоскости (рис. 3.4) вектором $\dot{I}_{1m} = I_{1m}e^{j\psi_1}$, а ток i_2 — вектором $\dot{I}_{2m} = I_{2m}e^{j\psi_2}$. Геометрическая сумма векторов $\dot{I}_{1m}$ и $\dot{I}_{2m}$ даст комплексную амплитуду суммарного тока $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$. Амплитуда тока I_m определяется длиной суммарного вектора, а начальная фаза ψ — углом, образованным этим вектором и осью $+1$.

Для определения разности двух токов (э. д. с., напряжений) следует на комплексной плоскости произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов.

Обратим внимание на то, что если бы векторы $\dot{I}_{1m}$, $\dot{I}_{2m}$ и $\dot{I}_m$ стали вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью ω, то взаимное расположение векторов по отношению друг к другу осталось бы без изменений.

Векторной диаграммой называют совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающих синусоидально изменяющиеся функции времени одной и той же частоты и построенных с соблюдением правильной ориентации их относительно друг друга по фазе. Пример векторной диаграммы дан на рис. 3.4.

§ 3.6. **Мгновенная мощность.** Протекание синусоидальных токов по участкам электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источников. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Под мгновенным значением мощности, или под *мгновенной мощностью*, понимают произведение мгновенного значения напряжения u на участке цепи на мгновенное значение тока i, протекающего по этому участку:

$$p = ui, \tag{3.13}$$

где p — функция времени.

Перед тем как приступить к изучению основ расчета сложных цепей синусоидального тока, рассмотрим соотношения между токами и напряжениями в простейших цепях, векторные диаграммы для них и кривые мгновенных значений различных величин.

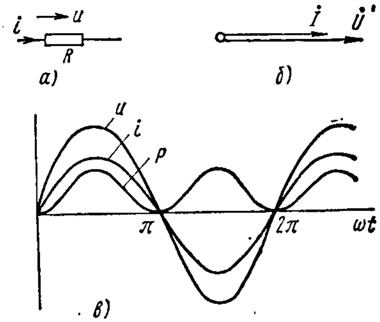


Рис. 3.5

Составными элементами цепей синусоидального тока являются активное сопротивление R, индуктивность L и емкость C.

Термин «сопротивление» для цепей синусоидального тока в отличие от цепей постоянного тока недостаточно полный, поскольку сопротивление переменному току оказывают не только те элементы цепи, в которых выделяется энергия в виде теплоты (их называют *активными сопротивлениями*), но и те элементы цепи, в которых энергия в виде теплоты не выделяется, но периодически запасается в электрическом или магнитном полях. Такие элементы цепи называют реактивными, а их сопротивления переменному току — *реактивными сопротивлениями*. Реактивными сопротивлениями обладают индуктивности и емкости (подробнее см. § 3.8 и 3.9).

§ 3.7. **Синусоидальный ток в активном сопротивлении.** На рис. 3.5, *а* изображено активное сопротивление R, по которому течет ток $i = I_m \sin \omega t$. По закону Ома, напряжение

$$u = iR = RI_m \sin \omega t,$$

или

$$u = U_m \sin \omega t, \tag{3.14}$$

где $U_m = RI_m$.

Комплекс тока $\dot{I}$ и совпадающий с ним по фазе комплекс напряжения $\dot{U}$ показаны на векторной диаграмме рис. 3.5, *б*.

На рис. 3.5, *в* даны кривые мгновенных значений тока i, напряжения u и мощности

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2}(1 - \cos 2\omega t).$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую $U_m I_m/2$ и составляющую $\frac{U_m I_m}{2}\cos 2\omega t$, изменяющуюся с частотой 2ω. Потребляемая от источника питания за время dt энергия равна $p\,dt$.

§ 3.8. Индуктивность в цепи синусоидального тока. Практически любая обмотка (катушка) обладает некоторой индуктивностью L и активным сопротивлением R. На схеме катушку можно представить в виде последовательно соединенных индуктивности L и активного сопротивления R.

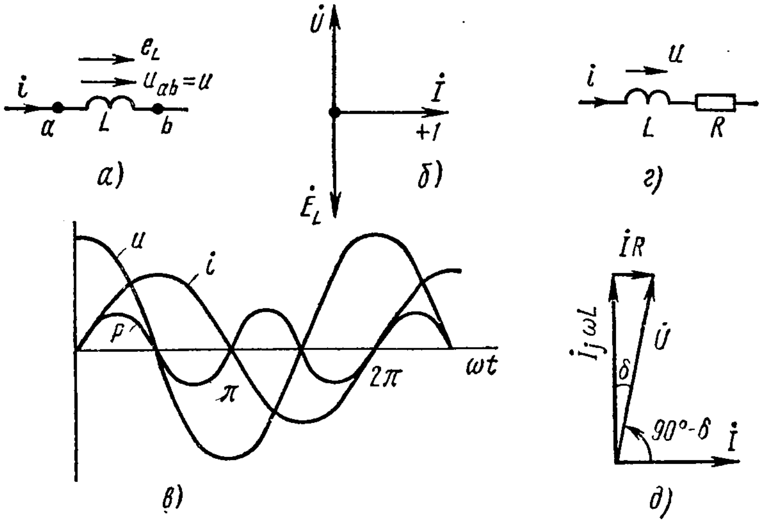


Рис. 3.6

Выделим из схемы одну индуктивность L (без активного сопротивления) — рис. 3.6, *а*. Если через L течет ток $i = I_m \sin\omega t$, то в катушке наводится э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin(\omega t - 90°).$$

Положительное направление отсчета для э. д. с. e_L на рис. 3.6, *а* обозначено стрелкой, совпадающей с положительным направлением отсчета тока i.

Найдем разность потенциалов между точками a и b.

При перемещении от точки b к точке a идем навстречу э. д. с. e_L, поэтому $\varphi_a = \varphi_b - e_L$. Следовательно, $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -e_L = L\frac{di}{dt}$.*

Положительное направление напряжения u_{ab} совпадает с положительным направлением тока.

* Из формулы $u_L = L\frac{di}{dt}$ следует, что $i = \Gamma\int u_L\,dt$, где $\Gamma = 1/L$ — инверсная индуктивность.

В дальнейшем индексы a и b у напряжения на индуктивности (падения напряжения на индуктивности) ставить не будем:

$$u_{ab} = u = -e_L. \tag{3.15}$$

Следовательно,

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) = \dot{U}_m \sin(\omega t + 90°); \tag{3.16}$$

$$U_m = \omega L I_m.$$

Произведение ωL обозначают X_L и называют *индуктивным сопротивлением*:

$$X_L = \omega L; \tag{3.17}$$

размерность его $[X_L] = [\omega][L] = \text{с}^{-1} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Ом}$.

Таким образом, индуктивность оказывает переменному току сопротивление, модуль которого $X_L = \omega L$, прямо пропорциональное частоте. Кроме того, напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90° [см. (3.16)] — на рис. 3.6, *б* вектор напряжения $\dot{U}$ опережает вектор тока $\dot{I}$ на 90°. Комплекс э. д. с. самоиндукции $\dot{E}_L$ находится в противофазе с комплексом напряжения $\dot{U}$.

Графики мгновенных значений i, u, p изображены на рис. 3.6, *в*. Мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \cos \omega t I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \tag{3.18}$$

проходит через нулевое значение, когда через нуль проходит либо u, либо i. За первую четверть периода, когда u и i положительны, p также положительна. Площадь, ограниченная кривой p и осью абсцисс за это время, представляет собой энергию, которая взята от источника питания на создание энергии магнитного поля в индуктивности. Во вторую четверть периода, когда ток в цепи уменьшается от максимума до нуля, энергия магнитного поля отдается обратно источнику питания, при этом мгновенная мощность отрицательна. За третью четверть периода у источника снова забирается энергия, за четвертую отдается и т. д., т. е. энергия периодически то забирается индуктивностью от источника, то отдается ему обратно.

Реальная индуктивная катушка кроме индуктивности L обладает и активным сопротивлением R (рис. 3.6, *г*). Поэтому падение напряжения на реальной индуктивной катушке равно сумме напряжений на L и на R (рис. 3.6, *д*). Как видно из этого рисунка, угол между напряжением $\dot{U}$ на катушке и током $\dot{I}$ равен $90 - \delta$, причем $\operatorname{tg}\delta = R/(\omega L) = 1/Q_L$, где Q_L — *добротность реальной индуктивной катушки*. Чем больше Q_L, тем меньше угол δ.

§ 3.9. Конденсатор в цепи синусоидального тока. Если приложенное к конденсатору напряжение не меняется во времени, то заряд $q = Cu$ на одной его обкладке и заряд $-q = -Cu$ на другой (C — емкость конденсатора) неизменны и ток через конденсатор не проходит ($i = dq/dt = 0$). Если же напряжение на конденсаторе меняется во времени, например по синусоидальному закону (рис. 3.7, *а*):

$$u = U_m \sin \omega t, \tag{3.19}$$

то по синусоидальному закону будет меняться и заряд q конденсатора: $q=Cu=CU_m \sin \omega t$ — и конденсатор будет периодически перезаряжаться. Периодическая перезарядка конденсатора сопровождается протеканием через него зарядного тока

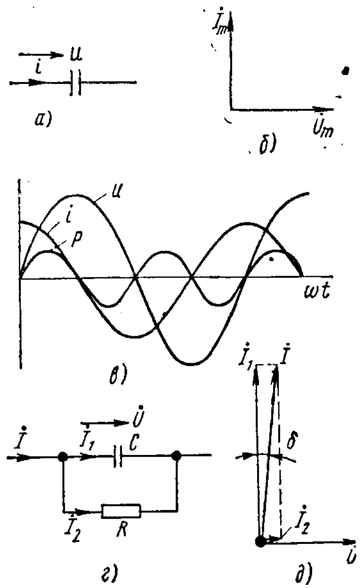


Рис. 3.7

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(CU_m \sin \omega t)=$$
$$=\omega CU_m \cos \omega t=\omega CU_m \sin(\omega t+90°). \quad (3.19')$$

Положительное направление тока через конденсатор на рис. 3.7, *а* совпадает с положительным направлением напряжения. Из сопоставления (3.19) и (3.19′) видно, что ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на конденсаторе на 90°. Поэтому на векторной диаграмме рис. 3.7, *б* вектор тока $\dot{I}_m$ опережает вектор напряжения $\dot{U}_m$ на 90°. Амплитуда тока I_m равна амплитуде напряжения U_m, деленной на *емкостное сопротивление*:

$$X_C=1/\omega C. \quad (3.20)$$

Действительно,

$$I_m=\omega CU_m=\frac{U_m}{1/(\omega C)}=\frac{U_m}{X_C}. \quad (3.21)$$

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте и измеряется в омах. Графики мгновенных значений u, i, p изображены на рис. 3.7, *в*. Мгновенная мощность

$$p=ui=\frac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t. \quad (3.22)$$

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника питания энергию, которая идет на создание электрического поля в конденсаторе. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля, и запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику (мгновенная мощность отрицательна). За третью четверть периода энергия снова запасается, за четвертую отдается и т. д.

Если проинтегрировать по времени обе части равенства

$$i=C\frac{du}{dt}, \quad (3.23)$$

то получим

$$u=\frac{1}{C}\int i\,dt. \quad (3.24)$$

Равенство (3.24) позволяет определить напряжение на конденсаторе через ток по конденсатору.

При изложении вопроса о прохождении синусоидального тока через конденсатор предполагалось, что диэлектрик, разделяющий пластины конденсатора, является идеальным и в нем нет потерь энергии. Однако при приложении синусоидального напряжения к пластинам конденсатора, разделенным твердым или жидким диэлектриком, в последнем всегда имеются некоторые потери энергии, обусловленные вязким трением при повороте дипольных молекул, а также несовершенством диэлектрика (наличием у него небольшой проводимости). Эти потери относительно малы, и ими часто можно пренебречь. Если требуется учесть их в расчете, то конденсатор заменяют схемой замещения (рис. 3.7, *г*). В этой схеме параллельно емкости C присоединено активное сопротивление R, потери энергии в котором имитируют потери энергии в реальном диэлектрике.

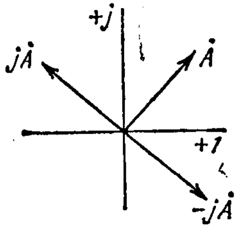


Рис. 3.8

Ток $\dot{I}$ через конденсатор равен геометрической сумме двух токов: тока $\dot{I}_1$ через емкость, на 90° опережающего напряжение $\dot{U}$ на конденсаторе (рис. 3.7, *д*), и относительно малого по величине тока $\dot{I}_2$ через активное сопротивление R, совпадающего по фазе с напряжением $\dot{U}$.

Таким образом, ток через конденсатор с неидеальным диэлектриком опережает напряжение на угол, немного меньший 90°. Угол δ, который образует ток $\dot{I}$ с током $\dot{I}_1$, принято называть *углом потерь*. Он зависит от сорта диэлектрика и частоты и равняется в лучшем случае нескольким секундам, в худшем — нескольким градусам. Величина $\operatorname{tg}\delta$ дается в таблицах (см. ч. 3), характеризующих свойства различных твердых и жидких диэлектриков. Величину $Q_C = (\operatorname{tg}\delta)^{-1}$ называют *добротностью конденсатора*.

§ 3.10. Умножение вектора на j и на $-j$. Пусть есть некоторый вектор $\dot{A} = Ae^{j\varphi_a}$ (рис. 3.8). Умножение его на j дает вектор, по модулю равный A, но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки) по отношению к исходному вектору $\dot{A}$ на 90°. Умножение $\dot{A}$ на $-j$ поворачивает вектор $\dot{A}$ на 90° в сторону отставания (по часовой стрелке) также без изменения его модуля.

Чтобы убедиться в этом, представим векторы j и $-j$ в показательной форме:

$$j = 1 \cdot e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}; \tag{3.25}$$

$$-j = 1 \cdot e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}. \tag{3.26}$$

Тогда

$$\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{j90^\circ} = Ae^{j(\varphi_a + 90^\circ)}; \tag{3.27}$$

$$-\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{-j90^\circ} = Ae^{j(\varphi_a - 90^\circ)}. \tag{3.28}$$

Из (3.27) следует, что вектор $j\dot{A}$, по модулю равный A, составляет с осью $+1$ комплексной плоскости угол $\varphi_a + 90^\circ$, т. е. повернут против часовой стрелки на 90° по отношению к вектору $\dot{A}$.

Согласно (3.28), умножение вектора $\dot{A}$ на $-j$ дает вектор, по модулю равный A, но повернутый по отношению к нему на 90° по часовой стрелке.

§ 3.11. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока. Очень широкое распространение на практике получил символический, или комплексный, метод расчета цепей синусоидального тока.

Сущность символического метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями [см., например, (3.29)], к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и э. д. с. Этот переход основан на том, что в уравнении, составленном по законам Кирхгофа для установившегося процесса, мгновенное значение тока i заменяют комплексной амплитудой тока $\dot{I}_m$; мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении $R = Ri$ — комплексом $R\dot{I}_m$, по фазе совпадающим с током $\dot{I}_m$; мгновенное значение напряжения на индуктивности $u_L = L\frac{di}{dt}$ — комплексом $\dot{I}_m j\omega L$, опережающим ток на 90°; мгновенное значение напряжения на емкости $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$ — комплексом $\dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right)$, отстающим от тока на 90°; мгновенное значение э. д. с. e — комплексом $\dot{E}_m$. Справедливость замены $u_L = L\frac{di}{dt}$ на $\dot{I}_m j\omega L$ следует из § 3.7 и 3.8.

В § 3.8 было показано, что амплитуда напряжения на индуктивности равна произведению амплитуды тока на $X_L = \omega L$. Множитель j свидетельствует о том, что вектор напряжения на индуктивности опережает вектор тока на 90°.

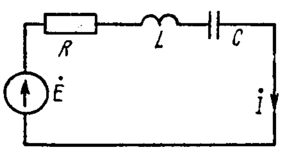


Рис. 3.9

Аналогично из § 3.9 следует, что амплитуда напряжения на емкости равна амплитуде тока, умноженной на $X_C = 1/\omega C$. Отставание напряжения на емкости от протекающего по ней тока на 90° объясняет наличие множителя $-j$.

Например, для схемы рис. 3.9 уравнение для мгновенных значений можно записать так:

$$u_R + u_L + u_C = e,$$

или

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e. \tag{3.29}$$

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right) = \dot{E}_m.$$

Вынесем $\dot{I}_m$ за скобку:

$$\dot{I}_m\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) = \dot{E}_m. \tag{3.30}$$

Следовательно, для схемы рис. 3.9

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}. \tag{3.31}$$

Это уравнение позволяет найти комплексную амплитуду тока $\dot{I}_m$ через комплексную амплитуду э. д. с. $\dot{E}_m$ и сопротивления цепи R, ωL и $1/\omega C$.

Метод называют *символическим* потому, что токи и напряжения заменяют их комплексными изображениями или символами. Так, $R\dot{I}_m$ — это изображение или символ падения напряжения iR; $j\omega L\dot{I}_m$ — изображение или символ падения напряжения на индуктивности $u_L = L\frac{di}{dt}$; $-\frac{j}{\omega C}\dot{I}_m$ — изображение падения напряжения на конденсаторе $\frac{1}{C}\int i\,dt$.

§ 3.12. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока. Множитель $R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$ в уравнении (3.30) представляет собой комплекс, имеет размерность сопротивления и обозначается через Z. Его называют *комплексным сопротивлением*:

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \tag{3.32}$$

Как и всякий комплекс, Z можно записать в показательной форме. Модуль комплексного сопротивления принято обозначать через z. Точку над Z не ставят, потому что принято ставить ее только над такими комплексными величинами, которые отображают синусоидальные функции времени.

Уравнение (3.30) можно записать так: $\dot{I}_m Z = \dot{E}_m$. Разделим обе его части на $\sqrt{2}$ и перейдем от комплексных амплитуд $\dot{I}_m$ и $\dot{E}_m$ к комплексам действующих значений $\dot{I}$ и $\dot{E}$:

$$\dot{I} = \dot{E}/Z. \tag{3.33}$$

Уравнение (3.33) представляет собой *закон Ома для цепи синусоидального тока.*

В общем случае Z имеет некоторую действительную часть и некоторую мнимую часть jX:

$$Z = R + jX, \tag{3.34}$$

где R — активное сопротивление; X — реактивное сопротивление.

Для схемы рис. 3.9 реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

§ 3.13. Комплексная проводимость. Под комплексной проводимостью Y понимают величину, обратную комплексному сопротивлению Z:

$$Y = 1/Z = g - jb = ye^{-j\varphi}. \tag{3.35}$$

Измеряют комплексную проводимость в Ом^{-1} или сименсах (См). Действительную часть ее обозначают через g, мнимую — через b. Так как

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb,$$

то

$$g=\frac{R}{R^2+X^2};\quad b=\frac{X}{R^2+X^2};\quad y=\sqrt{g^2+b^2}. \tag{3.36}$$

Если X положительно, то и b положительно, при X отрицательном b также отрицательно.

При использовании комплексной проводимости закон Ома (3.33) записывают так:

$$\dot{I}=\dot{U}Y, \tag{3.33'}$$

или

$$\dot{I}=\dot{U}g-j\dot{U}b=\dot{I}_a+\dot{I}_r,$$

где $\dot{I}_a$ — активная составляющая тока; $\dot{I}_r$ — реактивная составляющая тока; $\dot{U}$ — напряжение на участке цепи, сопротивление которого равно Z.

§ 3.14. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей. Из (3.34) следует, что модуль комплексного сопротивления

$$z=\sqrt{R^2+X^2}. \tag{3.37}$$

Следовательно, z можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника (рис. 3.10) — треугольника сопротивлений, один катет которого равен R, другой X. При этом

$$\operatorname{tg}\varphi=X/R. \tag{3.38}$$

Аналогичным образом модуль комплексной проводимости в соответствии с (3.36) $y=\sqrt{g^2+b^2}$. Следовательно, y есть гипотенуза прямоугольного треугольника (рис. 3.11), катетами которого являются активная g и реактивная b проводимости:

$$\operatorname{tg}\varphi=b/g. \tag{3.39}$$

Треугольник сопротивлений дает графическую интерпретацию связи между модулем полного сопротивления z и активным и реактивным сопротивлениями цепи; треугольник проводимостей — интерпретацию связи между модулем полной проводимости y и ее активной и реактивной составляющими.

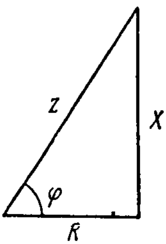


Рис. 3.10

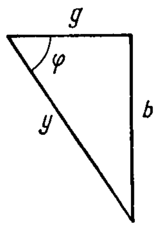


Рис. 3.11

§ 3.15. Применение логарифмической линейки для перехода от алгебраической формы записи комплекса к показательной и для обратного перехода. При расчете цепей переменного тока приходится иметь дело с комплексными числами: сопротивление участка цепи или цепи в целом — это комплекс; проводимость — комплекс; ток, напряжение, э. д. с. — комплексы. Для нахождения тока по закону Ома нужно комплекс э. д. с. разделить на комплекс сопротивления.

Из курса математики известно, что комплексное число можно представить в трех формах записи: алгебраической $a+jb$, показательной $ce^{j\varphi}$ и тригонометрической $c\cos\varphi+jc\sin\varphi$.

Сложение двух и большего числа комплексов удобнее производить, пользуясь алгебраической формой записи. При этом порознь складываются их действительные и мнимые части:

$$(a_1+jb_1)+(a_2+jb_2)+(a_3-jb_3)=(a_1+a_2+a_3)+j(b_1+b_2-b_3).$$

Деление и умножение комплексных чисел целесообразно производить, пользуясь показательной формой записи. Пусть, например, нужно разделить комплекс $c_1e^{j\varphi_1}$ на комплекс $c_2e^{j\varphi_2}$. В результате деления будет получен комплекс

$$c_3e^{j\varphi_3}=\frac{c_1e^{j\varphi_1}}{c_2e^{j\varphi_2}}=\frac{c_1}{c_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Модуль результирующего комплекса c_3 равен частному c_1/c_2, а аргумент $\varphi_3=\varphi_1-\varphi_2$.

При умножении двух комплексов $c_1e^{j\varphi_1}$ и $c_2e^{j\varphi_2}$ результирующий комплекс

$$c_4e^{j\varphi_4}=c_1e^{j\varphi_1}c_2e^{j\varphi_2}=c_1c_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

При расчетах электрических цепей часто возникает необходимость в переходе от алгебраической формы записи комплекса к показательной или в обратном переходе.

Удобнее это сделать с помощью логарифмической линейки.

Пусть задано комплексное число $a+jb$. Из предыдущего (см. § 3.11 и 3.12) ясно, что a и b есть катеты прямоугольного треугольника, а его гипотенуза $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Частное от деления меньшего катета на больший катет дает тангенс меньшего острого угла прямоугольного треугольника, а деление меньшего катета на синус меньшего угла дает гипотенузу треугольника или модуль комплекса. Это и положено в основу определения модуля и аргумента комплекса по его алгебраической форме $a+jb$ с помощью логарифмической линейки. Движок линейки поворачиваем обратной стороной так, чтобы на лицевой части линейки находилась сторона движка, на которой написано «синус» и «тангенс».

Последовательность операций нахождения аргумента и модуля такая:

1) значение меньшего катета откладываем по основной нижней шкале линейки и против него ставим риску визира;

2) значение большего катета откладываем также по основной шкале и против него ставим конец движка; так производится деление меньшего катета на бо́льший;

3) по шкале тангенсов против риски визира отсчитываем значение наименьшего угла прямоугольного треугольника;

4) не сдвигая визира, перемещаем движок так, чтобы против риски визира пришелся только что найденный угол на шкале «синус»; так осуществляется деление меньшего катета на синус меньшего угла;

5) модуль комплекса (гипотенуза прямоугольного треугольника) отсчитывается против конца шкалы движка по основной нижней шкале линейки.

Переход от показательной формы к алгебраической совершается в обратной последовательности. Чтобы не совершить ошибку при записи показательной формы комплекса, рекомендуется сначала качественно изобразить заданный в алгебраической форме комплекс на комплексной плоскости, что позволит правильно выразить угол между осью $+1$ и вектором через угол, найденный по линейке. Углы, откладываемые против часовой стрелки от оси $+1$, считаются положительными, по часовой стрелке — отрицательными.

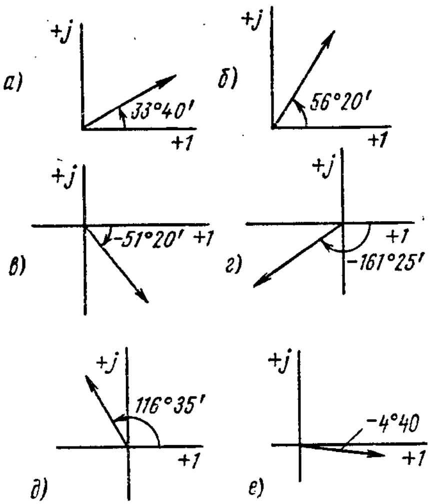


Рис. 3.12

Пример 30. Перевести в показательную форму следующие комплексы: а) $3+2j$; б) $2+3j$; в) $4-5j$; г) $-6-2j$; д) $-0{,}2+$ $+0{,}4j$; е) $10-j0{,}8$.

Решение. а) Ставим визир против цифры 2 на нижней шкале линейки и конец движка против цифры 3. По шкале тангенса находим угол 33°40′. Передвигаем движок так, чтобы против риски визира на шкале синусов пришелся угол 33°40′. Отсчет по нижней шкале против конца шкалы движка дает модуль 3,6. Вектор $3+2j$ качественно изображен на рис. 3.12, *а*. Из рисунка видно, что угол между осью $+1$ и вектором равен 33°40′. Поэтому $3+2j=3{,}6e^{j33°40'}$.

б) По линейке определим угол 33°40′ и модуль 3,6. Из диаграммы рис. 3.12, *б* видно, что угол между осью $+1$ и вектором равен $90°-33°40'=56°20'$. Следовательно, $2+3j=3{,}6e^{j56°20'}$.

в) По линейке находим угол 38°40′ и модуль 6,4. Из диаграммы рис. 3.12, *в* видно, что вектор находится в четвертом квадранте. Угол между осью $+1$ и вектором равен $-51°20'$. Таким образом, $4-5j=$ $=6{,}4e^{-j51°20'}$.

г) По линейке определим угол 18°35′ и модуль 6.32. Из диаграммы рис. 3.12, *г* видно, что угол между осью $+1$ и вектором может быть выражен двояко: либо как $-(180°-18°35')=-161°25'$, либо как $+(180°+18°35')=198°35'$. Поэтому $-6-2j=6{,}32e^{-j161°25'}=$ $=6{,}32e^{j198°35'}$.

д) По линейке находим угол 26°35′ и модуль 0,448. Вектор находится во втором квадранте (рис. 3.12, *д*). Следовательно, $-0{,}2+j0{,}4=0{,}448e^{j116°35'}$.

е) Этот случай принципиально отличается от рассмотренных тем, что составляющие комплекса (катеты прямоугольного треугольника) по абсолютной величине различаются более чем на порядок. Причем гипотенуза прямоугольного треугольника практически равна бо́льшему катету, а угол определяется по *средней* шкале движка. По линейке определим угол 4°40′, который находится в четвертом квадранте (рис. 3.12, *е*). Поэтому $10-j0{,}8 \approx 10e^{-j4°40'}$.

§ 3.16. Законы Кирхгофа в символической форме записи. По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю:

$$\sum i_k = 0. \tag{3.40'}$$

Подставив вместо i_k в (3.40′) $\dot{I}_k e^{j\omega t}$ и вынеся $e^{j\omega t}$ за скобку, получим $e^{j\omega t}\sum \dot{I}_k = 0$. Так как $e^{j\omega t}$ не равно нулю при любом t, то

$$\sum \dot{I}_k = 0. \tag{3.40}$$

Уравнение (3.40) представляет собой первый закон Кирхгофа в символической форме записи.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи синусоидального тока можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений токов, напряжений и э. д. с.

Пусть замкнутый контур содержит n ветвей и каждая k-ветвь в общем случае включает в себя э. д. с. e_k, активное сопротивление R_k, индуктивность L_k и емкость C_k, по которым протекает ток i_k. Тогда по второму закону Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^{n}\left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,dt\right) = \sum_{k=1}^{n} e_k. \tag{3.41'}$$

Но каждое слагаемое левой части уравнения в соответствии с § 3.12 можно заменить на $\dot{I}_k Z_k$, а каждое слагаемое правой части — на $\dot{E}_k$. Поэтому уравнение (3.41′) переходит в

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k. \tag{3.41}$$

Уравнение (3.41) представляет собой второй закон Кирхгофа в символической форме записи.

§ 3.17. Применение к расчету цепей синусоидального тока методов, рассмотренных в главе «Электрические цепи постоянного тока». Для анализа и расчета электрических цепей постоянного тока разработан ряд методов и приемов, облегчающих решение по сравнению с решением системы уравнений при непосредственном использовании законов Кирхгофа. Из гл. 1 известно, что к числу таких методов относятся метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора и т. д. Известно также, что окончательные расчетные формулы этих методов получают в результате выводов, в основу которых положены первый и второй законы Кирхгофа.

Поскольку первый и второй законы Кирхгофа справедливы и для цепей синусоидального тока, то можно было бы записать уравнения для мгновенных значений величин цепей синусоидального тока, перейти от них к уравнениям в комплексах и затем повторить вывод всех формул гл. 1 для цепей синусоидального тока. Понятно, что проделывать выводы заново нет необходимости.

В том случае, когда отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока не связаны между собой магнитно, все расчетные формулы гл. 1 пригодны и для расчета цепей синусоидального тока, если в этих формулах вместо постоянного тока I подставить комплекс тока $\dot{I}$, вместо проводимости g — комплексную проводимость Y, вместо сопротивления R — комплексное сопротивление Z и вместо постоянной э. д. с. E — комплексную э. д. с. $\dot{E}$.

Если же отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока связаны друг с другом магнитно (это имеет место при наличии взаимоиндукции), то падение напряжения на каком-либо участке цепи зависит *не только* от тока данной ветви, но и от токов тех ветвей, с которыми данная ветвь связана магнитно. Расчет электрических цепей синусоидального тока при наличии в них магнитносвязанных ветвей приобретает ряд *особенностей*, которые не могут быть учтены, если в формулах гл. 1 непосредственно заменить E на $\dot{E}$, R на Z и g на Y. (Особенности расчета магнитносвязанных цепей рассмотрены в § 3.34.)

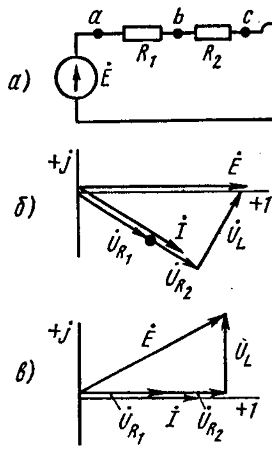


Рис. 3.13

§ 3.18. Применение векторных диаграмм при расчете электрических цепей синусоидального тока. Токи и напряжения на различных участках электрической цепи синусоидального тока, как правило, по фазе не совпадают. Наглядное представление о фазовом расположении различных векторов дает векторная диаграмма токов и напряжений. Аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм, чтобы иметь возможность качественно контролировать эти расчеты.

Качественный контроль заключается в сравнении направлений различных векторов на комплексной плоскости, которые получают при аналитическом расчете, с направлением этих векторов, исходя из физических соображений.

Например, на векторной диаграмме напряжение на индуктивности $\dot{U}_L$ должно опережать протекающий через нее ток на 90°, а напряжение на емкости $\dot{U}_C$ — отставать от протекающего через нее тока на 90°.

Если аналитический расчет дает результаты, не совпадающие с такими очевидными положениями, то, следовательно, в него вкралась ошибка. Кроме того, векторную диаграмму часто используют и как средство расчета, например в методе пропорциональных величин.

Пример 31. В схеме рис. 3.13, *а* заданы: $e = 141 \sin \omega t$ В; $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $L = 0{,}00955$ Г. Угловая частота $\omega = 314$ с$^{-1}$. Определить ток и напряжение на элементах цепи.

Решение. Запишем уравнение для мгновенных значений:

$$i(R_1 + R_2) + L\frac{di}{dt} = e.$$

Перейдем от него к уравнению в комплексах:

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L\dot{I} = \dot{E} \quad \text{или} \quad \dot{I}Z = \dot{E},$$

где $Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 0{,}00955 = 5 + 3j = 5{,}82e^{j31°}$.

Комплекс действующего значения э. д. с.

$$\dot{E} = 141/\sqrt{2} = 100 \text{ В}.$$

Ток

$$\dot{I} = \dot{E}/Z = 100/5{,}8e^{j31°} = 17{,}2e^{-j31°} \text{ А}.$$

Напряжения на сопротивлении R_1

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 51{,}6e^{-j31°} \text{ В},$$

на сопротивлении R_2

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 34{,}4e^{-j31°} \text{ В};$$

на индуктивности

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L\dot{I} = 3j \cdot 17{,}2e^{-j31°} = 51{,}6e^{j59°} \text{ В}.$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 3.13, *б*. Вектор $\dot{E}$ направлен по оси +1. Ток отстает от него на 31°.

Пример 32. Решить задачу примера 31 методом пропорциональных величин.

Решение. Зададимся током в цепи в 1 А и направим его на векторной диаграмме рис. 3.13, *в* по оси +1 ($\dot{I} = 1$). Напряжение на активном сопротивлении R_1 совпадает по фазе с током и численно равно $1 \cdot 3 = 3$ В. Напряжение на R_2 также совпадает с током и равно 2 В. Напряжение на индуктивности равно 3 В и опережает ток на 90°. Из прямоугольного треугольника следует, что при токе $I = 1$ А на входе $E = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5{,}82$ В.

Так как на входе действует э. д. с. в $100/5{,}82 = 17{,}2$ раза больше, то все токи и напряжения должны быть умножены на коэффициент 17,2. На рис. 3.13, *в* все векторы повернуты на 31° против часовой стрелки по сравнению с соответствующими векторами на рис. 3.13, *б*. Ясно, что взаимное расположение векторов на диаграмме при этом не изменилось.

Пример 33. В цепи рис. 3.14, *а* $R = 4$ Ом; $\omega = 10^5$ с$^{-1}$. Определить величину емкости C, если при э. д. с. $E = 10$ мВ ток в цепи $I = 2$ мА.

Решение. Комплексное сопротивление цепи $Z = R - \frac{j}{\omega C}$; его модуль $z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$.

По закону Ома, $I = E/z$. Отсюда $z = E/I = 10 \cdot 10^{-3}/2 \cdot 10^{-3} = 5$ Ом.

Следовательно, $X_C = 1/\omega C = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ Ом; $C = 1/(\omega X_C) = 1/10^5 \cdot 3 = 3{,}33$ мкФ.

Векторная диаграмма изображена на рис. 3.14, *б*.

Пример 34. На участке *ab* разветвленной цепи рис. 3.15, *а* параллельно включены индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$ и активное сопротивление R, численно равное X_L. Показание амперметра A_2 равно 5 А. Определить показание амперметра A_3, полагая сопротивления амперметров настолько малыми, что их можно не учитывать.

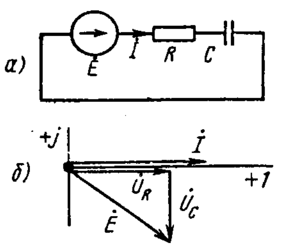


Рис. 3.14

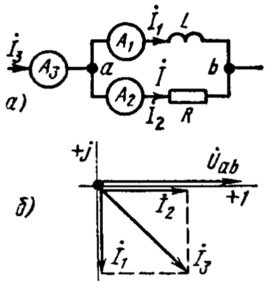


Рис. 3.15

Решение. На рис. 3.15, *б* качественно построим векторную диаграмму. Напряжение $\dot{U}_{ab}$ совпадает по фазе с током $\dot{I}_2$. Ток $\dot{I}_1$ отстает от тока $\dot{I}_2$ на 90° и равен ему по величине. Ток в неразветвленной части схемы $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Модуль тока $\dot{I}_3$ равен $5\sqrt{2} = 7{,}05$ А. Амперметр A_3 покажет 7,05 А.

Пример 35. Построить векторную диаграмму токов и напряжений для схемы рис. 3.16, *а*, если ток $I_1 = 1$ А, $R_1 = 10$ Ом; $\omega L_1 = 10$ Ом; $1/\omega C = 14{,}1$ Ом; $\omega L_3 = 20$ Ом и $R_3 = 2{,}5$ Ом.

Решение. Обозначим токи и выберем положительные направления для них в соответствии с рис. 3.16, *а*. Выберем масштаб для токов $m_I = 0{,}5$ А/см и для напряжений $m_U = 4$ В/см. Ток $\dot{I}_1$ направим по оси +1 (рис. 3.16, *б*). Падение напряжения $\dot{U}_{R_1} = 10$ В и по фазе совпадает с током $\dot{I}_1$. Падение напряжения в индуктивном сопротивлении ωL также равно 10 В, но опережает ток $\dot{I}_1$ на 90°. Геометрическая сумма $\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1}$ по модулю равна $10\sqrt{2} = 14{,}1$ В. Емкостный ток $\dot{I}_2$ опережает это напряжение на 90°. Модуль тока $\dot{I}_2 = 14{,}1/14{,}1 = 1$ А.

Ток в неразветвленной части цепи равен геометрической сумме токов: $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Модуль его равен 0,8 А (найден графически). Падение напряжения на сопротивлении R_3 равно 2 В и совпадает по фазе с током $\dot{I}_3$. Падение напряжения на индуктивности L_3 опережает ток $\dot{I}_3$ на 90° и численно равно $0{,}8 \cdot 20 = 16$ В. Напряжение на входе схемы равно э. д. с. и составляет около 18,3 В.

Пример 36. Решить задачу, обратную рассмотренной в примере 35. В схеме рис. 3.16, *а* опытным путем найдены значения токов I_1, I_2 и I_3 (в ветви схемы включили амперметры и записали их показания): $I_1 = 1$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 \approx 0{,}8$ А и опытным путем определены три напряжения: напряжение на входе схемы $U = E = 18{,}3$ В, напряжение на емкости $U_C = 14{,}1$ В (оно же напряжение на первой ветви) и напряжение на третьей ветви (на R_3 и L_3) $U_3 \approx 16$ В. Напряжения были определены путем подключения вольтметра поочередно к зажимам *а* и *е*, *а* и *с*, *е* и *с*.

По опытным данным (по значениям трех токов и трех напряжений) построить векторную диаграмму.

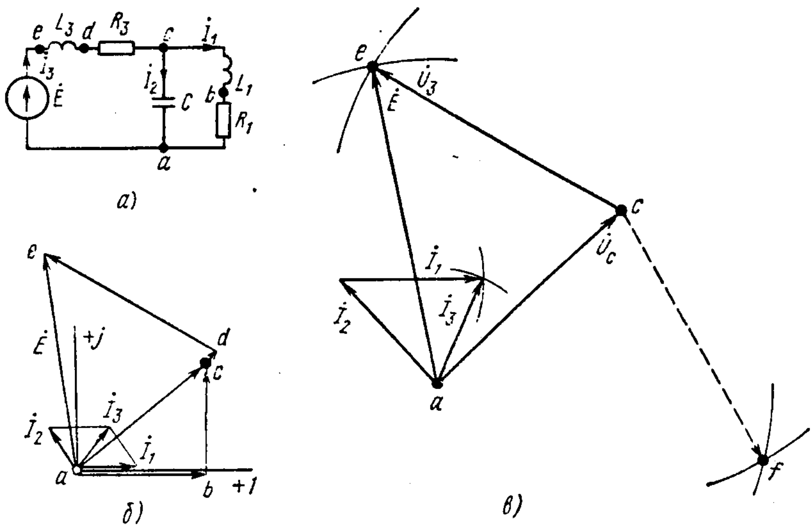


Рис. 3.16

Решение. На рис. 3.16, *в* отложим вектор $\dot{U}_C$, по модулю равный 14,1 В. Для сопоставления с рис. 3.16, *б* расположим его на диаграмме так же, как он расположен на рис. 3.16, *б*.

Изобразим на диаграмме ток $\dot{I}_2$. Он на 90° опережает напряжение $\dot{U}_C$ и по модулю равен 1 А. После этого построим на диаграмме токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_3$, воспользовавшись тем, что три тока ($\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$) образуют замкнутый треугольник (рис. 3.16, *б*).

Для построения треугольника по трем сторонам (т. е. фактически для определения третьей вершины его) из конца тока (из одной вершины треугольника) проводим дугу радиусом, равным току I_1, а из начала тока I_2 (т. е. из второй вершины треугольника) проводим дугу радиусом, равным току I_3.

Точка пересечения этих дуг дает искомую третью вершину треугольника, т. е. точку, в которой оканчиваются векторы токов $\dot{I}_3$ и $\dot{I}_1$. После того как на диаграмме определено положение тока $\dot{I}_3$, можно изобразить на ней векторы напряжения $\dot{U}_3$ и э. д. с. $\dot{E}$.

Напряжения $\dot{U}_C$, $\dot{U}_3$ и э. д. с. $\dot{E}$ также образуют замкнутый треугольник. Его построение осуществляется аналогично построению треугольника токов.

Из конца вектора $\dot{U}_C$ проводим дугу радиусом, равным U_3, а из начала вектора $\dot{U}_C$ — дугу радиусом, равным E. Дуги пересекаются в двух точках e и f.

Так как напряжение $\dot{U}_3$ представляет собой падение напряжения от тока $\dot{I}_3$ на последовательно соединенных R_3 и L_3, то оно по фазе должно опережать ток $\dot{I}_3$, а не отставать от него.

Поэтому из двух точек (e и f) выбираем точку e (если бы выбрали точку f, то в этом случае напряжение $\dot{U}_3$ — пунктир на рис. 3.16, *в* — отставало бы от тока $\dot{I}_3$, а не опережало его).

В заключение отметим, что в треугольнике токов дуги тоже пересекаются в двух точках, но вторая (лишняя) точка на рис. 3.16, *в* не показана.

§ 3.19. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости. Потенциалы цепи переменного тока являются комплексными числами. На комплексной плоскости комплексное число можно изображать либо точкой, координаты которой равны действительной и мнимой частям комплексного потенциала, либо вектором, направленным от начала координат к данной точке плоскости.

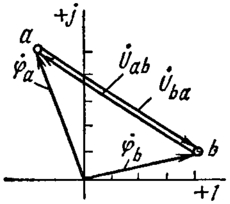


Рис. 3.17

На рис. 3.17 представлены два вектора, изображающие собой комплексные потенциалы:

$$\dot{\varphi}_a = -2 + 5j \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_b = 4 + j.$$

По определению, разность потенциалов $\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = -6 + 4j$; $\dot{U}_{ab}$ изобразится вектором, направленным от b к a. Первый индекс у напряжения (в нашем примере индекс a) указывает, *к какой точке* следует направить стрелку вектора напряжения. Естественно, что $\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab}$.

§ 3.20. Топографическая диаграмма. Каждая точка электрической схемы, в которой соединяются сопротивления, имеет свое значение комплексного потенциала.

Совокупность точек комплексной плоскости, изображающих комплексные потенциалы одноименных точек электрической схемы, называют *топографической диаграммой*.

Термин «топографическая» объясняется тем, что диаграмма напоминает топографическую карту местности, где каждой точке местности отвечает определенная точка карты. Расстояние между двумя точками на местности можно определить, измерив расстояние между одноименными точками на карте.

Аналогичные измерения можно проводить и на топографической диаграмме. Напряжение между любыми двумя точками электрической схемы, например между точками a и b, по величине и направлению определяется вектором, проведенным на топографической диаграмме от точки b к точке a.

При построении топографической диаграммы, как и потенциальной (см. § 1.10), потенциал любой точки схемы может быть принят равным нулю. На диаграмме эту точку помещают в начало координат. Тогда положение остальных точек схемы на диаграмме определяется параметрами цепи, э. д. с. и токами ветвей. Рассмотрим примеры на построение топографической диаграммы.

Пример 37. По данным примера 35 построить топографическую диаграмму для схемы рис. 3.16, a.

Решение. Обозначим буквами a, b, c, ... точки схемы рис. 3.16, a, которые хотим отобразить на топографической диаграмме. Примем потенциал точки a равным нулю: $\varphi_a = 0$.

Выразим потенциал точки b через потенциал точки a:

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a + \dot{I}_1 R_1 = \dot{\varphi}_a + 10.$$

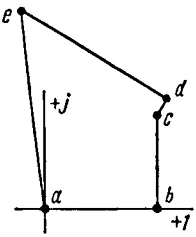


Рис. 3.18

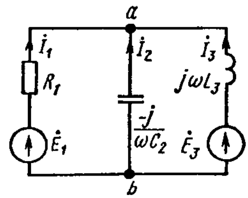


Рис. 3.19

Знак плюс перед слагаемым $\dot{I}_1 R_1$ обусловлен тем, что при переходе от точки a к точке b перемещение происходит навстречу току $\dot{I}_1$ (при этом потенциал увеличивается на $\dot{I}_1 R_1$). Точка b на диаграмме имеет координату по оси абсцисс $+10$. Аналогично,

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_b + \dot{I}_1 j\omega L_1 = 10 + j10;$$
$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_3 R_3;$$
$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_d + \dot{I}_3 j\omega L_3.$$

Совокупность точек a, b, c, d, e на комплексной плоскости рис. 3.18 представляет собой топографическую диаграмму для схемы рис. 3.16, a. По ней удобно определять напряжение между любыми двумя точками схемы и сдвиг по фазе этого напряжения по отношению к любому другому напряжению *.

Пример 38. Найти токи в схеме рис. 3.19 методом двух узлов. Положительные направления э. д. с. указаны на схеме стрелками: $e_1 = 120\sqrt{2}\sin\omega t$ В; $e_3 = 100\sqrt{2}\cos(\omega t - 120°)$ В; $R = 2$ Ом; $1/\omega C_2 = 10$ Ом; $\omega L_3 = 5$ Ом.

Решение. Запишем э. д. с. в комплексной форме:

$$\dot{E}_1 = 120, \quad \dot{E}_3 = 100e^{-j30°}.$$

Выберем положительные направления для токов в ветвях к узлу a. Определим проводимости ветвей:

$$Y_1 = 1/Z_1 = 1/2 = 0{,}5 \text{ См}; \quad Y_2 = 1/Z_2 = 1/{-10j} = 0{,}1j \text{ См};$$
$$Y_3 = 1/Z_3 = 1/5j = -0{,}2j \text{ См}.$$

---

* Следует иметь в виду, что *никакого графического подобия* между топографической диаграммой и электрической схемой, для которой она построена, как правило, нет.

Напряжение между узлами a и b [ср. с формулой (1.20)]

$$\dot{U}_{ab}=\frac{\dot{E}_1Y_1+\dot{E}_3Y_3}{Y_1+Y_2+Y_3}=\frac{120\cdot 0{,}5+100e^{-j30^\circ}\cdot 0{,}2e^{-j90^\circ}}{0{,}5+0{,}1j-0{,}2j}=104e^{-j8^\circ}\ \text{В}.$$

Токи ветвей

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}_1-\dot{U}_{ab}}{Z_1}=\frac{120-104e^{-j8^\circ}}{2}=8{,}5+j7{,}25=11{,}17e^{j40^\circ25'}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_2=\frac{-\dot{U}_{ab}}{Z_2}=\frac{-104e^{-j8^\circ}}{-10e^{j90^\circ}}=10{,}4e^{-j98^\circ}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{E}_3-\dot{U}_{ab}}{Z_3}=\frac{100e^{-j30^\circ}-104e^{-j8^\circ}}{5j}=$$

$$=\frac{100(\cos 30^\circ-j\sin 30^\circ)-104(\cos 8^\circ-j\sin 8^\circ)}{5j}=$$

$$=\frac{-16{,}2-35{,}5j}{5j}=\frac{39{,}1e^{j245^\circ30'}}{5e^{j90^\circ}}=7{,}82e^{j155^\circ30'}\ \text{А}.$$

Пример 39. Найти токи в схеме рис. 3.20, *а* методом контурных токов и построить топографическую диаграмму, если $\dot{E}_1=100$ В; $\dot{E}_2=100e^{j90^\circ}$ В; $X_C=1/\omega C=2$ Ом; $R=\omega L=5$ Ом.

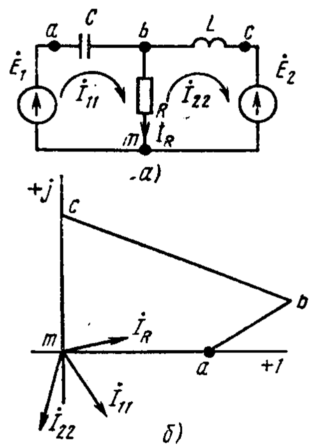


Рис. 3.20

Решение. Выберем направления контурных токов $\dot{I}_{11}$ и $\dot{I}_{22}$ по часовой стрелке. Запишем в общем виде уравнения для контурных токов [ср. с уравнениями (1.4′)]:

$$\dot{I}_{11}Z_{11}+\dot{I}_{22}Z_{12}=\dot{E}_{11};$$
$$\dot{I}_{11}Z_{21}+\dot{I}_{22}Z_{22}=\dot{E}_{22}.$$

Здесь Z_{11} — собственное сопротивление первого контура, $Z_{11}=R-\frac{j}{\omega C}=5-2j$; Z_{22} — собственное сопротивление второго контура, $Z_{22}=R+j\omega L=5+5j$; $Z_{12}=Z_{21}$ — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус, $Z_{12}=-R=-5$; $\dot{E}_{11}$ — алгебраическая сумма э. д. с. первого контура, $\dot{E}_{11}=\dot{E}_1=100$; $\dot{E}_{22}$ — алгебраическая сумма э. д. с. второго контура, $\dot{E}_{22}=-\dot{E}_2=-100j$. Следовательно,

$$\dot{I}_{11}(5-2j)-5\dot{I}_{22}=100;$$
$$-5\dot{I}_{11}+\dot{I}_{22}(5+j5)=-100j.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}(5-2j) & -5\\ -5 & (5+5j)\end{vmatrix}=10+15j=18e^{j56^\circ20'};$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}100 & -5\\ -100j & (5+5j)\end{vmatrix}=500;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}(5-2j) & 100\\ -5 & -100j\end{vmatrix}=300-500j=582e^{-j59^\circ}.$$

Токи в схеме:

$$\dot{I}_{11} = \Delta_1/\Delta = 500/18e^{j56°20'} = 27{,}8e^{-j56°20'}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_{22} = \Delta_2/\Delta = 582e^{-j59°}/18e^{j56°20'} = 32{,}3e^{-j115°20'}\ \text{А};$$

$\dot{I}_R = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 30e^{j11°43'}$ (направлен от точки b к точке m).

Топографическая диаграмма изображена на рис. 3.20, *б*.

§ 3.21. Активная, реактивная и полная мощности. Под *активной мощностью* P понимают среднее значение мгновенной мощности p за период T:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dT = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt. \tag{3.42}$$

Если ток $i = I_m \sin\omega t$, напряжение на участке цепи $u = U_m \times$ $\times \sin(\omega t + \varphi)$, то

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T I_m U_m \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = UI\cos\varphi. \tag{3.43}$$

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени * в виде теплоты на участке цепи в сопротивлении R. Действительно, произведение $U\cos\varphi = IR$; следовательно,

$$P = U\cos\varphi I = I^2 R. \tag{3.44}$$

Активную мощность измеряют в ваттах (Вт).

Под *реактивной мощностью* Q понимают произведение напряжения U на участке цепи на ток I по этому участку и на синус угла φ между напряжением U и током I:

$$Q = UI\sin\varphi. \tag{3.45}$$

Реактивную мощность принято измерять в вольт-амперах реактивных (ВАр). Если $\sin\varphi > 0$, то и $Q > 0$, если $\sin\varphi < 0$, то $Q < 0$.

Рассмотрим, что представляет собой физически реактивная мощность. С этой целью возьмем участок цепи с последовательно соединенными R, L и C. Пусть по нему протекает ток $i = I_m \sin\omega t$. Запишем выражение для мгновенного значения суммы энергий магнитного и электрического полей цепи:

$$W_{м.э} = W_м + W_э = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2\omega t + \frac{CI_m^2}{2(\omega C)^2}\cos^2\omega t =$$

$$= \frac{LI^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{I^2}{2\omega^2 C}(1 + \cos 2\omega t).$$

Из полученного выражения видно, что $W_{м.э}$ имеет постоянную составляющую $W_{м.э_0}$, неизменную во времени, и переменную состав-

---

* Предполагается, что в 1 с укладывается целое число периодов T.

ляющую $w_{м.\,э}$, изменяющуюся с двойной угловой частотой:

$$W_{м.\,э} = W_{м.\,э_0} - w_{м.\,э},$$

где $W_{м.\,э_0} = \frac{LI^2}{2} + \frac{I^2}{2\omega^2 C}$ и $w_{м.\,э} = \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2\omega^2 C}\right)\cos 2\omega t$.

На создание постоянной составляющей $W_{м.\,э_0}$ была затрачена энергия в процессе становления данного периодического режима. В дальнейшем при периодическом процессе энергия $W_{м.\,э_0}$ остается неизменной и, следовательно, от источника питания не требуется энергии на ее создание.

Среднее значение энергии $w_{м.\,э}$, поступающей от источника за интервал времени от $-T/8$ до $+T/8$,

$$W_{м.\,э_{ср}} = \frac{4}{T}\int\limits_{t=-T/8}^{t=T/8} w_{м.\,э}\, dt = \frac{2}{\pi}\left(LI^2 - \frac{I^2}{\omega^2 C}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} I^2 (X_L - X_C) = \frac{2}{\pi\omega} UI \sin\varphi = \frac{2}{\pi\omega} Q. \qquad (3.46)$$

Таким образом, реактивная мощность Q пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдается источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля индуктивности и емкости.

За один период переменного тока энергия $W_{м.\,э_{ср}}$ дважды отдается генератором в цепь и дважды он получает ее обратно, т. е. реактивная мощность является энергией, которой *обмениваются* генератор и приемник.

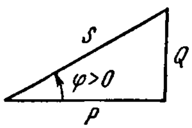


Рис. 3.21

Полная мощность

$$S = UI. \qquad (3.47)$$

Ее измеряют в вольт-амперах (В·А).

Между P, Q и S существует соотношение

$$P^2 + Q^2 = S^2. \qquad (3.48)$$

Графически эту связь можно представить в виде прямоугольного треугольника (рис. 3.21) — *треугольника мощности*, у которого имеются катет, равный P, катет, равный Q, и гипотенуза S.

На щитке любого источника электрической энергии переменного тока (генератора, трансформатора и т. д.) указывают значение S. Она характеризует ту мощность, которую этот источник *может* отдавать потребителю, *если* последний будет работать при $\cos\varphi = 1$ (т. е. если потребитель представляет собой чисто активное сопротивление).

§ 3.22. Выражение мощности в комплексной форме записи. Пусть задан некоторый комплекс

$$\dot{A} = Ae^{j\varphi_A} = A\cos\varphi_A + jA\sin\varphi_A.$$

Под комплексом $\overset{*}{A}$, сопряженным с комплексом $\dot{A}$, будем понимать

$$\overset{*}{A} = Ae^{-j\varphi_A} = A\cos\varphi_A - jA\sin\varphi_A.$$

Рассмотрим простой прием определения активной и реактивной мощностей через комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока. Напряжение на некотором участке цепи $\dot{U}=Ue^{j\varphi_u}$, ток по этому участку $\dot{I}=Ie^{j\varphi_i}$. Угол между напряжением и током $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$. Умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I}=Ie^{-j\varphi_i}$ и обозначим полученный комплекс через $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=UIe^{j(\varphi_u-\varphi_i)}=UIe^{j\varphi}=UI\cos\varphi+jUI\sin\varphi=P+jQ. \qquad (3.49)$$

Значок $\sim$ (тильда) над S означает комплекс (а не сопряженный комплекс) полной мощности, составленный при участии сопряженного комплекса тока $\overset{*}{I}$.

Таким образом, активная мощность P есть действительная часть (Re), а реактивная мощность Q — мнимая часть (Im) произведения $\dot{U}\overset{*}{I}$:

$$\left.\begin{aligned} P&=\operatorname{Re}\dot{U}\overset{*}{I};\\ Q&=\operatorname{Im}\dot{U}\overset{*}{I}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.50)$$

Пример 40. Определить активную, реактивную и полную мощности по данным примера 31.

Решение. Напряжение на входе всей схемы равно э. д. с.: $\dot{U}=\dot{E}=100$ В. Ток в цепи $\dot{I}=17{,}2e^{-j31^\circ}$ А. Сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I}=17{,}2e^{j31^\circ}$ А. Комплекс полной мощности

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=100\cdot 17{,}2e^{j31^\circ}=1720\cos 31^\circ+j1720\sin 31^\circ=1475+j886;$$
$$\operatorname{Re}\dot{U}\overset{*}{I}=1475; \quad \operatorname{Im}\dot{U}\overset{*}{I}=886.$$

Следовательно, активная мощность $P=1475$ Вт, реактивная $Q=886$ ВАр и полная $S=1720$ ВА.

§ 3.23. Измерение мощности ваттметром.

Измерение мощности производят обычно с помощью ваттметра электродинамической системы, в котором имеются две катушки — неподвижная и подвижная.

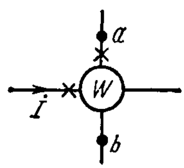


Рис. 3.22

Подвижная катушка, выполненная из очень тонкого провода, имеет практически чисто активное сопротивление и называется параллельной обмоткой. Ее включают параллельно участку цепи, подобно вольтметру. Жестко скрепленная со стрелкой (указателем), она может вращаться в магнитном поле, создаваемом неподвижной катушкой.

Неподвижная катушка, выполненная из довольно толстого провода, имеет очень малое сопротивление и называется последовательной обмоткой. Она включается в цепь последовательно, подобно амперметру.

На электрической схеме ваттметр изображают, как показано на рис. 3.22. Одна пара концов (на рисунке обычно расположена горизонтально) принадлежит последовательной обмотке, другая пара концов (на рисунке обычно расположена вертикально) — параллельной. На концах одноименных зажимов обмоток (например, у начала обмоток) принято ставить звездочки.

Вращающий момент ваттметра, а следовательно, и показание его пропорциональны действительной части произведения комплексного напряжения $\dot{U}_{ab}$ на параллельной обмотке ваттметра на сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I}$, втекающего в конец последовательной (токовой) обмотки ваттметра и снабженный звездочкой;

$$\operatorname{Re} \dot{U}_{ab}\overset{*}{I} = U_{ab} I \cos(\widehat{\dot{U}_{ab}\dot{I}}).$$

Напряжение на параллельной обмотке берется равным разности потенциалов между концом ее, имеющим звездочку (точка a), и концом ее, не имеющим звездочки (точка b). Предполагается, что ток $\dot{I}$ входит в конец последовательной обмотки, имеющий звездочку.

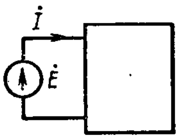


Рис. 3.23

Цена деления ваттметра определяется, как частное от деления произведения номинального напряжения на номинальный ток (указываются на лицевой стороне прибора) на число делений шкалы.

Пример 41. Номинальное напряжение ваттметра 120 В. Номинальный ток 5 А. Шкала имеет 150 делений. Определить цену деления ваттметра.

Решение. Цена деления ваттметра равна $120 \cdot 5/150 = 4$ Вт/дел.

§ 3.24. Двухполюсник в цепи синусоидального тока. На схеме 3.23 изображен пассивный двухполюсник, подключенный к источнику э. д. с. Входное сопротивление двухполюсника $Z_{вх} = \dot{E}/\dot{I}$.

В общем случае

$$Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх} = ze^{j\varphi}.$$

При $X_{вх} > 0$ входное сопротивление имеет индуктивный характер, при $X_{вх} < 0$ — емкостный и при $X_{вх} = 0$ — чисто активный.

Входная проводимость $Y_{вх}$ представляет собой величину, обратную входному сопротивлению:

$$Y_{вх} = 1/Z_{вх}.$$

Входное сопротивление можно определить либо расчетным путем, если известна схема внутренних соединений двухполюсника и значения сопротивлений, либо опытным путем.

При опытном определении входного сопротивления двухполюсника собирают схему (рис. 3.24, a), в которой амперметр измеряет ток I, вольтметр — напряжение $U_{ab} = U$ на входе двухполюсника. Ваттметр измеряет $\operatorname{Re}\{\dot{U}_{ab}\overset{*}{I}\}$, т. е. активную мощность $P = UI\cos\varphi$. Модуль входного сопротивления $z = U/I$. При делении P на произведение UI получают косинус угла между напряжением и током: $\cos\varphi = P/UI$.

По косинусу угла находят $\sin\varphi$ и затем определяют

$$R_{вх} = z\cos\varphi \text{ и } X_{вх} = z\sin\varphi.$$

Так как косинус есть функция четная, т. е. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, то измерения для определения входного сопротивления необходимо дополнить еще одним опытом, который позволил бы путем сопоставления показаний амперметра в двух опытах определить знак угла φ.

Для определения знака угла φ параллельно исследуемому двухполюснику путем замыкания ключа K подключают небольшую емкость C (рис. 3.24, *а*).

Если показания амперметра при замыкании ключа K станут меньше, чем они были при разомкнутом ключе, то угол φ положителен и входное сопротивление $Z = ze^{j\varphi}$ имеет индуктивный характер (рис. 3.24, *б*).

Если показания амперметра при замыкании ключа станут больше, то φ отрицательно и входное сопротивление имеет емкостный характер (рис. 3.24, *в*).

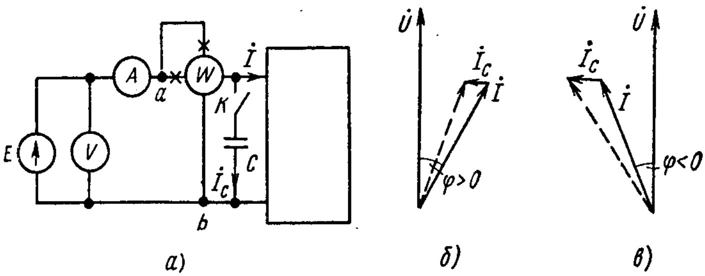


Рис. 3.24

На векторных диаграммах рис. 3.24, *б*, *в* $\dot{I}$ — ток через двухполюсник; $\dot{I}_C$ — ток через емкость, который опережает напряжение $\dot{U}$ на входе двухполюсника на 90°. Пунктиром изображен ток через амперметр при замкнутом ключе. Сопоставление пунктиром изображенного тока с током $\dot{I}$ и подтверждает приведенное ранее заключение.

Пример 42. Измерения по схеме рис. 3.24, *а* дали: $U = 120$ В; $I = 5$ А; $P = 400$ Вт. Замыкание ключа K приводит к уменьшению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

Решение. Модуль входного сопротивления

$$z = U/I = 24 \text{ Ом};$$

$$\cos\varphi = P/UI = 400/120 \cdot 5 = 0{,}666; \quad \sin\varphi = 0{,}745.$$

Таким образом,

$$R_{\text{вх}} = z\cos\varphi = 24 \cdot 0{,}666 = 16 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{вх}} = z\sin\varphi = 24 \cdot 0{,}745 = 17{,}9 \text{ Ом}.$$

Комплекс входного сопротивления $Z_{\text{вх}} = (16 + j17{,}9)$ Ом.

§ 3.25. Резонансный режим работы двухполюсника. Пусть двухполюсник содержит одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей. Под *резонансным режимом* (режимами) работы такого двухполюсника понимают режим (режимы), при котором входное сопротивление двухполюсника является чисто активным *.

По отношению к внешней цепи двухполюсник в резонансном режиме ведет себя как активное сопротивление, поэтому ток и напряжение на входе двухполюсника совпадают по фазе. Реактивная мощность двухполюсника при этом равна нулю.

Различают две основные разновидности резонансных режимов: резонанс токов и резонанс напряжений.

§ 3.26. Резонанс токов. Явление резонанса в схеме 3.25, *а*, образованной двумя параллельными ветвями с разнохарактерными реактивными сопротивлениями, называют *резонансом токов.*

Пусть первая ветвь имеет активное сопротивление R_1 и индуктивное ωL, а вторая ветвь — активное R_2 и емкостное $1/\omega C$.

Ток $\dot{I}_1$ первой ветви отстает от напряжения $\dot{U}=\dot{U}_{ab}$ (рис. 3.25, *б*) и может быть записан как

$$\dot{I}_1=\dot{U}Y_1=\dot{U}\,(g_1-jb_1).$$

Ток $\dot{I}_2$ второй ветви опережает напряжение:

$$\dot{I}_2=\dot{U}Y_2=\dot{U}\,(g_2-jb_2).$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\dot{U}\,(g_1+g_2)-j\dot{U}\,(b_1+b_2).$$

По определению резонансного режима, ток $\dot{I}$ должен совпадать по фазе с напряжением $\dot{U}$. Это будет при условии, что сумма реактивных проводимостей ветвей равна нулю:

$$b_1+b_2=0.$$

В соответствии с (3.36)

$$b_1=\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2} \quad \text{и} \quad b_2=-\frac{1/\omega C}{R_2^2+1/\omega^2C^2}.$$

Следовательно, условие наступления режима резонанса токов в схеме рис. 3.25, *а* можно записать так:

$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2}=\frac{1/\omega C}{R_2^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}. \tag{3.51}$$

На рис. 3.25, *б* изображена векторная диаграмма для резонансного режима. Из (3.51) следует, что если $R_2=0$, то резонанс наступит при

$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2}=\omega C. \tag{3.51'}$$

В еще более частном случае, когда $R_2=0$ и $R_1\ll\omega L$, резонанс наступит при

$$\omega^2LC\approx 1. \tag{3.51''}$$

---

* Следовательно, для определения условий наступления резонанса следует приравнять нулю мнимую часть комплекса входного сопротивления двухполюсника. Такой способ справедлив, если не пренебрегать активными сопротивлениями индуктивных катушек.

Резонанса можно достичь путем изменения ω, L, C или R_1 и R_2. Ток в неразветвленной части схемы по величине может быть меньше, чем токи в ветвях схемы. При $R_2=0$ и $R_1 \approx 0$ ток I может оказаться ничтожно малым по сравнению с токами I_1 и I_2.

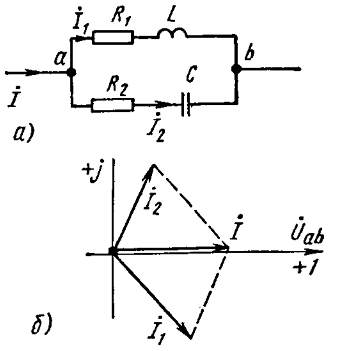


Рис. 3.25

В идеализированном, практически не выполнимом режиме работы, когда $R_1 = R_2 = 0$, ток в неразветвленной части схемы 3.25, *а* равен нулю и входное сопротивление схемы равно бесконечности.

Обратим внимание на следующее. В формулу (3.51) входит пять величин (L, C, R_1, R_2, ω). Если определять из нее L или C, то может оказаться, что для искомой величины будут получены одно или два действительных значения либо мнимое значение.

Получение двух действительных значений для L и C свидетельствует о том, что при неизменных четырех параметрах вследствие изменения пятого параметра можно получить два резонансных режима (пояснения к возникновению двух резонансных режимов при изменении одного параметра и неизменных остальных даются в примере 54).

Получение мнимых значений L и C свидетельствует о том, что при данных сочетаниях параметров резонанс невозможен.

Определим ω из (3.51):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}, \qquad \text{(а)}$$

где ω_0 — резонансная частота в контуре без потерь при $R_1 = R_2 = 0$.

Поскольку угловая частота действительна и положительна, то числитель и знаменатель формулы (а) должны быть с одинаковыми знаками. Это имеет место при:

$$\text{а) } \frac{L}{C} > R_1^2 \text{ и } \frac{L}{C} > R_2^2; \text{ б) } \frac{L}{C} < R_1^2 \text{ и } \frac{L}{C} < R_2^2.$$

При $R_1 = R_2$ частота $\omega = \omega_0$. При $L/C = R_1^2 = R_2^2$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{0/0}, \qquad \text{(б)}$$

т. е. ω в случае (б) получается величиной неопределенной. Физически это означает, что резонанс может возникать при любой частоте. Сопротивление параллельного контура при этом чисто активное, равно R_1.

Пример 43. В схеме рис. 3.25, *а* $R_1 = 30$ Ом; $\omega L = 40$ Ом; $R_2 = 0$; $\omega = 10^3$ с$^{-1}$. При какой емкости в схеме будет резонанс таков?

Решение. По формуле (3.51),

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{R_1^2+(\omega L)^2}{\omega L}=\frac{30^2+40^2}{40}=62{,}5 \text{ Ом};$$

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{10^3\cdot 62{,}5}=16 \text{ мкФ}.$$

§ 3.27. Компенсация сдвига фаз. Входное сопротивление большинства потребителей электрической энергии имеет индуктивный характер. Для того чтобы уменьшить потребляемый ими ток за счет снижения его реактивной составляющей и тем снизить потери энергии в генераторе и подводящих проводах, параллельно приемнику энергии включают батарею конденсаторов.

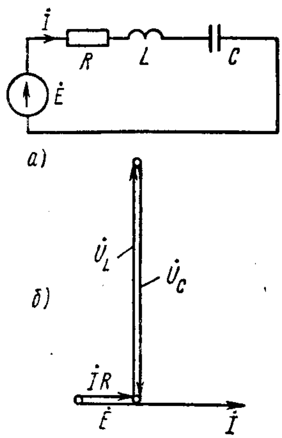


Рис. 3.26

Уменьшение угла сдвига фаз между напряжением на приемнике и током, потребляемым от генератора, называют *компенсацией сдвига фаз.*

Компенсация сдвига фаз особенно существенна для энергоемких потребителей, например крупных заводов. Осуществляется она в месте ввода линии питания в распределительном устройстве. Экономически выгодно подключать конденсаторы на возможно более высокое напряжение (ток через конденсаторы $I_C=U\omega C$). Угол сдвига фаз φ между напряжением и током, потребляемым от источника питания, обычно доводят до значения, при котором $\cos\varphi=0{,}9\div 0{,}95$.

§ 3.28. Резонанс напряжений. Резонанс в схеме последовательного соединения R, L, C (рис. 3.26, *а*) называют *резонансом напряжений.*

При резонансе ток в цепи должен совпадать по фазе с э. д. с. $\dot E$. Это возможно, если входное сопротивление схемы

$$Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$$

будет чисто активным. Условие наступления резонанса в схеме рис. 3.26, *а*

$$\omega_0 L=1/(\omega_0 C), \tag{3.52}$$

где ω_0 — резонансная частота.

При этом $I=E/R$. Напряжение на индуктивности при резонансе равно напряжению на емкости:

$$U_L=U_C=\omega_0 LI=\frac{\omega_0 L}{R}E.$$

Отношение

$$\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}=Q \tag{3.53}$$

называют *добротностью* резонансного контура. Добротность показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности (емкости) превышает напряжение на входе схемы в резонансном режиме. В радиотехнических устройствах Q может доходить до 300 и более. Векторная диаграмма для режима резонанса изображена на рис. 3.26, *б*.

Характеристическим сопротивлением ρ для схемы рис. 3.26, *а* называют отношение напряжения на L или C в режиме резонанса к току в этом режиме: $\rho = QR$.

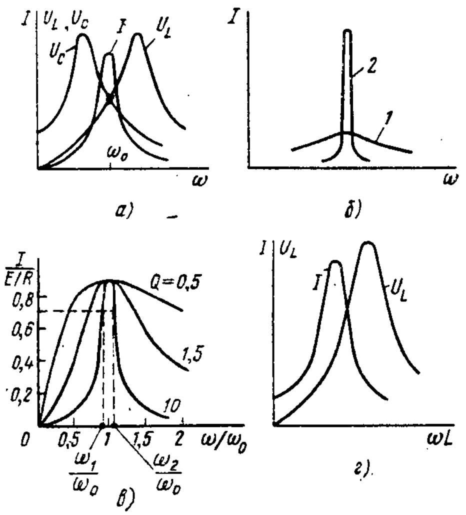


Рис. 3.27

§ 3.29. Исследование работы схемы рис. 3.26, *а* при изменении частоты и индуктивности.

Пусть в схеме рис. 3.26, *а* параметры R, L, C и э. д. с. E постоянны, но меняется частота ω. Обсудим характер изменения тока I и напряжений U_L и U_C в функции от ω.

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

При изменении ω меняется реактивное сопротивление цепи $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$: при ω* $\to 0$ сопротивление $X \to \infty$ и ток $I \to 0$; при $\omega = 1/\sqrt{LC}$ сопротивление $X = 0$ и ток $I = E/R$; при $\omega \to \infty$ сопротивление $X \to \infty$ и ток $I \to 0$.

Напряжение на индуктивности

$$U_L = \omega L I = E \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

При $\omega \to 0$ напряжение $U_L = 0$; при $\omega \to \infty$ напряжение $U_L \to E$ (рис. 3.27, *а*). При $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая U_L (кривая U_C) проходит через максимум, при $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая U_L монотонно стремится к E.

При $\omega \to 0$ напряжение на емкости $U_C = I \frac{1}{\omega C}$ стремится к E, при $\omega \to \infty$ $U_C \to 0$.

---

* Стрелка $\to$ заменяет слово «стремящийся» или соответственно «стремится».

Из рис. 3.27, *а* видно, что максимумы напряжений на индуктивности U_L и емкости U_C имеют место при частотах, не равных резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$: максимум U_L имеет место при частоте $\omega_L > \omega_0$, а максимум U_C — при частоте

$$\omega_C < \omega_0 \left(\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 C}{L}}}; \quad \omega_C = \frac{\omega_0^2}{\omega_L} \right).$$

На рис. 3.27, *б* изображены две кривые, характеризующие зависимость $I = f(\omega)$ для цепи с неизменными L, C и E при двух различных значениях R. Для кривой *2* сопротивление R меньше (а добротность Q больше), чем для кривой *1*.

Обычно кривые рис. 3.27, *б* изображают в относительных единицах, откладывая ток в долях от тока при резонансе, а частоту — в долях от резонансной частоты. Графики тока в относительных единицах изображены на рис. 3.27, *в*. Они построены по формуле

$$\frac{I}{E/R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Чем меньше активное сопротивление резонансного контура при неизменных остальных параметрах схемы, т. е. чем больше добротность контура Q, тем более острой (пикообразной) становится форма кривой $I = f(\omega)$.

Полосой пропускания резонансного контура называют полосу частот $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 / Q$, на границах которой отношение $\frac{I}{E/R}$ составляет 0,707 (рис. 3.27, *в*).

Граничные частоты $\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q} \mp 1 \right)$.

Если в схеме рис. 3.26, *а* менять не частоту, а индуктивность L, то зависимости I, U_L в функции от $X_L = \omega L$ ($\omega = \text{const}$) будут в виде кривых рис. 3.27, *г*.

Так как $U_C = \frac{1}{\omega C} I$, а $1/\omega C = \text{const}$, то кривая $U_C = f(\omega L)$ качественно имеет такой же вид, что и кривая $I = f(\omega L)$.

Пример 44. В схеме рис. 3.26, *а* $R = 10$ Ом; $L = 1$ Г; $C = 1$ мкФ. Определить резонансную частоту ω_0, добротность Q, а также напряжение на емкости U_C, если на вход схемы подано напряжение 10 мВ при резонансной частоте.

Решение. Резонансная частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{10^{-6}} = 10^3$ с$^{-1}$. Добротность $Q = (\omega_0 L)/R = (10^3 \cdot 1)/10 = 100$. Ток в цепи $I = E/R = 0{,}01/10 = 1$ мА. Напряжение на емкости $U_C = QE = 100 \cdot 0{,}01 = 1$ В.

§ 3.30 Частотная характеристика двухполюсника. Входное сопротивление двухполюсника и его входная проводимость есть функции частоты. Зависимости действительной и мнимой частей входного сопротивления или входной проводимости двухполюсника от частоты называют *частотными характеристиками двухполюсника.*

Частотные характеристики рассчитывают, если известны схема внутренних соединений двухполюсника и значения активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей в ней, либо снимают опытным путем.

При снятии частотных характеристик опытным путем на вход схемы подают напряжение, частота которого может меняться в широких пределах, и по результатам измерений подсчитывают действительную и мнимую части входного сопротивления.

В схему двухполюсника могут входить последовательно и параллельно соединенные индуктивности, емкости и активные сопротивления. Наибольший интерес представляют частотные характеристики двухполюсников, составленных только из индуктивностей и емкостей.

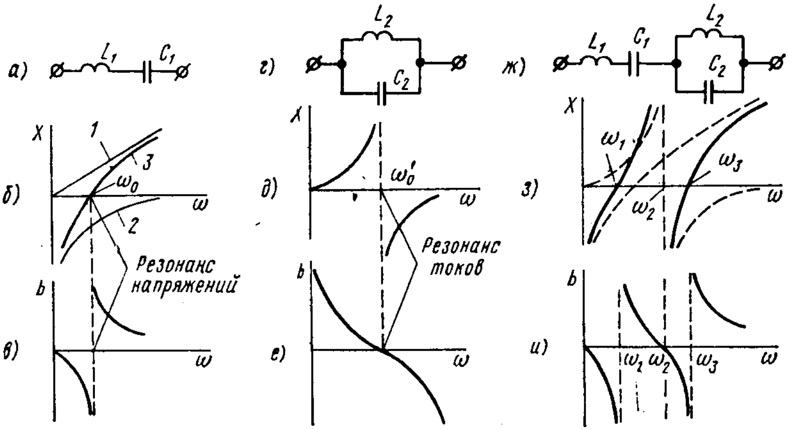


Рис. 3.28

Если частота источника питания двухполюсника высока, то индуктивные сопротивления катушек индуктивности оказываются много больше собственных активных сопротивлений катушек и для упрощения построения частотных характеристик последними часто пренебрегают. Для такой идеализированной упрощенной схемы, где имеются только индуктивности и емкости, построение частотных характеристик схемы упрощается.

Рассмотрим построение частотных характеристик двухполюсников, изображенных на рис. 3.28, *а*, *г*. Двухполюсник рис. 3.28, *а* образован последовательно соединенными L_1 и C_1; двухполюсник рис. 3.28, *г* — параллельно соединенными L_2 и C_2. При построении частотных характеристик будем полагать, что в реактивных сопротивлениях всех элементов, из которых составлены двухполюсники, отсутствуют потери энергии. Входное сопротивление и входная проводимость для двухполюсника рис. 3.28, *а* соответственно:

$$Z = jX = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right); \quad X = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1};$$

$$Y = -jb = \frac{1}{j\left(\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C_1}\right)}; \quad b = \frac{1}{X} = \frac{1}{\omega L_1 - (1/\omega C_1)}.$$

Прямая *1* рис. 3.28, *б* выражает зависимость $\omega L_1 = f(\omega)$; кривая *2* — зависимость $-\dfrac{1}{\omega C_1} = f(\omega)$, кривая *3* — зависимость $X = f(\omega)$. Значение $\omega = \omega_0$, при котором кривая *3* рис. 3.28, *б* пересекает ось абсцисс, представляет собой угловую частоту, при которой в двухполюснике рис. 3.27, *а* наступает резонанс напряжений.

При $\omega < \omega_0$ входное сопротивление имеет емкостный характер (X отрицательно), при $\omega > \omega_0$ — индуктивный (X положительно). Так как для схемы рис. 3. 28, *а* реактивная проводимость $b = 1/X$, то кривая $b = f(\omega)$ рис. 3.28, *в* взаимно обратна кривой *3* рис. 3.28, *б*. При $\omega < \omega_0$ входная проводимость имеет емкостный характер, при $\omega > \omega_0$ — индуктивный. В точке $\omega = \omega_0$ кривая $b = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$. Для двухполюсника рис. 3.28, *г* входная проводимость и входное сопротивление соответственно:

$$Y = \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 = -j\left(\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2\right) = -jb;$$

$$b = \frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2; \quad X = \frac{1}{b} = \frac{1}{\dfrac{1}{\omega L_2} - \omega C_2}.$$

Зависимости $X = f(\omega)$ и $b = f(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *г* изображены соответственно на рис. 3.28, *д*, *е*. При $\omega = \omega_0'$ реактивная проводимость $b = 0$, а реактивное сопротивление претерпевает разрыв от $+\infty$ до $-\infty$. При $\omega = \omega_0'$ в двухполюснике рис 3.28, *г* имеет место резонанс токов. Таким образом, по виду характеристики $X = f(\omega)$ или $b = f(\omega)$ можно судить о том, какого типа резонансные режимы и в каком количестве возникают в исследуемой схеме при изменении частоты от 0 до ∞. Точки, в которых $X = f(\omega)$ пересекает ось абсцисс [кривая $b = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$], дают значения угловой частоты, при которых в исследуемой схеме возникают режимы резонанса напряжений.

Точки, в которых кривая $X = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $+\infty$ до $-\infty$ [кривая $b = f(\omega)$ пересекает ось абсцисс], соответствуют режимам резонанса токов.

В качестве иллюстрации сформулированного правила исследования построим частотные характеристики $X = f(\omega)$ и $b = f(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *ж* и по ним определим, какие резонансные режимы и в каком количестве возможны в схеме при изменении частоты от 0 до ∞. Для двухполюсника рис. 3.28, *ж* реактивное сопротивление равно сумме реактивных сопротивлений двухполюсников рис. 3.28, *а*, *г*. В соответствии с этим ординаты кривой $X = f(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *ж* получаем на рис. 3.28, *з* путем суммирования ординат кривых $X = f(\omega)$ рис. 3.28, *б*, *д*. Зависимость $b = f(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *ж* изображена на рис. 3.28, *и*. Из рис. 3.28, *з*, *и* видно, что в схеме рис. 3.28, *ж* при увеличении частоты от 0 до ∞ происходит следующее: при $\omega = \omega_1$ возникает резонанс напряжений, при $\omega = \omega_2$ — резонанс токов, затем при $\omega = \omega_3$ вновь возникает резонанс напряжений. При последующем увеличении частоты резонансов в схеме возникать не будет.

Обратим внимание на следующее:

1) режимы резонанса токов и резонанса напряжений чередуются;

2) число резонансных частот для канонических схем (см. § 3.31) на единицу меньше числа реактивных элементов;

3) если в схеме есть путь для прохождения постоянного тока, то при плавном увеличении частоты первым наступит резонанс токов, если нет — резонанс напряжений.

Это следует из того, что если есть путь для постоянного тока, то при $\omega = 0$ характеристика $X(\omega)$ начинается с нуля, а затем увеличивается $\left[\left(\dfrac{dX}{d\omega}\right) > 0\right]$ и при некоторой ω претерпевает разрыв, который и соответствует резонансу токов. При аналитическом определении резонансных частот в реактивном двухполюснике реактивное сопротивление его следует представить в виде отношения двух полиномов по степеням ω, т. е. $X = N(\omega)/M(\omega)$. Корни уравнения $N(\omega) = 0$ соответствуют частотам, при которых возникает резонанс напряжений. Корни уравнения $M(\omega) = 0$ соответствуют частотам, при которых имеет место резонанс токов.

§ 3.31. Канонические схемы. Эквивалентные двухполюсники. Путем эквивалентных преобразований отдельных частей сложных схем последние можно привести к более простым схемам с минимально возможным числом R, L, C в них — к каноническим схемам. Так, схемы рис. 3.28 являются каноническими. Преобразования осуществляют либо путем перехода от звезды к треугольнику (или наоборот) или от параллельно-последовательного соединения (рис. 3.29, *а*) к параллельному (рис. 3.29, *б*), либо от параллельного соединения (рис. 3.29, *в*) к последовательно-параллельному (рис. 3.29, *г*) и последующего упрощения схемы. Значения коэффициентов перехода:

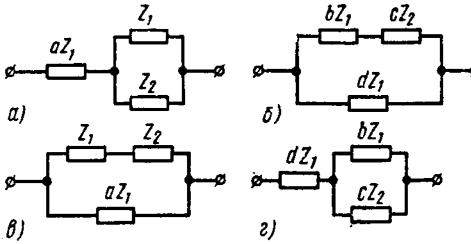


Рис. 3.29

для рис. 3.29, *а*, *б* $b = a(1+a)$; $c = (1+a)^2$; $d = 1+a$;

для рис. 3.29, *в*, *г* $b = \frac{a^2}{1+a}$; $c = \left(\frac{1}{1+a}\right)^2$ $d = \frac{a}{1+a}$.

Двухполюсники рис. 3.29, *а*, *б*, как и рис. 3.29, *в*, *г*, называют *эквивалентными*, так как они имеют равные входные сопротивления при всех частотах.

§ 3.32. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке. К зажимам ab активного двухполюсника рис. 3.30, *а* подключена нагрузка $Z_н = R_н + jX_н$. Требуется выяснить, при соблюдении каких условий в нагрузке выделяется максимальная активная мощность.

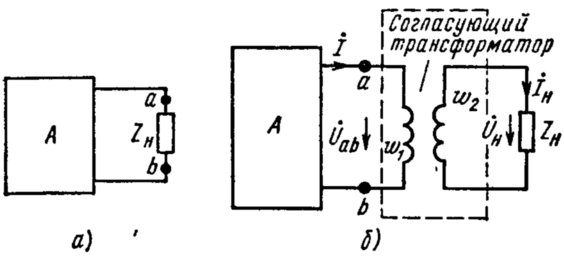


Рис. 3.30

По методу эквивалентного генератора (см. § 1.25), ток в нагрузке

$$\dot{I} = \dot{U}_{ab\,х.х}/(Z_{вх} + Z_н),$$

где $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab.

Поэтому $\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab\,х.х}}{R_{вх} + R_н + j(X_{вх} + X_н)}$.

По условию, $R_{вх}$ и $X_{вх}$ заданы и изменять их нельзя. Изменять можно лишь $R_н$ и $X_н$. Выберем такое $X_н$, чтобы ток в цепи был максимальным; это возможно, если $X_{вх}+X_н=0$. При этом двухполюсник работает в резонансном режиме — ток через нагрузку по фазе совпадает с напряжением $\dot{U}_{ab\,х.х}$:

$$\dot{I}=\dot{U}_{ab\,х.х}/(R_{вх}+R_н).$$

Как и в цепи постоянного тока (см. § 1.26), если взять $R_н=R_{вх}$, выделяющаяся в нагрузке мощность максимальна:

$$P_{max}=U^2_{ab\,х.х}/(4R_{вх}).$$

Таким образом, чтобы выделить в нагрузке, присоединяемой к активному двухполюснику с входным сопротивлением $R_{вх}+jX_{вх}$, максимально возможную мощность, необходимо выбрать следующие сопротивления нагрузки: $X_н=-X_{вх}$ и $R_н=R_{вх}$.

§ 3.33. Согласующий трансформатор. Нагрузкой двухполюсника может быть какое-либо уже существующее устройство, сопротивление которого $Z_н$, так же как и входное сопротивление двухполюсника $Z_{вх}$, задано и не может быть изменено. В этом случае согласование нагрузки с двухполюсником осуществляют, присоединяя нагрузку не непосредственно к зажимам двухполюсника, а через *согласующий трансформатор* в соответствии со схемой рис. 3.30, *б*. Обозначим через w_1 и w_2 число витков первичной и вторичной обмоток трансформатора. Активные сопротивления и индуктивности рассеяния обмоток полагаем весьма малыми и при расчете не учитываем. Сердечник трансформатора (на рисунке не показан) выполнен из высококачественного магнитного материала с малыми потерями, поэтому ток холостого хода трансформатора мал по сравнению с током по обмотке w_1 при нагрузке. Такой трансформатор по своим свойствам приближается к трансформатору, который называют *идеальным* (см. § 3.34). Для него справедливы соотношения (обозначения соответствуют рис. 3.30, *б*)

$$\dot{I}w_1-\dot{I}_нw_2\approx 0 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{ab}/\dot{U}_н=w_1/w_2.$$

Пояснения к этим формулам см. в § 15.67 (обозначения согласуются так: $\dot{U}_{ab}=\dot{U}_1$, $\dot{I}_н=\dot{I}_2$ и $\dot{I}=\dot{I}_1$). Входное сопротивление изображенной пунктиром части схемы по отношению к зажимам ab

$$Z_{вх}=\frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}_н\frac{w_1}{w_2}}{\dot{I}_н\frac{w_2}{w_1}}=Z_н\frac{w_1^2}{w_2^2}=R_н\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2+jX_н\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2.$$

В соответствии с предыдущим это сопротивление должно быть комплексно-сопряженное с сопротивлением двухполюсника:

$$Z_{вх}=R_{вх}+jX_{вх}.$$

Отсюда следует, что для выполнения условия согласования по активному сопротивлению $R_{вх}=R_н(w_1/w_2)^2$, а для согласования по реактивному сопротивлению $X_{вх}=-X_н(w_1/w_2)^2$. Отношение чисел витков w_1/w_2 определим из первого условия $w_1/w_2=\sqrt{R_{вх}/R_н}$. При выборе числа витков w_1 и площади поперечного сечения сердечника трансформатора S должно быть учтено, что в установившемся режиме работы амплитудное значение потока в сердечнике не должно достигать потока насыщения этого сердечника, иначе будет нарушено условие $\dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_н w_2 \approx 0$. Для выполнения согласования по реактивному сопротивлению последовательно с нагрузкой включают дополнительное реактивное сопротивление соответствующего характера.

§ 3.34. Идеальный трансформатор. В качестве элементов схем замещения электрических цепей наряду с R, L, C, M в литературе используют идеальный трансформатор (ИТ).

Идеальным называют трансформатор без потерь, у которого входные и выходные токи и напряжения связаны соотношениями $\dot{U}_1 = K\dot{U}_2$, $\dot{I}_2 = K\dot{I}_1$, где $K = w_1/w_2$ — коэффициент трансформации. Идеальный трансформатор трансформирует напряжение $\dot{U}_1$ в напряжение $\dot{U}_2$, ток $\dot{I}_1$ в ток $\dot{I}_2$, сопротивление нагрузки Z в сопротивление $K^2 Z$ (см. § 3.33).

§ 3.35. Падение и потери напряжения в линии передачи энергии. Генератор соединен с приемником энергии линией передачи, которая обладает активным $R_л$ и индуктивным $X_л = \omega L_л$ сопротивлениями.

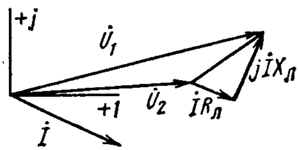


Рис. 3.31

Построим векторную диаграмму для цепи, состоящей из генератора, линии передачи и приемника. Для определенности положим, что нагрузка приемника имеет индуктивный характер. Вектор напряжения в конце линии (на приемнике) направим произвольно (рис. 3.31), ток $\dot{I}$ отстает от него в силу индуктивного характера нагрузки. Падение напряжения в активном сопротивлении линии $\dot{I}R_л$ совпадает по фазе с током, падение напряжения в индуктивном сопротивлении линии $\dot{I}jX_л$ опережает ток на 90°.

Под *падением напряжения* в линии передачи понимают модуль геометрической разности векторов напряжения в начале ($\dot{U}_1$) и конце ($\dot{U}_2$) линии: $I\sqrt{R_л^2+(\omega L_л)^2}$.

Потеря напряжения в линии передачи равна разности модулей напряжения в начале и конце линии, т. е. $|\dot{U}_1| - |\dot{U}_2|$. Потеря напряжения показывает, на сколько вольт напряжение в конце линии меньше, чем напряжение в начале линии. Как правило, падение напряжения больше потери напряжения.

§ 3.36. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитносвязанных катушек. В состав электрических цепей могут входить катушки, магнитносвязанные с другими катушками. Поток одной из них пронизывает другие и наводит в них э. д. с. взаимоиндукции, которые должны быть учтены в расчете. При составлении уравнений для магнитносвязанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки самоиндукции и взаимоиндукции.

Правильное заключение об этом можно сделать, если известно направление намотки катушек на сердечнике и выбрано положительное направление токов в них.

На рис. 3.32, *а* катушки включены согласно, на рис. 3.32, *б* — встречно. Чтобы не загромождать чертеж, сердечники катушек на электрических схемах обычно не изображают, ограничиваясь тем, что одноименные зажимы (например, начала катушек) помечают одинаковыми значками, например звездочками *.

Схема рис. 3.32, *в* эквивалентна схеме рис. 3.32, *а*, а схема рис. 3.32, *г* — схеме рис. 3.32, *б*.

Если на электрической схеме токи двух магнитносвязанных катушек одинаково ориентированы относительно одноименно (звездочками) обозначенных зажимов катушек, например оба направлены к звездочкам или оба направлены от звездочек, то имеет место согласное включение, в противном случае — встречное.

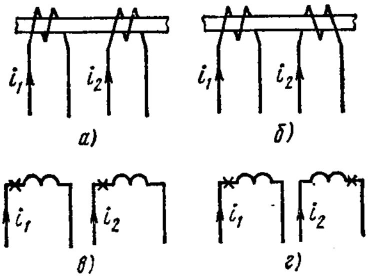


Рис. 3.32

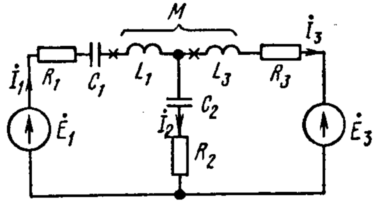


Рис. 3.33

На примере рис. 3.33 рассмотрим методику составления уравнений для расчета магнитносвязанных цепей. Произвольно выберем положительные направления токов в ветвях схемы рис. 3.33. Направления обхода контуров выберем по часовой стрелке. Сначала составим уравнения для мгновенных значений:

$$i_1 = i_2 + i_3;$$

для левого контура (первая и вторая ветви)

$$i_1R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt + i_2R_2 = e_1. \qquad \text{(а)}$$

Перед слагаемым $M\frac{di_3}{dt}$ поставлен тот же знак, что и перед $L_1\frac{di_1}{dt}$, так как ток i_1 и ток i_3 входят в одноименные зажимы магнитносвязанных катушек, т. е. имеет место согласное включение. Сумма слагаемых $M\frac{di_3}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt}$ представляет собой падение напряжения в первой катушке.

Все слагаемые левой части уравнения (а) взяты со знаком плюс, так как на всех участках первого контура положительные направления токов совпадают с направлением обхода контура.

Составим уравнение для правого контура (вторая и третья ветви). Направление тока i_2 встречно направлению обхода контура, поэтому сумма падений напряжений во второй ветви войдет в уравнение со

* Одноименные зажимы магнитносвязанных катушек часто обозначают вместо звездочек точками: ·⌒⌒. Если магнитно связано несколько катушек, то начало и конец размечают для каждой пары катушек отдельно.

знаком минус:

$$-\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt - i_2R_2 + L_3\frac{di_3}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_3R_3 = -e_3.$$

В комплексной форме записи

$$\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_3; \qquad (б)$$

$$\dot I_1\left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1\right) + \dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right) + \dot I_3 j\omega M = \dot E_1; \qquad (в)$$

$$\dot I_1 j\omega M - \dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right) + \dot I_3\,(R_3 + j\omega L_3) = -\dot E_3. \qquad (г)$$

§ 3.37. **Последовательное соединение двух магнитносвязанных катушек.** На рис. 3.34 изображена схема последовательного соглас-

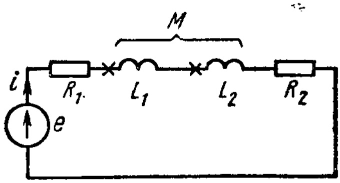


Рис. 3.34

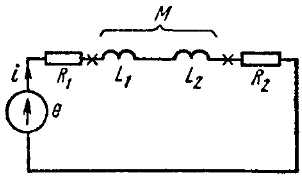


Рис. 3.35

ного включения двух катушек, а на рис. 3.35 — последовательного встречного включения тех же катушек.

При согласном включении

$$iR_1 + L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

В комплексной форме записи

$$\dot I\,[R_1 + R_2 + j\omega\,(L_1 + L_2 + 2M)] = \dot E;$$

$$\dot I Z_{\text{согл}} = \dot E;$$

$$Z_{\text{согл}} = R_1 + R_2 + j\omega\,(L_1 + L_2 + 2M). \qquad (3.54)$$

Векторная диаграмма для согласного включения изображена на рис. 3.36, где $\dot U_1$ — напряжение на первой катушке; $\dot U_2$ — на второй.

При встречном включении

$$iR_1 + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

Отсюда

$$\dot I Z_{\text{встр}} = \dot E,$$

где

$$Z_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega\,(L_1 + L_2 - 2M). \qquad (3.55)$$

Векторная диаграмма для встречного включения при $L_1 > M$ и $L_2 > M$ изображена на рис. 3.37.

§ 3.38. Определение взаимной индуктивности опытным путем. Обсудим два практически важных способа опытного определения взаимной индуктивности M двух магнитносвязанных катушек.

Первый способ. Проделаем два опыта. В первом из них включим катушки последовательно и согласно. Измерим ток и напряжение на

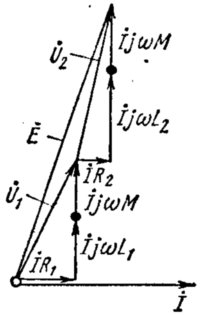


Рис. 3.36

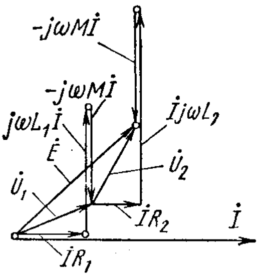


Рис. 3.37

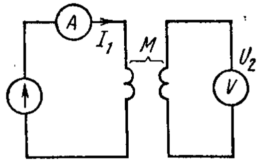


Рис. 3.38

входе и активную мощность цепи. Во втором те же катушки включим последовательно и встречно и также измерим I, U, P. По результатам измерений найдем:

$$X_{\text{согл}} = \omega (L_1 + L_2 + 2M); \qquad X_{\text{встр}} = \omega (L_1 + L_2 - 2M).$$

Разность $X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}} = 4\omega M$, следовательно,

$$M = \frac{X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}}}{4\omega}. \qquad (3.56)$$

Второй способ. Подключим первую катушку к источнику синусоидальной э. д. с. через амперметр (рис. 3.38), а к зажимам второй катушки подключим вольтметр с большим внутренним сопротивлением. Измерим ток I_1 и напряжение U_2.

Мгновенное значение напряжения $u_2 = M\frac{di_1}{dt}$. Его действующее значение $U_2 = \omega M I_1$. Следовательно,

$$M = U_2/\omega I_1. \qquad (3.57)$$

Пример 45. В схеме рис. 3.38 вольтметр показал 100 В, амперметр 10 А; $\omega = 314$ с$^{-1}$. Определить M.

Решение. По формуле (3.57), $M = 100/(314 \cdot 10) = 0{,}0319$ Г.

§ 3.39. Трансформатор. Вносимое сопротивление. Трансформатор представляет собой статическое (т. е. не имеющее подвижных частей) устройство, служащее для преобразования переменного во времени напряжения по величине, а также для электрического разделения цепей и для преобразования сопротивлений по величине. Передача энергии из одной цепи в другую производится трансформатором благодаря явлению взаимоиндукции.

Трансформатор имеет две обмотки, находящиеся на общем сердечнике. Магнитную проницаемость сердечника будем полагать постоянной.

Параметры первичной обмотки R_1 и L_1; вторичной — R_2 и L_2. Взаимная индуктивность между обмотками M (рис. 3.39, *а*). Сопротивление нагрузки, подключенной к зажимам вторичной обмотки, равно $Z_н$.

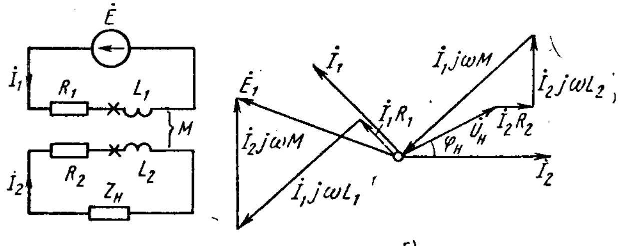


Рис. 3.39

Выберем положительные направления токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Обозначим напряжение на нагрузке $\dot{U}_н$. Запишем уравнения в комплексной форме: для первичной цепи

$$\dot{I}_1R_1+\dot{I}_1j\omega L_1+\dot{I}_2j\omega M=\dot{E}_1; \qquad (3.58)$$

для вторичной цепи

$$\dot{I}_2R_2+\dot{I}_2j\omega L_2+\dot{I}_1j\omega M+\dot{U}_н=0. \qquad (3.59)$$

На рис. 3.39, *б* качественно построим векторную диаграмму, полагая, что нагрузка $Z_н=z_нe^{j\varphi_н}$ имеет индуктивный характер. Ток $\dot{I}_2$ направим по оси $+1$. Напряжение на нагрузке $\dot{U}_н$ опережает ток $\dot{I}_2$ на угол $\varphi_н$. Падение напряжения $\dot{I}_2R_2$ совпадает по фазе с током $\dot{I}_2$. Вектор $\dot{I}_2j\omega L_2$ опережает ток $\dot{I}_2$ на 90°.

В соответствии с уравнением (3.59) вектор $\dot{I}_1j\omega M$ проводим так, чтобы геометрическая сумма падений напряжений во вторичной цепи равнялась нулю.

Вектор тока $\dot{I}_1$ отстает от вектора $\dot{I}_1j\omega M$ на 90°. Вектор $\dot{I}_1R_1$ совпадает с вектором тока $\dot{I}_1$ по фазе, а вектор $\dot{I}_1j\omega L_1$ опережает $\dot{I}_1$ на 90°.

Вектор $\dot{I}_2j\omega M$ опережает $\dot{I}_2$ на 90°. В соответствии с уравнением (3.58) геометрическая сумма $\dot{I}_1R_1+\dot{I}_1j\omega L_1+\dot{I}_2j\omega M$ дает $\dot{E}_1$.

В (3.59) подставим $\dot{U}_н=\dot{I}_2Z_н=\dot{I}_2(R_н+jX_н)$ и решим уравнения (3.58) и (3.59) относительно $\dot{I}_1$:

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}_1}{(R_1+R_{вн})+j(X_1-X_{вн})},$$

где $R_{вн}$ и $X_{вн}$ — вносимые из вторичного контура в первичный активное и реактивное сопротивления;

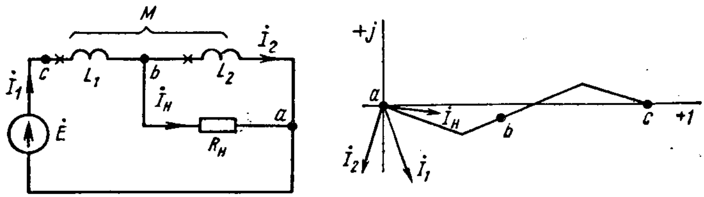
$$R_{вн}=\frac{\omega^2M^2}{(R_2+R_н)^2+(\omega L_2+X_н)^2}(R_2+R_н);$$

$$X_1=\omega L_1;$$

$$X_{вн}=\frac{\omega^2M^2}{(R_2+R_н)^2+(\omega L_2+X_н)^2}(\omega L_2+X_н).$$

Вносимые сопротивления представляют собой такие сопротивления, которые следовало бы «внести» в первичную цепь (включить последовательно с R_1 и X_1), чтобы учесть влияние нагрузки вторичной цепи трансформатора на ток в его первичной цепи.

Пример 46. Определить токи в схеме рис. 3.40, *а* и построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов, полагая $\omega L_1 = 2$ Ом; $\omega L_2 = 3$ Ом; $\omega M = 1$ Ом; $R_н = 4$ Ом; $E = 100$ В.



а) б)

Рис. 3.40

Решение. Составим уравнения по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа,

$$\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_н.$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа обход контуров будем совершать по часовой стрелке; тогда

$$\dot I_1 j\omega L_1 + \dot I_2 j\omega M + \dot I_н R_н = \dot E;$$

$$\dot I_1 j\omega M + \dot I_2 j\omega L_2 - \dot I_н R_н = 0.$$

В двух последних уравнениях заменим $\dot I_н$ на $\dot I_1 - \dot I_2$:

$$\dot I_1 (R_н + j\omega L_1) + \dot I_2 (j\omega M - R_н) = \dot E;$$

$$\dot I_1 (j\omega M - R_н) + \dot I_2 (R_н + j\omega L_2) = 0.$$

Подставим числовые значения:

$$\dot I_1 (4 + 2j) + \dot I_2 (j - 4) = 100;$$

$$\dot I_1 (j - 4) + \dot I_2 (4 + 3j) = 0.$$

Решение уравнений дает: $\dot I_1 = 17{,}7e^{-j63^\circ}$ А; $\dot I_2 = 14{,}6e^{-j114^\circ}$ А; $\dot I_н = \dot I_1 - \dot I_2 = 14{,}12e^{-j9^\circ 54'}$ А.

На рис. 3.40, *б* изображены топографическая диаграмма и совмещенная с ней векторная диаграмма токов.

Пример 47. Построить топографическую диаграмму для схемы рис. 3.41, *а*, совместив ее с векторной диаграммой токов. Две ветви схемы связаны магнитно. Значения параметров: $\omega L_1 = 3$ Ом; $\omega L_2 = 4$ Ом, $\omega M = 3$ Ом, $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $\dot E = 100$ В.

Решение. Обозначим токи в ветвях через $\dot I_1$ и $\dot I_2$ и ток в неразветвленной части схемы — через $\dot I$. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для согласного включения катушек:

$$\dot I_1 (R_1 + j\omega L_1) + \dot I_2 j\omega M = \dot E;$$
$$\dot I_1 j\omega M + \dot I_2 (R_2 + j\omega L_2) = \dot E.$$

Совместное решение их дает: $\dot I_1 = 16e^{-j60^\circ}$ А; $\dot I_2 = 14{,}27e^{-j86^\circ 30'}$ А.

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 3.41, *б*.

Рассмотрим вопрос о *переносе мощности из одной ветви в другую вследствие магнитной связи.* Если ветвь k с током $\dot I_k$ и ветвь q с током $\dot I_q$ связаны магнитно и взаимная индуктивность между ветвями M, то магнитный поток из ветви k в ветвь q переносит комплексную мощность, равную произведению э. д. с. взаимоиндукции в q-ветви $\mp j\omega M \dot I_k$ на сопряженный комплекс тока q-ветви, т. е. $\overset{*}{I}_q$:

$$\tilde S = (\mp j\omega M \dot I_k)\overset{*}{I}_q.$$

Знак минус соответствует согласному, плюс—встречному соединению.

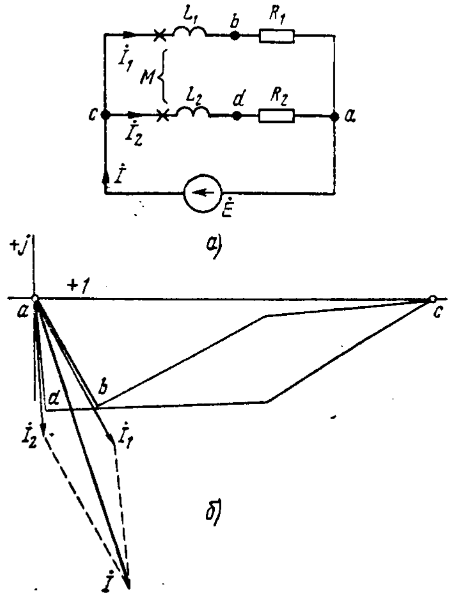


Рис. 3.41

§ 3.40. Резонанс в магнитносвязанных колебательных контурах. В § 3.23—3.27 были описаны резонансные явления в параллельном, последовательном и последовательно-параллельном резонансных контурах. Рассмотрим резонанс в магнитносвязанных колебательных контурах — в схеме рис. 3.42, *а*, часто применяемой в радиотехнике. С целью упрощения выкладок положим $L_1 = L_2 = L$; $C_1 = C_2 = C$; $R_1 = R_2 = R$, что дает возможность относительно легко выявить основные закономерности резонанса в этой схеме.

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$I_1\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) - I_2 j\omega M = \dot E;$$

$$-I_1 j\omega M + I_2\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) = 0.$$

Найдем

$$I_2 = \frac{j\omega M \dot E}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Напряжение на конденсаторе второго контура

$$\dot U_{C_2} = I_2 \frac{1}{j\omega C} = \dot E \frac{M}{C} \frac{1}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Пусть $\dot{U}_{C_2}/\dot{E}=K_u$. Тогда

$$K_u=\frac{M}{C}\cdot\frac{1}{R^2-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+j2R\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)+\omega^2M^2}. \qquad (а)$$

Обозначим $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$; $\frac{R}{\omega_0 L}=\frac{R}{\sqrt{L/C}}=d$; $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{M}{L}$; $\varepsilon=1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

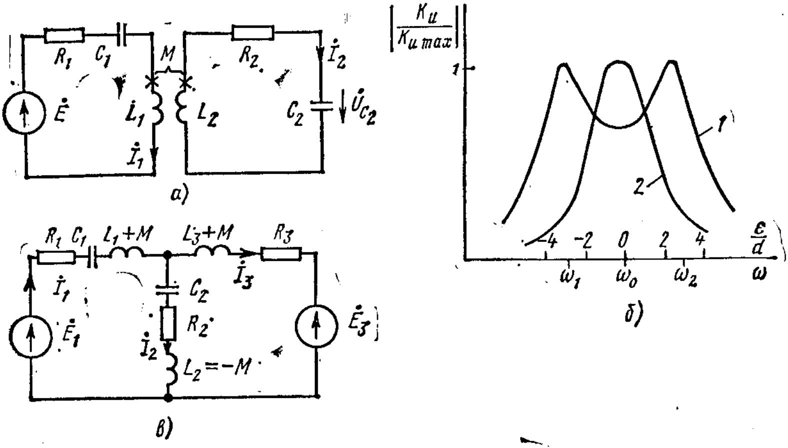


Рис. 3.42

С помощью ε учитывается отклонение текущей частоты ω от резонансной ω_0. Рассмотрим работу схемы при относительно малых отклонениях ω от ω_0. Положим $\omega=\omega_0-\Delta\omega$. Тогда

$$\varepsilon=1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}=\frac{(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)}{\omega_0^2}\approx\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}.$$

В свою очередь,

$$1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\approx-\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}=-\varepsilon.$$

При малых отклонениях ω от ω_0, вынеся в знаменателе выражения (а) за скобку $\omega^2L^2\approx\omega_0^2L^2$ и использовав указанные обозначения, получим

$$K_u=\frac{k}{k^2+d^2-\varepsilon^2-j2\varepsilon d}.$$

Модуль

$$|K_u|=\frac{k}{\sqrt{(k^2+d^2-\varepsilon^2)^2+4\varepsilon^2d^2}}. \qquad (б)$$

При фиксированных k и d можно исследовать $|K_u|$ на экстремум в функции ε для двух случаев: при $k>d$ и при $k<d$.

При $k>d$ имеются три экстремума: минимум при $\varepsilon=0$, т. е. при $\omega=\omega_0$, и два максимума при $\varepsilon_{1,2}=\pm\sqrt{k^2-d^2}$, которым соответствуют частоты $\omega_{1,2}=\omega_0\sqrt{1-\varepsilon_{1,2}}$.

Резонансная кривая при этом имеет два «горба» (кривая *1* на рис. 3.42, *б*, построенная при $k=3d$). С увеличением k «горбы» кривой раздвигаются.

При $k < d$ имеется только один экстремум: максимум при $\varepsilon = 0$ (кривая 2 на рис. 3.42, *б*). По оси абсцисс на этом рисунке отложено ε/d, по оси ординат — $|K_u / K_{u\max}|$, где $|K_{u\max}| = 1/(2d) = \frac{\sqrt{L/C}}{2R}$.

Токи первичного (I_1) и вторичного (I_2) контуров в функции от ε/d при $k > d$ также имеют двугорбую форму.

§ 3.41. **«Развязывание» магнитносвязанных цепей.** Иногда в литературе можно встретить расчетный прием, который называют *развязыванием магнитносвязанных цепей* (катушек). Суть его в том, что исходную схему с магнитносвязанными индуктивностями путем введения дополнительных индуктивностей и изменения имевшихся преобразуют так, что магнитная связь между всеми индуктивностями в преобразованной схеме отсутствует.

Так как преобразования осуществляют на основе составленных по законам Кирхгофа уравнений для исходной схемы, то вновь полученная и исходная схемы в расчетном смысле полностью эквивалентны.

Составим, например, схему, эквивалентную схеме рис. 3.33. С этой целью в уравнении (в) (см. § 3.36) заменим $\dot{I}_3$ на $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ и в уравнении (г) $\dot{I}_1$ на $\dot{I}_2 + \dot{I}_3$. Замену одних токов другими производим так, чтобы в каждое из получающихся после замены уравнений входили только те токи, которые текут в ветвях рассматриваемого контура. В данном случае получим:

$$\dot{I}_1\left[R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega(L_1 + M)\right] + \dot{I}_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M\right) = \dot{E}_1; \qquad \text{(в)}$$

$$-\dot{I}_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M\right) + \dot{I}_3(R_3 + j\omega L_3 + j\omega M) = -\dot{E}_3. \qquad \text{(г)}$$

Уравнениям (в) и (г) соответствует схема рис. 3.42, *в*. Сопоставляя схемы рис. 3.33 и 3.42, *в*, замечаем, что L_1 заменена на $(L_1 + M)$, L_3 — на $(L_3 + M)$, а во вторую ветвь введена отрицательная индуктивность $L_2 = -M$ (физически осуществить отрицательную индуктивность в цепи с линейными элементами невозможно).

§ 3.42. **Теорема о балансе активных и реактивных мощностей.** В любой линейной электрической цепи сумма активных мощностей источников э. д. с. равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей источников э. д. с. — сумме реактивных мощностей приемников энергии.

При этом под реактивной мощностью приемников энергии понимают сумму произведений квадратов токов ветвей, умноженных на реактивные сопротивления ветвей, подсчитанных без учета явления взаимоиндукции, плюс алгебраическая сумма мощностей, переносимых магнитными потоками из одних ветвей в другие вследствие явления взаимоиндукции. При этом имеется в виду, что без учета взаимоиндукции подсчитываются только реактивные сопротивления ветвей, а токи — с учетом этого явления. Пусть схема содержит f узлов, $в$ ветвей и все ветви или часть их связаны друг с другом магнитно. По первому закону Кирхгофа, сумма токов в любом узле равна нулю. Например, для k-узла, в котором сходится n ветвей,

$$\sum_{p=1}^{n} \dot{I}_{kp} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0.$$

Умножим каждое слагаемое этой суммы на потенциал k-узла $\dot{\varphi}_k$:

$$\dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0.$$

Просуммируем аналогичные выражения для всех f узлов схемы:

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0.$$

В двойную сумму любой ток схемы, например ток $\dot{I}_{mq}$, входит дважды и притом с разными знаками. Действительно, при $k=m$ и $p=q$ слагаемое равно $\dot{\varphi}_m \overset{*}{I}_{mq}$, а при $k=q$ и $p=m$ равно $\dot{\varphi}_q \overset{*}{I}_{qm}$. Так как $\overset{*}{I}_{qm} = -\overset{*}{I}_{mq}$, то эти слагаемые можно объединить и получить $\overset{*}{I}_{mq}(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_q)$.

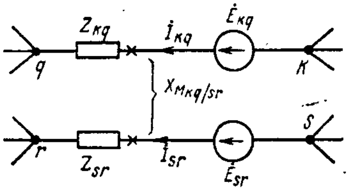


Рис. 3.43

Пусть какая-то ветвь схемы, например ветвь kq, магнитно связана с ветвью sr так, что сопротивление взаимоиндукции между ними $X_{M_{kq/sr}}$ (рис. 3.43).

В соответствии с рис. 3.43 для ветви qk

$$\dot{\varphi}_q - \dot{\varphi}_k = \dot{E}_{kq} - \dot{I}_{kq} Z_{kq} - \dot{I}_{sr} j X_{M_{kq/sr}};$$

для ветви sr

$$\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_s = \dot{E}_{sr} - \dot{I}_{sr} Z_{sr} - \dot{I}_{kq} j X_{M_{kq/sr}}.$$

Если принять, что $\dot{I}_{kq} = I_{kq} e^{j\varphi_{kq}}$, $\dot{I}_{sr} = I_{sr} e^{j\varphi_{sr}}$, и учесть, что $\overset{*}{I}_{kq} = I_{kq} e^{-j\varphi_{kq}}$ и $\overset{*}{I}_{sr} = I_{sr} e^{-j\varphi_{sr}}$,

то сумма двух слагаемых

$$\overset{*}{I}_{kq} \dot{I}_{sr} j X_{M_{kq/sr}} + \dot{I}_{kq} \overset{*}{I}_{sr} j X_{M_{kq/sr}} = I_{kq} I_{sr} j X_{M_{kq/sr}} \left[e^{j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})} + e^{-j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})} \right] =$$
$$= j2 X_{M_{kq/sr}} I_{kq} I_{sr} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}).$$

Таким образом, попарное рассмотрение слагаемых двойной суммы позволяет переписать ее в виде

$$\sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 Z_{kp} + j2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \qquad (3.60)$$

Слагаемые типа $\dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp}$ представляют собой произведение э. д. с., находящейся в ветви kq (k и p — текущие индексы узлов схемы), на сопряженный комплекс тока этой же ветви; I_{kp}^2 — квадрат модуля тока ветви kp; $Z_{kp} = R_{kp} + jX_{kp}$.

В сумму $j2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})$ по одному разу входят попарные произведения токов магнитно связанных друг с другом ветвей, умноженные на соответствующие сопротивления взаимоиндукции и на косинусы углов между токами этих ветвей.

Например, если в некоторой схеме магнитно связаны три ветви (ветви *12*, *13* и *23*), то вторую сумму в (3.60) записывают как

$$j2 \left\{ I_{12} I_{13} X_{M_{12/13}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{13}) + I_{12} I_{23} X_{M_{12/23}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{23}) + \right.$$
$$\left. + I_{23} I_{13} X_{M_{23/13}} \cos(\varphi_{23} - \varphi_{13}) \right\}.$$

Левая и правая части формулы (3.60) представляют собой комплексы. Равенство действительных частей комплексов дает формулу

$$\operatorname{Re} \sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 R_{kp}, \qquad (3.61)$$

а равенство мнимых — формулу

$$\operatorname{Im} \sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 X_{kp} + 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \qquad (3.62)$$

В этой формуле $X_{M_{kq/sr}}$ принято положительным при согласном направлении потоков взаимоиндукции и самоиндукции ветвей kq и sr и отрицательным при встречном их направлении. Формулы (3.61) и (3.62) являются математической записью сформулированной теоремы.

Пример 48. По данным примера 46 в числах убедиться в справедливости теоремы о балансе мощности применительно к схеме рис. 3.40, *а*.

Решение. Активная мощность, доставляемая источником э. д. с.,

$$\operatorname{Re} \dot{E}\overset{*}{I} = \operatorname{Re} 100 \cdot 17{,}7e^{i63°} = 1770 \cos 63° = 800 \text{ Вт}.$$

Активная мощность, потребляемая приемниками, $I_н^2 R_н = 14{,}12^2 \cdot 4 = 800$ Вт. Следовательно, равенство активных мощностей действительно выполнено. Реактивная мощность источника э. д. с. $\operatorname{Im} \dot{E}\overset{*}{I} = 1770 \sin 63° = 1582$ ВАр. Реактивная мощность приемников энергии с учетом согласного включения катушек

$$I_1^2 \omega L_1 + I_2^2 \omega L_2 + 2 I_1 I_2 \omega M \cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) =$$
$$= 17{,}7^2 \cdot 2 + 14{,}6^2 \cdot 3 + 2 \cdot 17{,}7 \cdot 14{,}6 \cos(63° - 144°) = 1582 \text{ ВАр}.$$

Таким образом, баланс реактивных мощностей также удовлетворяется.

§ 3.43. Определение дуальной цепи.

Две электрические цепи называют *дуальными*, если закон изменения контурных токов в одной из них подобен закону изменения узловых потенциалов в другой *. В качестве простейшего примера на рис. 3.44 изображены две дуальные цепи.

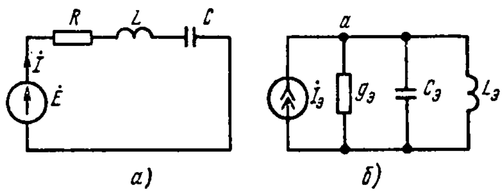


Рис. 3.44

Схема рис. 3.44, *а* состоит из источника э. д. с. $\dot{E}$ и последовательно с ним включенных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (R, L, C). Схема рис. 3.44, *б* состоит из источника тока $\dot{I}_э$ и трех параллельных ветвей. Первая ветвь содержит активную проводимость $g_э$, вторая — емкость $C_э$, третья — индуктивность $L_э$.

Для того чтобы показать, какого рода соответствие имеет место в дуальных цепях, составим для схемы рис. 3.44, *а* уравнение по методу контурных токов:

$$\dot{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{E}, \tag{3.63}$$

а для схемы рис. 3.44, *б* — по методу узловых потенциалов **, обозначив потенциал точки *а* через $\dot{\varphi}_a$:

$$\dot{\varphi}_a\left(g_э + \frac{1}{j\omega L_э} + j\omega C_э\right) = \dot{I}_э. \tag{3.64}$$

Если параметры схемы рис. 3.44, *б* ($g_э$, $L_э$, $C_э$) согласовать с параметрами схемы рис. 3.44, *а* (R, L, C) таким образом, что

$$R/g_э = L/C_э = L_э/C = k, \tag{3.65}$$

---

* Здесь рассмотрены вопросы дуальности для таких цепей, которые путем изменения их начертания могут быть изображены на плоскости без взаимного пересечения ветвей (такие цепи называют *планарными*).

** Потенциал второго узла схемы рис. 3.44, *б* принят равным нулю.

где k — некоторое произвольное число, $Ом^2$, то

$$g_э+\frac{1}{j\omega L_э}+j\omega C_э=\frac{1}{k}\left(R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L\right). \qquad (3.66)$$

С учетом равенства (3.66) перепишем уравнение (3.62) следующим образом:

$$\dot{\varphi}_a\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)=k\dot{I}_э. \qquad (3.67)$$

Из сопоставления уравнений (3.63) и (3.67) следует, что если ток $\dot{I}_э$ источника тока в схеме рис. 3.44, *б* изменяется с той же угловой частотой, что и э. д. с. $\dot{E}$ в схеме рис. 3.44, *а* и численно равен $\dot{E}$, а параметры обеих схем согласованы в соответствии с уравнением (3.65), то при $k=1$ $Ом^2$ закон изменения во времени потенциала φ_a в схеме рис. 3.44, *б* совпадает с законом изменения во времени тока $\dot{I}$ в схеме рис. 3.44, *а*.

Если свойства какой-либо из схем изучены, то они полностью могут быть перенесены на дуальную ей схему.

Между входным сопротивлением $Z_{исх}$ исходного двухполюсника и входной проводимостью $Y_{дуал}$ дуального ему двухполюсника существует соотношение $Z_{исх}=kY_{дуал}$.

Из формулы (3.66) получаем соотношение между частотной характеристикой чисто реактивного исходного двухполюсника $X_{исх}(\omega)$ и частотной характеристикой дуального ему тоже чисто реактивного двухполюсника $b_{дуал}(\omega)$. Действительно, так как $Z_{исх}=jX_{исх}(\omega)$, а $Y_{дуал}=-jb_{дуал}(\omega)$, то $X_{исх}(\omega)=-kb_{дуал}(\omega)$, т. е. частотная характеристика дуального двухполюсника получается из частотной характеристики исходного путем опрокидывания ее относительно оси ω и деления на масштабный множитель k.

Каждому элементу исходной схемы (схемы с источниками э. д. с. $\dot{E}$ и параметрами R, L, C) отвечает свой элемент эквивалентной дуальной схемы (схемы с источниками тока $\dot{I}_э$ и параметрами $g_э$, $C_э$, $L_э$).

§ 3.44. Преобразование исходной схемы в дуальную. Каждому независимому контуру исходной схемы, а также области, являющейся внешней по отношению к схеме, соответствует свой узел дуальной схемы.

Если в какой-либо ветви исходной схемы, являющейся смежной между двумя контурами, имеется n последовательно включенных элементов, то этой ветви соответствует n параллельных ветвей, соединяющих узлы дуальной схемы, которые отвечают этим контурам.

Так, источнику э. д. с. $\dot{E}$ исходной схемы рис. 3.45, *а* отвечает в дуальной схеме источник тока $\dot{I}_э$ (рис. 3.45, *б*), а источнику тока $\dot{I}_э$ — источник э. д. с. $\dot{E}$; активному сопротивлению R — проводимость $g_э$; индуктивности L — емкость $C_э$; емкости C — индуктивность $L_э$. Для преобразования исходной схемы в дуальную поступают следующим образом. Внутри каждого независимого контура (и во внешней области) ставят точки и называют их. Эти точки являются узлами эквивалентной дуальной схемы.

В схеме рис. 3.46, *а* три независимых контура, поэтому внутри них ставим точки *1*, *2*, *3* (точка *1* соответствует первому контуру, точка *2* — второму, точка *3* — третьему).

Во внешней по отношению к схеме области ставим точку *4*. Между полученными четырьмя узлами проводим пунктирные линии — ветви дуальной схемы. Эти линии проводим через элементы исходной схемы (R, L, C, $\dot{E}$) и в дуальной схеме рис. 3.46, *б* включаем в них соответствующие эквиваленты.

Узел *1* на схеме рис. 3.46, *а* соединен с узлом *4* одной пунктирной линией, так как в ветви, являющейся смежной между первым контуром и внешней областью, включено лишь одно сопротивление (активное сопротивление R_1). На схеме рис. 3.46, *б* между узлом *1* и узлом *4* включена активная проводимость $g_{э1} = R_1/k$.

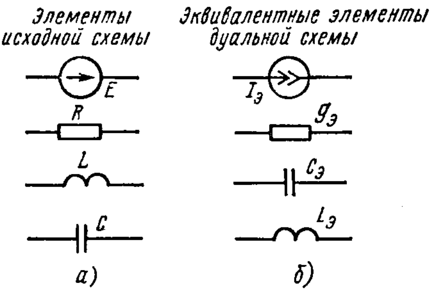


Рис. 3.45

Узлы *1* и *2* на схеме рис. 3.46, *а* соединены двумя пунктирными линиями (одна из них проходит через источник э. д. с. $\dot{E}_5$, другая — через индуктивность L_5), поскольку в ветви, являющейся смежной между контурами *1* и *2*, последовательно соединены два элемента схемы ($\dot{E}_5$ и L_5). Узлы *1* и *2* на схеме рис. 3.46, *б* соединены двумя ветвями. В одну из них включен источник тока $\dot{I}_{э5}$, в другую — емкость $C_{э5} = L_5/k$ (элементы, дуальные $\dot{E}_5$ и L_5).

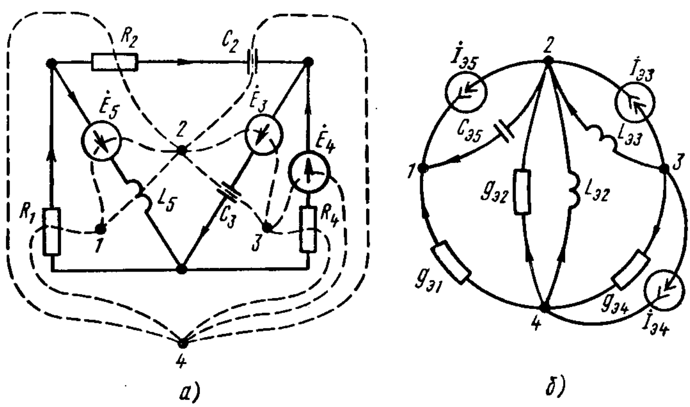


Рис. 3.46

Положительные направления токов источников тока в дуальной схеме должны быть согласованы с положительными направлениями э. д. с. источников э. д. с. в исходной схеме. Если при обходе контура по часовой стрелке какая-то э. д. с. этого контура совпадает с направлением обхода контура, то ток эквивалентного ей источника тока должен быть направлен к k-узлу. Если ток по некоторой ветви исходной схемы совпадает по направлению с направлением обхода k-контура, то в дуальной схеме стрелку на соответствующей ветви направляют к k-узлу. Последнее замечание следует иметь в виду при составлении $[K]$-и $[Q]$-матриц взаимно дуальных схем (см. § Б.3).

Исходную и дуальную ей схемы называют *взаимно обратными*.

Вопросы для самопроверки

1. Какими тремя величинами характеризуется синусоидально изменяющаяся величина? 2. Каков смысл стрелки, указывающей положительное направление для тока ветви и напряжения на элементе цепи? 3. Что понимают под действующим значением тока (напряжения)? 4. Пояснить механизм прохождения синусоидального тока через конденсатор. 5. Изложить основы символического метода расчета. На каком основании все методы расчета цепей постоянного тока применимы к цепям синусоидального тока? 6. Дать определение векторной и топографической диаграммам. 7. Физически интерпретировать P, Q, S. 8. Записать условие резонансного режима двухполюсника. Построить резонансные кривые для цепи рис. 3.26, *а* при изменении X_C и неизменных E, R, L, ω. Что понимают под добротностью индуктивной катушки Q_L конденсатора Q_C и резонансного контура Q? 9. Как по виду частотной характеристики $X(\omega)$ реактивного двухполюсника можно определить, какие и в каком количестве будут возникать в нем резонансные режимы при изменении ω? 10. Какой должна быть взята нагрузка, присоединяемая к активному двухполюснику, чтобы в ней выделялась максимальная мощность? 11. Дать определение согласующего и идеального трансформатора. 12. Как в расчете учитывают наличие магнитной связи между индуктивными катушками? 13. Как осуществляют «развязывание» магнитносвязанных цепей? 14. Сформулировать теорему о балансе активных и реактивных мощностей. 15. Как сформировать дуальную цепь из исходной? 16. Решите задачи 5.1; 5.5; 5.9; 5.11; 5.14; 5.22; 5.34; 5.38; 5.44; 5.54.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

§ 4.1. Определение четырехполюсника. Четырехполюсником называют электрическую схему, имеющую два входных и два выходных зажима. Трансформатор, линию передачи энергии, мостовую схему и т. п. можно рассматривать как четырехполюсники.

Принято изображать четырехполюсник в виде прямоугольника с выходящими из него концами (полюсами) mn и pq (рис. 4.1, *а*). Если четырехполюсник содержит источники электрической энергии, то в прямоугольнике ставят букву A (активный); если буква A отсутствует, то это значит, что четырехполюсник пассивный.

Входной ток обозначают $\dot{I}_1$, входное напряжение $\dot{U}_1$; ток и напряжение на выходе $\dot{I}_2$ и $\dot{U}_2$.

Четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой. К входным зажимам mn, как правило, присоединяют источник питания, к выходным зажимам pq — нагрузку.

Предполагается, что нагрузка четырехполюсника и напряжение на входе при работе четырехполюсника в качестве связующего звена могут изменяться, но схема внутренних соединений четырехполюсника и значения сопротивлений в ней остаются неизменными.

§ 4.2. Шесть форм записи уравнений четырехполюсника. Четырехполюсник характеризуется двумя напряжениями $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ и двумя токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Любые две величины из четырех можно определить

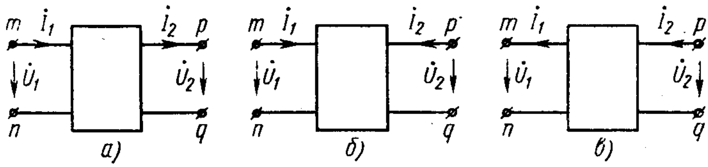


Рис. 4.1

через остальные. Так как число сочетаний из 4 по 2 равно 6, то возможны следующие 6 форм записи уравнений пассивного четырехполюсника:

A-форма: $$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad (4.1)$$
$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2; \quad (4.2)$$
Y-форма: $$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad (4.3)$$
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2; \quad (4.4)$$
Z-форма: $$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad (4.5)$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2; \quad (4.6)$$
H-форма: $$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \quad (4.7)$$
$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2; \quad (4.8)$$
G-форма: $$\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \quad (4.9)$$
$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2; \quad (4.10)$$
B-форма: $$\dot{U}_2 = B_{11}U_1 + B_{12}\dot{I}_1; \quad (4.11)$$
$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \quad (4.12)$$

Обратим внимание на попарную инверсию *Y*- и *Z*-форм, *A*- и *B*-форм, *H*- и *G*-форм.

Исторически сложилось так, что для *A*-формы (ее будем считать основной) положительные направления для токов и напряжений соответствуют рис. 4.1, *а*; для *Y*-, *Z*-, *H*-, *G*-форм — рис. 4.1, *б*, *B*-форме — рис. 4.1, *в*.

Обратим внимание на то, что ток $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *б* направлен противоположно направлению тока $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *а*.

На рис. 4.1, *в* токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ изменили направление по сравнению с токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *а*.

Рассмотрение уравнений начнем с *A*-формы.

§ 4.3. Вывод уравнений в *A*-форме. Комплексные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* в уравнениях (4.1) и (4.2) зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, значений сопротивлений схемы и частоты. Для каждого четырехполюсника их можно определить расчетным или опытным путем. Для четырехполюсников, удовлетворяющих условию взаимности, коэффициенты связаны соотношением

$$AD - BC = 1. \tag{4.13}$$

Выведем уравнения (4.1) и (4.2). С этой целью к зажимам mn подключим источник э. д. с. $\dot{E} = \dot{U}_{mn} = \dot{U}_1$, а к зажимам pq — нагрузку Z_2 (рис. 4.2, *а*).

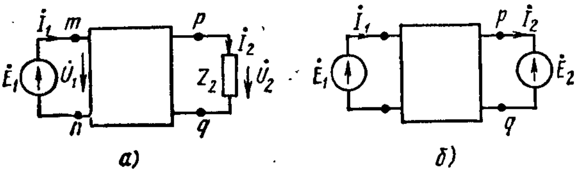


Рис. 4.2

Напряжение на нагрузке $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_{pq}$. Согласно теореме компенсации (см. § 1.17), заменим нагрузку Z_2 источником э. д. с. с э. д. с. $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$ и направленной встречно току $\dot{I}_2$ (рис. 4.2, *б*). Запишем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, выразив их через э. д. с. $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и входные и взаимные проводимости ветвей y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}:

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 y_{11} - \dot{E}_2 y_{12}; \tag{а}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 y_{21} - \dot{E}_2 y_{22}. \tag{б}$$

Если токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ рассматривать как контурные токи, то э. д. с. контуров, совпадающие с направлением контурных токов, войдут в уравнения, подобные уравнению (1.7), со знаком плюс, а э. д. с., не совпадающие с направлением соответствующих контурных токов, — со знаком минус.

Э. д. с. $\dot{E}_1$ направлена согласно с $\dot{I}_1$, поэтому она вошла в уравнения (а) и (б) со знаком плюс; э. д. с. $\dot{E}_2$ направлена встречно $\dot{I}_2$, поэтому она вошла в эти уравнения со знаком минус.

Для линейных четырехполюсников, не содержащих нелинейных элементов (для взаимных четырехполюсников), согласно принципу взаимности (см. § 1.16), $y_{12} = y_{21}$. Из (б) найдем

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{22}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{1}{y_{21}}. \tag{в}$$

Подставив (в) в (а), получим

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{y_{11}}{y_{21}}. \tag{г}$$

Обозначим:

$$A = y_{22}/y_{21},\quad B = 1/y_{21},\quad C = (y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21})/y_{21},\quad D = y_{11}/y_{21}. \tag{д}$$

В уравнениях (в) и (г) заменим $\dot{E}_1$ на $\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2$ на $\dot{U}_2$ и воспользовавшись обозначениями (д), получим уравнения в A-форме:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Проверим выполнение соотношения (4.13) для взаимного четырехполюсника:

$$AD-BC=\frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}^2}-\frac{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}{y_{21}^2}=1.$$

Для невзаимного четырехполюсника $y_{12}\neq y_{21}$ и $AD-BC=y_{12}/y_{21}\neq 1$.

Далее обсудим соотношения, которые имеют место между $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, если источник э. д. с. $\dot{E}_1$ присоединен к зажимам pq, а нагрузка — к зажимам mn (рис. 4.3).

Как и в предыдущем выводе, заменим нагрузку Z_2 на источник э. д. с. с э. д. с. $\dot{E}_2$, направленной встречно току $\dot{I}_2$, и запишем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_2=-\dot{E}_2y_{11}+\dot{E}_1y_{12}; \qquad (е)$$

$$\dot{I}_1=-\dot{E}_2y_{21}+\dot{E}_1y_{22}. \qquad (ж)$$

Из (е) найдем

$$\dot{E}_1=\dot{E}_2\frac{y_{11}}{y_{12}}+\dot{I}_2\frac{1}{y_{12}}. \qquad (з)$$

Подставим (з) в (ж):

$$\dot{I}_1=\dot{E}_2\frac{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}{y_{12}}+\dot{I}_2\frac{y_{22}}{y_{12}}.$$

Заменив $\dot{E}_1$, на $\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2$ на $\dot{U}_2$ и воспользовавшись обозначениями (д), перепишем две последние строчки следующим образом:

$$\dot{U}_1=D\dot{U}_2+B\dot{I}_2; \qquad (4.14)$$

$$\dot{I}_1=C\dot{U}_2+A\dot{I}_2. \qquad (4.14')$$

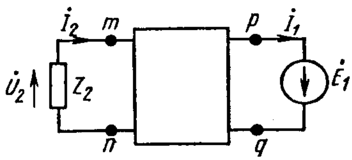


Рис. 4.3

Таким образом, уравнения (4.1) и (4.2) характеризуют работу четырехполюсника при питании со стороны зажимов mn и присоединении нагрузки к зажимам pq, а уравнения (4.14) и (4.14′) — при его питании со стороны зажимов pq и присоединении нагрузки к зажимам mn.

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами источника питания и нагрузки токи в источнике питания и нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике $A=D$.

Уравнения (4.1) и (4.2) иногда записывают так:

$$\dot{U}_1=A_{11}\dot{U}_2+A_{12}\dot{I}_2; \qquad (4.1')$$

$$\dot{I}_1=A_{21}\dot{U}_2+A_{22}\dot{I}_2, \qquad (4.2')$$

где $A_{11}=A$; $A_{12}=B$; $A_{21}=C$; $A_{22}=D$.

§ 4.4. Определение коэффициентов A-формы записи уравнений четырехполюсника. Комплексные коэффициенты A, B, C, D, входящие в уравнения (4.1) и (4.2), можно определить по формулам (д), если схема внутренних соединений четырехполюсника и ее параметры известны, либо используя входные сопротивления четырехполюсника, полученные опытным или расчетным путем.

Комплексные входные сопротивления находят опытным путем с помощью ваттметра, амперметра и вольтметра по схеме, подобной схеме рис. 3.24, *а*, с тем отличием, что вместо двухполюсника зажимами *mn* или *pq* (в зависимости от определяемого входного сопротивления) подключают испытуемый четырехполюсник.

Определим комплексное входное сопротивление четырехполюсника при трех различных режимах его работы.

1. При питании со стороны зажимов *mn* и разомкнутой ветви *pq* (х. х. ветви *pq*, $\dot{I}_2=0$, индекс нуль)

$$Z_{10}=\dot{U}_{10}/\dot{I}_{10}=z_{10}e^{j\varphi_{10}}=A/C. \qquad (и)$$

2. При питании со стороны зажимов *mn* и коротком замыкании ветви *pq* (к. з., $\dot{U}_2=0$, индекс *k*)

$$Z_{1k}=\dot{U}_{1k}/\dot{I}_{1k}=z_{1k}e^{j\varphi_{1k}}=B/D. \qquad (к)$$

3. При питании со стороны зажимов *pq* и коротком замыкании зажимов *mn* ($\dot{U}_2=0$)

$$Z_{2k}=z_{2k}e^{j\varphi_{2k}}=B/A. \qquad (л)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных коэффициентов A, B, C, D располагаем четырьмя уравнениями:

$$AD-BC=1,\ Z_{10}=A/C,\ Z_{1k}=B/D,\ Z_{2k}=B/A.$$

Составим разность

$$1-\frac{Z_{1k}}{Z_{10}}=1-\frac{BC}{AD}=\frac{1}{AD} \quad \text{или} \quad \frac{Z_{10}-Z_{1k}}{Z_{10}}=\frac{1}{AD}. \qquad (м)$$

Имеем

$$Z_{2k}/Z_{1k}=D/A. \qquad (н)$$

Умножим (м) на (н):

$$\frac{(Z_{10}-Z_{1k})\,Z_{2k}}{Z_{10}Z_{1k}}=\frac{1}{A^2}.$$

Отсюда

$$A=\sqrt{\frac{Z_{10}Z_{1k}}{Z_{2k}\,(Z_{10}-Z_{1k})}}. \qquad (4.15)$$

Формула (4.15) позволяет через Z_{10}, Z_{1k} и Z_{2k} определить коэффициент A; после этого коэффициент C находят из (и), B — из (л) и D — из (к).

Коэффициенты A и D имеют нулевую размерность, коэффициент B имеет размерность Ом, коэффициент C — См.

Пример 49. Опытным путем было найдено, что $Z_{10}=7{,}815e^{-j51°12'}$ Ом; $Z_{1k}=12{,}5e^{j66°23'}$ Ом; $Z_{2k}=3{,}33e^{j27°33'}$ Ом. Определить коэффициенты A, B, C, D четырехполюсника.

Решение. Находим

$$Z_{10}-Z_{1k}=5-6j-5-12j=-18j=18e^{-j90°}.$$

По формуле (4.15) подсчитаем:

$$A = \sqrt{\frac{7{,}815e^{-j51°12'} \cdot 12{,}5e^{j66°23'}}{3{,}33e^{j27°33'} \cdot 18e^{-j90°}}} \approx 1{,}28e^{j39°40'};$$

$$C = A/Z_{10} = 1{,}28e^{j39°40'}/7{,}815e^{-j51°12'} \approx 0{,}166e^{j90°} \text{ См};$$

$$B = AZ_{2k} \cong 4{,}26e^{j67°} \text{ Ом}, \quad D = B/Z_{1k} = 0{,}34.$$

Пример 50. К зажимам pq (см. рис. 4.1) четырехполюсника примера 49 подсоединена нагрузка $Z_2 = 6 + j6$ Ом; к зажимам mn — источник э. д. с. Найти $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, если $\dot{I}_2 = 1$ А.

Решение. По формуле (4.1),

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{I}_2(AZ_2 + B) =$$
$$= 1 \cdot \left(1{,}28e^{j39°40'} \cdot 6\sqrt{2}\, e^{j45°} + 4{,}26e^{j67°}\right) = 14{,}85e^{j79°45'} \text{ В}.$$

По формуле (4.2),

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_2(CZ_2 + D) = 1{,}165e^{j123°} \text{ А}.$$

§ 4.5. Т- и П-схемы замещения пассивного четырехполюсника. Функции пассивного взаимного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой могут выполнять Т-схема (схема звезды рис. 4.4, *а*) или эквивалентная ей П-схема (схема треугольника рис. 4.4, *б*).

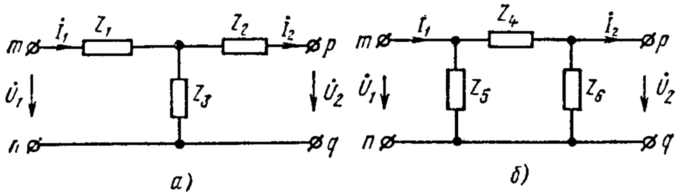


Рис. 4.4

Предполагается, что частота ω фиксирована. Три сопротивления Т- или П-схемы подсчитывают с учетом того, что схема замещения должна обладать теми же коэффициентами A, B, C, D, что и заменяемый ею четырехполюсник.

Задача эта однозначна, так как схема замещения содержит три элемента и четырехполюсник характеризуется тоже тремя параметрами (одна связь между A, B, C, D задана уравнением $AD - BC = 1$)*.

Выразим напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ Т-схемы (рис. 4.4, *а*) через напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2}{Z_3} = \dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \dot{I}_2\left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right); \tag{4.16}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_2\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) + \dot{I}_2\left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}\right). \tag{4.17}$$

* У невзаимного четырехполюсника $y_{12} \neq y_{21}$, поэтому для него схема замещения образована не тремя, а четырьмя элементами (см., например, схему замещения транзистора в § 15.35).

Сопоставим (4.16) с (4.1) и (4.17) с (4.2). При сопоставлении найдем:

$$A=1+(Z_1/Z_3);\ B=Z_1+Z_2+Z_1Z_2/Z_3;\ C=1/Z_3,\ D=1+Z_2/Z_3. \quad (4.18)$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Z_3&=1/C;\\ Z_1&=(A-1)/C;\\ Z_2&=(D-1)/C. \end{aligned}\right\} \quad (4.19)$$

Формулы (4.18) и (4.19) позволяют найти сопротивления Z_1, Z_2 и Z_3 (рис. 4.4, *а*) по коэффициентам четырехполюсника A, C, D. Аналогичные выкладки для П-схемы (рис. 4.4, *б*) дают:

$$A=1+\frac{Z_4}{Z_6};\quad B=Z_4;\quad C=\frac{Z_4+Z_5+Z_6}{Z_5Z_6};\quad D=\frac{Z_4}{Z_5}+1; \quad (4.20)$$

$$Z_4=B; \quad (4.21)$$

$$Z_5=B/(D-1); \quad (4.22)$$

$$Z_6=B/(A-1). \quad (4.23)$$

Если четырехполюсник симметричный, то $A=D$ и в Т-схеме замещения $Z_1=Z_2$, а в П-схеме $Z_5=Z_6$.

§ 4.6. Определение коэффициентов *Y*-, *Z*-, *G*-, *B*-форм записи уравнений четырехполюсника. Комплексные коэффициенты Y_{11}, $Y_{12}=Y_{21}$, Y_{22} в уравнениях (4.3) и (4.4) можно найти следующим образом:

$$Y_{11}=\dot I_1/\dot U_1 \text{ при } \dot U_2=0;\ Y_{12}=\dot I_1/\dot U_2 \text{ при } \dot U_1=0;\ Y_{22}=\dot I_2/\dot U_2 \text{ при } \dot U_1=0.$$

Коэффициенты Z_{11}, $Z_{12}=Z_{21}$, Z_{22} в уравнениях (4.5) и (4.6) определим так:

$$Z_{11}=\dot U_1/\dot I_1 \text{ при } I_2=0;\ Z_{12}=\dot U_2/\dot I_1 \text{ при } I_2=0;\ Z_{22}=\dot U_2/\dot I_2 \text{ при } I_1=0.$$

Аналогичным образом найдем коэффициенты и других форм записи, например H-формы:

$$H_{11}=\dot U_1/\dot I_1 \text{ при } U_2=0;\ H_{22}=\dot I_2/\dot U_2 \text{ при}$$
$$I_1=0;\ H_{21}=\dot I_2/\dot I_1 \text{ при } U_2=0.$$

Обратим внимание на то, что $Y_{12}=Y_{21}$, $Z_{12}=Z_{21}$, но $H_{12}=-H_{21}$, $G_{12}=-G_{21}$, а B_{12} не равно B_{21} даже по модулю.

Пример 51. Вывести формулы Z-параметров для Т-схемы замещения четырехполюсника (рис. 4.4, *а*).

Решение.

$$Z_{11}=\dot U_1/\dot I_1\,_{\text{при } I_2=0}=Z_1+Z_3;\quad Z_{12}=Z_{21}=\dot U_2/\dot I_1\,_{\text{при } I_2=0}=Z_3;$$
$$Z_{22}=\dot U_2/\dot I_2\,_{\text{при } I_1=0}=Z_2+Z_3.$$

§ 4.7. Определение коэффициентов одной формы уравнений через коэффициенты другой формы. На практике возникает потребность в переходе от одной формы записи уравнений к другой.

Для того чтобы коэффициенты одной формы записи найти через коэффициенты другой формы, необходимо выразить какие-либо две одинаковые величины в этих двух формах и сопоставить их, учтя направления токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ для этих форм. Так, для A-формы

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \frac{A}{C} - \dot{I}_2 \frac{1}{C}, \tag{о}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \frac{1}{C} - \dot{I}_2 \frac{D}{C}; \tag{п}$$

для Z-формы

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}, \tag{р}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}. \tag{с}$$

Сопоставляя правые части (о) и (р) и учитывая, что ток $\dot{I}_2$ в выражении (р) равен току $-\dot{I}_2$ в выражении (о), получим:

$$Z_{11} = A/C, \quad Z_{12} = 1/C.$$

Из (п) и (с)

$$Z_{21} = 1/C, \quad Z_{22} = D/C.$$

При переходе от коэффициентов A-формы к коэффициентам других форм получаем:

$$Y_{11} = D/B, \ Y_{12} = Y_{21} = -1/B, \ Y_{22} = A/B;$$

$$H_{11} = B/D, \ H_{12} = -H_{21} = 1/D, \ H_{22} = C/D;$$

$$G_{11} = C/A, \ G_{12} = -G_{21} = -1/A, \ G_{22} = B/A;$$

$$B_{11} = D, \ B_{12} = B, \ B_{21} = C, \ B_{22} = A.$$

Пример 52. Определить Y-параметры четырехполюсника через Z-параметры.

Решение. Решим уравнения (4.5) и (4.6) относительно $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, сопоставим полученные уравнения с уравнениями (4.3) и (4.4). Получим:

$$Y_{11} = Z_{22}/\Delta_z; \quad Y_{22} = Z_{11}/\Delta_z; \quad Y_{12} = Y_{21} = -Z_{12}/\Delta_z,$$

$$\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2.$$

Для Т-схемы (рис. 4.4, *а*)

$$\Delta_z = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3;$$

$$Y_{11} = (Z_2 + Z_3)/\Delta_z, \quad Y_{22} = (Z_1 + Z_3)/\Delta_z, \quad Y_{12} = -Z_3/\Delta_z.$$

В табл. 4.1 даны соотношения для перехода от одной формы уравнений к любой другой (A-форма — для взаимных четырехполюсников).

§ 4.8. Применение различных форм записи уравнений четырехполюсника. Соединения четырехполюсников. Условия регулярности. Ту или иную форму записи уравнений применяют, исходя из соображений удобства. Так, в теории синтеза цепей (см. § 10.5 ÷ 10.8) используют обычно Y- или Z-форму записи. Параметры транзисторов для малых переменных составляющих (см. § 15.35) дают в Y-, H- или Z-форме, так как в этих формах их удобнее определить практически.

При нахождении связи между входными и выходными величинами различным образом соединенных четырехполюсников (при определе-

Таблица 4.1

К матрице	От матрицы				
	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$	$[G]$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$
$[Z]$		$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta_Y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{11}} & \frac{-G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\Delta_G}{G_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$
$[Y]$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta_Z} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta_H}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ \frac{-G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-1}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$
$[H]$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{Y_{11}} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \frac{G_{22}}{\Delta_G} & \frac{-G_{12}}{\Delta_G} \\ \frac{-G_{21}}{\Delta_G} & \frac{G_{11}}{\Delta_G} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{1}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$
$[G]$	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{H_{22}}{\Delta_H} & \frac{-H_{12}}{\Delta_H} \\ \frac{-H_{21}}{\Delta_H} & \frac{H_{11}}{\Delta_H} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-1}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\Delta_Y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta_H}{H_{21}} & \frac{H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\Delta_G}{G_{21}} \end{matrix}$	

нии коэффициентов эквивалентного четырехполюсника) используют Z-, Y-, H-, G и A-формы.

При последовательном соединении четырехполюсников a и b (рис. 4.5, *а*) применяют Z-форму, при параллельном соединении (рис. 4.5, *б*) — Y-форму, при последовательно-параллельном (рис. 4.5, *в*) — H-форму, при параллельно-последовательном (рис. 4.5, *г*) — G-форму, при каскадном (рис. 4.5, *д*) — A-форму.

Форму записи уравнений выбирают исходя из удобства получения матрицы составного четырехполюсника. Так Z-матрица последовательно соединенных четырехполюсников равна сумме Z-матриц этих четырехполюсников, так как напряжение на входе (выходе) эквивалентного четырехполюсника равно сумме напряжений на входе (выходе) составляющих его четырехполюсников. Y-матрица параллельно соединенных четырехполюсников равна сумме их Y-матриц. Аналогично и в отношении H-матрицы при последовательно-параллельном и G-матрицы при параллельно-последовательном соединениях четырехполюсников. При каскадном соединении ток и напряжение на выходе первого четырехполюсника равны входным току и напряжению второго четырехполюсника, поэтому A-матрица двух каскадно соединенных четырехполюсников a и b равна произведению A-матриц этих четырехполюсников:

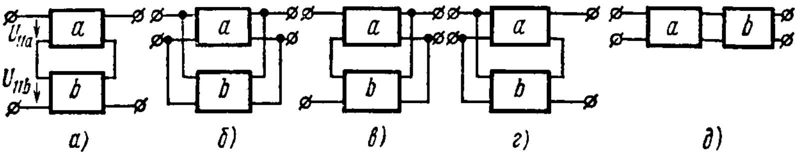


Рис. 4.5

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_aA_b+B_aC_b & A_aB_b+B_aD_b \\ C_aA_b+D_aC_b & C_aB_b+D_aD_b \end{bmatrix}.$$

При параллельном, последовательном, параллельно-последовательном и последовательно-параллельном соединениях необходимо соблюдать *условие регулярности соединения четырехполюсников* — через оба первичных зажима каждого четырехполюсника должны течь равные по величине и противоположные по направлению токи; то же и по отношению к вторичным зажимам каждого четырехполюсника.

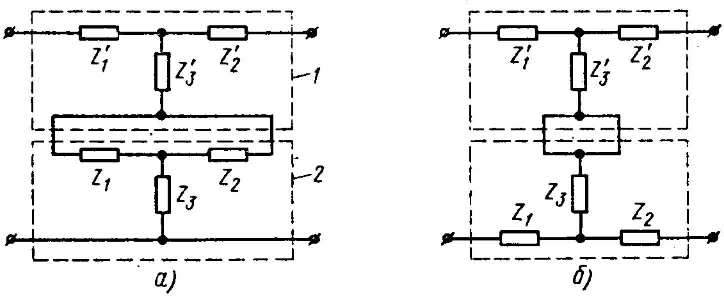


Рис. 4.6

При *регулярном* соединении матрица каждого четырехполюсника должна оставаться такой же, какой она была до соединения четырехполюсников.

Пример нарушения условия регулярности при последовательном соединении показан на рис. 4.6, *а*. Так соединять четырехполюсники *1* и *2* нельзя, поскольку сопротивления Z_1 и Z_2 второго четырехполюсника оказываются соединенными параллельно, что приводит к изменению Z-матрицы второго четырехполюсника по сравнению с Z-матрицей уединенного второго четырехполюсника.

Регулярное соединение тех же четырехполюсников показано на рис. 4.6, *б* — перекрещены обе пары концов второго четырехполюсника (при перекрещивании обеих пар концов все элементы любой матрицы остаются неизменными).

§ 4.9. Характеристические сопротивления четырехполюсников. В случае несимметричного четырехполюсника ($A \neq D$) говорят о двух характеристических сопротивлениях Z_{c1} и Z_{c2}, где Z_{c1} — входное соп-

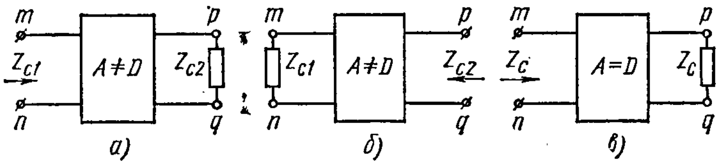


Рис. 4.7

ротивление со стороны зажимов *mn*, когда нагрузка подключена к зажимам *pq* и равна Z_{c2} (рис. 4.7, *а*);

$$Z_{c1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{c2} + B}{CZ_{c2} + D}; \tag{4.24}$$

Z_{c2} — входное сопротивление со стороны зажимов *pq*, когда нагрузка Z_{c1} подключена к зажимам *mn* (рис. 4.7, *б*); при этом коэффициенты A и D меняются местами:

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2} = \frac{DZ_{c1} + B}{CZ_{c1} + A}. \tag{4.25}$$

Совместно решая (4.24) и (4.25), найдем:

$$Z_{c1} = \sqrt{AB/CD}; \quad Z_{c2} = \sqrt{DB/CA}. \tag{4.26}$$

Учитывая, что $A/C = Z_{10}$, $B/D = Z_{1k}$, $B/A = Z_{2k}$, $D/C = Z_{20}$, получим

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{10}Z_{1k}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_{20}Z_{2k}}. \tag{4.27}$$

Если четырехполюсник симметричен ($A = D$), то $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{B/C}$, где Z_c равно входному сопротивлению четырехполюсника, когда он нагружен на Z_c (рис. 4.7, *в*).

§ 4.10. Постоянная передачи и единицы измерения затухания. Для симметричного четырехполюсника, нагруженного на Z_c,

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_2(A + \sqrt{BC}); \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2(A + \sqrt{BC}).$$

Комплексное число $A + \sqrt{BC}$ полагают равным e^g, где $g = a + jb = \ln(A + \sqrt{BC})$ — *постоянная передачи.*

Из формулы

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^a e^{jb} \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^a e^{jb}$$

следует, что модуль $\dot{U}_1$ в e^a раз больше модуля $\dot{U}_2$, а модуль $\dot{I}_1$ в e^a раз больше модуля $\dot{I}_2$. По фазе U_1 опережает $\dot{U}_2$ на угол b, ток $\dot{I}_1$ опережает $\dot{I}_2$ также на угол b.

Величина a характеризует *затухание четырехполюсника*. Единицами измерения затухания являются *неперы* (Нп) и *белы* (Б). Неперы определены на основе натуральных логарифмов, а белы — на основе десятичных. Затухание в неперах

$$a_{\text{Нп}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{S_1}{S_2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2.$$

Если $U_1/U_2 = e$, то затухание равно 1 Нп. Затухание в белах

$$a_{\text{Б}} = \lg|S_1/S_2| = \lg|U_1/U_2|^2 = 2\lg|U_1/U_2|,$$

а в децибелах

$$a_{\text{дБ}} = 20\lg|U_1/U_2|.$$

Если U_1 больше U_2 в 10 раз, то затухание равно 20 дБ, если $U_1/U_2 = 100$, то $a = 40$ дБ.

Выразим неперы через белы. Если $|S_1/S_2| = 10$, то $|U_1/U_2| = \sqrt{10}$. При этом $a_{\text{Нп}} = \frac{1}{2}\ln 10 = 1{,}15$; $a_{\text{Б}} = \lg 10 = 1$. Таким образом, 1 Б = = 1,15 Нп, а 1 Нп = 0,868 Б = 8,68 дБ.

§ 4.11. Уравнения четырехполюсника, записанные через гиперболические функции. Для симметричного четырехполюсника A-форму уравнений (4.1) и (4.2) записывают иногда через гиперболические функции от аргумента g, полагая $A = D = \operatorname{ch} g$, $B = Z_c \operatorname{sh} g$, $C = \operatorname{sh} g/Z_c$. При этом $AD - BC = \operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1$ и

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \operatorname{ch} g\dot{U}_2 + Z_c \operatorname{sh} g\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\operatorname{sh} g}{Z_c}\dot{U}_2 + \operatorname{ch} g\dot{I}_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

Убедимся в справедливости замены A на $\operatorname{ch} g$:

$$e^g = A + \sqrt{BC},\quad e^{-g} = \frac{1}{A+\sqrt{BC}};\quad \operatorname{ch} g = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g}) = A.$$

Форма записи через гиперболические функции используется, например, в теории фильтров (см. гл. 5).

§ 4.12. Конвертор сопротивления. Если у невзаимного четырехполюсника $B = C = 0$ и он нагружен на зажимах pq на сопротивление $Z_{\text{н}}$, то входное сопротивление со стороны зажимов mn

$$Z_{\text{вх}} = \frac{AZ_{\text{н}} + B}{CZ_{\text{н}} + D} = Z_{\text{н}}/k_1,$$

где $k_1 = D/A$, т. е. четырехполюсник преобразует (конвертирует) сопротивление $Z_{\text{н}}$ в сопротивление $Z_{\text{н}}/k_1$. Коэффициент k_1 называют *коэффициентом конвертирования*.

Если A и D имеют одинаковые знаки, то $Z_{\text{вх}}$ имеет тот же знак, что и $Z_{\text{н}}$ (конвертор положительного сопротивления), если разные, то знак $Z_{\text{вх}}$ противоположен знаку $Z_{\text{н}}$ (конвертор отрицательного сопротивления).

Если у конвертора $A = 1$, то $k_1 = D$, $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = k_1\dot{I}_2$. В этом случае конвертор называют *идеальным конвертором с преобразованием тока* (при неизменном напряжении).

Если у конвертора $D=1$, то $k_1=1/A$, $\dot U_1=\dot U_2/k_1$, $\dot I_1=\dot I_2$. Такой конвертор называют *идеальным конвертором с преобразованием напряжения*.

У конвертора есть H- и G-матрицы, но отсутствуют Z- и Y-матрицы.

§ **4.13. Инвертор сопротивления.** Если у невзаимного четырехполюсника $A=D=0$, то $Z_{вх}=(B/C)(1/Z_н)$ и четырехполюсник в этом случае называют *инвертором сопротивления*, а $B/C=k_2$ — *коэффициентом инвертирования*.

Если B и C имеют одинаковые знаки, то $Z_{вх}\equiv 1/Z_н$ (инвертор положительного сопротивления), если знаки у B и C разные, то $Z_{вх}\equiv -1/Z_н$ (инвертор отрицательного сопротивления).

У идеального инвертора входное сопротивление не зависит от того, к каким зажимам (pq или mn) подключена нагрузка.

У инвертора есть Y- и Z-матрицы, но отсутствуют H- и G-матрицы.

§ **4.14. Гиратор.** *Гиратором* называют инвертор отрицательного сопротивления, имеющий следующую Y-матрицу:

$$[Y]=\begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix},$$

где G — *проводимость* гиратора. Для идеального гиратора G — вещественное число. Для гиратора $\dot I_1=G\dot U_2$, $\dot I_2=-G\dot U_1$.

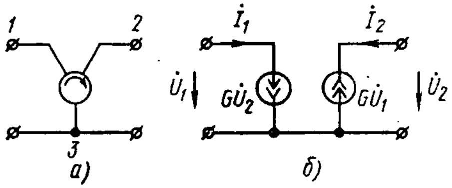


Рис. 4.8

Гиратор не поглощает энергию. Он преобразует напряжение в ток. Если на выходе гиратора включено сопротивление $Z_н$, то его входное сопротивление $Z_{вх}=1/(G^2Z_н)$.

Представим гиратор как трехполюсник на рис. 4.8, *а* (зажим *3* на схеме общий для входной и выходной цепей). Его Y-матрица остается неизменной, если, оставив гиратор неподвижным, в направлении стрелки последовательно изменять нумерацию его зажимов. Гиратор является невзаимным (необратимым) четырехполюсником, так как для него $Y_{12}\neq Y_{21}$. Практически осуществить гиратор можно, например, по схеме рис. 4.8, *б*, в которой использованы два управляемых напряжением источника тока: $G\dot U_2$ и $G\dot U_1$.

§ **4.15. Активный четырехполюсник.** Под *активным четырехполюсником* будем понимать линейный четырехполюсник, содержащий источники энергии, но не содержащий транзисторов и электронных ламп. Рассмотрим уравнения, описывающие связь между его входными и выходными величинами, и его схему замещения.

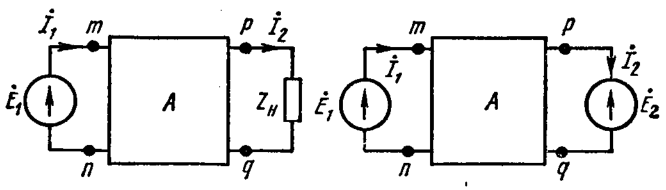


Рис. 4.9

Положим, что в первой ветви mn активного четырехполюсника рис. 4.9, *а* есть источник э. д. с. $\dot E_1$, во второй ветви pq — нагрузка $Z_н$, а в остальных ветвях $(3-p)$, находящихся внутри четырехполюсника, имеются или могут иметься источники э. д. с. $\dot E_k$ (индекс k может принимать значения от 3 до p). Тогда, заменив по теореме компенсации сопротивление $Z_н$ на источник э. д. с. $\dot{E}_2$ (рис. 4.9, *б*), запишем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1=\dot{E}_1y_{11}-\dot{E}_2y_{12}+\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{1k}; \tag{4.29}$$

$$\dot{I}_2=\dot{E}_1y_{21}-\dot{E}_2y_{22}+\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{2k}. \tag{4.30}$$

Осуществим короткое замыкание одновременно на зажимах *mn* и *pq*. При этом по первой ветви протекает ток $\dot{I}_{1kk}=\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{1k}$, а во второй — ток $\dot{I}_{2kk}=\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{2k}$.

В (4.29) вместо $\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{1k}$ подставим $\dot{I}_{1kk}$, а в (4.30) $\dot{I}_{2kk}$ вместо $\sum_{k=3}^{p}\dot{E}_ky_{2k}$. Кроме того, заменим $\dot{E}_1$ на $\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2$ на $\dot{U}_2$. В результате получим:

$$\dot{I}_1-\dot{I}_{1kk}=y_{11}\dot{U}_1-y_{12}\dot{U}_2; \tag{4.31}$$

$$\dot{I}_2-\dot{I}_{2kk}=y_{21}\dot{U}_1-y_{22}\dot{U}_2. \tag{4.32}$$

Уравнения (4.31) и (4.32) отличаются от уравнений (а) и (б) только тем, что в их левых частях находятся соответственно $\dot{I}_1-\dot{I}_{1kk}$ и $\dot{I}_2-\dot{I}_{2kk}$ вместо $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Отсюда следует, что все уравнения, получающиеся из (а) и (б) в результате их преобразований, справедливы и для активного четырехполюсника, только в них $\dot{I}_1$ следует заменить на $\dot{I}_1-\dot{I}_{1kk}$, а $\dot{I}_2$ — на $\dot{I}_2-\dot{I}_{2kk}$.

Так, *A*-форме уравнений для пассивного четырехполюсника ($\dot{U}_1=A\dot{U}_2+B\dot{I}_2$, $\dot{I}_1=C\dot{U}_2+D\dot{I}_2$) соответствует *A*-форма уравнений для активного четырехполюсника

$$[\dot{U}_1=A\dot{U}_2+B(\dot{I}_2-\dot{I}_{2kk});$$
$$\dot{I}_1-\dot{I}_{1kk}=C\dot{U}_2+D(\dot{I}_2-\dot{I}_{2kk})].$$

Коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* активного четырехполюсника удовлетворяют условию $AD-BC=1$ и определяются так же, как и для пассивного.

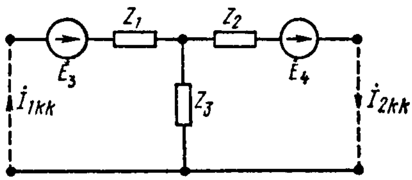


Рис. 4.10

На рис. 4.10 изображена одна из возможных Т-схем замещения активного четырехполюсника. Сопротивления Z_1, Z_2 и Z_3 определяют через коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* так же, как и для пассивного четырехполюсника, а э. д. с. $\dot{E}_3$ и $\dot{E}_4$ находят по значениям токов $\dot{I}_{1kk}$ и $\dot{I}_{2kk}$ и сопротивлениям из уравнений, составленных для режима одновременного короткого замыкания входа и выхода (показано пунктиром на рис. 4.10):

$$\dot{I}_{1kk}(Z_1+Z_3)-\dot{I}_{2kk}Z_3=\dot{E}_3;$$
$$-\dot{I}_{1kk}Z_3+\dot{I}_{2kk}(Z_2+Z_3)=\dot{E}_4.$$

Исследование работы электрических цепей часто проводят графическими методами путем построения круговых и линейных диаграмм. Перед тем как приступить к изучению круговых диаграмм, рассмотрим вопрос о построении дуги окружности по хорде и вписанному углу.

§ 4.16. Построение дуги окружности по хорде и вписанному углу. Из курса геометрии известно, что вписанным углом называется угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Так, $\angle ABC = \psi$ (рис. 4.11, *а*) измеряется $A\breve{D}C/2$, а $\angle ADC$ дугой $A\breve{B}C/2$. Сумма $\angle ABC + \angle ADC = \pi$.

Угол EDC является дополнительным до π к ADC, поэтому $\angle EDC = \psi$.

Какое бы положение ни занимала точка D в интервале от A до C, угол между продолжением хорды AD (т. е. линией DE) и хордой DC остается неизменным и равным ψ.

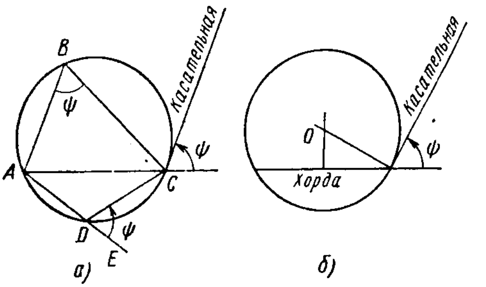


Рис. 4.11

Угол между продолжением хорды AC и касательной (полукасательной) к окружности в точке C также равняется углу ψ.

Центр окружности O находится на пересечении перпендикуляра к середине хорды и перпендикуляра к касательной (рис. 4.11, *б*).

Из изложенного следует, что если заданы хорда и вписанный угол ψ, то для нахождения центра окружности необходимо: 1) восставить перпендикуляр к середине хорды; 2) под углом ψ к продолжению хорды провести прямую, которая будет являться касательной к окружности; 3) восставить перпендикуляр к касательной; пересечение перпендикуляра к хорде и перпендикуляра к касательной даст центр окружности.

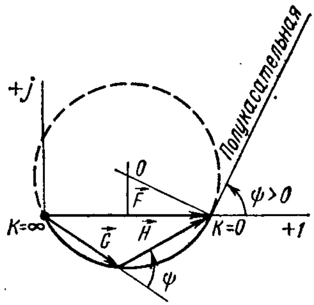


Рис. 4.12

§ 4.17. Уравнение дуги окружности в векторной форме записи.

Построения, аналогичные построениям рис. 4.11, *а*, могут быть выполнены и на комплексной плоскости. В этом случае все хорды, например CA, DA, CD, являются векторами.

На комплексной плоскости рис. 4.12 совместим хорду $\overrightarrow{CA} = \vec{F}$ с осью $+1$. Если угол $\psi > 0$, то от продолжения хорды его откладывают против часовой стрелки; если $\psi < 0$, угол откладывают по часовой стрелке.

Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{G}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{H}$. Тогда

$$\vec{G} + \vec{H} = \vec{F}. \qquad (4.31')$$

Вектор $\vec{H}$ опережает вектор $\vec{G}$ на угол ψ. Пусть модуль вектора $\vec{H}$ будет в k раз больше модуля вектора $\vec{G}$. Тогда

$$\vec{H} = k\vec{G}e^{j\psi}. \qquad (4.31'')$$

Если $k=0$, то $\vec{H}=0$ и $\vec{G}=\vec{F}$. При $k=\infty$ $\vec{H}=\vec{F}$ и $\vec{G}=0$. Подставив (4.31″) в (4.31′), получим

$$\vec{G}(1+ke^{j\psi})=\vec{F},$$

или

$$\vec{G}=\frac{\vec{F}}{1+ke^{j\psi}}. \qquad (4.31''')$$

Уравнение (4.31‴) называют *уравнением дуги окружности в векторной форме записи*.

При изменении коэффициента k от 0 до ∞ меняются оба вектора $\vec{G}$ и $\vec{H}$, но так, что угол ψ между ними остается неизменным, а сумма векторов равна вектору $\vec{F}$. Конец вектора $\vec{G}$ скользит по дуге окружности, хордой которой является вектор $\vec{F}$. Поэтому можно сказать, что дуга окружности является геометрическим местом концов вектора $\vec{G}$.

Рабочей частью окружности, или рабочей дугой, является та часть окружности, которая по отношению к хорде лежит по обратную сторону от полукасательной (рабочая дуга на рис. 4.12 вычерчена сплошной линией, нерабочая — пунктиром).

Рабочая дуга меньше половины окружности при $|\psi|<90°$ и больше половины окружности при $|\psi|>90°$.

§ 4.18. Круговые диаграммы. Из § 3.4 известно, что синусоидально изменяющиеся функции времени (токи, напряжения) могут быть изображены векторами на комплексной плоскости. Если процесс в электрической цепи описывается уравнением, по форме тождественным уравнению (4.31‴), то геометрическим местом концов вектора тока (напряжения), выполняющего в уравнении электрической цепи ту же роль, что и вектор $\vec{G}$ в уравнении (4.31‴), является окружность.

Под *круговой диаграммой* тока или напряжения понимают дугу окружности, являющуюся геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) при изменении по модулю какого-либо сопротивления электрической цепи и сохранении неизменными остальных сопротивлений, частоты и э. д. с. источников энергии.

С помощью круговых диаграмм производят графический анализ работы электрических цепей.

§ 4.19. Круговая диаграмма тока для двух последовательно соединенных сопротивлений. Пусть к источнику э. д. с. подключены последовательно $Z_1=z_1e^{j\varphi_1}$ и $Z=ze^{j\varphi}$ (рис. 4.13). Сопротивление Z_1 неизменно, а Z может меняться лишь по модулю, так что угол φ остается постоянным. Ток в цепи

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{Z_1+Z}=\frac{\dot{E}/Z_1}{1+\frac{z}{z_1}e^{j(\varphi-\varphi_1)}}, \qquad (4.32')$$

где $\dot{E}/Z=\dot{I}_k$ — ток в цепи при коротком замыкании сопротивления Z.

Обозначим $\varphi - \varphi_1 = \psi$. Тогда

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j\psi}}. \qquad (4.32'')$$

Уравнение (4.32″) тождественно (4.31‴). Роль вектора $\vec{F}$ играет комплекс $\dot{I}_k$; роль коэффициента k — отношение z/z_1; роль $\vec{G}$ — вектор $\dot{I}$. При изменении z вектор $\dot{I}$ будет скользить по дуге окружности, хордой которой является $\dot{I}_k$.

На круговой диаграмме рис. 4.14 вектор э. д. с. направлен по оси $+1$. Ток $\dot{I}_k = \dot{E}/z_1 e^{j\varphi_1}$ отстает от э. д. с. $\dot{E}$ на угол φ_1. Для определенности построим диаграмму при $\psi < 0$. Выберем масштаб токов: пусть отрезок ac в масштабе m_I выражает собой модуль тока $\dot{I}_k$. Отрезок da характеризует модуль тока $\dot{I}$, отрезок cd в соответствии с уравнением

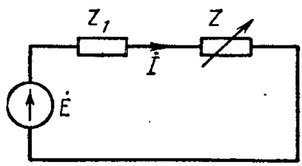


Рис. 4.13

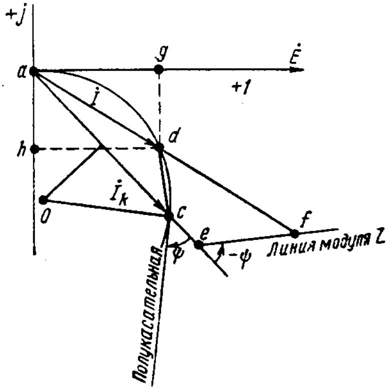


Рис. 4.14

(4.32″) — модуль произведения $\dot{I}\frac{z}{z_1}e^{j\psi}$. Отложим по направлению $\dot{I}_k$ отрезок ae в произвольном масштабе m_z, выражающий модуль постоянного сопротивления z_1: $z_1 = aem_z$.

Из точки e под углом $-\psi$ к линии ae проводим прямую ef, которая является (как будет показано далее) линией модуля переменного сопротивления z при отсчете от точки e. На ней в масштабе m_z нанесем деления для измерения z.

Из подобия треугольников adc и aef следует:

$$\frac{ad}{dc} = \frac{ae}{ef}, \quad ef = ae\frac{dc}{ad} = \frac{z_1}{m_z}\cdot\frac{I\frac{z}{z_1}}{I} = \frac{z}{m_z},$$

или

$$z = efm_z.$$

Следовательно, отрезок ef в масштабе m_z определяет модуль переменного сопротивления z.

Проекция $\dot{I}$ на направление $\dot{E}$ — отрезок ag — в масштабе $m_P = Em_I$ измеряет активную мощность:

$$P = agm_P = agEm_I = agE\,(I/ad) = EI\cos\varphi,$$

$$m_I = I/ad; \quad ag/ad = \cos\varphi.$$

Проекция $\dot{I}$ на направление, перпендикулярное $\dot{E}$, — отрезок ah — в масштабе m_P определяет реактивную мощность:

$$Q = ahm_P = ahE\,(I/ad) = EI\sin\varphi.$$

§ 4.20. Круговая диаграмма напряжения для двух последовательно соединенных сопротивлений. Умножив обе части уравнения (4.32″) на $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ и учтя, что $\dot{I}Z_1 = \dot{U}_{z_1}$, получим

$$\dot{U}_{z_1} = \frac{\dot{E}}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)}}. \qquad (4.33)$$

Уравнение (4.33) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{z_1}$ является дуга окружности, хорда которой $\dot{E}$.

§ 4.21. Круговая диаграмма для активного двухполюсника. Ток в цепи нагрузки $Z_н = z_н e^{j\varphi_н}$ активного двухполюсника рис. 3.30, *а*

$$\dot{I}_н = \frac{\dot{U}_{ab\,х.\,х}}{Z_{вх} + Z_н} = \frac{\dot{U}_{ab\,х.\,х}/Z_{вх}}{1 + \frac{z_н}{z_{вх}} e^{j(\varphi_н - \varphi_{вх})}}, \qquad (4.34)$$

где $Z_{вх} = z_{вх} e^{j\varphi_{вх}}$ — комплексное входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab выделенной ветви.

Из уравнения (4.34) следует, что при изменении модуля сопротивления нагрузки $z_н$ ток $\dot{I}_н$ скользит по дуге окружности.

Пример 53. В схеме рис. 4.13 $\dot{E} = 120$ В; $Z_1 = R_1 = 24$ Ом; сопротивление Z чисто емкостное и модуль его изменяется от 0 до ∞. Построить круговые диаграммы тока и напряжения для сопротивления Z_1.

Решение. Ток $\dot{I}_k = 120/24 = 5$ А. Выберем масштаб для токов ($m_I = 1{,}39$ А/см) и напряжений ($m_U = 26$ В/см).

Найдем угол $\psi = \varphi - \varphi_1 = -90° - 0° = -90°$.

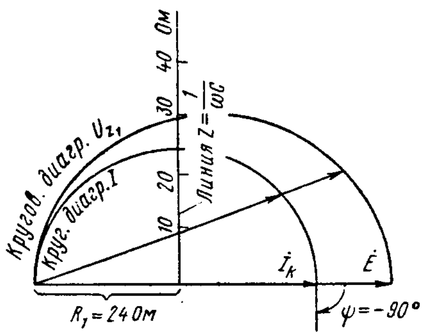


Рис. 4.15

На рис. 4.15 построены круговая диаграмма тока на токе $\dot{I}_k$, как на диаметре, и круговая диаграмма напряжения на э. д. с. $\dot{E}$, как на диаметре. Масштаб для сопротивлений $m_z = 13$ Ом/см. Для любого значения сопротивления z по диаграмме находим ток I и напряжение U_{z_1}. Так, при $z = 9{,}5$ Ом $I = 4{,}65$ А, $U_{z_1} = 111{,}5$ В.

Пример 54. Построить геометрическое место концов вектора тока $\dot{I}$ неразветвленной части схемы рис. 4.16 и графически исследовать возможность возникновения резонансных режимов при следующих данных: $\dot{E} = 30$ В; $R_2 = 6$ Ом; $X_C = 8$ Ом; $R_1 = 3$ Ом; X_L изменяется от 0 до ∞.

Решение. Ток $\dot{I}_2$ в схеме остается неизменным:

$$\dot{I}_2 = 30/(6 - j8) = 3e^{j53°10'} \text{ А}.$$

Ток $\dot{I}_2$ на 53°10′ опережает э. д. с. $\dot{E}$ (рис. 4.17). Вектор тока $\dot{I}_1$ при изменении X_L меняется так, что конец его скользит по дуге окружности, диаметром которой является вектор тока

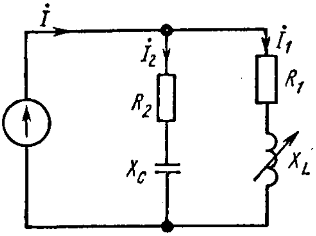


Рис. 4.16

$$\dot{I}_{1k} = \dot{E}/R_1 = 10 \text{ А}, \quad m_I = 2{,}65 \text{ А/см}.$$

Ток в неразветвленной части схемы $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Геометрическим местом его является также дуга окружности $a12b$. В режимах, соответствующих точкам 1 и 2, ток $\dot{I}$ совпадает по фазе с э. д. с. $\dot{E}$. Следовательно, в этих режимах в схеме имеет место резонанс токов.

Выберем масштаб сопротивлений $m_z = 2$ Ом/см. Графически найдем X_L для точек 1 и 2. Для точки 2 $X_L \approx 0{,}8$ Ом, для точки 1 $X_L \approx$ $\approx 10{,}6$ Ом. При этом ток $I = 11{,}1$ А и 2,4 А.

§ 4.22. Круговая диаграмма для четырехполюсника. Пусть напряжение $\dot{U}_1$ на входе четырехполюсника рис. 4.2, *а* неизменно по величине, фазе и частоте, а нагрузка $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ на выходе его изменяется только по модулю, так что характеризующий ее угол φ_2 остается постоянным. В этом случае для тока $\dot{I}_2$, напряжения $\dot{U}_2$, тока $\dot{I}_1$ могут быть построены круговые диаграммы. Сначала рассмотрим круговую диаграмму тока $\dot{I}_2$. С этой целью всю схему четырехполюсника рис. 4.2, *а*, исключая нагрузку Z_2, заменим активным двухполюсником и по методу эквивалентного генератора найдем ток $\dot{I}_2$ в ветви pq:

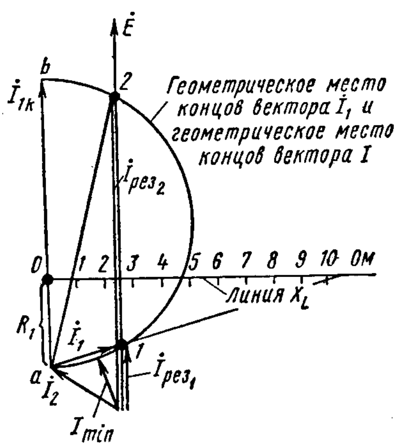


Рис. 4.17

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{pq\,\text{х. х}}/(Z_{\text{вх}pq} + Z_2). \qquad (4.35')$$

Под $\dot{U}_{pq\,\text{х. х}}$ понимаем напряжение между точками p и q при размыкании ветви pq, а под $Z_{\text{вх}\,pq} = Z_{2k} = z_{2k}e^{j\varphi_{2k}}$ — входное сопротивление по отношению к зажимам pq при короткозамкнутых зажимах mn (в схеме рис. 4.2, *а* к зажимам mn присоединен источник э. д. с.). Разделив числитель и знаменатель правой части (4.35′) на $Z_{\text{вх}\,pq} = Z_{2k}$ и учтя, что $\dot{U}_{pq\,\text{х. х}}/Z_{2k} = \dot{I}_{2k}$, где $\dot{I}_{2k}$ — ток к. з. ветви pq, получим

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_{2k}}{1 + \frac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}. \qquad (4.35)$$

Из уравнения (4.35) следует, что вектор тока $\dot{I}_2$ скользит по дуге окружности, хордой которой является ток $\dot{I}_{2k}$. Теперь построим круговую диаграмму тока $\dot{I}_1$ на входе четырехполюсника. Из предыдущего [см. формулу (1.14)] известно, что при изменении сопротивления в одной из ветвей линейной электрической цепи два тока в двух любых ветвях этой цепи связаны соотношением $I_m = a + bI_n$.

Следовательно, ток $\dot{I}_1$ может быть линейно выражен через ток $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = a + b\dot{I}_2. \qquad (4.36)$$

Определим коэффициенты a и b. Если ветвь pq разомкнута, то $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_{10}$. При этом из (4.36) найдем $a = \dot{I}_{10}$. Если ветвь pq короткозамкнута, то $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2k}$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1k}$. Поэтому

$$\dot{I}_{1k} = \dot{I}_{10} + b\dot{I}_{2k}. \qquad (4.37)$$

Отсюда

$$b = (\dot{I}_{1k} - \dot{I}_{10})/\dot{I}_{2k}. \qquad (4.38)$$

Подставив (4.37) и (4.38) в (4.36), получим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \frac{\dot{I}_{1k} - \dot{I}_{10}}{1 + \dfrac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}. \qquad (4.39)$$

Уравнение (4.39) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора тока $\dot{I}_1$ также является дуга окружности. Хордой ее является разность $\dot{I}_{1k} - \dot{I}_{10}$; вектор $\dot{I}_{10}$ смещает начало отсчета.

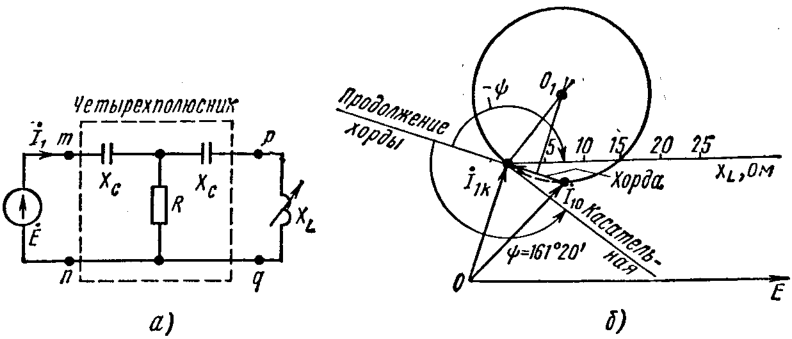


Рис. 4.18

Аналогичным образом строят круговую диаграмму напряжения. Так, если в какой-то схеме изменяется по модулю сопротивление $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ в одной, например второй, ветви, то для напряжения на некотором участке ab этой схемы можно записать выражение, аналогичное (4.39):

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ab\,\text{х.х}} + \frac{\dot{U}_{ab\,\text{к.з}} - \dot{U}_{ab\,\text{х.х}}}{1 + \dfrac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}, \qquad (4.40)$$

где $\dot{U}_{ab\,\text{х.х}}$ — напряжение на зажимах ab при $z_2 = \infty$; $\dot{U}_{ab\,\text{к.з}}$ — напряжение на зажимах ab при $z_2 = 0$; $Z_{2k} = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}}$ — входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам, к которым присоединено сопротивление Z_2.

Формула (4.40) выведена на основе выражения $\dot{U}_{ab} = a_1 + b_1\dot{I}_2$ и формулы (4.35).

Пример 55. Построить круговую диаграмму тока $\dot{I}_1$ схемы рис. 4.18, *а*, в которой $X_C = 5$ Ом; $R = 5$ Ом; $E = 100$ В. Нагрузкой четырехполюсника является индуктивное сопротивление X_L, которое может изменяться от нуля до бесконечности.

Решение. Найдем ток холостого хода выходная ветвь разомкнута):

$$\dot I_{10}=\frac{\dot E}{R-jX_C}=\frac{100}{5-j5}=14{,}15e^{j45^\circ}\ \text{А}.$$

Определим ток короткого замыкания (при коротком замыкании нагрузки):

$$\dot I_{1k}=\frac{\dot E}{-jX_C+\dfrac{R(-jX_C)}{R-jX_C}}=12{,}82e^{j71^\circ 20'}\ \text{А}.$$

Рассчитаем входное сопротивление Z_{2k} со стороны зажимов pq при коротком замыкании зажимов mn:

$$Z_{2k}=z_{2k}e^{j\varphi_{2k}}=-jX_C+\frac{R(-jX_C)}{R-jX_C}=7{,}8e^{-j71^\circ 20'}\quad \text{Ом}.$$

Следовательно, $\varphi_{2k}=-71^\circ 20'$. Угол $\psi=\varphi_2-\varphi_{2k}=90^\circ-(-71^\circ 20')=161^\circ 20'$.

Круговая диаграмма тока $\dot I_1$ построена на рис. 4.18, *б*. Хордой окружности является разность $\dot I_{1k}-\dot I_{10}$. Угол $\psi>0$, поэтому для определения положения касательной он отложен от продолжения хорды против часовой стрелки. Диаграмма носит несколько необычный характер: рабочая часть дуги занимает почти целую окружность.

Для определения положения конца вектора тока $\dot I_1$ из конца вектора $\dot I_{10}$ через точку на линии X_L, соответствующую заданной величине X_L, проводится прямая до пересечения с рабочей частью дуги окружности. При $X_L=5$ Ом ток $\dot I_1$ опережает э. д. с. $\dot E$ на 90°.

§ 4.23. Линейные диаграммы. Под *линейными диаграммами* понимают диаграммы, в которых геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) является прямая линия. По существу, линейная диаграмма является частным случаем круговой диаграммы, поскольку прямая есть дуга окружности с бесконечно большим радиусом.

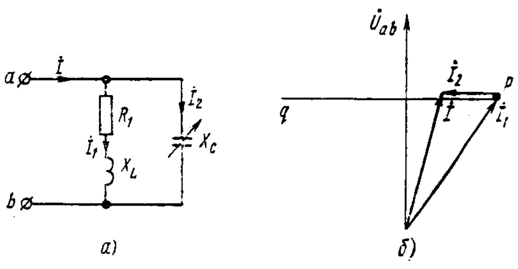


Рис. 4.19

Пример 56. Построить геометрическое место концов вектора тока в схеме рис. 4.19, *а* при изменении X_C. Напряжение $U_{ab}=\text{const}$, R_1 и X_L неизменны.

Решение. На рис. 4.19, *б* изображаем вектор $\dot U_{ab}$. Вектор тока $\dot I_1$ отстает от него на угол $\varphi=\operatorname{arctg} X_L/R_1$.

Ток $\dot I_2$ опережает $\dot U_{ab}$ на 90°. Геометрическим местом концов тока $\dot I=\dot I_1+\dot I_2$ будет прямая линия pq. Она и является линейной диаграммой тока $\dot I$.

Вопросы для самопроверки

1. Записать шесть форм записи уравнений четырехполюсника, показать для них положительные направления отсчета токов и напряжений и пояснить, в каких случаях каждая форма записи имеет преимущества перед остальными. **2.** Как опытным путем определить коэффициенты A-, Z- Y-, H-, G-, B-, форм записи? 3. Каким образом, зная коэффициенты одной формы записи, определить коэффициенты другой формы? 4. Какое соединение четырехполюсников называют регулярным? Что понимают под Z_{c1} и Z_{c2} несимметричного четырехполюсника и как их определить через коэффициенты A, B, C, D и через входные сопротивления? 5. Запишите уравнения четырехполюсника через гиперболические функции. 6. Что называют постоянной передачи? 7. В каких единицах измеряют затухание? 8. Охарактеризуйте свойства конвертора, инвертора и гиратора. 9. Сформулируйте условия, при которых можно строить круговую диаграмму. В чем преимущества исследования цепей с помощью круговых диаграмм? 10. Как определить рабочую часть дуги окружности? 11. Как определить масштаб на линии переменного сопротивления? 12. При каком условии круговая диаграмма переходит в линейную? 13. Решите задачи 6.4; 6.9; 6.13; 6.23; 6.35; 6.38.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

§ 5.1. Назначение и типы фильтров. Под *электрическими фильтрами* понимают четырехполюсники, включаемые между источником питания и приемником (нагрузкой), назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно — без затухания — пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать, или пропускать, но с большим затуханием, токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют *полосой прозрачности*; диапазон частот, пропускаемых с затуханием, — *полосой затухания*.

Электрические фильтры собирают обычно из индуктивных катушек и конденсаторов. Исключение составляют RC-фильтры (см. § 5.6). Фильтры используют главным образом в радиотехнике и технике связи, где применяются токи довольно высоких частот.

При высоких частотах индуктивные сопротивления ωL индуктивных катушек во много раз больше их активных сопротивлений. Поэтому будем полагать, что активные сопротивления индуктивных катушек и активная проводимость конденсаторов равны нулю, т. е. фильтры составлены только из идеальных реактивных элементов.

Фильтры обычно собирают по симметричной Т- или П-схеме (см. рис. 4.4, *а*, *б*), т. е. при $Z_2 = Z_1$ и $Z_6 = Z_5$.

При изучении фильтров будем пользоваться понятием о коэффициенте затухания и коэффициенте фазы (см. § 4.10).

Условимся сопротивления Z_1 в схеме рис. 4.4, *а* и сопротивление Z_4 в схеме рис. 4.4, *б* называть продольными сопротивлениями, а сопротивление Z_3 в схеме рис. 4.4, *а* и сопротивления Z_5 в схеме рис. 4.4, *б* — поперечными сопротивлениями.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число (число k), не зависящее от частоты, принято называть *k-фильтрами*. Фильтры, в которых это произведение зависит от частоты, называют *m-фильтрами*.

Сопротивление нагрузки $Z_н$, присоединяемое на выходе фильтра, должно быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра Z_c. В k-фильтрах Z_c существенно изменяется в зависимости от частоты ω, находящейся в полосе прозрачности. Это обстоятельство вызывает потребность изменять сопротивление нагрузки в функции от частоты (особенно при приближении к границе полосы прозрачности), что нежелательно. В m-фильтрах при определенных значениях коэффициента m, сопротивление Z_c мало изменяется от частоты (в пределах полосы прозрачности) и потому нагрузка практически может быть одна и та же по величине для различных значений ω, находящихся в этих пределах.

Качество фильтра тем выше, чем более резко выражены его фильтрующие свойства, т. е. чем более резко возрастает затухание в полосе затухания.

Фильтрующие свойства четырехполюсников физически обусловлены возникновением в них резонансных режимов — резонансов токов или резонансов напряжений.

§ 5.2. Основы теории k-фильтров. Из § 4.10 известно, что если нагрузка $Z_н$ согласована с характеристическим сопротивлением Z_c четырехполюсника, то напряжение $\dot{U}_2$ и ток в нагрузке $\dot{I}_2$ связаны с напряжением $\dot{U}_1$ и током $\dot{I}_1$ на входе четырехполюсника следующими соотношениями:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-g}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-g},$$

где $g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) = a + jb$.

Тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-a} e^{-jb}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-a} e^{-jb}.$$

Множитель e^{-a} определяет, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на входе фильтра.

Если $a = 0$, то $e^{-a} = e^0 = 1$ и фильтр пропускает колебания без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности $a = 0$.

В полосе затухания $a > 0$. Множитель e^{-jb}, по модулю равный 1, свидетельствует о том, что напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ отстают соответственно от $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ на угол b.

Фильтрующие свойства четырехполюсника рассмотрим путем сравнения выражения для коэффициента A четырехполюсника с равным ему выражением гиперболического косинуса от аргумента $a + jb$:

$$A = \operatorname{ch}(a + jb).$$

Гиперболический косинус от суммы двух аргументов (с учетом того, что $\operatorname{ch} jb = \cos b$ и $\operatorname{sh} jb = j \sin b$) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b.$$

Для любого фильтра, собранного по Т-схеме (см. § 4.5), $A = 1 + (Z_1/Z_3)$.

Для фильтра, собранного по П-схеме (см. § 4.5), $A = 1 + (Z_4/Z_5)$.

Из каких бы реактивных сопротивлений ни был собран фильтр, отношение Z_1/Z_3 в Т-схеме и отношение Z_4/Z_5 в П-схеме всегда будет действительным (не мнимым и не комплексным) числом — отношение двух мнимых чисел всегда есть число действительное.

Следовательно, всегда будет действительным и коэффициент A. Но если коэффициент A действителен, то действительным должно быть и выражение равного ему $\operatorname{ch}(a+jb)$:

$$\operatorname{ch}(a+jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b = A.$$

Это выражение действительно, если

$$\operatorname{sh} a \sin b = 0. \tag{5.1}$$

При этом

$$\operatorname{ch} a \cos b = A. \tag{5.2}$$

Уравнения (5.1) и (5.2) используют для определения границ полосы прозрачности и характера изменения угла b в зоне прозрачности, а также характера изменения коэффициента затухания a в полосе (полосах) затухания.

Равенство (5.1) для полосы прозрачности ($a = 0$) удовлетворяется, так как $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} 0 = 0$. В силу того что $\operatorname{ch} 0 = 1$, уравнение (5.2) для полосы прозрачности переходит в следующее:

$$\cos b = A. \tag{5.3}$$

Круговой косинус ($\cos b$) может изменяться в пределах от $+1$ до -1. Поэтому крайние значения коэффициента A [являющегося функцией частоты $- A(\omega)$] в полосе прозрачности равны ± 1. Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от ω_1 до ω_2. Значения ω_1 и ω_2 для фильтров НЧ и ВЧ (подробнее см. § 5.3) определяют путем решения уравнений

$$A(\omega) = \pm 1. \tag{5.4}$$

Для полосовых и заграждающих фильтров (см. § 5.3) ω_1 и ω_2 находят как корни уравнения $A(\omega) = -1$. Для них уравнение $A(\omega) = 1$ дает возможность определить так называемую резонансную частоту ω_0, находящуюся в интервале частот между ω_1 и ω_2.

Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

Характер изменения угла b в функции от ω для зоны прозрачности определяют в соответствии с уравнением (5.3) следующим образом:

$$b = \arccos A(\omega). \tag{5.5}$$

Определим a и b для полосы затухания. В полосе затухания $a > 0$. Уравнение (5.1) удовлетворяется при условии

$$\sin b = 0, \tag{5.6}$$

т. е. при

$$b = 0 \tag{5.7}$$

и (или) при

$$b = \pm \pi, \tag{5.8}$$

Согласно уравнению (5.2), при $b=0$

$$\operatorname{ch} a = A(\omega), \tag{5.9}$$

а при $b=\pm\pi$

$$\operatorname{ch} a = -A(\omega). \tag{5.10}$$

Уравнения (5.9) и (5.10) позволяют по значениям A как функции ω найти $\operatorname{ch} a$ в полосе затухания, а по $\operatorname{ch} a$ найти a и, таким образом, построить кривую $a=f(\omega)$. Из уравнений (5.7) и (5.8) следует, что в полосе затухания напряжение $\dot{U}_2$ на выходе фильтра находится либо в фазе (при $b=0$), либо в противофазе (при $b=\pm\pi$) с напряжением $\dot{U}_1$ на входе фильтра.

В заключение необходимо отметить два важных положения.

1. С изменением частоты ω меняются коэффициенты B и C четырехполюсника, поэтому изменяется и характеристическое сопротивление $Z_c=\sqrt{B/C}$. Для того чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку (только в этом случае справедлива изложенная здесь теория фильтров), при изменении частоты нужно менять и сопротивление нагрузки.

2. В полосе прозрачности характеристическое сопротивление фильтра всегда активное, а в полосе затухания — чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

Если нагрузка фильтра не чисто активная или не согласована с характеристическим сопротивлением фильтра или если требуется учесть влияние активного сопротивления индуктивных катушек на работу фильтра (что существенно для низких частот), то для построения зависимости $U_1/U_2=f(\omega)$ и зависимости угла сдвига фаз между $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ в функции частоты можно воспользоваться, например, методом пропорциональных величин (см. § 1.12). Характеристическое сопротивление фильтра Z_c берут равным внутреннему сопротивлению источника сигнала (генератора). При этом и генератор и фильтр работают в режиме согласования.

§ 5.3. К-фильтры НЧ и ВЧ, полосовые и заграждающие *k*-фильтры. *Фильтрами НЧ* (*ФНЧ*) называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь низкие частоты: с $\omega_1=0$ до ω_2. Полоса их затухания находится в интервале от ω_2 до ∞.

Схемы двух ФНЧ приведены на рис. 5.1, *а*, *б*. Характер изменения коэффициента затухания a и коэффициента фазы b качественно иллюстрируют кривые рис. 5.1, *в*.

Под *фильтрами ВЧ* (*ФВЧ*) понимают фильтры, пропускающие в нагрузку лишь высокие частоты: с ω_1 до ∞. Полоса затухания их находится в интервале от 0 до ω_1.

Схемы двух ФВЧ приведены на рис. 5.2, *а*, *б*. Характер изменения коэффициентов a и b для них иллюстрируется кривыми рис. 5.2, *в*.

Рассмотрим вопрос об изменении величины характеристического сопротивления Z_c в полосе прозрачности для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) и для Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*), а также для П-фильтров. С этой целью в выражение $Z_c=\sqrt{B/C}$ подставим значения B и C в соответствии с формулами (4.18) и проанализируем полученные выражения.

Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*)

$$Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2}.$$

При $\omega = \omega_1 = 0$ $Z_c = \sqrt{2L/C}$. С увеличением частоты Z_c уменьшается, сначала мало отличаясь от значения $\sqrt{2L/C}$. При достижении значения $\omega = \omega_2 = \sqrt{2/LC}$ $Z_c = 0$.

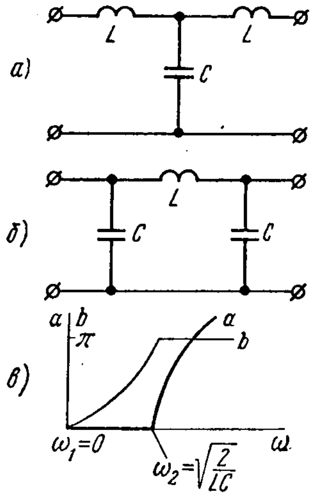


Рис. 5.1

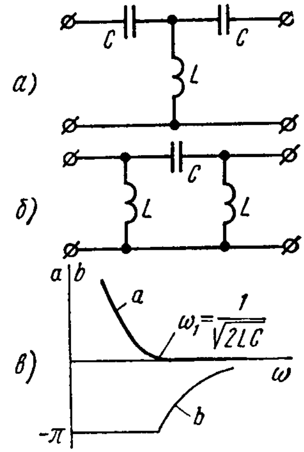


Рис. 5.2

Для П-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *б*)

$$Z_c = \left(\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*)

$$Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

В этом случае характер изменения Z_c отличен от характера изменения Z_c для Т-фильтра НЧ, а именно:

$Z_c = 0$ при $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{2LC}$. С увеличением ω сопротивление Z_c увеличивается и при $\omega \to \infty$ $Z_c = \sqrt{2L/C}$.

Для П-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *б*)

$$Z_c = \left(\frac{2C}{L} - \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Если фильтр предназначен для работы на частотах, находящихся внутри полосы прозрачности данного фильтра и относительно далеко отстоящих от значения ω, при котором $Z_c = 0$, то сопротивление нагрузки $Z_н$ на выходе фильтров НЧ выбирают равным Z_c, которое соответствует $\omega = \omega_1 = 0$. Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) $Z_c = \sqrt{2L/C}$.

Для фильтров ВЧ обычно нагрузку согласовывают со значением Z_c при $\omega \to \infty$. Для Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*) $Z_c = \sqrt{2L/C}$. В полосе (полосах) затухания Z_c оказывается чисто реактивным для всех типов k-фильтров.

Для того чтобы выяснить, индуктивный или емкостный характер имеет Z_c *в полосе затухания*, следует определить характер входного сопротивления этого фильтра (фильтр всегда работает в режиме согласованной нагрузки) для предельного режима, а именно: для

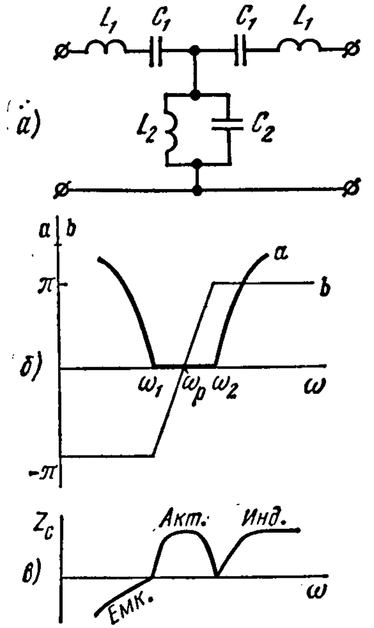


Рис. 5.3

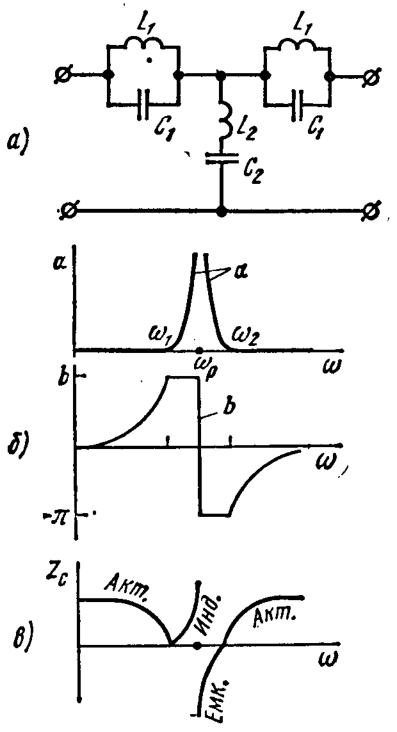


Рис. 5.4

фильтров НЧ (рис. 5.1, *а*, *б*) при очень высокой частоте, а для фильтров ВЧ (рис. 5.2, *а*, *б*) при очень низкой частоте (теоретически при $\omega \to 0$), считая выходные зажимы схем закороченными. Тот же результат будет получен, если считать их разомкнутыми. В результате определим, что в зоне затухания Z_c имеет индуктивный характер для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) и П-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *б*) и емкостный характер для П-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *б*) и Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*).

Полосовые фильтры представляют собой фильтры, пропускающие в нагрузку лишь узкую полосу частот от ω_1 до ω_2. Слева от ω_1

и справа от ω_2 находятся полосы затухания. Схема простейшего полосового k-фильтра изображена на рис. 5.3, *а*. Параметры схемы должны удовлетворять условию $L_1C_1 = L_2C_2$.

Характер изменения a и b для полосового фильтра иллюстрируют кривые рис. 5.3, *б*.

Без вывода дадим формулы для определения параметров полосового фильтра рис. 5.3, *а* по заданным частотам f_1 и f_2 и сопротивлению нагрузки фильтра Z_c при резонансной частоте $f_p = \omega_p/2\pi$:

1) $f_p = \sqrt{f_1 f_2}$; 2) $C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_c}$; 3) $L_1 = \frac{Z_c}{2\pi (f_2 - f_1)}$; 4) $C_2 = \frac{1}{\pi Z_c (f_2 - f_1)}$; 5) $L_2 = \frac{Z_c (f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$.

Под *заграждающими фильтрами* (рис. 5.4, *а*) понимают фильтры, в которых полоса прозрачности как бы разрезана на две части полосой затухания (рис. 5.4, *б*). Слева от ω_1 и справа от ω_2 находятся две части полосы прозрачности.

В схеме простейшего заграждающего фильтра на рис. 5.4, *а* $L_1C_1 = L_2C_2$.

Обозначим $\omega_p = 1/\sqrt{L_1C_1}$ и $k = L_1/L_2$ и запишем формулы для определения $\omega_{1,2}$ и Z_c фильтров рис. 5.3, *а* и 5.4, *а*.

Для рис. 5.3, *а*

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2k}}\left(\sqrt{1+2k} \mp 1\right); \quad Z_c = \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}}\sqrt{1 - \frac{k}{2}\left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p}\right)^2};$$

для рис. 5.4, *а*

$$\omega_{1,2} = 0{,}25\omega_p\left(\sqrt{2k+16} \mp \sqrt{2k}\right); \quad Z_c = \sqrt{\frac{2L_1}{C_2}}\sqrt{1 - \frac{0{,}5k}{\left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}.$$

Для фильтра рис. 5.3, *а* в области частот от 0 до ω_1 Z_c имеет емкостный характер, а в области частот от ω_2 до ∞ — индуктивный. Для фильтра рис. 5.4, *а* в области частот от ω_1 до ω_p Z_c имеет индуктивный характер, а в области от ω_p до ω_2 — емкостный.

Характер изменения Z_c иллюстрируется кривыми рис. 5.3, *в* и 5.4, *в*.

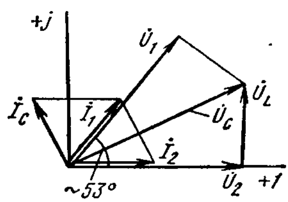


Рис. 5.5

Пример 57. В схеме рис. 5.1, *а* $L = 10$ мГ; $C = 10$ мкФ. Определить границы полосы прозрачности, закон изменения коэффициента b в полосе прозрачности, а также закон изменения коэффициента a в полосе затухания, построить векторную диаграмму при $\omega = 2000$ рад/с и $\dot I_2 = 0{,}2$ А.

Решение. Для Т-схемы

$$A = 1 + Z_1/Z_3 = 1 + j\omega L j\omega C = 1 - \omega^2 LC.$$

При $A = 1$ $\omega_1 = 0$. При $A = -1$ имеем $-1 = 1 - \omega^2 LC$; отсюда $\omega_2 = \sqrt{2/LC} = 4470$ рад/с.

В полосе прозрачности $b = \arccos A = \arccos(1 - \omega^2 LC)$.

При частоте $\omega = 2000$ рад/с, находящейся в полосе прозрачности, $Z_c \sqrt{(2L/C) - \omega^2 L^2} = 40$ Ом. При нагрузке фильтра на характеристическое сопротивление напряжение на выходе $U_2 = \dot I_2 Z_c = 0{,}2 \cdot 40 = 8$ В.

Напряжение на входе $\dot{U}_1$ также равно 8 В и опережает $\dot{U}_2$ на угол $b = \arccos 0{,}6 \approx 53°$ (рис. 5.5).

Для определения закона изменения a в полосе затухания (для данного фильтра A отрицательно) используем уравнение

$$\operatorname{ch} a = -A = \omega^2 LC - 1.$$

Найдем a, например, при $\omega = 2\omega_2 = 8940$ рад/с:

$$\operatorname{ch} a = (8940)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} - 1 = 7; \quad a = 2{,}64 \text{ Нп}.$$

Пример 58. Определить параметры полосового фильтра рис. 5.3, *а*, исходя из того, что он должен пропускать полосу частот от $f_1 = 750$ Гц до $f_2 = 850$ Гц и что сопротивление нагрузки $Z_н = Z_c$ при резонансной частоте $f_р$ составляет 800 Ом.

Решение. 1) $f_р = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{750 \cdot 850} = 798$ Гц; 2) $C_1 = \dfrac{850-750}{2\pi \cdot 750 \cdot 850 \cdot 800} = 0{,}0312$ мкФ; 3) $L_1 = \dfrac{800}{2\pi(850-750)} = 1{,}273$ Г; 4) $C_2 = \dfrac{1}{\pi \cdot 800 \cdot 100} = 3{,}94$ мкФ; 5) $L_2 = \dfrac{800 \cdot 100}{4\pi \cdot 750 \cdot 850} = 0{,}01$ Г.

§ 5.4. Качественное определение *k*-фильтра. По схеме *k*-фильтра без проведения подробного математического анализа можно судить о том, к какому из перечисленных типов может быть отнесен тот или иной фильтр. Заключение основывается на характере продольного сопротивления фильтра.

Характер продольного сопротивления *k*-фильтра, как правило, прямо противоположен характеру поперечного сопротивления. В этом можно убедиться, рассмотрев схемы рис. 5.1, *а*, 5.2, *а* и 5.3, *а*. Действительно, если продольное сопротивление индуктивное, то поперечное — емкостное. Если продольное образовано последовательно соединенными L и C, то поперечное — параллельно соединенными L и C, и т. д.

Если продольное сопротивление состоит только из индуктивностей, то фильтр относится к категории НЧ; если продольное сопротивление чисто емкостное, то фильтр — ВЧ.

Если продольное сопротивление состоит из *последовательно соединенных* L и C, то фильтр полосового типа. Если продольное сопротивление состоит из *параллельно соединенных* L и C, то фильтр заграждающего типа.

§ 5.5. Основы теории *m*-фильтров. Каскадное включение фильтров. Для увеличения крутизны характеристики $a = f(\omega)$ в начале полосы затухания, для получения заданного значения затухания при определенной частоте (частотах) и для меньшей зависимости Z_c от частоты в полосе прозрачности применяют полузвенья *m*-фильтров, каскадно включаемые с *k*-фильтрами.

На рис. 5.6 в качестве примера изображены две возможные схемы каскадного включения ˥-полузвена *m*-фильтра и *k*-фильтра. На практике обычно применяют схемы, в которых *k*-фильтр находится между двумя полузвеньями *m*-фильтра.

Рассмотрим свойства полузвеньев *m*-фильтров и каскадных соединений их с *k*-фильтрами. На рис. 5.6, *а* ˥-полузвено *m*-фильтра, состоящее из сопротивлений Z_7 и Z_8, каскадно соединено с П-фильтром типа *k* (сопротивления Z_4, Z_5, Z_6). На рис. 5.6, *б* Г-полузвено *m*-фильтра из сопротивлений Z_9 и Z_{10} каскадно соединено с Т-фильтром типа *k* (сопротивления Z_1, Z_1, Z_3). Сопротивления Z_7 и

Z_8 зависят от Z_4 и Z_5, а сопротивления Z_9 и Z_{10} — от Z_1 и Z_3. Поэтому говорят, что прототипами ˥-или Г-полузвеньев m-фильтров являются каскадно соединенные с ними k-фильтры.

При каскадном соединении фильтров друг с другом всегда соблюдают принцип согласованности. Входное сопротивление k-фильтра должно быть равно

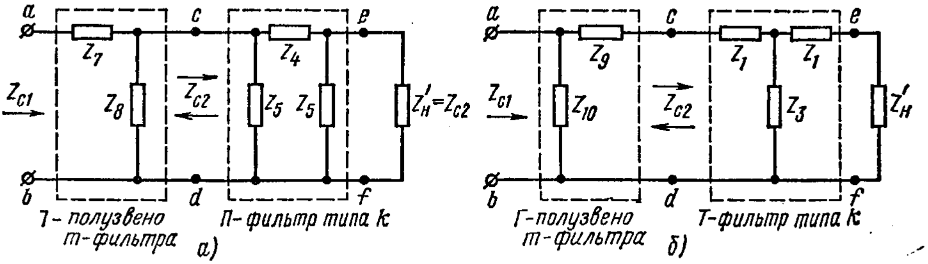


Рис. 5.6

сопротивлению нагрузки на выходе этого фильтра: $Z_{c2} = Z'_н$. Для левого полузвена m-фильтра Z_{c2} является сопротивлением нагрузки. Несимметричный четырехполюсник, каким является полузвено m-фильтра, характеризуется двумя характеристическими сопротивлениями Z_{c1} и Z_{c2}. Сопротивление Z_{c1} в m-фильтре рис. 5.6, *а* определяется как входное сопротивление схемы рис. 5.7, *а*, в которой нагрузкой

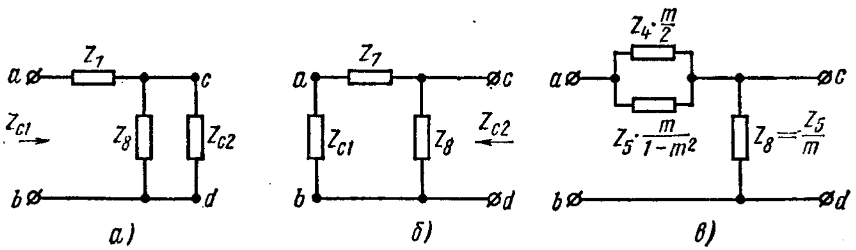


Рис. 5.7

является Z_{c2} (входное сопротивление k-фильтра). Сопротивление Z_{c2} для полузвена m-фильтра определяется как входное сопротивление схемы рис. 5.7, *б*, в которой нагрузкой является Z_{c1}. Входное сопротивление равно частному от деления входного напряжения на входной ток. Используя коэффициенты A B, C, D, характеризующие полузвено m-фильтра как четырехполюсника, получим

$$Z_{c1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{c2} + B}{CZ_{c2} + D}.$$

Сопротивление Z_{c2} определяем при обратном питании, когда коэффициенты A и D меняются местами, поэтому

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2} = \frac{DZ_{c1} + B}{CZ_{c1} + A}.$$

Решив уравнения относительно Z_{c1} и Z_{c2}, найдем:

$$Z_{c1} = \sqrt{AB/CD}; \quad Z_{c2} = \sqrt{BD/AC}.$$

Коэффициенты A, B, C, D ˥-полузвена m-фильтра рис. 5.6, *а* определим по формулам § 4.5, полагая в них $Z_1 = Z_7$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = Z_8$. Получим $A = 1 + (Z_7/Z_8)$, $B = Z_7$, $C = 1/Z_8$, $D = 1$.

Подставим найденные значения A, B, C, D в формулы для Z_{c1} и Z_{c2}:

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_7 Z_8\left(1+\frac{Z_7}{Z_8}\right)}; \tag{5.11}$$

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_7 Z_8}{1+\frac{Z_7}{Z_8}}}. \tag{5.12}$$

Входное сопротивление второго каскада схемы рис. 5.6, *а*

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_4 Z_5}{2+\frac{Z_4}{Z_5}}}. \tag{5.13}$$

Сопротивление Z_8 в ˥-полузвене m-фильтра рис. 5.6, *а* берут равным Z_5/m, где числовой коэффициент m находится в интервале от 0 до 1. Подставляя в (5.12) Z_5/m вместо Z_8 и приравнивая подкоренные выражения формул (5.12) и (5.13), получим уравнение для определения Z_7:

$$\frac{Z_7\frac{Z_5}{m}}{1+m\frac{Z_7}{Z_5}} = \frac{Z_4 Z_5}{2+\frac{Z_4}{Z_5}}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_7} = \frac{1}{Z_4\frac{m}{2}} + \frac{1}{Z_5\frac{m}{1-m^2}}.$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что сопротивление Z_7 образовано двумя параллельно соединенными сопротивлениями $Z_4\frac{m}{2}$ и $Z_5\frac{m}{1-m^2}$ (рис. 5.7, *в*). Так как Z_7 образовано параллельно соединенными сопротивлениями,

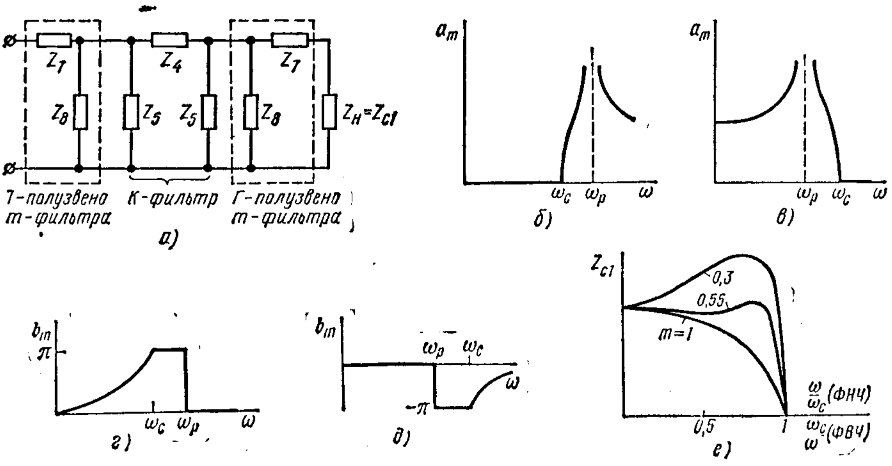


Рис. 5.8

которые являются зависимыми (производными) от сопротивлений Z_4 и Z_5 k-фильтра, m-фильтр рис. 5.6, *а* называют фильтром *параллельно-производного типа.*

Заменим в схеме рис. 5.6, *а* сопротивление $Z_н' = Z_{c2}$ на второе полузвено m-фильтра, на выходе которого и включим действительную нагрузку $Z_н = Z_{c1}$ (рис. 5.8, *а*). Если первое полузвено m-фильтра на схеме рис. 5.6, *а* представляло собой ˥-полузвено, состоящее из сопротивлений Z_7 и Z_8, то второе полузвено m-фильтра должно представлять собой Г-полузвено, состоящее из таких же сопротивлений Z_7 и Z_8, но как бы перевернутых относительно вертикальной прямой. Для второго полузвена m-фильтра входное сопротивление слева равно Z_{c2}, а входное сопротивление справа (со стороны нагрузки $Z_н$) — Z_{c1}. Практически Z_{c1} для фильтра НЧ берут равным его значению при $\omega \to 0$, а для фильтра ВЧ — его значению при $\omega \to \infty$. Для m-фильтра рис. 5.6, *а* в обоих случаях $Z_{c1} = \sqrt{L/2C}$, где L и C — индуктивность и емкость k-фильтра, являющегося прототипом m-фильтра. Для фильтра НЧ это значения L и C в схеме рис. 5.1, *б*, а для фильтра ВЧ — в схеме рис. 5.2, *б*.

Границы полосы прозрачности у m-фильтра определяют так же, как и у k-фильтра, т. е. полагая $A(\omega) = \pm 1$ для фильтров НЧ и ВЧ. В полосе затухания для m-фильтра

$$\operatorname{ch} a = \pm A(\omega).$$

Знак минус относится к полосе частот от ω_p до ω_c, знак плюс — к полосе от ω_p до ∞ для фильтров НЧ и к полосе частот от ω_p до 0 для фильтров ВЧ (объясняется это тем, что сопротивление Z_7 изменяет знак при резонансной частоте ω_p).

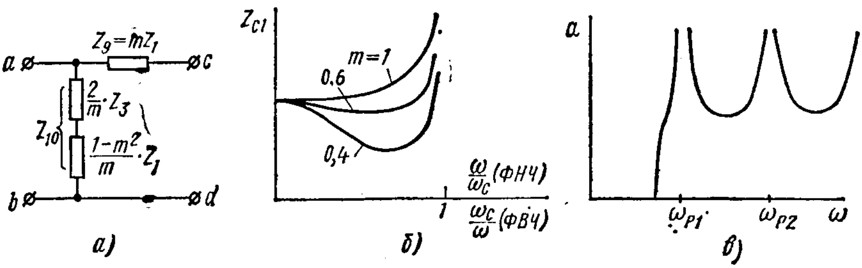


Рис. 5.9

Границы полосы прозрачности по частоте для k-фильтра и для каскадно и согласованно с ним соединенного m-фильтра совпадают. Результирующее затухание всего фильтра a равно сумме затуханий m-фильтра (a_m) и k-фильтра (a_k):

$$a = a_m + a_k.$$

Характер зависимости $a_m = f(\omega)$ для m-фильтров НЧ и ВЧ показан на рис. 5.8, *б*, *в*, где ω_c — частота среза (граничная частота полосы прозрачности). На рис. 5.8, *б* ω_p — резонансная частота, при которой противоположного характера сопротивления $Z_4 \frac{m}{2}$ и $Z_5 \frac{m}{1-m^2}$ в схеме рис. 5.7, *в* вступают в резонанс, так что $Z_7 = \infty$ при частоте ω_p (при этом бесконечно велико затухание m-фильтра). В области частот от ω_c до ω_p a_m резко возрастает, что очень существенно, так как получается большое затухание в начале полосы затухания, где a_k мало́. Уменьшение a_m при $\omega > \omega_p$ компенсируется ростом a_k. Напряжение на входных зажимах фильтра опережает напряжение на нагрузке на угол $b = b_m + b_k$, где b_m — угол сдвига по фазе от m-фильтра, а b_k — угол сдвига по фазе от k-фильтра. Зависимость $b_k = f(\omega)$ рассмотрена в § 5.3. Зависимость $b_m = f(\omega)$ показана на рис. 5.8, *г* для фильтра НЧ и на рис. 5.8, *д* для фильтра ВЧ. Зависимость Z_{c1} от ω/ω_c для фильтра НЧ показана на рис. 5.8, *е* при трех значениях m. При $m \approx 0.5 \div 0.6$ сопротивление Z_{c1} остается *приблизительно постоянным* почти во всей полосе прозрачности, резко уменьшаясь только вблизи частоты среза.

Рассмотрим свойства Г-полузвена m-фильтра (рис. 5.9, *а*), являющегося составной частью фильтра рис. 5.6, *б*. Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательные выражения для Z_{c1} и Z_{c2} этого фильтра:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{Z_9 Z_{10}}{1 + Z_9/Z_{10}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_9 Z_{10}\left(1 + \frac{Z_9}{Z_{10}}\right)}.$$

Входное сопротивление k-фильтра рис. 5.6, *б*

$$Z_{c2}=\sqrt{Z_1 Z_3\left(2+\frac{Z_1}{Z_3}\right)}.$$

Г-полузвено m-фильтра рис. 5.9, *а* называют *последовательно производным*, так как его сопротивление Z_{10} состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений $\frac{2}{m}Z_3$ и $\frac{1-m^2}{m}Z_1$, являющихся производными от сопротивлений Z_1 и Z_3 k-фильтра. Сопротивления Z_1 и Z_3 имеют противоположный характер (одно индуктивный, другое емкостный), поэтому при некоторой частоте сопротивление $Z_{10}=0$ (резонанс напряжений). Для полосы прозрачности зависимость изменения Z_{c1} от ω/ω_c для фильтра НЧ (от ω_c/ω для фильтра ВЧ) при трех значениях m показана на рис. 5.9, *б*. При $m\approx(0{,}5\div0{,}6)$ Z_{c1} относительно мало изменяется в полосе прозрачности, что важно для практики. Зависимости $a_m=f(\omega)$ и $b_m=f(\omega)$ для m-фильтра рис. 5.6, *б* такие же, что и для соответствующего ему m-фильтра рис. 5.6, *а*. Обобщенно можно сказать, что теоретически бесконечно большое затухание в m-фильтре на частоте ω_p создается либо за счет того, что на этой частоте в последовательной ветви полузвена m-фильтра оказывается участок с бесконечно большим сопротивлением (возникает резонанс токов), либо за счет того, что параллельная ветвь m-фильтра образует короткое замыкание при возникновении в ней режима резонанса напряжений. При каскадном соединении нескольких m-фильтров значения L, C выбирают различными, чтобы создавать большие затухания на нескольких заданных частотах (ω_{p1}, ω_{p2} и т. п.) При этом зависимость $a=f(\omega)$, например, для фильтра НЧ имеет вид гребенки, показанной на рис. 5.9, *в*. Фильтр с такой характеристикой иногда называют *гребенчатым*.

§ 5.6. RC-фильтры. Если сопротивление нагрузки фильтра очень велико (например, входное сопротивление лампового усилителя), то фильтр иногда выполняют из элементов R и C.

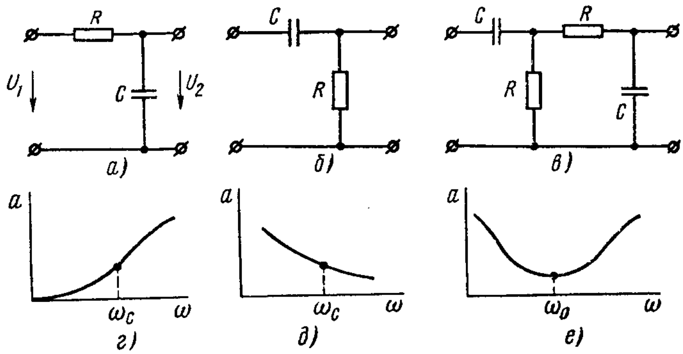


Рис. 5.10

На рис. 5.10, *а*—*в* изображены схемы фильтров НЧ, ВЧ и полосового RC-фильтра, а на рис. 5.10, *г*—*е*—соответствующие им зависимости $a=\ln U_1/U_2=f(\omega)$. Для всех RC-фильтров в рабочей зоне $a\neq0$. Рабочая зона фильтра НЧ простирается от $\omega=0$ до $\omega=\omega_C=1/RC$ (принято условно) при $a=0{,}343$ Нп. Для фильтра ВЧ рабочая зона находится в диапазоне от $\omega=\omega_C=1/RC$ при $a=0{,}343$ Нп до $\omega=\infty$. В полосовом фильтре минимальное затухание имеет место при $\omega=\omega_0=1/RC$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение полосы прозрачности и полосы затухания. Как определить границы полосы прозрачности для фильтров НЧ и ВЧ, а также полосовых и заграждающих фильтров? 2. Начертить графики изменения Z_c, a и b в функ-

ции частоты ω для всех известных Вам типов фильтров. Из чего следует исходить при определении характера Z_c фильтра в полосе затухания? 3. В чем недостатки k-фильтров? 4. Как согласовывают полузвенья m-фильтра с k-фильтром? За счет чего в m-фильтрах при некоторых частотах возникает бесконечно большое затухание? 5. В чем преимущества m-фильтров перед k-фильтрами? 6. Чем принципиально отличается RC-фильтр от k- и m-фильтров? 7. Решите задачи 14.1; 14,4; 14.6; 14.7; 14.18; 14.21; 14.22.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

§ 6.1. Трехфазная система э. д. с. Под *трехфазной симметричной системой э. д. с.* понимают совокупность трех синусоидальных э. д. с. одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120°. Графики их мгновенных значений изображены на рис. 6.1; векторная диаграмма — на рис. 6.2. Принцип получения трехфазной системы э. д. с. иллюстрирует рис. 6.3. В равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω вращаются три одинаковых жестко скрепленных друг с другом катушки.

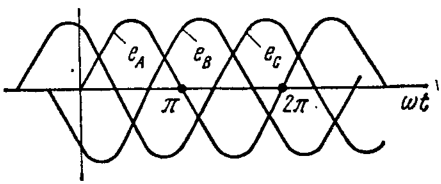


Рис. 6.1

Плоскости катушек смещены в пространстве друг относительно друга на 120°. В каждой катушке наводится синусоидальная э. д. с. одинаковой амплитуды, но по фазе они сдвинуты на 120°.

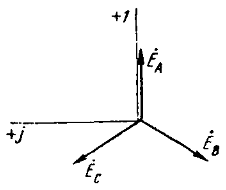


Рис. 6.2

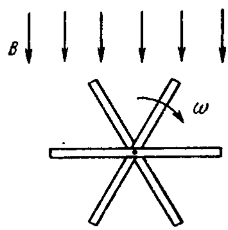


Рис. 6.3

Аналогичным путем можно получить двух- и четырехфазную систему э. д. с. и более. Наибольшее практическое применение получила трехфазная система.

Э. д. с. трехфазного генератора обозначают следующим образом: одну из э. д. с. обозначают $\dot{E}_A$, отстающую от нее на 120° э. д. с. — $\dot{E}_B$, а опережающую на 120° — $\dot{E}_C$.

Последовательность прохождения э. д. с. через одинаковые значения (например, через нулевое значение) называют *последовательностью фаз*.

§ 6.2. Принцип работы трехфазного машинного генератора. В машинном генераторе (рис. 6.4) обмотки неподвижны (помещены в пазы статора), на рисунке обозначены буквами A, B, C. Магнитное поле в нем создается вращающимся ротором с намотанной катушкой, по которой протекает постоянный ток. Если число пар полюсов ротора равно 1, то угловая скорость вращения ротора равна угловой частоте вращающегося магнитного поля. Магнитная цепь в такой конструкции почти замкнута (имеется только небольшой зазор между статором и ротором), что позволяет получить значительный поток при относительно небольшой магнитодвижущей силе обмотки ротора. При конструировании генератора стремятся к тому, чтобы распределение магнитной индукции по окружности статора было практически синусоидально. Пунктиром на рис. 6.4 показаны магнитные силовые линии.

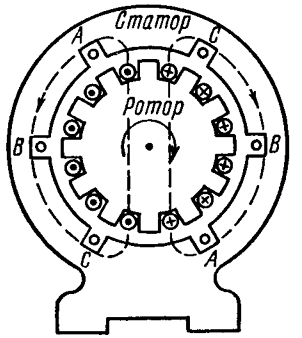


Рис. 6.4

§ 6.3. Трехфазная цепь. Расширение понятия фазы. Совокупность трехфазной системы э. д. с., трехфазной нагрузки (нагрузок) и соединительных проводов называют *трехфазной цепью.*

Токи, протекающие по отдельным участкам трехфазных цепей, сдвинуты относительно друг друга по фазе. Под *фазой* трехфазной цепи понимают участок трехфазной цепи, по которому протекает одинаковый ток. В литературе фазой иногда называют однофазную цепь, входящую в состав многофазной цепи. Под фазой будем также понимать аргумент синусоидально меняющейся величины. Таким образом, в зависимости от рассматриваемого вопроса фаза — это либо участок трехфазной цепи, либо аргумент синусоидально изменяющейся величины.

§ 6.4. Основные схемы соединения трехфазных цепей, определение линейных и фазных величин. Существуют различные способы соединения обмоток генератора с нагрузкой. Самым неэкономичным способом явилось бы соединение каждой обмотки генератора с нагрузкой двумя проводами, на что потребовалось бы шесть соединительных проводов. В целях экономии обмотки трехфазного генератора соединяют в звезду или треугольник. При этом число соединительных проводов от генератора к нагрузке уменьшается с шести до трех или до четырех.

На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных друг к другу под углом 120°. При соединении звездой одноименные зажимы (например, концы x, y, z) трех обмоток объединяют в одну точку (рис. 6.5), которую называют *нулевой точкой* генератора O. Обмотки генератора обозначают буквами A, B, C; буквы ставят: A — у начала первой, B — у начала второй и C — у начала третьей фазы.

При соединении обмоток генератора треугольником (рис. 6.6) конец первой обмотки генератора соединяют с началом второй, конец второй — с началом третьей, конец третьей — с началом первой. Геометрическая сумма э. д. с. в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам A, B, C не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

Обратим внимание на то, что расположение звезды или треугольника векторов фазных э. д. с. на комплексной плоскости не следует связывать с расположением в пространстве осей трех обмоток генератора.

Пять простейших способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой изображены на рис. 6.7 — 6.10.

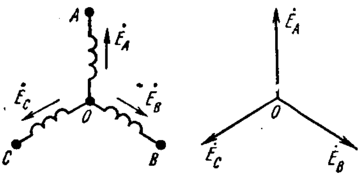


Рис. 6.5

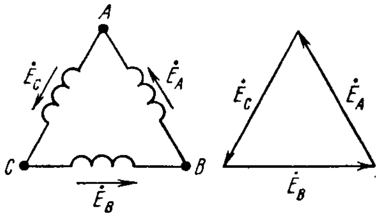


Рис. 6.6

Точку, в которой объединены три конца трехфазной нагрузки при соединении ее звездой, называют *нулевой точкой нагрузки* и обозначают O'. *Нулевым проводом* называют провод, соединяющий нуле-

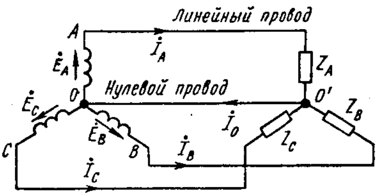


Рис. 6.7

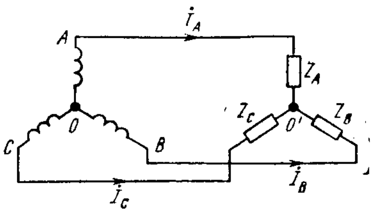
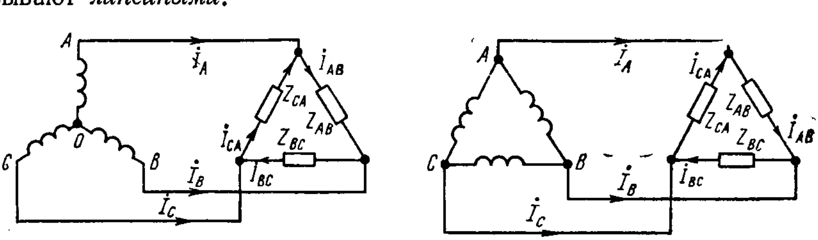


Рис. 6.8

вые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода назовем $\dot{I}_0$. Положительное направление тока возьмем от точки O' к точке O.

Провода, соединяющие точки A, B, C генератора с нагрузкой, называют *линейными*.



а) б)

Рис. 6.9

Схему рис. 6.7 называют звезда — звезда с нулевым проводом; рис. 6.8 — звезда — звезда без нулевого провода; рис. 6.9, *а* — звезда — треугольник; рис. 6.9, *б* — треугольник — треугольник; рис. 6.10 — треугольник — звезда.

Текущие по линейным проводам токи называют *линейными*; их обозначают $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$. Условимся за положительное направление токов принимать направление от генератора к нагрузке. Модули линейных токов часто обозначают $I_л$ (не указывая никакого дополнительного индекса), особенно тогда, когда все линейные токи по модулю одинаковы.

Напряжение между линейными проводами называют *линейным* и обозначают, например, $\dot{U}_{AB}$ (линейное напряжение между точками A и B); модуль линейного напряжения — $U_л$.

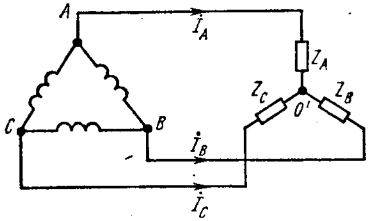


Рис. 6.10

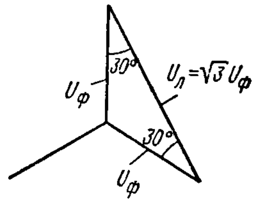


Рис. 6.11

Каждую из трех обмоток генератора называют фазой генератора; каждую из трех нагрузок — фазой нагрузки; протекающие по ним токи — фазовыми токами генератора $I_ф$ или соответственно нагрузки, а напряжения на них — фазовыми напряжениями ($U_ф$).

§ 6.5. Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами. При соединении генератора в звезду (рис. 6.7, 6.8, 6.9, *а*) линейное напряжение по модулю в $\sqrt{3}$ раза больше фазового напряжения генератора ($U_ф$). Это следует из того, что $U_л$ есть основание равнобедренного треугольника с острыми углами по 30° (рис. 6.11):

$$U_л = U_{AB} = U_ф 2\cos 30° = \sqrt{3}\, U_ф. \qquad (6.1)$$

Линейный ток $I_л$ при соединении генератора в звезду равен фазовому току генератора:

$$I_л = I_ф.$$

При соединении генератора в треугольник линейное напряжение равно фазовому напряжению генератора (см. рис. 6.6, 6.9, *б*):

$$U_л = U_ф. \qquad (6.2)$$

При соединении нагрузки в звезду (см. рис. 6.7, 6.8, 6.10) линейный ток равен фазовому току нагрузки:

$$I_л = I_ф.$$

При соединении нагрузки в треугольник положительные направления для токов выбирают по часовой стрелке. Индексы у токов соответствуют выбранным для них положительным направлениям: первый индекс отвечает точке, от которой ток утекает, второй — точке, к которой ток притекает.

При соединении нагрузки в треугольник (см. рис. 6.9, *а*, *б*) линейные токи не равны фазовым токам нагрузки и определяются через них по первому закону Кирхгофа:

$$\dot I_A=\dot I_{AB}-\dot I_{CA};\quad \dot I_B=\dot I_{BC}-\dot I_{AB};\quad \dot I_C=\dot I_{CA}-\dot I_{BC}.$$

§ 6.6. Преимущества трехфазных систем. Широкое распространение трехфазных систем объясняется главным образом тремя основными причинами:

1) передача энергии на дальние расстояния трехфазным током экономически более выгодна, чем переменным током с иным числом фаз;

2) элементы системы — трехфазный асинхронный двигатель и трехфазный трансформатор — весьма просты в производстве, экономичны и надежны в работе;

3) система обладает свойством неизменности величины мгновенной мощности за период синусоидального тока, если нагрузка во всех трех фазах трехфазного генератора одинакова.

§ 6.7. Расчет трехфазных цепей. Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и потому расчет и исследование процессов в них производятся *теми же методами и приемами*, которые рассматривались в гл. 3 и 4.

Для цепей трехфазного тока применим также символический метод расчета и могут строиться векторные, топографические и круговые диаграммы.

Аналитический расчет трехфазных цепей рекомендуется сопровождать построением векторных или топографических диаграмм. Векторные диаграммы облегчают нахождение углов между токами и напряжениями, делают все соотношения более наглядными и помогают находить ошибки при аналитическом расчете, если последние возникнут.

§ 6.8. Соединение звезда — звезда с нулевым проводом. Если нулевой провод в схеме рис. 6.7 обладает весьма малым сопротивлением, то потенциал точки O' практически равен потенциалу точки O; точки O' и O фактически представляют собой одну точку. При этом в схеме образуются три обособленных контура, через которые проходят токи:

$$\dot I_A=\dot E_A/Z_A;\quad \dot I_B=\dot E_B/Z_B;\quad \dot I_C=\dot E_C/Z_C.$$

По первому закону Кирхгофа, ток в нулевом проводе равен геометрической сумме фазовых токов:

$$\dot I_0=\dot I_A+\dot I_B+\dot I_C. \tag{6.3}$$

Если $Z_A=Z_B=Z_C$ (такую нагрузку называют *равномерной*), то ток $\dot I_0$ равен нулю и нулевой провод может быть изъят из схемы без изменения режима ее работы.

При неравномерной нагрузке фаз ток $\dot I_0$ в общем случае не равен нулю.

При наличии в нулевом проводе некоторого сопротивления расчет схемы производится методом двух узлов.

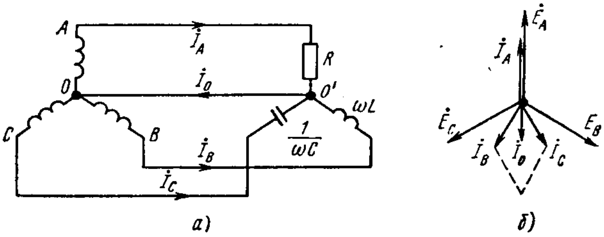


Рис. 6.12

Пример 59. В схеме рис. 6.12, *а* э. д. с. каждой фазы трехфазного генератора равна 127 В. Сопротивления фаз нагрузки равны по величине (6,35 Ом), но имеют различный характер: $Z_A = R$; $Z_B = j\omega L$; $Z_C = -j/\omega C$. Определить ток в нулевом проводе.

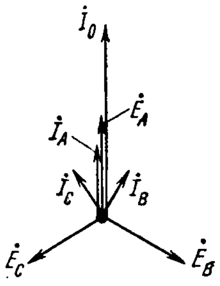


Рис. 6.13

Решение. Построим векторную диаграмму (рис. 6.12, *б*). Токи всех фаз по модулю равны $127/6{,}35 = 20$ А. Ток $\dot{I}_A$ совпадает по фазе с $\dot{E}_A$. Ток $\dot{I}_B$ на 90° отстает от $\dot{E}_B$. Ток $\dot{I}_C$ опережает $\dot{E}_C$ на 90°. Сумма $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ дает вектор тока $\dot{I}_0$. По модулю он равен 14,6 А.

Пример 60. Какой величины должно быть взято сопротивление R в фазе A схемы рис. 6.12, *а*, чтобы ток в нулевом проводе стал равным нулю?

Решение. Геометрическая сумма токов $\dot{I}_B + \dot{I}_C$ по модулю равна

$$2 \cdot 20 \cdot \cos 30° = 20\sqrt{3}\ A.$$

Ток в нулевом проводе будет равен нулю, если ток $\dot{I}_A$, направленный противоположно сумме $\dot{I}_B + \dot{I}_C$, по модулю станет равным $20\sqrt{3}$ А. При этом сопротивление фазы A

$$R = E/20\sqrt{3} = 127/20\sqrt{3} = 3{,}66 \text{ Ом}.$$

Пример 61. Определить ток в нулевом проводе схемы рис. 6.12, *а*, если в фазу A включить активное сопротивление 3,66 Ом, а индуктивность и емкость фаз B и C поменять местами; $\omega L = 1/\omega C = 6{,}35$ Ом.

Решение. Векторная диаграмма изображена на рис. 6.13. Из нее следует, что $I_0 = 34{,}6 + 34{,}6 = 69{,}2$ А.

§ 6.9. **Соединение нагрузки в треугольник.** Выберем направление токов в фазах треугольника в соответствии с рис. 6.9, *а*. Ток $\dot{I}_{AB}$ вызывается напряжением $\dot{U}_{AB}$. Величина и фаза его по отношению к напряжению $\dot{U}_{AB}$ определяются сопротивлением нагрузки Z_{AB}. Ток $\dot{I}_{BC}$ вызван напряжением $\dot{U}_{BC}$. Величина и фаза его по отношению к $\dot U_{BC}$ определяются сопротивлением Z_{BC}. Ток $\dot I_{CA}$ вызван напряжением $\dot U_{CA}$ и определяется сопротивлением Z_{CA}. Линейные токи определим через фазовые токи по первому закону Кирхгофа:

$$\left.\begin{aligned}\dot I_A &= \dot I_{AB} - \dot I_{CA};\\ \dot I_B &= \dot I_{BC} - \dot I_{AB};\\ \dot I_C &= \dot I_{CA} - \dot I_{BC}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

При равномерной нагрузке фаз линейные токи по модулю в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых токов нагрузки. При неравномерной нагрузке линейные токи могут быть и больше и меньше фазовых токов нагрузки.

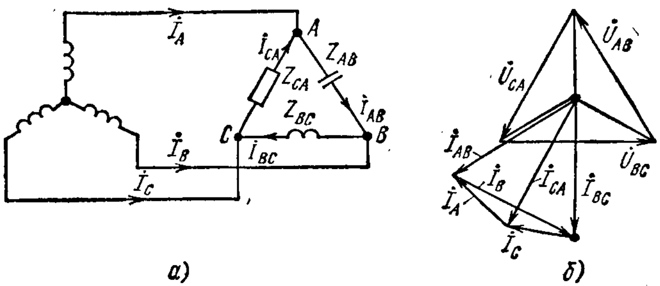


Рис. 6.14

Пример 62. В схеме рис. 6.14, *а* $Z_{AB}=-19j$; $Z_{BC}=19j$; $Z_{CA}=19$ Ом. Э. д. с. каждой фазы генератора 220 В. Определить все токи и построить векторную диаграмму.

Решение. Векторная диаграмма построена на рис. 6.14, *б*. Напряжения на фазах нагрузки в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых э. д. с. генератора и равны $220\sqrt{3}=380$ В. Ток $\dot I_{AB}$ опережает напряжение $\dot U_{AB}$ на 90° и равен $380/19=20$ А. Ток $\dot I_{BC}$ отстает от $\dot U_{BC}$ на 90° и также равен 20 А. Ток $\dot I_{CA}$ по модулю равен 20 А и совпадает по фазе с напряжением $\dot U_{CA}$. Линейные токи $\dot I_A$, $\dot I_B$, $\dot I_C$ найдем графически путем использования соотношений (6.4). По модулю $I_A=I_C\approx 10$ А; $I_B=20$ А.

§ 6.10. Оператор *a* трехфазной системы.

Условимся комплексное число $e^{j120°}$, по модулю равное единице, обозначать *a* и называть оператором трехфазной системы. Тогда

$$e^{j240°}=(e^{j120°})^2=a^2.$$

Три вектора: 1, *a* и a^2 — образуют симметричную трехфазную систему (рис. 6.15):

$$1+a+a^2=0. \qquad (6.5)$$

Умножение какого-либо вектора на *a* поворачивает его без изменения модуля на угол 120° против часовой стрелки. Умножение вектора на a^2 поворачивает его на угол 240° против часовой стрелки, или, что то же самое, поворачивает его по часовой стрелке на 120°.

С помощью оператора a можно выразить э. д. с. $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ симметричной трехфазной системы через э. д. с. $\dot{E}_A$:

$$\dot{E}_B = a^2\dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a\dot{E}_A. \tag{6.6}$$

§ 6.11. Соединение звезда — звезда без нулевого провода. На рис. 6.8 представлена схема с двумя узлами (точки O и O'). Для

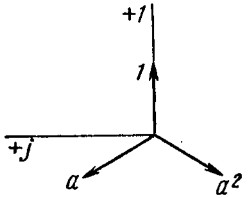


Рис. 6.15

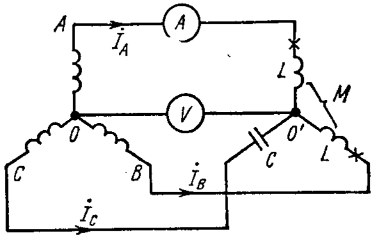


Рис. 6.16

расчета токов в ней целесообразно пользоваться методом двух узлов (см. § 1.21). Напряжение между двумя узлами

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + a^2 Y_B + a Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}. \tag{6.7}$$

Если нагрузка равномерна ($Y_A = Y_B = Y_C$), то [см. соотношение (6.5)]

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + a + a^2)}{3Y_A} = 0$$

и напряжение на каждой фазе нагрузки равно соответствующей э. д. с.:

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C.$$

Если нагрузка неравномерна, то $\dot{U}_{O'O} \neq 0$ и

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}; \quad \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}; \quad \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}.$$

Токи в фазах нагрузки:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO'}/Z_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{BO'}/Z_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{CO'}/Z_C.$$

Если в двух фазах нагрузка одинакова, например $Z_B = Z_C \neq Z_A$, то формула (6.7) после преобразований имеет следующий вид:

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{E}_A \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + 2Z_A}. \tag{6.8}$$

§ 6.12. Трехфазные цепи при наличии взаимоиндукции. Расчет трехфазных цепей, содержащих магнитносвязанные катушки, производится так же, как и расчет магнитносвязанных цепей однофазного синусоидального тока.

Пример 63. Определить показания амперметра и вольтметра в схеме рис. 6.16. Построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов. Дано: $E_ф = 127$ В; $\omega L = 1/\omega C = 4$ Ом; $\omega M = 2$ Ом.

Решение. Выберем положительные направления токов в соответствии с рис. 6.16. По первому закону Кирхгофа, $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Примем э. д. с. $\dot{E}_A$ направленной по оси $+1$. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $OAO'BO$:

$$\dot{I}_A j\omega L + \dot{I}_B j\omega M - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{AB}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$2j(\dot{I}_A - \dot{I}_B) = 220e^{j30°},$$

или

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \frac{220e^{j30°}}{2e^{j90°}} = 110e^{-j60°} \text{ А}.$$

Для контура $OCO'BO$

$$\dot{I}_C\left(-\frac{j}{\omega C}\right) - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{CB},$$

или

$$-4j\dot{I}_A - 2j\dot{I}_A - 4j\dot{I}_B = 220j.$$

Совместное решение трех уравнений дает:

$$\dot{I}_A = 110; \quad \dot{I}_B = 110e^{j60°}; \quad \dot{I}_C = 110\sqrt{3}\, e^{-j150°} \text{ А}.$$

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 6.17. Амперметр показывает 110 А, вольтметр — приблизительно 640 В. Последний результат получен после подсчета $\varphi_{O'}$ по формуле

$$\varphi_{O'} = \varphi_O + E_A - \dot{I}_A j\omega L - \dot{I}_B j\omega M.$$

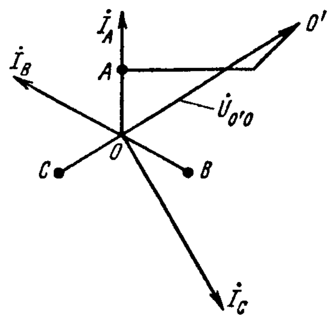


Рис. 6.17

§ 6.13. Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы.

Под *активной мощностью* трехфазной системы понимают сумму активных мощностей фаз нагрузки и активной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0. \tag{6.9}$$

Реактивная мощность трехфазной системы представляет собой сумму реактивных мощностей фаз нагрузки и реактивной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0. \tag{6.10}$$

Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{6.11}$$

Если нагрузка равномерная, то

$$P_0 = Q_0 = 0;$$

$$P_A = P_B = P_C = U_ф I_ф \cos\varphi_ф;\quad Q_A = Q_B = Q_C = U_ф I_ф \sin\varphi_ф,$$

где $\varphi_ф$ — угол между напряжением $\dot{U}_ф$ на фазе нагрузки и током $\dot{I}_ф$ фазы нагрузки.

При равномерной нагрузке фаз

$$\left.\begin{aligned} P &= 3U_ф I_ф \cos\varphi_ф; \\ Q &= 3U_ф I_ф \sin\varphi_ф; \\ S &= 3U_ф I_ф. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

При равномерной нагрузке независимо от способа ее соединения в звезду или в треугольник

$$3U_ф I_ф = \sqrt{3}\,\sqrt{3}\,U_ф I_ф = \sqrt{3}\,U_л I_л, \tag{6.13}$$

где $U_л$ — линейное напряжение на нагрузке; $I_л$ — линейный ток нагрузки.

Поэтому вместо формул (6.12) часто используют следующие:

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{3}\,U_л I_л \cos\varphi_ф; \\ Q &= \sqrt{3}\,U_л I_л \sin\varphi_ф; \\ S &= \sqrt{3}\,U_л I_л. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

§ 6.14. Измерение активной мощности в трехфазной системе. Для измерения активной мощности трехфазной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо включить три ваттметра по схеме рис. 6.18. Активная мощность системы равна сумме показаний трех ваттметров.

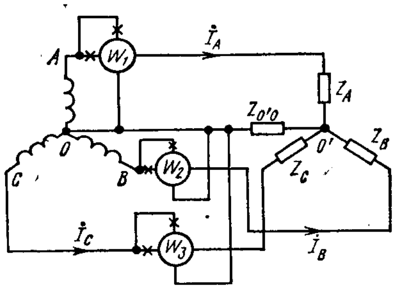


Рис. 6.18

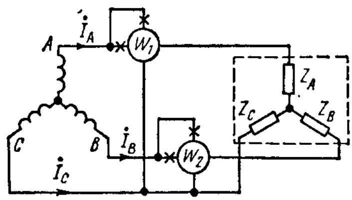


Рис. 6.19

Если нулевой провод отсутствует, то измерение мощности производят двумя ваттметрами по схеме рис. 6.19. Сумма показаний двух ваттметров при этом определяет активную мощность всей системы независимо от того, в звезду или треугольник соединена нагрузка (треугольник нагрузки всегда может быть преобразован в эквивалентную звезду).

Показание первого ваттметра равно $\mathrm{Re}\,\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A$, второго — $\mathrm{Re}\,\dot{U}_{BC}\overset{*}{I}_B$. Но

$$\mathrm{Re}\left\{\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A + \dot{U}_{BC}\overset{*}{I}_B\right\} = \mathrm{Re}\left[(\dot{U}_A - \dot{U}_C)\overset{*}{I}_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C)\overset{*}{I}_B\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\dot{U}_A\overset{*}{I}_A + \dot{U}_B\overset{*}{I}_B + \dot{U}_C\overset{*}{I}_C\right).$$

При равномерной нагрузке фаз достаточно измерить мощность одной из фаз и результат утроить.

§ 6.15. Круговые и линейные диаграммы в трехфазных цепях. Если меняется модуль сопротивления одной из фаз трехфазной цепи, то геометрическим местом концов векторов напряжения (тока) любой из фаз цепи является окружность или прямая линия.

Для примера рассмотрим круговую диаграмму напряжений по схеме рис. 6.20, если $Z_B = Z_C = r = \text{const}$ и изменяется только модуль сопротивления фазы A (Z_A).

Используем формулу (4.40), заменив в ней индексы a и b на O' и O. В режиме холостого хода ток по фазе A равен нулю, а напряжения на двух сопротивлениях $Z_B = Z_C = r$ равны $\dot{U}_{BC}/2$. Точка O' в режиме х. х. находится посередине вектора $\dot{U}_{BC}$ (на рис. 6.21, *а* — точка f), при этом $\dot{U}_{O'O\,\text{х.х}} = -0{,}5\dot{E}_A$. При коротком замыкании сопротивления Z_A потенциал точки O' равен потенциалу точки A. Поэтому $\dot{U}_{O'O\,\text{к.з}} = \dot{E}_A$. Хордой искомой окружности является разность векторов (рис. 6.21, *б*) $\dot{U}_{O'O\,\text{к.з}} - \dot{U}_{O'O\,\text{х.х}} = \dot{E}_A - (-0{,}5\dot{E}_A) = 1{,}5\dot{E}_A$. Для определения входного сопротивления $Z_{\text{вх}}$ по отношению к точкам A и O' служит схема рис. 6.22, *а* (источники э. д. с. закорочены). Два сопротивления r включены параллельно, поэтому $Z_{\text{вх}} = r/2$ и $\varphi_{\text{вх}} = 0$.

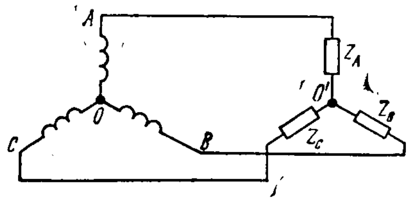


Рис. 6.20

Рассмотрим три случая, отличающихся характером сопротивления Z_A.

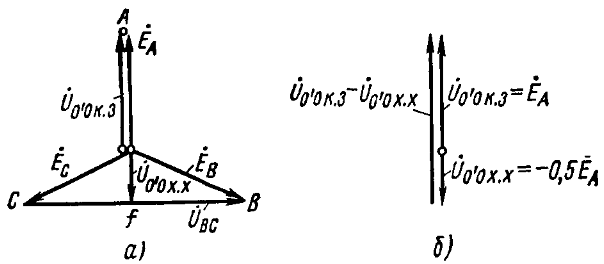


Рис. 6.21

1. Когда Z_A — изменяющееся емкостное сопротивление, то $Z_A = -j/\omega C$, $\varphi_{\text{н}} = -90°$ и $\psi = \varphi_{\text{н}} - \varphi_{\text{вх}} = -90°$. Круговая диаграмма напряжения $\dot{U}_{O'O}$ построена на рис. 6.22, *б*, где линия X_C проведена по отношению к хорде под углом $-\psi = 90°$. Масштаб для X_C соответствует масштабу, в котором отрезок fd выражает входное сопротивление $Z_{\text{вх}} = r/2$. Геометрическим местом точки O' является полуокружность fpA. Для определения величины и фазы $\dot{U}_{O'O}$ при некотором произвольном значении X_C его следует отложить на линии md и провести луч fm. Точка пересечения луча fm с полуокружностью fpA обозначена p. Напряжение $\dot{U}_{O'O}$, соответствующее взятому значению X_C, изобразится вектором, проведенным из точки O в точку p.

2. Когда Z_A — изменяющееся индуктивное сопротивление, то $\psi = 90°$, и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является полуокружность fqA (изображена пунктиром на рис. 6.22, *б*). Линия переменного параметра в этом случае будет справа от точки *d*.

3. Когда Z_A — чисто активное сопротивление, то $\psi = \varphi_н - \varphi_{вх} = 0$ и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является прямая Af.

§ 6.16. Указатель последовательности чередования фаз. Определение порядка или последовательности чередования фаз в трехфазной симметричной системе э. д. с. (напряжений) производят с помощью указателя последовательности чередования фаз. В простейшем исполнении он состоит из двух одинаковых ламп накаливания и конденсатора (рис. 6.23).

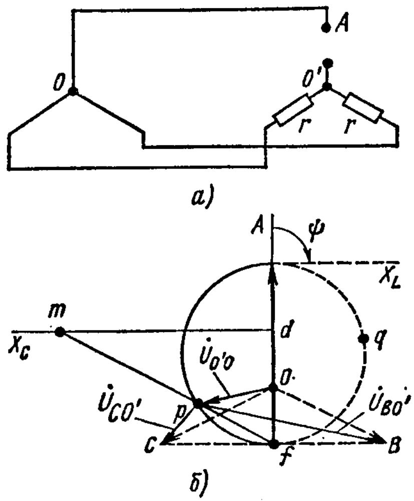


Рис. 6.22

Емкость C берут такой величины, чтобы емкостное сопротивление $1/\omega C$ равнялось сопротивлению каждой лампы.

Если три конца указателя подключить к трем концам симметричной трехфазной системы э. д. с., то потенциал нулевой точки схемы на рис. 6.23 будет определяться положением точки O' на векторной диаграмме рис. 6.22, *б* (соответствует точке *p*).

Из диаграммы рис. 6.22, *б* видно, что напряжение на лампах накаливания будет различно. На лампе, включенной в фазу B, оно определяется вектором $\dot{U}_{BO'}$; на лампе, включенной в фазу C, — вектором $\dot{U}_{CO'}$. Так как $U_{BO'} > U_{CO'}$, то лампа в фазе B будет гореть более ярко, чем лампа в фазе C. Следовательно, *если фазу трехфазной системы э. д. с., к которой подключен конденсатор, принять за фазу A, то фаза, к которой окажется подключенной ярко горящая лампа, есть фаза B, а фаза с тускло горящей лампой — фаза C.*

Одним из важнейших свойств многофазных и, в частности, трехфазных токов является их способность создавать круговое вращающееся магнитное поле.

§ 6.17. Магнитное поле катушки с синусоидальным током. Магнитное поле одной катушки, по которой протекает синусоидальный ток, представляет собой пульсирующее* (не вращающееся) магнитное поле. На рис. 6.24 изображена катушка, по которой проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$. Магнитное поле характеризуется векто-

* Под пульсирующим полем понимают поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси создающей его катушки с током.

ром магнитной индукции $\vec{B}$. Направление $\vec{B}$ определяется направлением намотки катушки и направлением тока в ней в данный момент времени. Пусть буква H означает начало, а K — конец катушки. Если ток входит в зажим H и выходит из зажима K (это направление тока будем считать положительным: ему соответствует интервал

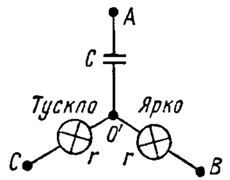


Рис. 6.23

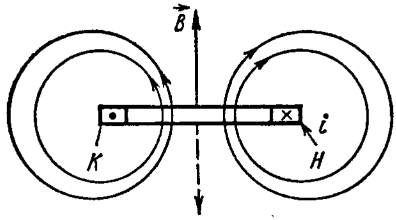


Рис. 6.24

времени от 0 до π), то вектор магнитной индукции направлен вверх по осевой линии катушки. В следующий полупериод, когда ток отрицателен, вектор $\vec{B}$ направлен вниз (пунктир на рис. 6.24). Таким образом, геометрическим местом концов вектора $\vec{B}$ является ось катушки.

§ 6.18. Получение кругового вращающегося магнитного поля.

Круговое вращающееся магнитное поле представляет собой магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого по величине неизменен и вращается с постоянной угловой скоростью ω.

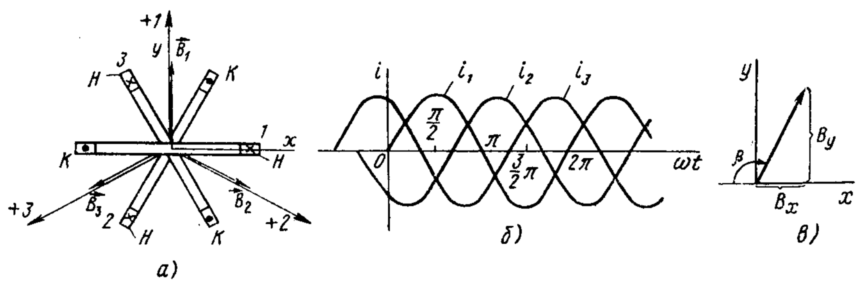


Рис. 6.25

Расположим три одинаковые катушки так, чтобы их оси были смещены на 120° по отношению друг к другу (рис. 6.25, *а*). Присоединим катушки к симметричной трехфазной системе э. д. с. Пусть токи входят в начала катушек H и изменяются следующим образом:

$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t - 120°); \quad i_3 = I_m \sin(\omega t + 120°).$$

Графики токов изображены на рис. 6.25, *б*. Каждый из токов создает пульсирующее поле, направленное вдоль оси своей катушки.

Положительное направление оси первой катушки обозначим $+1$, второй $+2$, третьей $+3$. Магнитную индукцию первой катушки обозначим B_1, второй — B_2, третьей — B_3. Тогда

$$B_1 = B_m \sin \omega t; \; B_2 = B_m \sin(\omega t - 120°); \; B_3 = B_m \sin(\omega t + 120°).$$

Изобразим векторами в пространстве мгновенные значения B_1, B_2, B_3 и результирующую индукцию для моментов времени $\omega t = 0$, $\pi/2$,

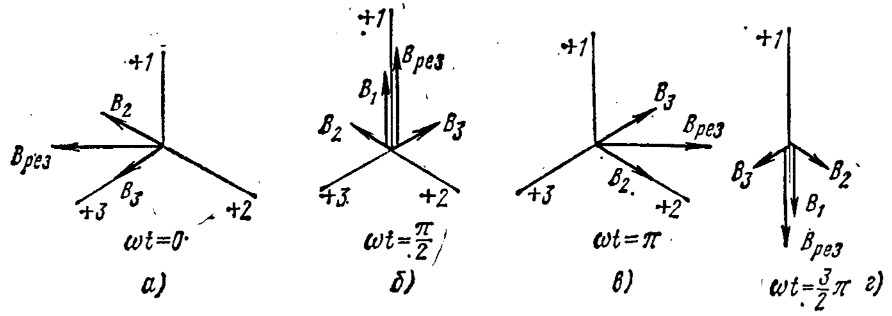


Рис. 6.26

π, $3\pi/2$ (рис. 6.26, *а — г*). Запишем алгебраическую сумму проекций векторов магнитных индукций $\dot{B}_1$, $\dot{B}_2$, $\dot{B}_3$ на оси x и y декартовой системы координат (см. рис. 6.25, *в*), совместив ось x с осью *1* и ось y с осью $+j$:

$$\dot{B}_x = \dot{B}_2 \cos 30° - \dot{B}_3 \cos 30° = -\frac{3}{2} \dot{B}_m j;$$

$$\dot{B}_y = \dot{B}_1 - \dot{B}_2 \cos 60° - \dot{B}_3 \cos 60° = \frac{3}{2} \dot{B}_m.$$

Мгновенное значение проекций векторов магнитной индукции на оси x и y

$$B_x = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t; \; B_y = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

Результирующая индукция по модулю $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m$ и составляет угол β с осью $-x$: $\operatorname{tg} \beta = -\frac{B_y}{B_x} = \operatorname{tg} \omega t$, т. е. угол $\beta = \omega t$.

С увеличением времени вектор результирующей магнитной индукции, оставаясь по величине равным $3B_m/2$, вращается с угловой скоростью ω по направлению от начала первой катушки с током $I_m \sin \omega t$ к началу второй катушки с током $I_m \sin(\omega t - 120°)$, т. е. вектор результирующей магнитной индукции вращается в сторону катушки с отстающим током.

Если ток $I_m \sin(\omega t - 120°)$ пропустить по третьей, а ток $I_m \sin(\omega t + 120°)$ — по второй катушке, то направление вращения поля изменится на обратное.

Если произойдет обрыв одной из фаз или ток в ней по амплитуде не будет равен току в какой-либо другой фазе или сдвинут по фазе не на 120°, то образуется *эллиптическое вращающееся поле.* При возникновении его конец вектора результирующей магнитной индукции будет скользить по эллипсу.

Для того чтобы усилить вращающееся магнитное поле, внутрь катушек помещают полый или сплошной ферромагнитный цилиндр, а стороны катушек заключают в пазы внешнего ферромагнитного цилиндра (рис. 6.27).

Вращающееся магнитное поле используется в электрических двигателях.

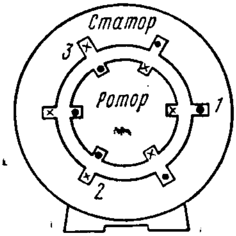


Рис. 6.27

§ 6.19. Принцип работы асинхронного двигателя. Наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель. В нем имеется неподвижная часть — статор, в пазах которого помещены три катушки, создающие круговое вращающееся магнитное поле, и подвижная часть — ротор, в пазах которого находятся три замкнутые на себя или на внешнее сопротивление катушки (рис. 6.27). Катушки на рис. 6.27 даны в разрезе, торцовые части катушек не показаны; каждая из катушек занимает лишь небольшую часть окружности статора (или ротора). В действительности каждая из катушек (прямые и обратные провода ее) занимает около $^1/_3$ окружности расточки статора (или окружности ротора). Вал ротора двигателя соединен с валом рабочей машины.

Допустим, что вначале ротор неподвижен. При этом вращающееся магнитное поле, созданное обмотками статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой скоростью ω и наводит в них э. д. с. Э. д. с. вызовут токи в катушках ротора. По закону Ленца, эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле.

Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же сторону, в какую вращается магнитное поле (в этом можно убедиться, применив правило левой руки).

В установившемся режиме скорость вращения ротора $\omega_{рот}$ составляет $(0{,}98 \div 0{,}95)\,\omega$. Двигатель называют асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно с вращающимся полем; $\omega_{рот}$ не может равняться угловой скорости вращающегося поля. Это станет понятно, если учесть, что при $\omega_{рот} = \omega$ вращающееся поле не пересекало бы провода катушек ротора, в них отсутствовал бы ток и ротор не испытывал бы вращающего момента *.

§ 6.20. Разложение несимметричной системы на системы нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз. Любую несимметричную систему трех токов,

* В курсе ТОЭ ограничимся качественным рассмотрением основных положений, характеризующих принцип работы асинхронного двигателя. Подробнее эти вопросы изучают в курсе электрических машин.

напряжений, потоков одинаковой частоты — обозначим их $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ — можно однозначно представить в виде трех систем: нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз.

Система прямой последовательности (рис. 6.28, *а*) состоит из трех векторов $\dot{A}_1$, $\dot{B}_1$, $\dot{C}_1$, равных по величине и повернутых относительно друг друга на 120°, причем вектор $\dot{B}_1$ отстает от вектора $\dot{A}_1$ на 120°. Используя оператор a трехфазной системы (см. § 6.10), можно записать:

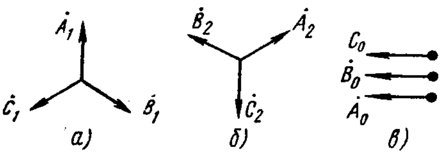


Рис. 6.28

$$\dot{B}_1 = a^2\dot{A}_1; \quad \dot{C}_1 = a\dot{A}_1. \tag{6.15}$$

Система обратной последовательности (рис. 6.28, *б*) состоит из трех векторов $\dot{A}_2$, $\dot{B}_2$, $\dot{C}_2$, равных по величине и повернутых относительно друг друга на 120°, причем вектор $\dot{B}_2$ опережает вектор $\dot{A}_2$ на 120°:

$$\dot{B}_2 = a\dot{A}_2; \quad \dot{C}_2 = a^2\dot{A}_2. \tag{6.16}$$

Система нулевой последовательности (рис. 6.28, *в*) образована тремя векторами, совпадающими по фазе:

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0. \tag{6.17}$$

Выразим заданные три вектора $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ через векторы симметричных систем следующим образом:

$$\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad \dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}_1 + \dot{B}_2; \quad \dot{C} = \dot{C}_0 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2. \tag{6.18}$$

Перепишем (6.18) с учетом (6.15) и (6.16):

$$\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \tag{6.19}$$

$$\dot{B} = \dot{A}_0 + a^2\dot{A}_1 + a\dot{A}_2; \tag{6.20}$$

$$\dot{C} = \dot{A}_0 + a\dot{A}_1 + a^2\dot{A}_2. \tag{6.21}$$

Из системы уравнений (6.19) — (6.21) найдем $\dot{A}_0$, $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$ через заданные векторы $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$. Для определения $\dot{A}_0$ сложим уравнения (6.19) — (6.21) и учтем, что $1 + a + a^2 = 0$. В результате получим

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}). \tag{6.22}$$

Таким образом, для нахождения $\dot{A}_0$ следует геометрически сложить три заданных вектора и взять одну треть от полученной суммы.

Для определения $\dot{A}_1$ к уравнению (6.19) прибавим уравнение (6.20), умноженное на a, и уравнение (6.21), умноженное на a^2, затем сложим их и получим

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}). \tag{6.23}$$

Следовательно, одна треть суммы, состоящей из вектора $\dot{A}$ плюс вектор $\dot{B}$ (повернутый против часовой стрелки на 120°) и плюс вектор $\dot{C}$ (повернутый по часовой стрелке на 120°) дает вектор $\dot{A}_1$.

Для определения $\dot{A}_2$ к уравнению (6.19) прибавим уравнение (6.20), предварительно умноженное на a^2, и уравнение (6.21), умноженное на a:

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}). \tag{6.24}$$

§ 6.21. Понятие о методе симметричных составляющих. Трехфазные системы передачи электрической энергии состоят из источников энергии, линий передачи, трансформаторов и электродвигателей. В результате какой-либо аварии (например, короткого замыкания или обрыва провода) или в результате несимметричной нагрузки на элементах системы (электродвигателях, трансформаторах, на самой линии передачи) возникают несимметричные напряжения.

Расчет токов и напряжений в таких системах производят с помощью схем замещения, на которых все элементы системы должны быть представлены комплексными сопротивлениями. Но сопротивление на фазу для одного и того же элемента различно для разных последовательностей. Поэтому расчет следует вести для каждой из последовательностей отдельно, а затем искомую величину (ток или напряжение) определить как сумму токов или соответственно напряжений от нулевой, прямой и обратной последовательностей.

Рассмотрим причины, обусловливающие различные значения сопротивления одного и того же элемента для разных последовательностей фаз (при относительно низких частотах).

Сопротивление на фазу трехфазной линии передачи для прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз обозначим соответственно $Z_{1л}$, $Z_{2л}$, $Z_{0л}$. Сопротивление на фазу линии для прямой последовательности $Z_{1л}$ равно сопротивлению на фазу линии для обратной последовательности $Z_{2л}$, но не равно сопротивлению на фазу линии для нулевой последовательности фаз $Z_{0л}$ в результате различия в значениях индуктивности на фазу трехфазной линии для систем прямой и нулевой последовательностей фаз.

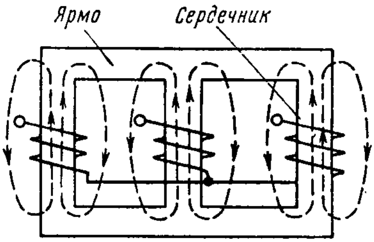


Рис. 6.29

Различие в значениях индуктивности на фазу для прямой и нулевой последовательностей фаз объясняется двумя причинами.

Во-первых, индуктивность на фазу линии передачи для прямой и обратной последовательностей определяется только геометрическими размерами петель, образованных линейными проводами, тогда как индуктивность на фазу линии для нулевой последовательности зависит не только от геометрических размеров петель, образованных линейными проводами, но и от геометрических размеров петель, образованных линейными проводами и нулевым проводом.

Во-вторых, э. д. с., наводимые в проводах линии для прямой и обратной последовательностей, представляют собой геометрическую сумму э. д. с., вызванных сдвинутыми по фазе на 120° токами в линейных проводах, тогда как э. д. с., наводимые в проводах линии для нулевой последовательности, созданы совпадающими по фазе токами нулевой последовательности.

В трехфазном трехстержневом трансформаторе (магнитная система его изображена на рис. 6.29) сопротивление на фазу для нулевой последовательности $Z_{0т}$ не равно сопротивлению на фазу для прямой последовательности $Z_{1т}$, но $Z_{1т} = Z_{2т}$, где $Z_{2т}$ — сопротивление на фазу для обратной последовательности.

Объясняется это главным образом тем, что магнитные потоки нулевой последовательности $\dot{\Phi}_0$ всех трех фаз находятся в фазе и поэтому не могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы и замыкаются по воздуху (рис. 6.29). Магнитные потоки трех фаз прямой $\dot{\Phi}_1$ (и соответственно обратной) последовательности по фазе сдвинуты на 120° и поэтому могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы. Так как магнитное сопротивление по пути в воздухе много больше магнитного сопротивления по пути в стали, то при одинаковых токах нулевой и прямой последовательностей $\Phi_0 < \Phi_1$. Поэтому $Z_{0т} < Z_{1т}$. Еще большее различие между сопротивлениями нулевой $Z_{0д}$, прямой $Z_{1д}$ и обратной $Z_{2д}$ последовательностей имеет место для асинхронного двигателя.

Если к входным зажимам трехфазного асинхронного двигателя рис. 6.27 одновременно подвести систему напряжений прямой, нулевой и обратной последовательностей фаз, то входное сопротивление на фазу двигателя для прямой последовательности $Z_{1д}$ не будет равно входному сопротивлению на фазу для обратной последовательности $Z_{2д}$ и оба они будут отличны от входного сопротивления для нулевой последовательности $Z_{0д}$. Разберем, чем это объясняется.

Под действием напряжения прямой последовательности в двигателе создается круговое вращающееся магнитное поле. Оно увлекает за собой ротор двигателя. Ротор вращается с угловой частотой $\omega_{рот}$. Система напряжений обратной последовательности также создает круговое вращающееся поле, но направление вращения его обратно направлению вращения поля прямой последовательности.

Система напряжений нулевой последовательности вращающегося магнитного поля не создает. Вокруг статорных обмоток ею создаются пульсирующие потоки, замыкающиеся по воздушному зазору между статором и ротором, подобно тому как в трехстержневом трехфазном трансформаторе рис. 6.29 потоки от нулевой последовательности, выходя из сердечника, замыкались по воздуху.

Входное сопротивление на фазу двигателя для данной последовательности зависит не только от активного и реактивного сопротивлений фазы статорной обмотки, но и от активного и реактивного сопротивлений фазы роторной обмотки *. Индуктивное сопротивление фазы ротора прямо пропорционально частоте. Э. д. с. прямой последовательности создают в роторе токи частоты $\omega - \omega_{рот}$, что составляет примерно от 0,02 до 0,05ω, тогда как токи ротора от обратно вращающегося поля имеют частоту $\omega + \omega_{рот} \approx (1{,}98 \div 1{,}95)\,\omega$. Так как частоты токов в роторе, создаваемые прямой и обратной последовательностями, различны, то различны и входные сопротивления на фазу для прямой ($Z_{1д}$) и обратной ($Z_{2д}$) последовательностей.

Магнитные потоки нулевой последовательности фаз замыкаются, минуя ротор, а потоки прямой и обратной последовательностей фаз проходят через ротор. При одном и том же токе прямой и нулевой последовательностей соответствующие им потоки различны. Поэтому для асинхронного двигателя

$$Z_{0д} \neq Z_{1д} \neq Z_{2д}.$$

Расчет по методу симметричных составляющих состоит в следующем. На основании принципа наложения, применимого к линейным цепям, заданный несимметричный режим работы схемы представляют как результат наложения трех симметричных режимов.

В первом симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат только составляющие прямой последовательности фаз, а линии передачи, вращающиеся машины и трехфазные трансформаторы представлены на схемах их сопротивлениями для прямой последовательности Z_1.

Во втором симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат составляющие только обратной последовательности, а машины и трансформаторы представлены их сопротивлениями обратной последовательности Z_2.

В третьем симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат только составляющие нулевой последовательности, а машины и трансформаторы представлены соответствующими сопротивлениями нулевой последовательности Z_0.

Для того чтобы от несимметричной исходной схемы прийти к трем симметричным схемам, поступают следующим образом: в том месте схемы, где создается несимметрия, в схему вводят систему трех несимметричных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Система этих трех напряжений (э. д. с.) на основании теоремы компенсации заменяет три неодинаковых сопротивления, образовавшихся в месте аварии и приведших к несимметрии во всей схеме.

Далее систему трех несимметричных напряжений в соответствии с § 6.20 раскладывают на три симметричные системы, основные векторы которых $\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ надлежит определить.

Точно так же систему трех несимметричных токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ раскладывают на три симметричные системы токов, основные векторы которых $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ надлежит определить.

---

* Подобно тому как в трансформаторе входное сопротивление определяется не только собственным сопротивлением первичной обмотки, но и сопротивлением, вносимым вторичной обмоткой (см. § 3.39).

В методе симметричных составляющих неизвестными являются шесть величин; три напряжения ($\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$) и три тока ($\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$), через которые могут быть выражены любые напряжения и токи в цепи.

Для определения шести неизвестных составляют шесть уравнений. По одному уравнению составляют для каждой из трех симметричных систем, остальные три уравнения записывают для того участка схемы, где создается несимметрия. Вид трех последних уравнений зависит от характера несимметрии в схеме.

Примеры использования метода симметричных составляющих можно найти, например, в [1].

Вопросы для самопроверки

1. Определить понятие трехфазной симметричной системы э. д. с. Какими достоинствами объясняется широкое распространение трехфазных систем в энергетике? 2. Что понимают под активной и полной мощностями? 3. Почему при симметричной нагрузке расчет можно вести на одну фазу? 4. Охарактеризовать условия получения трехфазного кругового вращающегося магнитного поля. 5. Что свойственно прямой, нулевой и обратной последовательностям фаз? 6. Как разложить несимметричную трехфазную систему на три симметричных? 7. Объяснить, почему сопротивление на фазу элементов трехфазных систем (линии передачи, трехстержневого трансформатора, асинхронного двигателя) неодинаково для различных последовательностей. 8. Решите задачи 7.4; 7.13; 7.15; 7.21; 7.28.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 7.1. Определение периодических несинусоидальных токов и напряжений. *Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями* называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Они возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей (и при сочетаниях этих режимов):

1) когда источник э. д. с. (источник тока) дает несинусоидальную э. д. с. (несинусоидальный ток), а все элементы цепи — активные сопротивления, индуктивности и емкости — линейны, т. е. от величины тока не зависят;

2) если источник э. д. с. (источник тока) дает синусоидальную э. д. с. (синусоидальный ток), но один или несколько элементов цепи нелинейны;

3) когда источник э. д. с. (источник тока) дает несинусоидальную э. д. с. (несинусоидальный ток), а в состав электрической цепи входят одно или несколько нелинейных сопротивлений;

4) если источник э. д. с. (тока) дает постоянную или синусоидальную э. д. с. (ток), а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.

В данной главе рассматриваются методика расчета и особенности работы линейных электрических цепей при воздействии на них несинусоидальных э. д. с. и токов — первый из перечисленных режимов работы. Второй и частично третий режимы работы обсуждаются в гл. 15, четвертый режим работы — в гл. 18.

§ 7.2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений с помощью рядов Фурье. Из курса математики известно, что любую периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, удовлетворяющую условиям Дирихле *, можно разложить в ряд Фурье.

Переменная величина x связана со временем t соотношением

$$x = \omega t = 2\pi t / T,$$

где T — период функции во времени.

Таким образом, период функции по x равен 2π, а период той же функции по времени равен T.

Ряд Фурье записывают так:

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 + A_1' \sin x + A_2' \sin 2x + A_3' \sin 3x + A_4' \sin 4x + \ldots + \\ + A_1'' \cos x + A_2'' \cos 2x + A_3'' \cos 3x + A_4'' \cos 4x + \ldots, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

где A_0 — постоянная составляющая; A_1' — амплитуда синусной (изменяющейся по закону синуса) составляющей первой гармоники; A_1'' — амплитуда косинусной составляющей первой гармоники; A_2' — амплитуда синусной составляющей второй гармоники и т. д.

Здесь

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx; \qquad (7.2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} A_1' = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin x\, dx; & A_1'' = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k' = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx; & A_k'' = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx. \end{array} \right\} \qquad (7.3)$$

Так как

$$A_k' \sin kx + A_k'' \cos kx = A_k \sin(kx + \psi_k),$$

где

$$A_k = \sqrt{(A_k')^2 + (A_k'')^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi_k = A_k'' / A_k',$$

то ряд Фурье (7.1) можно записать в другой форме:

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \ldots = \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \psi_k), \end{aligned} \qquad (7.4)$$

где A_k — амплитуда k-гармоники ряда Фурье.

Гармоники, для которых k — нечетное число, называют *нечетными*; для которых k — четное число, — *четными*.

---

* Все периодические функции, с которыми имеют дело в электротехнике, условиям Дирихле удовлетворяют. Поэтому производить проверку на выполнение условий Дирихле не требуется.

§ 7.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией. На рис. 7.1 и 7.2 изображены три кривые, обладающие некоторыми специфическими свойствами.

Кривая рис. 7.1, *а* удовлетворяет условию $-f(x+\pi)=f(x)$.

Кривые, для которых выполнимо это условие, называют *симметричными относительно оси абсцисс*. Если кривую рис. 7.1, *а* сместить по оси x на полпериода и зеркально отразить относительно оси x, то полученная кривая совпадет с кривой $f(x)$.

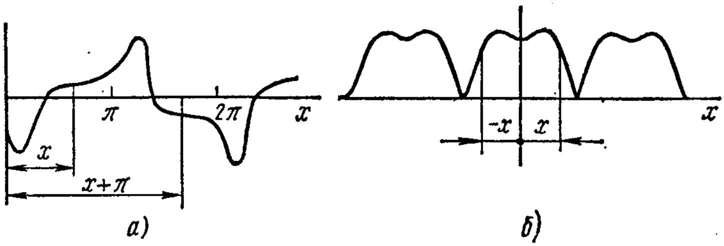


Рис. 7.1

При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т. е. равны нулю коэффициенты $A_0=A'_2=A''_2=A'_4=A''_4=\ldots=0$.

Поэтому кривые типа кривой рис. 7.1, *а* раскладываются в ряд

$$f(x)=A'_1\sin x+A''_1\cos x+A'_3\sin 3x+A''_3\cos 3x+\ldots$$

Каждое слагаемое этого ряда удовлетворяет условию $-f(x+\pi)=f(x)$. Так, например, $-\sin(x+\pi)=\sin x$.

Кривая, подобная кривой рис. 7.1, *б*, обладает *симметрией относительно оси ординат* и удовлетворяет условию $f(-x)=f(x)$.

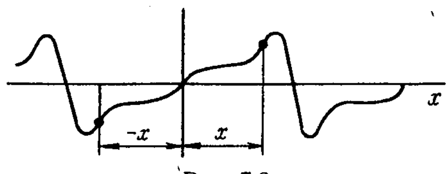


Рис. 7.2

Если кривую, лежащую левее оси ординат, зеркально отразить относительно оси ординат, то полученная кривая совпадет с кривой, лежащей правее оси ординат. При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют синусные ($A'_1=A'_2=A'_3=\ldots=0$) и присутствуют лишь косинусные составляющие и постоянная составляющая.

Таким образом, кривые типа кривой рис. 7.1, *б* можно разложить в ряд

$$f(x)=A_0+A''_1\cos x+A''_2\cos 2x+A''_3\cos 3x+\ldots$$

Кривые типа кривой рис. 7.2 удовлетворяют условию $-f(-x)=f(x)$; их называют кривыми, *симметричными относительно начала координат*. Разложение их в ряд Фурье имеет такой вид:

$$f(x)=A'_1\sin x+A'_2\sin 2x+A'_3\sin 3x+\ldots$$

§ 7.4. О разложении в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм. Встречающиеся в электротехнике периодические кривые можно подразделить на две группы:

1) кривые геометрически правильной формы, например трапецеидальной, треугольной, прямоугольной и т. п.; разложение их в ряд Фурье дано в табл. 7.1, где вместо x записано ωt; 2) кривые произвольной (геометрически неправильной) формы; чаще всего они заданы в виде графика; разложение их в ряд Фурье производят графически (графо-аналитически).

§ 7.5. Графический (графо-аналитический) метод определения гармоник ряда Фурье. Графический метод определения гармоник ряда Фурье основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $f(x)$, равный 2π, разбивают на n равных частей $\Delta x = 2\pi/n$ и интегралы заменяют суммами.

По определению, постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{p=n} f_p(x)\,\Delta x = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\,\frac{2\pi}{n},$$

или

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x), \tag{7.5}$$

где p — текущий индекс, принимающий значения от 1 до n; $f_p(x)$ — значение функции $f(x)$ при $x = (p-0{,}5)\,\Delta x$, т. е. в середине p-го интервала.

Амплитуда синусной составляющей k-гармоники ряда

$$A'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \approx \frac{2}{2\pi}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\,\frac{2\pi}{n}\sin_p kx,$$

или

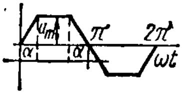
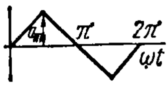
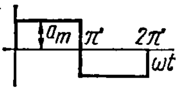
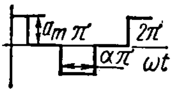
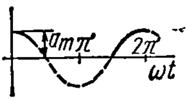
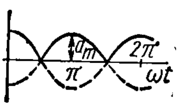
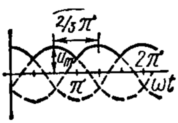
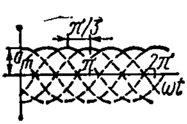
$$A'_k = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\sin_p kx; \tag{7.6}$$

амплитуда косинусной составляющей k-гармоники

$$A''_k = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\cos_p kx. \tag{7.7}$$

Здесь $\sin_p kx$ и $\cos_p kx$ — соответственно значения функций $\sin kx$ и $\cos kx$ при $x = (p-0{,}5)\,\Delta x$, т. е. в середине p-го интервала.

При расчетах по формулам (7.5) — (7.7) обычно достаточно разделить период на $n = 24$ или 18 частей, а в некоторых случаях и на меньшее число частей.

	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t+\right.$ $\left.+\frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t+\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{8a_m}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\right.$ $\left.-\frac{1}{49}\sin 7\omega t+\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos\omega t+\frac{1}{3}\sin\frac{3\alpha\pi}{2}\cos 3\omega t+\right.$ $\left.+\frac{1}{5}\sin\frac{5\alpha\pi}{2}\cos 5\omega t+\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\omega t+\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t-\right.$ $\left.-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t-\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\right.$ $\left.+\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t-\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{3\sqrt{3}\,a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\omega t-\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t+\right.$ $\left.+\frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\omega t-\dots\right)$
	$f(\omega t)=\frac{3a_m}{\pi}\left(1+\frac{2\cos 6\omega t}{5\cdot 7}-\frac{2\cos 12\omega t}{11\cdot 13}+\right.$ $\left.+\frac{2\cos 18\omega t}{17\cdot 19}-\dots\right)$

Перед тем как производить графическое разложение в ряд, необходимо выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат (см. § 7.3). Наличие того или иного вида симметрии позволяет до проведения разложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая $f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая A_0 и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя A'_k и A''_k при нечетных k, следует учесть, что $\sum f_p(x) \sin_p kx$ за первый полупериод равна сумме $\sum f_p(x) \sin_p kx$ за второй полупериод.

Знак углов ψ_k в формуле (7.4) зависит от знаков A'_k и A''_k. При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать, что масштаб по оси абсцисс для k-гармоники должен быть взят в k раз бóльшим, чем для первой гармоники.

Так, например, если некоторый отрезок по оси абсцисс для первой гармоники выражает собой угол $\pi/3$, то тот же отрезок для третьей гармоники выражает собой угол, в 3 раза больший, т. е. $3(\pi/3) = \pi$.

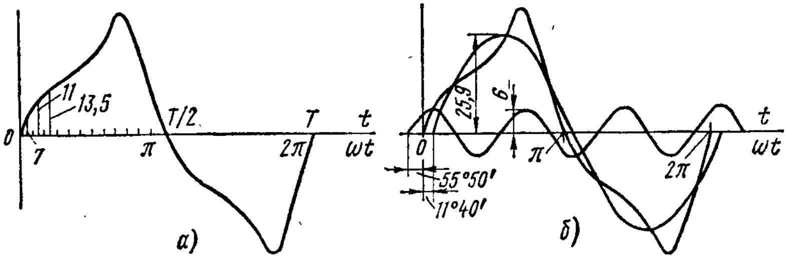


Рис. 7.3

Пример 64. Найти первую и третью гармоники функции $f(x)$, изображенной на рис. 7.3, *а*. Значения ординат функции $f_p(x)$ за первый полупериод при разбивке периода на $n = 24$ части следующие:

p ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_p(x)$ ...	7	11	13,5	15,4	17,4	20,5	25,4	32,5	27,7	19,2	10	5

Решение. Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то $A_0 = 0$ и ряд будет состоять только из нечетных гармоник.

Амплитуда синусной составляющей первой гармоники

$$A'_1 = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n} f_p(x) \sin_p x = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \sin_p x;$$

$$A'_1 = \frac{4}{24} (7 \sin 7°30' + 11 \sin 22°30' + 13{,}5 \sin 37°30' + 15{,}4 \sin 52°30' + $$
$$+ 17{,}4 \sin 67°30' + 20{,}5 \sin 82°30' + 25{,}4 \sin 97°30' + 32{,}5 \sin 112°30' +$$
$$+ 27{,}7 \sin 127°30' + 19{,}2 \sin 142°30' + 10 \sin 157°30' +$$
$$+ 5 \sin 172°30') \approx 25{,}3.$$

Амплитуда косинусной составляющей первой гармоники

$$A_1'' = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \cos_p x \approx -5{,}23.$$

Амплитуда синусной составляющей третьей гармоники

$$A_3' = \frac{4}{24} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \sin_p 3x \approx 3{,}47.$$

Амплитуда косинусной составляющей третьей гармоники

$$A_3'' = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \cos_p 3x \approx 5{,}1.$$

Амплитуда первой гармоники $A_1 = \sqrt{(A_1')^2 + (A_1'')^2} = 25{,}9$. Тангенс угла ψ_1, на который начало первой гармоники смещено по отношению к началу кривой $f(x)$,

$$\operatorname{tg} \psi_1 = A_1''/A_1' = -5{,}23/25{,}3 = -0{,}206; \quad \psi_1 = -11°40'.$$

Амплитуда третьей гармоники

$$A_3 = \sqrt{(A_3')^2 + (A_3'')^2} = 6;$$

$$\operatorname{tg} \psi_3 = A_3''/A_3' = 1{,}47, \quad \psi_3 = 55°50'.$$

Следовательно, если ограничиться третьей гармоникой, то

$$f(\omega t) = 25{,}9 \sin(\omega t - 11°40') + 6 \sin(3\omega t + 55°50').$$

На рис. 7.3, *б* изображены первая и третья гармоники полученного ряда, а также результирующая (суммарная) кривая. Ее можно сопоставить с кривой рис. 7.3, *а*.

§ 7.6. Расчет токов и напряжений при несинусоидальных источниках питания. До проведения расчета вынуждающие силы (ток источника тока или э. д. с. источника э. д. с.) должны быть представлены рядами Фурье.

Согласно принципу наложения, мгновенное значение тока любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Аналогично, мгновенное значение напряжения на любом участке схемы равно сумме мгновенных значений напряжений отдельных гармоник на этом участке. Расчет производят для каждой из гармоник в отдельности с помощью уже известных приемов.

Сначала рассчитывают токи и напряжения, возникающие от действия постоянной составляющей э. д. с. или источника тока, после этого — токи и напряжения от действия первой гармоники, затем от второй, третьей и т. д.

При расчете токов и напряжений, возникающих от действия постоянной составляющей э. д. с., необходимо иметь в виду, что падение напряжения на индуктивности L при постоянном токе равно нулю, а также что постоянный ток через емкость C не проходит.

При расчете следует учитывать, что индуктивное сопротивление X_L растет прямо пропорционально частоте. Поэтому для k-гармоники X_{Lk} в k раз больше, чем для первой гармоники X_{L1}:

$$\left.\begin{aligned} X_{Lk} &= k\omega L = kX_{L1}; \\ X_{L1} &= \omega L. \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

Емкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты, поэтому для k-гармоники X_{Ck} в k раз меньше, чем для первой гармоники X_{C1}:

$$\left.\begin{aligned} X_{Ck} &= 1/(k\omega C) = X_{C1}/k; \\ X_{C1} &= 1/(\omega C). \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Для каждой гармоники можно построить векторную диаграмму. Однако откладывать на векторной диаграмме токи и падения напряжения *различных* частот и тем более векторно складывать токи и падения напряжения различных частот недопустимо, поскольку угловые скорости вращения векторов разных частот неодинаковы.

Активные сопротивления, если частоты не очень велики, полагают от частоты не зависящими *.

При расчете каждую гармонику выражают комплексным числом. Суммирование одноименных гармоник производят путем сложения комплексных чисел или векторов на комплексной плоскости, т. е. так же, как это делалось в гл. 3.

Пример 65. В левой ветви схемы рис. 7.4, *а* имеется источник тока $i_k(t) = I_{km}\cos 2\omega t$, в средней (второй) — источник э. д. с. $e(t) = E_0 + E_m \sin \omega t$. Индуктивность L_4 магнитно связана с индуктивностью L_3. Взаимная индуктивность между ними M. Определить мгновенное значение тока i_3 и напряжения u_{ba} на зажимах L_4. Дано: $I_{km} = 5$ А; $\omega = 1000$ рад/с; $E_0 = 3$ В; $E_m = 6$ В; $R_1 = 3$ Ом; $L_3 = 3$ мГ; $M = 1$ мГ.

Решение. Положительные направления для токов выберем в соответствии с рис. 7.4, *а*.

По второму закону Кирхгофа,

$$u_{ba} - L_4 \frac{di_4}{dt} + M \frac{di_3}{dt} = 0,$$

но $i_4 = 0$; поэтому $u_{ba} = -M\,di_3/dt$.

Воспользуемся принципом наложения и найдем составляющие тока i_3 от каждого источника в отдельности.

Схема рис. 7.4, *б* служит для расчета токов от действия постоянной составляющей э. д. с. Левая ветвь схемы разомкнута, так как в ней включен источник тока с бесконечным сопротивлением. Правая ветвь короткозамкнута, так как индуктивность для постоянного тока имеет нулевое сопротивление. При этом $i_3^{(0)} = E_0/R_1 = 1$ А.

---

* Строго говоря, активное сопротивление зависит от частоты вследствие явления поверхностного эффекта. Явление поверхностного эффекта (см. ч. III учебника) здесь не учитывается.

Первую гармонику тока $i_3^{(1)}$ находим, используя схему рис. 7.4, *в*:

$$\dot{I}_{3m}^{(1)} = 6/(3+3j) = 1{,}41e^{-j45^\circ}.$$

Вторую гармонику тока $i_3^{(2)}$ находим в соответствии со схемой рис. 7.4, *г*:

$$\dot{I}_{3m}^{(2)} = \dot{I}_{km} \frac{R_1}{R_1 + j2\omega L} = 5e^{j90^\circ} \frac{3}{3+j6} = 2{,}23e^{j26^\circ 40'}.$$

Мгновенное значение тока i_3 равно сумме мгновенных значений:

$$i_3 = i_3^{(0)} + i_3^{(1)} + i_3^{(2)} = 1 + 1{,}41\sin(\omega t - 45^\circ) + 2{,}23\sin(2\omega t + 26^\circ 40')\ \text{А}.$$

Напряжение

$$u_{ba} = -M\, di_3/dt = -1{,}41\cos(\omega t - 45^\circ) - 4{,}46\cos(2\omega t + 26^\circ 40')\ \text{В}.$$

§ 7.7. Резонансные явления при несинусоидальных токах. Как известно из гл. 3, *резонансным режимом работы* электрической цепи,

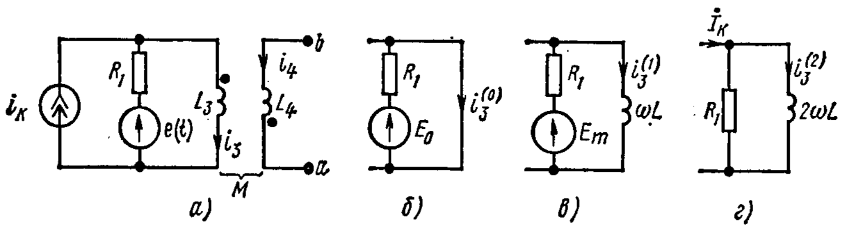


Рис. 7.4

содержащей одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей, называют такой режим ее работы, при котором ток на входе этой цепи совпадает по фазе с действующей на входе э. д. с.

Если действующая э. д. с. несинусоидальна, то в электрической цепи могут возникать резонансные режимы (резонансы токов или напряжений) не только на первой гармонике, но и на высших гармониках.

Условимся под резонансом на k-гармонике понимать такой режим работы, при котором ток k-гармоники на входе цепи по фазе совпадает с k-гармоникой, действующей на входе э. д. с. (но при этом токи остальных гармоник не совпадают по фазе с вызвавшими их э. д. с.).

Если учитывать активные сопротивления индуктивных катушек, то условие возникновения резонанса для какой-либо гармоники заключается в том, что реактивная составляющая входного сопротивления для этой гармоники должна быть равна нулю.

Исследование резонансных явлений при несинусоидальных токах часто производят, полагая активные сопротивления индуктивных катушек равными нулю. В этом случае входное сопротивление при резонансе токов равно бесконечности, а входное сопротивление при резонансе напряжений равно нулю.

При возникновении резонансного и близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения этой гармоники могут оказаться бóльшими, чем токи и напряжения первой гармоники на этих участках цепи, несмотря на то что амплитуда соответствующей высшей гармоники э. д. с. на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники э. д. с.

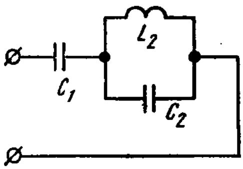


Рис. 7.5

Пример 66. В схеме рис. 7.5 задана индуктивность L_2. Полагая активное сопротивление индуктивной катушки равным нулю, найти, при каких значениях емкостей C_1 и C_2 входное сопротивление схемы для первой гармоники равняется нулю, а для девятой — бесконечности.

Решение. Запишем выражение для входного сопротивления схемы для первой гармоники и приравняем его нулю:

$$Z=\frac{-j}{\omega C_1}+\frac{j\omega L_2\left(\frac{-j}{\omega C_2}\right)}{j\left(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right)}=0.$$

Приравняем бесконечности входное сопротивление для девятой гармоники:

$$Z_9=\frac{-j}{9\omega C_1}+\frac{j9\omega L_2\left(\frac{-j}{9\omega C_2}\right)}{j\left(9\omega L_2-\frac{1}{9\omega C_2}\right)}=\infty.$$

Совместное решение дает

$$\frac{1}{\omega C_2}=81\omega L_2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\omega C_1}=\frac{81}{80}\omega L_2.$$

§ 7.8. Действующее значение несинусоидального тока и несинусоидального напряжения. По определению (см. § 3.2), квадрат действующего значения тока I выражается через мгновенное значение тока i следующим образом:

$$I^2=\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt.$$

Если ток

$$i=I_0+I_{1m}\sin(\omega t+\psi_1)+I_{2m}\sin(2\omega t+\psi_2)+\ldots,$$

то

$$i^2=I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}^2\sin^2(k\omega t+\psi_k)+$$

$$+\sum_{\substack{p=0\\ q=0\ \ p\neq q}}^{\infty}I_{pm}I_{qm}\sin(p\omega t+\psi_p)\sin(q\omega t+\psi_q).$$

Но

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T \sin^2(k\omega t+\psi_k)\,dt=\frac{T}{2};\\ &\int_{\substack{0\\ p\neq q}}^T \sin(p\omega t+\psi_p)\sin(q\omega t+\psi_q)\,dt=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Поэтому

$$I^2=I_0^2+\frac{I_{1m}^2}{2}+\frac{I_{2m}^2}{2}+\frac{I_{3m}^2}{2}+\ldots,$$

или

$$I=\sqrt{I_0^2+\frac{I_{1m}^2}{2}+\frac{I_{2m}^2}{2}+\ldots}.$$

Так как амплитуда k-гармоники тока I_{km} в $\sqrt{2}$ раз больше действующего значения k-гармоники I_k, то

$$\frac{I_{km}^2}{2}=\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}=I_k^2$$

и

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\ldots}. \tag{7.11'}$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей тока и действующих значений отдельных гармоник. От углов сдвига фаз ψ_k действующее значение тока не зависит.

Аналогично, действующее значение несинусоидального напряжения U равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений отдельных гармоник:

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ldots}. \tag{7.11}$$

Пример 67. На входе двухполюсника $u=100+80\sin(\omega t+30°)+$ $+60\sin(3\omega t+20°)+50\sin(5\omega t+45°)$ В; $i=33{,}3+17{,}87\sin(\omega t-18°)+$ $+5{,}59\sin(5\omega t+120°)$ А. Найти их действующие значения.

Решение.

$$U=\sqrt{100^2+\frac{80^2}{2}+\frac{60^2}{2}+\frac{50^2}{2}}=127{,}1 \text{ В};$$

$$I=\sqrt{33{,}3^2+\frac{17{,}87^2}{2}+\frac{5{,}59^2}{2}}=35{,}6 \text{ А}.$$

§ 7.9. Среднее по модулю значение несинусоидальной функции. Под *средним по модулю значением функции* понимают среднее значение модуля этой функции за период

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\omega t)|\,d\,\omega t. \tag{7.12}$$

В отличие от действующего значения оно зависит от значений ψ_k.

Пример 68. Дана функция, не содержащая постоянной составляющей и четных гармоник и не изменяющая знака в течение каждого полупериода. Определить ее среднее по модулю значение.

Решение. Разложим заданную функцию в ряд Фурье:

$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + I_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

После интегрирования получим

$$I_{\text{ср. по мод.}} = \frac{2}{\pi}\left(I_{1m} \cos\psi_1 + \frac{1}{3} I_{3m} \cos\psi_3 + \frac{1}{5} I_{5m} \cos\psi_5 + \dots\right). \quad (7.13)$$

§ 7.10. Величины, на которые реагируют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах. Несинусоидальные токи и напряжения измеряют приборами различных систем. Принципы действия этих приборов рассматривают в курсе электрических измерений. Поэтому здесь упомянем лишь, на какие величины реагируют вольтметры и амперметры различных систем.

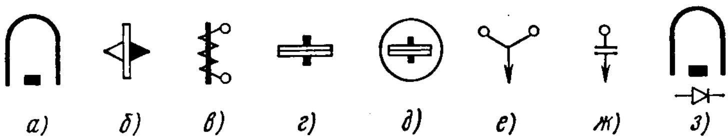


Рис. 7.6

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические приборы с выпрямителем — на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические без выпрямителя — на постоянную составляющую, амплитудные электронные вольтметры — на максимальное значение функции.

Напомним, что на лицевой стороне измерительного прибора всегда имеется условный значок, свидетельствующий о том, к какой системе относится данный прибор. На рис. 7.6 приведены некоторые из них: *а* — магнитоэлектрическая с подвижной рамкой, *б* — магнитоэлектрическая с подвижным магнитом, *в* — электромагнитная, *г* — электродинамическая, *д* — ферродинамическая, *е* — тепловая, *ж* — электростатическая, *з* — магнитоэлектрическая с выпрямителем.

§ 7.11. Активная и полная мощности несинусоидального тока. Под *активной мощностью* P несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt.$$

Если представить напряжение u и ток i рядами Фурье:

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots;$$

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \\ + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots,$$

подставить эти ряды под знак интеграла и проинтегрировать, учтя соотношения (7.10), то получим

$$P=U_0I_0+U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2+U_3I_3\cos\varphi_3+\ \ldots \qquad (7.14)$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.

Полная мощность S равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S=UI, \qquad (7.15)$$

где

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ \ldots}\,; \quad I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\ \ldots}\,.$$

Пример 69. Найти P и S, если

$$u=25{,}9\sin(\omega t-11°40')+6\sin(3\omega t+53°50')\text{ В};$$

$$i=3\sin(\omega t-40°)+0{,}9\sqrt{2}\sin(3\omega t+125°)\text{ А}.$$

Решение.

$$U_1=25{,}9/\sqrt{2}=18{,}3\text{ В};\quad U_3=6/\sqrt{2}=4{,}26\text{ В};$$

$$I_1=2{,}13\text{ А};\quad I_3=0{,}9\text{ А};$$

$$\varphi_1=-11°40'-(-40°)=28°20';\quad \varphi_3=-71°10';$$

$$P=18{,}3\cdot2{,}13\cos28°20'+4{,}26\cdot0{,}9\cos(-71°10')=35{,}5\text{ Вт};$$

$$U=\sqrt{U_1^2+U_3^2}=\sqrt{18{,}3^2+4{,}26^2}=18{,}55\text{ В};$$

$$I=\sqrt{2{,}13^2+0{,}9^2}=2{,}31\text{ А};\quad S=UI=18{,}55\cdot2{,}31=42{,}8\text{ ВА}.$$

§ 7.12. Замена несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидальными. При изучении некоторых простейших свойств нелинейных электрических цепей (см. гл. 15) несинусоидальные токи и напряжения, не содержащие постоянных составляющих, заменяют эквивалентными синусоидальными. Действующее значение синусоидального тока принимают равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения — равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Угол сдвига фаз $\varphi_э$ между эквивалентными синусоидами напряжения и тока берут таким, чтобы активная мощность эквивалентного синусоидального тока была равна активной мощности несинусоидального тока, т. е.

$$\cos\varphi_э=P/UI. \qquad (7.16)$$

Пример 70. Заменить несинусоидальные ток и напряжение примера 69 эквивалентными синусоидальными и найти угол сдвига фаз $\varphi_э$ между ними.

Решение. Действующее значение синусоидального напряжения $U=18{,}55$ В; действующее значение синусоидального тока $I=2{,}31$ А; $\cos\varphi_э=35{,}5/(18{,}55\cdot2{,}31)=0{,}828$; $\varphi_э=34°$.

§ 7.13. Особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем*. Электродвижущие силы каждой фазы трехфазного трансформатора или трехфазного генератора часто оказываются несинусоидальными. Каждая э. д. с. (e_A, e_B, e_C) повторяет по форме остальные со сдвигом на одну треть периода ($T/3$) и может быть разложена на гармоники. Постоянная составляющая обычно отсутствует.

Пусть k-гармоника э. д. с. фазы A

$$e_{kA} = E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Так как э. д. с. фазы B отстает от э. д. с. фазы A на $T/3$, а э. д. с. фазы C опережает э. д. с. фазы A на $T/3$, то k-гармоники э. д. с. в фазе B и в фазе C соответственно:

$$e_{kB} = E_{km} \sin\left[k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_k\right] = E_{km} \sin(k\omega t - 120°k + \psi_k);$$

$$e_{kC} = E_{km} \sin\left[k\omega\left(t + \frac{T}{3}\right) + \psi_k\right] = E_{km} \sin(k\omega t + 120°k + \psi_k);$$

$$k\omega \frac{T}{3} = k\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{3} = k\frac{2\pi}{3} = 120°k.$$

Если $k = 1, 4, 7, 10$, то k-гармоника э. д. с. фазы B отстает на 120° от гармоники э. д. с. фазы A. Следовательно, 1, 4, 7, 10-я гармоники образуют систему прямой последовательности фаз (что понимают под прямой последовательностью фаз, см. в § 6.20).

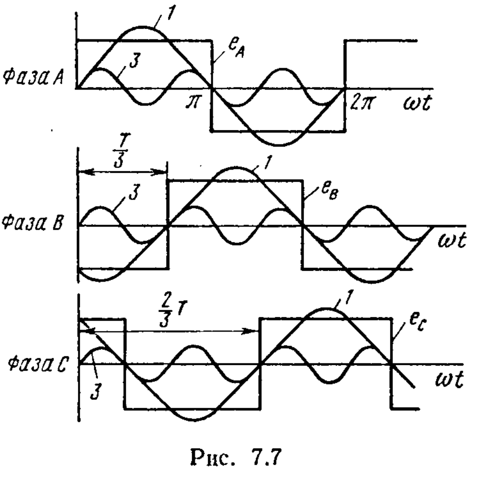


Рис. 7.7

Если $k = 2, 5, 8, 11$, то k-гармоника э. д. с. фазы B опережает k-гармонику фазы A на 120°. Следовательно, 2, 5, 8-я и т. д. гармоники образуют системы обратной последовательности.

Гармоники, кратные трем ($k = 3, 6, 9, \ldots$), образуют систему нулевой последовательности, т. е. третьи гармоники э. д. с. во всех трех фазах совпадают по фазе ($3 \cdot 120° = 360°$):

$$e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3).$$

Шестые гармоники э. д. с. также совпадают по фазе и т. д.

Совпадение по фазе третьих гармоник э. д. с. во всех трех фазах проиллюстрируем графически.

---

* Материал § 7.13 особенно необходим студентам электроэнергетических и электромеханических специальностей.

На рис. 7.7 э. д. с. e_A, e_B, e_C представляют собой три фазные э. д. с. трехфазного генератора. Они имеют прямоугольную форму и сдвинуты по отношению друг к другу на одну треть периода основной частоты.

На том же рисунке показаны первая и третья гармоники каждой э. д. с. Из рисунка видно, что третьи гармоники э. д. с. действительно находятся в фазе.

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем.

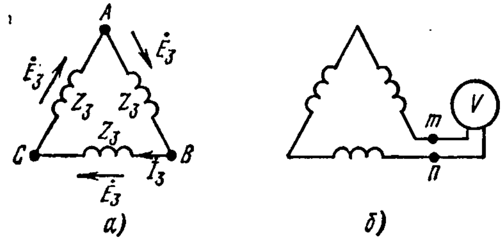


Рис. 7.8

1. При соединении обмоток трехфазного генератора (трехфазного трансформатора) в треугольник (рис. 7.8, *а*) по ним протекают токи гармоник, кратных трем, даже при отсутствии внешней нагрузки.

Алгебраическая сумма третьих гармоник э. д. с. в треугольнике равна $3\dot{E}_3$*. Обозначим сопротивление обмотки каждой фазы для третьей гармоники Z_3, тогда ток третьей гармоники в треугольнике

$$\dot{I}_3 = 3\dot{E}_3/3Z_3 = \dot{E}_3/Z_3;$$

аналогично, ток шестой гармоники

$$\dot{I}_6 = \dot{E}_6/Z_6,$$

где E_6 — действующее значение шестой гармоники фазной э. д. с.; Z_6 — сопротивление фазы для шестой гармоники.

Действующее значение тока, протекающего по замкнутому треугольнику в схеме рис. 7.8, *а*.

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \ldots}.$$

2. Если соединить обмотки трехфазного генератора (трехфазного трансформатора) в открытый треугольник (рис. 7.8, *б*), то при наличии в фазных э. д. с. гармоник, кратных трем, на зажимах m и n будет напряжение, равное сумме э. д. с. гармоник, кратных трем:

$$u_{mn} = 3E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + 3E_{6m}\sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots$$

Показание вольтметра в схеме рис. 7.8, *б*

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \ldots}.$$

3. В линейном напряжении независимо от того, в звезду или треугольник соединены обмотки генератора (трансформатора), кратные трем гармоники отсутствуют, если нагрузка равномерна.

---

* Алгебраическая сумма первых гармоник э. д. с. и всех гармоник э. д. с., не кратных трем, равна нулю, поэтому от перечисленных гармоник при отсутствии нагрузки по замкнутому треугольнику ток протекать не будет.

Рассмотрим сначала схему соединения трехфазного источника э. д. с. в треугольник (рис. 7.8, *а*) при отсутствии внешней нагрузки. Обозначив φ_{A3} — потенциал точки A и φ_{B3} — потенциал точки B по третьей гармонике, получим

$$\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3} - \dot{E}_3 + \dot{I}_3 Z_3.$$

Но $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 Z_3$; следовательно, $\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3}$. При наличии равномерной нагрузки, соединенной в треугольник, каждая фаза генератора (трансформатора) и параллельно ей присоединенная нагрузка могут быть заменены эквивалентной ветвью с некоторой э. д. с. $\dot{E}_3'$ и сопротивлением Z_3'. На полученную схему можно распространить вывод, сделанный для случая отсутствия внешней нагрузки.

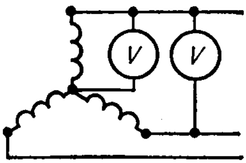


Рис. 7.9

При соединении в звезду трехфазного источника э. д. с. (рис. 7.9) линейное напряжение третьей гармоники равно разности соответствующих фазовых напряжений. Так как третьи гармоники в фазовых напряжениях совпадают по фазе, то при составлении этой разности они вычитаются.

В фазовом напряжении могут присутствовать все гармоники (постоянная составляющая обычно отсутствует). Следовательно, действующее значение фазового напряжения

$$U_ф = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \ldots}$$

В линейном напряжении схемы рис. 7.9 отсутствуют гармоники, кратные трем; поэтому

$$U_л = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \ldots}$$

Отношение $U_л/U_ф < \sqrt{3}$, если есть гармоники, кратные трем.

4. При соединении генератора и равномерной нагрузки в звезду и отсутствии нулевого провода токи третьих и других гармоник нулевой последовательности не могут протекать по линейным проводам. Поэтому между нулевыми точками приемника O' и генератора O (рис. 7.10 при $Z_0 = \infty$) действует напряжение

$$u_{O'O} = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + E_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots,$$

действующее значение которого

$$U_{O'O} = \sqrt{\frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{6m}^2}{2} + \ldots}$$

5. Если в схеме звезда — звезда при равномерной нагрузке фаз сопротивление нагрузки для третьей гармоники обозначить $Z_{н3}$, а сопротивление нулевого провода для третьей гармоники — Z_{03} (рис. 7.10), то по нулевому проводу будет протекать ток третьей

гармоники

$$\dot{I}_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \frac{Z_{н3}}{3}}*.$$

По каждому из линейных проводов будет протекать ток третьей гармоники $\dot{I}_{03}/3$.

Аналогично находят токи и других гармоник, кратных трем.

Пример 71. Мгновенное значение напряжения фазы A трехфазного генератора

$$u_A = 127\sin(\omega t + 10°) + 30\sin(3\omega t + 20°) + 20\sin(11\omega t + 15°)\ B.$$

Определить мгновенное значение линейного напряжения u_{AB} при соединении генератора в звезду.

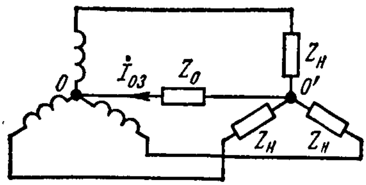


Рис. 7.10

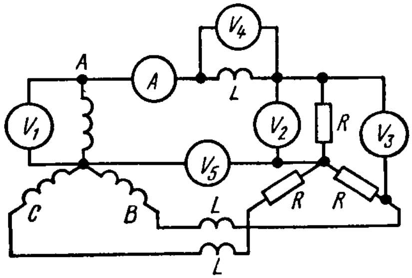


Рис. 7.11

Решение. В линейном напряжении третья гармоника отсутствует.

Первые гармоники фаз A и B по фазе сдвинуты на 120°. Поэтому линейное напряжение $\dot{U}_{AB}$ первой гармоники в $\sqrt{3}$ раз больше фазового напряжения первой гармоники $\dot{U}_A$ и на 30° опережает его по фазе.

Одиннадцатая гармоника (обратная последовательность фаз) линейного напряжения отстает по фазе от одиннадцатой гармоники напряжения фазы A на 30° и $\sqrt{3}$ раз больше ее:

$$u_{AB} = 127\sqrt{3}\sin(\omega t + 40°) + 20\sqrt{3}\sin(11\omega t - 15°)\ B.$$

Пример 72. Э. д. с. фазы A в схеме рис. 7.11 $e_A = 170\sin\omega t + 80\cos 3\omega t + 34\cos 9\omega t B$; $R = 9$ Ом; $\omega L = 2$ Ом.

Определить показания всех приборов. Приборы электродинамической системы.

Решение. Действующие значения э. д. с.

$$E_1 = 170/\sqrt{2} = 121B;\quad E_3 = 56{,}5B;\quad E_9 = 24{,}2B.$$

По линейным проводам течет первая гармоника тока

$$I_1 = E_1/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 121/9{,}2 = 13{,}2\ \text{А}.$$

* Эта формула получена путем составления уравнения по второму закону Кирхгофа для контура, образованного какой-либо фазой и нулевым проводом.

Показание вольтметра V_1 равно $\sqrt{E_1^2+E_3^2+E_9^2}=136$ В.
Показание вольтметра V_2 равно $I_1R_1=13{,}2\cdot 9=118{,}5$ В.
Показание вольтметра V_3 равно $\sqrt{3}\cdot 118{,}5=205$ В.

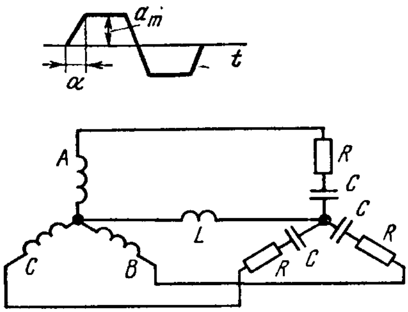


Рис. 7.12

Показание вольтметра V_4 равно $I_1\omega L=26{,}4$ В.

Показание вольтметра V_5 равно $\sqrt{E_3^2+E_9^2}=62{,}3$ В.

Пример 73. Э. д. с. каждой фазы генератора (рис. 7.12) изменяется по трапецеидальному закону: $a_m=220$ В; $\alpha=T/36$; нагрузка равномерная; $R=6$ Ом; $\omega L=0{,}5$ Ом; $1/\omega C=12$ Ом.

Записать мгновенное значение тока по нулевому проводу, пренебрегая гармониками тока выше седьмой.

Решение. С помощью табл. 7.1 записываем разложение трапецеидальной э. д. с.:

$$e_A=\frac{4\cdot 220}{\frac{\pi}{18}\cdot\pi}\Big(\sin 10^\circ\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 30^\circ\sin 3\omega t+$$
$$+\frac{1}{25}\sin 50^\circ\sin 5\omega t+\frac{1}{49}\sin 70^\circ\sin 7\omega t\Big).$$

Следовательно,

$$e_A=274\sin\omega t+89{,}3\sin 3\omega t+49{,}5\sin 5\omega t+30{,}9\sin 7\omega t.$$

По нулевому проводу протекает только третья гармоника тока

$$\dot I_{03}=\frac{\dot E_3}{Z_{03}+\frac{Z_{н3}}{3}},$$

где $E_3=89{,}3/\sqrt{2}=63{,}3$ В; $Z_{03}=1{,}5j$; $Z_{н3}=6-4j$;

$$Z_{н3}/3=2-j1{,}33;\ \dot I_{03}=63{,}3/(1{,}5j+2-j1{,}33)=31{,}8e^{-j4^\circ 40'}\text{А}.$$

Мгновенное значение тока $i_{03}=44{,}8\sin(3\omega t-4^\circ 40')$ А.

§ 7.14. Биения. Колебательный процесс, получающийся в результате сложения двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами A и близкими, но не равными частотами ω_1 и ω_2, дает колебание, которое называют *биением*. Пусть $f(t)=A\sin\omega_1 t+A\sin\omega_2 t$.

Воспользуемся известным тригонометрическим преобразованием

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Следовательно, $f(t)$ можно представить следующим образом:

$$f(t)=2\dot A\cos\Omega t\sin\omega t,$$

где

$$\Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2, \quad \omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \qquad (\Omega \ll \omega).$$

График результирующего колебания изображен на рис. 7.13. Амплитуда колебания изменяется по закону $2A \cos \Omega t$. Огибающая колебаний нанесена пунктиром.

Возникновение биений при сложении двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами и близкими (но не равными) частотами используется на практике в различных целях, в частности для того, чтобы установить, что складываемые колебания имеют неодинаковые частоты.

§ 7.15. Модулированные колебания. При передаче информации широко применяют модулированные колебания. Модулированным колебанием $f(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ называют колебание, в котором амплитуда A, частота ω, фаза ψ или и те и другие вместе изменяются во времени.

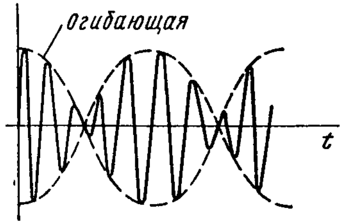


Рис. 7.13

Колебание, в котором изменяется только амплитуда A, а угловая частота ω и фаза ψ неизменны, называют *колебанием, модулированным по амплитуде.*

Колебание с изменяющейся угловой частотой ω, но неизменными амплитудой A и фазой ψ называют *колебанием, модулированным по частоте.*

Колебание, в котором изменяется только фаза ψ, а амплитуда A и угловая частота ω неизменны, называют *колебанием, модулированным по фазе.*

Простейшим амплитудно-модулированным (АМ) является колебание, в котором амплитуда модулирована по закону синуса:

$$f(t) = A_0(1 + m \sin \Omega t) \sin(\omega t + \psi),$$

где m — глубина модуляции (как правило, $m < 1$); Ω — частота модуляции ($\Omega \ll \omega$).

График АМ колебания показан на рис. 7.14, *а* (огибающая дана пунктиром).

Если воспользоваться известным из тригонометрии тождеством

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

то колебание $A_0(1 + m \sin \Omega t) \sin(\omega t + \psi)$ можно представить в виде суммы трех колебаний:

$$f(t) = A_0 \sin(\omega t + \psi) + \frac{mA_0}{2}\cos[(\omega - \Omega)t + \psi] - \frac{mA_0}{2}\cos[(\omega + \Omega)t + \psi].$$

Частоту ω называют *несущей*, а частоты $(\omega - \Omega)$ и $(\omega + \Omega)$ — *боковыми*. Спектр АМ-колебания изображен на рис. 7.14, *б*. Действующее значение функции $f(t)$ в соответствии с формулой (7.11) таково: $\frac{A_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(m^2/2)}$.

Пример 74. Разложить на составляющие функцию

$$f(t)=20(1+0{,}6\sin 10^3t)\sin 10^5t.$$

Решение.

$$\omega-\Omega=99\cdot 10^3;\quad \omega+\Omega=101\cdot 10^3;\quad mA_0/2=6.$$

Следовательно,

$$f(t)=20\sin 10^5t+6\cos(99\cdot 10^3t)-6\cos(101\cdot 10^3t).$$

Амплитуды колебаний боковых частот при АМ-колебании зависят от глубины модуляции m, но не зависят от частоты модуляции Ω.

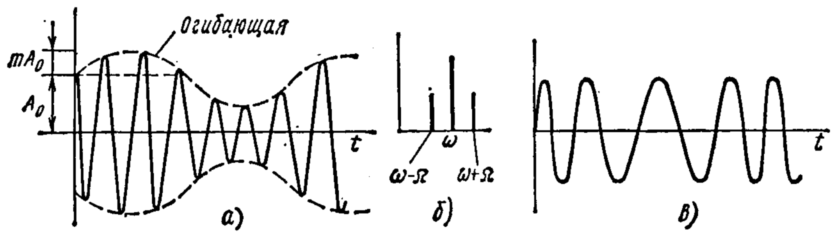


Рис. 7.14

Ширина полосы частот, занимаемой АМ-колебанием, не зависит от m и равна $(\omega+\Omega)-(\omega-\Omega)=2\Omega$.

Рассмотрим спектры частотно-модулированных (ЧМ) и фазомодулированных (ФМ) колебаний. Форма колебаний качественно показана на рис. 7.14, *в*.

Аргумент синусоидально изменяющейся функции $f(t)$ обозначим $\alpha(t)$, тогда

$$f(t)=A\sin[\alpha(t)]. \tag{а}$$

$\alpha(t)$ можно интерпретировать как угол, на который повернется вращающийся вектор на комплексной плоскости за время t. Угловая частота поворота этого вектора $\omega=d\alpha(t)/dt$. В том случае, когда $\omega=\omega_0=\text{const}$,

$$\alpha(t)=\int\omega_0\,dt=\omega_0t \text{ и } f(t)=A\sin\omega_0t.$$

При *частотной модуляции* частота ω изменяется и равна $\omega_0+\Delta\omega\varphi(t)$. При этом

$$\alpha(t)=\int[\omega_0+\Delta\omega\varphi(t)]\,dt=\omega_0t+\Delta\omega\int\varphi(t)\,dt.$$

При $\varphi(t)=\cos\Omega t$

$$\alpha(t)=\omega_0t+\gamma\sin\Omega t, \tag{б}$$

где $\gamma=\Delta\omega/\Omega$ — глубина модуляции.

Таким образом,

$$f(t)/A=\sin(\omega_0t+\gamma\sin\Omega t)=\sin\omega_0t\cos(\gamma\sin\Omega t)+\cos\omega_0t\sin(\gamma\sin\Omega t).$$

Но

$$\sin(\gamma\sin\Omega t)=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(\gamma)\sin(2n+1)\Omega t;$$

$$\cos(\gamma\sin\Omega t)=J_0(\gamma)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(\gamma)\cos 2n\Omega t,$$

где $J_k(\gamma)$ — бесселева функция k-порядка от действительного аргумента γ *.

Графики трех бесселевых функций при $k=0$, 1, 2 изображены на рис. 7.15. После преобразований

$$f(t)/A=J_0(\gamma)\sin\omega_0 t+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(\gamma)\sin(\omega_0-k\Omega)t+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(\gamma)\sin(\omega_0+k\Omega)t. \quad \text{(в)}$$

Теоретически полоса частот, занимаемых ЧМ-колебанием, равна бесконечности. Однако, если учесть, что с ростом k значение $J_k(\gamma)$ быстро уменьшается, и в равенстве (в) отбросить слагаемые рядов, амплитуды которых меньше 0,01, что имеет место при $k\geqslant\gamma$, то ЧМ-колебание практически занимает полосу частот

$$(\omega_0+k\Omega)-(\omega_0-k\Omega)=2k\Omega\approx 2\gamma\Omega=$$
$$=2(\Delta\omega/\Omega)\cdot\Omega=2\Delta\omega.$$

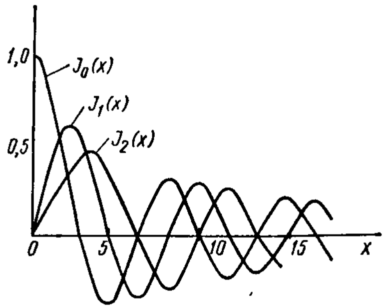


Рис. 7.15

Ширина ее зависит от глубины модуляции $\Delta\omega$ и не зависит от частоты модуляции Ω. Амплитуды боковых частот зависят от $\Delta\omega$ и Ω.

При фазовой модуляции угловая частота ω_0 неизменна и меняется только фаза $\psi(t)$. Следовательно, $\alpha(t)=\omega_0 t+\psi(t)$. Приняв $\psi(t)=\psi_m\cos\Omega t$, получим

$$f(t)=A\sin(\omega_0 t+\psi_m\cos\Omega t).$$

Амплитуда фазы ψ_m от частоты модуляции Ω не зависит.

Опустив выкладки, найдем, что амплитуды боковых частот зависят от ψ_m, а ширина полосы частот $2k\Omega\approx 2\psi_m\Omega$ — от ψ_m и Ω.

§ 7.16. Расчет линейных цепей при воздействии модулированных колебаний. Расчет токов и напряжений в линейных электрических цепях при воздействии на них модулированных колебаний производят либо для мгновенных значений величин, либо для мгновенного значения огибающей. В первом случае расчет проводят путем разложения модулированных колебаний на составляющие, расчета токов и напряжений от каждой из них в отдельности и последующего суммирования соответствующих токов и напряжений на основании принципа наложения. При этом ограничиваются теми составляющими, которые играют существенную роль в формировании выходной величины.

При воздействии амплитудно-модулированного колебания на какую-либо систему точный расчет огибающей выходной величины может быть осуществлен по формуле интеграла Дюамеля для огибающей.

---

* Общее выражение для бесселевых функций приведено в § 15.14.

В радиотехнике, где широко используют модулированные колебания и требуется знать результаты воздействия их на резонансные системы, разработаны упрощенные методы получения огибающей отклика системы на различные типы модулированных колебаний (см., например, [20]).

Вопросы для самопроверки

1. Изложите основные положения, на которых основывается методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных токах. 2. Охарактеризуйте физический смысл действующего значения несинусоидального тока. 3. Могут ли отдельные слагаемые в формуле активной мощности быть отрицательными? 4. Чем можно объяснить, что при равномерной нагрузке трехфазной системы для протекания токов третьих гармоник необходим нулевой провод? 5. Охарактеризуйте виды модулированных колебаний и занимаемые ими полосы частот. 6. Решить задачи 9.9; 9.12; 9.13; 9.15; 9.16; 9,19; 9,21; 9.25.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 8.1. Определение переходных процессов. Под *переходными процессами* понимают процессы перехода от одного режима работы электрической цепи (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей в схеме э. д. с., значениями параметров схемы, а также вследствие изменения конфигурации цепи.

Периодическими режимами являются режимы синусоидального и постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. *Коммутация* — это процесс замыкания (рис. 8.1, *а*) или размыкания (рис. 8.1, *б*) выключателей.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму.

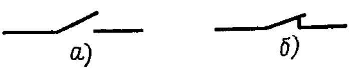


Рис. 8.1

Переходные процессы обычно являются быстро протекающими; длительность их составляют десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунды; сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов весьма важно, так как оно дает возможность установить, как деформируются по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители, фильтры и другие устройства, позволяет выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса, а также определить продолжительность переходного процесса.

§ 8.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 8.2 при замкнутом ключе. Сумма падений напряжения на индуктивности L и сопротивлении R равна э. д. с. E:

$$u_L + Ri = E,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E. \qquad (8.1)$$

Как известно из курса математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию (в нашем случае i) и ее производные (в нашем случае $L\frac{di}{dt}$), называют *дифференциальным уравнением*.

Таким образом, определение тока как функции времени по сути дела есть решение дифференциального уравнения.

Известно, что решение дифференциального уравнения — это отыскание функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению. Подстановка этой функции и ее производных превращает дифференциальное уравнение в тождество.

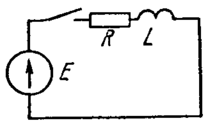


Рис. 8.2

Решение линейных дифференциальных уравнений будем проводить в основном тремя методами: классическим, операторным и методом интеграла Дюамеля.

Перед тем как изучать эти методы, необходимо рассмотреть общие свойства линейных цепей при переходных процессах, а также общие законы, которым подчиняются переходные процессы в линейных электрических цепях. § 8.3—8.25 посвящены вопросам, имеющим отношение ко всем перечисленным методам расчета переходных процессов; однако часть этих параграфов (§ 8.3, 8.8, 8.10 и 8.12) следует рассматривать так же, как *введение к классическому методу расчета переходных процессов.*

§ 8.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений. Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения плюс общее решение однородного уравнения. Частное решение уравнения (8.1) равно E/R (E — постоянная э. д. с.).

Однородное уравнение получаем из исходного, если в нем возьмем правую часть равной нулю. В нашем случае

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0. \qquad (8.2)$$

Решением однородного уравнения является показательная функция вида Ae^{pt}.

Для всех переходных процессов условимся, что момент $t = 0$ соответствует моменту коммутации.

---

* Имеются в виду цепи с неизменными во времени параметрами R, L, C, M.

Постоянные A и p не зависят от времени. Без вывода дадим их значения для рассматриваемого примера: $A=-E/R$ и $p=-R/L$.

Следовательно, решение уравнения (8.1) записывают так:

$$i=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (8.3)$$

В нем слагаемое E/R есть частное решение неоднородного уравнения (8.1), а слагаемое $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения (8.2). Подстановка (8.3) в (8.1) дает тождество

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)+R\left(\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)=$$

$$=-L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+E-Ee^{-\frac{R}{L}t}=E.$$

Следовательно, (8.3) действительно является решением уравнения (8.1).

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем называть *принужденной* составляющей тока (напряжения), а полное решение однородного уравнения — *свободной* составляющей.

Так, применительно к рассмотренному примеру принужденная составляющая тока равна E/R, а свободная составляющая $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

Полный ток $i=i_{пр}+i_{св}$.

Кроме индексов «пр» (принужденный) и «св» (свободный) токи и напряжения могут иметь и дополнительные индексы, соответствующие номерам ветвей на схеме.

Принужденная составляющая тока (напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая э. д. с. Так, если в схеме действует принуждающая синусоидальная э. д. с. частоты ω, то принужденная составляющая любого тока и любого напряжения в схеме является соответственно синусоидальным током (синусоидальным напряжением) частоты ω.

Определяются принужденные составляющие в цепи синусоидального тока с помощью символического метода (см. гл. 3). Если в схеме действует источник постоянной э. д. с. (как, например, в схеме рис. 8.2), то принужденный ток есть постоянный ток и находят его с помощью методов, рассмотренных в гл. 1.

Постоянный ток через емкость не проходит, поэтому принужденная составляющая тока через емкость в цепях с источниками постоянной э. д. с. равна нулю. Кроме того, напомним, что падение напряжения на индуктивности от неизменного во времени тока равно нулю.

В линейных электрических цепях свободные составляющие токов и напряжений затухают во времени по показательному закону e^{pt}. Так, в рассмотренном примере $i_{св} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$.

С увеличением времени t множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ быстро уменьшается. Название «свободная» объясняется тем, что эта составляющая есть решение уравнения, свободного от вынуждающей силы (однородного уравнения без правой части).

Из трех токов (полного, принужденного и свободного) и трех напряжений (полного, принужденного и свободного) основное значение имеют полный ток и полное напряжение.

Полный ток является тем током, который в *действительности* протекает по той или иной ветви цепи при переходном процессе. Его можно измерить и записать на осциллограмме. Аналогично, полное напряжение — это напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе. Его также можно измерить и записать на осциллограмме.

Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений во время переходного процесса играют вспомогательную роль; они являются теми *расчетными* компонентами, сумма которых дает действительные величины.

При любых переходных и установившихся процессах соблюдают два основных положения: ток через индуктивность и напряжение на емкости не могут изменяться скачком *.

§ 8.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивность и скачка напряжения на емкости. Доказательство того, что *ток через индуктивность не может изменяться скачком*, проведем на примере схемы рис. 8.2. По второму закону Кирхгофа,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Ток i и э. д. с. E могут принимать конечные (не бесконечно большие) значения.

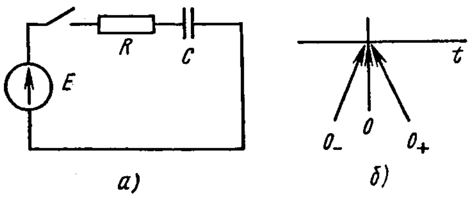
Допустим, что ток i может измениться скачком. Скачок тока означает, что за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \to 0$ ток изменится на конечную величину Δi. При этом $\Delta i/\Delta t \to \infty$. Если вместо $L\frac{di}{dt}$ в уравнение (8.1) подставить ∞, то его левая часть не будет равна правой части и не будет выполнен второй закон Кирхгофа.

Следовательно, допущение о возможности скачкообразного изменения тока через индуктивность противоречит второму закону Кирхгофа.

---

* Иногда эти положения формулируются так: потокосцепление индуктивной катушки и заряд конденсатора могут изменяться только плавно, без скачков. Дальнейшее обобщение законов коммутации дано в § 8.28.

Ток через L не может изменяться скачком, но напряжение на индуктивности, равное $L\frac{di}{dt}$, скачком измениться может. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.



а) б)

Рис. 8.3

Доказательство того, что напряжение на емкости не может изменяться скачком, проводится аналогично.

Обратимся к простейшей цепи с емкостью (рис. 8.3, *а*). Составим для нее уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_C = E,$$

где E — э. д. с. источника, конечная величина; u_C — напряжение на емкости.

Так как $i = C\frac{du_C}{dt}$, то

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \tag{8.4}$$

Если допустить, что напряжение u_C может измениться скачком, то $\frac{\Delta u_C}{\Delta t} \approx \frac{du_C}{dt} \to \infty$ и левая часть (8.4) не будет равна правой части. Отсюда следует, что допущение о возможности скачкообразного изменения напряжения на емкости противоречит второму закону Кирхгофа.

Однако ток через емкость, равный $C\frac{du_C}{dt}$, может изменяться скачком; это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Из указанных двух основных положений следуют два закона (правила) коммутации.

§ 8.5. Первый закон (правило) коммутации. Ток через индуктивность непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \tag{8.5}$$

Время $t = 0_-$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t = 0_+$ — после коммутации (рис. 8.3, *б*). Равенство (8.5) и выражает собой первый закон коммутации.

§ 8.6. Второй закон (правило) коммутации. Обозначим напряжение на емкости непосредственно до коммутации $u_C(0_-)$, а напряжение на ней непосредственно после коммутации $u_C(0_+)$.

В соответствии с невозможностью скачка напряжения на емкости

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \tag{8.6}$$

Равенство (8.6) выражает собой второй закон коммутации.

Перед тем как приступить к изучению методов расчета переходных процессов, необходимо условиться о некоторых дополнительных определениях.

§ 8.7. Начальные значения величин. Под *начальными значениями* величин (в литературе их называют еще начальными условиями) понимают значения токов и напряжений в схеме при $t=0$.

Как уже говорилось, токи через индуктивности и напряжения на емкостях непосредственно после коммутации равны их значениям непосредственно до коммутации. Остальные величины: напряжения на индуктивностях, напряжения на активных сопротивлениях, токи через емкости, токи через активные сопротивления — могут изменяться скачком, и потому их значения после коммутации чаще всего оказываются не равными их значениям до коммутации.

Поэтому следует различать докоммутационные и послекоммутационные начальные значения.

Докоммутационными начальными значениями называют значения токов и напряжений непосредственно до коммутации (при $t=0_-$); *послекоммутационными начальными значениями* — значения токов и напряжений непосредственно после коммутации (при $t=0_+$).

§ 8.8. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения. Для любой схемы после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа; из этих уравнений определить значения токов во всех ветвях и напряжений на любых участках схемы в послекоммутационном режиме (при $t=0_+$).

С этой целью значения токов в ветвях, содержащих индуктивности, и значения напряжений на емкостях берут равными тем значениям, которые они имели до коммутации при $t=0_-$, а остальные токи и напряжения после коммутации при $t=0_+$ находят из уравнений Кирхгофа, поскольку часть слагаемых в них известна.

Значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях, известные из докоммутационного режима, условимся называть *независимыми начальными значениями*.

Значения остальных токов и напряжений при $t=0_+$ в послекоммутационной схеме, определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа, будем называть *зависимыми начальными значениями*.

§ 8.9. Нулевые и ненулевые начальные условия. Если к началу переходного процесса непосредственно перед коммутацией все токи и все напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю, то в схеме имеют место *нулевые начальные условия*. Если же к началу переходного процесса хотя бы часть токов и напряжений в схеме не равны нулю, то в схеме имеют место *ненулевые начальные условия*.

При нулевых начальных условиях токи в индуктивностях и напряжения на емкостях начнут изменяться с нулевых значений, при ненулевых условиях — с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

§ 8.10. Составление уравнений для свободных токов и напряжений. Для послекоммутационной схемы составляют уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений, так же как это делалось и раньше: сначала обозначают токи в ветвях и произвольно выбирают для них положительные направления, затем составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. Так, для схемы рис. 8.4, *а* после выбора положительных направлений для токов

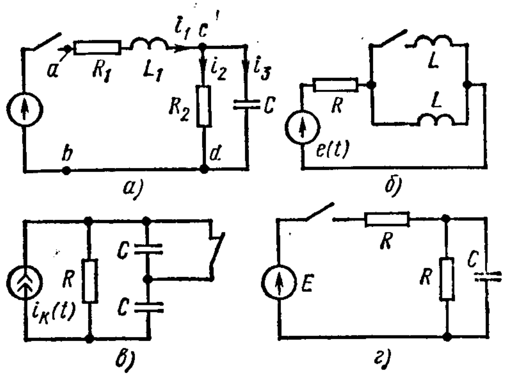


Рис. 8.4

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 = E;$$

$$i_2 R_2 - \frac{1}{C} \int i_3\, dt = 0.$$

В этих уравнениях i_1, i_2 и i_3 — полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов. Для того чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, «освободим» систему от вынуждающих э. д. с. (в нашем случае от э. д. с. E) и вместо i_1 запишем $i_{1св}$, вместо i_2 — $i_{2св}$ и т. д. Получим:

$$\left.\begin{aligned} & i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0; \\ & L_1 \frac{di_{1св}}{dt} + i_{1св} R_1 + i_{2св} R_2 = 0; \\ & i_{2св} R_2 - \frac{1}{C} \int i_{3св}\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

Заметим, что для любого контура любой электрической цепи сумма падений напряжений от свободных составляющих токов равна нулю.

§ 8.11. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов. В § 8.3 говорилось о том, что свободный ток представляет собой решение однородного дифференциального уравнения (уравнения без правой части).

Как известно из курса математики, решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательных функций Ae^{pt}. Таким образом, уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Постоянная интегрирования A для каждого свободного тока своя. Показатели же затухания p одинаковы для свободных токов ветвей. Физически это объясняется тем, что вся цепь охвачена единым (общим) переходным процессом.

Составим производную от свободного тока:

$$\frac{di_{св}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{св}.$$

Следовательно, производную от свободного тока можно заменить на $pi_{св}$, а свободное напряжение на индуктивности $L\frac{di_{св}}{dt}$ — на $Lpi_{св}$. Найдем интеграл от свободного тока:

$$\int i_{св}\,dt = \int Ae^{pt} = Ae^{pt}/p = i_{св}/p.$$

Постоянная интегрирования взята здесь равной нулю, так как свободные составляющие не содержат не зависящих от времени слагаемых.

Следовательно, интеграл от свободного тока можно заменить на $i_{св}/p$, а свободное напряжение на емкости $\frac{1}{C}\int i_{св}\,dt$ — на $i_{св}/(Cp)$.

В систему дифференциальных уравнений для свободных токов подставим $Lpi_{св}$ вместо $L\frac{di_{св}}{dt}$ и $\frac{i_{св}}{Cp}$ вместо $\frac{1}{C}\int i_{св}\,dt$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} &i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0; \\ &(L_1p + R_1)\,i_{1св} + i_{2св}R_2 = 0; \\ &i_{2св}R_2 - i_{3св}/(Cp) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.8)$$

Уравнения (8.8) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$, $i_{3св}$ и в отличие от исходной системы не содержат производных и интегралов.

Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют *алгебраизацией системы дифференциальных уравнений* для свободных токов. Можно сказать, что система (8.8) есть результат алгебраизации системы дифференциальных уравнений (8.7).

§ 8.12. Составление характеристического уравнения системы. Число алгебраических уравнений равно числу неизвестных свободных токов. Положим, что p известно (в действительности оно пока не найдено и будет определено в дальнейшем) и решим систему (8.8) относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$ и $i_{3св}$. Получим:

$$i_{1св} = \Delta_1/\Delta; \quad i_{2св} = \Delta_2/\Delta; \quad i_{3св} = \Delta_3/\Delta,$$

где Δ — определитель системы. В рассмотренном примере

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_1 получим из выражения для определителя Δ путем замены первого столбца правой частью уравнений (8.8):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix};$$

определитель Δ_2 получим из выражения для Δ путем замены второго столбца правой частью системы (8.8), и т. д.

Так как в правой части системы (8.8) находятся нули, то в каждом определителе Δ_1, Δ_2 и Δ_3 один из столбцов будет состоять из нулей. Известно, что если в определителе один из столбцов состоит из нулей, то этот определитель равен нулю. Следовательно, $\Delta_1=0$; $\Delta_2=0$; $\Delta_3=0$.

Из физических соображений ясно, что каждый из свободных токов не может быть равен нулю, ибо в этом случае не будут выполнены законы коммутации. Однако из предыдущего следует, что $i_{1св}=0/\Delta$; $i_{2св}=0/\Delta$; $i_{3св}=0/\Delta$.

Свободные токи могут быть не равны нулю в том случае, если определитель системы

$$\Delta=0. \qquad (8.9)$$

При этом каждый из токов представляет собой неопределенность $i_{1св}=\Delta_1/\Delta=0/0$; $i_{2св}=\Delta_2/\Delta=0/0$; ..., раскрыв которую можно получить действительное значение каждого свободного тока.

Раскрытием неопределенностей заниматься не будем, а воспользуемся тем существенным для дальнейшего выводом, что определитель Δ алгебраизированной системы уравнений должен равняться нулю.

Уравнение $\Delta=0$ называют *характеристическим уравнением*. Единственным неизвестным в нем является p.

Пример 75. Используя уравнение (8.8), составить характеристическое уравнение для схемы рис. 8.4, *а* и найти его корни.

Решение.

$$\frac{R_2}{Cp}+R_2(L_1p+R_1)+\frac{L_1p+R_1}{Cp}=0,$$

или

$$\frac{p^2R_2L_1C+p(R_1R_2C+L_1)+R_1+R_2}{pC}=0.$$

Если дробь равна нулю, то равен нулю ее числитель. Следовательно,

$$p^2R_2L_1C+p(R_1R_2C+L_1)+R_1+R_2=0. \qquad (8.10)$$

Корни квадратного уравнения

$$p_{1,2}=\frac{-(R_1R_2C+L_1)\pm\sqrt{(R_1R_2C+L_1)^2-4(R_1+R_2)R_2L_1C}}{2R_2L_1C}. \qquad (8.11)$$

В начале § 8.11 говорилось о том, что решение для свободного тока берется в виде Ae^{pt}. Если характеристическое уравнение имеет не один корень, а несколько, например n, то для каждого свободного тока нужно взять

$$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}.$$

Пример 76. Найти корни характеристического уравнения схемы рис. 8.4, *а* при трех значениях C: 1) $C=1$ мкФ, 2) $C=10$ мкФ, 3) $C=100$ мкФ, $R_1=R_2=100$ Ом; $L_1=1$ Г.

Решение. При $C=1$ мкФ

$$R_1R_2C+L_1=100\cdot 100\cdot 10^{-6}+1=1{,}01;$$

$$4(R_1+R_2)R_2L_1C=4\cdot 200\cdot 100\cdot 10^{-6}=0{,}08;$$

$$2R_2L_1C=2\cdot 100\cdot 10^{-6}=2\cdot 10^{-4};$$

$$p_{1,2}=\frac{-1{,}01\pm\sqrt{1{,}01^2-0{,}08}}{2\cdot 10^{-4}};\quad p_1=-250\ \text{с}^{-1};\quad p_2=-9850\ \text{с}^{-1}.$$

При $C=10$ мкФ $p_1=-230$ с$^{-1}$; $p_2=-870$ с$^{-1}$.
При $C=100$ мкФ $p_1=-100+100j$; $p_2=-100-100j$.

§ 8.13. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе. Характеристическое уравнение для определения p часто составляют более простым способом, чем обсуждавшийся в предыдущем параграфе. С этой целью составляют выражение входного сопротивления двухполюсника на переменном токе [обозначим его $Z(j\omega)$], заменяют в нем $j\omega$ на p [получают $Z(p)$] и приравнивают $Z(p)$ нулю.

Уравнение $Z(p)=0$ совпадает с характеристическим. Такой способ составления характеристического уравнения предполагает, что в схеме отсутствуют магнитносвязанные ветви. Если же магнитная связь между ветвями имеется, то предварительно следует осуществить развязывание магнитносвязанных ветвей.

В § 8.41 показано, что число p можно представить в виде $j\Omega$, где Ω — комплексная угловая частота; $Z(p)$ есть сопротивление цепи на комплексной частоте. Сопротивление цепи для синусоидального тока частотой ω, т. е. $Z(j\omega)$, есть частный случай $Z(p)$, когда $\Omega=\omega$.

Входное сопротивление на комплексной частоте по отношению к некоторой k-й ветви $Z_k(p)=\Delta(p)/\Delta_k(p)$, где $\Delta(p)$ — определитель системы уравнений, составленных по методу контурных токов; $\Delta_k(p)$ — алгебраическое дополнение.

Корни уравнения $Z_k(p)=0$ совпадают с корнями уравнения $\Delta(p)=0$.

Следует иметь в виду, что во избежание потери корня (корней) нельзя сокращать $\Delta(p)$ и $\Delta_k(p)$ на общий множитель, если он имеется.

И последнее замечание: при составлении $Z(p)$ следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания.

Характеристическое уравнение можно составлять также, приняв за основу при его составлении не метод контурных токов, а метод узловых потенциалов. В этом случае следует приравнять нулю *определитель матрицы узловых проводимостей*, полагая при составлении матрицы один из узлов схемы заземленным.

Пример 77. Для схемы рис. 8.4, *а* входное сопротивление относительно зажимов *ab* при переменном токе

$$Z_{ab}(j\omega)=j\omega L_1+R_1+\frac{R_2\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}.$$

Заменим в нем $j\omega$ на p и приравняем его нулю:

$$Z_{ab}(p)=pL_1+R_1+\frac{R_2\frac{1}{Cp}}{R_2+\frac{1}{Cp}}=0.$$

Отсюда

$$\frac{p^2L_1CR_2+p\,(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2}{1+R_2Cp}=0,$$

или

$$p^2L_1CR_2+p\,(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2=0. \qquad (8.10')$$

Уравнение (8.10′) совпадает с уравнением (8.10), составленным иным путем. Уравнение (8.10′) получено путем использования выражения для входного сопротивления первой ветви схемы рис. 8.4, *а* относительно зажимов *ab*. Точно такое же уравнение можно получить, если записать выражение для входного сопротивления любой другой ветви.

Отдельно рассмотрим вопрос о возможности сокращения числителя и знаменателя $Z(p)=\frac{\Delta}{\Delta_k}$ на p. Как правило, сокращать числитель и знаменатель на p *можно, но все же не всегда*. Сокращение на p допустимо для схем, в которых исследуемая величина из физических соображений не может содержать незатухающую свободную составляющую. Если же исследуемая величина в рассматриваемой схеме может иметь незатухающую свободную составляющую, то сокращать числитель и знаменатель $Z(p)$ на p (т. е. терять корень $p=0$) нельзя. Для иллюстрации недопустимости сокращения на p рассмотрим два примера. В послекоммутационной схеме рис. 8.4, *б* имеется контур из индуктивностей без активного сопротивления. В нем теоретически может протекать незатухающая свободная составляющая тока, которая не будет учтена в решении, если сократить числитель и знаменатель $Z(p)=\frac{pL\,(2R+pL)}{2pL}$ на p. В схеме рис. 8.4, *в*, дуальной схеме рис. 8.4, *б*, после коммутации на емкостях возможно возникновение равных по величине и противоположно направленных незатухающих свободных составляющих напряжений. Свободный заряд каждой емкости не может стечь через сопротивление R, так как этому мешает вторая емкость с противоположно направленной незатухающей свободной составляющей напряжения.

Для схемы рис. 8.4, *в* характеристическое уравнение получим, приравняв нулю входную проводимость относительно зажимов источника тока:

$$G(p)=g+\frac{pCpC}{2pC}=\frac{pC\,(2g+pC)}{2pC}=0.$$

Здесь $g=1/R$.

В качестве примера цепи, для которой можно сокращать числитель и знаменатель $Z(p)$ на p, приведем схему рис. 8.4, *г*. Для нее

$$Z(p)=R+\frac{R\cdot 1/(Cp)}{R+(1/Cp)}=\frac{RCp\,(RCp+2)}{Cp\,(RCp+1)}=\frac{R\,(RCp+2)}{RCp+1}.$$

§ 8.14. Основные и неосновные независимые начальные значения.

Для сложных схем со многими накопителями энергии число независимых начальных значений (начальных условий) может оказаться больше, чем порядок характеристического уравнения, и, следовательно, больше числа постоянных интегрирования.

В этом случае при определении постоянных интегрирования используют не все независимые начальные значения, а часть из них.

Основными независимыми начальными значениями называют те токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, которые могут быть заданы независимо от других. Остальные независимые начальные значения называют *неосновными*.

В качестве иллюстрации обратимся к схеме рис. 8.5. Она содержит три индуктивности и одну емкость. В схеме всего четыре независимых начальных значения (начальных условия):

$$1)\ i_1(0_+)=0;\quad 2)\ i_2(0_+)=0;$$
$$3)\ i_3(0_+)=0;\quad 4)\ u_C(0_+)=0.$$

Из них три являются основными и одно — неосновным. При выборе основных допустим известный произвол. Так, если за основные взять первое, второе и четвертое значения, то неосновным будет третье.

Пример 78. Убедиться в том, что для схемы рис. 8.5 характеристическое уравнение имеет не четвертую, а третью степень.

Решение. Составляем выражение для входного сопротивления:

$$Z(p)=R_1+pL_1+\frac{\left(pL_2+\frac{1}{C_2p}\right)pL_3}{pL_2+pL_3+\frac{1}{pC_2}}=0.$$

Отсюда

$$(R_1+pL_1)\left[1+p^2C_2(L_2+L_3)\right]+pL_3(1+C_2L_2p^2)=0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет третью степень.

§ 8.15. Определение степени характеристического уравнения. Степень характеристического уравнения цепи необходимо уметь оце-

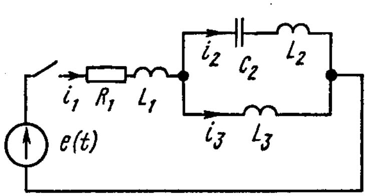


Рис. 8.5

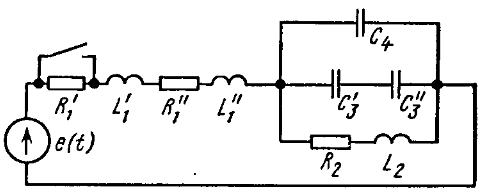


Рис. 8.6

нивать, взглянув на схему, в которой исследуется переходный процесс. Быстрая ориентация в этом вопросе дает возможность определить трудоемкость предстоящих выкладок и способствует выявлению ошибки, если она возникнет при составлении характеристического уравнения.

Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения и не зависит от вида э. д. с. источников э. д. с. в схеме.

Упомянутое упрощение состоит в том, что последовательно соединенные индуктивности должны быть заменены одной эквивалентной; емкости, включенные последовательно и параллельно, тоже должны быть заменены эквивалентной *.

* Имеется в виду, что других сопротивлений, например активных, в ветвях с емкостями нет и начальные напряжения на последовательно соединенных емкостях относятся обратно пропорционально этим емкостям, а также что начальные токи через последовательно соединенные индуктивности одинаковы.

Так, применительно к схеме рис. 8.6 последовательно включенные L_1' и L_1'' следует заменить на $L_1 = L_1' + L_1'' \pm 2M$, если между ними есть магнитная связь (если нет магнитной связи, то $M = 0$), а емкости C_3', C_3'' и C_4 — на емкость

$$C_5 = C_4 + \frac{C_3' C_3''}{C_3' + C_3''}.$$

Начальное значение напряжения на емкости C_5 равно начальному значению напряжения на C_4.

В результате упрощений схемы рис. 8.6 получаем схему рис. 8.7, в которой две индуктивности и одна емкость. Все три независимые начальные значения — основные. Следовательно, характеристическое уравнение будет третьей степени.

Обратим внимание на то, что степень характеристического уравнения не зависит от того, имеется ли магнитная связь между индуктивностями схемы или она отсутствует.

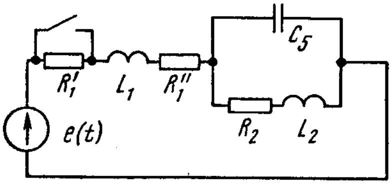


Рис. 8.7

Еще одно замечание: если после максимального упрощения схема содержит контур, состоящий только из емкостей, скажем из n емкостей, включенных между n узлами, а сумма напряжений вдоль этого контура равна нулю по второму закону Кирхгофа, то только на $n-1$ емкостях этого контура напряжения могут быть заданы независимо от остальных. Отсюда следует, что при определении степени характеристического уравнения из n емкостей этого контура должны быть приняты во внимание только $n-1$ емкость.

Аналогично, если в каком-либо узле схемы после ее максимального упрощения сходится m ветвей и в каждой из них имеется индуктивность, то при определении степени характеристического уравнения должны быть приняты во внимание только $m-1$ индуктивность.

Обобщенно можно сказать, что после максимального упрощения схемы степень характеристического уравнения может быть определена путем подсчета величины $n_L + n_C - y_L - \kappa_C$, где n_L — число индуктивностей в схеме, n_C — число емкостей, y_L — число индуктивностей, токи в которых не могут быть заданы произвольно; κ_C — число емкостей, направления на которых не могут быть заданы произвольно.

И последнее: если схема с *источником тока* имеет несколько последовательных участков, содержащих параллельно соединенные ветви с R, L, C, то для каждой группы параллельных ветвей будет свое характеристическое уравнение со своими корнями (свободные токи не могут замыкаться через источник тока, поскольку его сопротивление равно бесконечности).

§ 8.16. Свойства корней характеристического уравнения. Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Так, если характеристическое уравнение представляет собой уравнение первой степени, то оно имеет один корень, если второй степени — два корня и т. д. Уравнение первой степени имеет всегда отрицательный действительный (не мнимый и не комплексный) корень.

Уравнение второй степени может иметь:

а) два действительных неравных отрицательных корня;

б) два действительных равных отрицательных корня;

в) два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени может иметь:

а) три действительных неравных отрицательных корня;

б) три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу;

в) три действительных равных отрицательных корня;

г) один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных с отрицательной действительной частью.

§ 8.17. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений. Свободный процесс происходит в цепи, освобожденной от источника э. д. с. Он описывается слагаемыми вида Ae^{pt}. В цепи, освобожденной от источников э. д. с., свободные токи не могут протекать сколь угодно длительно, так как в цепи отсутствуют источники энергии, которые были бы способны в течение сколь угодно длительного времени покрывать тепловые потери от свободных токов, т. е. свободные токи должны затухать во времени.

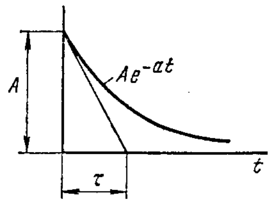


Рис. 8.8

Но если свободные токи (выраженные слагаемыми e^{pt}) должны затухать (спадать) во времени, то действительная часть p должна быть отрицательной.

Значения функции $e^{-at}=f(at)$ (где $at=x$) приведены в табл. 8.1.

Обсудим характер изменения свободных составляющих для простейших переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первой и второй степени.

Если число корней характеристического уравнения больше двух, то свободный процесс может быть представлен как процесс, составленный из нескольких простейших процессов.

§ 8.18. Характер свободного процесса при одном корне. Когда характеристическое уравнение имеет один корень, свободный ток

$$i_{св}=Ae^{-at}, \qquad (8.12)$$

где $p=-a$ зависит только от параметров цепи, A — от параметров цепи, э. д. с. и момента включения. Характер изменения $i_{св}$ при $A>0$ показан на рис. 8.8.

За интервал времени $t=\tau=1/a$ функция Ae^{-at} уменьшится в $e=$ $=2{,}71$ раза. Действительно, при $t=\tau=1/a$

$$at=a\tau=a/a=1;\ e^{-at}=\bar{e}^{a\tau}=e^{-1}=1/e=1/2{,}71.$$

Величину $\tau=1/a=1/|p|$ принято называть *постоянной времени* цепи; τ зависит от вида и параметров схемы. Так, для цепи рис. 8.2

Таблица 8.1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x
0	1,0	1,0	0,0	1,0	2,3	9,97	0,100	4,94	5,04
0,1	1,10	0,905	0,10	1,005	2,4	11,02	0,09	5,47	5,56
0,2	1,22	0,819	0,20	1,02	2,5	12,18	0,082	6,05	6,13
0,3	1,35	0,741	0,30	1,04	2,6	13,46	0,074	6,70	6,77
0,4	1,49	0,67	0,41	1,08	2,7	14,88	0,067	7,41	7,47
0,5	1,65	0,606	0,52	1,13	2,8	16,44	0,061	8,19	8,25
0,6	1,82	0,549	0,64	1,18	2,9	18,17	0,055	9,06	9,11
0,7	2,01	0,497	0,76	1,25	3,0	20,08	0,05	10,02	10,07
0,8	2,22	0,449	0,89	1,34	3,2	24,53	0,041	12,25	12,29
0,9	2,46	0,407	1,03	1,43	3,4	29,96	0,033	14,96	15,0
1,0	2,72	0,368	1,17	1,54	3,6	36,6	0,027	18,28	18,31
1,1	3,00	0,333	1,34	1,67	3,8	44,7	0,022	22,34	22,36
1,2	3,32	0,301	1,51	1,81	4,0	54,6	0,018	27,29	27,3
1,3	3,67	0,272	1,70	1,94	4,2	66,69	0,015	33,33	33,35
1,4	4,05	0,247	1,90	2,15	4,4	81,45	0,012	40,72	40,73
1,5	4,48	0,223	2,13	2,35	4,6	99,48	0,01	49,74	49,75
1,6	4,95	0,202	2,38	2,58	4,8	121,5	0,0082	60,75	60,76
1,7	5,47	0,183	2,65	2,83	5,0	184,4	0,0067	74,2	74,21
1,8	6,05	0,165	2,94	3,11	6,0	400	0,0025	200	200
1,9	6,68	0,15	3,27	3,42					
2,0	7,39	0,135	3,63	3,76					
2,1	8,17	0,122	4,02	4,14					
2,2	9,02	0,111	4,46	4,56					

$\tau = L/R$, для цепи рис. 8.3, а $\tau = RC$, для цепи рис. 8.18 $\tau = \dfrac{R_1R_3C}{R_1+R_3}$ и т. д.

Название «постоянная времени» отражает постоянство величины подкасательной к экспоненте: подкасательная к экспоненте $e^{-\frac{t}{\tau}}$ численно равна τ.

§ 8.19. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях. Пусть $p_1 = -a$ и $p_2 = -b$ (для определенности положим $b > a$), тогда

$$i_{св} = A_1 e^{-at} + A_2 e^{-bt}. \quad (8.12а)$$

Характер изменения свободного тока при различных по величине и знаку постоянных интегрирования A_1 и A_2 качественно иллюстрируется кривыми рис. 8.9, *а—г*; кривая *1* представляет собой функцию A_1e^{-at}; кривая *2* — функцию A_2e^{-bt}; результирующая («жирная») кривая получена путем суммирования ординат кривых *1* и *2*.

Для рис. 8.9, *а* $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$; для рис. 8.9, *б* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| > A_1$; для рис. 8.9, *в* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| < A_1$; для рис. 8.9, *г* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| = A_1$.

§ 8.20. Характер свободного процесса при двух равных корнях. Известно, что если среди корней характеристического уравнения есть два равных корня $p_1 = p_2 = -a$, то соответствующие слагаемые решения должны быть взяты в виде

$$A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t}. \qquad (8.13)$$

На рис. 8.10 построены пять кривых. Они показывают возможный характер изменения функции $(A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t}$ при различных знаках постоянных интегрирования A_1 и A_2, а также когда одна из постоянных равна нулю.

Кривая *1* при $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$;
кривая *2* при $A_1 < 0$ и $A_2 > 0$;
кривая *3* при $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$;
кривая *4* при $A_1 = 0$ и $A_2 > 0$;
кривая *5* при $A_1 > 0$ и $A_2 = 0$.

§ 8.21. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях. Комплексные корни всегда встречаются попарно сопряженными. Так, если $p_1 = -\delta + j\omega_0$, то $p_2 = -\delta - j\omega_0$.

Соответствующее им слагаемое решения должно быть взято в виде

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \qquad (8.14)$$

Формула (8.14) описывает затухающее синусоидальное колебание (рис. 8.11) при угловой частоте ω_0 и начальной фазе ν. Огибающая колебания определяется кривой $A e^{-\delta t}$. Чем больше δ, тем быстрее затухает колебательный процесс; A и ν определяются значениями параметров схемы, начальными условиями и величиной э. д. с. источника; ω_0 и δ зависят только от параметров цепи после коммутации; ω_0 называют угловой частотой свободных колебаний; δ — коэффициентом затухания.

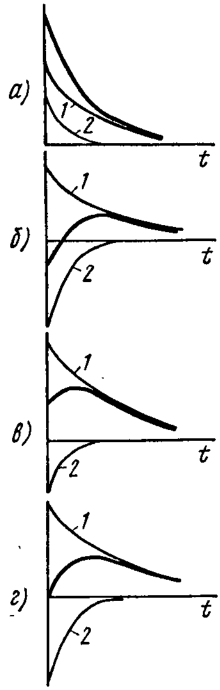


Рис. 8.9

§ 8.22. Некоторые особенности переходных процессов. Как известно из предыдущего, полное значение любой величины (тока, напряжения, заряда) равно сумме принужденной и свободной составляющих. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженные корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и значение угловой частоты свободных колебаний ω_0 *почти равно* угловой частоте ω источника синусоидальной э. д. с. (источника питания), а коэффициент затухания δ мал (цепь с малыми потерями), то сложение принужденной и свободной составляющих дает колебание, для которого характерно биение амплитуды (рис. 8.12).

Колебание рис. 8.12 отличается от колебаний, рассмотренных в § 7.14, тем, что здесь у одной из составляющих колебания амплитуда медленно уменьшается.

Если угловая частота свободных колебаний ω_0 в точности равна угловой частоте источника синусоидальной э. д. с. ω, то результирующее колебание имеет форму, изображенную на рис. 8.13.

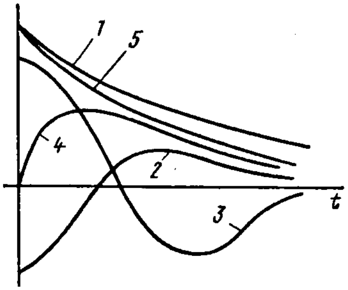


Рис. 8.10

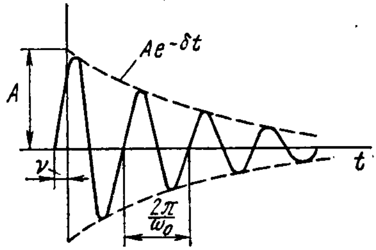


Рис. 8.11

Простейшим примером колебаний такого типа является колебание, возникающее на емкости в схеме рис. 8.14 в результате сложения

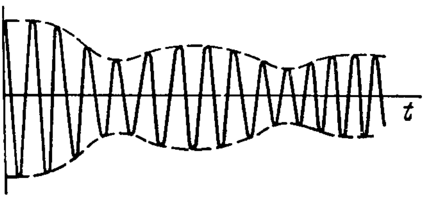


Рис. 8.12

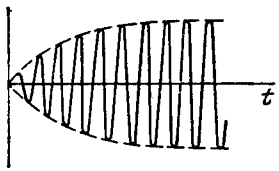


Рис. 8.13

принужденного колебания $U_{Cm} \cos \omega t$ и свободного колебания $-U_{Cm} e^{-\delta t} \cos \omega t$:

$$U_C = U_{Cm}(1 - e^{-\delta t}) \cos \omega t.$$

Амплитуда результирующего колебания нарастает по экспоненциальному закону.

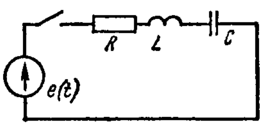


Рис. 8.14

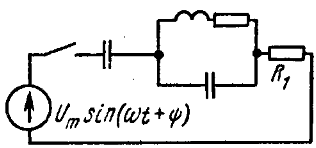


Рис. 8.15

При наличии емкости (емкостей) в схеме могут возникать большие начальные броски токов, в несколько раз превышающие амплитуды тока установившегося режима. Так, в схеме рис. 8.15 при нулевых начальных условиях в первый момент после замыкания ключа напряжение на емкостях равно нулю и ток в неразветвленной части цепи равен $U_m \sin \psi / R_1$. Если $\psi = 90°$, то в первый момент после замыкания ключа ток равен U_m/R_1. При размыкании ключа в индуктивных цепях возникают опасные увеличения напряжения на отдельных участках цепи (см. § 8.24).

§ 8.23. Переходные процессы, сопровождающиеся электрической искрой (дугой). Если переходный процесс вызывается размыканием ключа в электрической цепи, содержащей индуктивности, то между его расходящимися контактами при определенных условиях может возникнуть электрическая искра (дуга). При возникновении электрической искры (дуги) расчет переходного процесса усложняется и, строго говоря, не может проводиться методами, изучаемыми в данной главе. Объясняется это тем, что сопротивление электрической искры (дуги) является нелинейной функцией протекающего через нее тока. В этом случае, если известна вольт-амперная характеристика дуги, для расчета переходных процессов могут применяться методы, излагаемые в гл. 16.

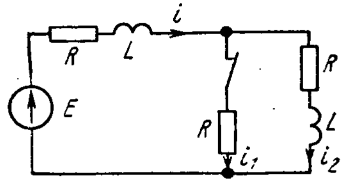


Рис. 8.16

Пример 79. Выяснить, можно ли ожидать возникновения электрической искры (дуги) при размыкании ключа в схеме рис. 8.16.

Решение. До размыкания ключа в цепи был установившийся режим:

$$i(0_-)=\frac{E}{R+(R/2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{E}{R};\quad i_2(0_-)=\frac{i(0_-)}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{E}{R}.$$

Допустим, что при размыкании ключа искра не возникает. При этом ток i_1 почти мгновенно спадает до нуля, а $i(0_+)$ должен будет равняться $i_2(0_+)$. Но каждый из токов (i и i_2) по первому закону коммутации не может измениться скачком.

Следовательно, между достаточно медленно расходящимися контактами ключа в схеме рис. 8.16 при определенных условиях можно ожидать возникновения электрической искры (дуги). Расчет переходного процесса в схеме рис. 8.16 см. в § 8.28.

§ 8.24. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивность. При размыкании ключей в электрических цепях, содержащих значительные индуктивности, на отдельных участках электрических цепей могут возникать напряжения, во много раз превышающие установившиеся. Напряжения, превышающие установившиеся, называют *перенапряжениями*. Они могут оказаться настолько значительными, что при определенных условиях вызовут пробой изоляции и выход из строя измерительной аппаратуры.

Пример 80. К зажимам индуктивной катушки с $R=100$ Ом, $L=10$ Г подключен вольтметр (рис. 8.17). Сопротивление вольтметра $R_V=3000$ Ом; $E=100$ В. Приближенно найти напряжение на зажимах вольтметра при $t=0$, если допустить, что размыкание ключа произойдет мгновенно и искры не возникнет.

Решение. До размыкания ключа через L проходит ток $i=E/R=1$ А. В индуктивности была запасена магнитная энергия $Li^2/2$. Если допустить, что размыкание ключа произошло мгновенно и искры не возникло, и учесть, что ток через индуктивность должен оставаться равным 1 А, то по замкнутому контуру, составленному вольтметром и катушкой, за счет запаса энергии магнитного поля индуктивности в первое мгновение будет проходить ток в 1 А. При этом на вольтметре возникнет пик напряжения порядка 3000 В. Прохождение большого импульса тока через вольтметр может вызвать перегорание катушки прибора и выход его из строя.

При размыкании ключа с конечной скоростью между его расходящимися контактами (рис. 8.17) возникнет электрическая искра (дуга). Это приведет к тому, что увеличение напряжения на вольтметре будет меньше, чем в только что рассмотренном идеализированном случае, когда ключ размыкался мгновенно без искры (дуги) *.

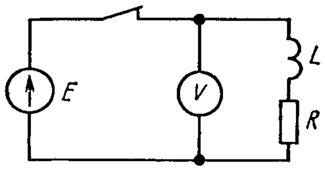


Рис. 8.17

Чтобы не «сжечь» вольтметр в цепи рис. 8.17, сначала надо отключить вольтметр, а затем разомкнуть ключ.

Перенапряжения проявляются тем сильнее, чем больше индуктивности в цепях. Особенно опасны они в цепях постоянного тока, содержащих индуктивности порядка единиц и десятков генри. В таких цепях при отключениях соблюдают специальные меры предосторожности (отключение ключа после введения дополнительных активных сопротивлений в цепь).

§ 8.25. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях. Расчет переходных процессов в любой линейной электрической цепи состоит из следующих основных операций:

1) выбора положительных направлений токов в ветвях цепи;

2) определения значений токов и напряжений непосредственно до коммутации;

3) составления характеристического уравнения и определения его корней **;

4) получения выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.

Широко распространенными методами расчета переходных процессов являются:

1) метод, называемый в литературе классическим;

2) операторный метод;

3) метод расчета путем применения интеграла Дюамеля.

Для всех этих методов перечисленные четыре операции (этапы расчета) являются обязательными.

Для всех методов первые три операции (о них уже говорилось) совершаются одинаково и их нужно рассматривать как общую для всех методов часть расчета.

Различие между методами имеет место на четвертом, наиболее трудоемком этапе расчета.

Чаще используют классический и операторный методы, реже — метод расчета с применением интеграла Дюамеля. В дальнейшем будут

---

* При более детальном рассмотрении процесса необходимо еще учесть влияние межвитковых емкостей и емкостей на землю (см. § 11.1). Если не учитывать возникновение искры (дуги), распределенные емкости и индуктивности, то приведенный расчет является весьма грубым и носит иллюстративный характер.

** Как определять корни характеристических уравнений высоких степеней (4—6-й степени), сказано, например, в кн.: Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.

даны сравнительная оценка и рекомендуемая область применения каждого из них (см. § 8.56).

В радиотехнике, вычислительной и импульсной технике, автоматике, телемеханике и в технике, связанной с теорией информации, кроме этих трех методов применяют метод анализа переходных процессов, основывающийся на интеграле Фурье *. (Об интеграле Фурье и спектральном методе, основывающемся на интеграле Фурье, см. гл. 9.)

В задачах автоматического регулирования применяют также метод трапецеидальных частотных характеристик, в котором используют вещественные частотные характеристики (об этом методе см., например, гл. 3 [10]). Для исследования характера переходного процесса, описываемого уравнениями высоких порядков, применяют моделирующие установки, а также метод пространства состояний (см. § 8.66).

§ 8.26. Определение классического метода расчета переходных процессов. *Классическим методом* расчета переходных процессов называют метод расчета, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих, а определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения, а также по известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и ее производных, взятых при $t=0_+$.

§ 8.27. Определение постоянных интегрирования в классическом методе. Как известно из предыдущего, решение для любого свободного тока (напряжения) можно представить в виде суммы экспоненциальных слагаемых. Число членов суммы равно числу корней характеристического уравнения.

Так, при двух действительных неравных корнях

$$i_{св}=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t};$$

при трех действительных неравных корнях

$$i_{св}=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+A_3e^{p_3t}.$$

Для любой схемы с помощью уравнений Кирхгофа и законов коммутации можно найти: 1) числовое значение искомого свободного тока при $t=0$, обозначим его $i_{св}(0_+)$; 2) числовое значение первой, а если понадобится, то и высших производных от свободного тока, взятых при $t=0_+$. Числовое значение первой производной от свободного тока при $t=0_+$ обозначим $i'_{св}(0_+)$; второй — $i''_{св}(0_+)$ и т. д.

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирования A_1, A_2, …, полагая известными $i_{св}(0_+)$, $i'_{св}(0_+)$, $i''_{св}(0_+)$ и значения корней p_1, p_2, …

Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первой степени, то $i_{св}=Ae^{pt}$. Постоянная интегрирования A определяется по значению свободного тока $i_{св}(0_+)$:

$$A=i_{св}(0_+). \qquad (8.15)$$

* Для студентов указанных специальностей изучение вопросов, связанных с интегралом Фурье, обязательно.

Если дано характеристическое уравнение второй степени и его корни действительны и не равны, то

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{8.16}$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \tag{8.16'}$$

Запишем уравнения (8.16) и (8.16′) при $t=0$ (учтем, что при $t=0$ $e^{p_1 t} = e^{p_2 t} = 1$); получим:

$$i_{св}(0_+) = A_1 + A_2; \tag{8.17}$$

$$i'_{св}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \tag{8.17'}$$

В этой системе уравнений известными являются $i_{св}(0_+)$, $i'_{св}(0_+)$, p_1 и p_2; неизвестными — A_1 и A_2.

Совместное решение (8.17) и (8.17′) дает

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{i'_{св}(0_+) - p_2 i_{св}(0_+)}{p_1 - p_2}; \\ A_2 &= i_{св}(0_+) - A_1. \end{aligned}\right\} \tag{8.17''}$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, то свободный ток

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \tag{8.18}$$

Угловая частота ω_0 и коэффициент затухания δ известны из решения характеристического уравнения.

Определение двух неизвестных A и ν производят и в этом случае по значениям $i_{св}(0_+)$ и $i'_{св}(0_+)$.

Продифференцировав по времени уравнение (8.18), получим

$$i'_{св} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \nu). \tag{8.18'}$$

Запишем уравнение (8.18′) при $t = 0_+$:

$$i'_{св}(0_+) = -A\delta \sin\nu + A\omega_0 \cos\nu.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных A и ν имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A\sin\nu; \\ i'_{св}(0_+) &= -A\delta\sin\nu + A\omega_0\cos\nu. \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

Для цепи, имеющей характеристическое уравнение третьей степени, свободный ток

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}. \tag{8.20}$$

Найдем первую, а затем вторую производную от левой и правой частей уравнения (8.20):

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + p_3 A_3 e^{p_3 t}; \tag{8.21}$$

$$i''_{св} = p_1^2 A_1 e^{p_1 t} + p_2^2 A_2 e^{p_2 t} + p_3^2 A_3 e^{p_3 t}. \tag{8.22}$$

Запишем (8.20), (8.21) и (8.22) при $t=0_+$:

$$\left.\begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A_1+A_2+A_3; \\ i'_{св}(0_+) &= p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3; \\ i''_{св}(0_+) &= p_1^2A_1+p_2^2A_2+p_3^2A_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Система уравнений (8.23) представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: A_1, A_2 и A_3. Все остальные входящие в нее величины $[p_1,\ p_2,\ p_3,\ i_{св}(0_+),\ i'_{св}(0_+),\ i''_{св}(0_+)]$ известны.

Вначале для облегчения нахождения величины и ее производной при $t=0$ рекомендуется решать задачу относительно тока через L или напряжения на C и только затем, используя законы Кирхгофа, определять любую другую величину через найденную.

Рассмотрим несколько примеров расчета переходных процессов классическим методом в цепях первого и второго порядков с источниками постоянной и синусоидальной э. д. с. при ненулевых начальных условиях.

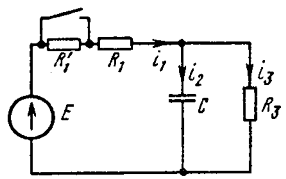


Рис. 8.18

Пример 81. В схеме рис. 8.18 до замыкания ключа был установившийся режим: $R_1=R_1'=R_3=50$ Ом; $C=100$ мкФ; $E=150$ В.

Требуется: 1) найти полные, принужденные и свободные составляющие токов i_1, i_2, i_3 и u_C при $t=0_+$, а также начальное значение производной от свободного напряжения на емкости; 2) определить токи i_1, i_2, i_3 и напряжение u_C в функции времени.

Решение первой части задачи. До коммутации

$$i_2(0_-)=0 \quad \text{и} \quad i_1(0_-)=i_3(0_-)=E/(R_1+R_1'+R_3)=150/150=1\ \text{А}.$$

Напряжение на емкости равнялось напряжению на сопротивлении R_3:

$$u_C(0_-)=i_3(0_-)R_3=1\cdot 50=50\ \text{В}.$$

Найдем принужденные значения токов и напряжений после коммутации:

$$i_{1пр}=i_{3пр}=E/(R_1+R_3)=150/100=1{,}5\ \text{А};$$

$$u_{C\,пр}(0_+)=i_{3пр}(0_+)R_3=1{,}5\cdot 50=75\ \text{В}.$$

По второму закону Кирхгофа составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями при $t=0_+$:

$$i_1(0_+)R_1+u_C(0_+)=E, \quad \text{но} \quad u_C(0_+)=u_C(0_-).$$

Поэтому

$$i_1(0_+)=\frac{E-u_C(0_-)}{R_1}=\frac{150-50}{50}=2\ \text{А}.$$

Из уравнения $u_C(0_+)=i_3(0_+)R_3$ получим

$$i_3(0_+)=u_C(0_+)/R_3=1\ \text{А}.$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Следовательно,

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 2 - 1 = 1 \text{ А}.$$

Свободные составляющие тока и напряжения определим как разности между полными и принужденными величинами:

$$u_{C\,\text{св}}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C\,\text{пр}}(0_+) = 50 - 75 = -25 \text{ В};$$
$$i_{1\text{св}}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1\text{пр}}(0_+) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5 \text{ А};$$
$$i_{2\text{св}}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2\text{пр}}(0_+) = 1 - 0 = 1 \text{ А};$$
$$i_{3\text{св}}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3\text{пр}}(0_+) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \text{ А}.$$

Так как свободный ток через емкость $i_{\text{св}} = C\frac{du_{C\,\text{св}}}{dt}$, то $du_{C\,\text{св}}/dt = i_{\text{св}}/C$.

В рассматриваемом примере

$$(du_{C\,\text{св}}/dt)_{t=0_+} = i_{2\text{св}}(0_+)/C = 1/(100 \cdot 10^{-6}) = 10^4 \text{ В/с}.$$

Решение второй части задачи.

Характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы $pR_1R_3C + R_1 + R_3 = 0$ имеет один корень

$$p = -\frac{R_1 + R_3}{R_1R_3C} = -400 \text{ с}^{-1}.$$

Каждый ток равен сумме принужденной составляющей и свободной составляющей Ae^{pt}, где A равно значению свободной составляющей при $t = 0_+$ (рис. 8.19):

$$i_1 = 1{,}5 + 0{,}5e^{-400t} \text{ А}; \quad i_2 = e^{-400t} \text{ А};$$
$$i_3 = 1{,}5 - 0{,}5e^{-400t} \text{ А}; \quad u_C = 75 - 25e^{-400t} \text{ В}.$$

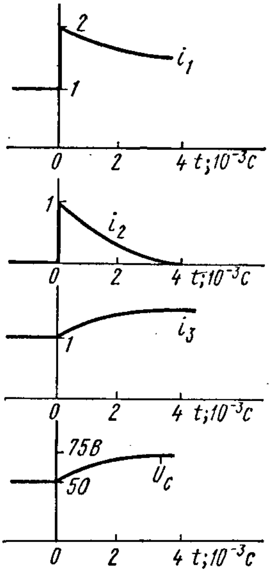


Рис. 8.19

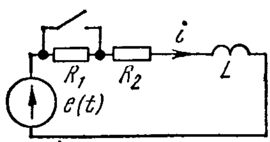


Рис. 8.20

Пример 82. В схеме рис. 8.20 до замыкания ключа был установившийся режим: $R_1 = R_2 = 2$ Ом; $\omega L = 3$ Ом; $e(t) = 127\sin(\omega t - 50°)$ В; $\omega = 314$ с$^{-1}$.

Требуется: 1) найти $i_{\text{св}}(0_+)$; 2) определить закон изменения тока в цепи после коммутации.

Решение первой части задачи. Комплексная амплитуда тока в цепи до коммутации

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{4+3j} = 25{,}4e^{-j86^\circ 50'} \text{ А}.$$

Мгновенное значение тока до коммутации

$$i = 25{,}4\sin(\omega t - 86^\circ 50') \text{ А}.$$

В момент коммутации (при $\omega t = 0$)

$$i(0_-) = 25{,}4\sin(-86^\circ 50') = -25{,}35 \text{ А}.$$

Принужденный ток после коммутации

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2+3j} = 35{,}2e^{-j106^\circ 20'} \text{ А}.$$

Мгновенное значение принужденного тока

$$i_{\text{пр}} = 35{,}2\sin(\omega t - 106^\circ 20') \text{ А};$$

$$i_{\text{пр}}(0_+) = 35{,}2\sin(-106^\circ 20') = -33{,}8 \text{ А}.$$

По первому закону коммутации,

$$i(0_-) = i(0_+) = -25{,}35 \text{ А}.$$

Но $i(0_+) = i_{\text{пр}}(0_+) + i_{\text{св}}(0_+)$. Следовательно,

$$i_{\text{св}}(0_+) = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0_+) = -25{,}35 + 33{,}8 = 8{,}45 \text{ А}.$$

Решение второй части задачи. Характеристическое уравнение $pL + R_2 = 0$ имеет корень

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\omega L/\omega} = -\frac{2 \cdot 314}{3} \approx -210 \text{ с}^{-1}.$$

По данным первой части задачи, ток в цепи до коммутации (кривая *1* рис. 8.21 до $\omega t = 0$)

$$i = 25{,}4\sin(\omega t - 86^\circ 50') \text{ А}.$$

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации (кривая *2* рис. 8.21)

$$i_{\text{пр}} = 35{,}2\sin(\omega t - 106^\circ 20') \text{ А}; \quad i_{\text{св}}(0_+) = 8{,}45 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = 35{,}2\sin(\omega t - 106^\circ 20') + 8{,}45e^{-210t} \text{ А}.$$

Кривая *3* рис. 8.21 определяет характер изменения свободного тока, кривая *4* — полного тока после коммутации (ординаты кривой *4* при $\omega t \geqslant 0$ равны сумме ординат кривых *2* и *3*).

Пример 83. В схеме рис. 8.22 ключ замыкается в третьей ветви. До этого был установившийся режим: $e(t) = E = 120$ В. Требуется найти: 1) $i_{2\text{св}}(0_+)$; $(di_{2\text{св}}/dt)_{t=0_+}$; $u_{C\,\text{св}}(0_+)$ и $(du_{C\,\text{св}}/dt)_{t=0_+}$; 2) $i_2(t)$ и $u_C(t)$.

Решение первой части задачи. До замыкания ключа

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = E/(R_1 + R_2) = 120/(50+10) = 2 \text{ A}.$$

Принужденный ток после коммутации $i_{1пр} = i_{2пр} = 2$ А. Постоянный ток через емкость не проходит, поэтому $i_{3пр} = 0$.

От постоянного тока на индуктивности нет падения напряжения, следовательно, $u_{L\,2пр} = 0$.

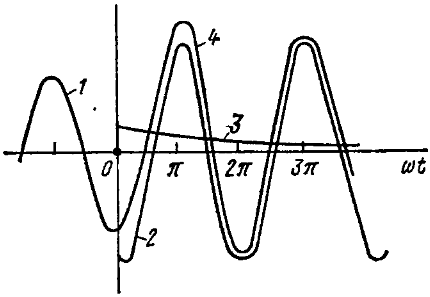


Рис. 8.21

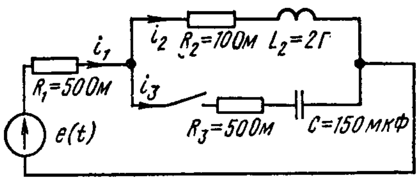


Рис. 8.22

Принужденное напряжение на емкости равно падению напряжения на сопротивлении R_2 от тока $i_{2пр}$: $u_{C\,пр} = 2 \cdot 10 = 20$ В. По первому закону коммутации,

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 2 \text{ A}.$$

Но $i_2(0_+) = i_{2пр}(0_+) + i_{2св}(0_+)$, откуда

$$i_{2св}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2пр}(0_+) = 2 - 2 = 0;$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+),$$

или

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+).$$

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$i_1(0_+) R_1 + i_3(0_+) R_3 + u_C(0_+) = E.$$

Так как $u_C(0_+) = 0$ и $i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+)$, то

$$i_3(0_+) = \frac{E - 2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{120 - 2 \cdot 50}{50 + 50} = 0{,}2 \text{ A}.$$

Свободная составляющая

$$i_{3св}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3пр}(0_+) = 0{,}2 - 0 = 0{,}2 \text{ A}.$$

Чтобы определить $u_{L\,св}(0_+)$, составим уравнение для свободных составляющих по контуру, образованному первой и второй ветвями:

$$i_{1св}(0_+) R_1 + i_{2св}(0_+) R_2 + u_{L\,св}(0_+) = 0,$$

откуда

$$u_{L\,св}(0_+) = -i_{1св}(0_+) R_1 - i_{2св}(0_+) R_2 = -0{,}2 \cdot 50 - 0 = -10 \text{ В}.$$

Но $u_{L\,св} = L_2 \frac{di_{2св}}{dt}$. Следовательно,

$$(di_{2св}/dt)_{t=0_+} = u_{L\,св}(0_+)/L_2 = -10/2 = -5 \text{ А/с}.$$

Свободное напряжение на емкости при $t = 0_+$ подсчитаем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+);$$

$$u_C(0_+) = u_{C\,пр}(0_+) + u_{C\,св}(0_+); \quad 0 = 20 + u_{C\,св}(0_+);$$

отсюда $u_{C\,св}(0_+) = -20$ В.

Определим скорость изменения свободной составляющей напряжения на емкости при $t = 0_+$. С этой целью воспользуемся тем, что $i_{3св} = C\frac{du_{C\,св}}{dt}$. Следовательно,

$$(du_{C\,св}/dt)_{t=0_+} = i_{3св}(0_+)/C = 0{,}2/(150 \cdot 10^{-6}) = 1333 \text{ В/с}.$$

Решение второй части задачи. Характеристическое уравнение

$$p^2L_2C(R_1 + R_3) + p[C(R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3) + L_2] + R_1 + R_2 = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = -42{,}1 + j15{,}2 \text{ с}^{-1} \quad \text{и} \quad p_2 = -42{,}1 - j15{,}2 \text{ с}^{-1}.$$

Поэтому свободная составляющая должна быть взята в виде

$$Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu),$$

где $\delta = 42{,}1$; $\omega_0 = 15{,}2$; A и ν определяют по значению свободной составляющей и ее первой производной при $t = 0_+$. По данным первой части задачи,

$$i_{2пр} = 2 \text{ А}; \quad i_{2св}(0_+) = 0; \quad i'_{2св}(0_+) = -5 \text{ А/с};$$

$$u_{C\,пр} = 20 \text{ В}; \quad u_{C\,св}(0_+) = -20 \text{ В}; \quad u'_{C\,св}(0_+) = 1333 \text{ В/с}.$$

При $t = 0$ $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) = A\sin\nu$. Производная функции $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu)$

$$-A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) + Ae^{-\delta t}\omega_0\cos(\omega_0 t + \nu).$$

Значение этой производной при $t = 0$ равно

$$-\delta A\sin\nu + \omega_0 A\cos\nu.$$

Найдем значения A и ν для свободной составляющей тока i_2. Для этого составим два уравнения:

$$i_{2св}(0_+) = 0, \quad \text{или} \quad A\sin\nu = 0;$$

$$i'_{2св}(0_+) = -5, \quad \text{или} \quad -\delta A\sin\nu + \omega_0 A\cos\nu = -5.$$

Совместное решение их дает $\nu = 0$ и $A = -0{,}328$ А. Следовательно,

$$i_2 = i_{2пр} + i_{2св} = 2 - 0{,}328e^{-42{,}1t}\sin 15{,}2t \text{ А}.$$

Кривая 1 рис. 8.23 выражает собой график $i_2=f(t)$. Найдем A и ν для свободной составляющей напряжения u_C:

$$u_{C\,\text{св}}(0_+)=-20, \quad \text{или} \quad A\sin\nu=-20;$$

$$u'_{C\,\text{св}}(0_+)=1333, \quad \text{или} \quad -\delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu=1333.$$

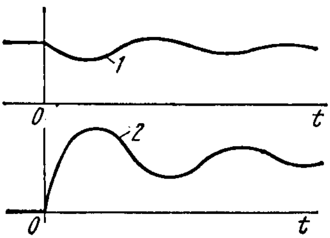


Рис. 8.23

Отсюда $A=37{,}9$ и $\nu=-31°52'$. Таким образом,

$$u_C=u_{C\text{пр}}+u_{C\text{св}}=20+$$
$$+37{,}9e^{-42{,}1t}\sin(15{,}2t-31°52')\ B.$$

Кривая 2 рис. 18.23 изображает $u_C=f(t)$.

Пример 84. В схеме рис. 8.22 $e(t)=127\sin(314t+40°)$ В. Параметры схемы те же, что и в примере 83. До включения ключа в схеме был установившийся режим: $u_C(0_-)=0$.

Требуется найти: 1) $i_{2\text{св}}(0_+)$; $(di_{2\text{св}}/dt)_{t=0+}$; $u_{C\text{св}}(0_+)$ и $(du_{C\text{св}}/dt)_{t=0+}$; 2) $i_2(t)$ и $u_C(t)$.

Решение первой части задачи. До коммутации

$$\dot I_{1m}=\dot I_{2m}=\frac{127e^{j40°}}{60+j628}=0{,}202e^{-j44°30'}A;\ i_1=i_2=0{,}202\sin(\omega t-44°30');$$

$$i_1(0_-)=i_2(0_-)=0{,}202\sin(-44°30')=-0{,}1415\ \text{А}.$$

Определим принужденные токи и напряжения на емкости после коммутации.

Входное сопротивление цепи

$$Z_{\text{вх}}=R_1+\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\frac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2-R_3-\frac{j}{\omega C}}=104{,}8e^{-j9°50'}\ \text{Ом};$$

тогда

$$\dot I_{1m}=\dot E_{1m}/Z_{\text{вх}}=127e^{j40°}/104{,}8e^{-j9°50'}=1{,}213e^{j49°50'}\ \text{А}.$$

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации

$$i_{1\text{пр}}=1{,}213\sin(\omega t+49°50');$$

$$i_{1\text{пр}}(0_+)=1{,}213\sin 49°50'=0{,}923\ \text{А}.$$

Комплексное сопротивление параллельно соединенных второй и третьей ветвей

$$Z_{23}=\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\frac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2+R_3-\frac{j}{\omega C}}=56{,}3e^{-j18°35'}\ \text{Ом}.$$

Комплексное напряжение на параллельном участке

$$\dot U_{23m}=\dot I_{1m}Z_{23}=1{,}213e^{j49°50'}\cdot 56{,}3e^{-j18°35'}=68{,}2e^{j31°15'}\ \text{В};$$

отсюда

$$\dot I_{2m}=\dot U_{23m}/Z_2=68{,}2e^{j31°15'}/(10+j628)=0{,}1085e^{-j58°45'};$$

$$\dot I_{3m}=\dot U_{23m}/Z_3=68{,}2e^{j31°15'}/(50-j21{,}3)=1{,}253e^{j54°20'}.$$

Мгновенные значения принужденных токов i_2 и i_3 после коммутации:

$$i_{2пр}=0{,}1085\sin(\omega t-58°45');$$

$$i_{3пр}=1{,}253\sin(\omega t+54°20');$$

$$i_{2пр}(0_+)=0{,}1085\sin(-58°45')=-0{,}0928\ \text{А};$$

$$i_{3пр}(0_+)=1{,}253\sin 54°20'=1{,}016\ \text{А}.$$

Принужденное напряжение на емкости

$$\dot U_{Cпр\,m}=\dot I_{3m}(-j/\omega C)=1{,}253e^{j54°20'}\cdot 21{,}3e^{-j90°}=26{,}7e^{-j35°40'}\ \text{В}.$$

Мгновенное значение принужденного напряжения на емкости после коммутации

$$u_{Cпр}=26{,}7\sin(\omega t-35°40');$$

$$u_{Cпр}(0_+)=26{,}7\sin(-35°40')=-15{,}57\ \text{В}.$$

По первому закону коммутации,

$$i_2(0_-)=i_2(0_+)=-0{,}1415=i_{2пр}(0_+)+i_{2св}(0_+);$$

$$i_{2пр}(0_+)=-0{,}0928\ \text{А};$$

$$i_{2св}(0_+)=-0{,}1415+0{,}0928=-0{,}0487\ \text{А}.$$

Свободное напряжение на емкости $u_{Cсв}(0_+)$ найдем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-)=u_{Cпр}(0_+)+u_{Cсв}(0_+);$$

$$u_{Cсв}(0_+)=u_C(0_-)-u_{Cпр}(0_+)=0-(-15{,}57)=15{,}57\ \text{В}.$$

Для определения $i_{3св}(0_+)$ составим уравнение по контуру, образованному первой и третьей ветвями:

$$i_{1св}(0_+)R_1+i_{3св}(0_+)R_3+u_{Cсв}(0_+)=0.$$

Заменим в нем $i_{1св}(0_+)$ на $[-0{,}0487+i_{3св}(0_+)]$ и, учтя, что $u_{Cсв}(0_+)=15{,}57$ В, получим:

$$i_{3св}(0_+)=\frac{-15{,}57+2{,}43}{50+50}=-0{,}1314\ \text{А};$$

$$i_{1св}(0_+)=i_{2св}(0_+)+i_{3св}(0_+)=-0{,}18\ \text{А}.$$

Чтобы определить $u_{Lсв}(0_+)=L\,(di_{2св}/dt)_{t=0_+}$, составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями:

$$i_{1св}(0_+)R_1+i_{2св}(0_+)R_2+u_{Lсв}(0_+)=0,$$

откуда

$$u_{Lсв}(0_+)=9{,}487\ \text{В};$$

$$(di_{2св}/dt)_{t=0_+}=u_{Lсв}(0_+)/L=9{,}487/2=4{,}74\ \text{А/с};$$

$$(du_{Cсв}/dt)_{t=0_+}=i_{3св}(0_+)/C=-0{,}1314/(150\cdot 10^{-6})=-876\ \text{В/с}.$$

Решение второй части задачи. По данным, полученным при решении первой части,

$$i_{2\text{пр}} = 0{,}1085 \sin(\omega t - 58°45'),\ i_{2\text{св}}(0_+) = -0{,}0487\ \text{А};$$
$$i'_{2\text{св}}(0_+) = 4{,}74\ \text{А/с};$$
$$u_{C\text{пр}} = 26{,}7 \sin(\omega t - 35°40'),\ u_{C\text{св}}(0_+) = 15{,}57\ \text{В};$$
$$u'_{C\text{св}}(0_+) = -876\ \text{В/с}.$$

Корни характеристического уравнения те же, что и в предыдущем примере. Определим A и ν для $i_{2\text{св}}$, составив два уравнения:

$$A \sin\nu = -0{,}0487; \quad -\delta A \sin\nu + \omega_0 A \cos\nu = 4{,}74,$$

откуда $A = 0{,}184\ А$ и $\nu = -15°20'$.

Следовательно,

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}} = 0{,}1085 \sin(\omega t - 58°45') +$$
$$+ 0{,}184 e^{-42{,}1t} \sin(15{,}2t - 15°20')\ \text{А}.$$

Найдем A и ν для $u_{C\text{св}}$, составив два уравнения:

$$A \sin\nu = 15{,}57; \qquad -\delta A \sin\nu + \omega_0 A \cos\nu = -876.$$

Их совместное решение дает $A = 21{,}3$ и $\nu = 136°50'$. Таким образом, $u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = 26{,}7 \sin(\omega t - 35°40') + 21{,}3 e^{-42{,}1t} \sin(15{,}2t + 136°50')$ В.

§ 8.28. О переходных процессах, при макроскопическом рассмотрении которых не выполняются законы коммутации. Обобщенные законы коммутации. На практике встречаются схемы, переходные процессы в которых состоят как бы из двух стадий резко различной продолжительности. Длительность первой стадии в тысячи и миллионы раз короче второй. В течение первой стадии токи в индуктивностях и напряжения на емкостях изменяются настолько быстро (почти скачкообразно), что если считать $t = 0_-$ началом, а $t = 0_+$ — окончанием первой стадии, то создается впечатление, что при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ т. е. за время, например, в несколько микросекунд, как бы нарушаются законы коммутации.

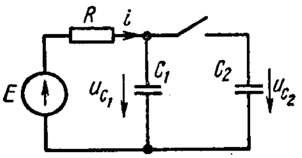


Рис. 8.24

Для иллюстрации нарушения второго закона коммутации рассмотрим переходный процесс в схеме рис. 8.24 с начальными условиями $u_{C_1}(0_-) = E$, $u_{C_2}(0_-) = 0$.

Если не учитывать хотя и очень малое, но все же конечное сопротивление соединительных проводов, то сначала при замыкании ключа через конденсаторы возникают очень большие броски токов, прохождение которых приводит почти к мгновенному уравниванию напряжения на конденсаторах до величины, меньшей E. (Строго говоря, если учесть сопротивление соединительных проводов $R_{\text{пр}}$, то для первой стадии переходного процесса в схеме рис. 8.24 характеристическое уравнение есть уравнение второго порядка, один корень которого при $R_{пр} \to 0$ стремится к бесконечности.)

После этого начинается вторая стадия, когда параллельно соединенные конденсаторы относительно медленно заряжаются до напряжения E. Длительность переходного процесса практически определяется второй стадией.

В качестве примера нарушения первого закона коммутации рассмотрим переходный процесс в схеме рис. 8.16. Быстрое размыкание ключа в первой ветви, например за 10^{-5} с, приводит к тому, что сопротивление этой ветви быстро увеличивается, ток i_1 почти скачком уменьшается до нуля и почти скачком изменяются токи в остальных ветвях. Таким образом, за время 10^{-5} с (от $t=0_-$ до $t=0_+$) токи резко изменяются, а $i(0_+) \neq i(0_-)$ и $i_2(0_+) \neq i_2(0_-)$.

Нарушение законов коммутации в формулировке § 8.5—8.6 при переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$ объясняется тем, что процессы в быстро протекающей первой стадии и их зависимость от времени не рассматривают. Если же первую стадию не исключать при рассмотрении, то ранее рассмотренные законы коммутации выполняются.

Для того чтобы можно было рассчитывать переходные процессы *сразу во второй стадии, как бы перешагнув через первую*, надо, во-первых, примириться с тем, что при переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$ в рассматриваемых задачах законы коммутации в том виде, как они сформулированы в § 8.5—8.6, не будут выполнены; во-вторых, договориться об исходных положениях, которые позволяют определить значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях (а если потребуется, то и их производные) при $t=0_+$ через значения токов и напряжений при $t=0_-$. Таких положений (правил) два. При решении задач рассматриваемого типа они заменяют законы (правила) коммутации, о которых шла речь в § 8.5—8.6, и потому их называют иногда *обобщенными законами (правилами) коммутации*.

1. При переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$ суммарное потокосцепление $\sum\psi$ каждого замкнутого контура послекоммутационной схемы не должно претерпевать скачкообразных изменений. Это положение следует из второго закона Кирхгофа и доказывается от противного: если допустить, что $\sum\psi$ некоторого контура изменится скачком, то в уравнении для этого контура, составленном по второму закону Кирхгофа, появилось бы слагаемое $(\Delta\sum\psi/\Delta t)_{\Delta t \to 0} \to \infty$ и второй закон Кирхгофа не был бы выполнен.

Суммарное потокосцепление $\sum\psi$ представляет собой алгебраическую сумму произведений токов ветвей этого контура на их индуктивности (в общем случае с учетом магнитной связи с другими ветвями). Со знаком плюс в эту сумму входят слагаемые ветвей, направление токов в которых совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

2. При переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$ суммарный заряд $\sum q$ на обкладках конденсаторов, присоединенных к любому узлу послекоммутационной схемы, должен остаться неизменным. Если этого не выполнить, то суммарный ток, проходящий через конденсаторы, был бы бесконечно большим (стремился бы к бесконечности), бесконечно большими были

бы токи и через другие ветви, присоединенные к этому узлу. Это также привело бы к нарушению второго закона Кирхгофа.

Пример 85. Послекоммутационная схема рис. 8.16 имеет всего один контур. По первому закону (правилу) коммутации,

$$Li(0_-)+L_2i_2(0_-)=i(0_+)(L+L_2);\quad L_2=L$$

$$i(0_+)=[1/(L+L_2)][Li(0_-)+L_2i_2(0_-)].$$

Закон изменения тока при $t\geqslant 0_+$, если считать, что до коммутации был установившийся режим,

$$i=\frac{E}{2R}+\left[\frac{2E}{3R}\cdot\frac{2L+L_2}{L+L_2}-\frac{E}{2R}\right]e^{-\frac{2R}{L+L_2}t}.$$

Пример 86. Для схемы рис. 8.24 известны $u_{C_1}(0_-)=E$ и $u_{C_2}(0_-)=0$. По второму закону (правилу) коммутации составляем одно уравнение (т. е. столько, сколько надо составить уравнений для послекоммутационной схемы по первому закону Кирхгофа):

$$u_{C_1}(0_-)C_1=u_C(0_+)(C_1+C_2);$$

отсюда

$$u_C(0_+)=u_{C_1}(0_+)=u_{C_2}(0_+)=\frac{EC_1}{C_1+C_2}.$$

При $t\geqslant 0_+$

$$u_C=u_{C\text{пр}}+u_{C\text{св}}=E-E\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}.$$

Характер изменения u_{C_1} и u_{C_2} показан на рис. 8.25, *а* и *б*. В заключение обратим внимание на то, что, допустив при переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$ скачкообразное изменение токов через индуктивности и скачкообразное изменение напряжений на емкостях, тем самым допускаем скачкообразное изменение энергии магнитного поля индуктивностей и энергии электрического поля емкостей.

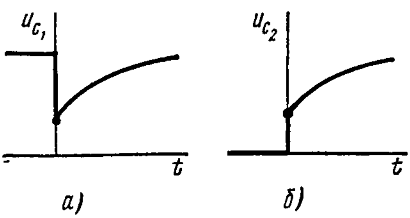


Рис. 8.25

Суммарная энергия электрического и магнитного полей при $t=0_+$ всегда меньше суммарной энергии при $t=0_-$, так как часть запасенной энергии расходуется на тепловые потери в сопротивлениях, искру при коммутации, электромагнитное излучение в окружающее пространство.

Прежде чем перейти к изучению основ второго метода расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — операторного метода, вспомним некоторые известные положения.

§ 8.29. Логарифм как изображение числа. Известно, что для выполнения операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня из многозначных чисел целесообразно пользоваться логарифмами.

Действительно, операция умножения сводится к сложению логарифмов, операция деления — к вычитанию логарифмов и т. д. Таким образом, произвести расчет легче в силу того, что сравнительно сложная операция сводится к более простой. Каждому числу соответствует свой логарифм, поэтому логарифм можно рассматривать как изображение числа. Так, 0,30103 есть изображение (логарифм) при основании 10 числа 2.

§ 8.30. Комплексные изображения синусоидальных функций. С понятием изображения встречаются также при изучении символического метода расчета цепей синусоидального тока. Согласно символическому методу, комплексная амплитуда есть изображение синусоидальной функции. Так, $\dot{I}_m$ есть изображение синусоидального тока $I_m \sin(\omega t + \psi)$. Между изображением числа в виде логарифма и изображением синусоидальной функции времени в виде комплексного числа имеется существенная разница. В первом случае речь идет об изображении числа (не функции), во втором — об изображении функции времени.

Подобно тому как введение логарифмов упростило проведение операций над числами, введение комплексных изображений синусоидальных функций времени позволило упростить операции над функциями времени (свести операции по расчету цепей синусоидального тока к операциям, изученным в гл. 1).

§ 8.31. Введение к операторному методу. Операторный метод тоже основан на использовании понятия об изображении функций времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой переменной, обозначаемой буквой p, и наоборот — функции переменной p отвечает определенная функция времени.

Переход от функции времени к функции p осуществляют с помощью преобразования (прямого) Лапласа.

Таким образом, операторный метод расчета переходных процессов представляет собой метод расчета, основанный на преобразовании Лапласа.

Операторный метод позволяет свести операцию дифференцирования к умножению, а операцию интегрирования — к делению. Это облегчает интегрирование дифференциальных уравнений.

§ 8.32. Преобразование Лапласа. Условимся под p понимать комплексное число

$$p = a + jb, \tag{8.24}$$

где a — действительная, а jb — мнимая части комплексного числа (в ряде книг вместо буквы p пишут s).

В дальнейшем в соответствии с установившейся практикой коэффициент b с учетом знака условимся называть не коэффициентом при мнимой части комплекса (чем он в действительности является), а мнимой частью. Функцию времени (ток, напряжение, э. д. с., заряд) обозначают $f(t)$ и называют *оригиналом*. Ей соответствует функция $F(p)$, называемая *изображением*, которая определяется следующим образом:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{8.25}$$

Соответствие между функциями $F(p)$ и $f(t)$ записывают так:

$$F(p) \risingdotseq f(t). \tag{8.26}$$

Знак $\risingdotseq$ называют знаком соответствия.

Верхний предел интеграла (8.25) равен бесконечности. Интегралы с бесконечным верхним пределом называют несобственными. Если в результате интегрирования и подстановки пределов получают конечное число (не бесконечность), то говорят, что интеграл сходится.

В курсе математики доказывается, что интеграл (8.25), в состав которого входит функция $e^{-pt} = e^{-at}e^{-jbt}$, сходится только в том случае, когда модуль функции $f(t)$, если и увеличивается с ростом t, то все же медленнее, чем модуль функции e^{pt}, равный e^{at}.

Практически все функции $f(t)$, с которыми имеют дело в курсе ТОЭ, этому условию удовлетворяют.

Найдем изображения некоторых простейших функций.

§ 8.33. Изображение постоянной. Требуется найти изображение функции $f(t) = A$, где A — постоянная величина. С этой целью в (8.25) вместо $f(t)$ подставим A и проведем интегрирование:

$$F(p) = \int_0^\infty A e^{-pt} dt = A\left(-\frac{1}{p}\right)\int_0^\infty d(e^{-pt}) = -\left.\frac{Ae^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{A}{p}.$$

Следовательно, изображение постоянной равно постоянной, деленной на p:

$$A \risingdotseq A/p. \tag{8.27}$$

Наряду с преобразованием Лапласа (8.25) в научной и учебной литературе широко пользуются преобразованием Карсона—Хевисайда. При преобразовании по Карсону—Хевисайду принимают

$$F(p) = p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

По Карсону—Хевисайду, изображение и оригинал имеют одинаковую размерность, а изображение постоянной A равно самой постоянной.

По Лапласу, размерность оригинала не равна размерности изображения, а изображение постоянной A равно A/p.

Следует отметить, что основная заслуга в разработке интегрального преобразования функции $f(t)$ в функцию p принадлежит Лапласу. Карсон и Хевисайд добавили к преобразованию Лапласа лишь нормирующий множитель p, благодаря чему оригинал и изображение стали иметь одинаковую размерность.

§ 8.34. Изображение показательной функции $e^{\alpha t}$. Вместо $f(t)$ в (8.25) подставим $e^{\alpha t}$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\, dt = \left(-\frac{1}{p-\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\, d[-t(p-\alpha)] =$$

$$= \frac{-1}{p-\alpha} e^{-t(p-\alpha)}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{p-\alpha}(0-1) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \risingdotseq 1/(p-\alpha). \tag{8.28}$$

При выводе формулы (8.28) (при подстановке пределов) было учтено, что действительная часть оператора p больше, чем α, т. е. $a > \alpha$. Только при этом условии интеграл сходится.

Из формулы (8.28) вытекает ряд важных следствий. Положив в ней $\alpha = j\omega$, получим

$$e^{j\omega t} \risingdotseq 1/(p-j\omega). \tag{8.29}$$

Формула (8.29) дает возможность найти изображение комплекса синусоидального тока:

$$\dot{I}_m e^{j(\omega t+\psi)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

С этой целью обе части (8.29) умножим на постоянное число $\dot{I}_m$. Получим

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} \risingdotseq \dot{I}_m \frac{1}{p-j\omega}. \tag{8.30}$$

Аналогично, изображение комплекса синусоидального напряжения

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} \risingdotseq \dot{U}_m \frac{1}{p-j\omega}. \tag{8.31}$$

Функции $e^{-\alpha t}$ соответствует изображение $1/(p+\alpha)$:

$$e^{-\alpha t} \risingdotseq 1/(p+\alpha). \tag{8.32}$$

§ 8.35. Изображение первой производной. Известно, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$. Требуется найти изображение первой производной $df(t)/dt$, если известно, что значение функции $f(t)$ при $t=0$ равно $f(0)$.

Подвергнем функцию $df(t)/dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,d[f(t)].$$

Интегрирование произведем по частям. Обозначив $e^{-pt} = u$ и $d[f(t)] = dv$, имеем

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,d[f(t)] = e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,d[e^{-pt}].$$

Но

$$e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty = 0 - f(0) = -f(0),$$

а

$$-\int_0^\infty f(t)\,de^{-pt} = p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = pF(p).$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\,e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0), \qquad (8.33')$$

или

$$df(t)/dt \risingdotseq pF(p) - f(0). \qquad (8.33)$$

§ 8.36. Изображение напряжения на индуктивности. Изображение тока i равно $I(p)$. Запишем изображение напряжения на индуктивности:

$$u_L = L\,\frac{di}{dt}.$$

По формуле (8.33), $di/dt \risingdotseq pI(p) - i(0)$, где $i(0)$ * — значение тока i при $t=0$.

Следовательно,

$$L\,\frac{di}{dt} \risingdotseq LpI(p) - Li(0). \qquad (8.34)$$

Если $i(0)=0$, то

$$L\,\frac{di}{dt} \risingdotseq LpI(p). \qquad (8.34')$$

§ 8.37. Изображение второй производной. Без вывода дадим формулу

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - \left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0}. \qquad (8.35)$$

Следовательно, изображение второй производной тока i

$$\frac{d^2i}{dt^2} \risingdotseq p^2I(p) - pi(0) - i'(0).$$

§ 8.38. Изображение интеграла. Требуется найти изображение функции $\int_0^t f(t)\,dt$, если известно, что изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$.

Подвергнем функцию $\int_0^t f(t)\,dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]d\left(e^{-pt}\right).$$

---

* Для сокращения записи вместо $i(0_-)$ пишем $i(0)$; $i(0)$ может быть и положительной и отрицательной величиной; $i(0)$ положительно, когда направление тока совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока в индуктивности L.

Примем $\int\limits_0^t f(t)\,dt = u$; $d(e^{-pt}) = dv$ и возьмем интеграл по частям:

$$-\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^t f(t)\,dt\right]d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p}\left[\int\limits_0^t f(t)\,dt\right]e^{-pt}\Bigg|_0^\infty +$$

$$+\frac{\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt}{p} = \frac{F(p)}{p}.$$

Первое слагаемое правой части при подстановке и верхнего и нижнего пределов дает нуль. При подстановке верхнего предела нуль получается за счет ранее наложенного ограничения на функцию $f(t)$ (см. § 8.32): функция $f(t)$ если и растет с увеличением t, то все же медленнее, чем растет функция e^{at}, где a — действительная часть p. При подстановке нижнего предела нуль получается за счет обращения в нуль $\int\limits_0^t f(t)\,dt$. Следовательно, если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(t)\,dt \risingdotseq F(p)/p. \qquad (8.36)$$

§ 8.39. Изображение напряжения на конденсаторе. Напряжение на конденсаторе u_C часто записывают в виде $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$, где не указаны пределы интегрирования по времени. Более полной является следующая запись:

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt,$$

где учтено, что к моменту времени t напряжение на конденсаторе определяется не только током, протекавшим через конденсатор в интервале времени от 0 до t, но и тем напряжением $u_C(0)$, которое на нем было при $t = 0$. В соответствии с формулой (8.36) изображение $\frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt$ равно $\frac{I(p)}{Cp}$, а изображение постоянной $u_C(0)$ есть постоянная, деленная на p. Поэтому изображение напряжения на конденсаторе записывают следующим образом:

$$u_C \risingdotseq \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}\,^{*}. \qquad (8.37)$$

---

* Для сокращения записи вместо $u_C(0_-)$ пишем $u_C(0)$; $u_C(0)$ может быть и положительной и отрицательной величиной. В формуле (8.37) $u_C(0)$ берется положительной величиной, если направление напряжения $u_C(0)$ совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока через конденсатор.

Приведем простейшие операторные соотношения; часть их была выведена ранее, другая дается без вывода:

1. $\frac{1}{p-\alpha} \doteq e^{\alpha t}$.

2. $\frac{1}{p+\alpha} \doteq e^{-\alpha t}$.

3. $\frac{1}{p-j\omega} \doteq e^{j\omega t}$.

4. $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \doteq 1-e^{-\alpha t}$.

5. $\frac{1}{(p+\alpha)^2} \doteq te^{-\alpha t}$.

6. $\frac{p}{(p+\alpha)^2} \doteq (1-\alpha t)\,e^{-\alpha t}$.

7. $\frac{1}{p(p+\alpha)^2} \doteq \frac{1}{\alpha^2}[1-e^{-\alpha t}(1+\alpha t)]$.

8. $\frac{1}{p^2(p+a)} \doteq \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$.

9. $\frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$.

10. $\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$.

11. $\frac{1}{p(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a}\right)$.

12. $\frac{1}{p^2} \doteq t$.

§ 8.40. **Некоторые теоремы и предельные соотношения.** 1. *Теорема смещения в области оригиналов (теорема запаздывания).* Если изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$, то изображение функции $f(t-\tau)$ равно $e^{-p\tau}F(p)$.

Теорема доказывается путем подстановки $f(t-\tau)$ в формулу преобразования Лапласа и введения новой переменной $t-\tau=t_1$, $dt=dt_1$, $e^{-pt}=e^{-p\tau}e^{-pt_1}$:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)\,d\tau = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pt_1}f(t_1)\,dt_1 = e^{-p\tau}F(p).$$

Пример на применение теоремы см. § 8.60.

2. *Теорема смещения в области изображений.* Если изображению функции $F(p)$ соответствует функция $f(t)$, то изображению $F(p-\lambda)$ — функция $e^{\lambda t}f(t)$.

Доказательство производится путем подстановки функции $e^{\lambda t}f(t)$ в формулу преобразования Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\lambda)}f(t)\,dt = F(p-\lambda).$$

Пример 87. Найти оригинал $1/(p+\lambda)^2$, если известно, что $1/p^2 \doteq t$.
Решение. $1/(p+\lambda)^2 \doteq e^{-\lambda t}t$.

3. *Теорема об изменении масштаба (теорема подобия).* Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, то функции $f(\alpha t)$ — изображение $\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Теорема доказывается следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)}f(\alpha t)\,d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. *Нахождение начального значения функции времени* $f(0)$ *по изображению функции* $F(p)$:

$$f(0) = \lim_{p \to \infty} pF(p).$$

Это соотношение получают, если в (8.33′) p устремим к бесконечности. При этом левая часть (8.33′) равна нулю.

5. *Нахождение установившегося значения функции времени* $f(\infty)$ *по изображению функции* $F(p): f(\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p)$.

Соотношение получим, если в (8.33′) p устремим к нулю и учтем, что $e^{-pt}_{p \to 0} = 1$. Будем иметь

$$\int_0^\infty df(t) = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0),$$

или $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$.

Если искомая функция $f(t)$ в послекоммутационном режиме содержит в своем составе периодическую составляющую (принужденную или свободную), то понятие $f(\infty)$ для нее оказывается неопределенным. Например, не имеет определенного смысла функция $\sin \omega t$ при $t = \infty$. В соответствии с этим *к цепям с синусоидальными источниками не* следует применять предельное соотношение п. 5. Точно так же не следует применять это соотношение к цепям без синусоидальных источников, *если эти цепи чисто реактивные* и не содержат активных сопротивлений.

Так, при подключении последовательно соединенных L и C (при нулевых начальных условиях) к единичному напряжению $1(t)$ по цепи протекает свободная составляющая тока, численно равная $\sqrt{C/L} \sin t/\sqrt{LC}$. В этом случае определять $f(\infty)$ как $\lim_{p \to 0} pF(p)$ также не имеет смысла.

§ 8.41. Закон Ома в операторной форме. Внутренние э. д. с.

На рис. 8.26 изображена часть сложной разветвленной электрической цепи. Между узлами a и b этой цепи включена ветвь, содержащая R, L, C и источник э. д. с. $e(t)$. Ток по ветви обозначим через i.

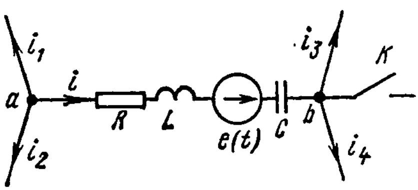


Рис. 8.26

Замыкание ключа K в схеме приводит к переходному процессу. До коммутации ток $i = i(0_-)$ и напряжение на конденсаторе $u_C = u_C(0_-)$.

Выразим потенциал точки a через потенциал точки b для послекоммутационного режима:

$$\varphi_a = \varphi_b + u_C + u_L + u_R - e(t);$$

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_R + u_L + u_C - e(t).$$

Вместо u_L запишем $L\frac{di}{dt}$, вместо u_C запишем $u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$.

Тогда

$$u_{ab} = iR + L\frac{di}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - e(t). \qquad (8.38)$$

К уравнению (8.38) применим преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа является линейным, поэтому изображение суммы равно сумме изображений.

Каждое слагаемое уравнения (8.38) заменим операторным изображением:

вместо iR запишем $RI(p)$; вместо u_{ab} запишем $U_{ab}(p)$;

$$L\frac{di}{dt} \risingdotseq LpI(p) - Li(0);\quad u_C(0) \risingdotseq \frac{u_C(0)}{p};\quad \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \risingdotseq \frac{I(p)}{Cp};\quad e(t) \risingdotseq E(p).$$

Получим

$$U_{ab}(p) = I(p)\left(R + pL + \frac{1}{Cp}\right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p). \qquad (8.39)$$

Смысл проведенного преобразования состоит в том, что вместо дифференциального уравнения (8.38) получили алгебраическое уравнение (8.39), связывающее изображение тока $I(p)$ с изображением э. д. с. $E(p)$ и изображением напряжения $U_{ab}(p)$. Из уравнения (8.39) следует, что

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - \dfrac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \qquad (8.40)$$

где $Z(p) = R + pL + \dfrac{1}{Cp}$ — *операторное сопротивление* участка цепи между точками a и b. Структура его аналогична структуре комплекса сопротивления того же участка цепи переменному току, если $j\omega$ заменить на p (ср. с § 8.13).

Комплексное число $p = a + jb$ (см. § 8.32) запишем в виде $p = j(b - ja) = j\Omega$, где $\Omega = b - ja$ — *комплексная частота;* $Z(p) = Z(j\Omega)$ — сопротивление, оказываемое рассматриваемой цепью воздействию $\dot{U}e^{j\Omega t} = \dot{U}e^{pt}$, подобно тому, как $Z(j\omega)$ есть сопротивление, оказываемое воздействию $\dot{U}e^{j\omega t}$.

Уравнение (8.40) может быть названо законом Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего э. д. с. Оно записано при ненулевых начальных условиях.

Слагаемое $Li(0)$ представляет собой внутреннюю э. д. с., обусловленную запасом энергии в магнитном поле индуктивности L вследствие протекания через нее тока $i(0)$ непосредственно до коммутации.

Слагаемое $u_C(0)/p$ представляет собой внутреннюю э. д. с., обусловленную запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия напряжения на нем $u_C(0)$ непосредственно до коммутации.

В соответствии с формулой (8.40) на рис. 8.27 изображена *операторная схема замещения* участка цепи рис. 8.26. Операторные сопротивления R, pL, $1/(Cp)$. Как следует из формулы (8.40), внутренняя э. д. с. $Li(0)$ направлена *согласно* с направлением тока $I(p)$, внутренняя э. д. с. $U_C(0)/p$ — *встречно* току $I(p)$.

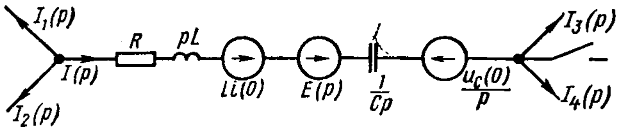


Рис. 8.27

В частном случае, когда на участке ab отсутствует э. д. с. $e(t)$ и к моменту коммутации $i(0)=0$ и $u_C(0)=0$ уравнение (8.40) приобретает более простой вид:

$$I(p)=U_{ab}(p)/Z(p). \tag{8.41}$$

Уравнение (8.41) есть математическая запись закона Ома в операторной форме для участка цепи, не содержащего э. д. с. и при нулевых начальных условиях.

§ 8.42. Первый закон Кирхгофа в операторной форме. По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю. Так, для узла a схемы рис. 8.26

$$i_1+i+i_2=0. \tag{8.42}$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (8.42) и воспользуемся тем, что изображение суммы равно сумме изображений. Имеем

$$I_1(p)+I(p)+I_2(p)=0.$$

В общем случае

$$\sum I(p)=0. \tag{8.43}$$

Уравнение (8.43) выражает собой первый закон Кирхгофа в операторной форме.

§ 8.43. Второй закон Кирхгофа в операторной форме. Для любого замкнутого контура любой электрической цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений. Предварительно необходимо выбрать положительные направления для токов в ветвях и направление обхода контура.

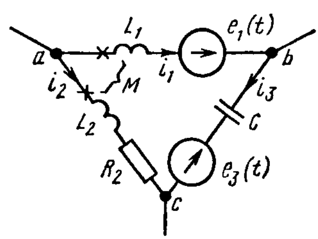


Рис. 8.28

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура рис. 8.28. Контур обходим по часовой стрелке.

Учтем, что индуктивности L_1 и L_2 связаны магнитно. При выбранных положительных направлениях для токов i_1 и i_2 между L_1 и L_2 имеет место согласное включение.

Падение напряжения на L_1 равно $L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$; на L_2 равно $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$. При составлении уравнения учтем, что начальное напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$. Пусть оно действует согласно с током i_3. Начальное значение тока $i_1 = i_1(0)$ и тока $i_2 = i_2(0)$. Имеем

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_3\, dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \tag{8.44}$$

Каждое из слагаемых (8.44) заменим операторным изображением:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 \frac{di_1}{dt} &\risingdotseq L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0); \\
M \frac{di_2}{dt} &\risingdotseq M p I_2(p) - M i_2(0); \\
\frac{1}{C} \int_0^t i_3\, dt &\risingdotseq \frac{I_3(p)}{Cp}; \\
i_2 R_2 &\risingdotseq R_2 I_2(p); \\
L_2 \frac{di_2}{dt} &\risingdotseq L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0); \\
M \frac{di_1}{dt} &\risingdotseq M p I_1(p) - M i_1(0); \\
e_1(t) &\risingdotseq E_1(p);\quad e_3(t) \risingdotseq E_3(p).
\end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

Подставив (8.45) в (8.44), объединим слагаемые с $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, перенесем в правую часть $u_C(0)/p$, $L_1 i_1(0)$ и другие внутренние э. д. с. и получим

$$I_1(p) Z_1(p) + I_2(p) Z_2(p) + I_3(p) Z_3(p) = E_1(p) - E_3(p) + E_{\text{вн}}(p), \tag{8.46}$$

где $Z_1(p) = p(L_1 - M)$; $Z_2(p) = p(M - L_2) - R_2$; $Z_3(p) = \frac{1}{Cp}$; $E_{\text{вн}}(p) = (L_1 - M) i_1(0) + (M - L_2) i_2(0) - \frac{u_C(0)}{p}$.

В более общем виде уравнение (8.46) можно переписать так:

$$\sum I_k(p) Z_k(p) = \sum E_k(p). \tag{8.47}$$

Уравнение (8.47) представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. В состав $E_k(p)$ в общем случае входят и внутренние э. д. с.

§ 8.44. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в разделе синусоидального тока. Из уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений, вытекают соответствующие уравнения для изображений.

Уравнения для изображений по форме аналогичны уравнениям, составленным для той же цепи с помощью символического метода для комплексов токов и напряжений.

Но если каждому уравнению для комплексов отвечает соответствующее уравнение для изображений, то все основанные на законах Кирхгофа приемы и методы составления уравнений (методы эквивалентного генератора, контурных токов, узловых потенциалов, наложения и т. п.) можно применить и при составлении уравнений для изображений.

При составлении уравнений для изображений ненулевые начальные условия учитывают путем введения «внутренних» э. д. с., обусловленных начальными токами через индуктивности и начальными напряжениями на емкостях.

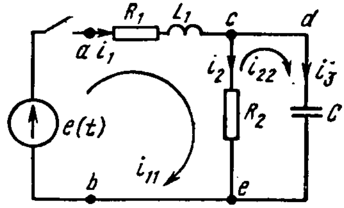


Рис. 8.29

§ 8.45. Последовательность расчета операторным методом. Расчет операторным методом состоит из двух основных этапов: 1) составление изображения искомой функции времени; 2) переход от изображения к функции времени.

На нескольких примерах покажем, как производится первый этап. Второй этап будет рассмотрен в § 8.47.

Пример 88. В схеме рис. 8.29 при нулевых начальных условиях включают ключ. Составить операторные изображения токов i_1 и i_3, пользуясь методом контурных токов.

Решение. Направления контурных токов i_{11} и i_{22} показаны на схеме. Имеем:

$$i_{11}R_1 + L_1\frac{di_{11}}{dt} + R_2(i_{11} - i_{22}) = e(t);$$

$$\frac{1}{C}\int i_{22}\,dt + R_2(i_{22} - i_{11}) = 0.$$

Переходим к изображениям:

$$I_{11}(p)(pL_1 + R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = E(p);$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) = 0.$$

Совместное решение двух уравнений с двумя неизвестными дает:

$$I_{11}(p) = \frac{E(p)(1 + R_2Cp)}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}; \tag{8.48}$$

$$I_{22}(p) = \frac{E(p)R_2Cp}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \tag{8.49}$$

Изображение контурного тока $I_{11}(p)$ равно изображению тока $I_1(p)$; изображение $I_{22}(p)$ — изображению $I_3(p)$. В (8.48) и (8.49) $E(p)$ есть изображение э. д. с. $e(t)$. Если $e(t) = E$, то $E(p) = E/p$; если

$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$, то $E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$ и т. д.

Пример 89. Составить операторные изображения токов i_1 и i_3 схемы рис. 8.29, пользуясь законами Ома и Кирхгофа.

Решение. Так как в схеме нулевые начальные условия и нет магнитносвязанных индуктивных катушек, то составить уравнения можно проще, чем по методу контурных токов.

Изображение тока

$$I_1(p) = E(p)/Z_{вх}(p),$$

где $Z_{вх}(p)$ — входное сопротивление схемы в операторной форме по отношению к зажимам ab. Оно определится так же, как входное сопротивление для переменного тока, только $j\omega$ заменено на p.

Входное операторное сопротивление

$$Z_{вх}(p) = R_1 + pL_1 + \frac{R_2\frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{p^2L_1CR_2 + p(L_1 + R_1R_2C) + R_1 + R_2}{1 + R_2Cp}.$$

Следовательно,

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{вх}(p)} = \frac{E(p)(1 + R_2Cp)}{p^2L_1CR_2 + p(L_1 + R_1R_2C) + R_1 + R_2}; \tag{8.48'}$$

уравнение (8.48') совпадает с уравнением (8.48).

Найдем изображение $I_3(p)$. С этой целью выразим $I_3(p)$ через $I_1(p)$ и операторные сопротивления второй и третьей ветвей. Воспользуемся аналогией с переменным током. Для переменного тока

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}},$$

следовательно, $I_3(p) = I_1(p)\dfrac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cp}}$.

Если в последнее выражение подставить $I_1(p)$ из уравнения (8.48'), то будет получено уравнение (8.49).

Таким образом, безразлично, каким способом составлять изображения токов: результат будет одинаков.

Пример 90. Для схемы рис. 8.29 составить изображение напряжения на зажимах ce, если считать, что начальные условия нулевые (как и в примере 89).

Решение. Изображение напряжения на зажимах ce равно произведению изображения тока $I_3(p)$ на операторное сопротивление емкости:

$$U_{ce}(p) = I_3(p)\frac{1}{Cp} = \frac{E(p)R_2}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \tag{8.50}$$

§ 8.46. Изображение функции времени в виде отношения $N(p)/M(p)$ двух полиномов по степеням p. Для тока $I_{11}(p)$ в примере 89, если принять $E(p) = E/p$,

$$N(p) = E(1 + R_2Cp);$$

$$M(p) = [p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2]\,p.$$

Если в том же примере принять $e(t)=E_m \sin(\omega t+\psi)$, то

$$E(p)=\dot{E}_m \frac{1}{p-j\omega} \quad \text{и} \quad N(p)=\dot{E}_m(1+R_2Cp);$$

$$M(p)=(p-j\omega)[p^2R_2L_1C+p(R_1R_2C+L_1)+R_1+R_2].$$

Обозначим высшую степень оператора p в полиноме $N(p)$ через n, а высшую степень p в полиноме $M(p)$ — через m.

Часть корней уравнения $M(p)=0$ обусловлена характером изменения во времени возмущающей силы, воздействующей на систему; остальные корни обусловлены свойствами самой цепи, ее конфигурацией и значениями параметров.

Во всех физически осуществимых электрических цепях при воздействии любых встречающихся э. д. с. всегда $n<m$. Лишь для физически неосуществимых электрических цепей n может оказаться равным m.

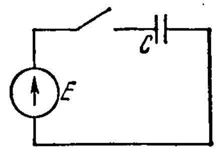


Рис. 8.30

Пример физически неосуществимой электрической цепи, для которой степень n равна степени m, дан на рис. 8.30. Если считать, что активное сопротивление цепи равно нулю, что физически неосуществимо, то

$$I(p)=\frac{E/p}{1/(Cp)}=\frac{ECp}{p}.$$

§ 8.47. Переход от изображения к функции времени. В § 8.45 указывалось, что вторым этапом расчета переходных процессов с помощью операторного метода является переход от изображения к функции времени. Эту операцию можно осуществлять различными путями.

Первый путь состоит в применении формул соответствия между функциями оператора p и функциями времени. Часть формул соответствия приведена в § 8.39. В научной литературе имеются специальные исследования, содержащие большое количество формул соответствия (1518), охватывающих все возможные практические задачи. Формулами соответствия рекомендуется пользоваться в том случае, если среди корней уравнения $M(p)=0$ есть несколько одинаковых (кратные корни).

Второй путь состоит в применении так называемой формулы разложения. Формула разложения в § 8.49 выведена исходя из предположения, что уравнение $M(p)=0$ не имеет кратных корней (при наличии кратных корней формула разложения записывается иначе — см. § 8.50).

Третий путь — непосредственное применение формулы обратного преобразования Лапласа с использованием теории вычетов (см. § 8.50).

Формулой разложения широко пользуются на практике, и ее принято рассматривать как основную формулу для перехода от изображения к функции времени.

Рассмотрим два примера на применение формул соответствия, а затем — после рассмотрения вопроса о разложении сложной дроби на простые — перейдем к выводу формулы разложения.

Пример 91. В схеме рис. 8.31, *а* ток источника тока линейно нарастает во времени: $i_k(t)=2{,}5t$ *А* (рис. 8.31, *б*); $R=40$ кОм, $C=$

$=2$ мкФ. Определить закон изменения во времени тока i_1 через сопротивление R.

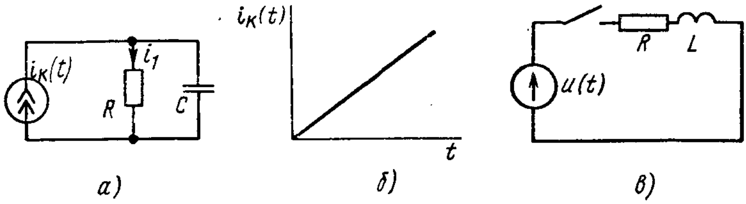


Рис. 8.31

Решение. Изображение тока $i_k(t)$ равно $2{,}5/p^2$ (см. соотношение 12 § 8.39). Сопротивление параллельно соединенных R и C

$$Z(p)=\frac{R}{RCp+1}.$$

Изображение тока через R

$$I_1(p)=\frac{I_k(p)\,Z(p)}{R}=\frac{2{,}5}{RC}\cdot\frac{1}{p^2(p+a)},$$

где $a=1/(RC)=12{,}5$ с$^{-1}$.

Согласно соотношению 8 § 8.39,

$$\frac{1}{p^2(p+a)}\risingdotseq\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}(1-e^{-at});$$

$$i_1(t)=2{,}5\,[t-0{,}08\,(1-e^{-12{,}5t})]\ \text{А}.$$

Пример 92. В схеме рис. 8.31, *в* $u(t)=100e^{-at}$ В, где $a=0{,}5$ с$^{-1}$; $R=2$ Ом; $L=4$ Г.

Найти $i=f(t)$ и $u_L=f(t)$, а также значения i и u_L при $t=1$ с.

Решение. Согласно соотношению 2 § 8.39, функции e^{-at} соответствует изображение $1/(p+a)$. Следовательно,

$$U(p)=\frac{100}{p+a};\quad Z(p)=R+pL;$$

$$I(p)=\frac{U(p)}{Z(p)}=\frac{100}{(p+a)(pL+R)}=\frac{100}{L}\cdot\frac{1}{(p+a)(p+b)};$$

$$\frac{100}{L}=25\ \text{А/с};\quad b=\frac{R}{L}=0{,}5=a,\quad I(p)=\frac{100}{L}\cdot\frac{1}{(p+a)^2}.$$

По соотношению 5 § 8.39, $\frac{1}{(p+a)^2}\risingdotseq te^{-at}$.

Поэтому $i(t)=25te^{-at}$.

Напряжение на индуктивности

$$u_L=L\frac{di}{dt}=100e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t).$$

При $t=1$с $i=25\cdot1\cdot e^{-0{,}5}=15{,}15$ А; $u_L=100e^{-0{,}5}(1-0{,}5)=$ $=30{,}3$ В.

§ 8.48. Разложение сложной дроби на простые. Из курса математики известно, что дробь

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} \tag{8.51}$$

при условии, что $n<m$ и полином $M(x)=0$ не имеет кратных корней, может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$\frac{N(x)}{M(x)}=A_1\frac{1}{x-x_1}+A_2\frac{1}{x-x_2}+\ldots+A_m\frac{1}{x-x_m}, \tag{8.52}$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{1}{x-x_k},$$

где x_k — корни уравнения $M(x)=0$.

Для определения коэффициента A_1 умножим обе части уравнения (8.52) на $(x-x_1)$. Получим

$$\frac{N(x)}{M(x)}(x-x_1)=A_1+(x-x_1)\sum_{k=2}^{k=m}A_k\frac{1}{x-x_k}. \tag{8.53}$$

Рассмотрим выражение (8.53) при $x\to x_1$. Правая часть уравнения дает A_1, левая представляет собой неопределенность, так как множитель $(x-x_1)$ при $x\to x_1$ дает нуль и знаменатель $M(x)$ при $x=x_1$ тоже дает нуль [x_1 есть корень уравнения $M(x)=0$].

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. С этой целью производную от числителя разделим на производную от знаменателя и найдем предел дроби:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{(x-x_1)N(x)}{M(x)}=\lim_{x\to x_1}\frac{N(x)+(x-x_1)N'(x)}{M'(x)}=\frac{N(x_1)}{M'(x_1)},$$

где $M'(x)$ — производная от $M(x)$ по x; $M'(x_1)$ — значение $M'(x)$ при $x=x_1$; $N(x_1)$ — значение $N(x)$ при $x=x_1$.

Следовательно, из (8.53) при $x\to x_1$ получаем уравнение

$$N(x_1)/M'(x_1)=A_1, \tag{8.54}$$

или

$$A_1=N(x_1)/M'(x_1). \tag{8.55}$$

Аналогично,

$$A_k=N(x_k)/M'(x_k). \tag{8.56}$$

Таким образом,

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\frac{N(x_1)}{M'(x_1)}\cdot\frac{1}{x-x_1}+\frac{N(x_2)}{M'(x_2)}\cdot\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{N(x_m)}{M'(x_m)}\cdot\frac{1}{x-x_m}, \tag{8.57}$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{N(x_k)}{M'(x_k)}\cdot\frac{1}{x-x_k}. \tag{8.58}$$

Пример 93. Найти коэффициенты разложения дроби $1/(x^2-5x+6)$.

Решение. Корни уравнения $M(x)=0$: $x_1=2$, $x_2=3$; $M'(x)=2x-5$; $M'(x_1)=2\cdot 2-5=-1$; $M'(x_2)=1$; $N(x_1)=N(x_2)=1$.

По формуле (8.56),

$$A_1=N(x_1)/M'(x_1)=1/-1=-1;$$

$$A_2=N(x_2)/M'(x_2)=1/1=1.$$

§ 8.49. Формула разложения. Переход от изображения $N(p)/M(p)$ к функции времени часто производят с помощью формулы

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteq \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{8.59}$$

которую принято называть *формулой разложения.*

Левая часть формулы является функцией p, правая часть — соответствующая ей функция времени t.

Вывод формулы можно осуществить следующим образом. Пусть изображение какой-либо функции времени, например тока, представлено в виде дроби:

$$I(p)=N(p)/M(p).$$

Для получения тока как функции времени $i(t)$ представим сначала $N(p)/M(p)$ в виде суммы простых дробей — разложим $N(p)/M(p)$. С этой целью в формуле (8.58) заменим x на p:

$$I(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}. \tag{8.60}$$

Перейдем от изображения к оригиналу. Оригиналом левой части является $i(t)$. Оригинал правой части равен сумме оригиналов ее слагаемых.

Учтем, что множители $N(p_k)/M'(p_k)$ у слагаемых суммы правой части (8.60) есть постоянные числа (не функции p!). Кроме того, функциями p в правой части являются только множители $1/(p-p_k)$; им соответствуют функции времени вида $e^{p_k t}$ [см. формулу (8.28)]. Поэтому

$$i(t)=\sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{8.61}$$

Переход от изображения (функции p) к оригиналу (функции t) с помощью формулы разложения (8.61) основан на том, что изображение представлено в виде суммы простых дробей $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}$, а оригиналами их являются показательные функции $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$.

Число слагаемых $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ равно числу корней уравнения $M(p)=0$. Коэффициенты $N(p_k)/M'(p_k)$ можно сопоставить с постоянными интегрирования дифференциального уравнения (уравнений) цепи в классическом методе расчета.

Если среди корней уравнения $M(p)=0$ есть нулевой корень ($p=0$), то ему в правой части уравнения (8.61) соответствует слагаемое

$$\frac{N(0)}{M'(0)}e^{0t}=\frac{N(0)}{M'(0)}.$$

Слагаемое $N(0)/M'(0)$ представляет собой составляющую искомого тока (напряжения), обусловленную постоянными вынуждающими силами. Если постоянных вынуждающих сил в схеме нет, то $N(0)/M'(0)=$ $=0$.

Важно сделать некоторые замечания к формуле (8.61).

1. Формула разложения применима при любых начальных условиях и при любых практически встречающихся формах напряжения источника э.д.с. или тока, воздействующего на схему.

2. Если начальные условия не нулевые, то в состав $N(p)$ войдут внутренние э.д.с.

3. Если уравнение $M(p)=0$ имеет комплексно-сопряженные корни, то слагаемые, соответствующие им в формуле (8.61), оказываются также комплексно-сопряженными и в сумме дают действительное слагаемое.

4. Если воздействующая на схему э.д.с. синусоидальна: $E_m\sin(\omega t+$ $+\psi)$ и изображение э.д.с. взято в виде $\dot{E}_m\frac{1}{p-j\omega}$, где комплексная амплитуда $\dot{E}_m=E_me^{j\psi}$, то при использовании формулы разложения из правой части ее для перехода от комплекса к мгновенному значению следует взять коэффициент при j (взять мнимую часть)*.

В соответствии с этим внутренние э.д.с., которые появляются в правой части формулы разложения при ненулевых начальных условиях в цепях с синусоидальной э.д.с., должны быть умножены на коэффициент j.

Умножать внутренние э.д.с. на j необходимо потому, что только в этом случае наличие внутренних э.д.с. будет учтено при взятии мнимой части от правой части формулы разложения. В цепях с постоянной э.д.с. внутренние э.д.с. умножать на j не нужно.

5. Если воздействующее на схему напряжение синусоидально, то принужденная составляющая решения входит в число слагаемых $\sum\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_kt}$ и определяется корнем $p=j\omega$. Вычисление принужденной составляющей в виде члена этой суммы, соответствующего корню $p=j\omega$ для сложных схем, в большинстве случаев более громоздко, чем непосредственное вычисление ее с помощью символического метода. Поэтому для сложных схем переменного тока принужденную составляющую рекомендуется вычислять символическим методом.

С помощью формулы, подобной формуле (8.61), можно определять не только токи и напряжения, но и многие другие функции времени

---

* Мнимая, а не действительная часть из формулы разложения берется потому, что заданная э.д.с. $E_m\sin(\omega t+\psi)$ есть мнимая часть комплекса $\dot{E}_me^{j\omega t}$ (см. ч. I).

(заряд конденсатора, скорость перемещения какого-либо тела механической системы и т. п.).

Пример 94. Определить ток $i_1(t)$ в схеме рис. 8.18 с помощью формулы разложения и сравнить с результатом решения классическим методом (см. пример 81), если $E=150$ В; $R=R_1'=R_3=50$ Ом; $C=100$ мкФ; $u_C(0)=50$ В.

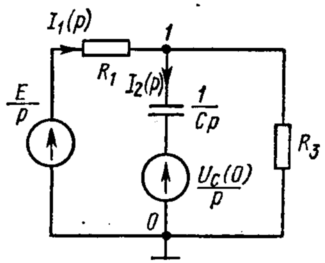


Рис. 8.32

Решение. Составим послекоммутационную операторную схему (рис. 8.32), имея в виду, что начальные условия ненулевые. Внутренняя э.д.с. $u_C(0)/p$ позволяет учесть, что до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_C(0)$ током i_2, поэтому она направлена встречно току $I_2(p)$. Узел 0 схемы заземлим. Потенциал узла *1* обозначим $\varphi_1(p)$ и определим его по методу узловых потенциалов:

$$\varphi_1(p)=\frac{\frac{E}{p}\cdot\frac{1}{R_1}+\frac{u_C(0)}{p}Cp}{(1/R_1)+Cp+(1/R_3)}.$$

По закону Ома для участка цепи с э.д.с.,

$$I_1(p)=\frac{0-\varphi_1(p)+(E/p)}{R_1}.$$

После преобразований

$$I_1(p)=\frac{[E-u_C(0)]R_3Cp+E}{p(R_1R_3Cp+R_1+R_3)}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Уравнение $M(p)=0$ имеет корни

$$p_1=0 \text{ и } p_2=-\frac{R_1+R_3}{R_1R_3C}=-400 \text{ с}^{-1},$$

поэтому

$$N(p_1)=E=150;$$

$$N(p_2)=(150-50)\cdot 50\cdot 100\cdot(-400)\cdot 10^{-6}+150=-50;$$

$$M'(p)=2R_1R_3Cp+R_1+R_3;$$

$$M'(p_1)=R_1+R_3=100;$$

$$M'(p_2)=2\cdot 50\cdot 50\cdot 100\cdot 10^{-6}(-400)+100=-100.$$

Ток в схеме рис. 8.18

$$i_1(t)=\frac{150}{100}+\frac{(-50)\,e^{-400t}}{(-100)}=1{,}5+0{,}5e^{-400t} \text{ А},$$

что совпадает с результатом примера 81.

Пример 95. Найти $i(t)$ в схеме рис. 8.20 путем применения формулы разложения и сравнить результат с результатом решения той же задачи классическим методом (см. пример 82).

Решение. Изображение синусоидальной э.д.с. $127 \sin(314t - 50°)$

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}, \text{ где } \dot{E}_m = 127e^{-j50°} \text{ В}.$$

В схеме ненулевые начальные условия:

$$I(p)(R_2 + pL) = E(p) + Li(0); \quad i(0_-) = -25{,}35 \text{ А}.$$

Так как действующая в схеме э.д.с. синусоидальна и изображение ее взято в виде $\dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$ ($\dot{E}_m$ — комплексная амплитуда), то в дальнейшем в связи с этим от правой части формулы разложения следует взять коэффициент при мнимой части (см. п. 4. § 8.49), поэтому умножим внутреннюю э.д.с. $Li(0)$ на j.

После небольших преобразований находим

$$I(p) = \frac{\dot{E}_m + jLi(0)(p - j\omega)}{(p - j\omega)(R_2 + pL)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Следовательно,

$$N(p) = \dot{E}_m + jLi(0)(p - j\omega); \quad M(p) = (p - j\omega)(R_2 + pL).$$

Уравнение $M(p) = 0$ имеет корни $p_1 = j\omega$ с$^{-1}$ и $p_2 = -R_2/L = -210$ с$^{-1}$, поэтому

$$M'(p) = R_2 + pL + L(p - j\omega);$$

$$M'(p_1) = 2 + 3j = 3{,}61e^{j56°20'};$$

$$M'(p_2) = -3{,}61e^{j56°20'} = 3{,}61e^{-j123°40'};$$

$$N(p_1) = 127e^{-j50°};$$

$$N(p_2) = 127e^{-j50°} + j(-210 - j314)\frac{3}{314}(-25{,}35) = 5{,}4 - j46{,}4 =$$
$$= 47{,}1e^{-j83°24'}.$$

Ток

$$i(t) = Im\left[\frac{127e^{j(\omega t - 50°)}}{3{,}61e^{j56°20'}} + \frac{47{,}1e^{-j83°24'}}{3{,}61e^{-j123°40'}} e^{-210t}\right] =$$
$$= 35{,}2 \sin(\omega t - 106°20') + 13{,}1 \sin 40°16' e^{-210t} \text{ А};$$

$$13{,}1 \sin 40°16' = 8{,}45.$$

Результат совпадает с результатом примера 82.

§ 8.50. Дополнения к операторному методу. 1. Для перехода от изображения $F(p)$ к функции времени $f(t)$ может быть использовано *обратное преобразование Лапласа*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu - j\infty}^{\nu + j\infty} F(p) e^{pt} \, dp. \tag{a}$$

Функция $F(p)$ аналитична в области $\operatorname{Re} p > \nu$ и стремится к нулю при $|p| \to \infty$. При практическом использовании этой формулы интеграл по бесконечной прямой, параллельной оси ординат, заменяют контурным интегралом, охватывающим все полюса функции $F(p)$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)\,e^{pt}\,dp. \tag{б}$$

Полюсами называют значения p, при которых $F(p)$ обращается в бесконечность. В случае, когда $F(p)=N(p)/M(p)$, полюсами являются корни уравнения $M(p)=0$. В теории функций комплексного переменного доказывается, что правая часть формулы (б) равна сумме вычетов (Res), подынтегральной функции во всех ее полюсах, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)\,e^{pt}\,dp=\sum \operatorname{Res} F(p)\,e^{pt}.$$

Вычетом функции в некотором полюсе называют величину, на которую уменьшается разделенный на $2\pi j$ контурный интеграл от этой функции, когда контур при его стягивании пересечет этот полюс. Но вычет функции $\frac{N(p)}{M(p)}e^{pt}$ в простом полюсе p_k равен $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}$. Поэтому

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Таким образом, используя обратное преобразование Лапласа, вывели формулу разложения (8.61).

2. Запишем формулу разложения при наличии кратных корней. Положим, что уравнение $M(p)=0$ имеет q простых корней (p_1, p_2, ..., p_q), корень p_r кратности r и корень p_s кратности s.

В этом случае формулу разложения запишем следующим образом:

$$\frac{N(p)}{M(p)}\doteq\sum_{k=1}^{q}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}+\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\times$$

$$\times\left[\frac{N(p)(p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_r}+\frac{1}{(s-1)!}\cdot\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[\frac{N(p)(p-p_s)^s e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_s}.$$

Пример 96. Найти оригинал $\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{1}{p^2(p+a)}$. Корню $p=-a$ соответствует оригинал $\frac{N(p)}{M'(p)_{p=-a}}e^{pt}=\frac{1}{a^2}e^{-at}$. Корню $p=0$ второй кратности соответствует оригинал

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2e^{pt}}{p^2(p+a)}\right]_{p=0}=\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p+a}\right)_{p=0}=\left(\frac{te^{pt}(p+a)-e^{pt}}{(p+a)^2}\right)_{p=0}=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p^2(p+a)}\doteq\frac{e^{-at}}{a^2}+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}.$$

§ 8.51. Переходная проводимость. В § 1.15 говорилось о том, что ток i в любой ветви схемы может быть представлен в виде произведения напряжения U на входе схемы на собственную или взаимную проводимость g:

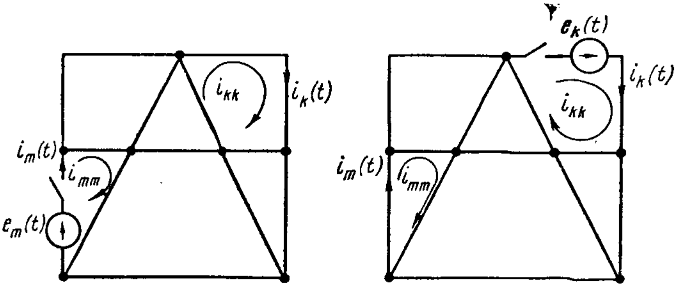
$$i=Ug.$$

При переходных процессах это соотношение также имеет силу. Если на вход какой-либо цепи в момент $t=0$ включается постоянное напряжение U (э.д.с. E), то ток $i(t)$ в любой ветви этой схемы равен произведению постоянного напряжения U на проводимость $g(t)$:

$$i(t)=Ug(t). \tag{8.62}$$

При переходном процессе проводимость является функцией времени, поэтому в скобках указывается время t; $g(t)$ называют переходной проводимостью. Она измеряется в тех же единицах (См), что и обычная проводимость.

Если в формуле (8.62) принять $U=1$ В, то при этом $i(t)=g(t)$, т. е. переходная проводимость какой-либо ветви схемы численно равна току $i(t)$ в этой ветви при подключении цепи к постоянному напряжению в 1 В.



а) б)

Рис. 8.33

Индексы у $g(t)$ указывают, о какой именно переходной проводимости идет речь. Если индексы одинаковы, то имеется в виду собственная переходная проводимость ветви, номер которой соответствует цифре, указанной в индексе; если индексы разные, то — проводимость между теми ветвями, номера которых указаны в индексе.

Так, например, если источник постоянного напряжения U при нулевых начальных условиях включается в первую ветвь, то ток первой ветви $i_1(t)=Ug_{11}(t)$, а ток третьей ветви $i_3(t)=Ug_{31}(t)$.

Переходную проводимость можно определить либо расчетным, либо опытным путем. При расчетном определении $g_{kk}(t)$ классическим или операторным методом ток k-ветви находят при включении источника постоянного напряжения в k-ветвь. При определении $g_{km}(t)$ ток k-ветви определяют при включении постоянного напряжения U в m-ветвь. Далее, в полученных формулах полагают $U=1$ В. При опытном определении переходной проводимости ток $i(t)$ соответствующей ветви находят путем осциллографирования.

В § 1.16 было доказано, что $g_{km}=g_{mk}$. Это свойство вытекает из симметрии определителя системы относительно главной диагонали.

Аналогично можно доказать, что операторное изображение проводимости $g_{km}(p)$ равно операторному изображению $g_{mk}(p)$. Но если равны изображения двух переходных проводимостей, то равны и сами переходные проводимости, т. е. $g_{km}(t)=g_{mk}(t)$.

Данное равенство свидетельствует о том, что на переходные процессы распространяется *теорема взаимности*. Для переходных процессов теорема взаимности формулируется следующим образом (см. «скелетные» схемы рис. 8.33): в любой линейной электрической цепи ток переходного процесса k-ветви $i_k(t)$, вызываемый включением э.д.с. $e_m(t)$ в m-ветвь (рис. 8.33, *а*), равен току переходного процесса $i_m(t)$ в m-ветви, вызываемому включением э.д.с. $e_k(t)$ в k-ветвь (рис. 8.33, *б*), при условии, что $e_k(t) = e_m(t)$.

§ 8.52. Понятие о переходной функции по напряжению. При подключении линейной электрической цепи с нулевыми начальными условиями к постоянному напряжению U между какими-то двумя точками a и b схемы возникает напряжение $u_{ab}(t)$, являющееся функцией времени и пропорциональное воздействующему напряжению U:

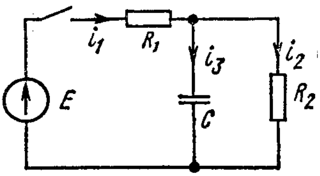


Рис. 8.34

$$u_{ab}(t) = Uh(t), \tag{8.62'}$$

где $h(t)$ — *переходная функция по напряжению*. Это безразмерная величина, численно равная напряжению между точками a и b схемы, если на ее вход подать постоянное напряжение в 1 В; $h(t)$, так же как и $g(t)$, можно определить либо расчетным, либо опытным путем.

Пример 97. Определить переходную проводимость схемы рис. 8.2.

Решение. При замыкании ключа

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

По определению, переходная проводимость равна току в цепи при $E = 1$ В. Следовательно,

$$g(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Пример 98. Найти собственную переходную проводимость первой ветви $g_{11}(t)$, взаимную переходную проводимость между третьей и первой ветвями $g_{31}(t)$ и переходную функцию напряжения на конденсаторе $h_{u_C}(t)$ для схемы рис. 8.34. Параметры схемы: $R_1 = 1000$ Ом; $R_2 = 2000$ Ом; $C = 50$ мкФ.

Решение. По определению,

$$i_1 = Eg_{11}(t); \quad i_3 = Eg_{31}(t); \quad u_C = Eh_{u_C}(t).$$

С помощью классического метода определим:

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} + E\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}e^{pt}; \quad i_3 = \frac{E}{R_1}e^{pt};$$

$$u_C = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{pt}); \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}.$$

Полагая в этих формулах $E = 1$ В, находим:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}; \quad g_{31}(t) = \frac{1}{R_1}e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t};$$

$$h_{u_C}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}\right).$$

Подстановка числовых значений дает:

$$g_{11}(t)=0{,}00033+0{,}00067e^{-30t}\ \text{См};$$

$$g_{31}(t)=0{,}001e^{-30t}\ \text{См};\quad h_{u_C}(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-30t}).$$

Пример 99. Определить взаимную переходную проводимость между первой и третьей ветвями схемы рис. 8.4, *а* при включении источника э.д.с. в первую ветвь и следующих значениях параметров:

$$R_1=R_2=100\ \text{Ом};\quad L_1=1\ \text{Г};\quad C=100\ \text{мкФ}.$$

Решение. Изображение тока третьей ветви

$$I_3(p)=\frac{ER_2C}{p^2R_2L_1C+p(R_1R_2C+L_1)+R_1+R_2}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения $M(p)=0$ (см. пример 76):

$$p_1=-100+j100\ \text{с}^{-1};\quad p_2=-100-j100\ \text{с}^{-1}.$$

Полагаем $E=1$ В и в соответствии с формулой разложения находим

$$\underset{\text{при } E=1\text{ В}}{i_3(t)}=\frac{R_2C}{2p_1R_2L_1C+(R_1R_2C+L_1)}e^{p_1t}+\frac{R_2C}{2p_2R_2L_1C+(R_1R_2C+L_1)}e^{p_2t}.$$

После подстановки значений параметров, корней p_1 и p_2 и использования формулы $(e^{jx}-e^{-jx})/(2j)=\sin x$ получим

$$g_{31}(t)=\underset{\text{при } E=1\text{ В}}{i_3(t)}=0{,}01e^{-100t}\sin 100t\ \text{См}.$$

Таким образом, взаимная переходная проводимость между третьей и первой ветвями схемы рис. 8.4, *а* при данных значениях параметров как функция времени представляет собой затухающую синусоиду.

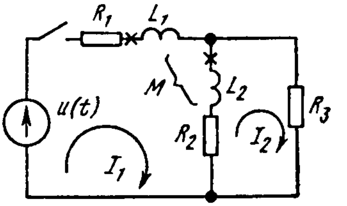


Рис. 8.35

Пример 100. В схеме рис. 8.35 $u(t)=170\sin(314t+30^\circ)$ В; $R_1=10$ Ом; $R_2=5$ Ом; $R_3=15$ Ом; $L_1=30$ мГ; $L_2=50$ мГ; $M=25$ мГ. Найти $i_1(t)$ с помощью формулы разложения.

Решение. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$I(p)[R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M)]-I_2(p)[R_2+p(L_2+M)]=U(p);$$

$$-I_1(p)[R_2+p(L_2+M)]+I_2(p)(R_2+R_3+pL_2)=0.$$

Совместное их решение дает

$$I_1(p)=\frac{\dot U_m}{(p-j\omega)Z_1(p)}=\frac{\dot U_m(20+0{,}05p)}{(p-j\omega)(0{,}000875p^2+2{,}6p+275)}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения $M(p)=0$:

$$p_1=314j,\quad p_2=-2860\quad\text{и}\quad p_3=-114\ \text{с}^{-1};$$

$$M'(p)=0{,}000875p^2+2{,}6p+275+(p-j\omega)(0{,}00175p+2{,}6);$$

$$N(p_1)=170e^{j30^\circ}(20+0{,}05\cdot314j)=4301e^{j68^\circ20'};$$

$$N(p_2)=170e^{j30^\circ}(20-0{,}05\cdot2860)=123\cdot170e^{j210^\circ};$$

$$N(p_3)=170e^{j30^\circ}(20-0{,}05\cdot114)=14{,}29\cdot170e^{j30^\circ};$$

$$M'(p_1)=-0{,}000875\cdot314^2+2{,}6\cdot314j+275=188{,}7+j817=838e^{j77^\circ};$$

$$M'(p_2)=6890+j756=6930e^{j6^\circ16'};$$

$$M'(p_3)=-284-754j=806e^{-j110^\circ40'}.$$

Ток

$$i(t)=\operatorname{Im}\left\{\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{N(p_3)}{M'(p_3)}e^{p_3t}\right\}=$$

$$=\operatorname{Im}\{5{,}13e^{j(\omega t-8^\circ40')}+3{,}03e^{j203^\circ44'}e^{-2860t}+3{,}01e^{j140^\circ}e^{-114t}\}=$$

$$=5{,}13\sin(\omega t-8^\circ40')-1{,}16e^{-2860t}+1{,}97e^{-114t}\ \text{А}.$$

§ 8.53. **Интеграл Дюамеля.** Познакомимся с третьим методом расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — расчетом с помощью интеграла Дюамеля.

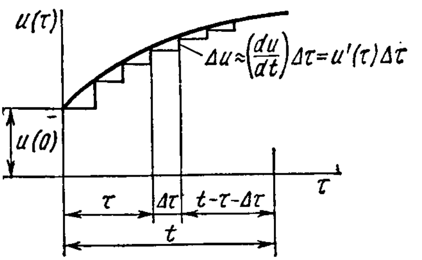


Рис. 8.36

При использовании интеграла Дюамеля условимся переменную, по которой производится интегрирование, обозначить τ, а под t по-прежнему понимать тот момент времени, в который требуется найти ток в цепи. Пусть к цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени $t=0$ подключается напряжение $u(\tau)$ (рис. 8.36).

Для того чтобы найти ток в цепи в момент времени t, заменим плавную кривую ступенчатой и просуммируем токи от начального напряжения $u(0)$ и от всех ступенек напряжения, вступающих в действие с запозданием во времени.

Напряжение $u(0)$ в момент времени t вызовет в цепи ток $u(0)g(t)$, где $g(t)$ — переходная проводимость.

В момент времени $\tau+\Delta\tau$ (рис. 8.36) возникает скачок напряжения $\Delta u\approx\frac{du}{d\tau}\Delta\tau=u'(\tau)\Delta\tau$.

Для того чтобы найти составляющую тока в момент времени t, вызываемую этим скачком напряжения Δu, необходимо $u'(\tau)\Delta\tau$ умножить на значение переходной проводимости с учетом времени действия скачка до момента времени t.

Из рис. 8.36 видно, что это время равно $t-\tau-\Delta\tau$. Следовательно, приращение тока от этого скачка равно $u'(\tau)g(t-\tau-\Delta\tau)\Delta\tau$.

Полный ток в момент времени t получим, если просуммируем все частичные токи от отдельных скачков и прибавим их к току $u(0)g(t)$:

$$i(t)=u(0)g(t)+\sum u'(\tau)g(t-\tau-\Delta\tau)\Delta\tau.$$

Число членов суммы равно числу ступенек напряжения. Очевидно, что ступенчатая кривая тем лучше заменяет плавную кривую, чем больше число ступенек. С этой целью заменим конечный интервал времени $\Delta\tau$ на бесконечно малый $d\tau$ и перейдем от суммы к интегралу:

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{8.63}$$

Формулу (8.63) называют *интегралом Дюамеля.*

Приведем еще пять форм записи интеграла Дюамеля.

1. Интеграл в (8.63) возьмем по частям:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du; \quad u'(\tau)\,d\tau=dv; \quad g(t-\tau)=u;$$

$$\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=g(t-\tau)u(\tau)\Big|_0^t+\int_0^t u(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=g(0)u(t)-g(t)u(0)+\int_0^t u(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau.$$

Подставив результат в (8.63), получим

$$i(t)=u(t)g(0)+\int_0^t u(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau. \tag{8.63а}$$

2. Для любых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ путем замены переменных можно доказать справедливость следующего соотношения:

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{а}$$

Распространив это соотношение на (8.63) и (8.63а), получим еще две формы записи интеграла Дюамеля:

$$i(t)=u(t)g(0)+\int_0^t u(t-\tau)g'(\tau)\,d\tau; \tag{8.63б}$$

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \tag{8.63в}$$

3. Имея в виду формулу дифференцирования определенного интеграла $Q(\alpha)=\int_{z_1}^{z_2} f(x,\alpha)\,dx$ по параметру α

$$\frac{dQ}{d\alpha}=\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx+f(z_2,\alpha)\frac{dz_2}{d\alpha}-f(z_1,\alpha)\frac{dz_1}{d\alpha} \tag{б}$$

и учитывая соотношение (а), запишем еще две формы записи:

$$i(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau; \qquad (8.63\text{г})$$

$$i(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t u(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau. \qquad (8.63\text{д})$$

Два последних соотношения имеют непосредственное отношение к теореме свертки операторного метода: если $F_1(p) \doteqdot f_1(t)$ и $F_2(p) \doteqdot f_2(t)$, то

$$F_1(p)\,F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau;$$

$$pF_1(p)\,F_2(p) \doteqdot \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

С помощью интеграла Дюамеля можно найти не только ток, но и любую другую физическую величину, например напряжение. В этом случае в формулу вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция $h(t)$.

§ 8.54. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля. Расчет с помощью интеграла Дюамеля проводят в четыре этапа:

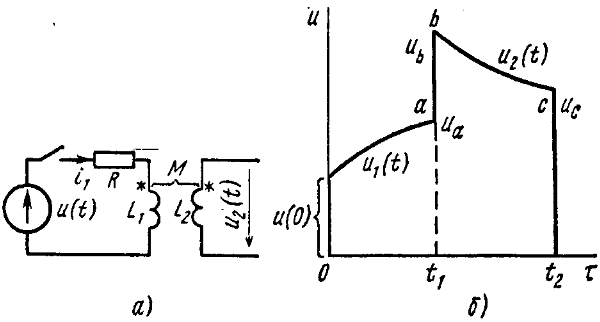


Рис. 8.37

1) определение переходной проводимости $g(t)$ (переходной функции $h(t)$) для исследуемой цепи;

2) определение $g(t-\tau)$ $[h(t-\tau)]$. С этой целью в формуле для $g(t)$ $[h(t)]$ заменяют t на $(t-\tau)$;

3) определение $u'(\tau)$. Для этого находят производную от заданного напряжения $u(t)$ по времени t и в полученном выражении заменяют t на τ;

4) подстановка найденных на этапах 1, 2, 3 функций в формулу (8.63), интегрирование по переменной τ и подстановка пределов.

Пример 101. Найти $i_1=f(t)$ и $u_2=f(t)$ при включении ключа в схеме рис. 8.37, *а*. Напряжение источника э. д. с. $u(t)=100(1-e^{-at})$ В; $a=0{,}25$ с$^{-1}$; $R=0{,}5$ Ом; $L_1=1$ Г; $M=0{,}5$ Г.

Решение. Переходная проводимость цепи, состоящей из последовательно включенных R и L, $g(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-bt})$, где $b=R/L_1$; $g(t-\tau)=\frac{1}{R}[1-e^{-b(t-\tau)}]$.

Первое слагаемое в формуле (8.63) выпадает, так как $u(0)=0$. При этом

$$u'(t)=\frac{d}{dt}100(1-e^{-at})=100ae^{-at};\quad u'(\tau)=100ae^{-a\tau}.$$

$$i_1(t)=\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=\frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1-e^{-b(t-\tau)}]\,d\tau.$$

При интегрировании учитываем, что e^{-bt} от τ не зависит:

$$i_1(t)=200(1+e^{-0,5t}-2e^{-0,25t})\text{ А}.$$

Напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$u_2(t)=M\frac{di_1}{dt}=50(e^{-0,25t}-e^{-0,5t})\text{ В}.$$

§ 8.55. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения. Пусть напряжение $u(\tau)$ изменяется во времени по сложному закону, например в соответствии с рис. 8.37, *б*. Начальное напряжение равно $u(0)$. В интервале от $\tau=0$ до $\tau=t_1$ напряжение плавно растет, и закон его изменения в этом интервале времени $u_1(t)$. В момент $\tau=t_1$ оно меняется скачком от u_a до u_b, а затем снова плавно растет, но уже по другому закону $u_2(\tau)$ во времени по сравнению с первым интервалом. При $\tau=t_2$ напряжение скачком уменьшается от значения u_c до нуля.

Требуется найти ток в каждом из трех интервалов времени. Под первым интервалом будем понимать интервал времени от $\tau=0$ до $\tau=t_1$ (не включая скачка напряжения от u_a до u_b); под вторым — от t_1 до t_2, включая скачок от u_a до u_b, но не включая скачок от u_c до 0, под третьим — при $\tau>t_2$, включая скачок от u_c до 0.

Интегрирование по-прежнему проводим по τ, понимая под t фиксированный момент времени, в который требуется найти ток. Ток в любой момент времени t определится действием всех напряжений, воздействующих на цепь до момента t.

В первый интервал времени

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u_1'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Во второй интервал времени

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^{t_1} u_1'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau+$$
$$+(u_b-u_a)g(t-t_1)+\int_{t_1}^t u_2'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,$$

где слагаемое $(u_b - u_a) g(t - t_1)$ обусловлено скачком напряжения от u_a до u_b в момент времени t_1.

В третий интервал времени

$$i(t) = u(0) g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) g(t-\tau) d\tau + (u_b - u_a) g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau) g(t-\tau) d\tau + \\ + (0 - u_c) g(t-t_2).$$

Пример 102. В электрической цепи рис. 8.37, *а* в момент времени $t=0$ замыкается ключ и напряжение $u(t)$ изменяется в соответствии с рис. 8.37, *б*; $u(0)=50$В. В первый интервал времени от $t=0$ до $t=t_1=4$ с напряжение $u_1(t)=150-100e^{-at}$, где $a=0{,}25$ с$^{-1}$. Во второй интервал времени от $t=t_1=4$ с до $t=t_2=6$ с $u_2(t)=50+ +100e^{-c(t-t_1)}$, где $c=0{,}4$ с$^{-1}$. Параметры схемы рис. 8.37, *а*: $R=0{,}5$ Ом; $L_1=1$ Г (вторичная цепь разомкнута).

Найти закон изменения тока i_1 во времени для обоих интервалов времени, а также значения тока i_1 при $t=2$ и 5 с.

Решение.

$$g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-bt}); \quad b = \frac{R}{L_1} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}; \quad g(t-\tau) = \frac{1}{R}[1 - e^{-b(t-\tau)}].$$

В первый интервал времени $u_1'(\tau) = 100ae^{-a\tau}$:

$$i_1(t) = u(0) g(t) + \int_0^t u_1'(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{u(0)}{R}(1 - e^{-bt}) +$$

$$+ \frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1 - e^{-b(t-\tau)}] d\tau = 100(1 - e^{-0{,}5t}) + 200(1 + e^{-0{,}5t} - 2e^{-0{,}25t}).$$

При $t=2$ с

$$i_1 = 100(1 - e^{-1}) + 200(1 + e^{-1} - 2e^{-0{,}5}) = 94{,}9 \text{ А}.$$

Во второй интервал времени (включая скачок $u_b - u_a = 36{,}9$ В)

$$i_1(t) = u(0) g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) g(t-\tau) d\tau + (u_b - u_a) g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} u_2'(\tau) g(t-\tau) d\tau;$$

$$u_2'(\tau) = -100ce^{-c\tau}e^{ct_1};$$

$$i_1(t) = 100(1 - e^{-0{,}5t}) + 200(0{,}632 - 1{,}718e^{-0{,}5t}) + \frac{36{,}9}{0{,}5}[1 - e^{-0{,}5(t-t_1)}] -$$

$$- \frac{100c}{(b-c)R}\left[-\frac{b}{c}e^{-ct} + \frac{b-c}{c}e^{-ct_1} + e^{-ct_1}e^{-b(t-t_1)}\right]e^{ct_1}.$$

При $t=5$ с

$$i_1 = 100(1 - e^{-2{,}5}) + 200(0{,}632 - 1{,}718e^{-2{,}5}) + \frac{36{,}9}{0{,}5}(1 - e^{-0{,}5}) -$$

$$- \frac{100 \cdot 0{,}4}{(0{,}5 - 0{,}4)\,0{,}5}(-1{,}25e^{-0{,}4 \cdot 5} + 0{,}25e^{-1{,}6} + e^{-0{,}4 \cdot 4}e^{-0{,}5})\,e^{1{,}6} =$$

$$= 91{,}79 + 98{,}2 + 29 - 14{,}67 = 204{,}32 \text{ А}.$$

§ 8.56. Сравнение различных методов расчета переходных процессов. И классический и операторный методы расчета теоретически можно применять для решения задач любой сложности. Каким из них пользоваться, во многом зависит от навыка и привычки.

Однако классический метод более физически прозрачен, чем операторный, в котором решение дифференциальных уравнений сильно «механизировано».

Если при сравнении методов исходить из объема вычислительной работы, то решение уравнений первого, второго, а иногда и третьего порядков для источников постоянной (синусоидальной) э. д. с. или тока целесообразно проводить классическим методом, а решение уравнений более высоких порядков — операторным. Объясняется это тем, что чем выше порядок характеристического уравнения, тем более громоздкой и трудоемкой оказывается операция нахождения постоянных интегрирования в классическом методе.

Если воздействующее напряжение изменяется во времени линейно или в виде всплеска одной или несколько экспонент, рекомендуется применять операторный метод или интеграл Дюамеля. Но основной областью применения интеграла Дюамеля являются случаи, когда напряжение изменяется по сложному закону во времени, например при наличии скачков напряжения (см. § 8.55), или когда переходная проводимость $g(t)$ и (или) воздействующее на схему напряжение заданы графически (в последнем случае интеграл Дюамеля берется путем числового интегрирования).

Рассматриваемый в § 8.66 метод расчета переходных процессов, получивший название метода пространства состояний, используется главным образом, когда расчет осуществляется с применением ЦВМ. Для ручного счета этот метод громоздок.

Классический и операторный методы, а также метод пространства состояний и интеграл Дюамеля в аналитической форме имеют общий недостаток: необходимость определения всех корней характеристического уравнения, что для уравнений высоких степеней (например, 5-й, 6-й, 7-й, ...) требует много времени. В этих случаях может быть использован метод трапецеидальных частотных характеристик (см. например, [7]) или спектральный метод в том виде, в каком он рассмотрен, например, в гл. 9. Кроме этого, в этих случаях применяют моделирующие установки.

§ 8.57. Дифференцирование электрическим путем. Для четырехполюсников рис. 8.38, *а*, *б* при определенных условиях выходное напряжение $u_2(t)$ пропорционально производной от входного напряжения $u_1(t)$, т. е. $u_2(t) \approx du_1(t)/dt$. Схему рис. 8.38, *а* применяют чаще схемы рис. 8.38, *б*, так как при практическом осуществлении она обладает меньшими габаритами, массой и более удобна при регулировке.

Если $u_1(t) \doteqdot U_1(p)$, то $du_1(t)/dt \doteqdot pU_1(p)$. Отсюда следует, что четырехполюсник осуществляет дифференцирование, если для него $U_2(p) \equiv pU_1(p)$. Для схемы рис. 8.38, *а* $U_2(p) = U_1(p)\frac{RCp}{RCp+1}$. Чтобы схема осуществила дифференцирование, необходимо выполнить условие $|RCp| \ll 1$, тогда $U_2(p) \approx RCpU_1(p)$. Для синусоидального процесса заменим p на $j\omega$ и тогда схема рис. 8.38, *а* будет выполнять свои функции, если $\omega RC \ll 1$.

Аналогично доказывается, что для схемы рис. 8.38, *б* необходимо выполнить условие $(\omega L/R) \ll 1$. Если $u_1(t)$ — несинусоидальная периодическая функция, то эти условия должны выполняться для наивысшей частоты функции $u_1(t)$.

При дифференцировании импульсных воздействий длительностью $t_и$ параметры схем рис. 8.38, *а*, *б* должны удовлетворять условиям $RC \ll t_и$ и $L/R \ll t_и$. Эти условия получим из двух предыдущих, если

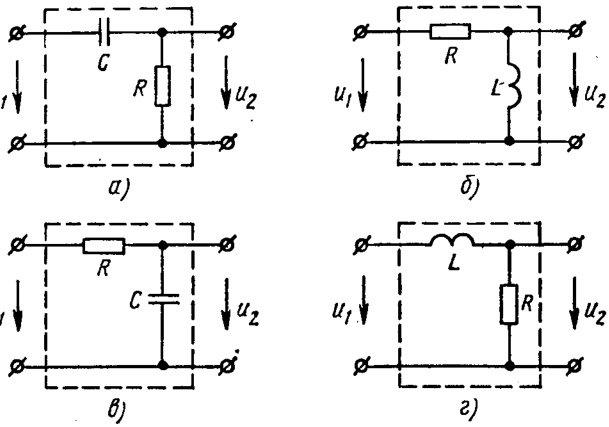


Рис. 8.38

в первом приближении будем считать, что поступление на вход четырехполюсника импульса длительностью $t_и$ соответствует воздействию на вход одной полуволны синусоиды частотой $\omega = 2\pi/(2t_и) = \pi/t_и$.

§ 8.58. Интегрирование электрическим путем. Для четырехполюсников рис. 8.38, *в*, *г* при определенных условиях выходное напряжение $u_2(t) \equiv \int u_1(t)\,dt$.

Схема рис. 8.38, *в* предпочтительнее схемы рис. 8.38, *г* по причинам, упомянутым в § 8.57.

Если $u_1(t) \risingdotseq U_1(p)$, то $\int u_1(t)\,dt \risingdotseq U_1(p)/p$. Отсюда следует, что схема выполняет свои функции, если соотношение между ее параметрами обеспечивает выполнение соотношения $U_2(p) \equiv U_1(p)/p$.

Для схемы рис. 8.38, *в* $U_2(p) = U_1(p)/(RCp+1)$, т. е. для нее должно быть $|RCp| \gg 1$. Заменив p на $j\omega$, найдем условие $\omega RC \gg 1$, при котором схема рис. 8.38, *в* будет выполнять функции интегрирующего звена при синусоидальном процессе. Для схемы рис. 8.38, *г* $(\omega L/R) \gg 1$.

При интегрировании импульсных воздействий длительностью $t_и$ должны быть выполнены следующие условия: $RC \gg t_и$ для схемы рис. 8.38, *в* и $(L/R) \gg t_и$ для схемы рис. 8.38, *г*.

Напряжение с выхода интегрирующего (дифференцирующего) устройства подается для наблюдения (записи) на электронный осциллограф.

§ 8.59. Применение метода эквивалентного генератора для расчета переходных процессов. Для расчета переходных процессов применяют также метод эквивалентного генератора. Рассмотрим его на примере трехфазной цепи рис. 8.39, *а*. В ней $e_A = E_m \sin(\omega t + \varphi)$; $e_B = E_m \sin(\omega t - 120° + \varphi)$; $e_C = E_m \sin(\omega t + 120° + \varphi)$.

Внутреннее сопротивление источника трехфазной э. д. с. положим равным нулю.

В фазах B и C включены R и C, в фазе $A - R$ и L. Требуется составить операторное изображение тока фазы A при замыкании ключа.

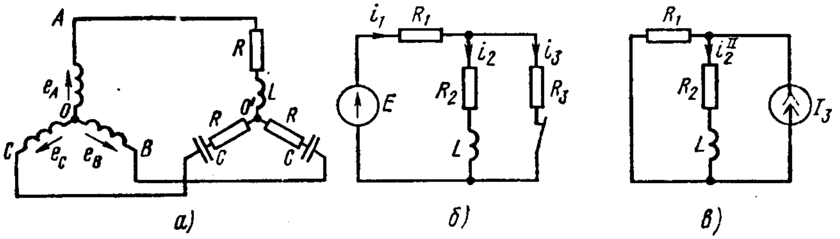


Рис. 8.39

Согласно методу эквивалентного генератора, следует операторное изображение напряжения разомкнутой ветви $U_{AO'\,\text{х.х}}(p)$ разделить на сумму операторного сопротивления включаемой ветви $Z_A(p)$ и входного операторного сопротивления всей схемы по отношению к точкам A и O' — обозначим его $Z_{\text{вх}}(p)$:

$$I_A(p) = \frac{U_{AO'\,\text{х.х}}(p)}{Z_A(p) + Z_{\text{вх}}(p)}.$$

При разомкнутом ключе мгновенное значение напряжения

$$u_{AO'\,\text{х.х}} = \frac{3}{2} E_m \sin(\omega t + \varphi);$$

его изображение

$$U_{AO'\,\text{х.х}}(p) = \frac{3}{2} \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega};$$

$$Z_A(p) = R + pL; \quad Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{Cp}\right).$$

Следовательно,

$$I_A(p) = \frac{3\dot{E}_m Cp}{(p - j\omega)(2p^2LC + 3pRC + 1)}.$$

Для перехода к функции времени следует применить формулу разложения.

По существу, поступаем так же, как и в § 1.26 при обосновании применения метода эквивалентного генератора к расчету цепей постоянного тока. Всю схему, за исключением ветви, в которой замыкается ключ, представляем в виде активного двухполюсника. Зажимы подключаемой ветви обозначаем A и O'. Вводим в эту ветвь две равные и противоположно направленные э. д. с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$; каждая из них равна напряжению на зажимах ветви при ее холостом ходе — обозначим его через $u_{AO'\,\text{х.х}}$. Далее замыкаем ключ и для нахождения тока в любой ветви схемы пользуемся принципом наложения. Представляем ток в виде суммы двух токов: $i(t) = i'(t) + i''(t)$.

Ток $i'(t)$ вызван всеми э. д. с. активного двухполюсника и э. д. с. $e_1(t)$, направленной встречно $u_{AO'\text{x.x}}(t)$. Ток $i''(t)$ вызван только одной э. д. с. $e_2(t)$, направленной так же, как и $u_{AO'\text{x.x}}(t)$.

Поскольку э. д. с. $e_1(t)$ направлена встречно $u_{AO'\text{x.x}}(t)$, ток $i'(t)$ в подключаемой ветви равен нулю, а в остальных ветвях схемы токи останутся теми же, какими они были до замыкания ключа. Ток $i''(t)$ определим при действии э. д. с. $e_2(t)=u_{AO'\text{x.x}}(t)$, *когда во всей схеме имеют место нулевые начальные условия.*

Если происходит размыкание какой-либо ветви схемы, то токи в остальных ветвях этой схемы могут быть найдены путем наложения двух режимов: 1) докоммутационного; 2) режима, возникающего в соответствующих ветвях пассивной схемы при нулевых начальных условиях от включения в размыкаемую ветвь источника тока, ток которого равен и противоположно направлен току в размыкаемой ветви.

Пример 103. В качестве иллюстрации методики расчета переходных процессов путем введения источника тока найдем для схемы рис. 8.39, *б* ток i_2 при размыкании ключа третьей ветви, полагая, что до коммутации в схеме был установившийся режим; $R_1=40$ Ом; $R_2=160$ Ом; $L=2$ Г; $E=120$ В. После размыкания ключа $i_2=i_2^{\text{I}}+i_2^{\text{II}}$, где i_2^{I} — ток докоммутационного режима; i_2^{II} — ток от источника тока $I_3=0{,}5$ А (в данном случае постоянного) в схеме рис. 8. 39, *в* ($R_3=R_2$).

Изображение тока $I_2^{\text{II}}(p)=I_3(p)\dfrac{R_1}{R_1+R_2+pL}$.

Следовательно,

$$i_2^{\text{II}}=\frac{I_3R_1}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)=0{,}1\,(1-e^{-100t})\text{ А};$$

$$i_2=0{,}5+0{,}1\,(1-e^{-100t})\text{ А}.$$

§ 8.60. Переходные процессы при воздействии импульсов напряжения.

Ток в любой схеме при воздействии на нее импульса напряжения (рис. 8.40, *а*) можно найти, например, тремя способами:

1) применяя интеграл Дюамеля;

2) определяя ток при $t<t_1$ так же, как от действия постоянного напряжения U; при $t>t_1$ действующее на систему напряжение равно нулю. Следовательно, система освобождается от вынуждающих э. д. с. и по ней протекают свободные токи, обусловленные запасом энергии в индуктивностях и емкостях системы;

3) представляя импульс в виде двух постоянных напряжений. Положительное напряжение U действует начиная с $t=0$; отрицательное — начиная с $t=t_1$. При $t<t_1$ токи в цепи определяются одним напряжением U; при $t>t_1$ — обоими напряжениями с учетом сдвига второго напряжения на время t_1.

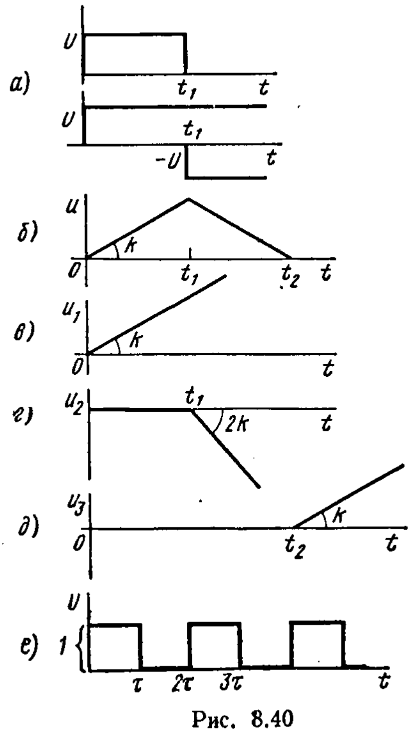


Рис. 8.40

Рассмотрим третий способ. Положим, что требуется найти ток в цепи при подключении ее к напряжению, имеющему форму равнобедренного треугольника (рис. 8.40, *б*). Задача решается в три приема.

Сначала определяем ток в интервале времени от $t=0$ до $t \leqslant t_1$ от действия напряжения $u_1 = kt$ (рис. 8.40, *в*). Затем для интервала времени $t_2 \geqslant t \geqslant t_1$ находим ток в цепи от действия двух напряжений (рис. 8.40, *в* и *г*); от продолжающего действовать напряжения $u_1 = kt$ и от вступающего в действие при $t = t_1$ дополнительного напряжения $u_2 = -2k(t-t_1)$.

Для интервала времени $t > t_2$ ток определяется действием трех напряжений; продолжающих действовать напряжений u_1 и u_2 и вновь вступающего в действие при $t=t_2$ напряжения $u_3 = k(t-t_2)$ [при $t \geqslant t_2$ сумма напряжений u_1, u_2 и u_3 (рис. 8.40, *д*) даст нуль].

Из трех перечисленных способов обычно наиболее экономным является первый.

При воздействии серией импульсов переходный процесс рассчитывают часто операторным методом.

Пример 104. На последовательно соединенные R и L поступает серия прямоугольных импульсов напряжения единичной амплитуды; длительность импульса τ и длительность паузы также τ (рис. 8.40, *е*). Используя третий способ в сочетании с теоремой запаздывания (см. § 8.40), находим изображение напряжения:

$$U(p) = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau} + \ldots\right).$$

В скобках бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $-e^{-p\tau}$. Сумма членов ее равна $\frac{1}{1+e^{-p\tau}}$. Изображение тока

$$I(p) = \frac{1}{p\left(1+e^{-p\tau}\right)(R+pL)}.$$

Применяем формулу разложения. Корни знаменателя: $p' = 0$; $p'' = -R/L$; $\tau p_к = (a_к + jb_к)\tau = j\pi(2k+1)$ $(-\infty < k < \infty)$.

Группируя член $k=0$ с $k=-1$, член $k=1$ с членом $k=-2$ и т. д., получим:

$$i(t) = \frac{1}{2R} - \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R\left(1+e^{\frac{R}{L}\tau}\right)} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\pi(2k+1)\frac{t}{\tau} - \varphi_{2k+1}\right]}{Z_{2k+1}};$$

$$Z_{2k+1} = \sqrt{R^2 + \left[\frac{(2k+1)\pi L}{\tau}\right]^2}; \varphi_{2k+1} = \operatorname{arctg}\frac{(2k+1)\pi L}{R\tau}.$$

§ 8.61. Дельта-функция, единичная функция и их свойства. Импульсная переходная проводимость. *Дельта-функцией* $\delta(t)$ или *единичным импульсом* (рис. 8.41, *а*) называют прямоугольный импульс амплитудой $1/\Delta\tau$ и длительностью $\Delta\tau$ при $\Delta\tau \to 0$. Единичным называют потому, что площадь его равна единице: $\frac{1}{\Delta\tau}\Delta\tau = 1$. Размерность $\delta(t)$ равна $с^{-1}$.

Единичной функцией $1(t)$ (рис. 8.41, *б*) называют функцию, равную единице при $t>0$ и равную нулю при $t<0$. Единичная функция $1(-t)$ (рис. 8.41, *в*) равна нулю при $t>0$ и единице при $t<0$. Функции $1(t)$ и $1(-t)$ имеют нулевую размерность. Свойства $\delta(t)$:

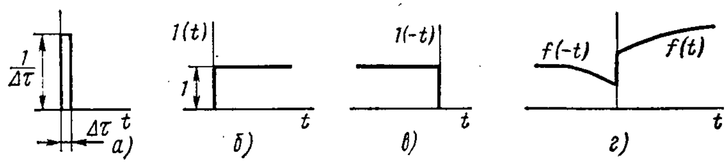


Рис. 8.41

1) из определения $\delta(t)$ следует, что

$$\int_0^t \delta(t)\,dt=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases};$$

2) производная функции $1(t)$ равна δ-функции:

$$d\,1(t)/dt=\delta(t);$$

3) δ-функция обладает фильтрующим действием:

$$f(t)\,\delta(t-t_1)=f(t_1)\,\delta(t-t_1);$$

4) изображение по Лапласу δ-функции равно 1:

$$\int_0^\infty \delta(t)\,e^{-pt}\,dt=1.$$

Единичные функции $1(t)$ и $1(-t)$ также обладают фильтрующим действием. Умножение произвольной функции $f(t)$ на $1(t)$ обращает произведение $f(t)\,1(t)$ в нуль при $t<0$. Аналогично,

$$f(t)\,1(-t)=\begin{matrix}0 & t>0\\ f(t) & t<0.\end{matrix}$$

Импульсное (игольчатое) напряжение или ток в виде δ-функции единичной площади записывают так: $\delta(t)\cdot 1$. Здесь единица имеет размерность В·с или А·с соответственно.

В соответствии с рис. 8.41 импульсное напряжение единичной площади, равное $\delta(t)\cdot 1$ В·с, можно представить как сумму двух прямоугольных импульсов: импульса напряжения $1/\Delta\tau$, вступающего в действие при $t=0$, и импульса $-(1/\Delta\tau)$, вступающего в действие при $t=\Delta\tau$.

При $t>\Delta\tau$ и нулевых начальных условиях ток на входе цепи при воздействии на нее напряжения в виде δ-функции $i(t)=1\times \times\frac{1}{\Delta\tau}[g(t)-g(t-\Delta\tau)]$.

Разложив $g(t-\Delta\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\tau$ и учитывая малость $\Delta\tau$, получим

$$i(t)=1\cdot\frac{1}{\Delta\tau}[g(t)-g(t)+\Delta\tau g'(t)]=1\cdot\frac{1}{\Delta\tau}\Delta\tau g'(t)=g'(t)\cdot 1,$$

где $g'(t)$ — *импульсная переходная проводимость*. Для моментов времени $t > \Delta\tau$ она численно равна току в цепи при воздействии на цепь напряжения в виде δ-функции.

Обратим внимание на то, что в двух формах записи интеграла Дюамеля [формулы (8.63а) и (8.63б)] используется импульсная переходная проводимость.

Наряду с понятиями «переходная проводимость» $g(t)$ и «импульсная переходная проводимость» $g'(t)$ применяют дуальные им понятия: *переходное сопротивление* $r(t)$ и *импульсное переходное сопротивление* $r'(t)$. Переходное сопротивление $r_{ab}(t)$ численно равно напряжению на входе цепи $u_{ab}(t)$ при воздействии на ее вход единичным током:

$$u_{ab}(t) = 1 \text{ А } r_{ab}(t).$$

Импульсное переходное сопротивление $r'_{ab}(t)$ численно равно напряжению на входе цепи $u_{ab}(t)$, после того как на ее вход воздействовал импульс тока в виде δ-функции единичной площадью:

$$u_{ab}(t) = \delta(t) \cdot 1 \ (\text{А} \cdot \text{с}) \cdot r'_{ab}(t).$$

Величины $r(t)$ и $r'(t)$ могут быть входными и взаимными.

§ 8.62. Обобщенные функции и их применение к расчету переходных процессов. *Обобщенными функциями* (ОФ) [19, 22] называют функции времени $f\{t\}$, которые терпят разрыв, например, при $t=0$. Значение функции при $t<0$ обозначим $|f_-|(t)$, при $t>0$ $f_+(t)$ (рис. 8.41, *г*). Имея в виду фильтрующее свойство единичных функций, можно записать

$$f\{t\} = f_-(t)\ 1(-t) + f_+(t)\ 1(t).$$

В общем случае $f\{t\}$ может содержать также δ-функцию и ее производные. Производная от $f\{t\}$

$$\frac{df\{t\}}{dt} = f'_-(t)\ 1(-t) + f'_+(t)\ 1(t) +$$
$$+ f_-(t)\frac{d\,1(-t)}{d(-t)}\frac{d(-t)}{dt} + f_+(t)\frac{d\,1(t)}{dt} = f'_-(t)\ 1(-t) +$$
$$+ f'_+(t)\ 1(t) + \delta(t)\,[f_+(0) - f_-(0)].$$

Используя ОФ, можно решать задачи на переходные процессы, о которых говорилось в § 8.28, а также задачи на импульсные воздействия. В этом случае необходимо составить уравнения для послекоммутационной схемы, выразить токи, напряжения и их производные через ОФ и, воспользовавшись фильтрующим свойством $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$, приравнять в этих уравнениях коэффициенты, содержащие только $1(-t)$, только $1(t)$ и только $\delta(t)$, а затем решить их совместно.

Пример 105. Путем использования обобщенных функций решить задачу примера 86 (см. рис. 8.24).

Решение. В уравнение для послекоммутационной схемы

$$R\left(C_1\frac{du_{C_1}}{dt} + C_2\frac{du_{C_2}}{du}\right) + u_{C_1} = E \qquad \text{(а)}$$

подставим: $u_{C_1} = u_{C_1-}(t)\ 1(-t) + u_{C_1+}(t)\ 1(t)$;

$$u_{C_2} = u_{C_2-}(t)\ 1(-t) + u_{C_2+}(t)\ 1(t);$$
$$u'_{C_1} = u'_{C_1-}(t)\ 1(-t) + u'_{C_1+}(t)\ 1(t) + \delta(t)\,[u_{C_1}(0_+) - u_{C_1}(0_-)];$$
$$u'_{C_2} = u'_{C_2-}(t)\ 1(-t) + u'_{C_2+}(t)\ 1(t) + \delta(t)\,[u_{C2}(0_+) - u_{C2}(0_-)];$$
$$E = E\ 1(-t) + E\ 1(t).$$

Коэффициенты при $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$ дают три уравнения:

$$R\left[C_1 u'_{C_1-}(t)+C_2 u'_{C_2-}(t)\right]+u_{C_1-}(t)=E; \quad (б)$$

$$R\left[C_1 u'_{C_1+}(t)+C_2 u'_{C_2+}(t)\right]+u_{C_1+}(t)=E; \quad (в)$$

$$u_{C_1}(0_+)(C_1+C_2)=C_1 u_{C_1}(0_-)+C_2 u_{C_2}(0_-). \quad (г)$$

Из (б) находим $u_{C_1-}(t)=E$, из (г) $u_{C_1}(0_+)=C_1E/(C_1+C_2)$; далее решаем (в) классическим или операторным методом, имея в виду, что $u_{C_1+}(t)=u_{C_2+}(t)$. В результате получаем тот же ответ, что и в примере 86.

§ 8.63. Дополняющие двухполюсники. Два двухполюсника, содержащие R, L, C, называют *дополняющими*, если входное сопротивление при их последовательном (параллельном) соединении оказывается чисто активным, не зависящим от комплексной частоты p. Так, двухполюсник

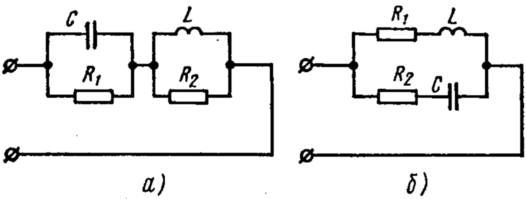


Рис. 8.42

из параллельно соединенных L и R_2 и двухполюсник из параллельно соединенных C и R_1 (рис. 8.42, *а*) являются дополняющими при их последовательном соединении и выполнении условия $R_1=R_2=R=\sqrt{L/C}$. Двухполюсники R_2, C и R_1, L при их параллельном соединении (рис. 8.42 *б*) являются дополняющими при том же условии.

Элементы двух дополняющих двухполюсников *взаимно дуальны*. Элементам L_1, C_1, R_1 одного соответствуют такие дуальные элементы C_2, L_2, R_2 дополняющего, что произведение сопротивлений двух взаимно дуальных элементов должно быть равно R^2, где R — произвольное активное сопротивление.

Последовательное соединение L_1 и C_1 в исходном двухполюснике заменяется на параллельное соединение $C_2=L_1/R^2$ и $L_2=C_1R^2$ в дополняющем. Параллельное соединение C_1 и L_1 в исходном двухполюснике заменяется на последовательное соединение $L_2=C_1R^2$ и $C_2=L_1/R^2$ в дополняющем.

§ 8.64. Понятие о передаточных функциях и частотных характеристиках звеньев и систем. Нередко, особенно в задачах автоматического регулирования, об устойчивости системы и о характере переходного процесса в ней судят по частотной характеристике системы. Принято расчленять систему на отдельные элементы или звенья.

Каждое звено можно схематически представить в виде некоторого четырехполюсника (рис. 8.43, *а*) либо в однолинейном начертании (рис. 8.43, *б*). Входными ($x_{вх}$) и выходными ($x_{вых}$) величинами могут быть как электрические, например ток, напряжение, заряд, так и неэлектрические величины, например координата или скорость перемещения какого-либо тела механической системы.

На рис. 8.43, *а* $U_{вх}$ и $U_{вых}$ — входное и выходное напряжения. Какова бы ни была схема внутренних соединений каждого звена, всегда можно выходную величину выразить через входную:

$$x_{вых}(p) = K(p)\, x_{вх}(p), \qquad (8.64)$$

где $K(p)$ — *передаточная функция звена*.

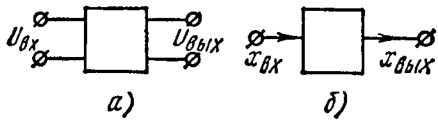


Рис. 8.43

Передаточная функция зависит от схемы внутренних соединений звена и является функцией комплексной частоты p.

Пример 106. Составить $K(p)$ четырехполюсника рис. 8.44, *а*.

Решение. С понятием передаточной функции звена тесно связано понятие частотной характеристики звена. Последнюю получают из выражения для $K(p)$, заменив p на $j\omega$:

$$U_{вых}(p) = \frac{U_{вх}(p)\, R}{R + (1/Cp)}; \quad K(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{p}{p+a}, \quad a = \frac{1}{RC}.$$

$$K(j\omega) = \frac{x_{вых}(j\omega)}{x_{вх}(j\omega)}, \qquad (8.65)$$

где ω — угловая частота; $K(j\omega)$ — комплексное число, которое может быть записано и в алгебраической и показательной формах:

$$K(j\omega) = U + jV = Ae^{j\varphi}; \quad A = \sqrt{U^2 + V^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} V/U. \qquad (8.66)$$

Зависимость $U = f(\omega)$ называют *действительной* (*вещественной*) *частотной характеристикой*, $V = f(\omega)$ — *мнимой частотной характеристикой*, $A = f(\omega)$ —

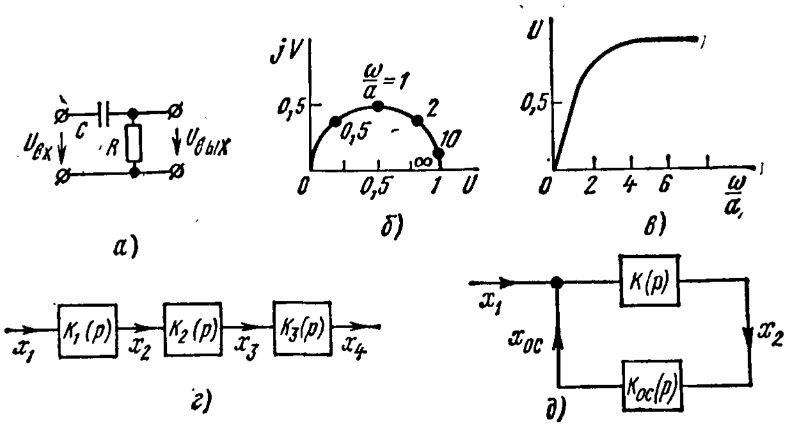


Рис. 8.44

амплитудной частотной характеристикой, $\varphi = f(\omega)$ — *фазовой частотной характеристикой*, $A = f(\lg \omega)$ — *логарифмической частотной характеристикой*. Зависимость $Ae^{j\varphi} = f(\omega)$, построенную в полярных координатах, называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой*.

Пример 107. Построить в координатах U, jV зависимость $K(j\omega)$, а в координатах U, ω зависимость $U = f(\omega)$ для четырехполюсника рис. 8.44, *а*.

Решение. В выражении $K(p) = p/(p+a)$ заменим p на $j\omega$:

$$K(j\omega) = \frac{j\omega}{a + j\omega} = \frac{j\omega(a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} + j\,\frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Таким образом, $U=\omega^2/(a^2+\omega^2)$ и

$$V=a\omega/(a^2+\omega^2).$$

Придавая ω различные значения, например $\omega/a=0$; 0,5; 1; 2; 10; ..., можно подсчитать U и V и построить на комплексной плоскости зависимость $K(j\omega)=f(\omega)$ в декартовой системе координат (рис. 8.44, *б*). На рис. 8.44, *в* построена вещественная частотная характеристика $U=f(\omega)$ для четырехполюсника рис. 8.44, *а*.

Частотные характеристики отдельных звеньев и всей системы в целом можно определять либо расчетным путем, если известны схемы внутренних соединений звеньев и значения параметров, либо опытным путем. При их опытном определении поступают следующим образом: на вход звена (системы в целом) подают синусоидальное напряжение неизменной амплитуды и, изменяя частоту ω от 0 до максимально возможной (теоретически до бесконечности), определяют амплитуду и фазу выходной величины.

Отношение амплитуды выходной величины к амплитуде входной дает значение A, а сдвиг по фазе выходной величины по отношению ко входной — значение φ.

Вернемся к вопросу о передаточных функциях. Положим, что система образована несколькими последовательно соединенными звеньями, например тремя (рис. 8.44, *г*). Пусть $K_1(p)$ — передаточная функция первого звена; $K_2(p)$ — второго, $K_3(p)$ — третьего.

Тогда операторные изображения выходных величин звеньев можно выразить через операторные изображения входных следующим образом:

$$x_2(p)=x_1(p)K_1(p); \qquad \text{(а)}$$

$$x_3(p)=x_2(p)K_2(p); \qquad \text{(б)}$$

$$x_4(p)=x_3(p)K_3(p). \qquad \text{(в)}$$

Для того чтобы выразить выходную величину всей системы $x_4(p)$ через входную $x_1(p)$, перемножим (а), (б), (в). Получим

$$x_2(p)x_3(p)x_4(p)=x_1(p)K_1(p)x_2(p)K_2(p)x_3(p)K_3(p),$$

откуда

$$x_4(p)=x_1(p)K(p);$$

$$K(p)=K_1(p)K_2(p)K_3(p).$$

Таким образом, для получения передаточной функции нескольких последовательно включенных звеньев следует перемножить передаточные функции этих звеньев (полагаем, что K_{n-1} не зависит от n звена).

На рис. 8.44, *д* изображена замкнутая система (система с обратной связью). Она состоит из основного звена с передаточной функцией $K(p)$ и звена обратной связи с передаточной функцией $K_{\text{ос}}(p)$. Роль последнего часто выполняет усилитель, работающий в режиме пропорционального усиления. В соответствии с рис. 8.44, *д*

$$x_{\text{ос}}(p)=K_{\text{ос}}(p)x_2(p) \quad \text{и} \quad x_2(p)=K(p)[x_1(p)+x_{\text{ос}}(p)].$$

Отсюда

$$x_2(p)=x_1(p)\frac{1}{1\mp K(p)K_{\text{ос}}(p)}.$$

Знак минус в знаменателе соответствует положительной обратной связи, знак плюс — отрицательной обратной связи (изменена полярность на выходе звена обратной связи).

Если значение $K_{\text{ос}}(p)$ выбрано так, что $1-K(p)K_{\text{ос}}(p)=0$, то в системе возникают автоколебания (амплитуда их ограничивается нелинейностью системы). При автоколебаниях выходная величина периодически изменяется во времени при отсутствии входного сигнала x_1.

§ 8.65. Системные функции и понятие о видах чувствительности. Системные функции $H(p)$ — это обобщенное название функций, характеризующих четырехполюсник. Ими могут быть, например, передаточная функция напряжения $U_2(p)/U_1(p)$, передаточная функция тока $I_2(p)/I_1(p)$ и т. п. Если какой-либо параметр (R, L, C) в схеме четырехполюсника изменяется, то изменяется модуль и аргумент системной функции и можно говорить о чувствительности системной функции к изменению этого параметра.

Под *классической чувствительностью* понимают отношение относительного изменения функции $\Delta H(p)/H(p)$ к относительному изменению параметра $\Delta x/x$:

$$S_x^{H(p)} = \lim\left(\frac{\Delta H}{H} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{H(p)} \cdot \frac{dH(p)}{dx}.$$

Применительно к установившемуся синусоидальному режиму говорят о *чувствительности модуля* и *чувствительности аргумента* $H(j\omega)$.

В отношении резонансных систем с высокой добротностью пользуются понятием *корневой чувствительности*, имея в виду чувствительность $H(p)$ к изменению положения нуля или полюса этой функции, находящегося вблизи мнимой оси плоскости комплексной частоты. Понятие чувствительности используют главным образом в задачах синтеза. Электрические цепи стремятся сформировать так, чтобы они были по возможности мало чувствительны к изменению параметра.

§ 8.66. Метод пространства состояний. Метод пространства состояний (метод переменных состояния) представляет собой упорядоченный способ нахождения состояния системы в функции времени, использующий матричный метод решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши (в нормальной форме). Применительно к электрическим цепям под переменными состояния понимают обычно величины, определяющие энергетическое состояние цепи, т. е. токи через индуктивности и напряжения на емкостях (независимые начальные значения). Значения этих величин полагаем известными к началу процесса. Переменные состояния в обобщенном смысле обозначим x. Так как это некоторые функции времени, то их можно обозначить $x(t)$.

Пусть в системе n переменных состояния. Матрицу-столбец переменных состояния в n-мерном пространстве состояний обозначим $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$, m выходных величин (токи, напряжения) назовем y, матрицу-столбец выходных величин — $[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Источники воздействий (источники э. д. с. и тока) будем именовать z. Матрица-столбец источников воздействий $[z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ z_p \end{bmatrix}$.

Для электрических цепей можно составить матричные уравнения вида

$$[\dot{x}] = [M][x] + [N][z]; \tag{8.67}$$

$$[y] = [P][x] + [Q][z], \tag{8.68}$$

где $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[Q]$ — некоторые матрицы, определяемые структурой цепи и значениями ее параметров.

На основании принципа наложения решение (8.67)

$$[x(t)] = e^{[M]t}[x(0)] + \int_0^t e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]\,d\tau, \qquad (8.69)$$

где $[x(0)]$ — матрица начальных значений x.

Первое слагаемое в формуле (8.69) описывает свободные процессы в системе, второе — принужденные при нулевом исходном состоянии [вывод формулы (8.69) см. в конце параграфа].

Из (8.68) и (8.69) находим

$$[y(t)] = [P]e^{[M]t}[x(0)] + \int_0^t [P]e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]\,d\tau + [Q][z(t)]. \qquad (8.70)$$

Поясним формулу (8.69) на простом примере. Ток в схеме рис. 8.45 до коммутации был $i(0_-) = E/(2R)$. Уравнение состояния для этой схемы $di/dt = -(R/L)\,i + (E/L)$, т. е.

$$[\dot{x}] = di/dt;\; [M] = -R/L;\; [N] = 1/L,\; [z] = E;$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{E}{2R} + \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\frac{E}{L}\,d\tau = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Матричную функцию $e^{[M]t}$ в формуле (8.69) вычисляют по формуле (теореме) Сильвестра [13]:

$$e^{[M]t} = e^{\lambda_1 t}[A_1] + e^{\lambda_2 t}[A_2] + \ldots + e^{\lambda_n t}[A_n], \qquad (8.71)$$

где

$$[A_r] = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}([M] - \lambda_j[1])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}(\lambda_r - \lambda_j)}; \qquad (8.72)$$

λ_r — собственные значения (характеристические числа) квадратной матрицы $[M]$, т. е. это корни уравнения

$$\det([M] - \lambda[1]) = 0. \qquad (8.73)$$

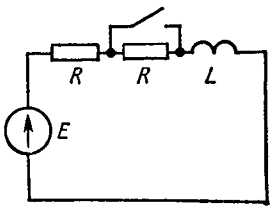


Рис. 8.45

Из уравнения (8.73) следует, что уравнение относительно λ составляют, приравнивая нулю определитель матрицы $[M]$, в котором все элементы этой матрицы a_{mm} $(m = 1, \ldots n)$, расположенные по главной диагонали, заменяют на элементы $a_{mm} - \lambda$.

Характеристические числа λ — это не что иное, как корни характеристического уравнения послекоммутационной схемы. Запись решения в виде ряда (8.71) предполагает, что все характеристические числа различны (нет кратных корней). Если же среди корней уравнения $\det([M] - \lambda[1]) = 0$

будет кратный корень λ_s кратности s, то составляющая $e^{[M]t}$, обусловленная этим корнем, имеет вид

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{e^{[\lambda]t}Adj\,(\lambda[1]-[M])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}(\lambda-\lambda_j)}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_s}, \qquad (8.74)$$

где $Adj(\lambda[1]-[M])$ — присоединенная матрица к матрице $\lambda[1]-[M]$. В ней все элементы Q_{ij} заменены на алгебраические дополнения. Составляющие решения по формуле (8.74) соответствуют части решения по формуле разложения (см. § 8.50), учитывающей кратные корни.

Пример 108. Методом пространства состояний исследовать переходный процесс в схеме рис. 8.46, *а*. До коммутации был установившийся режим; $E=4$ В, $I_k=1$ А; $R=20$ Ом; $L=1$ Г, $C=1$ Ф.

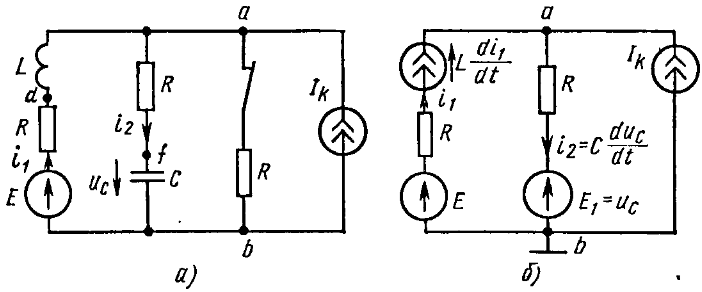


Рис. 8.46

Решение. Обозначим токи и напряжения в соответствии с рис. 8.46, *а*. До коммутации

$$i(0_-)=\frac{E}{2R}-\frac{I_k}{2}=0{,}5\ \text{А};\quad u_C(0_-)=R\left(\frac{I_k}{2}+\frac{E}{2R}\right)=3\ \text{В}.$$

В качестве переменных состояния выбираем ток i_1 и напряжение на емкости u_C.

Известно несколько способов составления уравнений состояния. Рассмотрим наиболее целесообразный, основанный на сведении послекоммутационной схемы к резистивной с источниками э. д. с. и тока. С этой целью индуктивности в послекоммутационной схеме заменяем на источники тока, которые доставляют ток в том же направлении, что и в исходной схеме (в рассматриваемом примере L заменяем на источник тока i_1 с напряжением на нем $L\,di_1/dt$), а емкости C заменяем на источники э. д. с., причем в соответствии с теоремой компенсации э. д. с. этих источников должны быть направлены встречно токам в ветвях с емкостями, т. е. встречно напряжениям u_C на емкостях (в рассматриваемом примере емкость C с напряжением на ней u_C заменена на э. д. с. $E_1=u_C$).

В результате схема окажется без индуктивностей и емкостей (чисто резистивной), но с дополнительными источниками тока и э. д. с. (рис. 8.46, *б*).

В полученной резистивной схеме один из узлов заземляем. Составляем уравнения по методу узловых потенциалов и определяем потенциалы незаземленных узлов. В рассматриваемом примере не заземлен всего один узел a. Поэтому

$$\varphi_a = \frac{(i_1 + I_k) + (u_C/R)}{1/R} = (i_1 + I_k) R + u_C.$$

По известным потенциалам узлов рассчитываем напряжения на источниках тока $L_k\, di_k/dt$, эквивалентирующих индуктивности L_k, и токи $i_m = C_m\, du_{Cm}/dt$ через источники э. д. с., эквивалентирующие емкости C_m.

Для первой ветви схемы рис. 8.46, *б*

$$\varphi_a = (i_1 + I_k) R + u_C = E - i_1 R - L \frac{di_1}{dt}.$$

Отсюда $\dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{2R}{L} i_1 - \dfrac{u_C}{L} + \dfrac{E}{L} - \dfrac{R}{L} I_k.$

Ток второй ветви i_2 можно определить либо по первому закону Кирхгофа, либо по закону Ома для участка цепи с э. д. с.:

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt} = \frac{\varphi_a - u_C}{R} = \frac{(i_1 + I_k) R + u_C - u_C}{R} = i_1 + I_k.$$

Отсюда $du_C/dt = (i_1/C) + (I_k/C)$. Таким образом, уравнения переменных состояния для послекоммутационной схемы рис. 8.46, *а* таковы:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{2R}{L} i_1 - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} E - \frac{R}{L} I_k;$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 + 0 \cdot u_C + 0 \cdot E + \frac{1}{C} I_k,$$

или $[\dot{x}] = [M][x] + [N][z]$, где $[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{du_C}{dt} \end{bmatrix}$; $[x] = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix}$; $[M] =$

$= \begin{bmatrix} -\dfrac{2R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $[N] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \\ 0 & \dfrac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $[z] =$

$= \begin{bmatrix} E \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $[x(0)] = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Составляем уравнение для определения характеристических чисел λ:

$$\det([M] - \lambda[1]) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = -0{,}27$; $\lambda_2 = -3{,}73$ с$^{-1}$.

По формуле (8.72),

$$[A_1]=\frac{[M]-\lambda_2[1]}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+3{,}73\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}{3{,}46}=\begin{bmatrix}-0{,}078 & -0{,}289\\ 0{,}289 & 1{,}077\end{bmatrix};$$

$$[A_2]=\frac{[M]-\lambda_1[1]}{\lambda_2-\lambda_1}=\begin{bmatrix}1{,}077 & 0{,}289\\ -0{,}289 & -0{,}078\end{bmatrix}.$$

По формуле (8.69),

$$\begin{bmatrix}i_1\\ u_C\end{bmatrix}=\{e^{-0{,}27t}[A_1]+e^{-3{,}73t}[A_2]\}\begin{bmatrix}0{,}5\\ 3\end{bmatrix}+\int\limits_0^t\{e^{-0{,}27(t-\tau)}[A_1]+$$
$$+e^{-3{,}73(t-\tau)}[A_2]\}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}d\tau.$$

Выполнив подсчеты, получим:

$$i_1=-1+0{,}75e^{-0{,}27t}+0{,}75e^{-3{,}73t}\ \text{А};$$
$$u_C=6-2{,}8e^{-0{,}27t}-0{,}2e^{-3{,}73t}\ \text{В}.$$

Если за выходную величину y принять напряжение u_{df} между точками d и f, то

$$[u_{d,f}]=[-R\ \ -1]\begin{bmatrix}i_1\\ u_C\end{bmatrix}+[1\ \ 0]\begin{bmatrix}E\\ I_k\end{bmatrix}.$$

Поясним переход от (8.67) к (8.69).

Решение неоднородного уравнения (8.67) можно получить в виде суммы полного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Полное решение однородного уравнения

$$[\dot{x}]=[M][x] \tag{8.75}$$

для $t\geqslant\tau$, где τ — постоянная величина, находим по аналогии с решением скалярного дифференциального уравнения $\dot{x}=mx$ $x=e^{m(t-\tau)}x(\tau)$ в виде

$$[\dot{x}_n(t)]=e^{[M](t-\tau)}[x_n(\tau)]. \tag{8.76}$$

Подставив (8.76) в (8.75), убеждаемся в справедливости решения однородного уравнения (8.75). Функцию $e^{[M]t}$ обозначим $[\varphi(t)]$, а $e^{[M](t-\tau)}=[\varphi(t-\tau)]$. Так как $e^{[M]t}=[1]+[M]t+\frac{[M]^2t^2}{2!}+\ldots$, то $[\varphi(0)]=[1]$.

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения положим в виде

$$[x_ч(t)]=[\varphi(t-\tau)][u(t)][x(\tau)].$$

Общее решение

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][x(\tau)]+[\varphi(t-\tau)][u(t)]\cdot[x(\tau)]=$$
$$=[\varphi(t-\tau)][[1]+[u(t)][x(\tau)]=[\varphi(t-\tau)][R(t)],$$

где $[R(t)]$ нужно определить.

Подставим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][R(t)] \tag{8.77}$$

в уравнение (8.67):

$$[[\dot{\varphi}(t-\tau)]-[M][\varphi(t-\tau)]][R(t)]+[\varphi(t-\tau)][\dot{R}(t)]=[N][z]. \tag{8.78}$$

Поскольку $[\varphi(t-\tau)]$ есть матрица, столбцы которой являются решением уравнения (8.75), первый член выражения (8.78) — нулевая матрица. Следовательно,

$$[\dot{R}(t)]=[\varphi(t-\tau)]^{-1}[N][z]. \tag{8.79}$$

Проинтегрируем (8.79) от τ до t:

$$[R(t)]-[R(\tau)]=\int_{\tau}^{t}[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N][z]\,d\lambda. \tag{8.80}$$

Из уравнений (8.77) и (8.80) следует

$$[\varphi(t-\tau)]^{-1}[x(t)]=[\varphi(0)]^{-1}[x(\tau)]+\int_{\tau}^{t}[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N]\,[z(\lambda)]\,d\lambda. \tag{8.81}$$

Но $[\varphi(0)]=[1]$. Умножая (8.81) слева на $[\varphi(t-\tau)]$ и учитывая, что

$$[\varphi(t-\tau)]\,[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}=e^{[M](t-\tau)}e^{-[M](\lambda-\tau)}=e^{[M](t-\lambda)}=[\varphi(t-\lambda)],$$

получим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)]\,[x(\tau)]+\int_{\tau}^{t}[\varphi(t-\lambda)]\,[N]\,[z(\lambda)]\,d\lambda. \tag{8.82}$$

Полагая в (8.82) $\tau=0$ и заменяя затем переменную λ на τ, получим формулу (8.69).

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под принужденными и свободными токами и напряжениями? 2. Сформулируйте законы (правила) коммутации. 3. Дайте определение независимым и зависимым начальным условиям. 4. Объясните, почему при составлении характеристического уравнения путем приравнивания нулю входного сопротивления $z_p=N(p)/M(p)$ нельзя сокращать числитель и знаменатель дроби на общий множитель 5. Чем определяется число корней характеристического уравнения? 6. Изложите сущность классического метода расчета и принцип составления уравнений для определения постоянных интегрирования. 7. Дайте обоснование обобщенным законам коммутации. 8. Запишите известные Вам соотношения между $f(t)$ и $F(p)$, а также теоремы операторного метода и предельные соотношения. 9. Почему p называют комплексной частотой? 10. Охарактеризуйте этапы расчета операторным методом. 11. Определить переходную и импульсную переходную проводимости (сопротивления) и функции. Укажите, с какой целью они используются. 12. Охарактеризуйте идею расчета при помощи интеграла Дюамеля. 13. Поясните принцип работы интегрирующих и дифференцирующих цепей. 14. Чем следует руководствоваться при формировании дополняющих двухполюсников? 15. Перечислите основные этапы расчета методом переменных состояния. 16. Как составляют уравнения переменных состояния путем сведения послекоммутационной схемы к чисто резистивной? 17. Охарактеризуйте сильные и относительно слабые стороны известных Вам методов расчета переходных процессов. 18. В схеме рис. 8.47 с источником тока I_0 в момент $t=0$ одновременно размыкается ключ K_2 и замыкается K_1. Показать, что заряды, протекшие через сопротивления R_1 и R_2 за время от 0 до ∞, не зависят от емкостей C_1 и C_2. Определить величины этих зарядов $\left[\textit{ответ: } \dfrac{LI_0}{1+(R_2/R_1)} \text{ и } \dfrac{LI_0}{1+(R_1/R_2)}\right]$. 19. Решите задачи 11.4; 11.12; 11.15; 11.26; 11.29; 11.32; 11.38; 11.40; 11.47; 11.50; 11.55; 11.57.

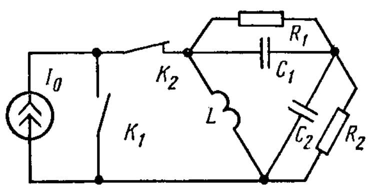


Рис. 8.47

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД

§ 9.1. Ряд Фурье в комплексной форме записи. Как известно из предыдущего (см. § 7.2), в ряд Фурье можно разложить любую периодическую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле. Обозначим период функции T, а основную частоту — $\omega_0 = 2\pi/T$. Ряд Фурье можно записать двояко.

Первая форма записи:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k); \tag{9.1}$$

вторая форма записи:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k \sin k\omega_0 t + A''_k \cos k\omega_0 t), \tag{9.1a}$$

где A_0 — постоянная составляющая ряда; A_k — амплитуда k-гармоники ряда; ψ_k — начальная фаза k-гармоники;

$$A'_k = A_k \cos\psi_k; \quad A''_k = A_k \sin\psi_k;$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt; \tag{9.2}$$

$$A'_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt; \tag{9.3}$$

$$A''_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt. \tag{9.4}$$

Из курса математики известно, что $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$. Следовательно,

$$\sin(k\omega_0 t + \psi_k) = \frac{1}{2j}\left[e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)}\right]. \tag{9.5}$$

Подставив правую часть формулы (9.5) в формулу (9.1), получим

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left[e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)}\right]. \tag{9.5a}$$

Обозначим:

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k}; \tag{9.6}$$

$$\dot{A}_{-k} = -A_k e^{-j\psi_k}. \tag{9.7}$$

Тогда ряд (9.5а) можно записать так:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{9.8}$$

Формула (9.8) представляет собой комплексную форму записи ряда Фурье. Текущий индекс k может принимать все целые числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$, но не может равняться нулю, так как постоянная составляющая ряда выделена в виде отдельного слагаемого.

Пример 109. Представить функцию $f(t)=2+3\sin(\omega_0 t+30°)+$ $+2\sin(2\omega_0 t-45°)$ в комплексной форме записи.

Решение. $A_0=2$; $\dot{A}_1=3e^{j30°}\cdot\dot{A}_{-1}=-3e^{-j30°}$; $\dot{A}_2=2e^{-j45°}$; $\dot{A}_{-2}=$ $=-2e^{j45°}$; $f(t)=2+\frac{1}{2j}[3e^{j(\omega_0 t+30°)}-3e^{-j(\omega_0 t+30°)}+2e^{j(2\omega_0 t-45°)}-$ $-2e^{-j(2\omega_0 t+45°)}]$.

Составим выражение для комплексной амплитуды $\dot{A}_k$. По определению [см. формулу (9.6)],

$$\dot{A}_k=A_k e^{j\psi_k}=A_k\cos\psi_k+jA_k\sin\psi_k=A'_k+jA''_k, \tag{9.9}$$

где A'_k определяется формулой (9.3), A''_k — формулой (9.4).

Подставим правые части формул (9.3) и (9.4) в формулу (9.9):

$$\dot{A}_k=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)(\sin k\omega_0 t+j\cos k\omega_0 t)\,dt=$$

$$=\frac{2j}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)(\cos k\omega_0 t-j\sin k\omega_0 t)\,dt$$

или

$$\dot{A}_k=\frac{2j}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt. \tag{9.10}$$

Подставим правую часть формулы (9.10) в формулу (9.8):

$$f(t)=A_0+\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_0 t}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt. \tag{9.11}$$

§ 9.2. Спектр функции и интеграл Фурье. Ряд Фурье — это тригонометрический ряд, представляющий собой изображение периодической функции суммой синусоид, амплитуды которых конечны, а аргументы кратны основной частоте ω_0.

Под интегралом Фурье понимают тригонометрический ряд, представляющий непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа синусоид, амплитуды которых бесконечно малы, а аргументы соседних синусоид отличаются на бесконечно малую величину.

Формулу для интеграла Фурье получают из формулы для ряда Фурье [из формулы (9.11)] предельным переходом при стремлении периода T к бесконечности.

На функцию $f(t)$ при представлении ее интегралом Фурье накладывают ограничение, а именно полагают, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ есть величина конечная (не бесконечно большая). Это серьезное ограничение. Ряд функций этому условию не удовлетворяет *.

Так как по определению [см. формулу (9.2)], $A_0=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$, а при $T\to\infty$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ есть величина конечная, то $A_0=0$.

Преобразуем выражение $\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$, стоящее под знаком суммы в формуле (9.11). С этой целью произведение $k\omega_0$ заменим на ω [под ω будем понимать изменяющуюся (текущую) частоту]. В ряде Фурье разность двух смежных частот $\Delta\omega=\omega_0=2\pi/T$. Следовательно, $1/T=\Delta\omega/(2\pi)$.

При $T\to\infty$, заменив $\Delta\omega$ дифференциалом $d\omega$, получим

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{d\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

Обозначим

$$S(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \qquad (9.12)$$

Формула (9.12) дает возможность преобразовать функцию времени $f(t)$ в функцию частоты $S(j\omega)$; преобразование (9.12) называют *прямым преобразованием Фурье*; а $S(j\omega)$ — *спектром функции* $f(t)$. Это комплексная величина, зависящая от вида функции $f(t)$. В соответствии с (9.12) в (9.11) заменим $\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$ на $\frac{1}{2\pi}S(j\omega)\,d\omega$ и учтем, что при изменении k от $-\infty$ до $+\infty$ $\omega=k\omega_0$ также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} S(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Заменив сумму интегралом, получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (9.13)$$

---

* Среди функций $f(t)$, для которых интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ расходится, наиболее важной для практики является функция $f(t)=A$, где A — постоянное число. Для того чтобы эту функцию представить интегралом Фурье, пользуются следующим приемом. Находят интеграл Фурье для функции $f(t)=Ae^{-\beta t}$, где $\beta>0$ и $f(t)=0$ при $t<0$. Для этой функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится, поэтому она может быть представлена интегралом Фурье. Далее в полученном выражении устремляют β к нулю.

Формула (9.13) представляет собой запись *интеграла Фурье* (*формулу обратного преобразования Фурье*). Она выражает непериодическую функцию $f(t)$ в виде бесконечно большого числа синусоидальных колебаний с бесконечно близкими частотами и бесконечно малыми амплитудами $S(j\omega)\,d\omega$ [$S(j\omega)$ конечно, но произведение $S(j\omega)\,d\omega$ бесконечно мало, так как бесконечно мала величина $d\omega$].

В соответствии с формулой (9.13) для нахождения реакции системы на любое воздействие следует его представить в виде бесконечно большого числа гармонических воздействий, символическим методом найти реакцию системы на каждое из воздействий и затем просуммировать реакции на все воздействия.

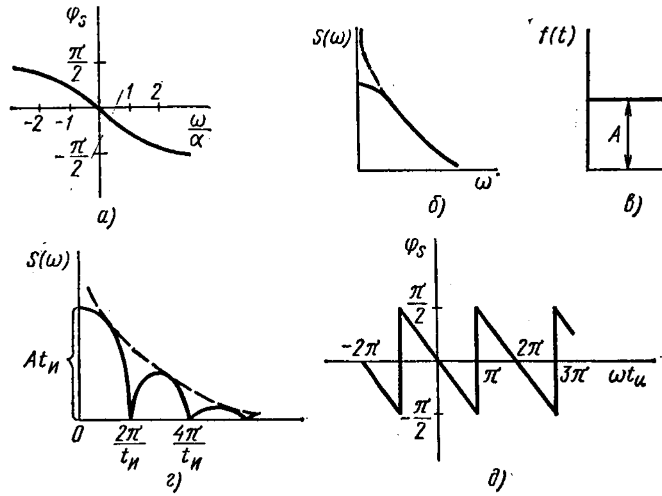


Рис. 9.1

Преобразования (9.12) и (9.13) являются взаимно обратными преобразованиями.

Отметим, что представление функции $f(t)$ в комплексной форме в виде интеграла Фурье [формулы (9.13)] привело к необходимости формально ввести отрицательную угловую частоту.

Сопоставим формулу (9.12) с формулой преобразования по Лапласу:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{9.14}$$

при условии, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Если учесть, что $f(t)=0$ при $t<0$, и заменить p на $j\omega$, то (9.14) переходит в (9.12). Следовательно, формулы для спектра функции $S(j\omega)$ могут быть получены из соответствующих формул изображений по Лапласу, если в последних p заменить на $j\omega$.

Пользуясь соотношениями § 8.39, найдем спектр функции $f(t)=e^{-\alpha t}$, полагая, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Изображение по Лапласу $1/(\alpha+p)$. Заменим p на $j\omega$ и получим спектр $S(j\omega)=1/(\alpha+j\omega)$; $S(j\omega)$ есть комплексная величина, равная $S(\omega)\,e^{j\varphi_s}$. Модуль ее равен $1/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$; аргумент $\varphi_s=\operatorname{arctg}[-\omega/\alpha]$. Графики для экспоненциального импульса изображены на рис. 9.1, *а, б*.

Пример 110. Найти $S(\omega)$ и $\varphi_s(\omega)$ для прямоугольного импульса (рис. 9.1, *в*) амплитудой A и длительностью $t_и$.

Решение. По формуле (9.12) находим спектр

$$S(j\omega)=A\int_0^{t_и} e^{-j\omega t}\,dt=A\,\frac{1-e^{-j\omega t_и}}{j\omega}.$$

Модуль $S(\omega)=\frac{2A}{\omega}\left|\sin\frac{\omega t_и}{2}\right|$.

График этой функции приведен на рис. 9.1, *г*. Пунктиром показана огибающая. Аргумент φ_s прямоугольного импульса определим по формуле $\operatorname{tg}\varphi_s=\frac{\cos\omega t_и-1}{\sin\omega t_и}=-\operatorname{tg}\frac{\omega t_и}{2}$. График φ_s показан на рис. 9.1, *д*. (На рис. 9.1, *г* по оси абсцисс ω.)

При значениях $\omega t_и=\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ \varphi_s$ возрастает скачком на π.

§ 9.3. Теорема Рейли. Теорему Рейли записывают следующим образом:

$$\int_0^\infty f^2(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S^2(\omega)\,d\omega. \tag{9.15}$$

Функция $f(t)=0$ при $t<0$; $S(\omega)$ представляет собой модуль спектра $S(j\omega)$ функции $f(t)$:

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \tag{9.16}$$

Если принять, что $f(t)$ есть напряжение, приложенное к активному сопротивлению в 1 Ом, то левая часть в (9.15) представляет собой энергию, выделяющуюся в этом сопротивлении.

Таким образом, *площадь квадрата модуля спектра $S(\omega)$, разделенная на π, является энергией, рассеиваемой в активном сопротивлении, на которое воздействует $f(t)$.*

В качестве основы при выводе теоремы Рейли служит обратное преобразование Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Умножим обе части последнего равенства на $f(t)$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt.$$

В правой части изменим порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt\right] d\omega.$$

В соответствии с формулой (9.16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt = S(-j\omega),$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\, S(-j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(\omega)\, d\omega.$$

Для перехода к формуле (9.15) учтем, что при $t < 0$ функция $f(t) = 0$. Это дает возможность заменить в левой части нижний предел с $-\infty$ на 0. Приняв во внимание, что квадрат модуля $S^2(\omega)$ есть четная функция частоты, заменим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ в правой части последнего уравнения на $2\int\limits_{0}^{+\infty}$. В результате получим формулу (9.15).

§ 9.4. Применение спектрального метода. Спектральный (частотный) метод исследования процессов в электрических цепях основан на использовании понятий спектров воздействующих импульсов и частотных свойств цепей. Особенно широко его применяют в радиотехнике при рассмотрении вопросов прохождения модулированных колебаний через усилители, фильтры и другие устройства, в импульсной технике при рассмотрении вопросов прохождения через четырехполюсники коротких импульсов длительностью порядка нескольких микросекунд, а в некоторых случаях даже нескольких наносекунд. Допускается, что модулированное колебание или соответственно импульс, пройдя через четырехполюсник, изменился по амплитуде, на некоторое время t_0 запоздал во времени, но недопустимо, чтобы существенно изменилась форма импульса (колебания) на выходе по сравнению с формой импульса (колебания) на входе. Недопустимость изменения формы импульса (колебания) следует из того, что именно в форме импульса (колебания) заключена информация, которую он несет.

Положим, что на вход некоторого четырехполюсника с передаточной функцией $K(j\omega) = K(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$ при нулевых начальных условиях воздействует сигнал $f_1(t)$, имеющий спектр $S_{вх}(j\omega)$. На выходе четырехполюсника появится сигнал $f_2(t)$, спектр которого

$$S_{вых}(j\omega) = K(j\omega)\, S_{вх}(j\omega), \tag{9.17}$$

где $S_{вх}(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$

Так как сигнал $f_2(t)$ может отличаться от сигнала $f_1(t)$ по величине (по амплитуде), положим в a раз, и запаздывать на некоторое время t_0, но по форме должен быть таким же, как и $f_1(t)$, то можно записать, что $f_2(t)=af_1(t-t_0)$.

Если к функции $f_2(t)$ применить преобразование Фурье, то окажется, что спектр функции $f_2(t)$ равен

$$aS_{вх}(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}. \tag{9.18}$$

Действительно,

$$S_{вых}(j\omega)=a\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-t_0)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

Введем новую переменную $t_1=t-t_0$. Тогда

$$S_{вых}(j\omega)=ae^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t_1)\,e^{-j\omega t_1}\,dt_1=ae^{-j\omega t_0}S_{вх}(j\omega).$$

Сравнивая (9.17) и (9.18), замечаем, что

$$K(j\omega)=K(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}=ae^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно, для прохождения импульса или модулированного колебания через четырехполюсник без искажения формы необходимо,

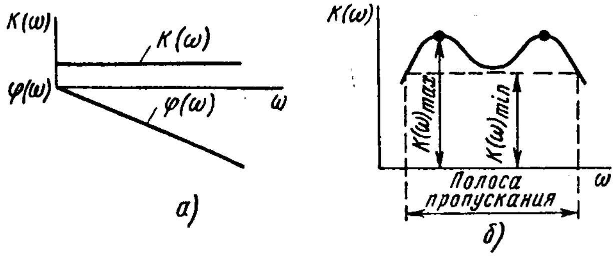


Рис. 9.2

чтобы модуль передаточной функции четырехполюсника был постоянен (не зависел от частоты), а аргумент $\varphi(\omega)=-\omega t_0$ линейно изменялся в функции частоты (рис. 9.2, *а*).

В реальных четырехполюсниках эти условия могут быть выполнены лишь приближенно в некоторой полосе частот, которую называют *полосой пропускания*. Полоса пропускания ограничена значениями ω, при которых отношение максимального значения $K(\omega)$ к минимальному равно $\sqrt{2}$ (рис. 9.2, *б*). Такой характеристикой обладает, например, схема рис. 3.42, *а*. Для этой полосы приближенно полагают, что $K(\omega)=\text{const}$ и $\varphi(\omega)=-\omega t_0$.

Для того чтобы сигнал при прохождении через четырехполюсник не изменил своей формы, необходимо, чтобы важнейшие гармонические составляющие частотного спектра сигнала находились внутри полосы пропускания четырехполюсника. Для импульсных сигналов треугольной, трапецеидальной, прямоугольной, колоколообразной и некоторых других форм принимают, что они занимают полосу частот, грубо говоря, от $\omega=0$ до $\omega=2\pi/t_и$, где $t_и$ — длительность импульса.

Так как в полосе пропускания идеальные условия для прохождения импульса все же не выполняются, то, проходя через четырехполюсник, импульс в какой-то степени искажается. Определить степень искажения можно двумя способами, основанными на частотных представлениях.

Первый способ состоит в непосредственном применении прямого и обратного преобразований Фурье.

Основные этапы этого способа таковы: 1) нахождение спектра $U_1(j\omega)$ входного сигнала $u_1(t)$; 2) определение передаточной функции четырехполюсника $K(j\omega)$; 3) получение спектра выходного сигнала $U_2(j\omega) = K(j\omega)U_1(j\omega)$; 4) определение $u_2(t)$ по $U_2(j\omega)$.

Последнюю операцию можно осуществить с помощью формулы (9.13), но практически ее удобнее выполнить, используя таблицу изображений по Лапласу, заменив $j\omega$ на p в $U_2(j\omega)$.

Такой путь решения мало чем отличается от решения той же задачи операторным методом и для сложных схем оказывается малопригодным, поскольку решение достаточно громоздко, и, пользуясь им, трудно сделать вывод о том, как тот или иной конкретный элемент схемы при неизменных остальных влияет на фронт импульса и на его вершину. Пользуясь этим методом, трудно также судить о том, какие элементы схемы в наибольшей степени влияют на деформацию фронта, какие — на деформацию вершины импульса.

В литературе по импульсной технике получил распространение второй способ решения, также основанный на спектральных представлениях. В основу его положено то обстоятельство, что искажение формы фронта выходного импульса по сравнению с формой фронта входного импульса зависит от свойств передаточной функции четырехполюсника на высоких (теоретически на бесконечно больших частотах), а искажение вершины импульса определяется свойствами передаточной функции на низких частотах (теоретически на частотах, близких к нулю).

Для того чтобы в этом убедиться, проделаем некоторые выкладки.

Взяв в качестве исходной формулу (8.63б) и заменив в ней входное напряжение $u(t)$ на $u_1(t)$, ток $i(t)$ на выходное напряжение четырехполюсника $u_2(t)$, переходную проводимость $g(t)$ на переходную функцию четырехполюсника $h(t)$, получим

$$u_2(t) = u_1(t)h(0) + \int_0^t u_1(t-\tau)h'(\tau)\,d\tau. \tag{9.19}$$

Положим, что напряжение $u_1(t)$, подводимое в момент $t=0$ к цепи с нулевыми начальными условиями, является синусоидальным и по амплитуде равно 1:

$$u_1(t) = \mathrm{Im}[1 \cdot e^{j\omega t}], \tag{а}$$

где 1 представляет собой комплексную амплитуду входного напряжения, т. е. $\dot{U}_1 = 1$. Учтем, что

$$u_1(t-\tau) = \mathrm{Im}[1 \cdot e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}]. \tag{б}$$

После подстановки (а) и (б) в формулу (9.19) получим

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left\{\left[h(0) + \int\limits_0^t h'(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

Комплексную амплитуду напряжения $u_2(t)$ в установившемся синусоидальном режиме частоты ω определим, если в квадратной скобке положим $t \to \infty$:

$$\dot{U}_2(\omega) = h(0) + \int\limits_0^\infty h'(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau.$$

Передаточная функция четырехполюсника

$$K(j\omega) = \dot{U}_2(\omega)/\dot{U}_1(\omega) = h(0) + \int\limits_0^\infty h'(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau. \qquad (9.20)$$

При $\omega = \infty$

$$K(j\infty) = h(0). \qquad (9.20')$$

При $\omega = 0$

$$K(0) = h(\infty). \qquad (9.21)$$

Из формулы (9.20′) следует, что свойства переходной функции четырехполюсника в начальный момент, т. е. $h(0)$, определяются свойствами передаточной функции на бесконечно большой частоте $K(j\infty)$. В свою очередь формула (9.21) свидетельствует о том, что свойства переходной функции при относительно больших моментах времени зависят от свойств передаточной функции при нулевой частоте.

Таким образом, чтобы не исказился фронт импульса, следует обеспечить условия неискаженной передачи на высоких частотах, а для сохранения формы вершины импульса — условия неискаженной передачи на низких частотах.

Для того чтобы выяснить влияние отдельных элементов схемы на искажение формы импульса, прежде всего составляют полную схему замещения четырехполюсника, учитывая в ней все факторы, влияющие на частотные свойства [паразитные емкости ламп импульсных трансформаторов, индуктивности рассеяния трансформаторов, емкостные свойства *p-n*-переходов транзисторов, зависимость коэффициентов усиления транзисторов от скорости процесса (от частоты ω)].

Затем из полной схемы замещения образуют две расчетные схемы.

Первая схема представляет собой *расчетную схему для высоких частот* и служит для выяснения степени искажения фронта импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения путем закорачивания последовательно включенных емкостей по пути следования сигнала (относительно больших по сравнению с паразитными) и разрыва индуктивностей, включенных параллельно активным сопротивлениям схемы.

Вторая схема представляет собой *расчетную схему для низких частот* и служит для выяснения степени деформирования вершины импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения, оставляя в ней последовательно включенные емкости по пути следования сигнала, а также индуктивности, включенные параллельно активным сопротивлениям, и закорачивая последовательные индуктивности по пути следования сигнала. Паразитные емкости в низкочастотной схеме не учитывают.

В каждой из этих расчетных схем с учетом упрощений, о которых шла речь в § 8.16, число оставшихся индуктивностей и емкостей оказывается значительно меньше, чем в полной схеме замещения.

Для каждой из схем характеристическое уравнение оказывается часто первой или второй, сравнительно редко третьей степени, и по-

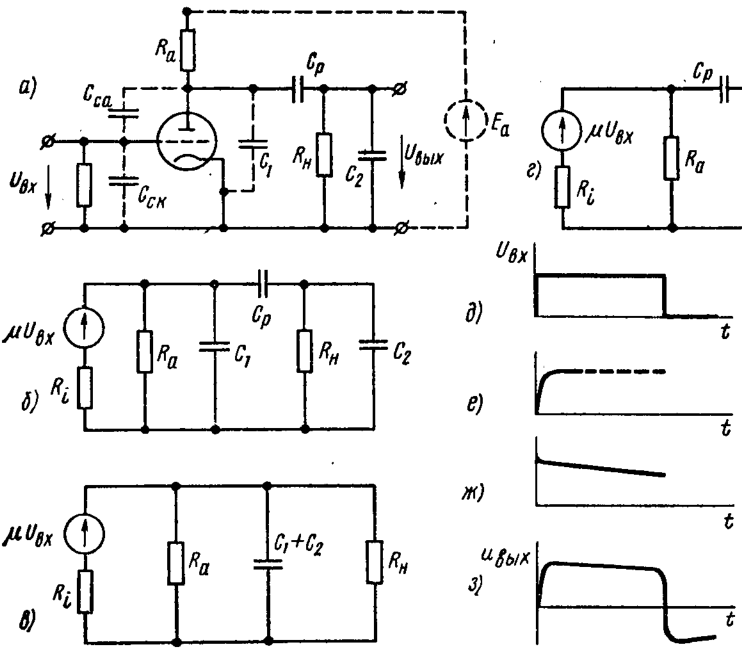


Рис. 9.3

этому влияние каждого из элементов схемы на искажение фронта и вершины импульса может быть выявлено относительно легко. Расчет переходного процесса в высокочастотной и низкочастотной схемах производят обычно операторным методом.

Окончательный результат (кривую всего переходного процесса) получают, сопрягая решения для этих двух схем. Вопрос об искажении заднего фронта импульса принципиально решается так же, как и вопрос об искажении переднего фронта импульса.

Проиллюстрируем сказанное на примере. На рис. 9.3, *а* изображена схема лампового усилителя на сопротивлениях, где $R_н$ — нагрузочное сопротивление; $C_р$ — относительно большая разделительная емкость (через нее проходит только переменная составляющая выходной величины); C_2 — относительно малая емкость нагрузки и (или) емкость второго каскада усиления. Пунктиром показаны источник анодного напряжения E_a и весьма малые по сравнению с $C_р$ (по несколько пикофарад) межэлектродные емкости $C_{са}$, $C_{ск}$ и C_1 (емкость анод — катод и емкость монтажа). В дальнейшем емкости $C_{са}$ и $C_{ск}$ не учитываем, как оказывающие малое влияние на работу схемы.

Схема замещения для расчета переходного процесса при воздействии относительно малых по амплитуде переменных составляющих представлена на рис. 9.3, *б*. Она является схемой третьего порядка. Укороченные схемы для формирования фронта (рис. 9.3, *в*) и для формирования вершины импульса (рис. 9.3, *г*) являются схемами первого порядка.

Для схемы рис. 9.3, *в*

$$U_{вых}(p)=\frac{\mu}{R_i}\,\frac{U_{вх}(p)}{g_{э1}+p\,(C_1+C_2)},$$

где $g_{э1}=(1/R_i)+(1/R_в)+(1/R_н)$.

Для схемы рис. 9.3, *г*

$$U_{вых}(p)=\frac{\mu R_н}{R_i g_{э2}}\,\frac{pC_рU_{вх}(p)}{1+\frac{g_{э1}}{g_{э2}}R_нpC_р};\qquad g_{э2}=\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_a}.$$

Если входное напряжение представляет собой прямоугольный импульс (рис. 9.3, *д*), то фронт выходного напряжения будет в виде нарастающей экспоненты (рис. 9.3, *е*), а вершина — в виде спадающей экспоненты (рис. 9.3, *ж*). Результирующая кривая $u_{вых}$ изображена на рис. 9.3, *з*. Подбор параметров усилителя осуществляют исходя из допустимой деформации фронта и вершины выходного импульса по сравнению с входным импульсом.

§ 9.5. Определение переходной функции четырехполюсника через передаточную и передаточной через переходную. Если в формуле (9.20) заменить $j\omega$ на p, то передаточную функцию четырехполюсника на комплексной частоте найдем через переходную функцию следующим образом:

$$K(p)=h(0)+\int_0^\infty h'(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau. \tag{9.22}$$

В свою очередь переходную функцию $h(t)$ определим через передаточную $K(p)$, исходя из следующих соображений. В формуле для $K(j\omega)$, заменив $j\omega$ на комплексную частоту p, получим $K(p)$. Выразим выходное напряжение четырехполюсника $U_2(p)$ через входное $U_1(p)$ и передаточную функцию

$$U_2(p)=U_1(p)\,K(p). \tag{а}$$

Так как $h(t)$ есть выходное напряжение $u_2(t)$ при $u_1(t)=1\,(t)$, то, положив в (а) $U_1(p)=1/p$, получим

$$h(t)\risingdotseq K(p)/p. \tag{9.23}$$

Вопросы для самопроверки

1. Чем принципиально отличается ряд Фурье от интеграла Фурье? Запишите и прокомментируйте формулы прямого и обратного преобразования Фурье. 2. Чем объяснить, что при обратном преобразовании Фурье кроме положительной угловой частоты ω используется и отрицательная? 3. Любая ли функция $f(t)$ может быть преобразована по Фурье? 4. Для функции $f(t)$ известна $F(p)$. Как записать $S(j\omega)$ этой функции? 5. Построить графики модуля и аргумента спектров функций $te^{-\alpha t}$ и $(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$ (функции равны нулю при $t<0$). 6. Сформулируйте и докажите теорему Рейли, дайте ей физическое толкование. 7. Что понимают под полосой пропускания реального четырехполюсника? 8. Чем руководствуются при составлении укороченных схем четырехполюсника при исследовании деформации фронта и вершины проходящего через него короткого импульса? 9. Как определить $K(p)$ через $h(t)$ и $h(t)$ через $K(p)$? 10. Решите задачи 16.11, 16.35, 16.36, 16.41.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 10.1. Характеристика синтеза. *Синтезом линейной электрической цепи* называют определение структуры цепи и числовых значений составляющих ее элементов R, L, C по известным операторным выражениям этой цепи или по временным характеристикам при воздействии на вход импульса определенной формы. Одному и тому же операторному выражению, принятому в качестве исходного при синтезе, может соответствовать несколько различных схем разной структуры. Поэтому, после того как получено несколько решений, выбирают из них наиболее подходящее. Чаще всего критериями при окончательном выборе схемы являются стоимость, габариты и масса устройства.

Задачи синтеза ставят и решают в теории сложных фильтров, в теории корректирующих контуров в автоматике, связи, радиотехнике, а также в кибернетике при создании предсказывающих и сглаживающих устройств.

Синтез развивался главным образом по двум направлениям: 1) по известным операторным функциям [по $Z(p)$ для двухполюсников и по передаточной функции для четырехполюсников]; 2) по временным характеристикам, т. е. по известному временному отклику системы при воздействии импульса обычно прямоугольной формы.

Эти два направления взаимно дополняют и развивают друг друга. В настоящее время наибольшие результаты достигнуты на первом из упомянутых направлений.

В § 10.2—10.9 рассмотрены основные сведения о синтезе цепей по заданной операторной функции цепи (более полно об этом см., например, [9]). Методика синтеза цепей по заданным временным функциям здесь не рассматривается (для ознакомления с ней следует обратиться, например, к [17]).

В теории автоматического регулирования распространен синтез, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик; в импульсной технике подбор параметров электронных и полупроводниковых схем, т. е. в известном смысле синтез этих схем, производят, используя спектральный метод, рассмотренный в гл. 9.

§ 10.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполюсников. Если представить входное сопротивление двухполюсника в виде отношения двух полиномов, расположенных по убывающим степеням оператора p,

$$Z(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}, \tag{10.1}$$

то должны выполняться следующие пять условий:

1) все коэффициенты a и b в числителе и знаменателе должны быть неотрицательны (в дальнейшем будет ясно, что условие 1 вытекает из условия 3);

2) наивысшая степень полинома числителя (n) не может отличаться от наивысшей степени полинома знаменателя (m) более чем на 1. То же и в отношении минимальных степеней числителя и знаменателя;

3) если условиться значения p, при которых $Z(p)=0$, называть нулями функции $Z(p)$, а значения p, при которых $Z(p)=\infty$, называть полюсами $Z(p)$, то нули и полюсы должны быть расположены только в левой части плоскости p;

4) нули, расположенные на мнимой оси плоскости p, должны быть только простые, не кратные;

5) если вместо p в выражение $Z(p)$ подставить $j\omega$, то при любом значении ω должно быть $\operatorname{Re} Z(j\omega)\geqslant 0$.

Поясним эти требования. Из § 8.11 известно, что свободные процессы описываются слагаемыми вида $A_k e^{p_k t}$ и обязательно должны затухать во времени; p_k — корни уравнения $Z(p)=0$. Но затухать свободные процессы (слагаемые вида $A_k e^{p_k t}$) могут только в том случае, если действительная часть p_k отрицательна. Отсюда следует, что нули уравнения $Z(p)=0$ должны обязательно находиться в левой части плоскости p.

Поскольку каждому планарному двухполюснику соответствует дуальный, а входная проводимость дуального двухполюсника $Y(p)=Z(p)/k$, где k — некоторый коэффициент, имеющий размерность Ом^2 (см. § 3.43), то входное сопротивление дуального двухполюсника равно $k/Z(p)$. Нули дуального двухполюсника, являющиеся полюсами исходного, также должны быть расположены в левой части плоскости p.

Из курса математики известно, что если имеются два кратных корня уравнения $N(p)=0$, то соответствующие им слагаемые в решении берутся в виде $(\dot{C}_1+\dot{C}_2 t)e^{pt}$. Если допустить, что на мнимой оси могут быть два кратных корня $p=j\beta$, то соответствующая им свободная составляющая $(\dot{C}_1+\dot{C}_2 t)e^{j\beta t}$ нарастала бы до бесконечности, чего физически быть не может. Все коэффициенты a и b в числителе и знаменателе $Z(p)$ должны быть положительны. Если бы это условие нарушилось, то на основании леммы, вытекающей из теоремы Гурвица (см. § 17.2), среди корней уравнения $Z(p)=0$ появились бы корни с положительной действительной частью.

Поясним, почему степень m не может отличаться от степени n более чем на 1. Допустим, что степень m больше степени n на 2. Тогда $p\to\infty$ является нулем второй кратности для $Z(p)$, а то, что происходит при $p \to \infty$, можно считать происходящим на мнимой оси плоскости p (мнимая ось простирается в бесконечность). Но тогда на мнимой оси получается кратный корень, чего быть не может.

Проведя такое же рассуждение для дуального двухполюсника, убедимся, что степень n не может быть больше степени m более чем на 1.

Если в $Z(p)$ вместо p подставить $j\omega$, то $Z(j\omega)$ будет представлять собой комплексное сопротивление двухполюсника в установившемся синусоидальном режиме при частоте ω, а $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ — действительную часть входного сопротивления. В том случае, когда двухполюсник содержит активные сопротивления, его $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$ [он потребляет активную мощность $I^2 \operatorname{Re} Z(j\omega)$]. Если же двухполюсник чисто реактивный, то $\operatorname{Re} Z(j\omega) = 0$. В общем случае для пассивного двухполюсника всегда должно быть $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geqslant 0$.

Пример 111. Задано несколько выражений вида $N(p)/M(p)$. Выяснить, могут ли они представлять собой входные сопротивления некоторых двухполюсников:

$$1)\ \frac{5p-6}{25p^2+12p+2}; \quad 2)\ \frac{20p^2+12p+6}{12p^4+8p^3+12p^2+13p+1}; \quad 3)\ \frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1};$$

$$4)\ \frac{2p^2+p+1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

Решение. Первое выражение не может представлять собой $Z(p)$, так как один из коэффициентов в числителе отрицателен. Второе и третье выражения также не могут представлять собой $Z(p)$: второе потому, что максимальная степень p в знаменателе больше максимальной степени p числителя на 2, третье потому, что

$$\operatorname*{Re}_{p=j\omega}\left[\frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}\right] = \frac{(1-\omega^2)(1-2\omega^2)}{(1-\omega^2)^2(1+\omega^2)}$$

при значениях ω от 0,707 до 1 отрицательно. Четвертое выражение всем требованиям удовлетворяет и потому может представлять собой $Z(p)$ некоторого двухполюсника.

Кроме названных общих свойств $Z(p)$ перечислим свойства $Z(p)$ двухполюсников, состоящих только из R и C, только из R и L и только из L и C. RC- и RL-двухполюсники имеют чередующиеся простые нули и полюсы на отрицательной вещественной оси плоскости p. Для RC-двухполюсников ближайшей особой точкой к началу координат является полюс, в бесконечности полюс отсутствует. Для двухполюсников типа RL ближайшей к началу координат особой точкой является нуль, при $p=0$ полюс отсутствует. Двухполюсники типа LC имеют чередующиеся простые нули и полюсы на мнимой оси. Степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на 1.

Существует несколько способов реализации двухполюсников по заданной $Z(p)$, удовлетворяющей перечисленным в § 10.2 условиям. Три основных способа реализации рассмотрены в § 10.3—10.5.

§ 10.3. Реализация двухполюсников лестничной (цепной) схемой. Познакомимся с понятием непрерывной дроби. *Непрерывной дробью* называют дробь вида

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}.$$

Входное сопротивление или входная проводимость лестничной (цепной) схемы по типу рис. 10.1, *а*, в которой продольные сопротивления названы Z_1, Z_3, Z_5, ... и поперечные проводимости — Y_2, Y_4, Y_6, ..., могут быть представлены непрерывной дробью.

Для того чтобы убедиться в этом, проделаем небольшие выкладки. Найдем входную проводимость правой части схемы по отношению к зажимам mn. Она равна $\cfrac{1}{Z_5+\cfrac{1}{Y_6}}$. Суммарная проводимость правой части схемы по отношению к зажимам mn с учетом ветви с проводимостью Y_4 равна $Y_4+\cfrac{1}{Z_5+\cfrac{1}{Y_6}}$. Входное сопротивление по отношению к тем же зажимам

$$\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+\cfrac{1}{Y_6}}}.$$

Далее определим входное сопротивление всей схемы, равное

$$Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+\cfrac{1}{Y_6}}}}}. \tag{10.2}$$

Таким образом, возникает задача о переходе от (10.1) к (10.2), т. е. задача о последовательном упорядоченном определении элементов лестничной схемы (Z_1, Z_3, ...; Y_2, Y_4, Y_6, ...) по выражению (10.1). С этой целью:

1) располагаем полиномы $N(p)$ и $M(p)$ либо по убывающим, либо по возрастающим степеням p;

2) делим многочлен на многочлен, следя за тем, чтобы в процессе деления получались положительные (не отрицательные) слагаемые и чтобы они не содержали p в степени больше 1;

3) учитываем, что если в процессе деления возникнет необходимость перейти от расположения полиномов по убывающим степеням к расположению их по возрастающим степеням, то эта операция вполне допустима.

При делении полинома N на полином M будет получено частное Z_1 и остаток O_1/M, т. е.

$$Z=\frac{N}{M}=Z_1+\frac{O_1}{M}=Z_1+\frac{1}{M/O_1}.$$

При делении M/O_1 будет получено частное Y_2 и остаток $\frac{O_2}{O_1}=\frac{1}{O_1/O_2}$.

Но $\frac{O_1}{O_2}=Z_3+\frac{O_3}{O_2}=Z_3+\frac{1}{O_2/O_3}$. Поэтому $\frac{M}{O_1}=Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{O_2/O_3}}$.

На основании изложенного процесс последовательного определения элементов можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{r|l} N & M \\ MZ_1 & \overline{Z_1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} M & O_1 \\ O_1Y_2 & \overline{Y_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} O_1 & O_2 \\ O_2Z_3 & \overline{Z_3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} O_2 & O_3 \\ O_3Y_4 & \overline{Y_4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} O_3 & O_4 \\ Z_5O_4 & \overline{Z_5} \end{array}$$

. . . .

. . . .

Пример 112. Определить параметры лестничных схем, для которых $Z(p)=\frac{p^4+9p^2+8}{p^3+3p}$, располагая сначала при делении полиномы по убывающим, а затем (для реализации второй схемы) по возрастающим степеням p. Как будет видно из дальнейшего, в процессе деления в обоих случаях не возникнет необходимости в переходе от расположения по убывающим к расположению по возрастающим степеням p.

Решение. Производим деление, расположив слагаемые по убывающим степеням p:

$$\begin{array}{r|l} p^4+9p^2+8 & p^3+3p \\ p^4+3p^2 & \overline{p\to Z_1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} p^3+3p & 6p^2+8 \\ p^3+\frac{8}{6}p & \overline{\frac{1}{6}p\to Y_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6p^2+8 & \frac{10}{6}p \\ 6p^2 & \overline{\frac{36}{10}p\to Z_3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{10}{6}p & 8 \\ \frac{10}{6}p & \overline{\frac{5}{24}p\to Y_4} \\ \hline 0 & \end{array}$$

На рис. 10.1, *б* изображена схема и на ней указаны соответственно в генри и фарадах значения индуктивностей и емкостей, полученные при делении, когда слагаемые были расположены по убывающим степеням p*.

Схема и параметры для второго случая, когда при делении слагаемые расположены по возрастающим степеням p, даны на рис. 10.1, *в*.

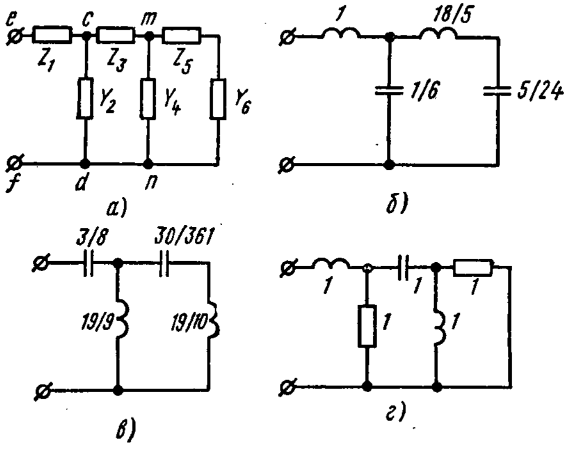


Рис. 10.1

Рассмотрим далее пример, который является иллюстрацией того, что иногда в процессе деления возникает необходимость изменения порядка расположения слагаемых.

Пример 113. Требуется реализовать лестничной схемой

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}:$$

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1 & 2p^2 + 2p + 1 \\ \underline{2p^3 + 2p^2 + p } & p \to Z_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2p^2 + 2p + 1 & p^2 + p + 1 \\ \underline{2p^2 + 2p + 2} & 2 \\ -1 & \end{array}$$

---

* Так как примеры имеют чисто иллюстративный характер, то не следует обращать внимание на то, что индуктивности и емкости в примерах достигают практически трудно осуществимых значений. Кроме того, реализуемые здесь $Z(p)$ можно рассматривать как *нормированные по частоте и величине (см. § 10.9)*. В этом случае от нормированных $R_н$, $L_н$, $C_н$ параметров переходят к действительным, осуществить которые практически уже не составит затруднений.

Так как получаем отрицательные слагаемые, дальнейшее деление прекращаем и переходим к расположению по возрастающим степеням p:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & & 1+2p+2p^2 & \big| \; \underline{1+p+p^2} \\
 & & & \underline{1+p+p^2} & \big| \; 1\to Y_2 \\
 & & 1+p+p^2 & \big| \; \underline{p+p^2} & \\
 & & \underline{1+p} & \big| \; \frac{1}{p}\to Z_3 & \\
 & p+p^2 & \big| \; \underline{p^2} & & \\
 & \underline{p} & \big| \; \frac{1}{p}\to Y_4 & & \\
p^2 & \big| \; \underline{p^2} & & & \\
p^2 & \big| \; 1\to Z_5 & & &
\end{array}
$$

На рис. 10.1, *г* изображена соответствующая схема.

В заключение отметим, что могут встретиться такие $Z(p)$, которые невозможно представить лестничной схемой. В этом случае применяют второй способ реализации, описанный в § 10.4. [Второй способ применяют не только в случае невозможности представления $Z(p)$ лестничной схемой.]

Если и он окажется неприменимым (например, при комплексных нулях и полюсах), то следует воспользоваться методом Бруне (см. § 10.5).

§ 10.4. Реализация двухполюсников путем последовательного выделения простейших составляющих. В качестве введения ко второму способу реализации двухполюсника запишем операторные сопротивления для простейших одно- и двухэлементных двухполюсников. На рис. 10.2, *а — д* изображены простейшие двухполюсники и записаны соответствующие им операторные сопротивления; на рис. 10.2, *е*, *ж* — сопротивления и проводимости и на рис. 10.2, *з* — проводимость. Для рис. 10.2, *а* $C=1/a_0$, для рис. 10.2, *б* $L=a_1$, для рис. 10.2, *в* $2a_k = 1/C_k$ и $\omega_k^2 = 1/(L_kC_k)$, для рис. 10.2, *г* $a_k=R_k$ и $m_k=R_k/L_k$, для рис. 10.2, *д* $b=1/C$ и $d=1/RC$.

Сущность метода состоит в том, что заданное $Z(p)$ представляют в виде (рис. 10.3, *а*)

$$Z(p)=a_1p+\frac{a_0}{p}+\sum\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}+Z_1(p). \tag{10.3}$$

Первому слагаемому a_1p соответствует последовательно соединенная индуктивность a_1, второму — последовательная емкость $1/a_0$. Каждому слагаемому вида $\frac{2a_kp}{p^2+\omega^2_k}$ соответствует последовательно соединенный параллельный резонансный контур; $\left(\text{слагаемому } \frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}\right.$ — пара полюсов $\left.p_{1,2}=\pm j\omega_k, \text{ находящихся на мнимой оси плоскости } p\right)$. Сопротивление $Z_1(p)$ уже не содержит полюсов на мнимой оси. Функцию $Z_1(p)$, среди полюсов которой нет полюсов, находящихся на мнимой оси, называют *функцией минимального реактивного сопротивления*. Возможны следующие варианты для $Z_1(p)$ *:

* В пунктах а) — в) полагаем, что коэффициенты a_k, b_k и b_0 действительны и положительны.

а) $Z_1(p)=\sum\frac{a_k p}{p+m_k}$, в этом случае его осуществляют последовательным соединением двухполюсников рис. 10.2, *г*;

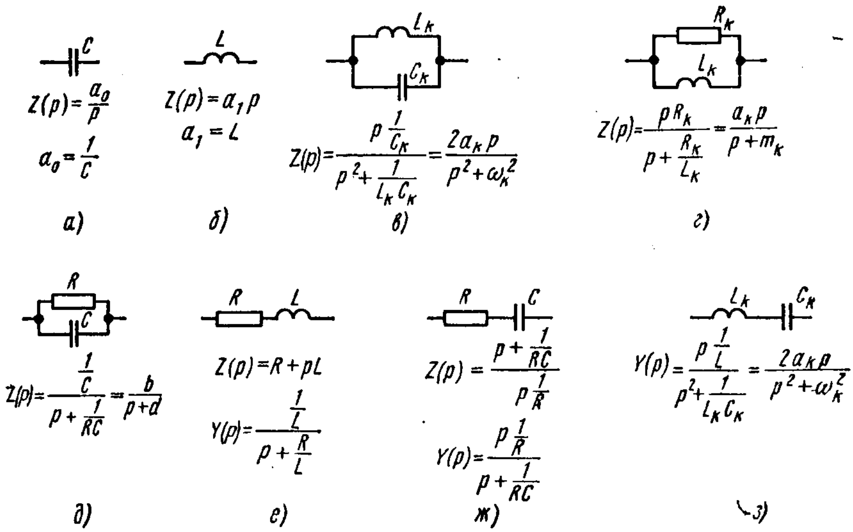


Рис. 10.2

б) $Z_1(p)=\sum\frac{b_k}{p+d_k}+b_0$; $Z_1(p)$ реализуют в виде активного сопротивления b_0 и последовательно с ним соединенных двухполюсников рис. 10.2, *д*;

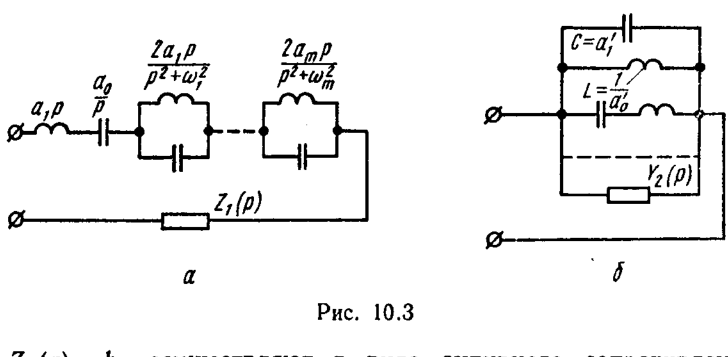


Рис. 10.3

в) $Z_1(p)=b_0$ осуществляют в виде активного сопротивления b_0. Индуктивность $a_1=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{Z(p)}{p}$ (рис. 10.3, *а*).

Величину a_0 в схеме рис. 10.3, *а* определяют как интегральный вычет функции $Z(p)=\frac{N(p)}{M(p)}$ в полюсе $p=0$:

$$a_0=\operatorname*{Res}_{p=0} Z(p)=N(0)/M'(0).$$

Коэффициент a_k в выражении $\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2}$ определяют как интегральный вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p=j\omega_k$ [ему же равен вычет функции $Z(p)$ при $p=-j\omega_k$, так как они оба действительны]:

$$a_k = \operatorname*{Res}_{p=j\omega_k} Z(p) = \frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}.$$

После того как найдено a_k можно определить L_k и C_k двухполюсника рис. 10.2, *в*:

$$C_k = 1/(2a_k); \quad L_k = 1/(\omega_k^2 C_k).$$

Реализацию двухполюсника можно осуществлять не только по его входному сопротивлению $Z(p)$, но и по его входной проводимости $Y(p)=1/Z(p)$. Входную проводимость $Y(p)$ представляют в виде схемы рис. 10.3, *б*

$$Y(p) = a_1' p + \frac{a_0'}{p} + \sum \frac{2a_k' p}{p^2+\omega_k^2} + Y_2(p). \qquad (10.4)$$

В соответствии с правой частью (10.4) двухполюсник осуществляют в виде параллельного соединения емкости a_1', индуктивности $1/a_0'$, двухполюсников по типу рис. 10.2, *з* (им соответствуют слагаемые вида $\left.\frac{2a_k' p}{p^2+\omega_k^2}\right)$ и двухполюсника минимальной реактивной проводимости $Y_2(p)$, не содержащего полюсов на мнимой оси. Коэффициенты a_0' и a_k' определяют путем нахождения интегральных вычетов функции $Y(p)$ соответственно при $p=0$ и $p=j\omega_k$, а $C=a_1'=\lim\limits_{p\to\infty} Y(p)/p$.

Если функция $Y_2(p)=\sum \frac{m}{p+n}$, то ее реализуют в виде параллельного соединения двухполюсников рис. 10.2, *е*. Если функция $Y_2(p)= =\sum \frac{rp}{p+s}$, то ее реализуют параллельным соединением двухполюсников рис. 10.2, *ж* *. Следует иметь в виду, что, при реализации двухполюсника по его $Z(p)$ в виде последовательного соединения простейших двухполюсников, начиная с некоторого этапа, может оказаться целесообразным перейти от сопротивления к проводимости и дальнейшую реализацию осуществлять уже параллельно соединенными двухполюсниками. Потребность в таком переходе может возникнуть, например, когда остающаяся для реализации часть $Z(p)$ имеет нуль при $p=0$. Этому нулю соответствует полюс $Y(p)$ при $p=0$, который реализуют индуктивностью.

Пример 114. Реализовать $Z(p)=\frac{p^3+3p^2+2p+2}{p(p^2+2p+2)}$.

Решение. Так как $Z(p)$ имеет полюс при $p=0$, то в схеме может быть выделена последовательно включенная емкость $C=1/a_0$, где $a_0=\operatorname*{Res}_{p=0} Z(p)=2/2=1$. Функция $Z(p)$ не имеет полюсов, лежащих на мнимой оси. Поэтому в состав его не входят последовательно вклю-

* Полагаем, что коэффициенты m и r действительны и положительны.

ченные двухполюсники типа рис. 10.2, *в*. Определим, какое $Z(p)$ осталось реализовать [назовем его $Z_3(p)$]:

$$Z_3(p) = Z(p) - \frac{a_0}{p} = \frac{p^2+2p}{p^2+2p+2}.$$

Функция $Z_3(p)$ имеет нуль при $p=0$. Для реализации оставшейся части схемы перейдем к проводимости $Y_3(p) = \frac{p^2+2p+2}{p(p+2)}$. Полюсу этой проводимости при $p=0$ соответствует индуктивность

$$a_0' = \operatorname*{Res}_{p=0} Y_3(p) = 1.$$

Осталось реализовать

$$Y_2(p) = Y_3(p) - \frac{1}{p} = \frac{p^2+p}{p(p+2)} = \frac{p}{p+2} + \frac{1}{p+2}.$$

Слагаемому $p/(p+2)$ в соответствии с рис. 10.2, *ж* отвечает ветвь из последовательно соединенных $R=1$ Ом и $C=0{,}5$ Ф. В соответствии

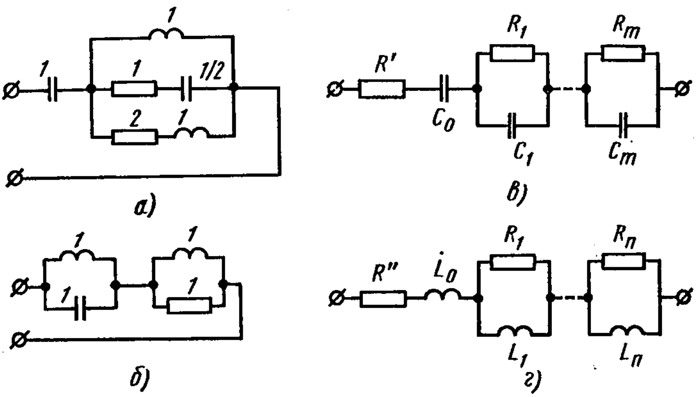


Рис. 10.4

с рис. 10.2, *е* проводимости $1/(p+2)$ отвечает ветвь с $L=1$ Г и $R=2$ Ом. Полученная схема изображена на рис. 10.4, *а*.

Пример 115. Реализовать $Z(p) = \frac{p^3+p^2+2p}{p^3+p^2+p+1}$.

Решение. При $p=0$ у $Z(p)$ нет полюса, поэтому последовательная емкость у искомого двухполюсника отсутствует. Функция $Z(p)$ имеет два полюса $p_{1,2} = \pm j$, расположенных на мнимой оси. Выделим параллельный резонансный контур рис. 10.2, *в*, соответствующий этим полюсам:

$$a_k = \operatorname*{Res}_{p=j} Z(p) = \left(\frac{p^3+p^2+2p}{3p^2+2p+1}\right)_{p=j} = \frac{-j-1+2j}{-3+2j+1} = \frac{1}{2};$$

$$C_k = 1/2a_k = 1\Phi; \quad \omega_k = 1; \quad L_k = 1/(\omega_k^2 C_k) = 1\ \Gamma.$$

Найдем функцию минимального реактивного сопротивления:

$$Z_1(p) = Z(p) - \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p+1}.$$

В соответствии с рис. 10.2, *г* реализуем $Z_1(p)$ в виде параллельного соединения активного сопротивления 1 Ом и индуктивности 1 Г. Схема искомого двухполюсника изображена на рис. 10.4, *б*.

Двухполюсники, состоящие только из R и C, могут быть реализованы, например, канонической схемой рис. 10.4, *в*, а состоящие из R и L — схемой рис. 10.4, *г*.

Для схемы рис. 10.4, *в*

$$Z(p)=R'+\frac{a_0}{p}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{p+d_k};\quad b_k=\frac{1}{C_k};\quad d_k=\frac{1}{R_kC_k};$$

$$R'=\lim_{p\to\infty}Z(p);\quad a_0=\lim_{p\to 0}pZ(p);\quad b_k=\operatorname*{Res}_{p=-d_k}Z(p).$$

Для схемы рис. 10.4, *г*

$$Z(p)=R''+pL_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kp}{p+m_k};$$

$$R''=\lim_{p\to 0}Z(p);\quad L_0=\lim_{p\to\infty}Z(p)/p.$$

Параметры R_k и L_k находим, имея в виду, что сопротивление $\frac{a_kp}{p+m_k}$ соответствует параллельному соединению R_k и L_k, где $a_k=R_k$; $m_k=R_k/L_k$; $a_k=\operatorname*{Res}_{p=-m_k}Z(p)/p$.

§ 10.5. Метод Бруне. Основные этапы метода Бруне следующие.

1. Прежде всего проверяют, не содержит ли заданное $Z(p)$ [назовем его $Z_{зад}(p)$] полюсов на мнимой оси. Если они имеются, то из состава $Z_{зад}(p)$ выделяют соответствующие этим полюсам один или несколько последовательно включенных параллельных резонансных контуров. В результате получают

$$Z_{зад}(p)-\sum\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}=Z(p). \tag{10.5}$$

Этот этап соответствует переходу от рис. 10.5, *а* к рис. 10.5, *б*. Коэффициент $a_k=\operatorname*{Res}_{p=j\omega_k}Z_{зад}(p)$.

Функция $Z(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси и представляет собой функцию минимального реактивного сопротивления.

2. Полагая $p=j\omega$, в $Z(j\omega)$ выделяют действительную часть, т. е. находят $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ и определяют частоту ω, при которой $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ минимальна. Эта частота может быть равна нулю, бесконечности или иметь некоторое конечное значение (в последнем случае ее будем называть ω_0). Подсчитаем также минимальное значение $\operatorname{Re}Z(j\omega)$, которое назовем R_{min}.

3. Из $Z(p)$ вычитают R_{min} и находят $Z_1(p)$. Этой операции соответствует переход от рис. 10.5, *б* к рис. 10.5, *в*. Заметим, что степени числителя и знаменателя $Z_1(p)$ одинаковы.

4. Если частота, при которой имеет место минимум $\operatorname{Re} Z(j\omega)$, равна нулю или бесконечности, то уже на этой стадии делается попытка реализовать $Z(p)$ лестничной схемой. Если же минимум $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ имеет место при некоторой $\omega = \omega_0$, отличающейся от 0 и ∞, то дальнейшую реализацию производят в соответствии с п. 5—12.

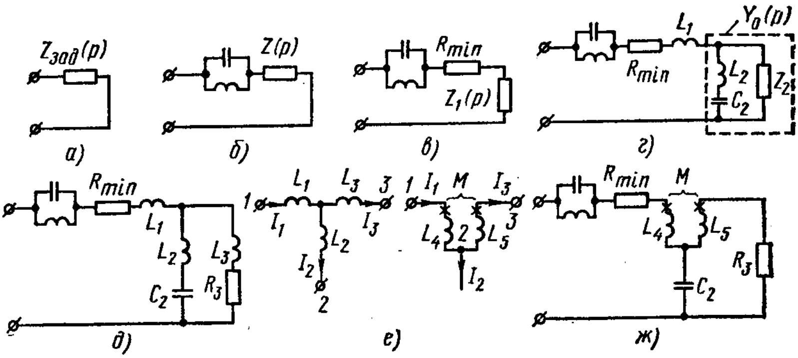


Рис. 10.5

5. Подсчитывают $Z_1(p)$ при $p = j\omega_0$. Так как при частоте $p = j\omega_0$ действительная часть $Z(p) = R_{\min}$, то действительная часть разности $Z(j\omega_0) - R_{\min}$ равна нулю, т. е. $Z_1(j\omega_0)$ представляет собой чисто реактивное сопротивление $Z_1(j\omega_0) = jX_1$.

6. Возможны два случая. Первый, когда $X_1 > 0$, второй, когда $X_1 < 0$. Будем полагать $X_1 = \omega_0 L_1 > 0$ (случай $X_1 < 0$ рассмотрен в п. 12). Тогда

$$L_1 = X_1/\omega_0. \tag{10.6}$$

7. Составим разность $Z_1(p) - pL_1$ и приведем ее к общему знаменателю.

Так, например, если исходить из того, что

$$Z_1(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0},$$

то проводимость оставшейся для реализации части двухполюсника

$$Y_0(p) = \frac{1}{Z_1(p) - pL_1} = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{-p^3 L_1 + p^2(1 - b_1 L_1) + p(a_1 - b_0 L_1) + a_0}. \tag{a}$$

Обратим внимание на то, что в знаменателе $Y_0(p)$ имеется слагаемое $-p^3 L_1$, которое при дальнейшей реализации приведет к появлению в схеме отрицательной индуктивности.

8. Поскольку при $p = j\omega_0$ $Z_1(p) - pL_1 = 0$, то $Y_0(p) = \infty$, т. е. $p = j\omega_0$ является полюсом $Y_0(p)$. Наличие полюса у $Y_0(p)$ позволяет представить оставшуюся часть двухполюсника ветвью из последовательно соединенных L_2 и C_2, настроенной в резонанс на частоту ω_0, и параллельно ей присоединенного двухполюсника с сопротивлением

$Z_2(p)$ (рис. 10.5, *г*):

$$Y_0(p) = \frac{p/L_2}{p^2+\omega_0^2} + \frac{1}{Z_2(p)}. \tag{10.7}$$

9. Полагаем $Z_2(p) = N_2(p)/M_2(p)$. Степени полиномов $N_2(p)$ и $M_2(p)$ должны быть такими, чтобы после приведения правой части (10.7) к общему знаменателю, степень полинома числителя левой части равнялась степени полинома числителя правой части; то же и в отношении степеней знаменателей. Так, если $Y_0(p)$ соответствует выражению (а), то $Z_2(p) = (c_1p + c_0)/d_0$.

Методом неопределенных коэффициентов можно найти c_1, c_0, d_0 и L_2. В рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = -L_1\omega_0^2;\ c_0 = a_0;\ d_0 = b_0; \\ &L_2 = L_1\omega_0^2/(b_0 - \omega_0^2);\ c_2 = 1/(\omega_0^2 L_2). \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Разность $(b_0 - \omega_0^2) > 0$; это следует из того, что условие $X_1 > 0$ означает, что $\operatorname{Im}\left[\frac{p^2+a_1p+a_0}{p^2+b_1p+b_0}\right] > 0$, а при $p = j\omega_0$ $\operatorname{Re} Z_1(p) = 0$.

10. Реализацию $Z_2(p)$ производят, как правило, лестничной схемой. Так, в рассматриваемом примере $Z_2(p)$ реализуют индуктивностью $L_3 = c_1/d_0 = -\omega_0^2 L_1/b_0$ и активным сопротивлением $R_3 = a_0/b_0$ (рис. 10.5, *д*). Важно обратить внимание на то, что L_3 оказалась отрицательной.

11. Так как физически осуществить отрицательную индуктивность невозможно, то дальнейший этап реализации в методе Бруне состоит в том, чтобы три магнитно не связанные индуктивности L_1, L_2 и L_3 заменить трансформатором, состоящим из индуктивностей L_4 и L_5, между которыми имеется магнитная связь (взаимная индуктивность M). Это действие является обратным по отношению к операции «развязывания» магнитносвязанных цепей.

На рис. 10.5, *е* изображены два участка цепи: левый до преобразования, правый — после преобразования; показаны положительные направления токов в ветвях и указаны одноименные зажимы катушек. Напряжения между точками *1* и *2* для обоих участков цепи в силу их эквивалентности должны быть одинаковы, т. е.

$$pL_1I_1 + pL_2I_2 = pL_4I_1 - pMI_3,$$
$$-pL_2I_2 + pL_3I_3 = pL_5I_3 - pMI_1.$$

Подставляя в эти две строки $I_1 = I_2 + I_3$ и учитывая, что каждое из уравнений должно удовлетворяться при любых значениях токов, получаем:

$$M = L_2;\ L_4 = L_1 + L_2;\ L_5 = L_2 + L_3, \tag{10.9}$$

где L_4 и L_5 положительны. Окончательная схема изображена на рис. 10.5, *ж*.

12. Если условиться сумму степеней полиномов в числителе и знаменателе $Z_{\text{зад}}(p)$ называть порядком $Z_{\text{зад}}(p)$, то совокупность перечисленных операций («цикл Бруне») позволяет снизить порядок на 4. Естественно, что потребность в каком-либо одном или нескольких

этапах в любом конкретном примере может и не возникнуть (например, в этапах 1 или 3).

Для $Z_{зад}(p)$, порядок которых достаточно высок, может возникнуть потребность применить эту последовательность операций не один раз. В заключение заметим, что если в п. 5 $X_1 < 0$, то $L_1 < 0$, а вычитание согласно п. 7 сопротивления $-p[L_1]$ сводится к прибавлению сопротивления $+p|L_1|$.

Некоторым недостатком метода Бруне является его относительная сложность и необходимость введения в схему идеального трансформатора с коэффициентом связи $K^2 = M^2/(L_4L_5) = 1$.

§ 10.6. Понятие о минимально-фазовом и неминимально-фазовом четырехполюсниках. Из § 8.64 известно, что передаточная функция четырехполюсника $K(p)$ равна отношению операторного изображения выходной величины к операторному изображению входной. Ее можно представить в виде отношения двух полиномов.

Полюса $K(p)$ всегда находятся в левой части плоскости p. В самом общем случае часть нулей $K(p)$ может находиться и в правой части плоскости p. В соответствии с расположением нулей передаточной функции все четырехполюсники можно подразделить на два класса: на минимально- и неминимально-фазовые.

Минимально-фазовыми (м. ф.) называют такие четырехполюсники, все нули передаточной функции которых расположены в левой части плоскости p. У *неминимально-фазовых* (н. ф.) четырехполюсников хотя бы часть нулей находится в правой части плоскости p.

Название объясняется тем, что при одинаковом значении модулей передаточной функции м. ф. и н. ф. четырехполюсников фаза передаточной функции м. ф. четырехполюсника меньше фазы передаточной функции н. ф. четырехполюсника. Поясним сказанное. С этой целью разложим числитель и знаменатель передаточной функции на множители:

$$K(p) = \frac{(p-p_1)(p-p_3)\ldots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)\ldots(p-p_m)},$$

где $p_1, p_3, \ldots, p_n$ — нули, а $p_2, p_4, \ldots, p_m$ — полюсы передаточной функции. И нули и полюсы в общем случае представляют собой комплексные числа.

Если исследуется работа четырехполюсника в установившемся синусоидальном процессе при изменяющейся частоте ω, то вместо p в $K(p)$ подставляют $j\omega$. Каждый из биномов $p - p_k$ можно представить в показательной форме в виде $p_k'' e^{j\varphi_k}$, где p_k'' — модуль, а φ_k — аргумент комплекса $p - p_k$. Угол φ_k отсчитывается от оси $+1$ комплексной плоскости в направлении против часовой стрелки до положительного направления вектора $p - p_k$. С учетом сказанного

$$K(p) = \frac{p_1'' p_3'' \cdots p_n''}{p_2'' p_4'' \cdots p_m''} e^{j[(\varphi_1+\varphi_3+\ldots+\varphi_n)-(\varphi_2+\varphi_4+\ldots+\varphi_m)]}.$$

Сравним выражения для двух передаточных функций:

$$K'(p) = \frac{p-p_1}{p-p_2} \text{ и } K''(p) = \frac{p-p_1'}{p-p_2}.$$

Положим, что p_1 и p_1' равны по модулю и действительны. Нуль первого выражения находится в левой части плоскости p (рис. 10.6, *а*), а нуль второго $p_1' = -p_1$ — в правой части плоскости p (рис. 10.6, *б*). Пусть на вход обоих четырехполюсников воздействует синусоидальное напряжение частотой ω. Некоторой конкретной частоте на комплексной плоскости соответствует точка a на оси $+j$. Образуем разности $p - p_1$ и $p - p_2$ на рис. 10.6, *а* и разности $p - p_1'$ и $p - p_2$ на рис. 10.6, *б*:

$$\frac{p-p_1}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}; \quad \frac{p-p_1'}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1'-\varphi_2)}.$$

Модули этих передаточных функций одинаковы и равны p_1''/p_2'', тогда как аргументы различны. Аргумент $\varphi_1-\varphi_2$ первого четырехполюсника меньше аргумента $\varphi_1'-\varphi_2$ второго четырехполюсника. Четырехполюсник с передаточной функцией $K'(p)$ минимально-фазовый, а четырехполюсник с $K''(p)$ неминимально-фазовый.

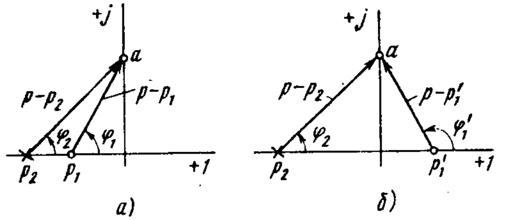


Рис. 10.6

В м. ф. четырехполюснике существует однозначная зависимость между модулем и аргументом передаточной функции. В н. ф. четырехполюсниках между модулем и аргументом передаточной функции нет однозначной зависимости.

Рассмотрим совокупность вопросов, которые позволяют определить, можно ли физически осуществить четырехполюсник по заданной передаточной функции или по Z- или Y-параметрам.

§ 10.7. Условия, накладываемые на параметры четырехполюсников и на передаточную функцию. Перед тем как рассмотреть совокупность перечисленных вопросов, напомним основные уравнения линейного пассивного четырехполюсника в Z- и в Y-форме.

Уравнения четырехполюсника в Z-форме:

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= \dot I_1 Z_{11}+\dot I_2 Z_{12};\\ \dot U_2 &= \dot I_1 Z_{21}+\dot I_2 Z_{22}.\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

Схемы для опытного определения Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} изображены на рис. 10.7, *а*, *б*; Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника по отношению к зажимам *1—1* при разомкнутых зажимах *2—2* (в § 4.2 обозначалось как Z_{10});

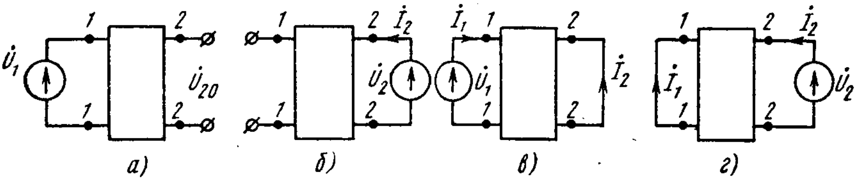


Рис. 10.7

Z_{22} — входное сопротивление четырехполюсника по отношению к зажимам *2—2* при разомкнутых зажимах *1—1* (в § 4.2 обозначалось Z_{20}); Z_{12} — взаимное сопротивление между входной и выходной ветвями. Для схемы рис. 10.7, *а* напряжение на зажимах *2—2* $\dot U_{20}=\dot I_1 Z_{21}$. На основании теоремы взаимности $Z_{12}=Z_{21}$.

Уравнения четырехполюсника в Y-форме:

$$\left.\begin{aligned}\dot I_1 &= \dot U_1 Y_{11}+\dot U_2 Y_{12};\\ \dot I_2 &= \dot U_1 Y_{21}+\dot U_2 Y_{22}.\end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

Схемы для опытного определения Y_{11}, Y_{22} и $Y_{12}=Y_{21}$ изображены на рис. 10.7, *в*, *г*; Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника по отношению к зажимам *1—1* при короткозамкнутых зажимах *2—2*; Y_{22} — входная проводимость по отношению к зажимам *2—2* при короткозамкнутых зажимах *1—1*.

Между Z- и Y- параметрами существуют соотношения:

$$Z_{11}=Y_{22}/|Y|;\quad Z_{12}=Z_{21}=-Y_{12}/|Y|;\quad Z_{22}=Y_{11}/|Y|;$$

$$|Y|=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2 \text{ и } (|Y|=\Delta_Y) \text{ и } Y_{11}=Z_{22}/|Z|;$$

$$Y_{12}=Y_{21}=-Z_{12}/|Z|;\quad Y_{22}=Z_{11}/|Z|;\quad |Z|=1/|Y|=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}^2.$$

Если вычеты функции Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} в рассматриваемом полюсе обозначить соответственно k_{11}, k_{22}, k_{12}, то в любом полюсе на оси j между вычетами имеет место соотношение

$$k_{11}k_{22}-k_{12}^2 \geqslant 0, \tag{10.12}$$

которое называют *условием вычетов*. Доказательство этого условия производят методами матричной алгебры; в силу громоздкости оно здесь не дано (см., например, [9]). Условие (10.12) означает, что матрица вычетов Z-параметров в полюсах является неотрицательной. Для Y-параметров условие (10.12) также имеет силу, причем под k_{11}, k_{22} и k_{12} в этом случае следует понимать соответственно вычеты в полюсах функций Y_{11}, Y_{22} и Y_{12} на оси j.

Заметим, что если в полюсе выполняется условие $k_{11}k_{22}-k_{12}^2=0$, то полюс называют *компактным*. Z- или Y-параметры, во всех полюсах которых выполняется условие компактности, называют компактными Z- или Y-параметрами.

Входные сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов *1—1* при х. х. или к. з. со стороны зажимов *2—2*, а также входные сопротивления со стороны зажимов *2—2* при х. х. или к. з. со стороны зажимов *1—1* должны удовлетворять тем же условиям, что и входные сопротивления двухполюсников (см. § 10.2).

Кроме того, Z-параметры любого четырехполюсника на любой частоте ω ($p=j\omega$) должны удовлетворять еще так называемому условию вещественной части (условию Геверца):

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2 \geqslant 0, \tag{10.13}$$

где $r_{11}=\operatorname{Re} Z_{11}(j\omega)$; $r_{22}=\operatorname{Re} Z_{22}(j\omega)$; $r_{12}=\operatorname{Re} Z_{12}(j\omega)$.

Соотношение (10.13) является следствием того, что матрица пассивного четырехполюсника является положительной вещественной. Формулы (10.12) и (10.13) накладывают ограничение на коэффициент усиления Q синтезируемого четырехполюсника. Для Y-параметров условие вещественной части записывается так:

$$g_{11}g_{22}-g_{12}^2 \geqslant 0, \tag{10.13'}$$

где $g_{11}=\operatorname{Re} Y_{11}(j\omega)$; $g_{22}=\operatorname{Re} Y_{22}(j\omega)$; $g_{12}=\operatorname{Re} Y_{12}(j\omega)$.

В литературе по синтезу четырехполюсников используют также некоторые дополнительные понятия и теоремы (условия), до сих пор не упоминавшиеся. Познакомимся с основными из них.

Если у входной и выходной ветвей четырехполюсника без взаимоиндукции нет общего зажима, то такие четырехполюсники называют *уравновешенными*. Если общий зажим имеется, то четырехполюсник называют *неуравновешенным*. С практической точки зрения неуравновешенные четырехполюсники выгоднее уравновешенных, так как содержат меньшее число элементов.

Для неуравновешенных четырехполюсников существует *условие Фиалкова и Герста*. Оно состоит в том, что: а) коэффициенты при p в числителе и знаменателе функции $-Y_{12}$, Y_{11} и Y_{22} неотрицательны; б) коэффициенты при соответствующих степенях p в $-Y_{12}$ не превышают коэффициентов при соответствующих степенях p в Y_{11} или Y_{22}. При этом предполагается, что общий множитель, если он имеется в числителе соответствующей функции, не сокращается.

При синтезе четырехполюсника задается обычно его передаточная функция. Передаточная функция может быть задана различным образом. Так, например, она может быть задана в виде передаточной функции по напряжению или току, при наличии и отсутствии нагрузки на выходе четырехполюсника, с учетом и без учета входного сопротивления источника питания и т. п. Довольно часто в руководствах по синтезу цепей ее задают в виде передаточной функции по напряжению при питании со стороны зажимов *1—1* и х. х. на зажимах *2—2* (см. рис. 10.7, *а*).

Будем ее обозначать $K_{u\,\text{х.х}}(p)=K_{u\,\text{х.х}}$ (в литературе распространено обозначение T_{12}):

$$K_{u\,\text{х.х}}=T_{12}=U_{20}/U_1=Z_{12}/Z_{11}=-Y_{12}/Y_{22}.$$

Полюсы $K_{u\,\text{х.х}}$ образуются из нулей Z_{11}, которые не являются одновременно нулями Z_{12}, и из полюсов Z_{12}, не являющихся одновременно полюсами Z_{11}.

Передаточную функцию $K_{u\,\text{x.x}}$ можно представить в виде отношения двух полиномов по степеням p:

$$K_{u\,\text{x.x}} = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}.$$

Если вынести за скобки a_n в числителе и b_m в знаменателе, то получим

$$K_{u\,\text{x.x}} = \frac{a_n}{b_m} \frac{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}}{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \ldots + \frac{b_1}{b_m} p + \frac{b_0}{b_m}}.$$

Отношение a_n/b_m обозначают k (или Q) и называют *коэффициентом усиления четырехполюсника.*

Как уже говорилось, при решении задач синтеза четырехполюсников необходимо знать свойства $K_{u\,\text{x.x}}$ и ее составляющих Z_{12}, Z_{11} или $-Y_{12}$ и Y_{22}. Некоторые из них были сформулированы в настоящем параграфе. Дополним их и другими не менее важными, опуская доказательства. (Доказательства можно найти в специальных руководствах по синтезу, например в [9].)

В п. I перечислены важные для синтеза свойства Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12}, $K_{u\,\text{x.x}}$, которые должны быть выполнены для любого четырехполюсника. В пп. II—V рассмотрены те дополнительные свойства, которыми обладают частные виды четырехполюсников.

I. *Условия, накладываемые на Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12}, $K_{u\,\text{x.x}}$ для всех пассивных четырехполюсников.*

А. Должно быть удовлетворено условие вычетов и условие вещественной части.

Б. Условия, которые должны выполняться в полюсах функций:

1) полюсы Z_{12}, Y_{12} и $K_{u\,\text{x.x}}$ не могут находиться в правой полуплоскости;

2) у $K_{u\,\text{x.x}}$ не может быть полюса в нуле и в бесконечности;

3) полюсы Z_{12} и Y_{12} на оси $j\omega$ — простые с вещественными значениями вычетов;

4) полюсы $K_{u\,\text{x.x}}$ на оси $j\omega$ — простые с мнимыми вычетами.

В. Условия, которые выполняются в отношении нулей функций: нули Z_{12}, Y_{12}, $K_{u\,\text{x.x}}$ могут быть кратными и находиться в любой точке плоскости p.

II. *Передаточная функция $K_{u\,\text{x.x}}$ неуравновешенного четырехполюсника без взаимной индуктивности обладает следующими свойствами:*

1) ее нули могут находиться на комплексной плоскости всюду, кроме положительной вещественной оси;

2) при положительных вещественных p величина передаточной функции находится между 0 и 1;

3) коэффициенты числителя передаточной функции положительны (часть из них может равняться нулю) и не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

III. *Свойства передаточной функции $K_{u\,\text{x.x}}$ уравновешенных четырехполюсников:*

1) нули передаточной функции могут находиться в любой точке комплексной плоскости, включая и положительную вещественную ось;

2) для положительных вещественных p величина передаточной функции находится в пределах $-1 \div +1$. Крайние значения можно получить только при $p=0$, или при $p=\infty$, или в обоих этих случаях;

3) коэффициенты в числителе передаточной функции могут быть отрицательными, не превышая по величине соответствующие коэффициенты знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

Частным видом четырехполюсника с общим зажимом (неуравновешенного) является цепная схема.

IV. *Передаточная функция цепных схем обладает дополнительным свойством* — ее нули не могут находиться в правой полуплоскости.

V. В еще более частном случае — в случае *цепной схемы, собранной только из активных сопротивлений и емкостей,* — нули передаточной функции находятся только на отрицательной вещественной оси.

Для цепных RC-четырехполюсников нули и полюсы Y_{11} являются простыми, расположены на отрицательной вещественной оси и чередуются. Полюсы Y_{12} располагаются на отрицательной вещественной оси и являются простыми. Нули Y_{12} могут быть на отрицательной вещественной оси.

Перейдем к вопросу о реализации четырехполюсника по его заданной передаточной функции, полагая, что она удовлетворяет условиям физической реализуемости. Существует много различных методов реализации. В одних методах в основу положена передаточная функция при холостом ходе четырехполюсника, в других — передаточная функция четырехполюсника, нагруженного на согласованное активное сопротивление. В последнем случае принято нагрузку брать равной 1 Ом и называть ее нормализованной.

В одних методах реализации сопротивление источника питания полагают равным нулю, в других — равным заданной величине. Каждый способ реализации имеет те или иные ограничения. Так, реализация реактивных четырехполюсников методом смещения нуля по заданным Y_{22} и Y_{21} лестничной схемой, нагруженной на R, может быть осуществлена, если все нули передаточной функции K_u находятся в левой полуплоскости.

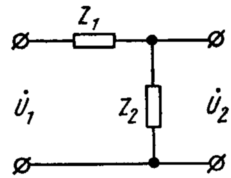


Рис. 10.8

Более общим, но и более сложным является способ реализации по Дарлингтону по трем параметрам Z_{11}, Z_{22}, Z_{12}, позволяющий учесть внутреннее сопротивление источника, а также способ реализации, в основе которого лежит представление передаточной функции в виде произведения передаточных функций нескольких согласованно нагруженных четырехполюсников. Один из этих четырехполюсников является четырехполюсником постоянного затухания, другой — четырехполюсником фазового сдвига, третий и последующие — минимально-фазовыми *.

§ 10.8. Синтез четырехполюсников Г-образными RC-схемами. Г-образный четырехполюсник (рис. 10.8) является делителем напряжения. Его передаточная функция по напряжению при холостом ходе

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}. \tag{10.14}$$

В дальнейшем вместо $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ будем писать соответственно Z_1 и Z_2.

Положим, что с помощью Г-образного четырехполюсника, состоящего из RC-элементов, требуется реализовать передаточную функцию по напряжению при холостом ходе:

$$U_2(p)/U_1(p) = N/M, \tag{10.15}$$

где N и M — полиномы по степеням p; N/M удовлетворяет условиям, которые предъявляются к передаточной функции RC-четырехполюсника (см. § 10.7).

* Для ознакомления с различными способами реализации рекомендуется обратиться к [9] и [17].

Приравняем правые части (10.10) и (10.11):

$$N/M = Z_2/(Z_1+Z_2). \tag{10.16}$$

Разделим числитель и знаменатель правой части (10.16) на некоторый полином $Q=Q(p)$ (не имеет ничего общего с коэффициентом усиления), выбранный таким образом, что он имеет тот же порядок, что и полиномы N и M, а корни его чередуются с корнями уравнений $N=0$ и $M=0$. Тогда

$$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{N/Q}{M/Q}. \tag{10.17}$$

Из уравнения (10.17) находим $Z_2 = N/Q$ и $Z_1 = (M-N)/Q$. Реализуем двухполюсники Z_1 и Z_2 по найденным операторным сопротивлениям *. Реализация двухполюсников производится в соответствии с § 10.3 и 10.4.

Аналогично производится синтез Г-образными RL-схемами.

§ 10.9. Четырехполюсник для фазовой коррекции. На рис. 10.9 изображена симметричная скрещенная схема, состоящая из чисто реактивных двухполюсников Z_1 и Z_2, на выходе которой включено активное сопротивление R. Положительные направления токов и напряжений указаны на схеме.

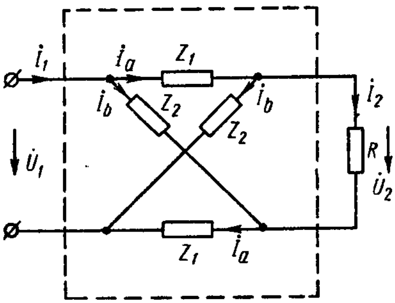


Рис. 10.9

В уравнении $\dot U_2 + \dot I_a Z_1 = \dot I_b Z_2$ заменим $\dot U_2$ на $\dot I_2 R$ и учтем, что $\dot I_2 = \dot I_a - \dot I_b$. Это дает возможность выразить $\dot I_b$ через $\dot I_a$:

$$\dot I_b = \dot I_a \frac{R+Z_1}{R+Z_2}.$$

Подставим $\dot I_b$ в $\dot I_2 = \dot I_a - \dot I_b$ и найдем

$$\dot I_a = \dot I_2 \frac{R+Z_2}{Z_2-Z_1}, \quad \dot I_b = \dot I_2 \frac{R+Z_1}{Z_2-Z_1}.$$

Составим уравнение для периферийного контура:

$$\dot U_1 = 2Z_1 \dot I_a + \dot U_2 = \dot U_2 \frac{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}{R(Z_2-Z_1)}.$$

Передача напряжения

$$K_U = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{R(Z_2-Z_1)}{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}.$$

Входной ток

$$\dot I_1 = \dot I_a + \dot I_b = \dot I_2 \frac{2R+Z_1+Z_2}{Z_2-Z_1}.$$

---

* Предполагаем, что полином $Q(p)$ может быть найден и что Z_1 и Z_2 удовлетворяют условиям, перечисленным в § 10.2.

Входное сопротивление

$$Z_{вх}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}{2R+Z_1+Z_2}.$$

Приравняв $Z_{вх}=R$, получим соотношение $Z_1Z_2=R^2$. Из него следует, что реактивные сопротивления Z_1 и Z_2 взаимно обратны.

В формулу для K_U подставим $Z_2=R^2/Z_1$:

$$K_U=\frac{R-Z_1}{R+Z_1}=K_U(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (а)$$

Так как Z_1 — чисто реактивное сопротивление, то модули числителя и знаменателя формулы (а) одинаковы и потому $K_U(\omega)=1$. При изменении частоты ω меняется только аргумент $\varphi(\omega)$. Четырехполюсник рис. 10.9 служит для фазовой коррекции. С этой целью его включают между источником питания с внутренним сопротивлением R и активной нагрузкой R, и он, не изменяя напряжение источника питания по модулю, поворачивает его на требуемый угол $\varphi(\omega)$ по фазе, осуществляя этим фазовую коррекцию. Определим Z_1 из (а) при нормированной нагрузке $R=1$ Ом:

$$Z_1=\frac{1-K_U}{1+K_U};\quad Z_2=\frac{1+K_U}{1-K_U}.$$

По известному $K_U(p)$ найдем операторные сопротивления $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ и реализуем их методами, рассмотренными в § 10.3—10.5.

§ 10.10. Аппроксимация частотных характеристик. *Аппроксимация* — это приближенная замена заданной частотной зависимости другой частотной зависимостью, которая точно совпадает с заданной в ограниченном числе точек, отклоняется от нее в допустимых пределах вне этих точек, давая в то же время физически реализуемую функцию.

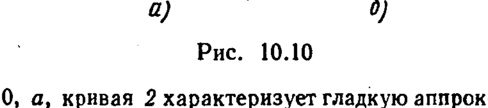


Рис. 10.10

Например, кривая $|K(j\omega)|$ рис. 10.10, *а* — это частотная характеристика идеального фильтра НЧ $|K(jx)|=f(x)$, где $K(jx)$ — передаточная функция; $x=\omega/\omega_c$; ω_c — безразмерная величина, равная частоте среза.

В диапазоне изменения x от 0 до 1 $|K(jx)|=1$; при $x>1$ $|K(jx)|=0$. Пунктирная кривая *1* рис. 10.10, *б* повторяет кривую рис. 10.10, *а*, кривая *2* характеризует гладкую аппроксимацию, при которой отклонение от кривой *1* неодинаково в диапазоне аппроксимации. Кривая *3* иллюстрирует равноволновую аппроксимацию, при которой абсолютные значения максимальных отклонений от кривой *1* в обе стороны одинаковы. Гладкую аппроксимацию осуществляют обычно полиномами Баттерворса, равноволновую — полиномами Чебышева (Кривые *2*, *3* рис. 10.10, *б* неточны).

Гладкая аппроксимация. Применительно к фильтру НЧ аппроксимацию квадрата модуля передаточной функции четырехполюсника осуществляют так:

$$|K(jx)|^2=\frac{1}{1+mx^{2n}}.$$

Принимают, что при $x=1$ $|K(jx)|=1/\sqrt{2}$, откуда $m=1$. Полагая $p=jx$, найдем полюсы $|K(jx)|^2$:

$$K(jx)\,K(-jx)=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{j}\right)^{2n}};$$

$$1+(-1)^n p^{2n}=0.$$

При нечетных n

$$p_k=1^{1/(2n)}=e^{jk\pi/n},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

При четных n

$$p_k=(-1)^{1/(2n)}=e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2n}},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Полюсы расположены симметрично по окружности единичного радиуса. Полиномы $(p-p_1)\ \ldots\ (p-p_n)$ образуют знаменатель $K(jx)$ и называются полиномами Баттерворса. При составлении их используют значения p_k, находящиеся только в левой полуплоскости. Это обеспечивает физическую осуществимость $K(p)$. Запишем полиномы при $n=1,\ 2,\ 3$:

при $n=1$ $(p+1)$;

при $n=2$ $p^2+\sqrt{2}\,p+1$;

при $n=3$ p^3+2p^2+2p+1.

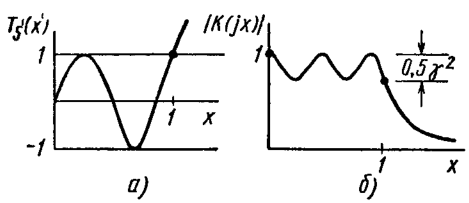


Рис. 10.11

Задаваясь величиной требуемого затухания фильтра в децибелах (обычно при $x=2$) $a=10\lg(U_1/U_2)^2$, определим n:

$$|K(jx)|=\left|\frac{U_2}{U_1}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}\approx\frac{1}{x^n};\quad n=\frac{20\lg|U_1/U_2|}{20\lg 2}.$$

Например, при $a=18$ дБ $n=18/(20\lg 2)=2{,}98\approx 3$. В рассматриваемом примере

$$K(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}.$$

Функцию $K(p)$ реализуют известными методами.

Равноволновая аппроксимация. Полиномы Чебышева порядка n записывают в тригонометрической форме:

$$T_n(x)=\cos n\arccos x.$$

Полагая $\arccos x=\theta$ и имея в виду, что $\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\times$ $\times\sin^2\theta+\ldots$, а $\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$, получим алгебраическую форму записи полиномов:

$$T_n(x)=x^n+C_n^2x^{n-2}(x^2-1)+C_n^4x^{n-4}(x^2-1)^2+\ldots$$

Например, при $n=5$ $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$.

В интервале $x=0\div 1$ $T_n(x)$ колеблется от 1 до -1 (рис. 10.11, *а*). При $x>1$ $T_n(x)$ монотонно возрастает.

Квадрат модуля нормированной передаточной функции фильтра НЧ при помощи полиномов Чебышева аппроксимируют так:

$$|K(jx)|^2=\frac{1}{1+\gamma^2T_n^2(x)}.$$

Максимальное отклонение $|K(jx)|$ от 1 равно $\gamma^2/2$:

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\approx 1-\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)=\gamma^2/2.$$

При $x>1$, т. е. в области затухания фильтра НЧ,

$$\gamma^2 T_n(x) \gg 1 \quad \text{и} \quad |K(jx)| = \frac{1}{\gamma T_n(x)} = \frac{1}{\gamma \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} x)}.$$

Примерный вид аппроксимирующей кривой $|K(jx)|$ показан на рис. 10.11, *б*. Для заданного отклонения γ и величины затухания a в децибелах при $x=2$ $a=20\lg|U_1/U_2|=20\lg|1/K(j2)|$ порядок полинома Чебышева определяют по формуле

$$n=\frac{1}{1,32}\operatorname{Arch}\frac{10^{a/20}}{\gamma}, \quad \text{где} \quad 1,32=\operatorname{Arch} 2.$$

Например, для $\gamma=0,4$ и $a=30$ дБ при $x=2$

$$|K(jx)|=0,0318; \quad n=\frac{1}{1,32}\operatorname{Arch}\frac{10^{1,5}}{0,4}=\frac{5,06}{1,32}=3,84$$

Принимаем $n=4$.

Для составления $K(jx)$ следует определить полюсы $|K(jx)|^2$, находящиеся в левой полуплоскости. Подставим в $|K(jx)|$ $x=p_k/j$ и приравняем к нулю знаменатель $|K(jx)|^2$:

$$1+\gamma^2 T_n^2(p_k/j)=0, \quad \text{или} \quad T_n(p_k/j)=\pm j/\gamma.$$

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ $T_n(x)=T_n(p_k/j)=\cos n\left[\arccos\frac{p_k}{j}\right]=\pm\frac{j}{\gamma}$.

При $x>1$ $T_n(x)=T_n\left(\frac{p_k}{j}\right)=\operatorname{ch} n\operatorname{Arch}\frac{p_k}{j}$.

Так как p_k — комплексное число, то $\arccos\frac{p_k}{j}$ — тоже комплексное число, которое положим равным $\alpha_k+j\beta_k$. Тогда

$$T_n\left(\frac{p_k}{j}\right)=\cos(n\alpha_k+jn\beta_k)=\cos n\alpha_k \operatorname{ch} n\beta_k - j\sin n\alpha_k \operatorname{sh} n\beta_k=\pm j/\gamma.$$

Отсюда

$$\cos n\alpha_k \operatorname{ch} n\beta_k=0 \quad \text{и} \quad \sin n\alpha_k \operatorname{sh} n\beta_k=\pm 1/\gamma.$$

Так как $\operatorname{ch} n\beta_k \neq 0$, то

$$\cos n\alpha_k=0 \quad \text{и} \quad \alpha_k=(2k+1)\cdot\pi/(2n), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

При этом

$$\sin n\alpha_k=\pm 1; \quad \operatorname{sh} n\beta_k=1/\gamma; \quad \beta_k=\frac{1}{n}\operatorname{Arsh} 1/\gamma.$$

Поскольку $\arccos(p_k/j)=\alpha_k+j\beta_k$, то

$$p_k=a_k+jb_k=j\cos(\alpha_k+j\beta_k).$$

Действительные и мнимые части полюсов p_k, лежащих в левой полуплоскости:

$$a_k=-\operatorname{sh}\beta_k \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}, \quad b_k=\operatorname{ch}\beta_k \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Из последней строчки следует, что

$$\frac{a_k^2}{\operatorname{sh}^2\beta_k}+\frac{b_k^2}{\operatorname{ch}^2\beta_k}=1,$$

т. е. полюсы p_k расположены на эллипсе, одна полуось которого равна $\operatorname{sh}\beta_k$, другая — $\operatorname{ch}\beta_k$.

В рассматриваемом примере при $n=4$ и $\gamma=0,4$ $\beta_k=0,412$, $\operatorname{sh}\beta_k=0,421$; $\operatorname{ch}\beta_k=1,08$.

Для построения эллипса чертим две окружности одну радиусом $\operatorname{sh}\beta_k$, другую радиусом $\operatorname{ch}\beta_k$ (рис. 10.12) и через начало координат проводим прямые до пересечения с окружностями под углами $\alpha_k=(2k+1)(\pi/2n)$, где $k=0, 1, \ldots, n$.

В примере $\alpha_k \approx 22{,}3$; 67; 111; 156°.

Из точек пересечения лучей с окружностью меньшего радиуса проводим вертикали а из точек пересечения с окружностью большего радиуса — горизонтали. Точки пересечения соответствующих горизонталей и вертикалей в левой полуплоскости дают искомые полюсы. В примере $p_{0,3}=-0{,}164 \pm j0{,}995$; $p_{1,2}=-0{,}388 \pm j0{,}416$. Нормированная передаточная функция

$$K(p)=\frac{1}{(p-p_0)(p-p_3)(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{1}{[(p+0{,}164)^2+0{,}995^2][(p+0{,}388)^2+0{,}416^2]}.$$

По $K(p)$ определяют схему и ее *нормированные параметры* $L_н$, $C_н$. *Для перехода от нормированных к действительным параметрам* L, C пользуются соотношениями $L=L_н/\omega_c$ и $C=C_н/\omega_c$.

Какому способу синтеза схемы и какой конкретной схеме следует отдать предпочтение, зависит не только от стоимости и от габаритов при практическом осуществлении схемы, но и от того, насколько фазочастотные характеристики получающихся четырехполюсников удовлетворяют поставленной задаче.

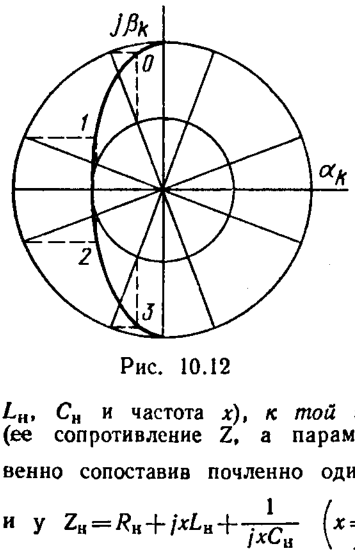


Рис. 10.12

В заключение отметим, что *нормирование* распространяется не только на передаточную функцию четырехполюсника, но и на другие функции, в частности на входное сопротивление или проводимость двухполюсников.

Если аппроксимируют не передаточную функцию, а *входное сопротивление* (*проводимость*) некоторого двухполюсника, то оно обычно нормируется не только по частоте ω_0, но и по величине. При нормировании $Z(p)$ по величине входное сопротивление (проводимость) делят на некоторую безразмерную величину $R_0>0$. *При переходе от схемы, реализующей нормированное сопротивление* $Z_н$ (ее параметры $R_н$, $L_н$, $C_н$ и частота x), *к той же схеме, но с ненормированными параметрами* (ее сопротивление Z, а параметры R, L, C) — последние определяют, качественно сопоставив почленно одинаковые слагаемые у $\dfrac{Z}{R_0}=\dfrac{R}{R_0}+\dfrac{j\omega L}{R_0}+\dfrac{1}{j\omega C R_0}$ и у $Z_н=R_н+jxL_н+\dfrac{1}{jxC_н}$ $\left(x=\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Получим $R=R_н R_0$, $L=L_н\left(\dfrac{R_0}{\omega_0}\right)$, $C=C_н/(R_0\omega_0)$; ω_0 — величина безразмерная.

Вопросы для самопроверки

1. Определите задачи синтеза, перечислите условия, которым должны удовлетворять $Z(p)$ физически реализуемых двухполюсников. 2. Поясните идею реализации двухполюсников лестничной схемой. Покажите, как следует упорядоченно определять ее элементы. Любое ли $Z(p)$ может быть реализовано лестничной схемой? 3. Как осуществить реализацию путем последовательного выделения простейших составляющих? 4. В чем идея реализации методом Бруне? 5. Какой четырехполюсник называют минимально-фазовым? 6. Запишите условия вычетов и условие вещественной части для Z-параметров. 7. В чем состоит задача аппроксимации и как она решается? 8. Как от нормированных параметров перейти к ненормированным, задавшись некоторыми R_0 и ω_0? 9. Решить задачи 12.3; 12.6; 12.7; 12.10; 12.14; 12.17; 12.28.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 11.1. Основные определения. В данной главе рассмотрены основы теории установившихся процессов в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

Электрическими линиями с распределенными параметрами называют такие линии, в которых для одного и того же момента времени ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к другой, соседней точке.

Под *магнитными линиями с распределенными параметрами* понимают такие линии, магнитный поток и магнитное напряжение вдоль которых непрерывно меняются при переходе от одной точки линии к соседней.

Эффект непрерывного изменения тока (потока) и электрического (магнитного) напряжения вдоль линии имеет место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными сопротивлениями (рис. 11.1, *а*).

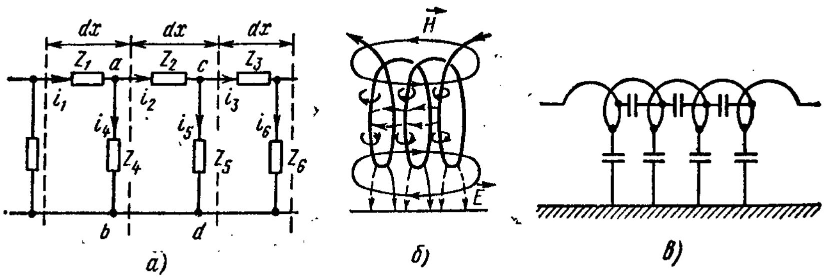


Рис. 11.1

На схеме рис. 11.1, *а* изображен участок линии с распределенными параметрами, через dx обозначен бесконечно малый элемент длины линии.

Сопротивления Z_1, Z_2, Z_3, ... называют *продольными сопротивлениями*, в них включены сопротивления и прямого, и обратного проводов; сопротивления Z_4, Z_5, Z_6, ... называют *поперечными сопротивлениями*.

В результате утечки тока через сопротивление Z_4 ток $i_2 \neq i_1$. Аналогично, ток $i_3 \neq i_2$ и т. д. Напряжение между точками a и b не равно напряжению между точками c и d и т. д.

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления образованы активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков линии длиной dx. Поперечные сопротивления состоят из сопротивлений утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостей, образованных противостоящими друг другу элементами (участками) линии. В магнитных линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления представляют собой магнитные сопротивления самих магнитных стержней, образующих магнитную линию, а поперечные сопротивления обусловлены утечкой магнитного потока по воздуху между противостоящими друг другу участками линии.

Линию с распределенными параметрами называют *однородной*, если равны друг другу все продольные сопротивления участков линии одинаковой длины и если равны друг другу все поперечные сопротивления участков линии одинаковой длины. Так, участок линии рис. 11.1, *а* однороден, если $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots$ и $Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Линию с распределенными параметрами называют *неоднородной*, если продольные сопротивления в ней различны или поперечные сопротивления неодинаковы.

Кроме того, линии с распределенными параметрами можно подразделить на две большие группы: нелинейные и линейные.

В *нелинейных* линиях с распределенными параметрами продольные и (или) поперечные сопротивления являются функциями протекающих по ним токов, в *линейных* продольные и поперечные сопротивления не являются функциями протекающих через них токов.

В качестве примера нелинейной электрической линии с распределенными параметрами можно назвать электрическую линию передачи высокого напряжения при наличии между проводами линии тихого электрического разряда — явление короны на проводах. В этом случае емкость между противостоящими друг другу участками линии является функцией напряжения между этими участками.

В качестве примера нелинейной магнитной линии с распределенными параметрами можно назвать линию, образованную параллельно расположенными магнитными сердечниками, которые в процессе работы линии могут насыщаться.

Когда говорят о линии с распределенными параметрами, то обычно этот термин мысленно связывают с мощными линиями передачи электрической энергии на большие расстояния, с телефонными и телеграфными воздушными и кабельными линиями, с рельсовыми линиями автоблокировки на железнодорожном транспорте, с антеннами в радиотехнике и другими родственными линиями и установками.

В то же время с линиями с распределенными параметрами имеют дело и тогда, когда «линий» в буквальном смысле слова, казалось бы, вовсе нет. Так, обычная индуктивная катушка при достаточно высоких частотах представляет собой линию с распределенными параметрами. Картина электрического и магнитного полей катушки показана на рис. 11.1, *б*. Линии напряженности электрического поля $\vec{E}$ показаны пунктиром, линии напряженности магнитного поля $\vec{H}$ — сплошными линиями.

Схема замещения катушки показана на рис. 11.1, *в*. Из рисунка видно, что кроме индуктивностей в схеме есть межвитковые емкости и емкости на корпус прибора (на землю).

Если по катушке проходит переменный ток, то через межвитковые емкости и емкости на землю также идет ток. При одном и том же напряжении между соседними витками ток через емкости тем больше, чем выше частота переменного тока. При низкой частоте (десятки, сотни, тысячи герц) ток через емкости несоизмеримо мал по сравнению с токами через витки катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор). Если же частота тока очень велика, например сотни миллиардов герц, то токи через емкости могут во много раз превышать токи через витки катушки. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать прохождению переменного тока емкостное, а не индуктивное сопротивление (количественные изменения перешли в качественные). При промежуточных частотах порядка нескольких мегагерц (когда линейные размеры катушки соизмеримы с длиной волны) индуктивная катушка является типичной линией с распределенными параметрами. Если индуктивная катушка намотана на стальной сердечник, который способен насыщаться и частота тока достаточно велика, то все устройство в целом представляет собой сложную совокупность из электрической и магнитной нелинейных цепей с распределенными параметрами.

В курсе ТОЭ изучают только основы однородных линейных цепей с распределенными параметрами. Вся теория излагается применительно к электрическим линиям с распределенными параметрами на переменном токе. Теория однородных линейных электрических цепей с распределенными параметрами на постоянном токе непосредственно следует из теории цепей переменного тока, если принять угловую частоту равной нулю.

Теория однородных линейных магнитных линий на постоянном токе в значительной мере аналогична теории однородных линейных электрических линий с распределенными параметрами, только вместо тока в уравнении должен быть подставлен магнитный поток, вместо электрического напряжения — магнитное напряжение, вместо продольного активного сопротивления — продольное магнитное сопротивление, вместо поперечной электрической проводимости — поперечная магнитная проводимость.

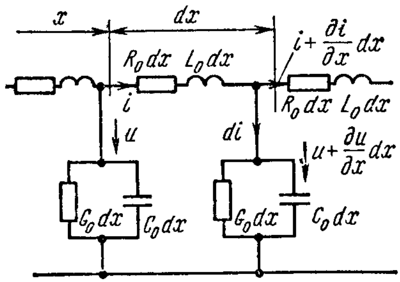


Рис. 11.2

§ 11.2. Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами.

Пусть R_0 — продольное активное сопротивление единицы длины линии; L_0 — индуктивность единицы длины линии; C_0 — емкость единицы длины линии; G_0 — поперечная проводимость единицы длины линии. Поперечная проводимость G_0 не является обратной величиной продольного сопротивления R_0.

Разобьем линию на участки длиной dx (рис. 11.2), где x — расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине dx активное сопротивление равно $R_0\,dx$, индуктивность — $L_0\,dx$, проводимость утечки — $G_0\,dx$ и емкость — $C_0\,dx$. Обозначим ток в начале рассматриваемого участка линии через i и напряжение между проводами линии в начале участка u. И ток, и напряжение являются в общем случае функциями расстояния вдоль линии x и времени t. Поэтому в дальнейшем в уравнениях использованы частные производные от u и i по времени t и расстоянию x.

Если для некоторого момента времени t ток в начале рассматриваемого участка равен i, то в результате утечки через поперечный элемент ток в конце участка для того же момента времени равен $i+\frac{\partial i}{\partial x}dx$, где $\frac{\partial i}{\partial x}$ — скорость изменения тока в направлении x. Скорость, умноженная на расстояние dx, является приращением тока на пути dx.

Аналогично, если напряжение в начале участка u, то в конце участка для того же момента времени напряжение равно $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного участком линии длиной dx, обойдя его по часовой стрелке:

$$-u+R_0\,dx\,i+L_0\,dx\frac{\partial i}{\partial t}+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx=0.$$

После упрощения и деления уравнения на dx получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}+R_0 i. \tag{11.1}$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i=di+i+\frac{\partial i}{\partial x}dx. \tag{11.2}$$

Ток di (рис. 11.2) равен сумме токов, проходящих через проводимость $G_0\,dx$ и емкость $C_0\,dx$:

$$di=\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)G_0\,dx+\frac{\partial}{\partial t}C_0\,dx\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right).$$

Пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости, тогда

$$di=uG_0\,dx+C_0\,dx\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{11.3}$$

Подставим (11.3) в (11.2), упростим и поделим уравнение на dx:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{11.4}$$

Уравнения (11.1) и (11.4) являются основными дифференциальными уравнениями для линии с распределенными параметрами.

§ 11.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе. Пусть напряжение и ток в линии изменяются по синусоидальному закону во времени. Воспользуемся символическим методом.

Изображение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \to \dot{I} e^{j\omega t},$$

где $\dot{I} = I_m e^{j\varphi_i}/\sqrt{2}$.

Изображение напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \to \dot{U} e^{j\omega t},$$

где $\dot{U} = U_m e^{j\varphi_u}/\sqrt{2}$.

Комплексы $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями расстояния x, но не являются функциями времени. Множитель $e^{j\omega t}$ есть функция времени t, но не зависит от x.

Представление изображений тока и напряжения в виде произведения двух множителей, из которых один является функцией только x, а другой — функцией только t, дает возможность перейти от уравнений в частных производных [уравнений (11.1) и (11.4)] к уравнениям в простых производных. Действительно,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} \to e^{j\omega t}\frac{d\dot{U}}{dx};\\ &L_0\frac{\partial i}{\partial t} \to L_0\dot{I}\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega L_0\dot{I}e^{j\omega t};\end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial i}{\partial x} \to e^{j\omega t}\frac{d\dot{I}}{dx};\\ &C_0\frac{\partial u}{\partial t} \to j\omega C_0\dot{U}e^{j\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Подставим (11.5) и (11.6) в (11.1) и (11.4), сократив в полученных уравнениях множитель $e^{j\omega t}$:

$$-d\dot{U}/dx = Z_0\dot{I}; \tag{11.7}$$

$$-d\dot{I}/dx = Y_0\dot{U}; \tag{11.8}$$

где

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0; \tag{11.9}$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0. \tag{11.10}$$

Решим систему уравнений (11.7) и (11.8) относительно $\dot{U}$. С этой целью продифференцируем (11.7) по x:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0\frac{d\dot{I}}{dx}. \tag{11.11}$$

В (11.11) вместо $\frac{d\dot{I}}{dx}$ подставим правую часть уравнения (11.8):

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0Y_0\dot{U}. \tag{11.12}$$

Уравнение (11.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение:

$$\dot{U} = \dot{A}_1e^{\gamma x} + \dot{A}_2e^{-\gamma x}. \tag{11.13}$$

Комплексные числа $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ есть постоянные интегрирования, которые в дальнейшем определим через напряжение и ток в начале или через напряжение и ток в конце линии.

Комплексное число

$$\gamma=\sqrt{Z_0Y_0} \tag{11.14}$$

принято называть *постоянной распространения*; его можно представить в виде

$$\gamma=\alpha+j\beta, \tag{11.15}$$

где α — *коэффициент затухания* [характеризует затухание падающей волны на единицу длины линии, скажем, на 1 м (км)]; β — *коэффициент фазы*; он характеризует изменение фазы падающей волны на единицу длины линии [на 1 м (км)]:

$$[\gamma]=[\alpha]=[\beta]=1/\text{км}.$$

Ток $\dot{I}$ найдем из уравнения (11.7):

$$\dot{I}=-\frac{1}{Z_0}\frac{d\dot{U}}{dx}=\frac{\dot{A}_2e^{-\gamma x}-\dot{A}_1e^{\gamma x}}{Z_0/\gamma}. \tag{11.16}$$

Отношение $Z_0/\gamma=Z_0/\sqrt{Z_0Y_0}=\sqrt{Z_0/Y_0}$, имеющее размерность сопротивления, обозначают $Z_в$ и называют *волновым сопротивлением*:

$$Z_в=\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}}=z_в e^{j\varphi_в}, \tag{11.17}$$

где $z_в$ — модуль; $\varphi_в$ — аргумент волнового сопротивления $Z_в$.

Следовательно,

$$\dot{I}=\frac{\dot{A}_2}{Z_в}e^{-\gamma x}-\frac{\dot{A}_1}{Z_в}e^{\gamma x}. \tag{11.16'}$$

§ 11.4. **Постоянная распространения и волновое сопротивление.** Как говорилось ранее, постоянная распространения

$$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}. \tag{11.18}$$

Для линии постоянного тока $\omega=0$ и потому

$$\gamma=\sqrt{R_0G_0}. \tag{11.19}$$

Для линии синусоидального тока без потерь ($R_0=G_0=0$)

$$\gamma=j\omega\sqrt{L_0C_0}. \tag{11.20}$$

Запишем формулы для приближенного определения β и α в линии с малыми потерями, когда $(R_0/\omega L_0)\ll 1$ и $(G_0/\omega C_0)\ll 1$. С этой целью перепишем формулу (11.18) следующим образом:

$$\gamma=j\omega\sqrt{L_0C_0}\left(1-j\frac{R_0}{\omega L_0}\right)^{1/2}\left(1-j\frac{G_0}{\omega C_0}\right)^{1/2}$$

и разложим биномы в ряды, ограничившись двумя членами каждого ряда [т. е. воспользуемся соотношением $\sqrt{1+x}\approx 1+(x/2)$]. Получим

$$\gamma\approx\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+\frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}+j\omega\sqrt{L_0C_0}. \tag{11.21}$$

Следовательно,

$$\alpha=\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+\frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \tag{11.22}$$

$$\beta=\omega\sqrt{L_0C_0}. \tag{11.22a}$$

Рассмотрим вопрос о волновом сопротивлении. Для постоянного тока ($\omega = 0$) из (11.17) следует, что

$$Z_в = \sqrt{R_0/G_0}. \tag{11.23}$$

Для линии синусоидального тока без потерь ($R_0 = G_0 = 0$)

$$Z_в = \sqrt{L_0/C_0}. \tag{11.23а}$$

Для линии синусоидального тока с малыми потерями, когда

$$\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1 \quad и \quad \frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1,$$

$$Z_в \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left[1 + j\left(-\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0}\right)\right]. \tag{11.24}$$

§ 11.5. Формулы для определения комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в начале линии. Как и раньше, через x будем обозначать расстояние от начала линии до текущей точки на ней.

Пусть в начале линии при $x = 0$ напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$. Составим уравнения для определения постоянных $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ через $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$. Из (11.13) и (11.16′) следует ($x = 0$):

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_2 + \dot{A}_1; \tag{11.25}$$

$$\dot{I}_1 Z_в = \dot{A}_2 - \dot{A}_1. \tag{11.26}$$

Для определения $\dot{A}_1$ из (11.25) вычтем (11.26):

$$\dot{A}_1 = 0{,}5\,(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_в) = A_1 e^{j\psi_о}; \tag{11.27}$$

$$\dot{A}_2 = 0{,}5\,(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_в) = A_2 e^{j\psi_п}, \tag{11.28}$$

где A_1 — модуль, $\psi_о$ — аргумент комплекса $\dot{A}_1$; A_2 — модуль, $\psi_п$ — аргумент* комплекса $\dot{A}_2$.

Подставим (11.27) и (11.28) в (11.13):

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_в}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_в}{2} e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 Z_в \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Введем гиперболические функции. Известно, что

$$\operatorname{ch} x = 0{,}5\,(e^{x} + e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x = 0{,}5\,(e^{x} - e^{-x}).$$

Поэтому

$$0{,}5\,(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch} \gamma x; \tag{11.29}$$

$$0{,}5\,(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh} \gamma x. \tag{11.30}$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_в \operatorname{sh} \gamma x. \tag{11.31}$$

Аналогичные преобразования, примененные к (11.16), дают

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma x. \tag{11.32}$$

---

* Индексы «о» и «п» — начальные буквы слов «отраженная» и «падающая» (волны), см. § 11.8.

Формулы (11.31) и (11.32) позволяют найти комплексы напряжения и тока в точке линии, расположенной на расстоянии x от ее начала.

Следует иметь в виду, что аргументом гиперболических функций в этих формулах является комплексное число $\gamma x = \alpha x + j\beta x$.

§ 11.6. Графическая интерпретация гиперболических синуса и косинуса от комплексного аргумента. Гиперболические функции от комплексного аргумента сами являются комплексами и могут быть изображены векторами на комплексной плоскости.

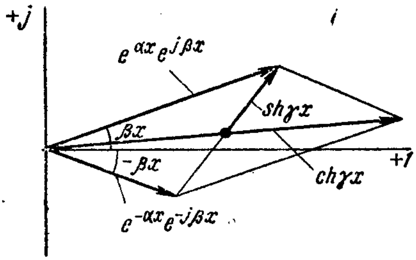


Рис. 11.3

Заменим γx в уравнениях (11.29) и (11.30) на $\alpha x + j\beta x$:

$$\operatorname{ch}\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x}e^{j\beta x} + e^{-\alpha x}e^{-j\beta x});$$

$$\operatorname{sh}\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x}e^{j\beta x} - e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}).$$

По таблицам показательных функций найдем значения $e^{\alpha x}$ и $e^{\alpha x}$ и на комплексной плоскости (рис. 11.3) отложим векторы $e^{\alpha x}e^{j\beta x}$ и $e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}$. Первый из них по модулю равен $e^{\alpha x}$ и по отношению к оси действительных значений повернут на угол βx против часовой стрелки; второй по модулю $e^{-\alpha x}$ и по отношению к оси действительных значений повернут на угол βx по часовой стрелке.

Гиперболический косинус равен полусумме этих векторов, а гиперболический синус — их полуразности.

§ 11.7. Формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в конце линии. Обозначим расстояние от текущей точки на линии до конца линии y, а длину всей линии (рис. 11.4) l:

$$y = l - x. \tag{11.33}$$

Пусть известны напряжение и ток в конце линии $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Подставим в (11.13) и (11.16′) $x = l$, $\dot{U} = \dot{U}_2$, $\dot{I} = \dot{I}_2$ и составим два уравнения для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$:

$$\dot{U}_2 = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} + \dot{A}_1 e^{\gamma l};$$

$$\dot{I}_2 Z_в = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} - \dot{A}_1 e^{\gamma l}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_в}{2} e^{-\gamma l} = A_1 e^{j\psi_0}; \\ \dot{A}_2 &= \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_в}{2} e^{\gamma l} = A_2 e^{j\psi}_п. \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

Если подставить (11.34) в (11.13) и (11.16′), заменить $l-x$ на y и перейти к гиперболическим функциям, то получим:

$$\dot U=\dot U_2 \operatorname{ch}\gamma y+\dot I_2 Z_в \operatorname{sh}\gamma y; \qquad (11.35)$$

$$\dot I=\frac{\dot U_2}{Z_в}\operatorname{sh}\gamma y+\dot I_2\operatorname{ch}\gamma y. \qquad (11.36)$$

Зная $\dot U_2$ и $\dot I_2$ с помощью формул (11.35) и (11.36), можно найти комплексы напряжения и тока в точке, находящейся на расстоянии y от конца линии.

§ 11.8 Падающие и отраженные волны в линии. Подставим в формулу (11.13) $A_1 e^{j\psi_0}$ вместо $\dot A_1$, $A_2 e^{j\psi_п}$ вместо $\dot A_2$ [см. (11.34)] и, заменив γ на $\alpha+j\beta$, получим

$$\dot U=A_1 e^{\alpha x} e^{j(\psi_0+\beta x)}+A_2 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_п-\beta x)}. \qquad (11.37')$$

Аналогичную операцию проделаем с формулой (11.16′), причем в дополнение заменив $Z_в$ на $z_в e^{j\varphi_в}$ [см. формулу (11.17)]:

$$\dot I=-\frac{A_1}{z_в}e^{\alpha x}e^{j(\psi_0+\beta x-\varphi_в)}+\frac{A_2}{z_в}e^{-\alpha x}e^{j(\psi_п-\beta x-\varphi_в)}. \qquad (11.38')$$

Для перехода от комплексов напряжения и тока к функциям времени умножим правые части формул (11.37′) и (11.38′) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимую часть:

$$u=A_1\sqrt{2}e^{\alpha x}\sin(\omega t+\psi_0+\beta x)+A_2\sqrt{2}e^{-\alpha x}\sin(\omega t+\psi_п-\beta x); \qquad (11.37)$$

$$i=-\frac{A_1}{z_в}\sqrt{2}e^{\alpha x}\sin(\omega t+\psi_0+\beta x-\varphi_в)+$$
$$+\frac{A_2\sqrt{2}}{z_в}e^{-\alpha x}\sin(\omega t+\psi_п-\beta x-\varphi_в). \qquad (11.38)$$

Падающей электромагнитной волной называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от источника энергии к приемнику, т. е. в нашем случае в направлении увеличения координаты x. Электромагнитное состояние определяется совокупностью электрического и магнитного полей. Падающая волна, распространяясь от источника энергии к приемнику, несет энергию, заключенную в ее электрическом и магнитном полях.

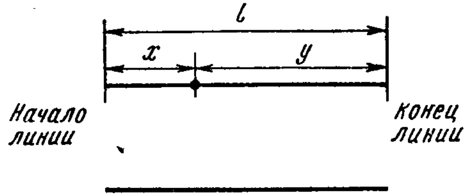


Рис. 11.4

Отраженной электромагнитной волной называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от приемника к источнику энергии, т. е. в нашем случае в сторону уменьшения координаты x.

Падающая электромагнитная волна образована падающей волной напряжения [второе слагаемое формулы (11.37)] и падающей волной тока [второе слагаемое формулы (11.38)]. Отраженная электромагнитная волна образована отраженной волной напряжения [первое слагаемое формулы (11.37)] и отраженной волной тока [первое слагаемое формулы (11.38)].

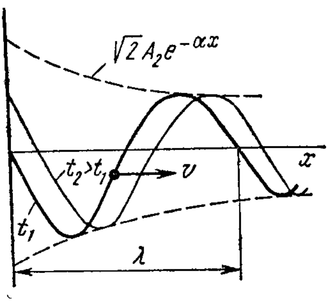


Рис. 11.5

Знак минус у отраженной волны тока свидетельствует о том, что поток энергии, который несет с собой отраженная электромагнитная волна, движется в обратном направлении по сравнению с потоком энергии, который несет с собой падающая волна.

Каждая компонента падающей волны (волна напряжения или волна тока) представляет собой синусоидальное колебание, амплитуда которого уменьшается по мере роста x (множитель $e^{-\alpha x}$), а аргумент является функцией времени и координаты x.

Каждая компонента отраженной электромагнитной волны затухает по мере продвижения волны от конца линии к началу (множитель $e^{\alpha x}$). Физически эффект уменьшения амплитуд падающей и отраженной волн по мере их продвижения по линии объясняется наличием потерь в линии.

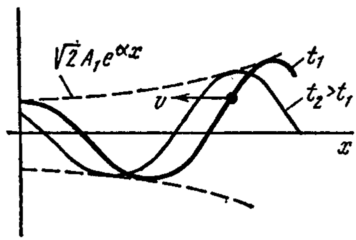


Рис. 11.6

На рис. 11.5 изображены графики распределения падающей волны напряжения вдоль линии (в функции x) для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Падающая волна распространяется слева направо. При построении принято $\omega t_1 + \psi_п = 0$.

На рис. 11.6 представлены графики распределения отраженной волны напряжения для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Отраженная волна распространяется справа налево.

§ 11.9. Коэффициент отражения. Отношение напряжения отраженной волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называют *коэффициентом отражения* по напряжению и обозначают K_u. В соответствии с формулой (11.34)

$$K_u = \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma l}}{\dot{A}_2 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}.$$

При согласованной нагрузке $K_u = 0$, при холостом ходе $K_u = 1$. Коэффициент отражения по току $K_i = -K_u$.

§ 11.10. Фазовая скорость. *Фазовой скоростью* $v_ф$ называют скорость, с которой нужно перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу колебания, или иначе: фазовая скорость — это скорость перемещения по линии неизменного фазового состояния. Если фаза падающей волны напряжения неизменна, то в соответствии с формулой (11.37)

$$\omega t+\psi_п-\beta x=\mathrm{const}.$$

Возьмем производную по времени от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{d}{dt}(\omega t+\psi_п-\beta x)=0,\quad \text{или}\quad \omega-\beta\frac{dx}{dt}=0.$$

Отсюда

$$v_ф=dx/dt=\omega/\beta.$$

Пример 116. Найти фазовую скорость для воздушной двухпроводной линии с малыми потерями.

Решение. Из формулы (11.22 а) следует, что $\beta=\omega\sqrt{L_0C_0}$. Поэтому

$$v_ф=\omega/\beta=1/\sqrt{L_0C_0}. \qquad (11.39)$$

Индуктивность единицы длины двухпроводной воздушной линии [см. формулу (2.10)]

$$L_0=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r},$$

где μ_0 — магнитная постоянная; d — расстояние между осями проводов; r — радиус каждого провода.

Емкость единицы длины воздушной двухпроводной линии [см. формулу (19.43)]

$$C_0=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r)},\ \text{где}\ \varepsilon_0 - \text{электрическая постоянная.}$$

Фазовая скорость

$$v_ф=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{1{,}256\cdot10^{-6}\ \text{Г/м}\cdot 8{,}86\cdot10^{-12}\ (\text{Ф/м})}}\approx 300\,000\ (\text{км/с}).$$

§ **11.11. Длина волны.** Под *длиной волны* λ понимают расстояние, на которое распространяется волна за один период $T=1/f$:

$$\lambda=vT=v/f. \qquad (11.40)$$

Пример 117. Найти длину электромагнитной волны при $f=50$ и $50\cdot10^6$ Гц.

Решение. При $f=50$ Гц

$$\lambda=\frac{300\,000\ (\text{км/с})}{50\ (\text{с}^{-1})}=6000\ (\text{км}).$$

При $f=50\cdot10^6$ Гц $\lambda=6$ м.

§ **11.12. Линия без искажений.** *Линия без искажений* представляет собой линию, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и затухают в равной степени.

При движении электромагнитной волны по линии без искажений волны напряжения и тока уменьшаются по амплитуде, но формы волн напряжения в конце и начале линии подобны; точно так же подобны формы волн тока в начале и конце линии.

Неискажающие линии находят применение в телефонии. При телефонном разговоре по таким линиям не искажается тембр голоса, т. е. не искажается спектральный состав голоса.

Для того чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания α и фазовая скорость $v_ф$ не должны зависеть от частоты; α и $v_ф$ не зависят от частоты, если между параметрами линии имеет место следующее соотношение:

$$R_0/L_0 = G_0/C_0. \qquad (11.41)$$

Для сокращения записи обозначим $R_0/L_0 = G_0/C_0 = k$. По определению, $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0}$. Но

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(k + j\omega);$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(k + j\omega);$$

$$\gamma = (k + j\omega)\sqrt{L_0 C_0}.$$

Следовательно,

$$\alpha = k\sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 C_0}; \qquad (11.42)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0};$$

$$v_ф = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \qquad (11.43)$$

Из формул (11.42) и (11.43) следует, что коэффициент затухания α и фазовая скорость $v_ф$ в линии без искажений действительно не зависят от частоты.

В линии без искажений волновое сопротивление

$$Z_в = \sqrt{Z_0/Y_0} = \sqrt{L_0/C_0}$$

является действительным числом и также не зависит от частоты.

Чтобы убедиться, что форма волны напряжения в конце линии u_2 полностью подобна форме волны напряжения в начале линии u_1, возьмем напряжение на входе линии в виде суммы двух синусоидальных колебаний, одно из которых имеет частоту ω, а другое 2ω, и составим выражение для u_2. Пусть

$$u_1 = U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2).$$

Так как для линии без искажения коэффициент затухания α не зависит от частоты [см. формулу (11.42)], то амплитуды обоих колебаний на расстоянии l уменьшаются в одинаковой степени и становятся равными $U_{1m}e^{-\alpha l}$ и $U_{2m}e^{-\alpha l}$. Для линии без искажения коэффициент фазы β прямо пропорционален частоте, поэтому для частоты 2ω коэффициент β в два раза больше, чем для частоты ω. Следовательно, мгновенное значение напряжения в конце линии

$$u_2 = U_{1m}e^{-\alpha l}\sin(\omega t + \psi_1 - \beta l) + U_{2m}e^{-\alpha l}\sin(2\omega t + \psi_2 - 2\beta l) =$$
$$= U_{1m}e^{-\alpha l}\sin\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}\right) + \psi_1\right] + U_{2m}e^{-\alpha l}\sin\left[2\omega\left(t - \frac{2\beta l}{2\omega}\right) + \psi_2\right].$$

Вынесем $e^{-\alpha l}$ за скобку и обозначим время $t - \frac{\beta l}{\omega}$ через τ. Получим

$$u_2 = e^{-\alpha l}\left[U_{1m}\sin(\omega\tau + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega\tau + \psi_2)\right].$$

Если сопоставить последнее выражение с выражением для u_1, то можно сделать вывод, что напряжение в конце линии имеет ту же форму, что и напряжение в начале линии. Однако оно уменьшено по амплитуде за счет затухания и смещено во времени на $\beta l/\omega = l/v_ф$ — на время движения волны по линии длиной l.

§ 11.13. Согласованная нагрузка. Линия с распределенными параметрами, как правило, служит в качестве промежуточного звена между источником энергии и нагрузкой.

Обозначим сопротивление нагрузки Z_2 $(Z_2 = \dot U_2/\dot I_2)$. Если $Z_2 \neq Z_в$, то падающая волна частично пройдет в нагрузку, частично отразится от нее (возникает отраженная волна). Часто берут $Z_2 = Z_в$. Такую нагрузку называют *согласованной*; при ней отраженная волна отсутствует. В этом можно убедиться с помощью формулы (11.34). Действительно, отраженная волна отсутствует, так как $\dot A_1 = 0$:

$$\dot A_1 = 0{,}5\,(\dot U_2 - \dot I_2 Z_в)\,e^{-\gamma l} = 0{,}5\,(\dot U_2 - \dot U_2)\,e^{-\gamma l} = 0.$$

§ 11.14. Определение напряжения и тока при согласованной нагрузке. Чтобы получить формулы для определения напряжения и тока в любой точке, удаленной от конца линии на расстояние y, в формулы (11.35) и (11.36) вместо $Z_в$ подставим Z_2, заменим $\dot I_2 Z_2$ на $\dot U_2$ и $\dot U_2/Z_2$ на $\dot I_2$. Получим:

$$\dot U = \dot U_2(\operatorname{ch}\gamma y + \operatorname{sh}\gamma y) = \dot U_2 e^{\gamma y}; \qquad (11.44)$$

$$\dot I = \dot I_2(\operatorname{ch}\gamma y + \operatorname{sh}\gamma y) = \dot I_2 e^{\gamma y}. \qquad (11.45)$$

В начале линии при $y = l$

$$\left.\begin{aligned} \dot U_1 &= \dot U_2 e^{\gamma l} = U_2 e^{j\varphi_{U_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}; \\ \dot I_1 &= \dot I_2 e^{\gamma l} = I_2 e^{j\varphi_{I_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.46)$$

где U_2 — модуль, а φ_{U_2} аргумент комплекса $\dot U_2$; I_2 — модуль, а φ_{I_2} аргумент комплекса $\dot I_2$.

§ 11.15. Коэффициент полезного действия линии передачи при согласованной нагрузке. Коэффициент полезного действия линии передачи равен отношению активной мощности в конце линии P_2 к активной мощности в начале линии P_1:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\varphi_{U_2} - \varphi_{I_2}) = U_2 I_2 \cos\varphi_в,$$

где $\varphi_в$ — аргумент волнового сопротивления $Z_в$.

При согласованной нагрузке угол между $\dot U_1$ и $\dot I_1$ также равен $\varphi_в$, поэтому в соответствии с формулами (11.46)

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_в = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos\varphi_в.$$

Следовательно,

$$\eta = P_2/P_1 = e^{-2\alpha l}. \qquad (11.47)$$

§ 11.16. Входное сопротивление нагруженной линии. На рис. 11.7 изображена схема, состоящая из источника напряжения $\dot U_1$, линии с распределенными параметрами длиной l и нагрузки Z_2. Входное сопротивление $Z_{вх}=\dot{U}_1/\dot{I}_1$. В формулах (11.35) и (11.36) вместо y подставим l и заменим $\dot{U}_2$ на $\dot{I}_2 Z_2$. Получим

$$Z_{вх}=\frac{\dot{I}_2 Z_2 \operatorname{ch}\gamma l+\dot{I}_2 Z_в \operatorname{sh}\gamma l}{\dot{I}_2 \frac{Z_2}{Z_в}\operatorname{sh}\gamma l+\dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l},$$

или

$$Z_{вх}=\frac{Z_2 \operatorname{ch}\gamma l+Z_в \operatorname{sh}\gamma l}{\frac{Z_2}{Z_в}\operatorname{sh}\gamma l+\operatorname{ch}\gamma l}. \qquad (11.48)$$

Если нагрузка согласована (т. е. $Z_2=Z_в$), то из (11.48) следует, что входное сопротивление равно волновому:

$$Z_{вх}=\frac{Z_в(\operatorname{ch}\gamma l+\operatorname{sh}\gamma l)}{\operatorname{sh}\gamma l+\operatorname{ch}\gamma l}=Z_в.$$

§ 11.17. Определение напряжения и тока в линии без потерь.

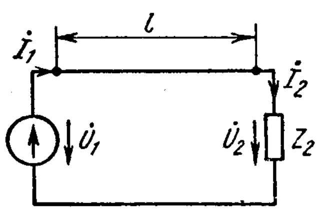


Рис. 11.7

Строго говоря, линий без потерь не существует. Однако можно создать линию с очень малыми потерями (с очень малыми R_0 и G_0 по сравнению с ωL_0 и ωC_0 соответственно) и распространить на нее теорию линий без потерь.

Из предыдущего [см. формулу (11.20)] известно, что если $R_0=G_0=0$, то

$$\gamma=\alpha+j\beta=j\omega\sqrt{L_0C_0},$$

т. е. коэффициент затухания $\alpha=0$, а коэффициент фазы $\beta=\omega\sqrt{L_0C_0}$.

При этом волновое сопротивление $Z_в=\sqrt{L_0/C_0}$ является чисто активным [см. формулу (11.23 а)].

Для определения напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ в любой точке линии обратимся к формулам (11.35) и (11.36):

$$\dot{U}=\dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma y+\dot{I}_2 Z_в \operatorname{sh}\gamma y;$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_2}{Z_в}\operatorname{sh}\gamma y+\dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma y.$$

Учтем, что $\gamma y=(\alpha+j\beta)y=(0+j\beta)y=j\beta y$.

Гиперболический косинус от мнимого аргумента jx равен круговому косинусу от аргумента x:

$$\operatorname{ch}jx=0{,}5(e^{jx}+e^{-jx})=0{,}5(\cos x+j\sin x+\cos x-j\sin x)=\cos x.$$

Следовательно, $\operatorname{ch}\gamma y=\operatorname{ch}j\beta y=\cos\beta y$.

Гиперболический синус от аргумента jx равен круговому синусу от аргумента x, умноженному на j:

$$\operatorname{sh}jx=0{,}5(e^{jx}-e^{-jx})=0{,}5(\cos x+j\sin x-\cos x+j\sin x)=j\sin x.$$

Следовательно, $\operatorname{sh}\gamma x=\operatorname{sh}j\beta y=j\sin\beta y$.

Поэтому для линии без потерь формулы (11.35) и (11.36) перепишем следующим образом:

$$\dot{U}=\dot{U}_2\cos\beta y+j\dot{I}_2Z_в\sin\beta y; \qquad (11.35')$$

$$\dot{I}=j\frac{\dot{U}_2}{Z_в}\sin\beta y+\dot{I}_2\cos\beta y. \qquad (11.36')$$

§ 11.18. Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе. При холостом ходе $I_2=0$. Поэтому

$$Z_{вх\,х.х}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}_2\cos\beta y}{j\frac{\dot{U}_2}{Z_в}\sin\beta y}=\frac{-jZ_в}{\operatorname{tg}\beta y}=\frac{-j\sqrt{L_0/C_0}}{\operatorname{tg}\beta y}=jx. \qquad (11.49)$$

Исследуем характер изменения $Z_{вх\,х.х}$ при изменении расстояния y от конца линии до текущей точки на ней.

В интервале значений βy от 0 до $\pi/2$ $\operatorname{tg}\beta y$ изменяется от 0 до ∞, поэтому $Z_{вх\,х.х}$ имеет емкостный характер (множитель $-j$) и по модулю изменяется от ∞ до 0 (рис. 11.8, *а*). На рис. 11.8, *а* расположение кривой выше оси абсцисс соответствует индуктивному характеру реактивного сопротивления линии x, ниже оси — емкостному. В интервале значений βy от $\pi/2$ до π $\operatorname{tg}\beta y$ отрицателен и изменяется от $-\infty$ до 0, поэтому $Z_{вх\,х.х}$ изменяется по модулю от 0 до ∞ и имеет индуктивный характер (множитель $+j$) и т. д.

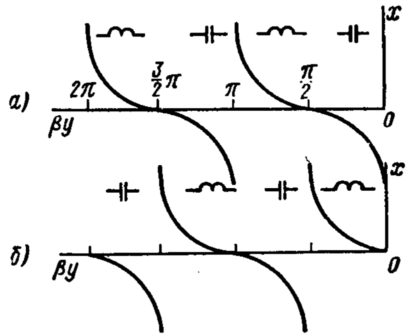


Рис. 11.8

Таким образом, изменяя длину отрезка линии без потерь, можно имитировать емкостное и индуктивное сопротивления любой величины. Практически это свойство используют при высокой частоте в различных радиотехнических установках.

§ 11.19. Входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании на конце линии. При коротком замыкании на конце линии $U_2=0$ и из формул (11.35′) и (11.36′) следует, что входное сопротивление

$$Z_{вх\,к.з}=jZ_в\operatorname{tg}\beta y=j\sqrt{L_0/C_0}\operatorname{tg}\beta y, \qquad (11.50)$$

где $\beta=\omega\sqrt{L_0C_0}$.

Будем менять длину отрезка линии y и исследуем характер изменения входного сопротивления.

В интервале значений βy от 0 до $\pi/2$ $\operatorname{tg}\beta y$ положителен и изменяется от 0 до ∞, следовательно, в этом интервале входное сопротивление имеет индуктивный характер и по модулю изменяется от 0 до ∞ (рис. 11.8, *б*).

В интервале βy от $\pi/2$ до π входное сопротивление имеет емкостный характер и изменяется по модулю от ∞ до 0 (в точке $\beta y=\pi/2$ $\operatorname{tg}\beta y$ скачком изменяется от $+\infty$ до $-\infty$).

Таким образом, изменяя длину отрезка короткозамкнутой на конце линии, также можно создавать различные по величине индуктивные и емкостные сопротивления. Отрезок короткозамкнутой на конце линии без потерь длиной в четверть длины волны теоретически имеет входное сопротивление, равное бесконечности. Это позволяет применять его при подвеске проводов в качестве изолятора.

§ 11.20. Входное сопротивление линии без потерь при реактивной нагрузке. Определим входное сопротивление линии без потерь при чисто реактивной нагрузке $Z_н=jX_н$ (в § 11.20 α заменить на β):

$$Z_{вх}=\frac{Z_н\cos\alpha y+jZ_в\sin\alpha y}{\cos\alpha y+j\dfrac{Z_н}{Z_в}\sin\alpha y}=\frac{jZ_в\cos\alpha y\left[\operatorname{tg}\alpha y+\dfrac{Z_н}{jZ_в}\right]}{\cos\alpha y\left[1+j\dfrac{Z_н}{Z_в}\operatorname{tg}\alpha y\right]}.$$

Обозначим $-jZ_н/Z_в=\operatorname{tg}\nu$ и учтем, что $\operatorname{tg}(\alpha y+\nu)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha y+\operatorname{tg}\nu}{1-\operatorname{tg}\alpha y\operatorname{tg}\nu}$. Получим

$$Z_{вх}=jZ_в\frac{\operatorname{tg}\alpha y+\operatorname{tg}\nu}{1-\operatorname{tg}\nu\operatorname{tg}\alpha y}=jZ_в\operatorname{tg}(\alpha y+\nu), \tag{11.51}$$

т. е. входное сопротивление изменяется по тангенсоиде, начало которой смещено на угол ν.

При индуктивной нагрузке

$$X_н=\omega L;\ \operatorname{tg}\nu=-j\frac{j\omega L}{Z_в}=\frac{\omega L}{Z_в};\ \nu>0;$$

при емкостной

$$X_н=-\frac{1}{\omega C};\ \operatorname{tg}\nu=-j\frac{j\left(-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{Z_в}=-\frac{1}{\omega CZ_в};\ \nu<0.$$

§ 11.21. Определение стоячих электромагнитных волн. В линиях без потерь при холостом ходе, коротком замыкании, а также при чисто реактивных нагрузках возникают стоячие электромагнитные волны.

Стоячая электромагнитная волна представляет собой электромагнитную волну, полученную в результате наложения движущихся навстречу падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведением двух периодических (в нашем случае — тригонометрических) функций. Одна из них — функция координаты текущей точки на линии (в нашем случае βy), другая — функция времени (ωt). Стоячие волны напряжения и тока всегда сдвинуты по отношению друг к другу в пространстве и во времени.

Сдвиг во времени между стоячими волнами напряжения и тока равен 90°, сдвиг в пространстве — четверти длины волны [см. формулы (11.52′) и (11.53′), (11.54′) и (11.55′)].

Точки линии, где периодическая функция координаты проходит через нуль, называют *узлами*, а точки линии, в которых периодическая функция координаты принимает максимальные значения, — *пучностями*.

При возникновении стоячих волн электромагнитная энергия от начала к концу линии не передается. Однако на каждом отрезке линии, равном четверти длины волны, запасена некоторая электромагнитная энергия.

Эта энергия периодически переходит из одного вида (энергии электрического поля) в другой (энергию магнитного поля).

В моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию электрического поля.

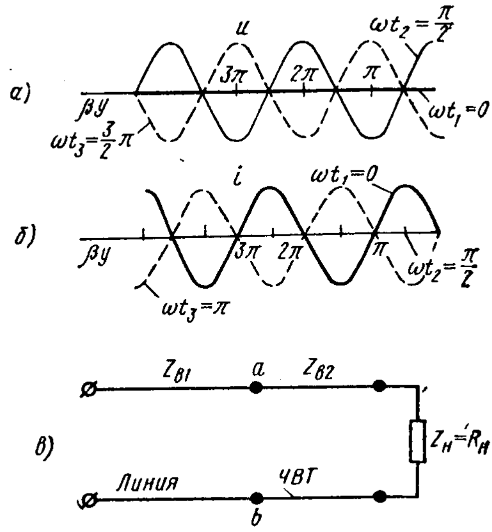


Рис. 11.9

В моменты времени, когда напряжение вдоль всей линии равно нулю, а ток достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию магнитного поля.

§ 11.22. Стоячие волны в линии без потерь при холостом ходе линии. Из формул (11.35′) и (11.36′) следует, что при холостом ходе

$$\dot U=\dot U_2\cos\beta y; \qquad (11.52)$$

$$\dot I=j\frac{\dot U_2}{\sqrt{L_0/C_0}}\sin\beta y. \qquad (11.53)$$

Для перехода к функциям времени умножим правые части формул (11.52) и (11.53) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от полученных произведений возьмем мнимые части:

$$u=\sqrt{2}\,U_2\cos\beta y\sin\omega t; \qquad (11.52')$$

$$i=\frac{\sqrt{2}\,U_2}{\sqrt{L_0/C_0}}\sin\beta y\sin(\omega t+90^\circ). \qquad (11.53')$$

Угол 90° в аргументе у синуса в формуле (11.53′) соответствует множителю j в формуле (11.53).

В точках $\beta y=k\pi$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, будут узлы тока и пучности напряжения.

График стоячих волн напряжения и тока для трех смежных моментов времени $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \pi/2$ и $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ показан на рис. 11.9: *а* — напряжения, *б* — тока. Сплошными линиями обозначена волна при $\omega t_1 = 0$, тонкими — при $\omega t_2 = \pi/2$, пунктирными — при $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ для напряжения и при $\omega t_3 = \pi$ для тока.

§ 11.23. Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии. Из формул (11.35′) и (11.36′) следует, что при коротком замыкании на конце линии

$$\dot{U} = j\dot{I}_2 \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y; \tag{11.54}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y. \tag{11.55}$$

Для перехода к мгновенным значениям умножим правые части формул (11.54) и (11.55) на $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимые части:

$$u = \sqrt{2}\, I_2 \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y \sin(\omega t + 90°); \tag{11.54′}$$

$$i = \sqrt{2}\, I_2 \cos \beta y \sin \omega t. \tag{11.55′}$$

В правой части формулы (11.54′) — в формуле для напряжения — есть множитель $\sin \beta y \sin(\omega t + 90°)$, как и в формуле (11.53′) для тока i.

Следовательно, картина стоячей волны напряжения при коротком замыкании на конце линии качественно повторяет картину стоячей волны тока при холостом ходе линии.

Аналогично, картина стоячей волны тока в короткозамкнутой линии качественно повторяет картину стоячей волны напряжения при холостом ходе линии.

§ 11.24. Четвертьволновый трансформатор. Для согласования линии без потерь, имеющей волновое сопротивление $Z_{в1}$, с активной нагрузкой $Z_н = R_н \neq Z_{в1}$ применяют четвертьволновый трансформатор (ЧВТ). Он представляет собой отрезок линии без потерь длиной в четверть волны $\lambda/4$ с волновым сопротивлением $Z_{в2}$. Сопротивление $Z_{в2}$ рассчитывают так, чтобы входное сопротивление в схеме рис. 11.9, *в* по отношению к точкам a и b оказалось равным $Z_{в1}$ (при этом на линии с $Z_{в1}$ не будет отраженных волн, следовательно, не будет и потерь энергии от них):

$$Z_{вх\,ab} = \frac{R_н \cos 90° + jZ_{в2} \sin 90°}{\cos 90° + j\dfrac{R_н}{Z_{в2}} \sin 90°} = \frac{Z_{в2}^2}{R_н} = Z_{в1}.$$

Отсюда $Z_{в2} = \sqrt{R_н Z_{в1}}$.

На линии с $Z_{в2}$ есть и падающие и отраженные волны, но протяженность этой линии мала, поэтому и потери в ней относительно не велики.

§ 11.25. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн. При согласованной нагрузке на линии имеются только бегущие волны напряжения ($\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta y}$) и тока ($\dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta y}$). Так как при любом $y\,|e^{j\beta y}| = 1$, то *для бегущей волны действующее значение напряжения и тока вдоль линии неизменно* (рис. 11.10, *а*). При возникновении на линии *стоячих волн* действующее значение напряжения на линии изменяется в функции расстояния y пропорционально $|\cos\beta y|$ при холостом ходе [см. формулу (11.52)] или пропорционально $|\sin\beta y|$ при коротком замыкании [см. формулу (11.54)].

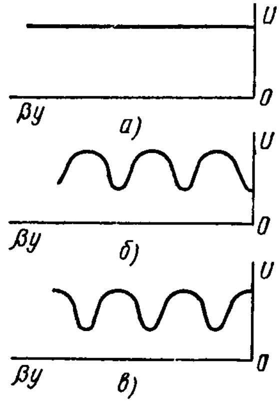


Рис. 11.10

При несогласованной активной нагрузке на линии возникает *смешанная волна* — комбинация бегущей и стоячей волн. Если обозначить $m = Z_в/Z_н$, то

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos\beta y + jm\dot{U}_2 \sin\beta y = \dot{U}_2 \cos\beta y + j\dot{U}_2 \sin\beta y + j\dot{U}_2 (m-1)\sin\beta y,$$

или

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta y} + j(m-1)\dot{U}_2 \sin\beta y.$$

Первое слагаемое определяет бегущую, второе — стоячую волны. Распределение напряжения на линии в функции расстояния y

$$U = U_2\sqrt{\cos^2\beta y + m^2 \sin^2\beta y}.$$

При $m > 1$ напряжение на конце линии минимально, а через четверть длины волны $\beta y = \pi/2$ максимально (рис. 11.10, *б*). При $m < 1$ напряжение на конце линии максимально, а через $\beta y = \pi/2$ минимально (рис. 11.10, *в*).

Коэффициентом бегущей волны называют отношение минимума напряжения смешанной волны к ее максимуму: $K_{б.в} = U_{min}/U_{max}$.

Коэффициент стоячей волны $K_{с.в} = 1/K_{б.в}$.

§ 11.26. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника. Напряжение и ток на входе линии с распределенными параметрами ($\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$) связаны с напряжением и током в конце этой линии (U_2, $\dot{I}_2$) следующими уравнениями [получены из (11.35) и (11.36), в которые вместо y подставлена длина всей линии l]:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_в \operatorname{sh}\gamma l; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_в}\operatorname{sh}\gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l.$$

Сопоставим их с известными из ч. I учебника уравнениями четырехполюсника: $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$; $\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$. Из сопоставления следует, что уравнения по форме полностью аналогичны, а если принять, что

$$A=D=\operatorname{ch}\gamma l; \tag{11.56}$$

$$B=Z_в \operatorname{sh}\gamma l; \tag{11.57}$$

$$C=\operatorname{sh}\gamma l/Z_в, \tag{11.58}$$

то зависимость между $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, и $\dot{I}_2$ и зависимость между $\dot{I}_1$, и $\dot{U}_2$, и $\dot{I}_2$ в линиях с распределенными параметрами точно такие же, как и в четырехполюснике. Другими словами, при соблюдении условий (11.56)—(11.58) четырехполюсник эквивалентен линии с распределенными параметрами в отношении связи между входными и выходными токами и напряжениями.

Если сопротивление нагрузки $Z_н=Z_c$, то у четырехполюсника, как и у линии, $Z_{вх}=Z_c$ (см. § 11.17). Входное сопротивление в этом случае повторяет Z_c и потому называется *повторным*.

§ 11.27. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена. При перемене местами источника и нагрузки в схеме рис. 11.7 токи в источнике и нагрузке не изменятся. Таким же свойством обладает симметричный четырехполюсник. Поэтому однородная линия с распределенными параметрами может быть заменена симметричным четырехполюсником и, наоборот, симметричный четырехполюсник можно заменить участком однородной линии с распределенными параметрами. При замене будем исходить из уравнений (11.56)—(11.58) и зависимостей, с помощью которых параметры симметричного четырехполюсника связаны с коэффициентами A, B, C.

Для симметричной T-схемы замещения четырехполюсника

$$Z_1=(A-1)/C; \tag{11.59}$$

$$Z_3=1/C, \tag{11.60}$$

или

$$A=D=1+\frac{Z_1}{Z_3}; \tag{11.61}$$

$$B=2Z_1+\frac{Z_1^2}{Z_3}; \tag{11.62}$$

$$C=1/Z_3. \tag{11.63}$$

Для симметричной П-схемы

$$Z_4=B; \tag{11.64}$$

$$Z_5=B/(A-1), \tag{11.65}$$

или

$$A=1+\frac{Z_4}{Z_5}; \tag{11.66}$$

$$B=Z_4; \tag{11.67}$$

$$C=\frac{2}{Z_5}+\frac{Z_4}{Z_5^2}. \tag{11.68}$$

Рассмотрим сначала последовательность операций при замене Т-и П-схем замещения четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами (имеется в виду замена при фиксированной частоте).

Пусть известны параметры Z_1 и Z_3 в Т-схеме (Z_4 и Z_5 в П-схеме). Требуется найти $Z_в$ и γl для эквивалентной линии.

По формулам (11.61) — (11.63) [или соответственно (11.66) — (11.68)] находим коэффициенты A, B, C.

Для определения волнового сопротивления $Z_в$ разделим (11.57) на (11.58):

$$Z_в = \sqrt{B/C}. \tag{11.69}$$

Для определения γl составим выражение для $\operatorname{th} \gamma l$, использовав (11.56), (11.57) и (11.69):

$$\operatorname{th} \gamma l = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l} = \frac{\dfrac{B}{\sqrt{B/C}}}{A} = \frac{\sqrt{BC}}{A}, \tag{11.70}$$

но $\operatorname{th} \gamma l = \dfrac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}$.

Умножив и числитель, и знаменатель последней формулы на $e^{\gamma l}$, получим

$$\operatorname{th} \gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

Отсюда

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma l}{1 - \operatorname{th} \gamma l}. \tag{11.71}$$

Правую часть формулы (11.71) переведем в показательную форму. Пусть она будет равна $Me^{j\nu}$. Тогда $e^{2\alpha l} = M$, и так как $e^{j\nu} = e^{j(\nu + 2\pi k)} = e^{j2\beta l}$, где k — целое число, то $2\beta l - 2k\pi = \nu$. Отсюда

$$\beta l = \frac{\nu}{2} + k\pi. \tag{а}$$

Для реальных линий R_0, L_0, C_0, $G_0 > 0$. Это накладывает условие на определение k. Следует подсчитать βl по приближенно известному значению фазовой скорости в линии

$$\beta l = \omega l / v_ф \tag{б}$$

и затем, сопоставив значения βl, найденные по (а) и (б), определить k, округлив его значение до ближайшего целого числа.

Рассмотрим теперь последовательность операций при замене линии с распределенными параметрами эквивалентным ей четырехполюсником.

Известны γl и $Z_в$. Требуется найти сопротивления Z_1 и Z_3 в Т-схеме (Z_4 и Z_5 в П-схеме). С этой целью по (11.56) — (11.58) находим значения коэффициентов A, B, C, а затем по (11.59) и (11.60) определяем Z_1 и Z_3 для Т-схемы [или по (11.64) и (11.65) сопротивления Z_4 и Z_5 для П-схемы].

Любой ли симметричный четырехполюсник можно заменить участком линии с распределенными параметрами и любую ли линию с распределенными параметрами можно заменить четырехполюсником?

Очевидно, подобную замену можно осуществить, если полученные в результате расчета параметры таковы, что заменяющее устройство физически можно выполнить. Как правило, замена участка линии с распределенными параметрами четырехполюсником возможна всегда, а обратная замена — не всегда. Она невозможна в тех случаях, когда в результате расчета волновое сопротивление окажется чисто мнимым числом; в реальных линиях этого не бывает.

§ 11.28. Четырехполюсник заданного затухания. Включаемый между источником сигнала и нагрузкой четырехполюсник, предназначенный для ослабления амплитуды сигнала в заданное число раз, называют четырехполюсником заданного затухания (*аттенюатором*). Его собирают обычно по симметричной Т- или П-схеме и нагружают согласованно.

Положим, что требуется найти сопротивления Z_1 и Z_3 такого четырехполюсника, собранного по Т-схеме, полагая известными затухание (в неперах) и характеристическое сопротивление Z_c. Исходим из двух соотношений:

$$\operatorname{ch} a = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \quad \text{и} \quad Z_c = \sqrt{B/C} = \sqrt{2Z_1Z_3 + Z_1^2}.$$

Из первого находим $Z_1/Z_3 = \operatorname{ch} a - 1$ и подставляем во второе.

Пример 118. Дано: $a = 0{,}963$ Нп; $Z_c = 700$ Ом.

Найти Z_1 и Z_3.

Решение. $Z_1/Z_3 = \operatorname{ch} 0{,}963^* - 1 = 0{,}5$; $Z_1 = 0{,}5Z_3$; $Z_c = 2{,}25Z_1$; $Z_1 = 311$ Ом; $Z_3 = 622$ Ом.

§ 11.29. Цепная схема. На практике приходится встречаться со схемой, представляющей собой каскадное включение нескольких одинаковых симметричных четырехполюсников (рис. 11.11).

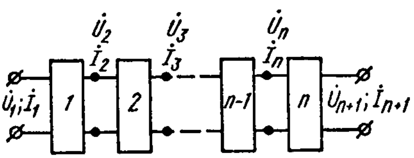


Рис. 11.11

Такую схему принято называть *цепной схемой*. Исследование распределения тока и напряжения вдоль цепной схемы удобно проводить, используя теорию линий с распределенными параметрами. Действительно, в предыдущем параграфе говорилось о замене одного четырехполюсника отрезком линии длиной l, имеющей постоянную распространения γ и волновое сопротивление $Z_в$. Если число четырехполюсников равно n, то длина отрезка линии с распределенными параметрами будет в n раз больше, т. е. равна nl.

Обозначим напряжение и ток на выходе n четырехполюсника через $\dot{U}_{n+1}$ и $\dot{I}_{n+1}$; тогда напряжение и ток на входе первого четырехполюсника

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} \gamma nl + \dot{I}_{n+1} Z_в \operatorname{sh} \gamma nl; \quad (11.72)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma nl + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} \gamma nl. \quad (11.73)$$

---

* Таблицу гиперболических функций см. в § 8.18.

Напряжение и ток на входе k от начала четырехполюсника ($k \leqslant n$):

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch}(n-k+1)\gamma l + \dot{I}_{n+1} Z_в \operatorname{sh}(n-k+1)\gamma l; \qquad (11.74)$$

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_в} \operatorname{sh}(n-k+1)\gamma l + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch}(n-k+1)\gamma l. \qquad (11.75)$$

Рассмотрим несколько числовых примеров на материал, изложенный в § 11.1 – 11.28.

Пример 119. Для некоторой линии длиной 5 км на частоте 1000 Гц были проведены опыты по определению ее входного сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании на конце линии. Оказалось, что $Z_{вх\,х.х} = 535e^{-j64°}$ Ом и $Z_{вх\,к.з} = 467{,}5e^{-j10°}$ Ом. Требуется найти волновое сопротивление $Z_в$ и постоянную распространения γ этой линии.

Решение. Из формулы (11.48) следует, что при холостом ходе, когда $Z_2 = \infty$,

$$Z_{вх\,х.х} = Z_в/\operatorname{th}\gamma l.$$

При коротком замыкании, когда $Z_2 = 0$,

$$Z_{вх\,к.з} = Z_в \operatorname{th}\gamma l,$$

отсюда

$$Z_в = \sqrt{Z_{вх\,х.х} Z_{вх\,к.з}} = \sqrt{535e^{-j64°} 467{,}5e^{-j10°}} = 500e^{-j37°} \text{ Ом};$$

$$\operatorname{th}\gamma l = \sqrt{Z_{вх\,к.з}/Z_{вх\,х.х}} = 0{,}935e^{j27°}.$$

По формуле (11.71),

$$e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1+0{,}935e^{j27°}}{1-0{,}935e^{j27°}} = 4{,}11e^{j81°10'} = e^{1{,}414} e^{j1{,}414};$$

$$4{,}11 = e^{1{,}414};\ 81°10' = 1{,}414 \text{ рад};\ 2\alpha l = 1{,}414;$$

$$\alpha = 1{,}414/(2l) = 0{,}1414;\ 2\beta l = 1{,}414;\ \beta = 0{,}1414\ (k=1);$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0{,}2e^{j45°} \text{ км}^{-1}.$$

Пример 120. Определить R_0, L_0, G_0 и C_0 для линии примера 119, полагая $Z_в = 500e^{-j37°}$ Ом и $\gamma = 0{,}2e^{j45°}$ км$^{-1}$.

Решение. В соответствии с формулами (11.17) и (11.18) $\gamma Z_в = R_0 + j\omega L_0$. Следовательно,

$$R_0 + j\omega L_0 = 0{,}2e^{j45°} \cdot 500e^{-j37°} = 100e^{j8°} = 99 + j13{,}9,$$

или

$$R_0 = 99 \text{ Ом/км и } L_0 = 13{,}9/(2\pi \cdot 1000) = 0{,}00222 \text{ Г/км};$$

$$\gamma/Z_в = G_0 + j\omega C_0.$$

Таким образом,

$$G_0 + j\omega C_0 = 0{,}2e^{j45°}/(500e^{-j37°}) = 0{,}0557 \cdot 10^{-3} + j0{,}396 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 121. Линия примера 120 подключена к постоянному напряжению ($\omega = 0$). Определить напряжение и ток в начале линии, если на конце линии включена нагрузка 400 Ом и ток в нагрузке 0,5 А.

Решение. По формуле (11.23) находим волновое сопротивление линии $Z_в$ для постоянного тока:

$$Z_в = \sqrt{R_0/G_0} = \sqrt{99/0{,}0557 \cdot 10^{-3}} = 1330 \text{ Ом}.$$

Постоянная распространения [см. формулу (11.19)]

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{99 \cdot 0{,}0557 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0743 \text{ км}^{-1}.$$

По формулам (11.35) и (11.36), при $y = l$

$$U_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma l + I_2 Z_в \operatorname{sh} \gamma l; \quad I_1 = I_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{U_2}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma l.$$

По условию, $I_2 = 0{,}5$ А; $U_2 = I_2 R_2 = 0{,}5 \cdot 400 = 200$ В; $\gamma l = \alpha l = 0{,}0743 \times \times 5 = 0{,}371$; $\operatorname{ch} \alpha l = \operatorname{ch} 0{,}371 = 1{,}07$, $\operatorname{sh} \alpha l = \operatorname{sh} 0{,}371 = 0{,}379$. Следовательно,

$$U_1 = 200 \cdot 1{,}07 + 0{,}5 \cdot 1330 \cdot 0{,}379 = 466 \text{ В};$$

$$I_1 = 0{,}5 \cdot 1{,}07 + \frac{200}{1330} \cdot 0{,}379 = 0{,}694 \text{ А}.$$

Пример 122. Линия примера 119 короткозамкнута на конце и присоединена к источнику синусоидального напряжения частотой 1000 Гц. Определить напряжение и ток в начале линии, если ток в конце линии $\dot I_2 = 1$ А.

Решение. При коротком замыкании

$$\dot U_1 = \dot I_2 Z_в \operatorname{sh} \gamma l \quad \text{и} \quad \dot I_1 = \dot I_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

По данным примера 119,

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0{,}1414 + j0{,}1414 \text{ км}^{-1}; \quad l = 5 \text{ км};$$

$$\gamma l = 0{,}707 + j0{,}707; \quad Z_в = 500 e^{-j37^\circ} \text{ Ом}.$$

$$e^{\gamma l} = e^{0{,}707} e^{j0{,}707} = 2{,}02 (\cos 40^\circ 20' + j \sin 40^\circ 20') = 1{,}54 + j1{,}305;$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-0{,}707} e^{-j0{,}707} = 0{,}495 (\cos 40^\circ 20' - j \sin 40^\circ 20') = 0{,}377 - j0{,}32;$$

$$\operatorname{ch} \gamma l = 0{,}5 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = 0{,}96 + j0{,}4925 = 1{,}07 e^{j27^\circ 20'};$$

$$\operatorname{sh} \gamma l = 0{,}5 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0{,}582 + j0{,}812 \approx e^{j54^\circ 20'}.$$

Следовательно,

$$\dot U_1 = \dot I_2 Z_в \operatorname{sh} \gamma l = 1 \cdot 500 e^{-j37^\circ} e^{j54^\circ 20'} = 500 e^{j17^\circ 20'} \text{ В};$$

$$\dot I_1 = \dot I_2 \operatorname{ch} \gamma l = 1{,}07 e^{j27^\circ 20'} \text{ А}.$$

Пример 123. Линия примера 119 замкнута на активное сопротивление $Z_2 = 400$ Ом. Определить $\dot U_1$ и $\dot I_1$, если по нагрузке протекает ток $\dot I_2 = 0{,}5$ А; $f = 1000$ Гц.

Решение.

$$\dot U_1 = \dot U_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot I_2 Z_в \operatorname{sh} \gamma l =$$

$$= 200 \cdot 1{,}07 e^{j27^\circ 20'} + 0{,}5 \cdot 500 e^{-j37^\circ} e^{j54^\circ 20'} = 463 e^{j22^\circ} \text{ В};$$

$$\dot I_1 = \dot I_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot U_2}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma l = 0{,}8 e^{j53^\circ 38'} \text{ А}.$$

Пример 124. По данным примера 123 определить комплекс действующего значения падающей волны в начале линии ($\dot A_2$).

Решение. В соответствии с формулой (11.28)

$$\dot A_2 = A_2 e^{j\psi_п} = \frac{\dot U_1 + \dot I_1 Z_в}{2} = \frac{463 e^{j22^\circ} + 0{,}8 e^{j53^\circ 38'} \cdot 500 e^{-j37^\circ}}{2} = 431 e^{j19^\circ 30'} \text{ В}.$$

Пример 125. Записать выражение для мгновенного значения падающей волны напряжения в начале и конце линии по данным примера 124.

Решение. Мгновенное значение падающей волны напряжения в начале линии при $x=0$ $\sqrt{2}\cdot 431\sin(\omega t+19°30')$.

Мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии при $x=l$ в общем виде $\sqrt{2}A_2e^{-\alpha l}\sin(\omega t+\psi_п-\beta l)$; отсюда

$$e^{-\alpha l}=e^{-0,707}=0,495;\quad \beta l=0,707\ рад=40°20';$$

$$\sqrt{2}A_2e^{-\alpha l}=\sqrt{2}\cdot 431\cdot 0,495=301\ В;$$

$$\psi_п-\beta l=19°30'-40°20'=-20°50'.$$

Следовательно, мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии $301\sin(\omega t-20°50')$ В.

Пример 126. Определить затухание в неперах для линии примера 119, если на конце ее включена согласованная нагрузка.

Решение. Затухание в неперах равно αl. Так как произведение $\alpha l=0,1414\cdot 5=0,707$, то затухание линии равно 0,707 Нп.

Пример 127. Какую дополнительную индуктивность $L_{0\,доп}$ нужно включить на каждом километре телефонной линии с параметрами: $R_0=3$ Ом/км; $L_0=2\cdot 10^{-3}$ Г/км; $G_0=10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$км$^{-1}$; $C_0=6\cdot 10^{-9}$ Ф/км, чтобы линия стала неискажающей?

Решение. Для того чтобы линия была неискажающей, ее параметры должны удовлетворять уравнению (11.41). Следовательно,

$$L_{0\,доп}+L_0=R_0C_0/G_0=3\cdot 6\cdot 10^{-9}/10^{-6}=18\cdot 10^{-3}\ Г/км.$$

$$L_{0\,доп}=18-2=16\ мГ/км.$$

Пример 128. Определить наименьшую длину короткозамкнутой на конце двухпроводной воздушной линии, чтобы при частоте 10^8 Гц входное сопротивление ее равнялось $800j$ Ом. Расстояние между осями проводов $d=20$ см, радиус каждого провода $r=2$ мм.

Решение. В соответствии с формулой (11.50)

$$Z_{вх\,к.з}=j\sqrt{L_0/C_0}\,\mathrm{tg}\,\beta y.$$

Для двухпроводной линии

$$L_0=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r};\quad C_0=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r)};\quad \frac{L_0}{C_0}=\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\ln(d/r)}{\pi}\right)^2;$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}=\frac{\ln(d/r)}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}};\quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\ Ом;$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}=377\,\frac{\ln(200/2)}{\pi}=553\ Ом.$$

По условию, $800j=j553\,\mathrm{tg}\,\beta y$.

Отсюда

$$\mathrm{tg}\,\beta y=800/553=1,445;\quad \beta y=55°20'=0,963\ рад;$$

$$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=1/(3\cdot 10^{10})\ с/см;$$

$$\beta=\omega\sqrt{L_0C_0}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2\pi\cdot 10^8/(3\cdot 10^{10})=2,092\cdot 10^{-2}\ см^{-1}.$$

Искомая длина линии

$$y = 0{,}963/(2{,}092 \cdot 10^{-2}) = 46{,}1 \text{ см}.$$

Пример 129. В Т-схеме рис. 6.5, *а* $Z_1 = 100$ Ом, $Z_3 = -500j$ Ом. Определить характеристическое сопротивление четырехполюсника и произведение γl эквивалентной ему линии с распределенными параметрами.

Решение. В соответствии с формулами (11.61)—(11.63)

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + \frac{100}{-500j} = 1 + 0{,}2j = 1{,}02e^{j11°18'}.$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_3} = 200 + \frac{10^4}{-500j} = 200 + 20j \approx 200e^{j5°40'};$$

$$C = 1/Z_3 = 1/(-500j) = 0{,}002e^{j90°}.$$

По формуле (11.69),

$$Z_\text{в} = \sqrt{B/C} = \sqrt{200e^{j5°40'}/(0{,}002e^{j90°})} = 316e^{-j42°10'} \text{ Ом}.$$

По формуле (11.70),

$$\operatorname{tg} \gamma l = \sqrt{BC}/A = \sqrt{200e^{j5°40'} \cdot 0{,}002e^{j90°}}/(1{,}02e^{j11°18'}) = 0{,}498 + j0{,}369.$$

По формуле (11.71),

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l}e^{j2\beta l} = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma l}{1 - \operatorname{th} \gamma l} = \frac{1{,}498 + j0{,}369}{0{,}502 - j0{,}369} = 2{,}475e^{j50°10'};$$

$$\alpha l = 0{,}5 \ln 2{,}475 = 0{,}454; \quad \beta l = 25°5' \approx 0{,}437 \text{ рад};$$

$$\gamma l = 0{,}454 + j0{,}437.$$

Вопросы для самопроверки

1. За счет чего токи и напряжения вдоль линии с распределенными параметрами неодинаковы для одного и того же момента времени? 2. Каков физический смысл постоянной распространения γ и волнового сопротивления $Z_\text{в}$? Зависят ли они от длины линии; как их определить опытным путем? 3. Из каких условий определяют постоянные $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$? 4. Как показать, что сигнал, проходя по линии без искажений, не изменяет своей формы? 5. Почему стремятся нагрузку брать согласованной с $Z_\text{в}$? 6. В чем различие между бегущей и стоячей волнами в физическом и математическом отношении? Какую волну называют смешанной? 7. При каком соотношении между параметрами можно считать реальную линию с $R_0 \neq 0$ и $G_0 \neq 0$ как линию без потерь? 8. В каком смысле можно говорить об эквивалентной замене линии четырехполюсником? 9. Каково назначение четвертьволнового трансформатора? 10. Решите задачи 13.3, 13.11; 13.23; 13.31; 13.37; 13.43.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 12.1. Общие сведения. В гл. 8 рассматривались переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами.

Для электроэнергетики, телефонии, телеграфии, счетной техники, радиотехники и импульсной техники существенное значение имеют также переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

В тех участках цепей, которые могут быть представлены как участки с сосредоточенными параметрами, расчет переходных процессов производят с помощью методов, изложенных в гл. 8. В данной главе обсуждаются особенности переходных процессов в самих линиях с распределенными параметрами, вопросы согласования и увязки их с переходными процессами на участках цепей с сосредоточенными параметрами.

Как уже говорилось в § 11.2, основными уравнениями для линий с распределенными параметрами являются уравнения (11.1) и (11.4). Они справедливы для установившихся и переходных процессов.

В силу того что интегрирование двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных [уравнений (11.1) и (11.4)] в общем виде представляет собой довольно сложную в математическом отношении задачу, в курсе ТОЭ переходные процессы изучают несколько упрощенно, а именно: рассматривают переходные процессы в однородных линиях без потерь, т. е. при $R_0=0$ и $G_0=0$. Практически это вполне оправдано, поскольку реальные линии с распределенными параметрами, как правило, обладают относительно малыми потерями.

Изучение переходных процессов при $R_0=0$ и $G_0=0$ дает возможность качественно исследовать основные черты процессов. В количественном отношении неучет R_0 и G_0 для начальных стадий переходного процесса существенного влияния обычно не оказывает, однако для последующих стадий учет R_0 и G_0 желателен и даже необходим.

В энергетических, телефонных и телеграфных устройствах, содержащих линии с распределенными параметрами, переходные процессы возникают при подключении линий к источнику э. д. с., при отключении от источника э. д. с., при подключении и отключении нагрузки, а также при атмосферных (грозовых) разрядах.

В радиотехнических устройствах и устройствах, используемых в вычислительной технике, также происходят переходные процессы типа рассматриваемых в данной главе, например в линиях задержки и формирующих линиях.

§ 12.2. Исходные уравнения и их решение. Из уравнений (11.1) и (11.4) при $R_0=0$ и $G_0=0$ следует, что

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}; \tag{12.1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Ток и напряжение являются функциями двух переменных: расстояния x от начала линии и времени t. Продифференцируем (12.1) по x и (12.2) по t:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x\, \partial t}; \tag{12.3}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x\, \partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.4}$$

В соответствии с (12.4) в правую часть (12.3) вместо $\partial^2 i/\partial x\, \partial t$ подставим $-C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и обозначим $L_0 C_0 = 1/v^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.5}$$

Из предыдущего [см. § 11.10, формула (11.39)] известно, что $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ есть скорость распространения электромагнитной волны по линии. Если уравнение (12.2) продифференцировать по x, а (12.1) — по t и в правую часть продифференцированного уравнения (12.2) подставить правую часть продифференцированного уравнения (12.1), то получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{12.6}$$

Равенства (12.5) и (12.6) являются уравнениями второго порядка в частных производных. Из курса математики известно, что уравнения такого вида называют *волновыми*.

Решением уравнения (12.5) является сумма любых функций f_1 и f_2; причем аргументом функции f_1 является $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, а аргументом функции f_2 — $\left(t + \frac{x}{v}\right)$:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{12.7}$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем обозначать:

$$u_{\text{п}} = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \tag{12.8}$$

$$u_{\text{о}} = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{12.9}$$

Следовательно,

$$u = u_{\text{п}} + u_{\text{о}}, \tag{12.10}$$

где индексы «о» и «п» означают отраженная и падающая (волны).

Вид функций f_1 и f_2 определяется граничными условиями в начале и конце линии. Функции f_1 и f_2 в общем случае должны позволять дважды дифференцировать их по x и t.

Подстановка функций $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ в (12.5) дает тождество.

Решение уравнения (12.6):

$$i = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{12.11}$$

Для сокращения записи обозначим:

$$i_п=\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right); \tag{12.12}$$

$$i_о=\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{12.13}$$

Тогда

$$i=i_п+i_о. \tag{12.14}$$

§ 12.3. Падающие и отраженные волны на линиях. В соответствии с формулами (12.7) и (12.11) напряжение и ток в линии могут быть представлены в виде двух функций: функции $f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$ — падающие волны; функции $f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$ — отраженные волны.

Падающие волны перемещаются со скоростью v по направлению от источника энергии к приемнику, т. е. в сторону увеличения координаты x; *отраженные волны* — от приемника энергии к источнику, т. е. в сторону уменьшения координаты x.

Обсудим, как следует понимать, что аргументом функции f_1 является $t-\frac{x}{v}$ (аналогичные выводы можно сделать и по отношению к другим функциям).

Пусть в некоторой точке линии $x=x_1$ при $t=t_1$ значение функции $f_1\left(t_1-\frac{x_1}{v}\right)$ равно F_1. Это значение функция f_1 будет принимать во всех точках линии, где $x>x_1$ с запозданием во времени, равным $(x-x_1)/v$ и обусловленным конечной скоростью перемещения волны по линии.

Так, в точке $x=x_2$ значение функции f_1 будет равно F_1 при $t=$ $=t_2=t_1+\frac{x_2-x_1}{v}$. Действительно,

$$f_1\left(t_2-\frac{x_2}{v}\right)=f_1\left(t_1+\frac{x_2-x_1}{v}-\frac{x_2}{v}\right)=f_1\left(t_1-\frac{x_1}{v}\right)=F_1.$$

Таким образом, каков бы ни был закон изменения напряжения падающей волны f_1 в начале линии, по такому же закону, но с запозданием во времени изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии.

§ 12.4. Связь между функциями f_1, f_2 и функциями φ_1, φ_2. Найдем связь между функциями f_1 и φ_1, а также f_2 и φ_2. С этой целью в (12.1) и (12.2) подставим (12.7) и (12.11) и для сокращения записи обозначим:

$$\frac{df_1\left(t-\frac{x}{v}\right)}{d\left(t-\frac{x}{v}\right)}=f_1'; \quad \frac{d\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)}{d\left(t-\frac{x}{v}\right)}=\varphi_1';$$

$$\frac{df_2\left(t+\frac{x}{v}\right)}{d\left(t+\frac{x}{v}\right)}=f_2'; \quad \frac{d\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)}{d\left(t+\frac{x}{v}\right)}=\varphi_2'.$$

Тогда уравнение (12.1) дает

$$\frac{1}{v} f_1' - \frac{1}{v} f_2' = L_0 \varphi_1' + L_0 \varphi_2'. \qquad (12.15)$$

Из (12.2) следует, что

$$\frac{1}{v} \varphi_1' - \frac{1}{v} \varphi_2' = C_0 f_1' + C_0 f_2'. \qquad (12.16)$$

Перепишем (12.15) и (12.16):

$$f_1' - f_2' = vL_0 (\varphi_1' + \varphi_2'); \qquad (12.15')$$

$$f_1' + f_2' = \frac{1}{vC_0} (\varphi_1' - \varphi_2'). \qquad (12.16')$$

Но

$$vL_0 = L_0/\sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{L_0/C_0} = Z_в;$$

$$1/(vC_0) = \sqrt{L_0 C_0}/C_0 = \sqrt{L_0/C_0} = Z_в,$$

где $Z_в$ — волновое сопротивление однородной линии без потерь [см. формулу (11.23а)].

Таким образом,

$$f_1' - f_2' = Z_в (\varphi_1' + \varphi_2'); \qquad (12.15'')$$

$$f_1' + f_2' = Z_в (\varphi_1' - \varphi_2'). \qquad (12.16'')$$

Следовательно,

$$\varphi_1' = f_1'/Z_в; \qquad (12.17)$$

$$\varphi_2' = -f_2'/Z_в. \qquad (12.18)$$

Если произведение двух функций (например, φ_1' и f_1') при любых значениях x и t равны, то это значит, что сами функции (φ_1 и f_1) равны с точностью до постоянной. Поэтому

$$\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{1}{Z_в} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \qquad (12.19)$$

$$\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = -\frac{1}{Z_в} f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \qquad (12.20)$$

Постоянные интегрирования опустили, так как полагаем, что в токах и напряжениях падающей и отраженной волн отсутствуют постоянные составляющие, не зависящие от x и от t. Два последних уравнения можно переписать с учетом (12.8), (12.9), (12.12), (12.13):

$$i_п = u_п/Z_в; \qquad (12.19')$$

$$i_о = -u_о/Z_в. \qquad (12.20')$$

Из (12.19') следует, что ток падающей волны для любого момента времени и для любой точки на линии равен частному от деления напряжения падающей волны для того же момента времени и для той же точки линии на волновое сопротивление.

Из (12.20') вытекает, что ток отраженной волны для любого момента времени и для любой точки линии равен взятому с обратным знаком частному от деления напряжения отраженной волны в той же точке линии и для того же момента времени на волновое сопротивление. Знак минус в (12.20′) означает, что ток отраженной волны направлен встречно положительному направлению отсчета тока, показанному на рис. 11.2.

§ 12.5. Электромагнитные процессы при движении прямоугольной волны по линии. Пусть источник постоянного напряжения u, имеющий внутреннее сопротивление, равное нулю, подключается к незаряженной однородной линии с распределенными параметрами, у которой $R_0 = G_0 = 0$ (рис. 12.1).

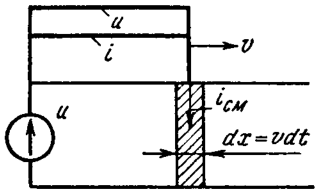


Рис. 12.1

По линии перемещается падающая электромагнитная волна. Начальный участок волны, первым продвигающийся по линии, принято называть *фронтом волны*. В данном случае волна имеет прямоугольный фронт.

Двигаясь по линии, волна создает между проводами линии электрическое и магнитное поля.

Приращение магнитного потока (потокосцепления) на фронте волны за время dt равно произведению тока i на индуктивность участка линии длиной dx: $d\psi = iL_0\,dx$; оно вызывает э. д. с.

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -iL_0\frac{dx}{dt} = -iL_0v = -i\frac{L_0}{\sqrt{L_0C_0}} =$$

$$= -i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = -iZ_в = -u_п = -u.$$

Таким образом, на фронте волны возникает э. д. с. самоиндукции, численно равная напряжению генератора. На фронте волны происходит зарядка проводов линии: один провод, например верхний, присоединенный к плюсу источника э. д. с., приобретает положительный заряд, другой (нижний) — отрицательный заряд (такой же величины).

Кроме того, на фронте волны возникает ток смещения $i_{см} = dq/dt$, где dq — приращение заряда на одном из проводов линии за время dt:

$$dq = C_0u\,dx = C_0uv\,dt.$$

Проходящий по диэлектрику на фронте волны ток смещения равен току падающей волны, проходящему по проводам линии:

$$i_{см} = dq/dt = C_0uv = u_п/Z_в.$$

Электромагнитная волна, продвигаясь по линии, каждой единице линии сообщает энергию электрического поля $C_0u_п^2/2$ и энергию магнитного поля $L_0i_п^2/2$. Можно показать, что эти количества энергий равны. Действительно,

$$u_п = i_пZ_в = i_п\sqrt{L_0/C_0}.$$

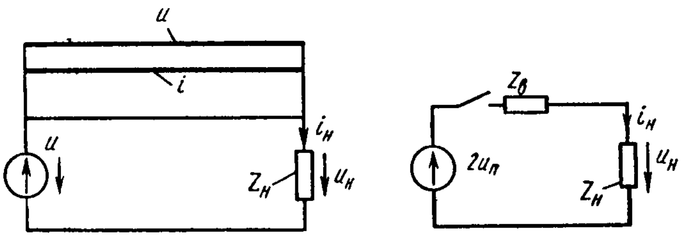
Следовательно,

$$C_0u_п^2/2 = C_0i_п^2L_0/(2C_0) = L_0i_п^2/2.$$

Когда падающая волна достигает конца линии, к которому в общем случае присоединена некоторая нагрузка или другая линия (с другим волновым сопротивлением), то часть падающей волны проходит в нагрузку (или соответственно во вторую линию), а часть отражается — возникает отраженная волна.

Чтобы выяснить, какова форма волны, проходящей в нагрузку, какова форма отраженной волны и как они деформируются во времени, применяют расчетную схему, которую принято называть *схемой замещения для исследования волновых процессов в линии с распределенными параметрами*.

§ 12.6. Схема замещения для исследования волновых процессов в линиях с распределенными параметрами. Для обоснования методики составления схемы замещения обратимся к рис. 12.2, *а*. На нем изображена линия с распределенными параметрами, на конце которой



а) *б)*

Рис. 12.2

включена некоторая нагрузка. Начиная с того момента, когда падающая волна дойдет до конца линии, по нагрузке пойдет ток $i_н$ и на ней будет напряжение $u_н$.

На рис. 12.2, *а* изображены эпюры волн u и i на линии для момента времени, непосредственно предшествующего подходу волны к концу линии.

В соответствии с формулами (12.10) и (12.14) напряжение и ток в любой точке линии можно представить в виде суммы падающих и отраженных волн. Это справедливо также в отношении напряжения и тока в конце линии. Следовательно,

$$u_п + u_о = u_н; \tag{12.21}$$

$$i_п + i_о = i_н. \tag{12.22}$$

Заменив $i_п$ на $u_п/Z_в$, а $i_о$ на $-u_о/Z_в$, получим

$$u_п + u_о = u_н; \quad u_п - u_о = i_н Z_в$$

или

$$2u_п = u_н + i_н Z_в. \tag{12.23}$$

Таким образом, напряжение на конце линии $u_н$ и ток в нагрузке $i_н$ независимо от характера нагрузки связаны с напряжением падающей волны $u_п$ уравнением (12.23). Последнему соответствует схема с сосредоточенными параметрами, изображенная на рис. 12.2, *б*. В ней к источнику э. д. с. напряжением $2u_п$ подключают последовательно соединенные $Z_в$ и $Z_н$.

Расчет переходного процесса в схеме с сосредоточенными параметрами (рис. 12.2, *б*) производится любым из методов, рассмотренных в гл. 8. Расчет дает возможность определить $i_н = f(t)$ и $u_н = f(t)$. После того как эти зависимости найдены, можно определить характер изменения во времени напряжения и тока отраженной волны: $u_о = f(t)$ и $i_о = f(t)$. Действительно, из уравнений (12.21) и (12.20′) следует, что

$$\left.\begin{aligned} u_о(t) &= u_н(t) - u_п(t); \\ i_о(t) &= -u_о(t)/Z_в; \\ Z_в &= \sqrt{L_о/C_о}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.21')$$

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение схемы замещения.

§ 12.7. Подключение разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения. В линии без потерь, так же как и в колебательном контуре без потерь, при подключении к источнику постоянной э. д. с. возникают незатухающие колебания. Период колебаний состоит из четырех частей или стадий (рис. 12.3) одинаковой продолжительности l/v, где l — длина линии, v — скорость распространения волны. Для рассмотрения этих стадий воспользуемся двумя различными схемами замещения. Первая схема (рис. 12.4, *а*) соответствует разомкнутому концу линии ($Z_н = \infty$), когда к нему подходит падающая от начала линии волна. Вторая схема (рис. 12.4, *б*) соответствует моменту времени, когда отраженная волна подошла к началу линии, где включен генератор постоянного напряжения, внутреннее сопротивление которого полагаем равным нулю ($Z_н = 0$).

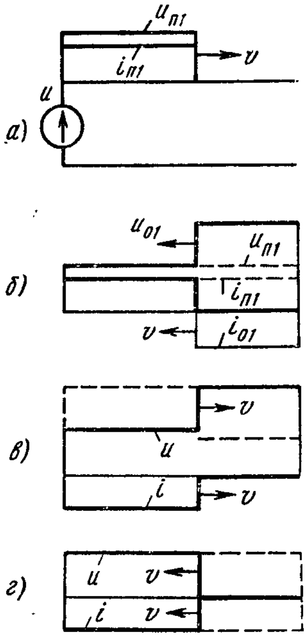


Рис. 12.3

Рассмотрим каждую из стадий процесса в отдельности.

Первая стадия. От генератора к концу линии распространяются волна напряжения $u_{п1} = u$ и волна тока $i_{п1} = u_{п1}/Z_в = i$ (см. рис. 12.3, *а*).

Вторая стадия заключается в том, что от конца линии к ее началу движется отраженная волна ($u_{о1}$, $i_{о1}$). Для определения $u_{о1}$ и служит схема рис. 12.4, *а*. Она составлена в соответствии с общим методом, изложенным в § 12.6. В ней к напряжению $2u_{п1} = 2u$ подключаются волновое сопротивление линии $Z_в$ и сопротивление нагрузки $Z_н = \infty$ (линия на конце разомкнута!).

Согласно рис. 12.4, *а* напряжение на нагрузке равно удвоенному напряжению падающей волны. Действительно, при $Z_н \to \infty$

$$u_{Z_н} = 2u_{п1} \frac{Z_н}{Z_н + Z_в} = 2u_{п1} = 2u.$$

В соответствии с формулой (12.21′) отраженная волна напряжения

$$u_{о1} = u_н - u_{п1} = 2u_{п1} - u_{п1} = u_{п1} = u;$$

в соответствии с формулой (12.20′) отраженная волна тока

$$i_{о1} = -u_{о1}/Z_в = -i_{п1} = -i.$$

Таким образом, в течение второй стадии процесса от конца линии к началу продвигается отраженная волна $u_{о1} = u$, $i_{о1} = -i$. Резуль-

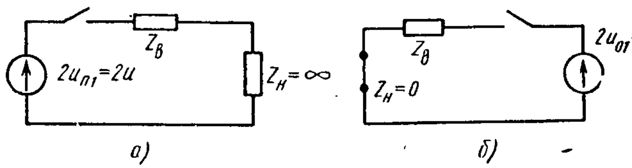


Рис. 12.4

тирующее состояние на линии определяется наложением первой падающей волны ($u_{п1}$, $i_{п1}$) и первой отраженной волны ($u_{о1}$, $i_{о1}$). На рис. 12.3, *б* дана эпюра распределения напряжения и тока по линии для некоторого момента времени во второй стадии. (В этой стадии для участков линии, на которые прошли отраженные волны, результирующее напряжение равно $2u$, а результирующий ток равен нулю.)

Третья стадия процесса состоит в том, что волна $u_{о1}$, $i_{о1}$, дойдя до начала линии, отразится от генератора, как от короткозамкнутого конца линии (внутреннее сопротивление генератора принято равным нулю), и вызовет распространение в направлении от генератора к концу линии второй падающей волны ($u_{п2}$, $i_{п2}$), являющейся, по существу, отраженной волной по отношению к волне ($u_{о1}$, $i_{о1}$).

Для определения характера отражения волн от начала линии используем схему рис. 12.4, *б*. В ней $Z_н = 0$, $2u_{о1} = 2u$. Так как нагрузка $Z_н = 0$, то и напряжение на ней равно нулю. Но напряжение на нагрузке в соответствии с (12.21) равно сумме напряжения падающей волны (в данном случае $u_{о1} = u$) и напряжения отраженной от начала линии волны, распространяющейся от генератора к концу линии и потому названной второй падающей волной. Следовательно, $0 = u + u_{п2}$. Отсюда

$$u_{п2} = -u, \quad i_{п2} = u_{п2}/Z_в = -i.$$

Результирующее состояние на линии во время третьей стадии процесса изображено на рис. 12.3, *в*. Оно получено в результате наложения трех волн: первой падающей волны ($u_{п1}$, $i_{п1}$), первой отраженной от конца волны ($u_{о1}$, $i_{о1}$) и второй падающей волны ($u_{п2}$, $i_{п2}$).

Четвертая стадия процесса заключается в том, что на три предыдущие волны накладывается четвертая волна, представляющая собой отражение от разомкнутого конца линии второй падающей волны.

Отражение второй падающей волны от конца линии произойдет в соответствии со схемой замещения рис. 12.4, *а*; только вместо $2u_{п1}=2u$ в схеме будет напряжение $2u_{п2}=-2u$.

Вторая отраженная волна имеет $u_{о2}=-u$, $i_{о2}=i$. Результирующее состояние на линии во время четвертой стадии (рис. 12.3, *г*) есть результат наложения четырех волн:

$$u_{п1}+u_{о1}+u_{п2}+u_{о2}=u+u-u-u=0;$$

$$i_{п1}+i_{о1}+i_{п2}+i_{о2}=i-i-i+i=0.$$

Таким образом, к концу четвертой стадии напряжение и ток вдоль всей линии равны нулю — линия приобретает такое же состояние, какое у нее было к началу первой стадии. Затем процесс повторяется до бесконечности, так как R_0 и G_0 были приняты равными нулю. В действительности благодаря наличию сопротивления R_0 и утечки G_0 колебательный процесс постепенно затухает и вдоль линии устанавливается режим, соответствующий установившемуся процессу в линии при постоянном напряжении.

В рассмотренном примере линия на конце была разомкнута, поэтому отраженные волны имели такую же прямоугольную форму, как и падающие.

Отраженные волны будут иметь форму, в общем случае не похожую на форму падающей волны, если в состав нагрузки на конце линии входят емкости и (или) индуктивности, а также в том случае, если в месте перехода с одной линии на другую есть сосредоточенные индуктивности и (или) емкости.

§ 12.8. Переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий. Пусть первая линия имеет длину l_1 и волновое сопротивление $Z_{в1}$, вторая линия — длину l_2 и $Z_{в2}\neq Z_{в1}$. Напряжение источника э. д. с. равно u (рис. 12.5, *а*). В месте стыка линий есть сосредоточенная емкость C.

Требуется определить форму волны, проникающей во вторую линию, характер изменения тока через сосредоточенную емкость, а также результирующее распределение напряжения и тока вдоль первой линии при движении по ней отраженной от стыка линий волны.

Переходный процесс начинается с того, что от генератора по первой линии распространяется падающая волна с прямоугольным фронтом $u_{п1}=u$ и $i_{п1}=u/Z_{в1}$.

Для определения характера изменения токов и напряжений, когда падающая волна дойдет до стыка линий, обратимся к схеме замещения с сосредоточенными параметрами (рис. 12.5, *б*). В этой схеме нагрузка образована двумя параллельными ветвями — емкостью C и волновым сопротивлением второй линии $Z_{в2}$.

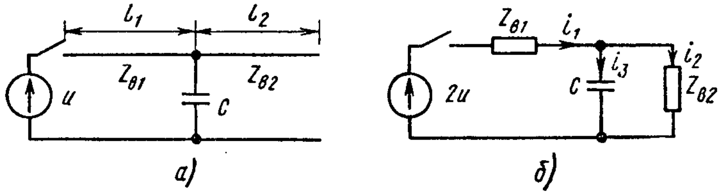


Рис. 12.5

Две параллельные ветви появились в схеме замещения потому, что в исходной схеме рис. 12.5, *а* падающая волна, дойдя до места стыка линий, встречает два пути для своего дальнейшего распространения: первый путь — через емкость C, второй путь — по второй линии с волновым сопротивлением $Z_{в2}$.

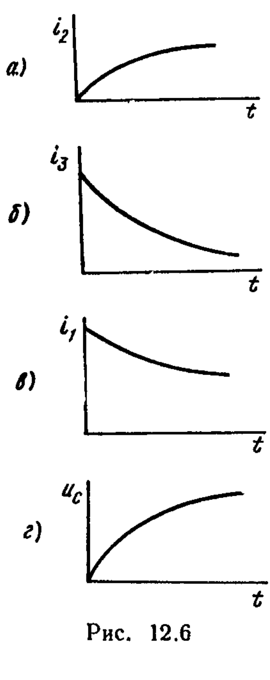


Рис. 12.6

Расчет переходного процесса в схеме рис. 12.5, *б* дает:

$$i_2 = \frac{2u}{Z_{в1}+Z_{в2}}(1-e^{pt}); \tag{12.24}$$

$$i_3 = \frac{2u}{Z_{в1}}e^{pt}; \tag{12.25}$$

$$i_1 = \frac{2u}{Z_{в1}+Z_{в2}}\left(1+\frac{Z_{в2}}{Z_{в1}}e^{pt}\right); \tag{12.26}$$

$$u_C = u_{Z_{в2}} = \frac{2uZ_{в2}}{Z_{в1}+Z_{в2}}(1-e^{pt}); \tag{12.27}$$

$$p = -\frac{Z_{в1}+Z_{в2}}{Z_{в1}Z_{в2}C}. \tag{12.28}$$

Характер изменения i_2, i_3, i_1 и u_C в функции от времени изображен на рис. 12.6. В первый момент после подхода волны к месту стыка линий напряжение падает до нуля, так как незаряженная емкость для этого момента времени представляет собой как бы короткое замыкание.

Начальное значение тока через емкость равно $2u/Z_{в1}$. Затем емкость заряжается, напряжение на ней растет, а ток через нее уменьшается. Ток i_2 в схеме замещения представляет собой ток электромагнитной волны, распространяющейся по второй линии; напряжение волны, распространяющейся по второй линии, равно $i_2Z_{в2}$.

Для получения отраженной волны напряжения, распространяющейся по первой линии в направлении от стыка линий к генератору, из ординат кривой рис. 12.6, *г* нужно вычесть напряжение падающей волны и затем перенести полученную кривую на линию, зная скорость отраженной волны.

На рис. 12.7, *а*, *б* изображены соответственно отраженные волны напряжения и тока.

Эпюра распределения напряжения и тока вдоль первой и второй линий для момента времени, когда отраженная от стыка волна дошла до середины первой линии, представлена соответственно на рис. 12.8, *а*, *б*.

Перепад тока *ef* в кривой рис. 12.8, *б* равен току через емкость для данного момента времени. По второй линии волна продвинулась на расстояние, вдвое большее, чем прошла отраженная волна по первой линии. Это объясняется тем, что первая линия кабельная, а вто-

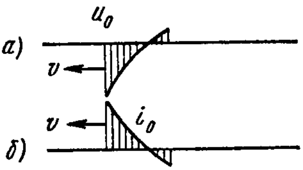


Рис. 12.7

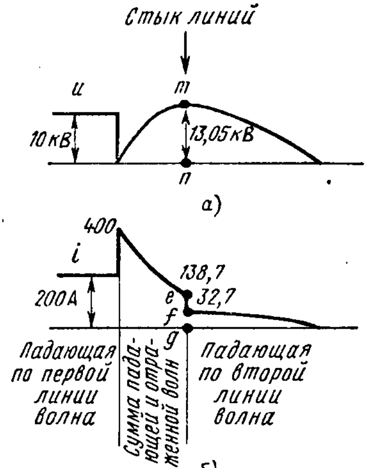


Рис. 12.8

рая — воздушная. Скорость продвижения волны по воздушной линии 300 000 км/с, а по кабельной — около 150 000 км/с *.

Пример 130. В схеме рис. 12.5, *а* $Z_{в1}=50$ Ом; $Z_{в2}=400$ Ом; $l_2=100$ км; $C=5{,}62$ мкФ; $l_1=60$ км; $u=10$ кВ; первая линия кабельная, вторая воздушная. Построить эпюры распределения волн напряжения и тока вдоль линий для момента времени, когда распространяющаяся по второй линии волна дойдет до конца второй линии.

Решение. По формуле (12.28),

$$p=-\frac{50+400}{50\cdot 400\cdot 5{,}62\cdot 10^{-6}}=-4000\ \text{с}^{-1}.$$

Ток падающей волны по первой линии

$$i_п=u/Z_{в1}=10^4/50=200\ \text{А}.$$

По формуле (12.24), $i_2=44{,}5\,(1-e^{-4000t})$ А. График $i_2=f(t)$ изображен на рис. 12.6, *а*.

По формуле (12.25), $i_3=400e^{-4000t}$ А. График $i_3=f(t)$ представлен на рис. 12.6, *б*.

По формуле (12.26), $i_1=44{,}5\,(1+8e^{-4000t})$ А. График тока i_1 изображен на рис. 12.6, *в*.

По формуле (12.27), $u_C=u_{Z_{в2}}=17\,750\,(1-e^{-4000t})$ В. Кривая u_C изображена на рис. 12.6, *г*.

* Формула для скорости v движения волны по линии и входящие в нее L_0 и C_0 приведены в § 11.10.

По условию, падающая по второй (воздушной) линии волна должна дойти до конца второй линии. Расстояние $l_2=100$ км она пройдет за время $t=l_2/v=100/300\,000=1/3000$ с.

За это время отраженная от стыка волна пройдет по первой (кабельной) линии расстояние, в два раза меньшее.

Графики распределения u и i вдоль линии изображены на рис. 12.8, *а*, *б*.

Перепад ef на рис. 12.8, *б* равен току i_3 при $t=1/3000$ с: $i_3 = 400e^{-4/3}=106$ А.

Отрезок fg равен току i_2 при $t=1/3000$ с: $i_2=44{,}5(1-e^{-4/3}) = 32{,}7$ А.

Отрезок mn на рис. 12.8, *а* равен напряжению u_C при $t=1/3000$ с: $u_C=13{,}05$ кВ.

В рассмотренном примере электрическая цепь, содержащая линию с распределенными параметрами подключалась к источнику постоянного напряжения.

Однако часто встречаются цепи, в которых э. д. с. источника изменяется по синусоидальному закону во времени. Если длина линии с распределенными параметрами и частота синусоидальной э. д. с. таковы, что время пробега волны по линии ($t=l/v$) много меньше периода переменного тока T, например составляет величину порядка $\left(\frac{1}{30}\div\frac{1}{50}\right)T$, то при исследовании первых стадий переходного процесса в первом грубом приближении можно принять, что линия подключается к источнику постоянной э. д. с., которая равна амплитуде синусоидальной э. д. с. (расчет на наиболее тяжелый случай). Если же время пробега волны по линии составляет бо́льшую, чем $\left(\frac{1}{50}\div\frac{1}{30}\right)$, часть периода, то при расчетах необходимо учитывать изменение э. д. с. источника при перемещении падающей волны по линии.

При отключении нагрузки или ее части в линиях также возникают переходные процессы. Расчет их производят на основании принципа наложения, включая в размыкаемую ветвь источник тока, который дает ток, равный и противоположно направленный току в размыкаемой ветви (см. 8.59).

Результирующие волны тока и напряжения на всех участках линии находят наложением на волны тока и напряжения, которые были на линии до отключения ветви, волн тока и напряжения, продвигающихся от места размыкания в остальные участки линии.

При подключении в каком-либо месте линии новой ветви токи и напряжения в этой ветви находят методом эквивалентного генератора, а токи в остальных участках линии — методом наложения.

§ 12.9. Линия задержки. Под *линией задержки*, применяемой в импульсной технике, понимают устройство, которое включают между источником сигнала и нагрузкой, служащее для задержки поступления сигнала в нагрузку на некоторое заданное время $t_з$. В простейшем случае (при малом $t_з$) линию задержки выполняют в виде куска коаксиального кабеля длиной l. Он создает задержку $t_з=l/v_ф$. Если хотят получить относительно большое $t_з$, то используют цепочку из n каскадно соединенных одинаковых фильтров низкой частоты (см. рис. 5.1, *а*), выбирая параметры L и C фильтров так, чтобы полоса частот сигнала $0-\omega_c$ находилась в полосе прозрачности фильтра и чтобы $\omega_c < \omega_2$, где $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ — частота среза фильтра. Параметры фильтра согласуют с нагрузкой $R_н = \sqrt{2L/C}$. Время задержки $t_з \approx \approx n\,(db/d\omega)_{\omega=0} = n\sqrt{2LC}$.

Выведем эту формулу и в более широком плане обсудим вопрос о времени задержки сигнала при прохождении его через четырехполюсник.

В § 9.4 было показано, что передаточная функция четырехполюсника $K(j\omega) = \dot{U}_2(j\omega)/\dot{U}_1(j\omega) = |K(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}$, пропускающего сигнал без искажения, но с задержкой $t_0 = t_з'$ во времени, должна обладать двумя свойствами: 1) модуль $|K(j\omega)| = \text{const}$ (в частности, равен единице)

2) аргумент $\varphi(\omega) = -\omega t_з'$.

Применительно к фильтру $K(j\omega) = 1/e^g = 1/(e^a e^{jb})$. Сопоставление характеристик фильтра с характеристиками четырехполюсника для зоны прозрачности дает:

$$|K(j\omega)| = 1/e^a = 1, \quad b = -\varphi(\omega) = \omega t_з'.$$

Для фильтра НЧ рис. 5.1, *а* в зоне прозрачности

$$b = \arccos A = \arccos(1 - \omega^2 LC)$$

нелинейно зависит от ω. Для определения времени задержки $t_з'$ приближенно заменим эту нелинейную зависимость прямой с угловым коэффициентом, равным $\left(\frac{db}{d\omega}\right)_{\omega=0}$, т. е. положим $b = \omega\left(\frac{db}{d\omega}\right)_{\omega=0}$.

Тогда время задержки, создаваемое одним фильтром,

$$t_з' = \left(\frac{db}{d\omega}\right)_{\omega\to 0} = \frac{db}{d(1-\omega^2 LC)} \cdot \frac{d(1-\omega^2 LC)}{d\omega} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(1-\omega^2 LC)^2}}(-2\omega LC) \approx -\frac{1}{\omega\sqrt{2LC}}(-2\omega LC) = \sqrt{2LC}.$$

Если каскадно соединены n фильтров НЧ, то время задержки в n раз больше: $t_з = n\sqrt{2LC}$.

Если сигнал, проходящий через четырехполюсник, представляет собой короткий импульс, то его частотный спектр весьма широк и четырехполюсник в отличие от линии с распределенными параметрами не в состоянии пропустить без затухания колебания всех частот. В этом случае можно только условно говорить о времени задержки, понимая под ним усредненную производную $db/d\omega$, подсчитанную для основной части частотного спектра.

§ 12.10. Использование линий для формирования кратковременных импульсов. На рис. 12.9, *а* изображена схема, позволяющая формировать прямоугольные импульсы тока в нагрузке $R_н$. В схеме имеется источник постоянного тока I и три линии. При размыкании ключа от источника тока I по первой линии длиной l_1 с волновым сопротивлением $Z_в$ распространяется прямоугольная падающая волна тока $I/2$ и волна напряжения $IZ_в/2$. Дойдя узла a, волна частично пройдет во вторую и третью линии и частично отразится. Для определения волн, проходящих во вторую и третью линии, служит схема замещения рис. 12.9, *б*. Из нее следует, что $I_2 = I/4$ и $I_3 = I/2$.

По второй линии распространяется волна $U_2 = I_2 Z_в$, по третьей $U_3 = I_3 \cdot 0{,}5 Z_в$. Волна U_2, дойдя до конца второй линии, где включена нагрузка $R_н = Z_в$, поглощается в ней без отражения.

Волна $U_з$, дойдя до короткозамкнутого конца третьей линии, отразится от него с переменой знака у напряжения. Отраженная от конца третьей линии волна напряжения — $I_{отр} \cdot 0{,}5Z_в = -IZ_в/2$, дойдя до узла a вызовет токи $I'_2 = I'_1 = -I/4$ в первой и второй линиях в соответствии со схемой замещения рис. 12.9, *в*. Волна тока I'_1 поглощается без отражения в сопротивлении $Z_в$, шунтирующем источник

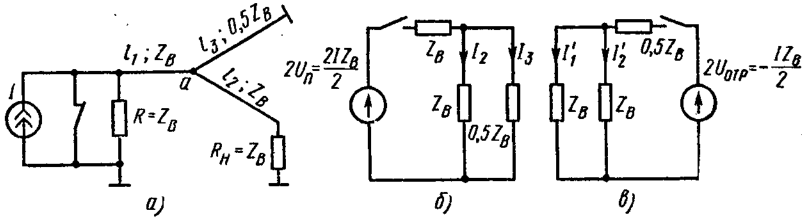


Рис. 12.9

тока. Как только волна тока I'_2 дойдет до конца второй линии, импульс тока в нагрузке $R_н$ прекратится, поскольку токи I_2 и I'_2 равны по величине и противоположны по знаку. Прямоугольный импульс тока через нагрузку появится через время $(l_1 + l_2)/v$ и протекает в течение времени $2l_3/v$, равного удвоенному времени движения волны по линии длиной l_3.

Вопросы для самопроверки

1. При каких допущениях рассматривают переходные процессы в линиях с распределенными параметрами? Какими дифференциальными уравнениями описываются эти процессы? 2. Как понимать, что аргументами функций, являющихся решением, оказываются $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\left(t + \frac{x}{v}\right)$? 3. Как согласовывают переходные процессы в линиях с распределенными параметрами с переходными процессами в нагрузке на конце линии? 4. Обосновать методику составления схем замещения для исследования волновых процессов, когда волна дойдет до нагрузки. 5. Как из временных графиков напряжения $u_н$ на нагрузке и тока $i_н$ в нагрузке получить графики отраженных волн u_0 и i_0 на линии? 6. В каком случае в качестве линии задержки используют линию с распределенными параметрами, а в каком каскадное соединение фильтров НЧ? 7. Решите задачи 15.5; 15.6; 15.12; 15.17.

ЧАСТЬ II

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Во второй части курса ТОЭ рассмотрены нелинейные электрические и магнитные цепи. Под *нелинейными электрическими цепями* понимают электрические цепи, содержащие элементы с нелинейными вольт-амперными, вебер-амперными и кулон-вольтными характеристиками. Если цепь содержит хотя бы один такой элемент и изображающая точка в процессе работы перемещается по существенно нелинейному участку характеристики этого элемента, то она принадлежит к рассматриваемому классу цепей.

Хотя к нелинейным электрическим и магнитным цепям и применимы законы Кирхгофа, но такие методы расчета, как методы узловых потенциалов и контурных токов, а в более общем смысле — методы, основанные на принципе наложения и на постоянстве параметров элементов цепей, рассмотренные в первой части курса, к нелинейным цепям неприменимы. Дело в том, что сопротивление и проводимость нелинейного активного сопротивления, равно как индуктивность нелинейной индуктивности и емкость нелинейной емкости, являются нелинейными функциями мгновенного значения тока (напряжения) на этих элементах, т. е. представляют собой переменные величины, а потому для расчета малопригодны.

Вместо них используют вольт-амперные характеристики нелинейных активных сопротивлений, вебер-амперные характеристики нелинейных индуктивностей и кулон-вольтные характеристики нелинейных емкостей. Один и тот же нелинейный элемент в зависимости от поставленной при исследовании задачи и выбранного метода анализа должен быть описан различными характеристиками.

При определенных условиях в некоторых нелинейных цепях могут возникать физические явления, принципиально невозможные в линейных. К их числу относятся автоколебания, субгармонические колебания, автомодуляция, триггерные явления, зависимость установившегося процесса от начальных условий и ряд других.

Приступая к расчету токов и напряжений или к исследованию условий существования того или иного явления, надлежит правильно поставить саму задачу, принимая во внимание то главное, что оказывает решающее влияние на процессы в цепи, и пренебрегая относительно второстепенными факторами. Если этого не сделать, задача может оказаться трудно разрешимой, а само решение, если оно будет получено, — малообозримым. Однако и после ряда упрощающих допущений процессы в нелинейных цепях описываются одним или несколькими нелинейными дифференциальными уравнениями, точное решение которых, как правило, неизвестно. Поэтому возникает задача о том, каким образом можно решать нелинейные дифференциальные уравнения приближенно, применяя для этой цели специфические методы, разработанные для нелинейных цепей, а также приемы, рассмотренные в первой части курса для линейных цепей, используемые при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных сопротивлений. Как и в первой части курса, материал излагается, руководствуясь правилом «от простого к более сложному».

Во вторую часть курса включена глава, посвященная электрическим цепям с переменными во времени параметрами. Эти цепи занимают промежуточное положение между линейными и нелинейными цепями.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 13.1. Основные определения. Как уже говорилось в § 1.1, под нелинейными электрическими цепями принято понимать электрические цепи, содержащие нелинейные элементы. Нелинейные элементы подразделяют на нелинейные сопротивления, нелинейные индуктивности и нелинейные емкости.

Нелинейные сопротивления (НС) в отличие от линейных обладают нелинейными вольт-амперными характеристиками. Напомним, что вольт-амперная характеристика (в. а. х.) — это зависимость тока, протекающего через сопротивление, от напряжения на нем. Нелинейные сопротивления могут быть подразделены на две большие группы: *неуправляемые и управляемые* НС. В управляемых НС в отличие от неуправляемых кроме основной цепи, как правило, есть еще по крайней мере одна вспомогательная или управляющая цепь, воздействуя на ток или напряжение которой можно деформировать в. а. х. основной цепи. В неуправляемых НС в. а. х. изображается одной кривой, а в управляемых — семейством кривых.

В *группу неуправляемых* НС входят лампы накаливания, электрическая дуга, бареттер, газотрон, стабиловольт, тиритовые сопротивления, полупроводниковые выпрямители (диоды) и некоторые другие НС.

В *группу управляемых* НС входят трех-электродные (и более) лампы, транзисторы, тиристоры, терморезисторы и другие элементы.

§ 13.2. Вольт-амперные характеристики нелинейных сопротивлений. На рис. 13.1 изображено одиннадцать типов наиболее часто встречающихся в. а. х. неуправляемых НС.

В. а. х. типа рис. 13.1, *а* имеют, например, лампы накаливания с металлической нитью. Чем больше протекающий через нить ток, тем сильнее нагревается нить и тем больше становится ее сопротивление.

Если величину, откладываемую по оси абсцисс, обозначить x, а величину, откладываемую по оси ординат, $f(x)$, то характеристика рис. 13.1, *а* подчиняется условию $f(x) = -f(-x)$.

Нелинейные сопротивления, для которых выполняется это условие, называют НС с *симметричной* вольт-амперной характеристикой.

В. а. х. типа рис. 13.1, *б* обладают тиритовые сопротивления, некоторые типы терморезисторов и лампы накаливания с угольной нитью. Для данной группы характерно то, что с увеличением протекающего тока сопротивление их уменьшается. В. а. х. их симметрична.

В. а. х. типа рис. 13.1, *в* обладает, например, бареттер. Бареттер выполняют в виде спирали из стальной проволоки, помещенной в стеклянный сосуд, заполненный водородом при давлении порядка 80 мм рт. ст. В определенном диапазоне изменения тока в. а. х. бареттера расположена почти горизонтально. Бареттер используют, например, для стабилизации тока накала электронных ламп при изменении напряжения питания. В. а. х. типа рис. 13.1, *в* также симметрична.

В. а. х. типа рис. 13.1, *г* в отличие от предыдущих *не симметрична.* Ею обладают полупроводниковые выпрямители (кремниевые,

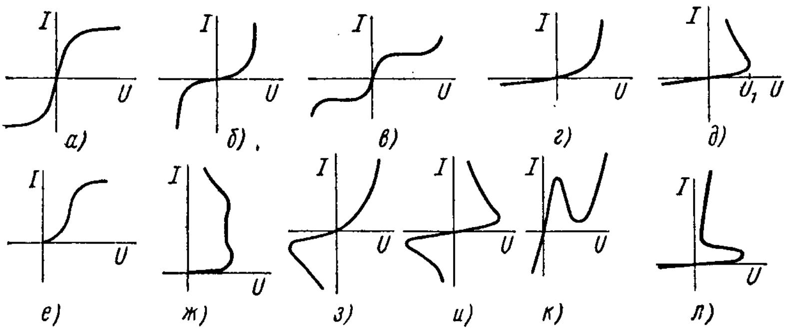


Рис. 13.1

германиевые), широко применяемые для преобразования переменного тока в постоянный. Они способны пропускать ток практически только в одном, проводящем, направлении. Широко используют их также в различных датчиках и преобразователях устройств автоматики.

В. а. х. типа рис. 13.1, *д* имеют электрическая дуга с разнородными электродами, газотрон и некоторые типы терморезисторов. Если напряжение повышать начиная с нуля, то сначала ток растет, но остается весьма малым, после достижения напряжения U_1 (напряжения зажигания) происходит резкое увеличение тока в цепи и снижение напряжения на электрической дуге или газотроне. Для верхнего участка в. а. х. приращению тока соответствует убыль напряжения на нелинейном сопротивлении.

Участок в. а. х. типа верхнего участка кривой рис. 13.1, *д* называют *падающим участком вольт-амперной характеристики* *.

Электрическую дугу широко применяют при сварке металлов, в электротермии (в дуговых электропечах), а также в качестве мощного источника электрического освещения, например в прожекторах.

* Падающий участок в. а. х. представляет собой такой ее участок, на котором *положительному* приращению тока через НС соответствует *отрицательное* приращение напряжения на НС.

Газотрон представляет собой лампу с двумя электродами, заполненную благородным газом (неоном, аргоном и др.) или парами ртути.

В. а. х. типа рис. 13.1, *е* имеет двухэлектродная выпрямительная лампа — кенотрон. По нити накала лампы пропускают ток. Этот ток разогревает катод (один из двух электродов лампы) до высокой температуры, в результате чего с поверхности катода начинается термоэлектронная эмиссия. Под действием электрического поля поток электронов направляется ко второму, холодному, электроду — аноду. В начальной части в. а. х. зависимость тока от напряжения подчиняется закону трех вторых: $i = au^{3/2}$. В. а. х. кенотрона не симметрична, это объясняется тем, что поток электронов направляется с катода на анод только в том случае, если анод положителен по отношению к катоду.

В. а. х. типа рис. 13.1, *ж* обладают лампы с тлеющим разрядом. К числу их относятся стабиловольты (стабилитроны) и неоновые лампы. При тлеющем разряде благородный газ, которым заполнена лампа, светится. В. а. х. типа рис. 13.1, *ж* свидетельствует о том, что в определенном диапазоне значений токов напряжение на лампе остается практически неизменным.

Некоторые типы точечных германиевых и кремниевых диодов имеют в. а. х. типа рис. 13.1, *з*.

Электрическая дуга между электродами, выполненными из одного и того же материала и находящимися в одинаковых условиях, имеет в. а. х. типа рис. 13.1, *и*.

В. а. х. четырехслойного германиевого (кремниевого) диода — тринистора — изображена на рис. 13.1, *л*; в. а. х. туннельного диода — на рис. 13.1, *к* (о принципах работы тринистора см. § 15.43 и туннельного диода см., например, [21]).

В качестве управляемых нелинейных сопротивлений широко применяют транзисторы, тиристоры и трехэлектродные электронные лампы. Их характеристики и применение рассмотрены в гл. 15.

§ 13.3. Общая характеристика методов расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока. В гл. 13 учебника рассматривается методика расчета простейших нелинейных электрических цепей с последовательно, параллельно и последовательно-параллельно соединенными НС и источниками э. д. с. Кроме того, изложена методика расчета сложных цепей, в состав которых входит только одно НС (или цепи, сводящиеся к таким) *.

Обратим внимание на то, что с линейной частью любой сложной разветвленной цепи, содержащей нелинейные сопротивления, можно осуществлять любые преобразования, рассмотренные в гл. 1. Но эти преобразования целесообразны, если они облегчают расчет всей сложной схемы. Одно из таких преобразований — от треугольника сопротивлений к звезде для облегчения нахождения входного сопротивления линейной части схемы — использовано при расчете в § 13.9.

---

* С расчетами более сложных схем, которые выходят за рамки курса, можно ознакомится, например, в [21].

Из методов расчета, приведенных в гл. 1, к нелинейным цепям применимы следующие: метод двух узлов; замена нескольких параллельно включенных ветвей одной эквивалентной; метод эквивалентного генератора.

До проведения расчета нелинейных цепей должны быть известны вольт-амперные характеристики входящих в схему нелинейных сопротивлений. Расчет нелинейных цепей постоянного тока производят, как правило, графически.

§ 13.4. Последовательное соединение нелинейных сопротивлений. На рис. 13.2, *а* изображена схема последовательного соединения НС с заданной в. а. х., линейного сопротивления R и источника э. д. с. E. Требуется найти ток в цепи. В. а. х. $НС$ обозначена на рис. 13.2, *б* как $I = f(U_{НС})$, в. а. х. линейного сопротивления — прямая линия.

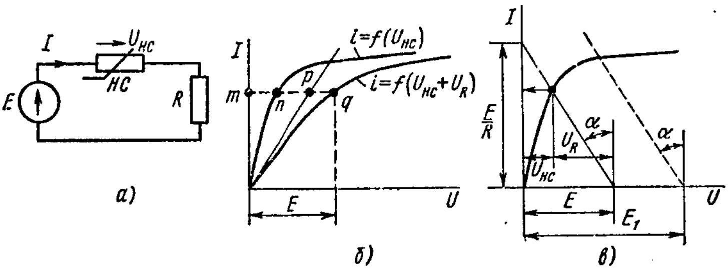


Рис. 13.2

В. а. х. всей цепи, т. е. зависимость тока в цепи от суммы падений напряжений на $НС$ и R, обозначена через $I = f(U_{НС} + U_R)$. Расчет основывается на законах Кирхгофа. Обсудим два способа расчета. Первый способ иллюстрирует рис. 13.2, *б*, второй — рис. 13.2, *в*.

При расчете цепи по первому способу строим результирующую в. а. х. всей пассивной части схемы, исходя из того, что при последовательном соединении через $НС$ и R проходит одинаковый ток. Для построения результирующей в. а. х. задаемся произвольным током — точкой m, проводим через нее (рис. 13.2, *б*) горизонталь и складываем отрезок mn, равный напряжению на $НС$, с отрезком mp, равным напряжению на R:

$\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{mq}$ *.

Точка q принадлежит результирующей в. а. х. всей схемы. Аналогично строят и другие точки результирующей в. а. х. Определение тока в цепи при заданной э. д. с. E производят графически по результирующей в. а. х. С этой целью следует заданную величину э. д. с. E отложить по оси абсцисс и через полученную точку провести вертикаль до пересечения с результирующей в. а. х. в точке q. Ордината точки q равна искомому току.

---

* Здесь и далее черта над отрезком означает, что речь идет о его длине.

При расчете цепи по второму способу нет необходимости строить результирующую в. а. х. всей пассивной части схемы. Учитывая, что уравнение $IR+U_{HC}=E$ в координатах I и U_{HC} представляет собой уравнение прямой, проходящей через точки $I=E/R$; $U=U_{HC}=0$; $I=0$; $U_{HC}=U=E$, проводим на рис. 13.2, *в* эту прямую. Тангенс угла α наклона ее к вертикали, умноженный на отношение m_U/m_I

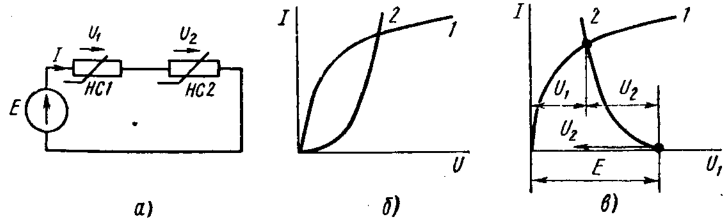


Рис. 13.3

масштабов по осям, численно равен R. Точка пересечения прямой с в. а. х. *НС* определяет режим работы цепи. Действительно, для этой точки ток, проходящий через *НС* и R, одинаков, а сумма падений напряжений $U_{HC}+U_R=E$. При изменении э. д. с. от E до E_1 прямую $I=f(U_R)$ следует переместить параллельно себе так, чтобы она исходила из точки $I=0$, $U=E_1$ (пунктирная прямая на рис. 13.2, *в*).

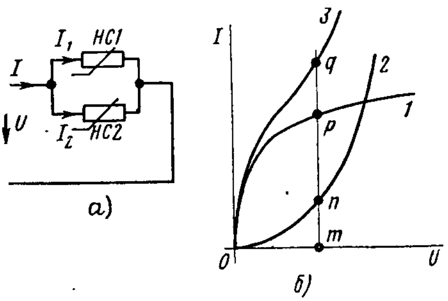


Рис. 13.4

Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении двух и большего числа НС. В этом случае сначала находят в. а. х. двух НС, затем трех и т. д.

Обсудим применение второго способа для расчета цепи рис. 13.3, *а* с двумя различными НС; в. а. х. *НС1* и *НС2* изображены на рис. 13.3 *б*. Так как *НС2* имеет нелинейную в. а. х., то вместо прямой $I=f(U_R)$, как это было на рис. 13.2, *в*, теперь нужно построить нелинейную зависимость $I=f(U_2)$. Начало ее (рис. 13.3, *в*) расположено в точке $I=0$, $U_1=E$. Отсчет положительных значений U_2 производится влево от этой точки. Так как положительные значения U_2 на рис. 13.3, *б* откладываются вправо от начала координат, а на рис. 13.3, *в* — влево, то кривая $I=f(U_2)$ рис. 13.3, *в* представляет собой зеркальное отображение кривой *2* рис. 13.3, *б* относительно вертикальной оси, проведенной через точку $U_1=E$.

§ 13.5. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений. Схема параллельного соединения двух НС изображена на рис. 13.4, *а*; ее в. а. х. — на рис. 13.4, *б*. При построении результирующей в. а. х.

исходят из того, что напряжения на *НС1* и *НС2* равны в силу их параллельного соединения, а ток в неразветвленной части схемы

$$I = I_1 + I_2.$$

Кривая *3* рис. 13.4, *б* представляет собой в. а. х. параллельного соединения. Строим ее следующим образом. Задаемся произвольно напряжением U, равным отрезку Om. Проводим через точку m вертикаль. Складываем отрезок mn, равный току в *НС2*, с отрезком mp, равным току в *НС1*:

$$\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{mq}.$$

Отрезок mq равен току в неразветвленной части цепи при напряжении Om. Аналогично определяют и другие точки результирующей в. а. х. параллельного соединения.

§ 13.6. Последовательно-параллельное соединение нелинейных сопротивлений. На рис. 13.5 изображена схема последовательного соединения *НС3* и двух параллельно соединенных *НС1* и *НС2*. Требуется найти токи в ветвях схемы. Заданы

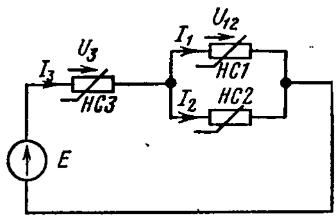


Рис. 13.5

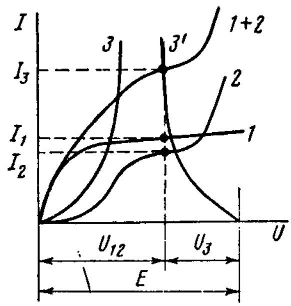


Рис. 13.6

в. а. х. нелинейных сопротивлений (кривые *1*, *2*, *3* рис. 13.6) и э. д. с. E. Сначала строим в. а. х. параллельного соединения в соответствии с методикой, рассмотренной в § 13.5 (кривая $1+2$ на рис. 13.6). После этого цепь сводится к последовательному соединению *НС3* и *НС*, имеющего в. а. х. $1+2$.

Применяем второй способ построения (см. § 13.4). Кривая *3'* рис. 13.6 представляет собой в. а. х. *НС3*, зеркально отраженную относительно вертикали, проведенной через точку $U = E$. В точке пересечения кривой *3'* с кривой $1+2$ удовлетворяется второй закон Кирхгофа: $U_3 + U_{12} = E$. Сумма токов $I_1 + I_2 = I_3$.

§ 13.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов. Для схем, содержащих только два узла или приводящихся к ним, применяют метод двух узлов. Рассмотрим его на примере схемы рис. 13.7. В схеме три НС и три источника э. д. с. Пусть в. а. х. НС изображаются кривыми рис. 13.8, *а-в*. Для определенности положим, что $E_1 > E_2 > E_3$. Выберем положительные направления для токов. Пусть, например, все токи направлены к узлу a. Тогда, по первому закону Кирхгофа,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \qquad (13.1)$$

Каждый из токов является нелинейной функцией падения напряжения на своем НС. Так, I_1 является функцией U_1, I_2 — функцией U_2 и I_3 — функцией U_3.

Выразим все токи в функции одного переменного — напряжения U_{ab} между двумя узлами. Для этого выразим U_1, U_2, U_3 через э. д. с. и U_{ab}:

$$U_1 = E_1 - U_{ab}; \qquad (13.2)$$

$$U_2 = E_2 - U_{ab}; \qquad (13.3)$$

$$U_3 = E_3 - U_{ab}. \qquad (13.4)$$

Таким образом, возникает задача о том, как перестроить кривую $I_1 = f(U_1)$ в кривую $I_1 = f(U_{ab})$, кривую $I_2 = f(U_2)$ — в кривую $I_2 = f(U_{ab})$ и т. д. На рис. 13.9 показано, как из кривой $I_1 = f(U_1)$ рис. 13.8, *а* получить кривую $I_1 = f(U_{ab})$ — точки соответственно обозначены одинаковыми цифрами.

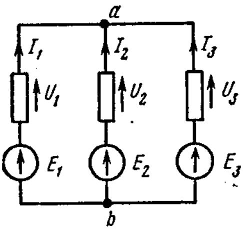


Рис. 13.7

Для точки *5* кривой рис. 13.8, *а* $I_1 = 0$ и $U_1 = 0$; при этом $U_{ab} = E_1$ [см. (13.2)], т. е. начало кривой $I_1 = f(U_{ab})$ сдвинуто в точку $U_{ab} = E_1$.

Росту U_1 при $U_1 > 0$ соответствует убыль U_{ab}. Для точки *2* при $U_1 = E_1$ $U_{ab} = 0$. Росту $|U_1|$ при $U_1 < 0$ отвечает рост U_{ab}, причем $U_{ab} > E_1$.

На основании изложенного рекомендуется поступать следующим образом:

1) сместить кривую $I_1 = f(U_1)$ параллельно самой себе так, чтобы ее начало находилось в точке $U_{ab} = E_1$ (кривая, полученная в результате переноса, представлена пунктиром на рис. 13.9);

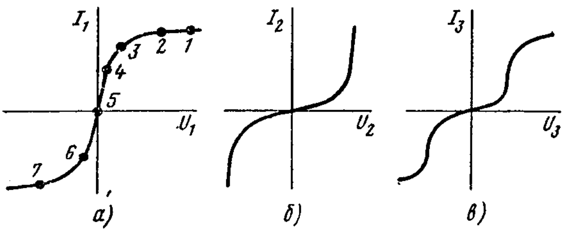


Рис. 13.8

2) провести через точку $U_{ab} = E_1$ вертикаль и зеркально отразить пунктирную кривую относительно вертикали.

Аналогичным образом производится перестройка кривых и для других ветвей схемы. Нанесем кривые $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$ и $I_3 = f(U_{ab})$ на одном рисунке (кривые *1*, *2*, *3* на рис. 13.10) и построим кривую $I_1+I_2+I_3=f(U_{ab})$ (кривая 4 на рис. 13.10), просуммировав ординаты кривых 1, 2, 3. Точка m пересечения кривой 4 с осью абсцисс дает значение U_{ab}, при котором удовлетворяется уравнение (13.1). Восставим в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс. Ординаты точек пересечения перпендикуляра с кривыми 1, 2, 3 дадут соответственно токи I_1, I_2 и I_3 по величине и по знаку.

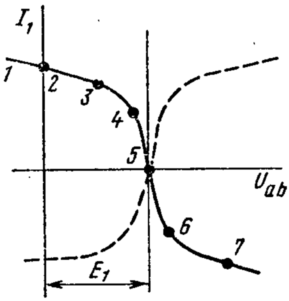


Рис. 13.9

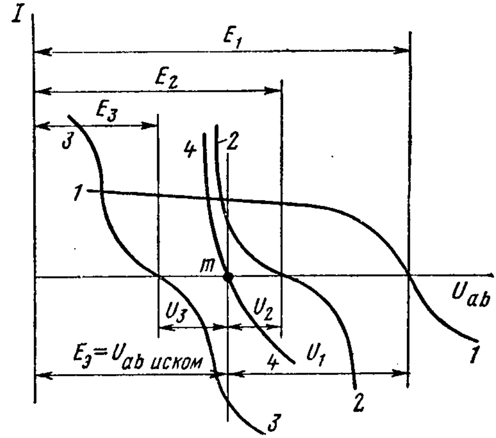


Рис. 13.10

§ 13.8. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих НС и э. д. с., одной эквивалентной. Положим, что имеется совокупность нескольких параллельных ветвей, содержащих НС и источники э. д. с.

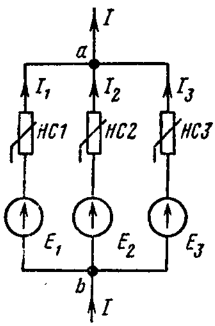


Рис. 13.11

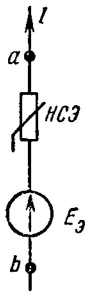


Рис. 13.12

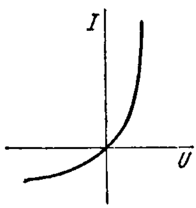


Рис. 13.13

(рис. 13.11). Параллельные ветви входят в состав сложной схемы, не показанной на рис. 13.11. Каковы должны быть э. д. с. и в. а. х. эквивалентного нелинейного сопротивления НСЭ участка схемы рис. 13.12, чтобы он был эквивалентен параллельным ветвям рис. 13.11?

Одна ветвь рис. 13.12 будет эквивалентной ветвям рис. 13.11 в том случае, если ток I в неразветвленной части цепи рис. 13.11 при любых значениях напряжения U_{ab} будет равняться току I в ветви рис. 13.12.

Воспользуемся построениями на рис. 13.10. Кривая *4* этого рисунка представляет собой зависимость $I_1+I_2+I_3=f(U_{ab})$, т. е. является результирующей в. а. х. трех параллельных ветвей. Такую же в. а. х. должна иметь ветвь рис. 13.12. Если ток I в схеме рис. 13.12 равен нулю, то $U_{ab}=E_э$. Следовательно, $E_э$ на рис. 13.10 определяется напряжением U_{ab}, при котором кривая *4* пересекает ось абсцисс. Для определения в. а. х. НСЭ необходимо кривую *4* рис. 13.10 зеркально отобразить относительно вертикали, проведенной через точку *m*.

В. а. х. НСЭ изображена на рис. 13.13. Важно подчеркнуть, что включение э. д. с. в параллельные ветви привело к тому, что в. а. х. НСЭ стала несимметричной, несмотря на то что в. а. х. нелинейных сопротивлений *1*, *2*, *3* в схеме рис. 13.7 были взяты симметричными.

Таким образом, изменяя э. д. с. в ветвях параллельной группы, можно изменять ее результирующую в. а. х. и как бы искусственно создавать НС с самыми причудливыми в. а. х.

§ 13.9. Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора. Если в сложной электрической цепи есть одна ветвь с НС, то определение тока в ней можно производить по методу эквивалентного генератора. С этой целью выделим ветвь с НС, а всю остальную линейную схему представим в виде активного двухполюсника (рис. 13.14, *а*).

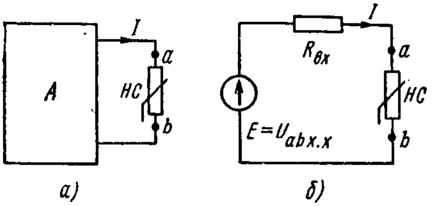


Рис. 13.14

Как известно из § 1.25, схему линейного активного двухполюсника по отношению к зажимам *a* и *b* выделенной ветви можно представить в виде последовательного соединения источника э. д. с. с э. д. с., равной напряжению на зажимах *ab* при разомкнутой ветви *ab* ($U_{ab\,x.x}$), сопротивления, равного входному сопротивлению $R_{вх}$ линейного двухполюсника, и сопротивления ветви *ab* (рис. 13.14, *б*).

Определение тока в схеме рис. 13.14, *б* не представляет труда и может проводиться в соответствии с § 13.4.

Пример 131. Определить ток в ветви *ab* схемы рис. 13.15 по методу эквивалентного генератора при $R_1=R_0=27$ Ом; $R_2=108$ Ом; $R_3=81$ Ом; $R_4=54$ Ом; $E=70$ В. В. а. х. НС изображена на рис. 13.16, *а*.

Решение. Размыкаем ветвь и определяем напряжение холостого хода $U_{ab\,x.x}=20$ В.

Для подсчета входного сопротивления $R_{вх}$ линейной части схемы относительно зажимов *ab* необходимо преобразовать треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_0 (или R_4, R_0, R_3) (рис. 13.15, *б*) в эквивалентную звезду (рис. 13.15, *в*) по формулам (1.35) — (1.37):

$$R_5=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_0}=18\text{ Ом};\ R_6=4{,}45\text{ Ом};$$

$$R_7=18\text{ Ом};\ R_{вх}=R_5+\frac{(R_6+R_3)(R_7+R_4)}{R_6+R_3+R_7+R_4}=57\text{ Ом}.$$

Для определения тока в ветви ab схемы (рис. 13.15, a) на рис. 13.16, a проводим прямую, проходящую через точки $U=U_{ab\,xx}=20$ В, $I=0$

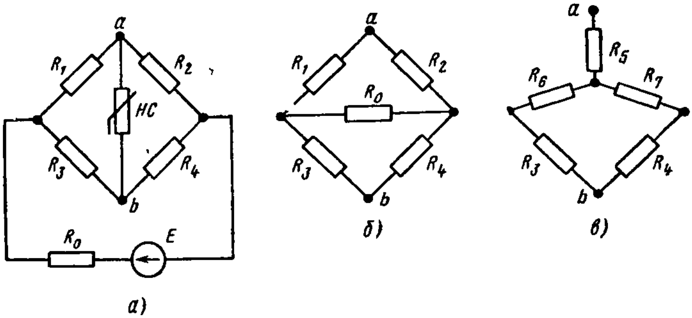


Рис. 13.15

и $U=0$, $I=U_{ab\,xx}/R_{вх}=0{,}351$ А (угол γ наклона этой прямой к вертикали с учетом масштабов по осям равен $R_{вх}$). Точка пересечения этой

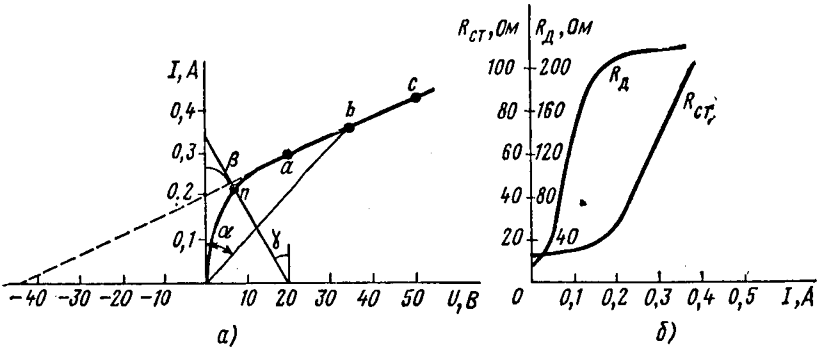


Рис. 13.16

прямой с в. а. х. НС (точка n) определяет рабочий режим схемы. Ток $I=0{,}22$ А.

§ 13.10. Статическое и дифференциальное сопротивления. Свойства нелинейного сопротивления могут быть охарактеризованы либо его в. а. х., либо зависимостями его статического и дифференциального сопротивлений от тока (напряжения).

Статическое сопротивление $R_{ст}$ характеризует поведение НС в режиме неизменного тока. Оно равно отношению напряжения на НС к протекающему по нему току:

$$R_{ст}=U/I. \qquad (13.5)$$

Сопротивление $R_{ст}$ численно равно тангенсу угла α между осью ординат и прямой, идущей в точку b (рис. 13.16, a), умноженному на отношение масштабов по осям m_U/m_I.

При переходе от одной точки в. а. х. к соседней статическое сопротивление изменяется.

Под *дифференциальным сопротивлением* $R_д$ принято понимать отношение малого (теоретически бесконечно малого) приращения напряжения dU на НС к соответствующему приращению тока dI:

$$R_д = dU/dI. \tag{13.6}$$

Дифференциальное сопротивление численно равно тангенсу угла β (рис. 13.16, *а*) наклона касательной к в. а. х. в рабочей точке, умноженному на m_U/m_I. Оно характеризует поведение НС при достаточно малых отклонениях от предшествующего состояния, т. е. *приращение напряжения* на НС связано с *приращением тока*, проходящим через него, соотношением $dU = R_д\, dI$.

Если в. а. х. НС имеет падающий участок, т. е. такой участок, на котором увеличению напряжения на ΔU соответствует убыль тока на ΔI, что имеет место, например, для электрической дуги (см. ее в. а. х. на рис. 13.1, *д*), то дифференциальное сопротивление на этом участке отрицательно.

Из двух сопротивлений ($R_{ст}$ и $R_д$) чаще применяют $R_д$. Его используют, например, при замене НС эквивалентным линейным сопротивлением и источником э. д. с. (см. § 13.11), а также при исследовании устойчивости режимов работы нелинейных цепей (см. § 17.3).

Пример 132. Построить кривые зависимости $R_{ст}$ и $R_д$ в функции тока I для нелинейного сопротивления, в. а. х. которого изображена на рис. 13.16, *а*.

Решение. Кривые построены на рис. 13.16, *б*.

§ 13.11. Замена нелинейного сопротивления эквивалентным линейным сопротивлением и э. д. с. Если заранее известно, что изображающая точка будет перемещаться лишь по определенному участку в. а. х. НС и этот участок может быть с известной степенью приближения заменен прямой линией, то НС при расчете может быть заменено эквивалентным линейным сопротивлением и источником э. д. с.

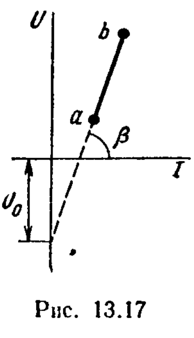


Рис. 13.17

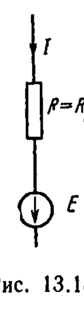


Рис. 13.18

Положим, что рабочая точка перемещается лишь по участку *ab* (рис. 13.16, *а*, а также рис. 13.17). Для этого участка

$$U = U_0 + I\,\mathrm{tg}\,\beta = U_0 + IR_д. \tag{13.7}$$

Уравнению (13.7) удовлетворяет участок цепи рис. 13.18. На нем $E = -U_0$ и линейное сопротивление $R = R_д$.

Замена НС линейным сопротивлением и источником э. д. с. удобна тем, что после нее вся схема становится линейной и ее работа может быть исследована методами, разработанными для линейных цепей. Однако при этом необходимо внимательно следить за тем, чтобы рабочая точка не выходила за пределы линейного участка в. а. х.

Пример 133. Выразить аналитически участок в. а. х. рис. 13.16, *а* в интервале между точками *а* и *с*.

Решение. Из рис. 13.16, *а* находим $U_0 = -45$ В и $R_д = \operatorname{tg}\beta = 220$ Ом. Следовательно, $U \approx -45 + 220I$.

* * *

Нелинейные сопротивления в ряде случаев придают электрическим цепям свойства, принципиально недостижимые в линейных цепях, например, стабилизация тока, стабилизация напряжения, усиление постоянного напряжения и др.

§ 13.12. Стабилизатор тока. *Стабилизатором тока* называют устройство, которое способно поддерживать в нагрузке неизменный ток при изменении сопротивления нагрузки и напряжения на входе всей схемы.

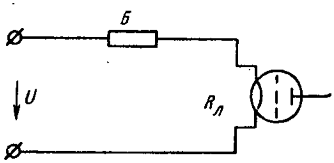


Рис. 13.19

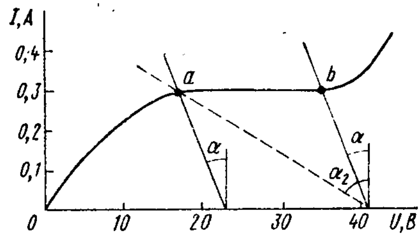


Рис. 13.20

Стабилизацию постоянного тока можно производить с помощью различных схем. Простейшей схемой стабилизатора тока является схема рис. 13.19. В ней последовательно с нагрузкой $R_л$ включено НС типа бареттера *Б*. На рис. 13.20 приведена в. а. х. бареттера 0,3Б17—35. Первая цифра означает ток в амперах, который бареттер способен поддерживать постоянным, цифры 17—35 показывают область изменения напряжения на бареттере в вольтах на участке бареттирования (поддержания постоянства тока).

Пример 134. Бареттер 0,3Б17—35 используется для стабилизации тока накала электронной лампы. Номинальный ток накала 0,3А, напряжение 6 В. Определить, в каких пределах можно изменять напряжение U на входе схемы, чтобы ток нити накала лампы оставался неизменным и равным 0,3 А.

Решение. Сопротивление нити накала лампы

$$R_л = 6/0{,}3 = 20 \text{ Ом}.$$

Проводим через точки *а* и *b* (рис. 13.20), ограничивающие участок бареттирования, две прямые под углом α ($\operatorname{tg}\alpha$ с учетом масштабов по осям численно равен 20) к вертикали. По рис. 13.20 определяем, что напряжение U можно изменять в интервале 23 ÷ 41 В.

Пример 135. В схему предыдущей задачи введено последовательное сопротивление R_1. Полагая напряжение на входе схемы неизменным и равным 41 В, найти, до какого максимального значения R_1 в схеме имеет место стабилизация тока.

Решение. Если $R_1=0$ и $U=41$ В, то рабочий режим характеризуется положением точки b (рис. 13.20). С увеличением сопротивления R_1 рабочая точка на в. а. х. перемещается по направлению к точке a. В граничном режиме (точка a) $R_{1max}+R_л=\operatorname{tg}\alpha_2\frac{m_U}{m_I}=80$ Ом.

Следовательно, $R_{1max}=80-20=60$ Ом.

§ 13.13. Стабилизатор напряжения. *Стабилизатором напряжения* называют устройство, напряжение на выходе которого $U_н$ поддерживается постоянным или почти постоянным при изменении сопротивления нагрузки $R_н$ или напряжения U_1 на входе устройства.

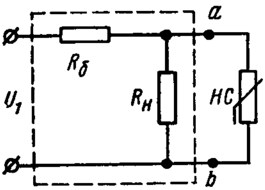


Рис. 13.21

Схема простейшего стабилизатора напряжения показана на рис. 13.21. В качестве НС используется стабилитрон; $R_б$ — балластное сопротивление. На рис. 13.22 изображена в. а. х. стабилитрона.

При анализе работы стабилизатора определяют пределы допустимых изменений U_1 при $R_н=\text{const}$, а также исследуют работу стабилизатора при одновременном изменении U_1 и $R_н$.

Для оценки качества работы стабилизатора иногда пользуются понятием *коэффициента стабилизации*. Под ним понимают отношение относительного приращения напряжения на входе стабилизатора $(\Delta U_1/U_1)$ к относительному приращению напряжения на выходе стабилизатора $(\Delta U_н/U_н)$.

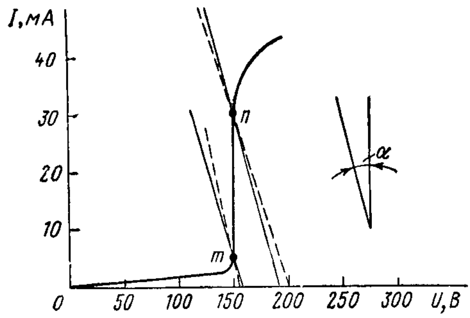


Рис. 13.22

Пример 136. В схеме рис. 13.21 $R_н=5$ кОм; $R_б=2$ кОм. В. а. х. стабилитрона соответствует рис. 13.22. Определить границы допустимого изменения U_1, при которых на выходе стабилитрона поддерживается стабилизированное напряжение 150 В.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора. Разомкнем ветвь стабилитрона и найдем напряжение холостого хода:

$$U_{ab\,х.х}=U_1\frac{R_н}{R_н+R_б}=0{,}713\ U_1.$$

Определим входное сопротивление линейной части схемы (см. рис. 13.21) по отношению к зажимам ab:

$$R_{вх}=\frac{R_нR_б}{R_н+R_б}=1427\text{ Ом}.$$

На рис. 13.22 проведем две прямые (сплошные) линии через точки m и n в. а. х. стабилитрона так, чтобы тангенс угла (образованного ими с вертикалью), умноженный на m_U/m_I, равнялся $R_{вх}=1427$ Ом.

Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси абсцисс, равны $U_{ab\,х.х}$. Из рисунка находим $0{,}713\ U_{1min}=157$ В, или $U_{1min}=220$ В. Аналогично, $0{,}713\ U_{1max}=192$ В, или $U_{1max}=269$ В. Следовательно, напряжение U_1 может изменяться от 220 до 269 В.

Пример 137. Для схемы рис. 13.21 при $R_б=2$ кОм (в. а. х. стабилитрона см. на рис. 13.22) и $U_1=250$ В определить, в каких пределах можно изменять сопротивление нагрузки $R_н$, чтобы стабилизатор мог выполнять свои функции по стабилизации выходного напряжения.

Решение. Воспользовавшись методом эквивалентного генератора, определим

$$U_{х.\,х}=U_1\frac{R_н}{R_н+R_б}=250\frac{R_н}{R_н+2000}.$$

Находим

$$R_{вх}=\operatorname{tg}\alpha\frac{m_U}{m_I}=\frac{R_нR_б}{R_н+R_б}=\frac{2000R_н}{2000+R_н}.$$

Задача сводится к определению значений $R_н$, при которых прямые, характеризующие $R_{вх}$, будут проходить через точки m и n в. а. х. стабилитрона. В данном примере неизвестны ни тангенсы углов α, ни исходные точки на оси абсцисс, из которых должны быть проведены прямые, поэтому решаем задачу путем пробных построений. С этой целью задаемся значениями $R_н$ и подсчитываем соответствующие им $U_{х.\,х}$ и $R_{вх}$ (табл. 13.1).

Таблица 13.1

$R_н$, Ом	$U_{х.\,х}$, В	$R_{вх}$, Ом	$R_н$, Ом	$U_{х.\,х}$, В	$R_{вх}$, Ом
3	150	1200	6	187	1500
4	167	1330	7	194	1555
5	178	1425	8	200	1600

По данным таблицы проводим несколько лучей. Графически находим, что прямые (пунктирные прямые на рис. 13.22) пройдут через точки m и n соответственно при $R_{н\,min}=3{,}3$ кОм и $R_{н\,max}=8$ кОм.

§ 13.14. Усилитель постоянного напряжения.

Усилителем постоянного напряжения называют устройство, приращение напряжения на выходе которого больше приращения напряжения на входе. Усилители постоянного напряжения часто выполняют на управляемых НС — трехэлектродных лампах или транзисторах. На рис. 13.23 изображены анодные (по существу, вольт-амперные) характеристики трехэлектродной лампы 6Є2С. Под ними понимают зависимость анодного тока лампы $I_а$ от анодного напряжения $U_а$ при сеточном напряжении $U_с$ в качестве параметра.

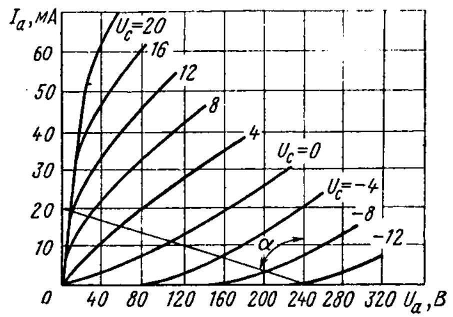


Рис. 13.23

Схема усилителя постоянного напряжения изображена на рис. 13.24.

Входное (усиливаемое) напряжение подается на сетку лампы. На выходе усилителя (зажимы a и b) включена нагрузка $R_н$.

Сетка триода расположена ближе к катоду, чем анод. Влияние поля сетки на поток электронов с катода на анод значительно больше влияния поля анода. Поэтому сравнительно незначительные изменения напряжения на сетке приводят к резкому изменению анодного тока и напряжения на выходе усилителя. Составим уравнение по вто-

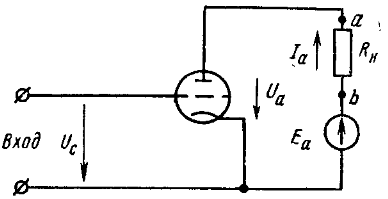


Рис. 13.24

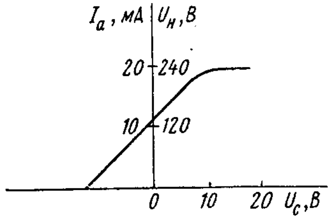


Рис. 13.25

рому закону Кирхгофа для анодной сети: $U_а + I_а R_н = E$. Это уравнение в координатах $U_а$, $I_а$ описывает прямую, проходящую через точки $U_а = E$, $I_а = 0$ и $U_а = 0$, $I_а = E/R_н$. Прямая составляет с вертикалью угол α ($\operatorname{tg} \alpha m_U/m_I = R_н$). Точки пересечения прямой с кривыми семейства в. а. х. лампы (см. рис. 13.23) дают возможность определить значение $I_а$ при выбранном $U_с$.

Пример 138. Построить зависимость $U_{вых} = f(U_с)$ для схемы рис. 13.24, если $R_н = 12$ кОм и $E = 240$ В. Триод 6С2С.

Решение. Из точки $I_а = 0$, $U_а = E$ через точку $U_а = 0$, $I_а = E/R_н$ проводим прямую. Точки пересечения ее с анодными характеристиками дают соответствующие значения $I_а$ и $U_с$. Зависимость $U_{вых} = f(U_с)$ отличается от зависимости $I_а = f(U_с)$ (рис. 13.25) только масштабом ($U_н = I_а R_н$, $R_н = \text{const}$).

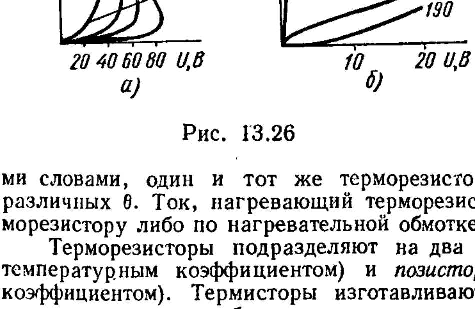


Рис. 13.26

§ 13.15. Терморезисторы. *Терморезисторы* представляют собой НС, сопротивление которых сильно зависит от температуры T тела терморезистора.

Так как эта температура зависит не только от тока, проходящего по терморезистору, но и от температуры окружающей среды θ, то они представляют собой температурно управляемые НС. Другими словами, один и тот же терморезистор обладает различными в. а. х. при различных θ. Ток, нагревающий терморезистор, может проходить по самому терморезистору либо по нагревательной обмотке, электрически изолированной от него.

Терморезисторы подразделяют на два класса: *термисторы* (с отрицательным температурным коэффициентом) и *позисторы* (с положительным температурным коэффициентом). Термисторы изготавливают из окислов меди и марганца, позисторы — из титаната бария, легированного редкоземельными металлами. Постоянная времени нагрева терморезисторов составляет обычно несколько десятков секунд.

На рис. 13.26, *а* изображены в. а. х. термистора типа ММТ-4, а на рис. 13.26, *б* — позистора СТ5-1.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения следующим понятиям: нелинейное сопротивление, нелинейная электрическая цепь, статическое и дифференциальное сопротивления. 2. Качественно изобразите в. а. х. известных Вам типов неуправляемых и управляемых НС. 3. Как заменить несколько параллельных ветвей с НС и источниками э. д. с. на одну эквивалентную? Определите характеристики элементов эквивалентной ветви. 4. Перечислите этапы расчета нелинейных цепей (НЦ) методом двух узлов и методом эквивалентного генератора. 5. Перечислите свойства, которыми при определенных условиях могут обладать НЦ и не обладают линейные цепи. 6. Решите задачи 2.4; 2.8; 2.13; 2.14; 2.15; 2.20; 2.22.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

§ 14.1. Подразделение веществ на две группы — ферромагнитные и неферромагнитные. Из курса физики известно, что все вещества по магнитным свойствам подразделяют на три основные группы: диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные. У диамагнитных веществ магнитная проницаемость μ немного меньше единицы, например у висмута она равна 0,99983. У парамагнитных веществ μ немного больше единицы, например μ платины равно 1,00036. У ферромагнитных веществ (железо, никель, кобальт и их сплавы, ферриты и др.) μ много больше единицы (например, 10^4), а у некоторых материалов даже до 10^6).

При решении большинства электротехнических задач практически достаточно подразделять все вещества не на диа-, пара- и ферромагнитные, а на ферро- и неферромагнитные. У ферромагнитных веществ μ много больше единицы, у всех неферромагнитных μ практически равно единице.

§ 14.2. Основные величины, характеризующие магнитное поле. Основными векторными величинами, характеризующими магнитное поле, являются магнитная индукция $\vec{B}$ и намагниченность $\vec{J}$*.

Магнитная индукция $\vec{B}$ — это векторная величина, определяемая по силовому воздействию магнитного поля на ток (см. гл. 21).

Намагниченность $\vec{J}$ — магнитный момент единицы объема вещества.

Кроме этих двух величин магнитное поле характеризуется *напряженностью магнитного поля* $\vec{H}$.

Три величины — $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$ — связаны друг с другом следующей зависимостью**:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \tag{14.1}$$

В СИ индукция B измеряется в теслах (Т):

$$1\ \text{Т} = 1\ \text{В} \cdot \text{с/м}^2 = 1\ \text{Вб/м}^2$$

* Стрелка над буквой свидетельствует о том, что речь идет о векторе в пространстве.

** Пояснения к формуле (14.1) см. в § 14.24.

или в кратных ей единицах Вб/см^2, а в системе СГСМ — в гауссах (1 Гс $= 10^{-8}$ Вб/см^2).

Намагниченность J и напряженность поля H в СИ измеряют в амперах на метр (А/м), а в системе СГСМ — в эрстедах (Э).

Намагниченность $\vec{J}$ представляет собой вектор, направление которого полагают совпадающим с направлением $\vec{H}$ в данной точке:

$$\vec{J} = \varkappa \vec{H}. \tag{14.2}$$

Коэффициент $\varkappa$ для ферромагнитных веществ является функцией H. Подставив (14.2) в (14.1) и обозначив $1 + \varkappa = \mu$, получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \tag{14.3}$$

где μ_0 — постоянная, характеризующая магнитные свойства вакуума; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость.

В СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м $= 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Г/м; в СГСМ $\mu_0 = 1$. Для ферромагнитных веществ μ является функцией H.

Магнитный поток Φ через некоторую поверхность S — это поток вектора магнитной индукции через эту поверхность:

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B}\, d\vec{S}, \tag{14.4}$$

где dS — элемент поверхности S.

В СИ магнитный поток измеряют в В · с или веберах (Вб); в СГСМ — в максвеллах (Мкс) или кратных единицах — киломаксвеллах (кМкс): 1 Мкс $= 10^{-8}$ Вб; 1 кМкс $= 10^3$ Мкс.

При расчетах магнитных цепей обычно используют две величины — магнитную индукцию B и напряженность магнитного поля H.

Намагниченность J в расчетах, как правило, не используют [при необходимости значение J, отвечающее соответствующим значениям B и H, всегда можно найти по формуле (14.1)].

Известно, что ферромагнитные тела состоят из областей самопроизвольного (спонтанного) намагничивания. Магнитное состояние каждой области характеризуется вектором намагниченности. Направление вектора намагниченности зависит от внутренних упругих напряжений и кристаллической структуры ферромагнитного тела.

Векторы намагниченности отдельных областей ненамагниченного тела направлены в различные стороны. Поэтому во внешнем по отношению к ферромагнитной среде пространстве намагниченность ферромагнитного тела, если оно не помещено во внешнее магнитное поле, не проявляется. Если же ферромагнитное тело поместить во внешнее магнитное поле, то под его действием векторы намагниченности отдельных областей будут поворачиваться по внешнему полю. В результате этого индукция результирующего магнитного поля оказывается во много раз (сотни и даже сотни тысяч раз) больше, чем магнитная индукция внешнего поля до помещения в него ферромагнитного тела.

§ 14.3. Основные характеристики ферромагнитных материалов. Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H.

Различают два основных типа этих зависимостей: кривые намагничивания и гистерезисные петли.

Под кривыми намагничивания понимают однозначную зависимость между B и H. Кривые намагничивания подразделяют на начальную, основную и безгистерезисную (что будет пояснено далее).

Из курса физики известно, что ферромагнитным материалам присуще *явление гистерезиса* — отставание изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H. Гистерезис обусловлен, грубо говоря, внутренним трением областей самопроизвольного намагничивания. При периодическом изменении напряженности поля зависимость между B и H приобретает петлевой характер.

Различают несколько типов гистерезисных петель — симметричную, предельную и несимметричную (частный цикл).

На рис. 14.1 изображено семейство симметричных гистерезисных петель. Для каждой симметричной петли максимальное положительное значение B равно максимальному отрицательному значению B и соответственно $H_{max} = |-H_{max}|$.

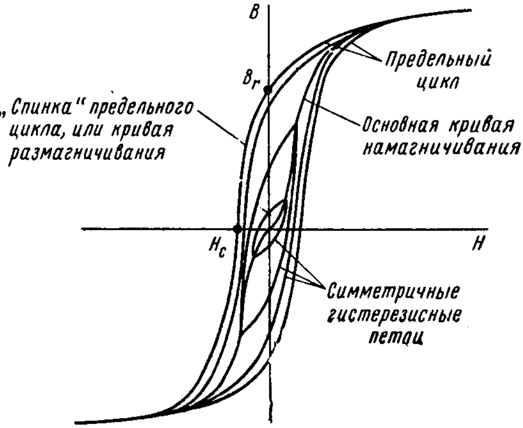


Рис. 14.1

Геометрическое место вершин симметричных гистерезисных петель принято называть *основной кривой намагничивания*. При очень больших H вблизи $\pm H_{max}$ восходящая и нисходящая части гистерезисной петли практически сливаются.

Предельной гистерезисной петлей или *предельным циклом* называют симметричную гистерезисную петлю, снятую при очень больших H_{max}. Индукцию при $H = 0$ называют *остаточной индукцией* и обозначают B_r.

Напряженность поля при $B = 0$ называют *задерживающей* или *коэрцитивной силой* и обозначают H_c.

Участок предельного цикла B_rH_c (рис. 14.1) принято называть *кривой размагничивания* или *«спинкой» гистерезисной петли*.

Этот участок используют при расчетах магнитных цепей с постоянными магнитами и магнитных элементов запоминающих устройств вычислительной техники.

Если изменять H периодически и так, что $+H_{max} \neq |-H_{max}|$, то зависимость между B и H будет петлевого характера, но центр петли не совпадает с началом координат (рис. 14.2). Такие гистерезисные петли принято называть *частными петлями гистерезиса*, или *частными циклами*.

Когда предварительно размагниченный ферромагнитный материал ($B=0$, $H=0$) намагничивают, монотонно увеличивая H, получаемую зависимость между B и H называют *начальной кривой намагничивания.*

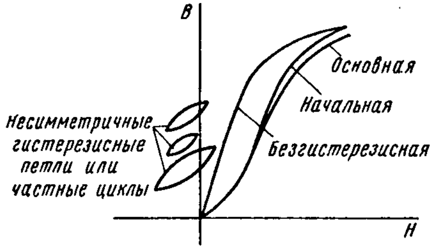


Рис. 14.2

Начальная и основная кривые намагничивания настолько близко расположены друг к другу, что практически во многих случаях их можно считать совпадающими (рис. 14.2).

Безгистерезисной кривой намагничивания называют зависимость между B и H, возникающую, когда при намагничивании ферромагнитного материала его периодически постукивают или воздействуют на него полем, имеющим кроме постоянной составляющей еще и затухающую по амплитуде синусоидальную составляющую. При этом гистерезис как бы снимается.

Безгистерезисная кривая намагничивания весьма резко отличается от основной кривой.

В различных справочниках, а также в ГОСТ 802—58 в качестве однозначной зависимости между B и H дается основная кривая намагничивания.

§ 14.4. Потери, обусловленные гистерезисом. При периодическом перемагничивании ферромагнитного материала в нем совершаются необратимые процессы, на которые расходуется энергия от намагничивающего источника. В общем случае потери в ферромагнитном сердечнике обусловлены гистерезисом, макроскопическими вихревыми токами и магнитной вязкостью. Степень проявления различных видов потерь зависит от скорости перемагничивания ферромагнитного материала. Если сердечник перемагничивается во времени весьма замедленно, то потери в сердечнике обусловлены практически только гистерезисом (потери от макроскопических вихревых токов и магнитной вязкости при этом стремятся к нулю).

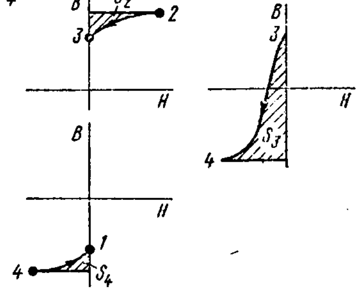


Рис. 14.3

Физически потери, обусловленные гистерезисом, вызваны главным образом потерями от микроскопических вихревых токов при скачкообразных поворотах векторов намагниченности отдельных намагниченных областей (скачки Баркгаузена, известные из курса физики).

Площадь гистерезисной петли $\oint H\,dB$ характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного вещества за один цикл перемагничивания.

Представим площадь гистерезисной петли рис. 14.3 в виде суммы четырех площадей:

$$\oint H\,dB = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Площадь S_1 соответствует движению от точки *1* до точки *2*; так как на этом участке $H > 0$ и $dB > 0$, то произведение $H\,dB > 0$ и $S_1 > 0$.

Площадь S_2 характеризует движение от точки *2* до *3*; так как в этом интервале $H > 0$ и $dB < 0$, то $S_2 < 0$.

Площадь S_3—движение от точки *3* до *4*; $S_3 > 0$, так как $H < 0$ и $dB < 0$.

Площадь S_4—движение от точки *4* до *1*; $S_4 < 0$, так как $H < 0$ и $dB > 0$.

Если ферромагнитный сердечник подвергается периодическому намагничиванию (например, в цепях переменного тока), то для уменьшения потерь на гистерезис в нем он должен быть выполнен из магнитномягкого материала (см. § 14.5).

§ 14.5. Магнитномягкие и магнитнотвердые материалы. Ферромагнитные материалы можно подразделять на магнитномягкие и магнитнотвердые.

Магнитномягкие материалы обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями

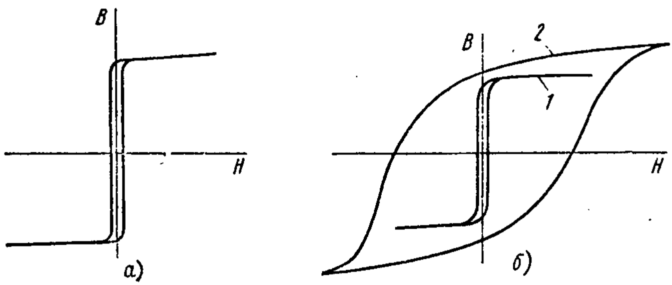


Рис. 14.4

гистерезисных петель. Их применяют во всех устройствах, которые работают или могут работать при периодически изменяющемся магнитном потоке (трансформаторах, электрических двигателях и генераторах, индуктивных катушках и т. п.).

Некоторые магнитномягкие материалы, например перминвар, сплавы 68НМП и др., обладают петлей гистерезиса по форме, близкой к *прямоугольной* (рис. 14.4, *а*). Такие материалы получили распространение в вычислительных устройствах и устройствах автоматики.

В группу магнитномягких материалов входят электротехнические стали, железоникелевые сплавы типа пермаллоя и др.

Магнитнотвердые материалы обладают полого поднимающейся основной кривой намагничивания и большой площадью гистерезисной петли. В группу магнитнотвердых материалов входят углеродистые стали, сплавы магнико, вольфрамовые и платинокобальтовые сплавы и др. Из магнитнотвердых материалов выполняют постоянные магниты.

На рис. 14.4, *б* качественно сопоставлены гистерезисные петли для магнитномягкого материала типа пермаллоя (кривая *1*) и для магнитнотвердого материала (кривая *2*).

§ 14.6. Магнитодиэлектрики и ферриты. В радиотехнике, где используют колебания высокой частоты, сердечники индуктивных катушек изготовляют из магнитодиэлектриков или из ферритов.

Магнитодиэлектрики — это материалы, полученные путем смешения мелкоизмельченного порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Эту смесь формуют и запекают. Каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика. Благодаря наличию таких пленок сердечники из магнитодиэлектриков не насыщаются; μ их находится в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков.

Ферриты — это материалы, которые изготавливают из окислов меди или цинка и окислов железа и никеля. Смесь формуют и обжигают, в результате чего обычно получают твердый раствор, например $Zn \cdot Fe_2O_3$. По своим электрическим свойствам ферриты являются полупроводниками. Их объемное сопротивление $\rho = 1 \div 10^7$ Ом · м, тогда как для железа $\rho \approx 10^{-6}$ Ом · м.

Можно получить самые различные магнитные свойства ферритов. В отличие от магнитодиэлектриков ферриты могут насыщаться. Коэрцитивная сила ферритов составляет примерно 10 А/м. Маркируют их буквами и цифрой. Например, феррит НЦ-1000 означает никельцинковый феррит, у которого на начальном участке кривой намагничивания $\mu = 1000$.

§ 14.7. Закон полного тока. Магнитное поле создается электрическими токами. Количественная связь между линейным интегралом от вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ вдоль любого произвольного контура и алгебраической суммой токов $\sum I$, охваченных этим контуром, определяется законом полного тока

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \sum I. \qquad (14.5)$$

Положительное направление интегрирования $d\vec{l}$ связано с положительным направлением тока I правилом правого винта.

Закон полного тока является опытным законом. Его можно экспериментально проверить путем измерения $\oint \vec{H}\, d\vec{l}$ с помощью специального устройства (известного из курса физики), называемого магнитным поясом.

§ 14.8. Магнитодвижущая (намагничивающая) сила. *Магнитодвижущей силой* (м. д. с.) или намагничивающей силой (н. с.) катушки или обмотки с током называют произведение числа витков катушки w на протекающий по ней ток I.

М. д. с. Iw вызывает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как э. д. с. вызывает электрический ток в электрической цепи. Как и э. д. с., м. д. с. есть величина направленная (положительное направление на схеме обозначают стрелкой).

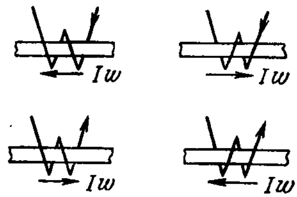


Рис. 14.5

Положительное направление м. д. с. совпадает с движением острия правого винта, если его вращать по направлению тока в обмотке.

Для определения положительного направления м. д. с. пользуются следующим *мнемоническим правилом*: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив ее пальцы по току в обмотке, а затем отогнуть большой палец, то последний укажет направление м. д. с.

На рис. 14.5 даны несколько эскизов с различным направлением намотки катушек на сердечник и различным направлением м. д. с.

§ 14.9. Разновидности магнитных цепей. *Магнитной цепью* называют совокупность м. д. с., ферромагнитных тел или каких-либо иных тел (сред), по которым замыкается магнитный поток.

Магнитные цепи могут быть подразделены на неразветвленные и разветвленные. Примером неразветвленной цепи может служить цепь,

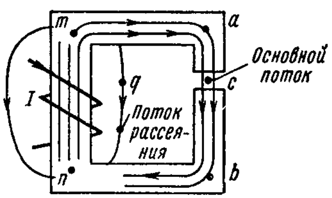


Рис. 14.6

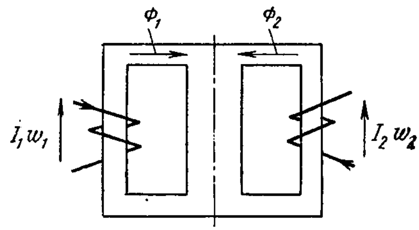


Рис. 14.7

показанная на рис. 14.6. Разветвленные цепи делятся на симметричные и несимметричные. Магнитная цепь рис. 14.7 симметрична: в ней $\Phi_1 = \Phi_2$, если обе части ее, расположенные слева и справа от вертикальной пунктирной линии, одинаковы в геометрическом отношении, изготовлены из одного и того же материала и если $I_1 w_1 = I_2 w_2$.

Достаточно сделать $I_1 w_1 \neq I_2 w_2$, или изменить направление тока в одной из обмоток, или сделать воздушный зазор в одном из крайних стержней магнитопровода, чтобы магнитная цепь рис. 14.7 стала несимметричной. В несимметричной цепи рис. 14.7, как правило, поток $\Phi_1 \neq \Phi_2$.

§ 14.10. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи. Электрические машины, трансформаторы и другие аппараты конструируют так, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим. Если в магнитную цепь входит ферромагнитный материал, то поток в магнитной цепи при одной и той же м. д. с. и одинаковой геометрии цепи оказывается во много раз больше, чем в случае отсутствия ферромагнитного материала.

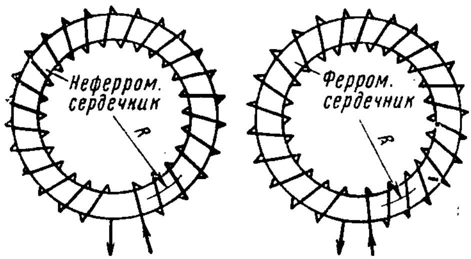


Рис. 14.8

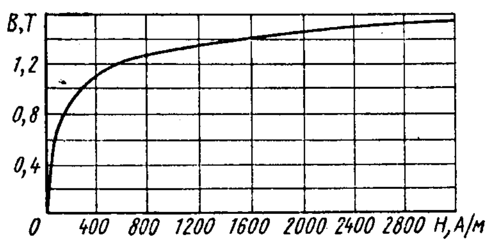


Рис. 14.9

Пример 139. Возьмем два одинаковых в геометрическом отношении кольцевых сердечника (рис. 14.8). Пусть радиус их средней магнитной линии $R = 10$ см и поперечное сечение $S = 2$ см^2. Один сердечник неферромагнитный, например деревянный, а другой — ферромагнитный (кривая намагничивания рис. 14.9). Намотаем на каждый кольцевой сердечник обмотку с числом витков $w = 200$ и пропустим по ним одинаковый ток I, например в 1 А. Определить потоки в сердечниках.

Решение. По закону полного тока напряженность поля одинакова в обоих сердечниках и не зависит от материала:

$$H = Iw/(2\pi R) = 1 \cdot 200/(2\pi \cdot 0{,}1) = 318 \text{ А/м}.$$

Магнитный поток в неферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{\text{нф}} = BS = \mu_0 \mu HS = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 318 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}.$$

По кривой намагничивания рис. 14.9 находим, что при $H = 318$ А/м $B \approx 1{,}02$ Т.

Магнитный поток в ферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{\text{фм}} = BS = 1{,}02 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 20{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}.$$

Таким образом, поток в ферромагнитном сердечнике в $20{,}4 \cdot 10^3/8 = 2550$ раз больше, чем в неферромагнитном.

Ферромагнитные материалы вводят в магнитную цепь также с целью сосредоточения магнитного поля в заданной области пространства и придания ему определенной конфигурации.

§ 14.11. Падение магнитного напряжения. *Падением магнитного напряжения* между точками a и b магнитной цепи называют линейный интеграл от напряженности магнитного поля между этими точками:

$$U_{\text{м}ab} = \int_a^b \vec{H}\, d\vec{l}. \qquad (14.6)$$

Если на этом участке $\vec{H}$ постоянна и совпадает по направлению с элементом пути $d\vec{l}$, то $\vec{H}\, d\vec{l} = H\, dl \cos 0°$ и H можно вывести из-под знака интеграла. Тогда

$$U_{\text{м}ab} = H \int_a^b dl = H l_{ab}, \qquad (14.6а)$$

где l_{ab} — длина пути между точками a и b.

Падение магнитного напряжения измеряют в амперах (А).

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками a и b может быть подразделен на n отдельных частей так, что для каждой части $H = H_k = \text{const}$, то

$$U_{\text{м}ab} = \sum_{k=1}^{n} H_k l_k. \qquad (14.7)$$

§ 14.12. Вебер-амперные характеристики. Под *вебер-амперной* (максвелл-амперной) *характеристикой* (в. а. х.) * понимают зависимость потока Ф по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке: $\Phi = f(U_\text{м})$.

Она играет такую же важную роль при расчетах и исследовании магнитных цепей, как и в. а. х. нелинейных сопротивлений при расчетах и исследовании электрических цепей с нелинейными сопротивлениями (см. гл. 13).

В. а. х. при расчетах магнитных цепей в готовом виде не задаются. Перед расчетом их нужно построить с помощью кривых намагничивания ферромагнитных материалов, входящих в магнитную цепь.

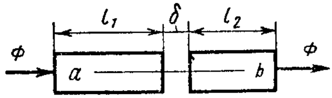


Рис. 14.10

§ 14.13. Построение вебер-амперных характеристик. На рис. 14.10 изображен участок магнитной цепи, по которому проходит поток Ф. Пусть участки l_1 и l_2 сечением S выполнены из ферромагнитного материала, кривая $B = f(H)$ для которого дана, например, на рис. 14.9. На участке длиной δ магнитный поток проходит по воздуху.

Требуется построить в. а. х. участка цепи между точками a и b.

При построении допустим, что: 1) магнитный поток вдоль всего участка от a до b постоянен (отсутствует рассеяние); сечение магнитного потока в воздушном зазоре такое же, как и на участках l_1 и l_2 (отсутствует боковой распор силовых линий в зазоре). В действитель-

* В гл. 14 (в отличие от гл. 13) под в. а. х. понимается вебер-амперная характеристика.

ности оба допущения справедливы лишь в известной мере и чем больше воздушный зазор, тем менее они справедливы.

Построение в. а. х. производим следующим образом. Задаемся рядом значений индукции B, например для электротехнических сталей значениями 0; 0,5; 0,8; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 Т, и для каждого значения B находим напряженности поля на всех участках (l_1, l_2 и δ).

На участках из ферромагнитного материала (участки l_1 и l_2) напряженность $H_1 = H_2$ (так как $B_1 = B_2$) находим по кривой намагничивания.

Для неферромагнитных участков (участок δ)

$$H_{\text{А/м}} = \frac{B_{\text{Т}}}{\mu_{0\ \text{Г/м}}} = \frac{B_{\text{Т}}}{1{,}256\cdot 10^{-6}\ _{\text{Г/м}}} = 0{,}8\cdot 10^6 B_{\text{Т}}.$$

Таким образом, для определения H (А/м) в воздухе следует умножить индукцию, выраженную в теслах, на коэффициент $0{,}8\cdot 10^6$.

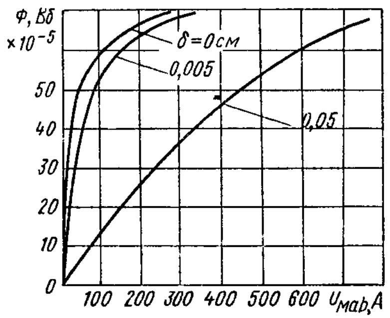


Рис. 14.11

Для каждого значения B определим поток $\Phi = BS$ и найдем

$$U_{\text{м}ab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta.$$

По результатам подсчетов строим кривую $\Phi = f(U_{\text{м}})$.

Пример 140. Построить в. а. х. для участка цепи рис. 14.10 при $\delta = 0$; 0,005; 0,05 см; $l_1 = 10$ см; $l_2 = 5$ см; $S = 5$ см^2.

Решение. Определим падение магнитного напряжения между точками a и b участка магнитной цепи рис. 14.10 при $\delta = 0{,}005$ см и $B = 0{,}5$ Т.

Из кривой рис. 14.9 находим, что индукции $B = 0{,}5$ Т соответствует напряженность поля $H = 40$ А/м.

Таким образом, при $B = 0{,}5$ Т $H_1 = H_2 = 40$ А/м.

По формуле $U_{\text{м}ab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta$ подсчитываем $U_{\text{м}ab} = 40\cdot 0{,}1 + 40\cdot 0{,}05 + 0{,}8\cdot 0{,}5\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^{-5} = 26$ А.

Значения $U_{\text{м}ab}$ при иных зазорах и индукциях находим аналогичным образом. Подсчеты сводим в табл. 14.1.

Таблица 14.1

B, Т	Ф, Вб·10^{-5}	$H_1 = H_2$ А/м	H_δ, А/м·10^5	$U_{\text{м}ab}$, А, при δ, см		
				0	0,005	0,05
0,5	25	40	4	6	26	206
0,8	40	130	6,4	19,5	51,5	339,5
1,0	50	300	8	45	85	445
1,1	55	440	8,8	66	110	506
1,2	60	700	9,6	105	153	585
1,3	65	1080	10,4	162	214	682
1,4	70	1800	11,2	270	326	830

По данным таблицы на рис. 14.11 построены в. а. х. при трех значениях δ. Из построений видно, что если участок, для которого строят в. а. х., не имеет «воздушного» включения, то в. а. х. круто поднимается вверх. При наличии воздушного включения в. а. х. спрямляется и идет более полого.

§ 14.14. Законы Кирхгофа для магнитных цепей. При расчетах магнитных цепей, как и электрических, используют первый и второй законы (правила) Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю*:

$$\sum \Phi = 0. \tag{14.8}$$

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей следует из принципа непрерывности магнитного потока, известного из курса физики (см. также § 21.8).

Второй закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме м. д. с. вдоль того же контура*:

$$\sum U_{м} = \sum Iw. \tag{14.9}$$

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей по сути дела есть иная форма записи закона полного тока.

Перед тем как для магнитной цепи записать уравнения по законам Кирхгофа, следует произвольно выбрать положительные направления потоков в ветвях магнитной цепи и положительные направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в сумму $\sum U_{м}$ со знаком плюс, если встречно ему, то со знаком минус.

Аналогично, если м. д. с. совпадает с направлением обхода, она входит в $\sum Iw$ со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

В качестве примера составим уравнения по законам Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи, изображенной на рис. 14.12.

Левую ветвь назовем первой, и все относящиеся к ней величины будут с индексом 1 (поток Φ_1, напряженность поля H_1, длина пути в стали l_1, длина воздушного зазора δ_1, м. д. с. I_1w_1).

Среднюю ветвь назовем второй, и все относящиеся к ней величины будут соответственно с индексом *2* (поток Φ_2, напряженность поля H_2, длина пути в стали l_2, длина воздушного зазора δ_2, м. д. с. I_2w_2).

Все величины, относящиеся к правой ветви, имеют индекс 3 (поток Φ_3, длина пути на вертикальном участке l'_3, суммарная длина пути на двух горизонтальных участках l''_3).

Произвольно выберем направление потоков в ветвях. Положим, что все потоки (Φ_1, Φ_2, Φ_3) направлены вверх (к узлу *a*). Число уравнений, которые следует составить по законам Кирхгофа, должно быть равно числу ветвей цепи (в рассматриваемом случае нужно составить три уравнения).

По первому закону Кирхгофа необходимо составить столько уравнений, сколько в цепи узлов без единицы (см. § 1.8).

В цепи рис. 14.12 два узла; следовательно, по первому закону Кирхгофа составим одно уравнение:

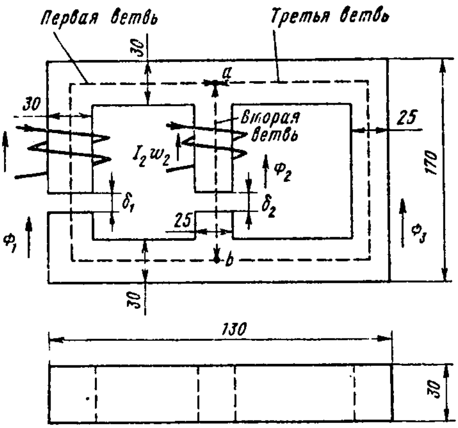


Рис. 14.12

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \qquad (а)$$

По второму закону Кирхгофа следует составить число уравнений, равное числу ветвей, за вычетом числа уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. В рассматриваемом примере по второму закону Кирхгофа составим $3 - 1 = 2$ уравнения.

Первое из этих уравнений составим для контура, образованного первой и второй ветвями, второе — для контура, образованного первой и третьей ветвями (для периферийного контура).

Перед составлением уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо выбрать положительное направление обхода контуров. Будем обходить контуры по часовой стрелке.

Уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями,

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 - H_2 l_2 - H_{\delta 2}\delta_2 = I_1 w_1 - I_2 w_2, \qquad (б)$$

где $H_{\delta 1}$ и $H_{\delta 2}$ — напряженности поля соответственно в воздушных зазорах δ_1 и δ_2.

В левую часть уравнения вошли слагаемые $H_1 l_1$ и $H_{\delta 1}\delta_1$ со знаком плюс, так как на первом участке поток Φ_1 направлен согласно с обходом контура; слагаемые $H_2 l_2$ и $H_{\delta 2}\delta_2$ — со знаком минус, так как поток Φ_2 направлен встречно обходу контура.

В правую часть уравнения м. д. с. $I_1 w_1$ вошла со знаком плюс, так как она направлена согласно с обходом контура, а м. д. с. $I_2 w_2$ — со знаком минус, так как она направлена встречно обходу контура.

Составим уравнение для периферийного контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 - H_3' l_3' - H_3 l_3 = I_1 w_1. \qquad (в)$$

Совместно решать три уравнения [(а), (б), (в)] с тремя неизвестными (Φ_1, Φ_2, Φ_3) не будем, так как в § 14.18 дается решение рассматриваемой задачи более совершенным методом, чем метод на основе законов Кирхгофа, — методом двух узлов.

§ 14.15. Применение к магнитным цепям всех методов, используемых для расчета электрических цепей с НС. В гл. 13 подробно обсуждались различные приемы расчета электрических цепей с НС. Все эти методы полностью применимы и к расчету магнитных цепей, так как и магнитные и электрические цепи подчиняются одним и тем же законам — законам Кирхгофа.

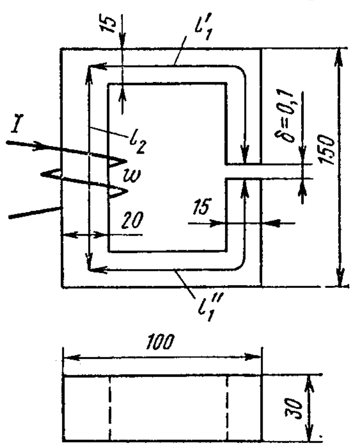


Рис. 14.13

Аналогом тока в электрической цепи является поток в магнитной цепи, аналогом э. д. с. — м. д. с. Аналогом вольт-амперной характеристики нелинейного сопротивления — вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи.

§ 14.16. Определение м. д. с. неразветвленной магнитной цепи по заданному потоку. Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти м. д. с., ток или число витков намагничивающей обмотки.

Расчет проводим в такой последовательности:

1) разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины l_k (м) и площади поперечного сечения S_k (м^2) участков (длины участков берем по средней силовой линии);

2) исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям S_k находим магнитные индукции на каждом участке:

$$B_k = \Phi/S_k;$$

3) по кривой намагничивания определяем напряженности поля H_k для ферромагнитных участков магнитной цепи; напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_{\text{А/м}} = 0{,}8 \cdot 10^6 B_{\text{Т}}; \qquad (14.10)$$

4) подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока приравниваем эту сумму полному току Iw:

$$\sum H_k l_k = Iw.$$

Основным допущением при расчете является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагаем неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается, минуя основной путь. Например, для магнитной цепи рис. 14.6 поток, выйдя из левого сердечника, в основном направляется по пути *macbn*, но небольшая часть потока идет по воздуху по пути *mqn*.

Поток, который замыкается, минуя основной путь, называют *потоком рассеяния*. При малом воздушном зазоре поток рассеяния относительно мал; с увеличением воздушного зазора поток рассеяния может стать соизмеримым с основным потоком.

Пример 141. Геометрические размеры магнитной цепи даны на рис. 14.13 в миллиметрах; кривая намагничивания показана на рис. 14.9. Какой ток должен протекать по обмотке с числом витков $w=500$, чтобы магнитная индукция в воздушном зазоре $B_\delta = 1$ Т.

Решение. Магнитную цепь разбиваем на три участка: $l_1 = l_1' + l_1'' = 30$ см; $S_1 = 4{,}5$ см^2; $l_2 = 13{,}5$ см; $S_2 = 6$ см^2.

Воздушный зазор $\delta = 0{,}01$ см; $S_\delta = S_1 = 4{,}5$ см^2. Индукция $B_1 = B_\delta = 1$ Т.

Индукцию на участке l_2 найдем, разделив поток $\Phi = B_\delta S_\delta$ на сечение S_2 второго участка:

$$B_2 = \Phi/S_2 = B_\delta S_\delta / S_2 = 1 \cdot 4{,}5/6 = 0{,}75 \text{ Т}.$$

Напряженности поля на участках l_1 и l_2 определяем согласно кривой намагничивания (см. рис. 14.9) по известным значениям B_1 и B_2:

$$H_1 = 300 \text{ А/м}; \quad H_2 = 115 \text{ А/м}.$$

Напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 8 \cdot 10^5 \text{ А/м}.$$

Подсчитываем падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи:

$$\sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta =$$
$$= 300 \cdot 0{,}3 + 115 \cdot 0{,}135 + 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 185{,}6 \text{ А}.$$

Ток в обмотке

$$I = \sum H_k l_k / w = 185{,}6/500 = 0{,}371 \text{ А}.$$

§ 14.17. Определение потока в неразветвленной магнитной цепи по заданной м. д. с. Заданы геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания и полный ток. Определить поток.

Для решения задачи необходимо построить зависимость потока в функции от $\sum H_k l_k$ и на ней найти рабочую точку.

Пример 142. Найти магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи примера 141, если $Iw = 350$ А.

Таблица 14.2

B_δ, Т	B_1, Т	B_2, Т	H_δ, А/м·10^5	H_1, А/м	H_2, А/м	$\sum H_k l_k$, А	Ф, Вб·10^{-5}
0,5	0,5	0,375	4	50	25	58,3	22,5
1,1	1,1	0,825	8,8	460	150	246,3	49,5
1,2	1,2	0,9	9,6	700	200	333	54
1,3	1,3	0,975	10,4	1020	300	450,5	58,5

Решение. Задаемся значениями $B_\delta = 0{,}5$; 1,1; 1,2 и 1,3 Т и для каждого из них подсчитываем $\sum H_k l_k$ так же, как в предыдущей задаче. Подсчеты сводим в табл. 4.2.

По данным табл. 14.2 строим зависимость $\Phi = f\left(\sum H_k l_k\right)$ (рис. 14.14) и по ней находим, что при $Iw = 350$ А $\Phi = 55 \cdot 10^{-5}$ Вб.

Следовательно, $B_\delta = \Phi / S_\delta = 55 \cdot 10^{-5} / 4{,}5 \cdot 10^{-4} = 1{,}21$ Т.

§ 14.18. Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов. Ранее отмечалось, что для расчета разветвленных магнитных цепей применимы все методы, которые обсуждались в гл. 13.

Рассмотрим расчет разветвленной магнитной цепи (см. рис. 14.12) методом двух узлов.

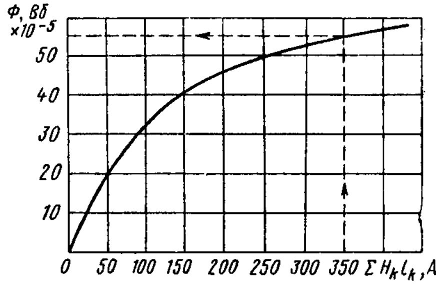


Рис. 14.14

Пример 143. Задано: геометрические размеры в миллиметрах; кривая намагничивания рис. 14.9; $I_1 w_1 = 80$ А; $I_2 w_2 = 300$ А; $\delta_1 = 0{,}05$ мм, $\delta_2 = 0{,}22$ мм. Найти магнитные потоки в ветвях магнитной цепи.

Решение. Как и в схеме рис. 13.7, узловые точки обозначим буквами a и b. Выберем положительные направления потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3 к узлу a. Построим зависимость потока Φ_1 от падения магнитного напряжения первой ветви $U_{м1}$. Для этого произвольно задаемся рядом числовых значений B_1, для каждого значения B_1 по кривой намагничивания находим напряженность H_1 на пути в стали по первой ветви.

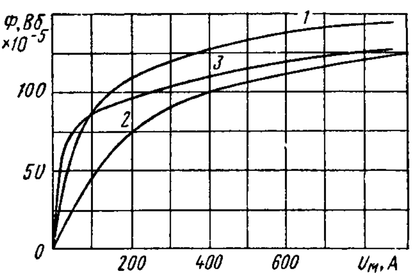


Рис. 14.15

Падение магнитного напряжения на первом участке $U_{м1} = H_1 l_1 + 0{,}8 \cdot 10^6 B_1 \delta_1$, где $l_1 = 0{,}24$ м — длина пути в стали по первой ветви. Выбранному значению B_1 соответствует $\Phi_1 = B_1 S_1$.

Таким образом, для каждого значения потока Φ_1 подсчитываем $U_{м1}$ и по точкам строим зависимость $\Phi_1 = f(U_{м1})$ — кривая *1* рис. 14.15.

Аналогично строим зависимость $\Phi_2 = f(U_{м2})$ — кривая *2* рис. 14.15; $U_{м2} = H_2 l_2 + 0{,}8 \cdot 10^6 B_2 \delta_2$, где $l_2 = 0{,}138$ м — длина пути в стали во второй ветви.

Кривая *3* есть зависимость $\Phi_3 = f(U_{m3})$; $U_{m3} = H_3' l_3' + H_3'' l_3''$, где $l_3' \approx 0{,}1$ и $l_3'' \approx 0{,}14$ м. Им соответствуют участки третьей ветви, имеющие сечения 9 и 7,5 см².

Магнитная цепь рис. 14.12 формально аналогична нелинейной электрической цепи рис. 13.7. Аналогами I_1 и I_2 электрической цепи рис. 13.7 являются магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 магнитной цепи рис. 14.12. Аналогом э. д. с. E_1 является м. д. с. $I_1 w_1$. Аналогом зависимости тока в первой ветви от падения напряжения на сопротивлении первой ветви $[I_1 = f(U_1)]$ является зависимость магнитного потока Φ_1 в первой ветви магнитной цепи от падения магнитного напряжения $U_{м1}$ вдоль первой ветви $[\Phi_1 = f(U_{м1})]$ и т. д.

Воспользуемся аналогией для определения потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3. С этой целью выполним графические построения, подобные построениям на рис. 13.10.

Вспомним, что кривые рис. 13.10 представляют собой зависимости токов в ветвях схемы не от падений напряжений (U_1, U_2, U_3) вдоль этих ветвей, а от напряжения U_{ab} между двумя узлами (a и b) схемы рис. 13.7.

В соответствии с этим введем в расчет *магнитное напряжение* — разность магнитных потенциалов — между узлами a и b: $U_{мab} = \varphi_{мa} - \varphi_{мb}$.

Выразим магнитный потенциал точки a ($\varphi_{мa}$) через магнитный потенциал точки b ($\varphi_{мb}$), следуя от точки b к точке a сначала по первой ветви, затем по второй и, наконец, по третьей. Для первой ветви

$$\varphi_{мa} = \varphi_{мb} - (H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1) + I_1 w_1.$$

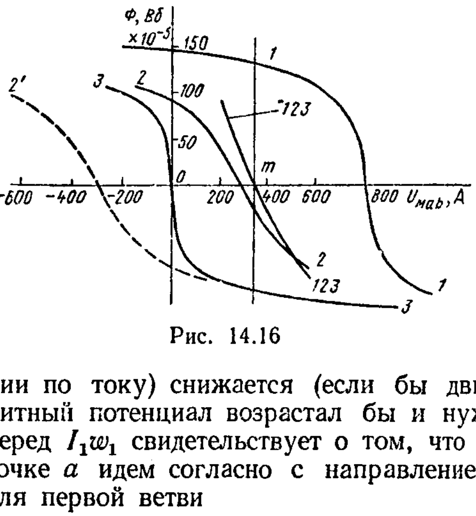


Рис. 14.16

Здесь $H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 = U_{м1}$ — падение магнитного напряжения по первой ветви. Знак минус перед скобкой обусловлен тем, что при перемещении согласно с направлением потока магнитный потенциал (как и электрический при перемещении по току) снижается (если бы двигались против потока, то магнитный потенциал возрастал бы и нужно было ставить плюс). Плюс перед $I_1 w_1$ свидетельствует о том, что при перемещении от точки b к точке a идем согласно с направлением м. д. с. $I_1 w_1$. Таким образом, для первой ветви

$$U_{мab} = \varphi_{мa} - \varphi_{мb} = -U_{м1} + I_1 w_1; \quad \text{(а)}$$

для второй ветви (перемещаясь от b к a по потоку Φ_2 и согласно с направлением м. д. с. $I_2 w_2$)

$$U_{мab} = -U_{м2} + I_2 w_2; \quad \text{(б)}$$

для третьей ветви (на ней м. д. с. отсутствует)

$$U_{мab} = -U_{м3}. \quad \text{(в)}$$

Графическое решение задачи приведено на рис. 14.16. На нем зависимость $\Phi_1 = f(U_{мab})$ представлена кривой 1, $\Phi_2 = f(U_{мab})$ — кривой 2; $\Phi_3 = f(U_{\text{м}ab})$ — кривой 3. Построение их производилось так же, как и построение соответствующих кривых рис. 13.10. Начало кривой 1 смещено в точку $U_{\text{м}ab} = I_1 w_1 = 800$ А; начало кривой 2 — в точку $U_{\text{м}ab} = I_2 w_2 = 300$ А. Кривая 123 представляет собой $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{\text{м}ab})$. Она пересекает ось абсцисс в точке m. Проведем через точку m вертикаль и найдем потоки в ветвях:

$$\Phi_1 = 126{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ Вб};$$

$$\Phi_2 = -25 \cdot 10^{-5} \text{ Вб};$$

$$\Phi_3 = -101{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}.$$

В результате расчета потоки Φ_2 и Φ_3 оказались отрицательными. Это означает, что в действительности они направлены противоположно положительным для них направлениям, показанным стрелками на рис. 14.12.

Рассмотрим, какие изменения произошли бы в построениях на рис. 14.16, если бы какая-либо из м. д. с. изменила направление на противоположное, например в результате изменения направления протекания тока в этой обмотке. Допустим, что изменилось на противоположное направление м. д. с. $I_2 w_2$. В уравнение (б) м. д. с. $I_2 w_2$ вошла бы теперь с отрицательным знаком. При построениях это нашло бы свое отражение в том, что кривая 2 рис. 14.16 переместилась влево параллельно самой себе так, что пересекла бы ось абсцисс не в точке $U_{\text{м}ab} = 300$ А, а в точке $U_{\text{м}ab} = -300$ А (см. пунктирную кривую 2′ на рис. 14.12). Кривые 1 и 3 останутся без изменений, но суммарная кривая $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{\text{м}ab})$ будет иная.

§ 14.19. Дополнительные замечания к расчету магнитных цепей. 1. При построении вебер-амперных характеристик участков магнитной цепи в § 14.12 и далее явление гистерезиса не учитывалось. Поэтому в. а. х. исходили из начала координат, не зависели от предыстории и им соответствовало соотношение $\Phi(-U_{\text{м}}) = -\Phi(U_{\text{м}})$. Если учитывать гистерезис, то у в. а. х. каждой ветви будут неодинаковые восходящий и нисходящий участки, которые в свою очередь зависят от магнитного состояния, предшествующего рассматриваемому (от магнитной предыстории). В этом случае $\Phi(-U_{\text{м}}) \neq -\Phi(U_{\text{м}})$. Для получения более правильных результатов при построении в. а. х. следует учитывать гистерезис, что практически возможно, если известны гистерезисные зависимости используемого материала.

2. В логических устройствах и устройствах, применяемых в вычислительной технике, используют элементы, имеющие разветвленные магнитные цепи, выполненные из феррита с почти прямоугольной петлей гистерезиса (трансфлюксоры, биаксы, леддики и др.).

Изложенную в § 14.18 методику расчета, если ее несколько видоизменить, можно применить и к определению потокораспределения в упомянутых элементах при установившихся режимах работы. В этих случаях расчет следует начинать с определения положения узлов магнитной цепи этого элемента (в них узлы, как правило, выражены в неявном виде). Затем каждую ветвь следует представить как две параллельные со своими длинами и рассматривать последние как самостоятельные ветви со своими потоками. Это необходимо потому, что магнитные потоки в двух параллельных участках каждой ветви могут замыкаться по различным путям, т. е. ведут себя по-разному. Так, например, магнитные потоки двух параллельных участков при определенных условиях могут замыкаться в пределах одной ветви. Сам расчет выполняют в принципе так же, как и в § 14.18. Однако вебер-амперные характеристики каждого участка должны быть взяты в виде прямоугольной (ромбовидной) петли с исходящими из двух ее противоположных углов горизонтальными (почти горизонтальными) прямыми. Для каждого сочетания м. д. с. (они могут и отсутствовать) будет по крайней мере по два решения в соответствии с тем, что в. а. х. имеют петлевую форму.

3. Если число узлов магнитной цепи больше двух, то потокораспределение в ней можно найти методом постепенного приведения к магнитной цепи с двумя узлами. Так, в трехотверстном трансфлюксоре рис. 14.17 цифры в кружках *1*, *2*, *3* означают узлы. Восемь тонких линий — это средние магнитные линии ветвей. Стрелки на них указывают произвольно выбранные направления потоков. Провода с токами I_1 и I_2 проходят через отверстия трансфлюксора.

Сначала строим зависимость суммы потоков ветвей *5* и *6* от магнитного напряжения между узлами *3* и *2*, учитывая ток I_2. Затем строим зависимость $\Phi_{4,7} = f(U_{м21})$. Имея в виду, что $\Phi_{5,6} = \Phi_{4,7}$, суммируем абсциссы полученных кривых и находим $\Phi_{5,6} = f(U_{м31})$.

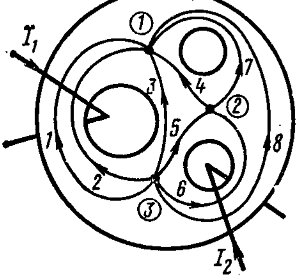


Рис. 14.17

После этого задача оказывается сведенной к задаче с двумя узлами *1* и *2*. В более сложных задачах можно воспользоваться методом, рассмотренным в [21].

4. Уместно отметить, что методика расчета разветвленных магнитных цепей в историческом плане развивалась постепенно в полном соответствии с законом отрицания отрицания.

Сначала расчет проводили, используя магнитные сопротивления участков магнитной цепи $R_м$ (см. § 14.23). Однако ввиду того что $R_м$ является нелинейной функцией магнитного потока, который перед проведением расчета неизвестен, на второй стадии перешли к расчету магнитных цепей с использованием однозначных нелинейных вебер-амперных характеристик (см. § 14.13). Впоследствии появилась необходимость использовать петлевые зависимости потоков от магнитных напряжений (см. § 14.19). В настоящее время при расчете магнитных цепей, работающих при больших скоростях перемагничивания, оказывается необходимым учитывать зависимость магнитного состояния не только от предыстории, но и от скорости изменения потоков для учета магнитной вязкости (см. § 16.8) и условий проникновения электромагнитной волны в ферромагнетик.

§ 14.20. Получение постоянного магнита. Возьмем замкнутый кольцевой сердечник из магнитнотвердого материала. Сделаем в нем

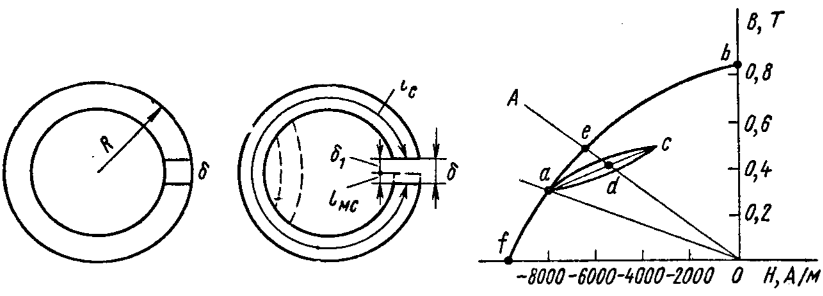


Рис. 14.18

два очень тонких (бесконечно тонких) радиальных пропила на расстоянии δ (рис. 14.18, *а*). Выпиленный кусок оставим пока на месте. Затем намотаем на сердечник обмотку и пропустим по ней ток такой величины, чтобы намагнитить сердечник до насыщения. После этого ток выключим и обмотку смотаем. Сердечник оказывается намагниченным. Намагниченность его есть следствие того, что магнитные моменты областей самопроизвольного намагничивания сохранили свою ориентацию, вызванную предшествующим воздействием внешнего поля.

Магнитный поток в теле сердечника определяется суммой магнитных моментов всего сердечника. Вынем выпиленный кусок (рис. 14.18, *б*). Объём намагниченного вещества уменьшится на объем вынутой части. Кроме того, магнитному потоку придется проходить через воздушный зазор. Все это приведет к уменьшению магнитного потока в теле сердечника.

В воздушном зазоре сердечника при отсутствии на нем обмотки с током проходит магнитный поток — устройство представляет собой постоянный магнит.

§ 14.21. Расчет магнитной цепи постоянного магнита. Величина магнитной индукции в зазоре магнита (B_δ) зависит от соотношения между длиной воздушного зазора δ и длиной ферромагнитной части магнита l_c (рис. 14.18, *б*). Обозначим: H_δ — напряженность поля в воздушном зазоре; B_c — магнитная индукция в теле магнита; H_c — напряженность магнитного поля в теле магнита.

Найдем две неизвестные величины B_c и H_c, полагая известными кривую размагничивания ферромагнитного материала, зазор δ и длину l_c. Одна связь между ними (нелинейная) дается кривой размагничивания (рис. 14.18, *в*). Другая связь (линейная) следует из закона полного тока.

Действительно, если воспользоваться законом полного тока, то можно записать

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = H_c l_c + H_\delta \delta = 0. \qquad (14.11)$$

Нуль в правой части уравнения (14.11) объясняется тем, что на постоянном магните нет обмотки с током. Но $H_{\delta(\text{А/м})} = 0{,}8 \cdot 10^6 \, B_{\delta(T)}$.

Если зазор достаточно мал, то можно в первом приближении принять, что рассеяние потока отсутствует и $B_c S_c = B_\delta S_\delta$, где S_c — площадь поперечного сечения магнита; S_δ — площадь поперечного сечения воздушного зазора. Отсюда

$$B_\delta = B_c \frac{S_c}{S_\delta}; \quad H_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \frac{S_c}{S_\delta} B_c.$$

Подставив H_δ в уравнение (14.11), получим

$$H_{c(\text{А/м})} = -N B_{c(T)}, \qquad (14.12)$$

где

$$N = 0{,}8 \cdot 10^6 \frac{\delta}{l_c} \frac{S_c}{S_\delta}. \qquad (14.13)$$

Коэффициент N, зависящий от геометрических размеров, называют *размагничивающим фактором* *: $[N] = A \cdot \text{м}/(\text{В} \cdot c)$.

* Название коэффициента N подчеркивает, что с его помощью можно определить то размагничивание (уменьшение магнитного потока в теле магнита), которое происходит при введении воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита.

Для определения H_c и B_c на рис. 14.18, *в* следует нанести прямую, построенную по (14.12). В точке пересечения прямой с кривой размагничивания удовлетворяются обе связи между B_c и H_c, которым должно быть подчинено решение.

Приведенный расчет даст достаточно точный результат, если зазор δ очень мал по сравнению с длиной l. Если это условие не выполнено, то значительная часть магнитных силовых линий замыкается, как показано пунктиром на рис. 14.18, *б*. В этом случае поток, индукция и напряженность вдоль сердечника изменяются. Это учитывают при расчете, вводя некоторые поправочные коэффициенты, определяемые из опыта.

Пример 144. Найти B_c, B_δ, H_c и H_δ, если постоянный магнит (рис. 14.18, *б*) имеет $R=5$ см; $\delta=1$ см. Кривая размагничивания изображена на рис. 14.18, *в*.

Решение. Если пренебречь боковым распором магнитных силовых линий в зазоре, то $S_\delta=S_c$. При этом размагничивающий фактор $N=0{,}8\cdot\frac{10^6}{2\pi\cdot5-1}=263\cdot10^2$. На рис. 14.18, *в* проводим прямую Oa по уравнению $H_c=-263\cdot10^2\cdot B_c$.

Точка a ее пересечения с кривой размагничивания дает $B_c=0{,}3$ T. Такая же индукция будет в воздушном зазоре. Напряженность поля в теле магнита $H_c=-8000$ A/м. Напряженность поля в воздушном зазоре $H_\delta=0{,}8\cdot10^6\cdot0{,}3=24\cdot10^4$ (А/м).

§ 14.22. Прямая и коэффициент возврата. Частично заполним зазор δ на длине $l_{м.с}$ (рис. 14.18, *б*) куском магнитномягкого материала. Под действием поля постоянного магнита внесенный кусок намагнитится и поток в теле магнита возрастет.

Ввиду наличия гистерезиса магнитное состояние постоянного магнита будет изменяться не по участку ab (рис. 14.18, *в*) кривой размагничивания, а по нижней ветви adc частного цикла.

Для упрощения расчетов принято заменять частный цикл прямой линией, соединяющей его вершины. Эту прямую линию называют *прямой возврата*.

Тангенс угла наклона прямой возврата к оси абсцисс называют *коэффициентом возврата*. Его числовые значения для различных магнитнотвердых материалов даются в руководствах по постоянным магнитам.

Обозначим длину оставшегося воздушного зазора (рис. 14.18, *б*) $\delta_1=\delta-l_{м.с}$ и на основании закона полного тока запишем

$$H_c l_c+H_{\delta1}\delta_1+l_{м.с}H_{м.с}=0.$$

Напряженность поля в магнитномягком материале $H_{м.с}$ много меньше напряженности поля в магнитнотвердом материале и в воздушном зазоре при одном и том же значении магнитной индукции, поэтому слагаемым $H_{м.с}l_{м.с}$ пренебрегаем по сравнению с остальными. При этом

$$H_{c\,(A/м)}=-0{,}8\cdot10^6\,\frac{\delta_1}{l_c}\,\frac{S_c}{S_\delta}\,B_{c\,(T)}. \qquad (14.12')$$

Магнитное состояние постоянного магнита определяется пересечением прямой возврата с прямой, построенной по (14.12').

Пример 145. Воздушный зазор магнита примера 144 уменьшен вдвое. Найти индукцию в нем.

Решение. Находим $N=131{,}5\cdot 10^2$. Прямая OA (рис. 14.18, *в*) пересекается с прямой возврата в точке d. Поэтому $B_c=0{,}42$ Т. Такая же индукция будет и в воздушном зазоре, так как $S_\delta=S_c$.

Следовательно, уменьшение зазора со значения δ до δ_1 привело к увеличению магнитной индукции в нем с 0,3 до 0,42 Т.

Если же величину зазора δ_1 получить не путем его уменьшения со значения δ до δ_1, как в предыдущем примере, а путем выемки из намагниченного сердечника куска длиной δ_1, то магнитное состояние магнита определится пересечением луча OA с кривой размагничивания baf в точке e. В этом случае $B_c=B_\delta=0{,}48$ Т, т. е. возрастет по сравнению с магнитной индукцией примера 145 на $\frac{0{,}48-0{,}4}{0{,}4}\times$ $\times 100=20\%$.

Таким образом, магнитный поток в постоянном магните зависит не только от величины воздушного зазора, но и от предыстории установления этого зазора.

§ 14.23. Магнитное сопротивление и магнитная проводимость участка магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи. По определению, падение магнитного напряжения $U_м=Hl$, но

$$H=B/(\mu_0\mu)=\Phi/(\mu_0\mu S),$$

где Φ — поток; S — поперечное сечение участка.

Следовательно,

$$U_м=\Phi\frac{l}{\mu_0\mu S}=\Phi R_м; \tag{14.14}$$

откуда

$$R_м=l/(\mu_0\mu S). \tag{14.15}$$

Уравнение (14.14) называют *законом Ома для магнитной цепи*. Это уравнение устанавливает связь между *падением* магнитного напряжения $U_м$ и потоком Φ; $R_м$ называют *магнитным сопротивлением участка магнитной цепи*. Обратную величину магнитного сопротивления называют *магнитной проводимостью*:

$$G_м=1/R_м=\mu_0\mu S/l. \tag{14.16}$$

Из предыдущего известно, что вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи в общем случае нелинейна. Следовательно, в общем случае $R_м$ и $G_м$ являются функциями магнитного потока (непостоянными величинами). Поэтому практически понятиями $R_м$ и $G_м$, при расчетах пользуются лишь в тех случаях, когда магнитная цепь в целом или ее участок, для которых определяются $R_м$ и $G_м$, не насыщены. Чаще всего это бывает, когда в магнитной цепи имеется достаточно большой воздушный зазор, спрямляющий вебер-амперную характеристику магнитной цепи в целом или ее участка.

Магнитное сопротивление участка цепи $R_м$ можно сопоставить со статическим сопротивлением нелинейного сопротивления $R_{ст}$ (см. § 13.10) и так же, как последнее, $R_м$ можно использовать при качественном рассмотрении различных вопросов, например вопроса об изменении потоков двух параллельных ветвей при изменении потока в неразветвленной части магнитной цепи (как в § 13.2 по отношению к электрической цепи).

Пример 146. Найти $R_м$ воздушного зазора постоянного магнита и магнитный поток, если $\delta = 0{,}5$ см, площадь поперечного сечения воздушного зазора $S = 1{,}5$ см^2, $U_м = 1920$ А.

Решение.

$$R_м = \frac{l}{\mu_0\mu S} = \frac{5\cdot 10^{-3}\ (\text{м})}{1{,}256\cdot 10^{-6}\ (\text{Г/м})\cdot 1\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\ (\text{м}^2)} = 0{,}256\cdot 10^{8}\ (\text{Г}^{-1});$$

$$\Phi = U_м/R_м = 1920/0{,}256\cdot 10^{8} = 7230\cdot 10^{-8}\ (\text{Вб}).$$

§ 14.24. Пояснения к формуле $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$. Контур с током i, охватывающий площадку ΔS, создает магнитный момент $\vec{M} = i\Delta\vec{S}$ (рис. 14.19, *а*). Вектор $\Delta\vec{S}$ численно равен площади ΔS, а положительное направление $\Delta\vec{S}$ связано с положительным направлением тока правилом правого винта.

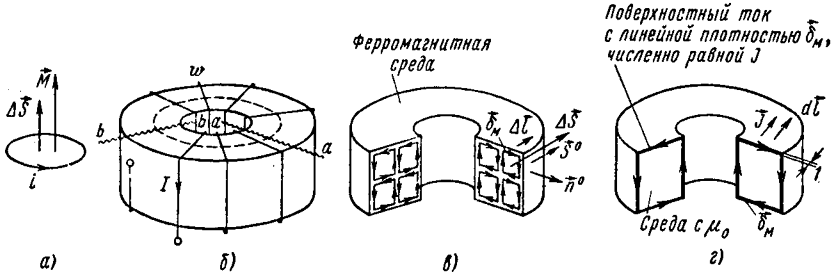


Рис. 14.19

Ферромагнитный кольцевой сердечник (рис. 14.19, *б*) имеет обмотку с числом витков w, по которой проходит ток I. Каждая единица объема ферромагнитного материала обладает некоторым вектором намагниченности $\vec{J}$, что при расчете можно рассматривать как результат наличия в ферромагнитном материале контуров с молекулярными токами. Эти токи показаны в сечениях сердечника на рис. 14.19, *в* (намагничивающая обмотка с током I не показана).

Среднюю линейную плотность молекулярного тока (А/см), приходящегося на единицу длины сердечника в направлении $\Delta\vec{l}$, обозначим $\vec{\delta}_м$. Единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением $\vec{\delta}_м$, обозначим $\vec{n}^0$. Молекулярный ток $\vec{\delta}_м\Delta l\vec{n}^0$ охватывает площадку ΔS. Положительное направление вектора $\Delta\vec{S} = \Delta S\vec{S}^0$ связано с положительным направлением этого тока правилом правого винта. Через $\vec{S}^0$ обозначен единичный вектор по направлению $\Delta\vec{S}$.

По определению, намагниченность $\vec{J}$ представляет собой магнитный момент единицы объема вещества. Среднюю по объему намагниченность вещества $\vec{J}$ можно определить путем деления магнитного момента контура с током $\vec{\delta}_м\Delta l\vec{n}^0$, охватывающим площадку ΔS, на объем $\Delta V = \Delta l\Delta S$:

$$\vec{J} = \frac{\delta_м\Delta l\Delta S}{\Delta l\Delta S}\vec{S}^0 = \delta_м\vec{S}^0.$$

Следовательно, *средняя по объему намагниченность* $\vec{J}$ *численно равна средней линейной плотности молекулярного тока и направлена по* $\vec{S}^{\circ}$.

Как видно из рис. 14.19, *в*, на участках, являющихся смежными между соседними контурами, молекулярные токи направлены встречно и взаимно компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только токи по периферийному контуру (рис. 14.19, *г*).

Итак, наличие областей самопроизвольной намагниченности в ферромагнитном теле при расчете можно эквивалентировать протеканием по поверхности этого тела, считая его неферромагнитным, поверхностного тока с линейной плотностью $\vec{\delta}_м$, причем по модулю $\delta_м = J$.

Запишем уравнение по закону полного тока для контура, показанного пунктиром на рис. 14.19, *б*. При этом учтем, что после введения поверхностного тока сердечник станет неферромагнитным и будет намагничиваться не только током I, протекающим по обмотке с числом витков w, но и поверхностным током с линейной плотностью $\vec{\delta}_м$.

На длине dl поверхностный ток равен $\delta_м dl = \vec{J}\, d\vec{l}$. На длине всего сердечника поверхностный ток равен $\oint \vec{J}\, d\vec{l}$. Таким образом,

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0}\, d\vec{l} = Iw + \oint \vec{J}\, d\vec{l}.$$

Отсюда

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) d\vec{l} = Iw.$$

Величину $\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ обозначают $\vec{H}$ и называют *напряженностью магнитного поля*. В отличие от магнитной индукции $\vec{B}$ и намагниченности $\vec{J}$ напряженность поля $\vec{H}$ не зависит от магнитных свойств намагничиваемого тела. Это и явилось основанием для того, чтобы закон полного тока для любых сред записывать в виде $\oint \vec{H}\, d\vec{l} = Iw$.

Если ферромагнитное тело намагничено неравномерно по высоте и по толщине, то плотность молекулярных токов смежных контуров на рис. 14.19, *в* неодинакова, а токи на смежных между соседними контурами участках компенсируются неполностью. Отсюда следует, что неравномерно намагниченное ферромагнитное тело при расчете можно заменить таким же в геометрическом смысле неферромагнитным телом, по поверхности которого течет поверхностный ток, плотность которого изменяется по высоте тела, а во внутренних точках тела течет объемный ток, плотность которого также изменяется от точки к точке.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$, Φ, $\mu_а$, μ_0, μ, $R_м$. Как они связаны между собой и в каких единицах измеряются? 2. В чем отличие начальной, основной и безгистерезисной кривых намагничивания? 3. Что понимают под частным и предельным циклами, остаточной индукцией, коэрцитивной силой, магнитномягкими и магнитнотвердыми материалами? 4. Дайте определение понятиям «м. д. с.», «магнитная цепь», «магнитопровод». 5. Как определить направление м. д. с.? 6. С какой целью обычно стремятся выполнить магнитную цепь с возможно меньшим воздушным зазором? 7. Как выбирают направление магнитных потоков в ветвях? 8. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа для магнитных цепей. 9. Перечислите этапы расчета цепей методом двух узлов. 10. В чем отличие магнитного напряжения от падения магнитного напряжения? 11. Как экспериментально получить постоянный магнит? 12. Как рассчитывается магнитная цепь с постоянным магнитом? 13. Могут ли $\vec{B}$ и $\vec{H}$ в ферромагнитном материале быть направлены встречно? 14. Решите задачи 3.2; 3.10; 3.13; 3.15; 3.19.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 15.1. Подразделение нелинейных сопротивлений на три основные группы. *Нелинейными электрическими цепями переменного тока* называют электрические цепи переменного тока, в состав которых входит одно или несколько нелинейных сопротивлений.

Как известно из ч. I учебника, прохождению переменного тока оказывают сопротивление не только активные сопротивления, но и индуктивности и емкости. В соответствии с этим нелинейные сопротивления для переменного тока можно подразделить на три группы: 1) активные, 2) индуктивные и 3) емкостные. Каждую из этих групп можно подразделить на управляемые и неуправляемые.

Управляемые нелинейные сопротивления обычно имеют один или несколько управляющих электродов (зажимов) или управляющих обмоток, включаемых в управляющую цепь (цепи), воздействуя на ток или напряжение которых можно управлять величиной сопротивления в главной цепи. При отсутствии специальных управляющих электродов или обмоток управляющий ток или напряжение могут воздействовать на нелинейное сопротивление через электроды или обмотки главной цепи.

§ 15.2. Общая характеристика нелинейных активных сопротивлений. Широкое распространение в качестве управляемых нелинейных активных сопротивлений получили трех-(и более) электродные лампы, транзисторы и тиристоры. Свойства, принцип работы, характеристики и применение их рассмотрены в § 15.27 — 15.43.

Неуправляемыми нелинейными активными сопротивлениями являются электрическая дуга, германиевые и кремниевые выпрямители, тиритовые сопротивления, термисторы, бареттеры, лампы накаливания и др. Их основные свойства и вольт-амперные характеристики обсуждались в гл. 13.

Нелинейные активные сопротивления можно классифицировать также по степени влияния температуры нагрева сопротивления, обусловленной протекающим по сопротивлению током, на форму вольт-амперной характеристики.

Так как тепловые процессы (процессы нагрева и остывания) являются процессами инерционными, то сопротивления, нелинейность в. а. х. которых в основном обусловлена изменением температуры в результате нагрева протекающим через сопротивления током, принято называть *инерционными*.

Сопротивления, нелинейность в. а. х. которых обусловлена иными (не тепловыми) процессами, принято называть *безынерционными* или почти безынерционными.

К группе инерционных сопротивлений относятся электрические лампы накаливания, термистор, бареттеры; к группе безынерционных или почти безынерционных сопротивлений — электронные лампы, полупроводниковые диоды и транзисторы.

Если постоянная времени нагрева инерционного сопротивления много больше периода переменного тока, то величина сопротивления за период переменного тока практически не меняется, так как она определяется не мгновенным, а действующим значением переменного тока. Если к нелинейному инерционному сопротивлению подвести синусоидальное напряжение (при условии, что постоянная времени нагрева сопротивления значительно больше периода синусоидального напряжения), то ток через него будет практически синусоидальным.

Можно сказать, что инерционные нелинейные сопротивления занимают промежуточное положение между линейными и нелинейными сопротивлениями. К нелинейным они тяготеют вследствие того, что сопротивление их является функцией действующего значения тока; к линейным — потому, что в установившемся режиме работы их сопротивления для различных моментов времени внутри периода воздействующей на схему э. д. с. остаются практически неизменными.

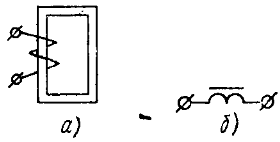


Рис. 15.1

§ 15.3. Общая характеристика нелинейных индуктивных сопротивлений. Под нелинейными индуктивными сопротивлениями, или нелинейными индуктивностями, понимают индуктивные катушки с обмотками, намотанными на замкнутые сердечники из ферромагнитного материала, для которых зависимость магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке тока нелинейна. Индуктивное сопротивление таких катушек, оказываемое прохождению переменного тока, непостоянно; оно зависит от величины переменного тока.

Индуктивную катушку со стальным сердечником называют иногда дросселем со стальным сердечником.

Нелинейные индуктивности подразделяют на управляемые и неуправляемые, но деление на безынерционные и инерционные на них не распространяется, так как их нелинейность обусловлена свойствами ферромагнитного материала, а не тепловым эффектом.

На электрических схемах нелинейную индуктивность изображают либо в виде замкнутого сердечника с обмоткой, как на рис. 15.1, *а*, либо в соответствии с рис. 15.1, *б*.

Сердечники нелинейных индуктивностей при относительно низких частотах делают обычно двух типов: пакетные и спиральные.

Пакетные сердечники состоят из тонких пластин ферромагнитного материала кольцевой, П- или Ш-образной формы.

Спиральные сердечники изготовляют из тонкой ферромагнитной ленты, по форме в виде туго навитой часовой пружины.

Пластины пакетного и отдельные витки спирального сердечников изолируют друг от друга эмалевым лаком, жидким стеклом или каким-либо иным изолирующим составом и запекают. Изоляция необходима для уменьшения потерь энергии в сердечнике от вихревых токов (см. § 15.4).

При высоких частотах резко возрастают потери в листовых сердечниках, поэтому сердечники, предназначенные для работы на высоких частотах, выполняют обычно из феррита.

§ 15.4. Потери в сердечниках нелинейных индуктивностей, обусловленные вихревыми токами. Если по индуктивной катушке со стальным сердечником проходит переменный ток, то в сердечнике возникает переменный магнитный поток, под действием которого в листах сердечника образуются вихревые токи. На рис. 15.2 изображен один лист сердечника. Пусть магнитный поток, увеличиваясь, направлен вверх (вдоль листа). В плоскости листа, перпендикулярной магнитному потоку, по закону электромагнитной индукции наводится э. д. с. Эта э. д. с. вызывает в нем ток, который называют *вихревым*. Контур, по которому замыкается вихревой ток, изображен пунктиром на рис. 15.2. Вихревые токи по закону Ленца стремятся создать поток, встречный по отношению к вызвавшему их потоку.

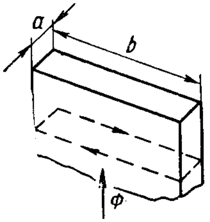


Рис. 15.2

Потери энергии в листе на вихревые токи пропорциональны квадрату наведенной в контурах листа э. д. с. и обратно пропорциональны сопротивлению контуров. Э. д. с., наводимые в контурах, по которым замыкаются вихревые токи, при заданной ширине листа b пропорциональны толщине листа a, амплитудному значению индукции и частоте. В свою очередь сопротивление контура пропорционально периметру контура и удельному сопротивлению. При $b \gg a$ периметр контура почти не зависит от толщины листа. Поэтому потери энергии на вихревые токи пропорциональны квадрату амплитудного значения индукции, квадрату частоты и квадрату толщины листа.

Уменьшить потери в листовом сердечнике на вихревые токи можно двумя путями: 1) изготовлением сердечника из тонких изолированных друг от друга листов (см. § 15.3); 2) добавлением в ферромагнитный материал примесей, увеличивающих его удельное сопротивление.

При частоте 50 Гц толщина листов обычно 0,35 — 0,5 мм; при высоких частотах — до 0,005 мм.

Кроме потерь от вихревых токов в сердечнике есть еще потери, обусловленные гистерезисом и магнитной вязкостью.

§ 15.5. Потери в ферромагнитном сердечнике, обусловленные гистерезисом. Из § 14.4 известно, что ферромагнитному материалу присуще явление гистерезиса. Площадь гистерезисной петли в координатах B, H (B — индукция, H — напряженность поля), снятая при достаточно медленном изменении магнитного поля во времени (когда вихревые токи практически отсутствуют), характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного материала за один период переменного тока (за одно перемагничивание). Потери в сердечнике, обусловленные гистерезисом, пропорциональны объему сердечника, первой степени частоты и площади гистерезисной петли. От толщины листов потери на гистерезис не зависят *.

Гистерезисные петли, при достаточно быстром изменении магнитного поля во времени, называют *динамическими*. Динамические петли шире соответствующих статических за счет вихревых токов и магнитной вязкости.

* Явление поверхностного эффекта (см. ч. III учебника) здесь не учитываем.

Степень отличия динамической петли от соответствующей статической зависит от скорости перемагничивания (от частоты), удельного электрического сопротивления материала, толщины листов, температуры и наличия в магнитном потоке высших гармоник.

§ 15.6. Схема замещения нелинейной индуктивности. В расчетном отношении нелинейную индуктивность рис. 15.1, *а* можно представить в виде схемы рис. 15.3, *а*. В ней параллельно с идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивностью включено сопротивление $R_{г.в}$, потери в котором имитируют потери энергии в сердечнике на гистерезис и вихревые токи, а последовательно включено активное сопротивление самой обмотки $R_{об}$; $\dot{U}$ — напряжение на нелинейной индуктивности.

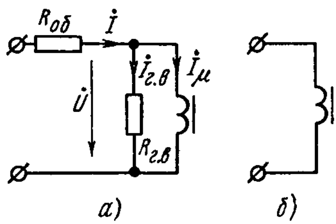


Рис. 15.3

Как уже отмечалось, потери энергии на гистерезис и вихревые токи $P_{г.в}$ зависят от качества ферромагнитного материала и толщины листов сердечника.

Если сердечник выполнен из низкокачественного магнитного материала, то потери в нем относительно велики, а сопротивление $R_{г.в}$ достаточно мало и ток $\dot{I}_{г.в} = \dot{U}/R_{г.в}$ может оказаться соизмеримым с током $\dot{I}_{\mu}$, протекающим по идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивности; в этом случае ветвь с сопротивлением $R_{г.в}$ необходимо учитывать в расчете.

Если же сердечник изготовлен из тонких листов высококачественного магнитномягкого материала, то потери в сердечнике малы, а сопротивление $R_{г.в} = U^2/P_{г.в}$ очень велико и потому ветвь с сопротивлением $R_{г.в}$ можно не учитывать, т. е. считать, что ее нет.

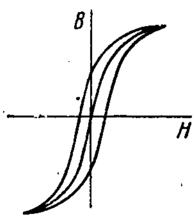


Рис. 15.4

Часто вводят еще одно упрощение: полагают активное сопротивление обмотки $R_{об}$ настолько небольшим, что с падением напряжения в нем можно не считаться. Аналогичное упрощение часто делалось и при расчете линейных индуктивностей. В этом случае сопротивление катушки со стальным сердечником оказывается чисто индуктивным (соответствующая схема замещения представлена на рис. 15.3, *б*).

Переход от схемы замещения рис. 15.3, *а* к схеме замещения рис. 15.3, *б* вызван стремлением облегчить расчеты цепей. При этом учитывают основной полезный нелинейный эффект — нелинейность между индукцией B и напряженностью H и пренебрегают побочным вредным эффектом — потерями, обусловленными гистерезисом и вихревыми токами в сердечнике.

При периодическом процессе нелинейность между B и H учитывают, ведя расчет по кривой, абсциссы которой равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли (рис. 15.4).

§ 15.7. Общая характеристика нелинейных емкостных сопротивлений. В обычных конденсаторах обкладки разделены веществом, диэлектрическая проницаемость которого не является функцией напряженности электрического поля. Для них зависимость мгновенного значения заряда q на одной обкладке от мгновенного значения напряжения u между обкладками (кулон-вольтная характеристика) представляет собой прямую линию (рис. 15.5), а их емкость не зависит от напряжения u. Для нелинейных конденсаторов зависимость q от u нелинейна (рис. 15.6).

Нелинейные конденсаторы называют еще варикондами. На электрических схемах вариконды изображают в соответствии с рис. 15.7, *а*. Пространство между обкладками вариконда заполняют сегнетодиэлектриком. *Сегнетодиэлектриками* называют вещества, диэлектрическая проницаемость которых является функцией напряженности электри-

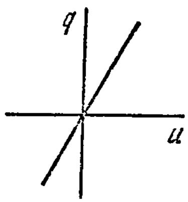


Рис. 15.5

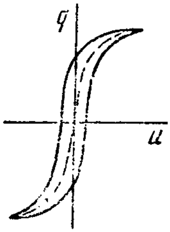


Рис. 15.6

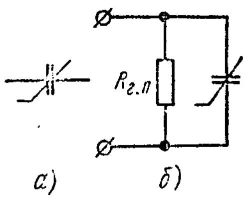


Рис. 15.7

ческого поля. Название «сегнетодиэлектрики» им присвоено потому, что впервые это свойство было обнаружено у кристаллов сегнетовой соли.

Сегнетодиэлектрики, подобно ферромагнитным веществам, обладают гистерезисом. *Электрическим гистерезисом* называют явление отставания изменения электрического смещения D от изменения напряженности поля E. Как и в ферромагнитных веществах, площадь гистерезисной петли в координатах D, E при медленном изменении поля характеризует потери на электрический гистерезис в единице объема сегнетодиэлектрика за один период изменения E.

Кроме потерь на гистерезис в варикондах есть еще потери, обусловленные тем, что проводимость сегнетодиэлектрика не равна нулю, а также вязкостью процессов поляризации.

На схеме замещения варикoнд можно представить в виде параллельного соединения идеализированного (без потерь) вариконда и ветви с активным сопротивлением $R_{г.п}$, потери в котором имитируют в расчетном отношении активные потери в вариконде (рис. 15.7, *б*).

Наличие потерь в варикондах является вредным побочным эффектом. Чем выше качество сегнетодиэлектрика, тем у́же петля гистерезиса и меньше потери в нем. Для облегчения исследования свойств электрических цепей, содержащих вариконды, гистерезисом и потерями обычно пренебрегают и зависимость $q=f(u)$ принимают в виде пунктирной кривой рис. 15.6. Абсциссы ее равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли.

Лишь при исследовании схем, в основе действия которых лежит явление гистерезиса, например при анализе работы некоторых запоминающих и счетных устройств, гистерезис необходимо учитывать.

§ 15.8. Нелинейные сопротивления как генераторы высших гармоник тока и напряжения. Если нелинейное сопротивление присоединить к генератору синусоидального напряжения, то проходящий через сопротивление ток будет иметь несинусоидальную форму и потому нелинейное сопротивление будет являться генератором высших гармоник тока. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим рис. 15.8. На нем кривая *1* — в. а. х. сопротивления, кривая *2* — синусоидальное напряжение на нем, кривая *3* — ток через сопротивление.

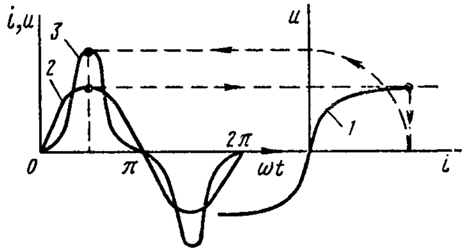


Рис. 15.8

Для построения кривой $i=f(\omega t)$ последовательно придаем ωt значения, равные, например, 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ и т. д.; для каждого из них находим напряжение u, переносим соответствующее значение u на кривую $u=f(i)$ и из нее определяем значение тока i для взятого момента времени. Найденное значение тока i откладываем на той ординате, которой соответствует выбранный момент времени.

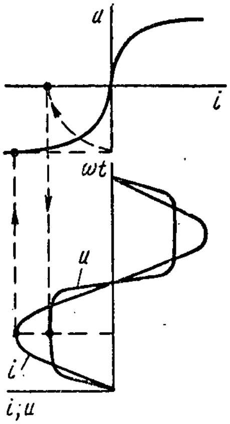


Рис. 15.9

Эти операции показаны на рис. 15.8 стрелками. Так, по точкам строят кривую *3*. Она имеет пикообразную форму и может быть разложена на гармоники.

Аналогично, если через нелинейное сопротивление пропустить синусоидальный ток, то напряжение на нем будет иметь несинусоидальную форму. Соответствующие построения приведены на рис. 15.9. Следовательно, нелинейное сопротивление является генератором высших гармоник напряжения.

Амплитуды первой и высших гармоник токов нелинейно зависят от амплитуд первой и высших гармоник напряжений на нелинейных сопротивлениях.

Все это затрудняет анализ и расчет нелинейных цепей и в то же время позволяет осуществить с их помощью ряд важных в практическом отношении преобразований, принципиально невыполнимых с помощью линейных электрических цепей при неизменных во времени параметрах.

§ 15.9. Основные преобразования, осуществляемые с помощью нелинейных электрических цепей. На рис. 15.10, *а* схематически изображен четырехполюсник, в состав которого входят одно или несколько нелинейных сопротивлений. Будем называть такой четырехполюсник *нелинейным* (НЧ).

На рис. 15.10, *б* представлен нелинейный шестиполюсник (НШ). В отличие от четырехполюсника он имеет еще два зажима («полюса»), к которым присоединяется источник управляющего напряжения или тока.

С помощью нелинейных четырехполюсников и шестиполюсников можно осуществить ряд очень важных преобразований:

1. Преобразовать переменный ток в постоянный. Устройства, предназначенные для этого, называют *выпрямителями* (см. § 15.54).

2. Преобразовать постоянный ток в переменный с помощью устройств, которые называют *автогенераторами* (см. § 15.55) и *инверторами*.

3. Осуществить умножение частоты, т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение, частота которого в несколько раз

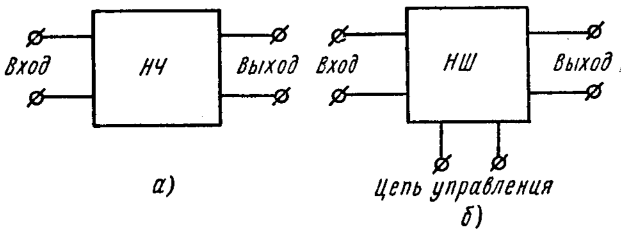


Рис. 15.10

больше частоты входного напряжения. Четырехполюсники, с помощью которых производят умножение частоты, называют *умножителями частоты*; устройство, удваивающее частоту, — *удвоителем частоты*; устройство, утраивающее частоту, — *утроителем*, и т. д.

4. Осуществить деление частоты, т. е. выполнить операцию, обратную умножению частоты. Четырехполюсники, используемые для этого, называют *делителями частоты*. Их работа здесь не рассматривается; с ней можно ознакомиться, например, по [22].

5. Стабилизировать напряжение (ток), т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение (ток), почти не изменяющийся по величине при значительном изменении величины входного напряжения. Такие четырехполюсники называют *стабилизаторами напряжения* (тока). Устройства для стабилизации напряжения в цепях постоянного тока рассмотрены в гл. 13.

6. Осуществить триггерный эффект, т. е. эффект резкого (скачкообразного) изменения выходной величины при незначительном изменении входной. Триггерный эффект рассмотрен в § 15.59 и 15.61.

7. Произвести модуляцию. Как уже говорилось в § 7.15, модуляция есть процесс, при котором амплитуда (фаза или частота) высокочастотного колебания, поступающего на вход четырехполюсника, преобразуется таким образом, что характер изменения ее повторяет

характер изменения управляющего низкочастотного сигнала. Устройства, предназначенные для этого, называют *модуляторами*.

8. Осуществить демодуляцию, т. е. выделить из высокочастотного модулированного колебания запечатленный в нем низкочастотный управляющий сигнал. Устройства для демодуляции называют *демодуляторами* или *детекторами*.

9. Преобразовать желаемым образом форму входного напряжения. Так, например, при подаче на вход нелинейного четырехполюсника напряжения синусоидальной формы на его выходе можно получить напряжение прямоугольной или пикообразной формы.

10. Осуществить усиление напряжения (тока), т. е. получить на выходе нелинейного устройства напряжение значительно большей величины, чем управляющее напряжение на его входе. Управляющее напряжение может быть постоянным или переменным.

С помощью трансформаторов также можно усиливать напряжение, однако в усилителях напряжения на нелинейных сопротивлениях энергия, потребляемая управляющей цепью, может быть в сотни, тысячи и даже сотни тысяч раз меньше энергии на выходе усилителя, тогда как в обычных трансформаторах эти энергии почти равны.

Усилители напряжения на нелинейных сопротивлениях позволяют усиливать не только переменное, но и постоянное напряжение и притом с плавным изменением коэффициента усиления. Простейший усилитель напряжения постоянного тока рассмотрен в § 13.14.

11. Осуществить усиление мощности, т. е. выделить на выходе устройства (в нагрузке) мощность, значительно большую мощности, поступающей в управляющую цепь.

Процесс усиления мощности требует дополнительных пояснений. Энергия, поступающая на вход усилителя мощности (на вход четырехполюсника рис. 15.10, *а*), доставляется находящимся вне четырехполюсника источником сигнала и расходуется на управление режимом работы нелинейного сопротивления, входящего в состав четырехполюсника.

Выделяющаяся в нагрузке энергия поступает от источника энергии, находящегося внутри рассматриваемого четырехполюсника либо включаемого на выходе четырехполюсника последовательно с нагрузкой.

Когда говорят об усилении мощности, то имеют в виду, что приращение мощности, выделяющейся в нагрузке, оказывается больше приращения мощности, потребовавшейся для изменения режима работы нелинейного сопротивления.

12. Осуществить степенное и логарифмическое преобразование входного напряжения (тока).

С помощью нелинейных электрических цепей кроме перечисленных можно осуществить и другие нелинейные преобразования. К их числу относится, например, плавное преобразование частоты с помощью нелинейных четырехполюсников и шестиполюсников, не содержащих подвижных частей. Рассмотрение этого преобразования выходит за рамки курса (см. [22]).

Нелинейные устройства широко применяют для умножения электрическим путем двух, трех функций и более, а также в электрических счетных и запоминающих устройствах, в качестве нелинейных фильтров, логических устройств и т. п. Несомненно, что по мере развития техники и изучения свойств нелинейных цепей последние будут находить применение для выполнения и других функций.

Многие из перечисленных в данном параграфе типов преобразований (преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, модуляция и демодуляция, усиление тока, напряжения, мощности) осуществляют с помощью нелинейных устройств, и в этом смысле они являются нелинейными преобразователями. Однако при определенных условиях в относительно небольшом диапазоне изменений входной величины эти преобразователи могут обладать почти линейной зависимостью амплитуды (действующего или среднего значения) выходной величины от амплитуды (действующего или среднего значения) входной.

Вне этого диапазона зависимость выходной величины от входной является в той или иной степени (часто в очень значительной) нелинейной.

Для многих других типов преобразователей (например, логарифмических и степенных) зависимость выходной величины от входной не может быть линейной, так как это противоречило бы самому назначению и самому принципу работы преобразователей этого типа.

Если же зависимость выходной величины от входной может быть линейной, или близкой к линейной, то в большинстве случаев стремятся выбрать режим работы преобразователя таким образом, чтобы работа его проходила именно на линейном участке. Так поступают, в частности, при использовании электронных, полупроводниковых и магнитных усилителей тока, напряжения, мощности.

§ 15.10. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях. В электрических цепях переменного тока, содержащих нелинейные индуктивности и линейные емкости или нелинейные емкости и линейные индуктивности, а также нелинейные индуктивности и нелинейные емкости, при определенных условиях (далеко не всегда!) возникают физические явления, которые невозможны в линейных цепях *. Таких явлений довольно много. Ограничимся кратким рассмотрением только некоторых, наиболее важных из них:

1. Возникновение интенсивных колебаний в цепи на высшей гармонике при отсутствии этой гармоники во входном напряжении.

В линейных цепях возникновение интенсивных колебаний на высшей гармонике может быть только при наличии этой гармоники во входном напряжении.

2. Возникновение субгармонических колебаний.

Под *субгармоникой* понимают гармонику, частота которой в целое число раз меньше частоты источника э. д. с. Субгармонические колебания представляют собой колебания на какой-либо из субгармоник. Чаще всего они наблюдаются на частотах $\omega/3$; $\omega/2$; $\omega/5$ и т. д. (ω — частота источника э. д. с.) — см. § 15.53.

3. Возникновение колебаний в цепи на гармонике с частотой $m\omega/n$, где m и n — целые числа.

4. Зависимость характера установившегося режима в нелинейной цепи переменного тока от предшествовавшего этому режиму состояния цепи и начальной фазы источника э. д. с., от которого питается цепь.

Это явление может наблюдаться в нелинейных электрических цепях в зоне существования триггерного эффекта, о котором было упомянуто в § 15.9. Суть явления состоит в том, что при подключении нелиней-

* Имеются в виду «обычные» линейные цепи, параметры которых не являются функцией времени. О линейных цепях с непостоянными во времени параметрами см. гл. 18.

ной резонансной цепи к источнику э. д. с. в ней может возникнуть один из двух возможных режимов. Какой из режимов возникнет, зависит от начальной фазы генератора и состояния цепи, предшествовавшего включению (см. § 15.59).

5. Возникновение автомодуляции.

Автомодуляция представляет собой процесс периодического или почти периодического изменения амплитуд токов и напряжений в нелинейных электрических цепях без воздействия на них внешнего модулирующего фактора, т. е. без воздействия на них низкочастотного сигнала (см. § 15.56).

Перечисленные физические явления имеют место в резонансных цепях только в определенных для каждой цепи диапазонах параметров, которые, как правило, оказываются такими, что практически эти явления наблюдаются сравнительно редко. Кроме того, исследование условий возникновения этих явлений часто связано с весьма громоздкими математическими выкладками, поэтому в курсе с достаточной полнотой отразить все эти явления трудно. Подробнее можно ознакомиться с этими явлениями по [21] и [22].

§ 15.11. Разделение нелинейных сопротивлений по степени симметрии характеристик относительно осей координат. Кроме деления на активные, индуктивные и емкостные, управляемые и неуправляемые (а активных — еще на безынерционные и инерционные) нелинейные сопротивления можно классифицировать еще по одному признаку — по степени симметрии характеристик для мгновенных значений относительно осей координат.

Пусть x и y — величины, характеризующие режим работы нелинейного сопротивления. Условимся x обозначать величину, откладываемую по оси ординат декартовой системы, а y — величину, откладываемую по оси абсцисс.

Характеристики, для которых выполняется условие $-y(-x)=y(x)$, принято называть *симметричными*: характеристики, не удовлетворяющие этому условию, — *несимметричными*.

Симметричными характеристиками обладают нелинейные индуктивности и емкости, а из активных сопротивлений — тиритовые сопротивления, электрическая дуга с однородными электродами и некоторые другие типы сопротивлений.

Однако основные типы нелинейных активных сопротивлений — электронная лампа, транзистор и тиристор — имеют несимметричные характеристики.

В ближайших 13 параграфах рассматриваются основные особенности работы нелинейных сопротивлений с симметричными характеристиками.

Основные особенности работы нелинейных сопротивлений с несимметричными характеристиками — электронной лампы и транзистора — излагаются в § 15.27—15.43.

§ 15.12. Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений. Для проведения математического анализа нелинейных цепей переменного тока и изучения их общих свойств целесообразно выразить аналитически зависимость между мгновенными значениями u и i для нелинейного активного сопротивления, зависимость между B и H для нелинейной индуктивности, зависимость q и u для нелинейной емкости. Приближенное аналитическое описание характеристик нелинейных сопротивлений принято называть *аппроксимацией* характеристик.

§ 15.13. Аппроксимация симметричных характеристик для мгновенных значений гиперболическим синусом. При исследовании свойств электрических цепей явлением гистерезиса, как правило, можно пренебречь. Лишь при исследовании цепей, в основе действия которых лежит это явление (например, работы запоминающих магнитных устройств с прямоугольной петлей гистерезиса), гистерезис необходимо учитывать.

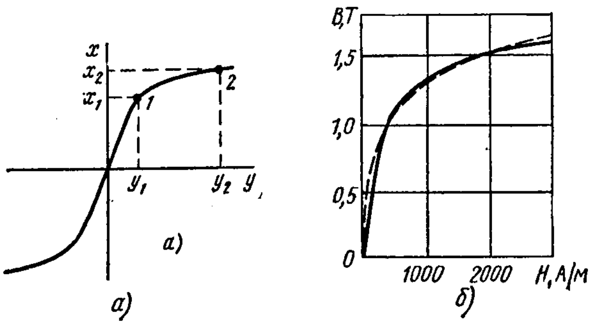


Рис. 15.11

На рис. 15.11, *а* изображена типичная симметричная характеристика $y=f(x)$.

Для нелинейной индуктивности роль x играет мгновенное значение индукции B; роль y — мгновенное значение напряженности поля H. Для нелинейной емкости роль y играет напряжение u, роль x — заряд q. Для нелинейных активных сопротивлений (например, тиритовых сопротивлений) роль x играет напряжение, роль y — ток.

Существует большое количество различных аналитических выражений, в той или иной мере пригодных для аналитического описания характеристик нелинейных сопротивлений [21]. При выборе наиболее подходящего аналитического выражения для функции $y=f(x)$ исходят не только из того, что кривая, описываемая аналитическим выражением, должна достаточно близко всеми своими точками расположиться к опытным путем полученной кривой в предполагаемом диапазоне перемещений рабочей точки на ней, но учитывают и те возможности, которые выбранное аналитическое выражение дает при анализе свойств электрических цепей. В дальнейшем для аналитического описания характеристик симметричных сопротивлений по типу рис. 15.11, *а* будем пользоваться гиперболическим синусом

$$y=\alpha \operatorname{sh} \beta x, \tag{15.1}$$

В этом выражении α и β — числовые коэффициенты; α измеряется в тех единицах, что и y; β — в единицах, обратных единицам измерения x, так что произведение βx есть величина безразмерная. Для определения двух неизвестных коэффициентов α и β следует на полученной опытным путем зависимости $y = f(x)$ в предполагаемом рабочем диапазоне произвольно выбрать две наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая, подставить координаты этих точек в уравнение (15.1) и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть координаты этих точек y_1, x_1 и y_2, x_2 (рис. 15.11, *а*). Тогда

$$y_1 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_1; \quad y_2 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_2.$$

Отношение

$$y_2/y_1 = \operatorname{sh} \beta x_2/\operatorname{sh} \beta x_1. \tag{15.2}$$

Трансцендентное уравнение (15.2) служит для определения коэффициента β. После этого определяется коэффициент

$$\alpha = y_2/\operatorname{sh} \beta x_2. \tag{15.3}$$

Пример 147. Кривая намагничивания трансформаторной стали Э41 изображена на рис. 15.11, *б*. Найти коэффициенты α и β.

Решение. Выбираем две точки на кривой: $H_1 = 200$ А/м; $B_1 = 1{,}1$ Т; $H_2 = 2400$ А/м; $B_2 = 1{,}532$ Т.

По уравнению (15.2) имеем $\operatorname{sh}(1{,}532\beta)/\operatorname{sh}(1{,}1\beta) = 12$. Задаемся произвольными значениями β и производим подсчеты:

β ...	6	5,22	4,57	3,92	3,26
βB_2 ...	9,2	8	7	6	5
βB_1 ...	6,6	5,74	5,03	4,32	3,59
$\operatorname{sh} \beta B_2/\operatorname{sh} \beta B_1$ ...	13,5	9,58	7,25	6,24	4,1

По результатам подсчетов строим кривую $\operatorname{sh} \beta B_2/\operatorname{sh} \beta B_1 = f(\beta)$ и по ней находим $\beta = 5{,}75$ Т^{-1}. Далее определяем

$$\alpha = H_2/\operatorname{sh} \beta B_2 = 2400/\operatorname{sh} 8{,}82 = 1200/1690 = 0{,}71.$$

Пунктирная кривая рис. 15.11, *б* построена по уравнению $H = 0{,}71 \operatorname{sh}(5{,}75\ B)$.

§ 15.14. Понятие о функциях Бесселя. При анализе нелинейных цепей широко используют функции Бесселя, которые являются решением уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{15.4}$$

Функции Бесселя выражаются степенными рядами и для них составлены таблицы. Функцию Бесселя от аргумента x обозначают $J_p(x)$, где p — порядок функции Бесселя. Общее выражение для $J_p(x)$ в виде степенного ряда имеет вид

$$J_p(x) = \frac{(x/2)^p}{0!\,p!} - \frac{(x/2)^{p+2}}{1!\,(p+1)!} + \frac{(x/2)^{p+4}}{2!\,(p+2)!} - \frac{(x/2)^{p+6}}{3!\,(p+3)!} + \ldots \tag{15.5}$$

Для гл. 15 наибольший интерес представляют функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Для их получения в общее выражение (15.5) вместо x следует подставить jx, где $j = \sqrt{-1}$. Обратим внимание на то, что в табл. 15.1 дана функция $-jJ_1(jx)$ вместо $J_1(jx)$, функция $jJ_3(jx)$ вместо $J_3(jx)$. Сделано это потому, что без дополнительного множителя j или $-j$ эти функции, как правило, не используются.

Таблица 15.1

x	$J_0(jx)$	$-jJ_1(jx)$	$-J_2(jx)$	$jJ_3(jx)$	$J_4(jx)$
0,0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,4	1,04	0,20	0,02	$0{,}13\cdot10^{-2}$	$0{,}67\cdot10^{-4}$
0,8	1,16	0,43	0,08	0,01	$0{,}11\cdot10^{-2}$
1,2	1,39	0,72	0,20	0,04	$0{,}58\cdot10^{-2}$
1,6	1,75	1,08	0,39	0,10	0,019
2,0	2,28	1,59	0,69	0,21	0,051
2,4	3,05	2,30	1,13	0,41	0,114
2,8	4,16	3,30	1,80	0,73	0,234
3,2	5,75	4,73	2,79	1,25	0,446
3,6	8,03	6,79	4,25	2,07	0,810
4,0	11,30	9,76	6,42	3,34	1,416
4,4	16,01	14,04	9,63	5,29	2,405
4,8	22,79	20,25	14,35	8,29	3,992
5,2	32,58	29,25	21,33	12,84	6,510
5,6	46,73	42,32	31,62	19,74	10,468
6,0	67,23	61,34	46,78	30,15	16,63
7	168,6	156	124	85,17	51,0
8	427,56	399,87	327,6	236,07	150,5
9	1093,59	1030,91	864,50	646,69	433,3
10	2815,7	2671	2281	1758	1226
11	7288	6948,9	6025	4758	3430
12	18948	18142	15924	12834	9507

При $x=0$ не равна нулю только функция Бесселя нулевого порядка: $J_0(0) = 1$. По данным табл. 15.1 на рис. 15.12 построены кривые функций Бесселя. Из таблицы и рис. 15.12 видно, что с ростом x значения функций увеличиваются. Чем выше порядок функции Бесселя, тем меньше ее значение при одном и том же x.

§ 15.15. Разложение гиперболических синуса и косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье. Если аргумент x изменяется по периодическому закону, например по закону синуса $x = x_m \sin \omega t$, где x_m — амплитуда колебаний, то по периодическому закону изменяются и функции $\operatorname{sh}(x_m \sin \omega t)$ и $\operatorname{ch}(x_m \sin \omega t)$. Так как периодические функции можно представить рядами Фурье, то разложим в ряд Фурье эти функции. С этой целью в (15.5) вместо x подставим $x_m \sin \omega t$, учтем известные из тригонометрии формулы:

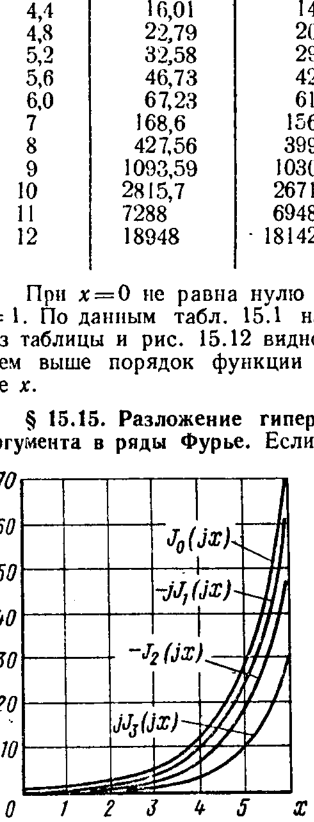


Рис. 15.12

$$\sin^2\alpha = 0{,}5 - 0{,}5\cos 2\alpha; \quad (15.6)$$

$$\sin^3\alpha = -0{,}25\sin 3\alpha + 0{,}75\sin\alpha; \quad (15.7)$$

$$\sin^4\alpha = 0{,}375 - 0{,}5\cos 2\alpha + 0{,}125\cos 4\alpha, \quad (15.8)$$

сгруппируем все слагаемые с $\sin\omega t$, $\cos 2\omega t$, $\sin 3\omega t$ и т. д., а также отдельно выделим постоянную составляющую. В результате группировки оказывается, что коэффициентами при тригонометрических функциях являются ряды, которыми изображаются функции Бесселя различных порядков от чисто мнимого аргумента jx_m. Окончательно получим:

$$\operatorname{sh}(x_m \sin\omega t) = 2[-jJ_1(jx_m)]\sin\omega t - 2jJ_3(jx_m)\sin 3\omega t - 2jJ_5(jx_m)\sin 5\omega t - \ldots; \quad (15.9)$$

$$\operatorname{ch}(x_m \sin\omega t) = J_0(jx_m) + 2J_2(jx_m)\cos 2\omega t + 2J_4(jx_m)\cos 4\omega t + \ldots \quad (15.10)$$

Ряд для $\operatorname{sh}(x_m \sin \omega t)$ состоит только из нечетных гармоник и не имеет постоянной составляющей. Ряд для $\operatorname{ch}(x_m \sin \omega t)$ имеет постоянную составляющую и четные гармоники.

Пример 148. Разложить в ряде Фурье $\operatorname{sh}(4 \sin \omega t)$ и $\operatorname{ch}(4 \sin \omega t)$.

Решение. Значения функций Бесселя берем из таблицы:

$$-jJ_1(j4)=9{,}76; \quad jJ_3(j4)=3{,}34; \quad J_4(j4)=1{,}416;$$
$$-jJ_5(j4)=0{,}505; \quad J_0(j4)=11{,}3; \quad J_2(j4)=-6{,}42.$$

В соответствии с (15.9) и (15.10) получим:

$$\operatorname{sh}(4 \sin \omega t)=2\cdot 9{,}76 \sin \omega t-2\cdot 3{,}34 \sin 3\omega t+2\cdot 0{,}505 \sin 5\omega t-\ldots;$$
$$\operatorname{ch}(4 \sin \omega t)=11{,}3-2\cdot 6{,}42 \cos 2\omega t+2\cdot 1{,}416 \cos 4\omega t+\ldots$$

§ 15.16. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидально меняющейся составляющих в ряд Фурье. Из § 15.13 известно, что мгновенное значение функции y связано с мгновенным значением x формулой (15.1). В этой формуле аргументом гиперболического синуса является не x, как было в §15.14, а произведение βx. В соответствии с этим для разложения $\operatorname{sh}(\beta x_m \sin \omega t)$ и $\operatorname{ch}(\beta x_m \sin \omega t)$ в (15.9) и (15.10) следует заменить x на βx_m.

Если $x=x_0+x_m \sin \omega t$, где x_0 — постоянная составляющая, x_m — амплитуда синусоидальной составляющей, то

$$y=\alpha \operatorname{sh}(\beta x_0+\beta x_m \sin \omega t)=\alpha \operatorname{sh}\beta x_0 \operatorname{ch}(\beta x_m \sin \omega t)+\alpha \operatorname{ch}\beta x_0 \operatorname{sh}(\beta x_m \sin \omega t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y=\alpha \operatorname{sh}\beta x_0\,[J_0(j\beta x_m)+2J_2(j\beta x_m)\cos 2\omega t+2J_4(j\beta x_m)\cos 4\omega t+\ldots]+\\ +\alpha \operatorname{ch}\beta x_0\,\{2[-jJ_1\cdot(j\beta x_m)]\sin \omega t-2jJ_3(j\beta x_m)\sin 3\omega t-\ldots\}. \end{aligned} \tag{15.11}$$

Из (15.11) следует, что постоянная составляющая функции y

$$y_0=\alpha \operatorname{sh}\beta x_0 J_0(j\beta x_m). \tag{15.12}$$

Первая гармоника функции y

$$y_1=2\alpha \operatorname{ch}\beta x_0\,[-jJ_1(j\beta x_m)]\sin \omega t; \tag{15.13}$$

вторая гармоника

$$y_2=2\alpha \operatorname{sh}\beta x_0\,[J_2(j\beta x_m)]\cos 2\omega t; \tag{15.14}$$

третья гармоника

$$y_3=2\alpha \operatorname{ch}\beta x_0\,[-jJ_3(j\beta x_m)]\sin 3\omega t \tag{15.15}$$

и т. д.

Пример 149. Разложить в ряде Фурье функцию $y/\alpha=\operatorname{sh}(2+4\sin \omega t)$.

Решение. По табл. 11.1 находим $\operatorname{sh}2=3{,}63$; $\operatorname{ch}2=3{,}7$. Значения функций Бесселя берем из табл. 15.1. В соответствии с (15.11) имеем

$$\begin{aligned} y/\alpha=\operatorname{sh}(2+4\sin \omega t)=3{,}63\,(11{,}3-12{,}844\cos 2\omega t+2{,}832\cos 4\omega t-\ldots)+\\ +3{,}76\,(19{,}52\sin \omega t-6{,}674\sin 3\omega t+1{,}01\sin 5\omega t-\ldots). \end{aligned}$$

Таким образом, $y_0/\alpha=41{,}1$; $y_{1m}/\alpha=73{,}4$; $y_{2m}/\alpha=46{,}7$.

§ 15.17. Некоторые общие свойства симметричных нелинейных сопротивлений. I. Если нелинейное сопротивление с симметричной характеристикой работает в условиях, когда одна из определяющих его состояние величин, например величина x, изменяется во времени по закону $x=x_0+x_m \sin \omega t$, то в отношении другой определяющей его состояние величины (величины y) можно сделать следующие выводы.

1. Постоянная составляющая функции y_0 зависит не только от x_0, но и от x_m. Это следует из формулы (15.12).

2. В кривой $y=f(\omega t)$ появляются четные гармоники, которые исчезают при $x_0=0$. Фаза четных гармоник зависит от знака постоянной составляющей (от знака x_0).

3. Путем изменения x_0 или y_0 можно изменять амплитуды первой и высших гармоник функций $y(\omega t)$.

Первое из этих свойств поясним графически. Пусть нелинейное сопротивление работает при отсутствии синусоидальной составляющей ($x_m=0$). Тогда изображением этого процесса на характеристике нелинейного сопротивления будет точка a (рис. 15.13, a). Для нее

$$y=y_0;\quad \beta x=\beta x_0'=\mathrm{Ar\,sh}\, y_0/\alpha. \tag{15.16}$$

Этот результат следует из (15.12), если учесть, что $J_0(0)=1$.

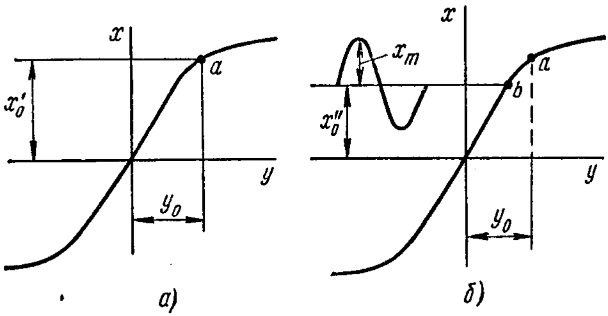


Рис. 15.13

Если же нелинейное сопротивление работает при $x_m \neq 0$, то, для того чтобы постоянную составляющую функции y_0 сохранить прежней, постоянная составляющая x_0 должна быть снижена (или снизится сама) со значения x_0' до x_0''.

Постоянную составляющую $\beta x_0''$ получим из формулы

$$\beta x_0''=\mathrm{Arsh}\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}, \tag{15.17}$$

где x_0'' определяется ординатой точки b, расположенной ниже точки a (рис. 15.13, $б$).

Первое и третье из этих свойств широко используют в теории управляемых нелинейных сопротивлений, второе свойство — в теории умножителей частоты.

Пример 150. Нелинейное сопротивление с характеристикой $y=\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta x$ сначала работало при $y_0/\alpha=41{,}1$ и отсутствии переменной составляющей ($\beta x_m=0$). Затем режим работы его изменился: постоянная составляющая y_0/α осталась прежней, но появилась переменная составляющая βx, амплитуда которой $\beta x_m=4$. Найти постоянные составляющие βx_0 в этих двух режимах.

Решение. В первом режиме $\beta x_0'=\mathrm{Arsh}\ 41{,}1=4{,}41$. Во втором режиме $\beta x_0''=\mathrm{Arsh}\,41{,}1/J_0(j4)=\mathrm{Arsh}\,3{,}63=2$.

Таким образом, при переходе от первого режима ко второму постоянная составляющая βx_0 изменилась с 4,41 до 2, т. е. более чем в два раза.

II. В энергетическом отношении общие свойства нелинейной цепи, содержащей одну нелинейную индуктивность (емкость) с безгистерезисной симметричной характеристикой, в которой действуют генераторы синусоидальных колебаний с частотами f_1 и f_2 и возникают токи и напряжения частот $f_{m,n}=mf_1+nf_2$ (m и n — простые целые числа; они могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения), для периодических процессов описываются *теоремой Мэнли и Роу*.

Если через $W_{m,n}=\dot U_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}+\overset{*}{U}_{m,n}\dot I_{m,n}$ обозначить среднюю за период мощность, «втекающую» в нелинейную индуктивность (емкость) на частоте $f_{m,n}=mf_1+nf_2$, то теорема устанавливает связь между мощностями, «втекающими» в нелинейный элемент на различных частотах. Эту теорему записывают в виде двух соотношений (доказательство см., например, в [21]):

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{mW_{m,n}}{mf_1+nf_2}=0;\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nW_{m,n}}{mf_1+nf_2}=0. \tag{15.18}$$

§ 15.18. Появление постоянной составляющей тока (напряжения, потока, заряда) на нелинейном элементе с симметричной характеристикой. Если к нелинейному сопротивлению с симметричной в. а. х., например $i=au^3$, подвести напряжение в виде двух компонент: $u=U_1\sin\omega t+U_2\sin(2\omega t+\varphi)$, частоты которых относятся как $1:2$ [в более общем случае как $2k/(2p+1)$, где k и p — целые положительные числа], то в токе, проходящем через НС, несмотря на отсутствие выпрямителей, появится постоянная составляющая, равная $-0{,}75\,aU_1^2U_2\sin\varphi$. Ее величина зависит не только от U_1 и U_2, но и от угла φ. Сам факт возникновения постоянной составляющей в этих условиях называют *селективным выпрямлением*. Селективно оно потому, что возникает не при любом соотношении частот двух напряжений, а при вполне определенном. Сходное явление имеет место в нелинейных индуктивностях и емкостях. Так, если на нелинейную индуктивность с в. а. х. $i=\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta\Phi$ воздействовать потоками частот ω и 2ω, то при отсутствии постоянной составляющей в м. д. с. в потоке кроме указанных гармоник появится и постоянная составляющая. Для ее определения положим $\Phi=\Phi_0+$ $+\Phi_1\sin(\omega t+\varphi)+\Phi_2\sin 2\omega t$, подставим в формулу для тока и, разложив ток в ряд Фурье, приравняем постоянную составляющую тока нулю. В результате получим формулу для определения Φ_0:

$$\mathrm{th}\,b_0=-\sin 2\varphi\,\frac{2\,[-jJ_1(jb_2)]\,[-J_2(jb_1)]}{J_0(jb_1)\,J_0(jb_2)},$$

где $b_0=\beta\Phi_0$; $b_1=\beta\Phi_1$; $b_2=\beta\Phi_2$.

Если через нелинейную емкость проходят первая и вторая гармоники тока, а угол $\varphi\neq 0$, то на емкости будет постоянная составляющая заряда при отсутствии постоянной составляющей напряжения на емкости.

§ 15.19. Типы характеристик нелинейных сопротивлений. При анализе и расчете электрических цепей с нелинейными сопротивлениями в зависимости от рассматриваемого вопроса используют различные типы характеристик *одного и того же* нелинейного сопротивления: а) характеристики для мгновенных значений; б) вольт-амперные характеристики по первым гармоникам тока и напряжения; в) вольт-амперные характеристики для действующих значений.

§ 15.20. Характеристики для мгновенных значений. Основным типом характеристик являются характеристики, связывающие мгновенные значения основных определяющих величин: тока и напряжения на нелинейном активном сопротивлении, индукции и напряженности в сердечнике нелинейной индуктивности, заряда и напряжения на нелинейной емкости. Будем называть их характеристиками для мгновенных значений. Иногда перед этим названием добавляют соответственно следующие слова: вольт-амперные, вебер-амперные или кулон-вольтные.

§ 15.21. Вольт-амперные характеристики по первым гармоникам. Под в. а. х. по первым гармоникам понимают графическую или аналитическую связь между амплитудой (действующим значением) первой гармоники тока и амплитудой (действующим значением) первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении.

Этот тип характеристик подразделяют на две подгруппы.

В первой подгруппе характеристик принимают, что напряжение (поток или заряд) на нелинейном сопротивлении изменяется по синусоидальному закону.

Во второй подгруппе характеристик принимают, что по синусоидальному закону во времени меняется ток через нелинейное активное сопротивление (напряженность в сердечнике нелинейной индуктивности или напряжение на нелинейной емкости).

Если воздействующее на нелинейное сопротивление синусоидальное напряжение (синусоидальный ток) не содержит постоянной составляющей, то в. а. х. для первых гармоник данного нелинейного сопротивления изображается какой-то одной кривой. Если же воздействующее напряжение (ток) содержит постоянную составляющую, то вольт-амперные, вебер-амперные или кулон-вольтные характеристики изображаются семействами кривых, на которых постоянная составляющая тока, напряжения, потока или заряда является параметром.

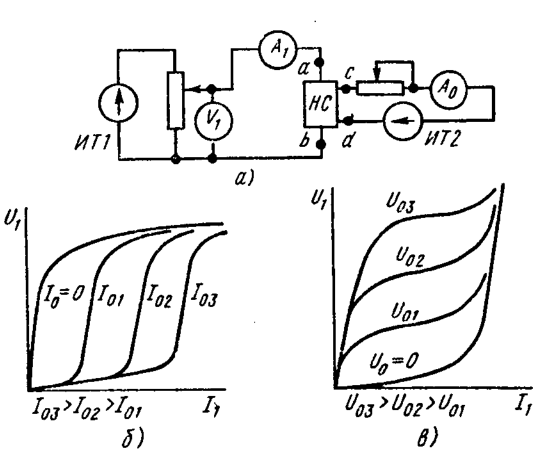


Рис. 15.14

Этот тип характеристик получают расчетным (аналитическим) или графическим путем по соответствующим характеристикам для мгновенных значений или снимают экспериментально.

При графическом построении задаются различными значениями амплитуды воздействующего на нелинейное сопротивление напряжения (тока, индукции, заряда), по точкам строят кривую тока (напряженности, напряжения) в функции времени и путем разложения ее в ряд Фурье находят соответствующие амплитуды первой гармоники тока (напряженности, напряжения).

(Пример графического построения кривой тока в функции времени для управляемой нелинейной индуктивности см. на рис. 15.17.)

Аналитически построение точек обсуждаемой характеристики производят, используя формулы (15.12) и (15.13) или иные подобные им. В § 15.23 рассмотрено применение формул (15.12) и (15.13) для получения единых характеристик по первым гармоникам для управляемых симметричных нелинейных сопротивлений.

Для нелинейной индуктивности в. а. х. по первым гармоникам можно получить опытным путем при помощи схемы рис. 15.14, *а*, где *ИТ1* — источник синусоидальной э. д. с., *ИТ2* — источник постоянной э. д. с., *ab* — зажимы управляемой цепи НС; *cd* — зажимы управляющей цепи НС. Измерительный прибор V_1 реагирует на первую гармонику напряжения, а измерительный прибор A_1 — на первую гармонику тока.

На рис. 15.14, *б* качественно изображены в. а. х. управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам. Параметром на них является ток управления I_0.

В. а. х. по первым гармоникам для управляемой нелинейной емкости изображены на рис. 15.14, *в*. Параметром на них является управляющее постоянное напряжение U_0.

Снятие характеристик рис. 15.14, *б* производят следующим образом. Устанавливают некоторое произвольное значение тока I_0 в цепи управления, затем плавно повышают напряжение U_1 и для каждого его значения записывают величину тока I_1. Затем то же проделывают при новом значении I_0 и т. д. Результаты измерений наносят на график, и соответствующие точки соединяют плавной кривой.

В. а. х. для первых гармоник используют при расчете установившихся режимов в нелинейных цепях, который называют расчетом по первой гармонике (см. § 15.47).

При расчете применяют в. а. х. той подгруппы, которая более подходит по условию работы данного нелинейного сопротивления.

§ 15.22. Вольт-амперные характеристики для действующих значений. Под в. а. х. для действующих значений понимают зависимость между действующим значением синусоидального (несинусоидального) напряжения на нелинейном сопротивлении и действующим значением тока, протекающего через это сопротивление. Если напряжение (ток) содержит постоянную составляющую, то в. а. х. для действующих значений изображаются семейством кривых, на которых постоянная составляющая тока (потока, напряжения или заряда) является параметром.

Эти характеристики получают графическим или аналитическим путем из характеристик для мгновенных значений или снимают опытным путем с помощью схемы рис. 15.14, *а*, но приборы V_1 и A_1 в этом случае должны измерять действующие значения.

В. а. х. для действующих значений зависят от формы напряжения на нелинейном сопротивлении и (или) от формы протекающего через него тока, поэтому необходимо указывать, при каких условиях они получены.

При качественном и грубом количественном анализах полагают, что характеристики, снятые при одной форме напряжения на нелинейном сопротивлении, близки к характеристикам, снятым при другой форме напряжения. В действительности же количественное различие в характеристиках может оказаться значительным. В. а. х. для действующих значений используются при расчете, называемом расчетом по в. а. х. для действующих значений (см. § 15.48).

§ 15.23. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных сопротивлений по первым гармоникам. Как уже отмечалось, нелинейные индуктивности и емкости, а также большая группа нелинейных активных сопротивлений имеют характеристики для мгновенных значений, которые могут быть приближенно описаны формулой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$. Для каждого нелинейного элемента под x и y следует понимать свои величины (см. § 15.13).

Таким образом, x и y — обобщенные обозначения величин, определяющих работу нелинейного элемента. Для всех перечисленных нелинейных элементов можно построить единые характеристики по первым гармоникам. С этой целью положим $x = x_0 + x_m \sin \omega t$. Тогда в соответствии с формулой (15.13) амплитуда первой гармоники функции y

$$y_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-j J_1 (j\beta x_m)]. \tag{15.19}$$

Формула (15.19) устанавливает связь между амплитудой y_{1m} первой гармоники y, амплитудой x_m первой гармоники x и постоянной составляющей x_0.

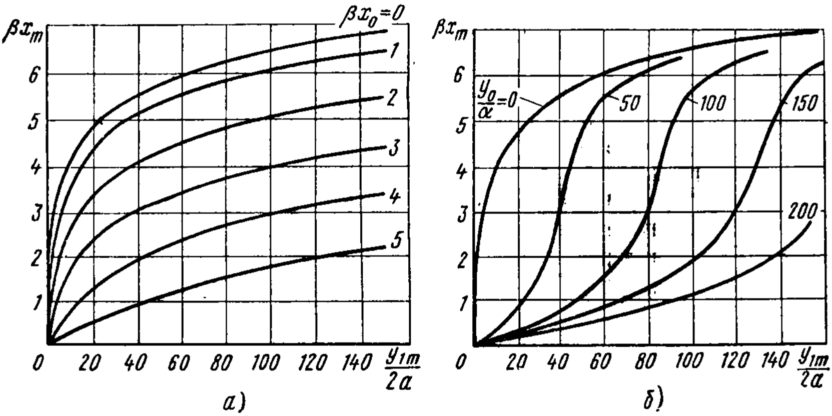


Рис. 15.15

На рис. 15.15, *а* изображены характеристики управляемого нелинейного элемента $\beta x_m = f(y_{1m}/2\alpha)$ при $\beta x_0 = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, построенные по формуле (15.19). Кривыми можно пользоваться при известном значении параметра βx_0. Если известен не βx_0, а постоянная составляющая y_0/α, то семейство кривых $\beta x_m = f(y_{1m}/2\alpha)$ при параметре y_0/α может быть построено следующим образом. Из формулы (15.12) находим

$$\operatorname{sh} \beta x_0 = \frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}$$

и вместо $\operatorname{ch} \beta x_0$ в (15.19) подставим

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \beta x_0} = \sqrt{1 + \left[\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}.$$

Получим

$$\frac{y_{1m}}{2\alpha} = \sqrt{1 + \left[\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2} [-j J_1(j\beta x_m)]. \tag{15.20}$$

Кривые рис. 15.15, *б*, построенные по формуле (15.20), являются характеристиками управляемого нелинейного элемента при значениях параметра $y_0/\alpha = 0, 50$, 100, 150 и 200. Обратим внимание на то, что $y_{1m}/(2\alpha)$, βx_m, y_0/α — это величины с нулевой размерностью. Если масштабы по осям уменьшить в $\sqrt{2}$ раз, то кривые рис. 15.15, *б* будут представлять собой характеристики по действующим значениям первых гармоник. Характеристика неуправляемого нелинейного элемента изображена на рис. 15.15, *б* кривой, для которой $y_0/\alpha = 0$.

§ 15.24. Простейшая управляемая нелинейная индуктивность.

Простейшая управляемая нелинейная индуктивность изображена на рис. 15.16. Она состоит из обмоток w_1 и w_0, намотанных на замкнутый ферромагнитный сердечник. Площадь поперечного сечения сердечника S (м^2), длина средней магнитной линии l (м).

Обмотка w_1 включена в цепь переменного тока, и по ней проходит переменный ток i, содержащий первую и высшие гармоники.

Обмотка управления (подмагничивания) w_0 присоединена к источнику постоянной э.д.с. E_0 через дополнительную индуктивность L_0 и регулируемое активное сопротивление R_0. По обмотке w_0 протекает постоянный ток $I_0=E_0/R_0$

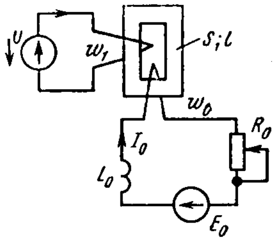


Рис. 15.16

Хотя переменный магнитный поток и наводит в обмотке w_0 переменную э.д.с., но переменного тока по ней практически не проходит, так как дополнительная индуктивность L_0 образует для переменного тока достаточно большое индуктивное сопротивление.

Пусть приложенное к обмотке w_1 напряжение равно $U_m \cos \omega t$. Это напряжение равно э.д.с. самоиндукции, взятой с обратным знаком (активное сопротивление обмотки w_1 считаем весьма малым):

$$u=-e_L=w_1\frac{d\Phi}{dt}=U_m\cos\omega t.$$

Отсюда магнитный поток

$$\Phi=\frac{U_m}{\omega w_1}\sin\omega t+\Phi_0=\Phi_m\sin\omega t+\Phi_0; \qquad (15.21)$$

$$\Phi_m=U_m/(\omega w_1), \qquad (15.22)$$

где Φ_m — амплитуда переменной составляющей магнитного потока; Φ_0 — постоянная составляющая магнитного потока.

Управляемая нелинейная индуктивность позволяет путем изменения постоянного тока I_0 в обмотке w_0 управлять переменным током i.

Принцип управления режимом работы нелинейной индуктивности и характер изменения во времени отдельных величин поясним с помощью рис. 15.17, *а*, *б*, где кривые $\Phi=f(Hl)$ представляют собой зависимости потока Φ в сердечнике от произведения напряженности магнитного поля H на длину средней магнитной линии l сердечника.

Построения на рис. 15.17, *а* соответствуют случаю, когда $I_0=0$, а на рис. 15.17, *б* — когда $I_0\neq0$. На обоих рисунках переменная составляющая потока $\Phi_m\sin\omega t$ одинакова. Для рис. 15.17, *а* постоянная составляющая потока $\Phi_0=0$, для рис. 15.17, *б* $\Phi_0\neq0$. На кривых $\Phi=f(\omega t)$, $\Phi=f(Hl)$ и $iw_1=f(\omega t)$ наиболее характерные соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами.

Построения производим в такой последовательности.

Сначала откладываем значения постоянной составляющей потока Φ_0 и строим кривую $\Phi_m\sin\omega t=f(\omega t)$.

Затем произвольно задаемся различными моментами времени, например равными $\omega t=0$; $\pi/2$; π; $3\pi/2$; 2π, и для каждого значения ωt с помощью кривой $\Phi=f(Hl)$ находим соответствующие значения Hl

и строим кривую $iw_1 + I_0 w_0 = f(\omega t)$ (для рис. 15.17, *а* $I_0 w_0 = 0$). Ось времени для этой кривой направлена вертикально вниз и проходит через точки *а*, *с*, *е* в нижней части рисунка.

Ток i не содержит постоянной составляющей, так как в цепи обмотки w_1 нет источника постоянной э.д.с. и выпрямителей.

Прямая $A - A$ рис. 15.17, *б* является нулевой линией для кривой $iw_1 = f(\omega t)$. Ток i изменяется относительно этой прямой так, что среднее значение его за период от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$ равно нулю.

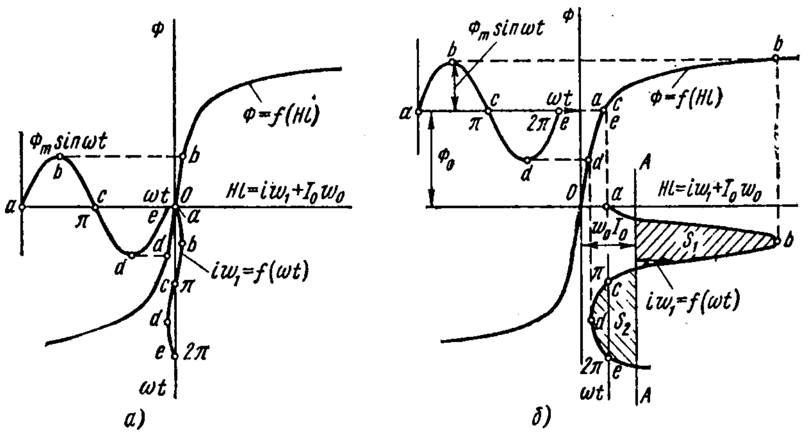


Рис. 15.17

Другими словами, проводим прямую $A - A$ так, чтобы площадь S_1 была равна площади S_2. Расстояние, на которое удалена прямая $A - A$ от оси ординат, равно $I_0 w_0$.

Полезно сопоставить выводы § 15.17, сделанные в общей форме, с теми выводами, которые применительно к нелинейной индуктивности следуют из рассмотрения рис. 15.17, *а*, *б*. Сопоставимыми величинами являются

$$x - \Phi; \quad y - (iw_1 + I_0 w_0); \quad x_0 - \Phi_0; \quad x_m - \Phi_m;$$
$$y_0 - I_0 w_0; \quad y = f(\omega t) - (iw_1 + I_0 w_0) = f(\omega t).$$

В § 15.17 говорилось что:

а) путем изменения y_0 можно влиять на величину амплитуд первой и высшей гармоник функции $y = f(\omega t)$; этот вывод подтверждается построениями на рис. 15.17, *а*, *б*—амплитуды первой и высших гармоник функции $iw_1 = f(\omega t)$ зависят от $I_0 w_0$ (чем больше $I_0 w_0$, тем больше амплитуда первой гармоники тока i);

б) y_0 зависит не только от x_0, но и от x_m; из построений рис. 15.17, *а*, *б* следует, что $I_0 w_0$ зависит не только от Φ_0, но и от Φ_m;

в) при наличии постоянной составляющей в составе функции x в кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники, [Из рис. 15.17, *б* следует, что при наличии постоянной составляющей Φ_0 в составе магнитного потока Φ в кривой $iw_1 = f(\omega t)$ появляются четные гармоники — кривая $iw_1 = f(\omega t)$ несимметрична относительно прямой $A - A$.]

Запишем потоки через индукции и сечения:

$$\Phi_m = B_m S; \tag{15.23}$$

$$\Phi_0 = B_0 S, \tag{15.24}$$

где B_m — амплитуда переменной составляющей индукции; B_0 — постоянная составляющая индукции.

Из формул (15.22) и (15.23) следует, что

$$B_m = U_m/(\omega w_1 S). \qquad (15.25)$$

Если магнитную индукцию B_m измерять в Гс, S — в см²; U_m заменить на $U\sqrt{2}$, где U — действующее значение напряжения на обмотке w_1, то

$$B_m = \frac{\sqrt{2}U \cdot 10^8}{2\pi f w_1 S} = \frac{U \cdot 10^8}{4{,}44 f w_1 S}. \qquad (15.26)$$

Формула (15.25) дает возможность найти амплитуду переменной составляющей магнитной индукции по амплитуде синусоидального напряжения U_m, частоте f, числу витков w_1 и сечению S.

По закону полного тока, произведение напряженности поля H на длину средней магнитной линии l должно равняться алгебраической сумме м. д. с.:

$$Hl = iw_1 + I_0 w_0. \qquad (15.27)$$

Так как ток i содержит первую и высшие гармоники, то уравнение (15.27) распадается на ряд уравнений: на уравнение для постоянных составляющих, на уравнения для первой гармоники, второй гармоники и т. д.

Уравнение для постоянных составляющих

$$I_0 w_0 = H_0 l, \qquad (15.28)$$

где H_0 — постоянная составляющая напряженности поля.

Переменный ток i содержит первую, вторую и другие высшие гармоники, но постоянной составляющей не содержит, так как в цепи обмотки w_1 нет источника постоянной э.д.с. и выпрямителей.

Уравнение для первой гармоники

$$I_{1m} w_1 = H_{1m} l, \qquad (15.29)$$

где I_{1m} — амплитуда первой гармоники тока i; H_{1m} — амплитуда первой гармоники напряженности поля. Аналогично,

$$I_{2m} w_1 = H_{2m} l. \qquad (15.30)$$

Из (15.28) — (15.29) следует, что

$$H_0 = I_0 w_0 / l, \qquad (15.31)$$

$$H_{1m} = I_{1m} w_1 / l, \qquad (15.32)$$

$$H_{2m} = I_{2m} w_1 / l \qquad (15.33)$$

и т. д.

Формула (15.31) дает возможность определить постоянную составляющую напряженности поля H_0 через постоянную составляющую тока I_0. Формула (15.32) позволяет найти H_{1m} через I_{1m} и т. д.

§ 15.25. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам. Под в. а. х. управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники переменного напряжения U_1 на обмотке w_1 нелинейной индуктивности от действующего значения первой гармоники переменного тока I_1 при постоянном токе I_0, взятом в качестве параметра.

Как уже говорилось в § 15.21, в. а. х. нелинейной индуктивности можно получить либо опытным путем с помощью схемы рис. 15.14, *а*, либо расчетным путем.

Рассмотрим расчетный путь, основанный на использовании обобщенных характеристик, о чем говорилось в § 15.23.

Примем, что зависимость между мгновенным значением напряженности магнитного поля H и мгновенным значением магнитной индукции B выражается гиперболическим синусом:

$$H=\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta B. \tag{15.34}$$

В (15.34) H играет ту же роль, что y в (15.1), а B—ту же, что и x.

На основании аналогии между (15.34) и (15.1) ясно, что характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будут полностью совпадать с характеристиками рис. 15.15, *б*, если βx_m заменить на βB_m, $y_{1m}/2\alpha$ — на $H_{1m}/2\alpha$ и параметр y_0/α — на H_0/α.

Из формулы (15.25) следует, что

$$\beta B_m=\frac{\beta U_m}{\omega w_1 S}=\frac{\beta\sqrt{2}U}{\omega w_1 S},$$

или

$$U=\beta B_m\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}. \tag{15.35}$$

Кроме того, из (15.32) имеем

$$I_{1m}=\sqrt{2}\,I_1=H_{1m}l/w_1. \tag{15.36}$$

Следовательно,

$$I_1=\frac{H_{1m}}{2\alpha}\cdot\frac{\alpha l\sqrt{2}}{w_1}. \tag{15.37}$$

На основании формулы (15.31)

$$I_0=\frac{H_0}{\alpha}\cdot\frac{\alpha l}{w_0}. \tag{15.38}$$

Таким образом, для перехода от семейства кривых в безразмерных единицах $\beta B_m=f(H_{1m}/2\alpha)$ при параметре H_0/α к семейству кривых $U_1=f(I_1)$ при параметре I_0 нужно масштаб по оси ординат изменить в $(\omega w_1 S)/(\beta\sqrt{2})$ раз, масштаб по оси абсцисс — в $(\alpha l\sqrt{2})/w_1$ раз и значения параметра — в $\alpha l/w_0$ раз.

Пример 151. Управляемая нелинейная индуктивность рис. 15.16 имеет следующие данные: $S=2{,}2$ см²; $l=25$ см; $w_1=250$; $w_0=1775$. Аналитическое выражение кривой намагничивания $H=0{,}71\,\mathrm{sh}\,5{,}75$ В.

Воспользовавшись кривыми $\beta x_m=f(y_{1m}/2\alpha)$ при параметре y_0/α (см. рис. 15.15, *б*), построить для нее семейство в. а. х. по первым гармоникам $U_1=f(I_1)$ при параметре I_0.

Решение. Подсчитаем коэффициент для перехода от βx_m к напряжению U:

$$\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}=\frac{314\cdot 250\cdot 2{,}2\cdot 10^{-4}}{5{,}75\cdot\sqrt{2}}=2{,}13.$$

Таким образом, при переходе от βx_m к напряжению U масштаб по оси ординат на рис. 15.15, *б* должен быть увеличен в 2,13 раза. Определим коэффициент для перехода от $H_{1m}/2\alpha$ к действующему значению первой гармоники тока:

$$\alpha l\sqrt{2}/w_1=0{,}71\cdot 0{,}25\sqrt{2}/250=10^{-3}.$$

Следовательно, масштаб по оси абсцисс должен быть изменен в 10^{-3} раз. Коэффициент для перехода от H_0/α к току I_0

$$\alpha l/w_0 = 0{,}71 \cdot 0{,}25/1775 = 10^{-4}.$$

Семейство в. а. х. изображено на рис. 15.18.

В литературе, посвященной электрическим цепям с нелинейными индуктивностями, используют термин «индуктивное сопротивление» нелинейной индуктивности по первой гармонике.

Под *индуктивным сопротивлением по первой гармонике понимают* отношение действующего значения первой гармоники напряжения U_1 на зажимах обмотки нелинейной индуктивности, включенной в цепь переменного тока, к действующему значению первой гармоники тока I_1, протекающего через эту обмотку:

$$X_1 = U_1/I_1,$$

где X_1 — функция напряжения U_1 и тока намагничивания I_0. Изменение X_1 в функции от U_1 при $I_0 = \text{const}$ и X_1 в функции от I_0 при $U_1 = \text{const}$ можно проанализировать, воспользовавшись кривыми рис. 15.18. Так, если принять $U_1 = 8{,}52$ В, то при $I_0 = 0$, $I_1 = 0{,}01$ А и, следовательно, $X_1 = 8{,}52/0{,}01 = 852$ Ом.

При $I_0 = 0{,}01$ А $X_1 = 8{,}52/0{,}084 = 101$ Ом.

При $I_0 = 0{,}015$ А $X_1 = 66{,}5$ Ом.

Таким образом, изменяя ток намагничивания I_0, можно управлять сопротивлением X_1.

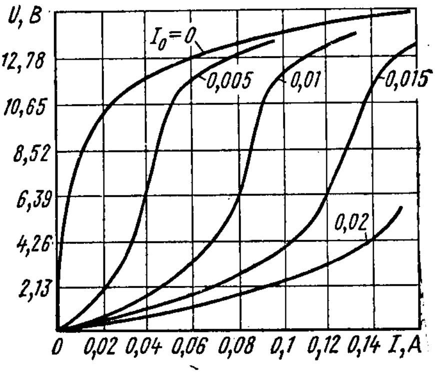


Рис. 15.18

Пример 152. Обмотка w_1 управляемой индуктивности примера 151 подключена к синусоидальному напряжению $U = 12{,}2$ В ($f = 50$ Гц). Обмотка управления w_0 подключена к источнику постоянной э. д. с. $E_0 = 1$ В. Активное сопротивление цепи подмагничивания $R_0 = 50$ Ом. Определить амплитуду переменной составляющей B_m и постоянную составляющую B_0 магнитной индукции.

Решение. По формуле (15.25),

$$B_m = \frac{12{,}2\sqrt{2}}{2\pi 50 \cdot 250 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Т}; \quad \beta B_m = 5{,}75.$$

Постоянная составляющая тока $I_0 = E_0/R_0 = 1/50 = 0{,}02$ А.

Постоянная составляющая напряженности поля $H_0 = I_0 w_0/l = 141{,}5$ А/м.

Параметр $H_0/\alpha = 141{,}5/0{,}71 = 200$. По формуле (15.17),

$$\beta B_0 = \operatorname{Arsh} \frac{200}{J_0(j5{,}75)} = 1{,}86; \quad B_0 = \frac{\beta B_0}{\beta} = 0{,}324 \text{ Т}.$$

§ 15.26. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам. Кулон-вольтную характеристику нелинейной емкости приближенно можно описать гиперболическим синусом:

$$u = \alpha \operatorname{sh} \beta q. \qquad (15.39)$$

Пусть заряд

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t,$$

где Q_0 — постоянная составляющая заряда; Q_m — амплитуда первой гармоники заряда.

При этом напряжение на емкости имеет постоянную составляющую U_0, а также первую и высшие гармоники. Формулы (15.12) ÷ (15.15) можно распространить на нелинейную емкость, если заменить y_0 на U_0; y_{1m} на U_{1m}; x_m на Q_m, x_0 на Q_0. В соответствии с этим постоянная составляющая напряжения на емкости

$$U_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta Q_0 J_0 (j\beta Q_m). \tag{15.40}$$

Первая гармоника напряжения на емкости равна

$$2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1 (j\beta Q_m)] \sin \omega t.$$

Ток через емкость равен dq/dt. Следовательно, первая гармоника тока через емкость

$$\frac{d}{dt}(Q_m \sin \omega t) = \omega Q_m \cos \omega t.$$

Ее амплитуда $\omega Q_m = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta}$, а действующее значение в $\sqrt{2}$ раз меньше:

$$I_1 = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta \sqrt{2}}. \tag{15.41}$$

Под в. а. х. управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники тока через емкость I_1 от действующего значения первой гармоники напряжения U_1 при параметре U_0.

На основании записанного соответствия между U_0 и y_0, y_{1m} и U_{1m} и т. д. можно утверждать, что семейство кривых $\beta Q_m = f(U_{1m}/2\alpha)$ при параметре U_0/α полностью повторяет семейство кривых $\beta x_m = f(y_{1m}/2\alpha)$ при параметре y_0/α, изображенное на рис. 15.15, *б*.

Для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f(U_{1m}/2\alpha)$ к семейству в. а. х. управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам следует учесть формулу (15.41) и то, что действующее значение первой гармоники напряжения на емкости

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{2\alpha} \alpha \sqrt{2} \quad \text{и} \quad U_0 = \frac{U_0}{\alpha} \alpha.$$

Другими словами, для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f(U_{1m}/2\alpha)$ при параметре U_0/α к семейству кривых $I_1 = f(U_1)$ при параметре U_0 необходимо масштаб по оси ординат изменить в $\omega/(\beta\sqrt{2})$ раз, по оси абсцисс — в $\alpha\sqrt{2}$ раз и параметр — в α раз. Подобно тому, как для нелинейной индуктивности вводят понятие индуктивного сопротивления по первой гармонике (см. § 15.25), для нелинейной емкости вводят понятие об *емкостном сопротивлении по первой гармонике*: $X_1 = U_1/I_1$, где U_1 — действующее значение первой гармоники напряжения на емкости; I_1 — действующее значение первой гармоники тока через нелинейную емкость; X_1 — функция U_1 и U_0.

§ 15.27. Основные сведения об устройстве транзистора. Транзистор представляет собой трехслойную структуру *p-n-p*- или *n-p-n*-типа. Схематически структура *p-n-p*-типа пояснена на рис. 15.19, *а*, где знаком плюс в *p*-области обозначены носители положительных зарядов, знаком минус в *n*-области — носители отрицательных зарядов. Оба переходных слоя между *p*- и *n*-областями обладают односторонней проводимостью. Ток через каждый из этих слоев может проходить практически в том случае, если потенциал *p*-области выше потенциала *n*-области.

У транзистора имеется три вывода. В транзисторе *p-n-p*-типа первый вывод — от первой *p*-области, его называют *коллектором*, второй вывод — от второй *p*-области называют *эмиттером*, третий вывод — от *n*-области называют *базой*.

На электрических схемах транзистор p-n-p-типа изображают, как показано на рис. 15.19, *б*, а транзисторы n-p-n-типа в соответствии с рис. 15.19, *в*.

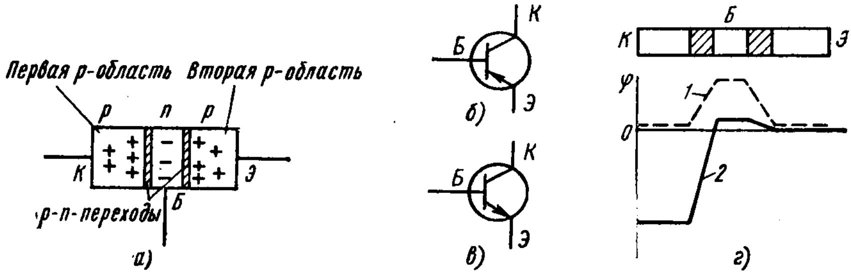


Рис. 15.19

§ 15.28. Три основных способа включения транзисторов в схему. Различают три основных способа включения триодов в схему в зависимости от того, какой из электродов транзистора является общим для управляющей и управляемой цепей. На рис. 15.20, *а* изображена схема с общей базой, на рис. 15.20, *б* — схема с общим эмиттером и на рис. 15.20, *в* — схема с общим коллектором.

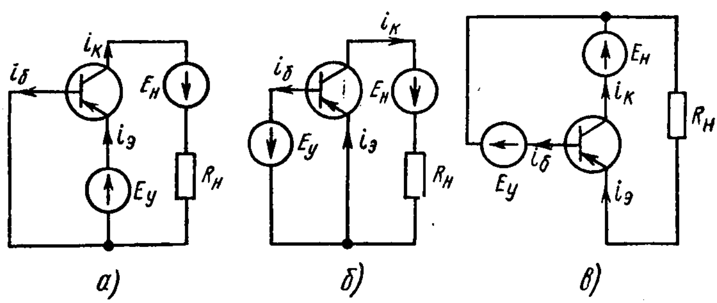


Рис. 15.20

Во всех схемах $E_н$ — источник э. д. с. в цепи нагрузки; $E_у$ — источник э. д. с. в цепи управления. Для всех схем, в которых используют транзисторы типа p-n-p, полярность источников э. д. с. должна быть такой, чтобы коллектор имел отрицательный, а эмиттер положительный потенциал по отношению к базе.

§ 15.29. Принцип работы транзистора в качестве управляемого сопротивления. Рассмотрим принцип работы транзистора p-n-p-типа в схеме с общей базой (рис. 15.20, *а*). Вследствие диффузии в переходном слое между эмиттером и базой и между базой и коллектором имеются объемные заряды (на рис. 15.19, *а* не показаны). В p-области объемные заряды отрицательны, а в n-области положительны.

Объемные заряды в каждом переходном слое создают электрическое поле, вектор напряженности которого направлен от *n*- к *p*-области, т. е. поле препятствует движению носителей положительных зарядов из *p*- в *n*-область и движению носителей отрицательных зарядов из *n*- в *p*-область.

Разность потенциалов на переходном слое между *p*- и *n*-областями называют *потенциальным барьером*. Потенциальные барьеры зависят от величины и полярности каждого источника э. д. с., включенного в схему.

Так, включение источника э. д. с. $E_у$ в схему рис. 15.20, *а* приводит к уменьшению потенциального барьера между эмиттером и базой по сравнению с разностью потенциалов на этом слое, когда источник э. д. с. $E_у$ не включен. В свою очередь включение источника э. д. с. $E_н$ приводит к увеличению потенциального барьера между базой и коллектором по сравнению с разностью потенциалов на этом слое, когда $E_н$ не включена.

Объясняется это тем, что результирующая напряженность поля на переходном слое коллектор — база при наличии э. д. с. $E_н$ равна сумме напряженностей от объемных зарядов и от э. д. с. $E_н$, тогда как на переходном слое эмиттер — база результирующая напряженность поля при наличии э. д. с. $E_у$ равна разности напряженностей от объемных зарядов и от э. д. с. $E_у$.

Кривая *1* рис. 15.19, *г* — зависимость изменения потенциала вдоль триода при отсутствии э. д. с. $E_н$ и $E_у$, кривая *2* — при наличии э. д. с. $E_н$ и $E_у$. При сниженном потенциальном барьере между эмиттером и базой энергетический уровень части носителей зарядов оказывается достаточным для того, чтобы от эмиттера к базе, соединенной с отрицательным полюсом источника э. д. с. $E_у$, двигались дырки (носители положительных зарядов).

Небольшое количество отрицательных зарядов движется при этом от базы к эмиттеру, но ток, создаваемый ими, относительно мал, так как концентрация атомов примесей в области базы значительно меньше концентрации атомов примесей в эмиттере.

Хотя в *n*-области при этом и происходит частичная рекомбинация положительных и отрицательных зарядов, однако благодаря малой толщине *n*-слоя большая часть носителей положительных зарядов успевает продрейфовать к переходному слою между базой и коллектором. В переходном слое между базой и коллектором носители положительных зарядов оказываются под воздействием сильного электрического поля, образованного источником э. д. с. $E_н$ (обычно $E_н \gg E_у$). Под действием этого поля носители положительных зарядов втягиваются в область коллектора и движутся к электроду коллектора. Таким образом, большая часть носителей положительных зарядов, вышедших из эмиттера и прошедших в *n*-область, устремляется к коллектору (потенциал коллектора отрицателен по отношению к потенциалу базы и потенциалу эмиттера).

В результате к электроду базы подходит лишь незначительное количество носителей положительных зарядов из числа тех, которые вышли из области эмиттера и прошли в область базы.

При принятых на рис. 15.20, *а* положительных направлениях для токов ток эмиттера $i_э$ равен сумме тока коллектора $i_к$ и тока базы $i_б$: $i_э = i_к + i_б$.

Отношение тока коллектора к току эмиттера $i_к/i_э = \alpha$. Обычно $\alpha = 0{,}95 \div 0{,}99$ и зависит от режима работы.

Транзистор является управляемым активным сопротивлением. В нем коллекторным током и падением напряжения между электродами коллекторной цепи можно управлять путем изменения э. д. с. $E_у$.

Следует иметь в виду, что при изменении полярности э. д. с. $E_н$ в схеме рис. 15.20, *а* транзистор теряет свойство управляемости и на участке между базой и коллектором работает как обычный неуправляемый диод. Этот режим является ненормальным режимом работы транзистора.

Принцип действия транзистора *n-p-n*-типа аналогичен принципу действия транзистора *p-n-p*-типа. Но концентрация атомов примесей в базе транзистора *n-p-n*-типа много меньше концентрации примесей в *n*-области эмиттера. В транзисторе *n-p-n*-типа в область базы поступают не дырки, а электроны. Полярность включения источников питания $E_у$ и $E_н$ транзисторов *n-p-n*-типа противоположна полярности источников питания транзисторов *p-n-p*-типа.

В соответствии с этим направления прохождения токов в соответствующих ветвях для этих типов транзисторов противоположны.

§ 15.30. Вольт-амперные характеристики транзистора. Свойства каждого транзистора определяются двумя семействами его в. а. х. Первое семейство характеристик — зависимость тока выходной цепи от напряжения между электродами транзистора, включенными в выходную цепь, при каком-либо из остальных токов транзистора, взятом в качестве параметра. В качестве параметра может быть взята и любая другая величина, например напряжение между электродами транзистора, включенными в цепь управления. Это семейство описывает свойства транзистора по отношению к выходной цепи. Второе семейство характеристик — зависимость тока входной цепи (цепи управления) от напряжения между электродами транзистора, включенными во входную цепь, при напряжении между электродами, включенными в выходную цепь (при токе выходной цепи), взятом в качестве параметра. Это семейство характеристик описывает свойства транзистора по отношению к цепи управления.

На рис. 15.21, *а* качественно изображено семейство выходных характеристик $i_к = f(u_{эк})$ при параметре $i_э$ для схемы с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*). Правее вертикальной пунктирной прямой $A - A$ кривые начинают круто подниматься. Это свидетельствует о том, что в данной зоне может произойти пробой транзистора. Поэтому в зоне правее прямой $A - A$ работать нельзя.

Расположенная в третьем квадранте кривая *OB* иллюстрирует потерю управляемости транзистора при изменении полярности э. д. с. в выходной цепи.

При протекании тока по транзистору он нагревается выделяющимся в нем теплом. Каждый транзистор в зависимости от размеров и условий охлаждения может отдавать в окружающее пространство определенное количество теплоты. Допустимое количество теплоты, выделяющейся в транзисторе, характеризуется так называемой *мощностью рассеяния* $p_к = u_{эк} i_к$ (дается в каталогах). На рис. 15.21, *а* пунктиром нанесена гипербола $i_к = p_к / u_{эк} = f(u_{эк})$. Транзистор не перегревается в условиях длительного режима в том случае, если рабочая точка находится внутри заштрихованной области (кратковременно можно работать и в области, находящейся выше пунктирной кривой). На рис. 15.21, *б* качественно изображено семейство входных характеристик транзистора $i_б = f(u_{эб})$ при параметре $u_{эк}$ в схеме с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*).

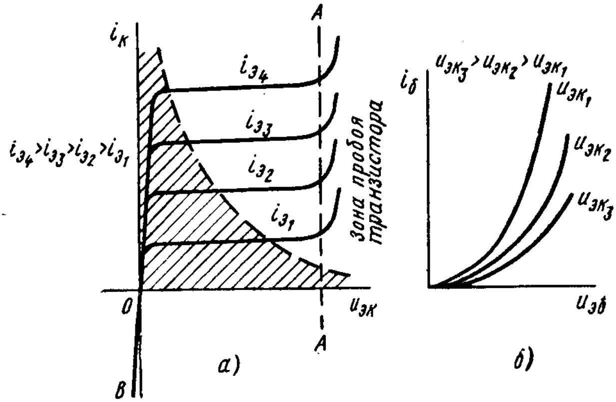


Рис. 15.21

Важно обратить внимание на то, что любой ток транзистора (например, $i_к$ или $i_б$) является функцией не одной, а двух переменных. Так, ток $i_к$ является функцией $u_{эк}$ и $i_э$, ток $i_б$ — функцией $u_{эб}$ и $u_{эк}$. (Это положение будет учтено в § 15.34.)

Транзистор может быть использован в качестве усилителя тока, напряжения и мощности.

§ 15.31. Транзистор в качестве усилителя тока. Транзистор может служить усилителем тока тогда, когда приращение тока управляемой цепи (той, где включен источник э. д. с. $E_н$) во много раз больше приращения тока управляющей цепи (той, где включен источник э. д. с. $E_у$). Из трех схем рис. 15.20 в качестве усилителя тока могут быть использованы две: схема с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*) и схема с общим коллектором (см. рис. 15.20, *в*). В обеих схемах током управления является ток базы $i_б$. Током управляемой цепи в схеме с общим эмиттером является ток коллектора $i_к$, а в схеме с общим коллектором — ток эмиттера $i_э$.

Так как $i_к = \alpha i_э$ (см. § 15.29) и в то же время $i_э = i_к + i_б$, то $i_б = i_э - i_к = (1-\alpha) i_э$.

Как уже говорилось в § 15.29, коэффициент α зависит от режима работы транзистора, т. е. от величины токов транзистора, и несколько изменяется при переходе от одного режима работы к другому.

Однако при нахождении связи между малыми приращениями токов можно в первом приближении принять $\alpha = \text{const}$ и тогда

$$\Delta i_к = \alpha \Delta i_э; \quad \Delta i_б = (1-\alpha) \Delta i_э.$$

Коэффициент усиления по току k_i равен отношению приращения тока на выходе к приращению тока на входе. Коэффициент усиления по току для схемы с общим эмиттером, где выходным током является $i_к$, а входным $i_б$,

$$k_i = \Delta i_к / \Delta i_б = \alpha/(1-\alpha).$$

Коэффициент усиления по току для схемы с общим коллектором, где выходной ток $i_э$, а входной $i_б$,

$$k_i = \Delta i_э / \Delta i_б = 1/(1-\alpha).$$

Так как коэффициент $\alpha = 0{,}95 \div 0{,}99$, то $k_i \approx 19 \div 100$.

§ 15.32. Транзистор в качестве усилителя напряжения. При работе транзистора в качестве усилителя напряжения важно, чтобы приращение напряжения на нагрузке $\Delta u_{вых}$, включенной в выходную цепь, было больше приращения напряжения на входе управляющей цепи $\Delta u_{вх}$.

Коэффициент усиления по напряжению $k_u = \Delta u_{вых}/\Delta u_{вх}$. При использовании транзистора в качестве усилителя напряжения его включают либо по схеме с общей базой (см. рис. 15.20, *а*), либо по схеме с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*).

Поясним, за счет чего получается усиление. Входное сопротивление транзистора $R_{вх}$ равно отношению приращения напряжения на входных зажимах к приращению входного тока.

Выходное сопротивление транзистора $R_{вых}$ равно отношению приращения напряжения на выходных зажимах к приращению выходного тока.

В схеме с общей базой

$$R_{вх} = R_{вх.\,эб} = \Delta u_{эб}/\Delta i_э; \quad R_{вых} = R_{вых.\,эк} = \Delta u_{эк}/\Delta i_к.$$

Для схемы с общей базой $R_{вых}$ оказывается примерно на два порядка больше, чем $R_{вх}$.

В схеме с общим эмиттером

$$R_{вх} = R_{вх.\,эб} = \Delta u_{бэ}/\Delta i_б; \quad R_{вых} = R_{вых.\,эк} = \Delta u_{эк}/\Delta i_к.$$

Для схемы с общим эмиттером $R_{вых}$ обычно в несколько раз больше $R_{вх}$.

При работе транзистора в качестве усилителя напряжения (и в качестве усилителя мощности) в обеих схемах сопротивления нагрузки $R_н$ берут обычно того же порядка, что и выходное сопротивление транзистора со стороны зажимов эмиттер — коллектор, т. е. $R_н \approx R_{вых.\,эк}$.

Составим выражения для определения k_u в схеме с общей базой:

$$k_u = \Delta u_{вых}/\Delta u_{вх} = \Delta i_к R_н/(\Delta i_э R_{вх.\,эб}),$$

но

$$\Delta i_к/\Delta i_э = \alpha, \quad а \quad R_н/R_{вх.\,эб} \approx R_{вых.\,эк}/R_{вх.\,эб},$$

следовательно, $k_u = \alpha \dfrac{R_{вых.\,эк}}{R_{вх.\,эб}}$.

Если учесть, что α близко к 1, то для схемы с общей базой $k_u \approx R_{вых.\,эк}/R_{вх.\,эб}$ и составляет величину порядка нескольких сотен.

Составим выражения для k_u в схеме с общим эмиттером.

Входным током в схеме с общим эмиттером является ток базы, а выходным — ток коллектора. Поэтому

$$k_u = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}} = \frac{\Delta i_к R_н}{\Delta i_б R_{вх.\,эб}} \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{R_{вых.\,эк}}{R_{вх.\,эб}}.$$

Если учесть, что $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \approx 19 \div 99$, а отношение $\dfrac{R_{вых.\,эк}}{R_{вх.\,эб}}$ в схеме с общим эмиттером составляет величину порядка нескольких единиц, то для схемы с общим эмиттером k_u составляет величину от нескольких десятков до нескольких сотен.

§ 15.33. Транзистор в качестве усилителя мощности. Усиление по мощности достигается во всех схемах включения рис. 15.20. Коэффициент усиления по мощности k_p равен отношению приращения мощности в нагрузке $\Delta P_н$ к приращению мощности на входе транзистора $\Delta P_у$:

$$k_p = \Delta P_н / \Delta P_у.$$

Для схемы рис. 15.20, *а*

$$k_p \approx \frac{(\Delta i_к)^2 R_н}{(\Delta i_э)^2 R_{вх.\,эб}} \approx \frac{R_{вых.\,эк}}{R_{вх.\,эб}}.$$

Таким образом, коэффициент усиления по мощности для схемы рис. 15.20, *а* в первом грубом приближении примерно равен коэффициенту усиления по напряжению для этой схемы. Наибольшее усиление по мощности достигается в схеме с общим эмиттером. Для нее k_p может достигать значений 10^4 и более.

§ 15.34. Связь между приращениями входных и выходных величин транзистора. Напряжение на входных зажимах u_1 и напряжение на выходных зажимах u_2 являются функциями входного i_1 и выходного i_2 токов, т. е.

$$u_1 = U_1(i_1, i_2); \qquad (15.42)$$

$$u_2 = U_2(i_1, i_2). \qquad (15.42а)$$

Запись $u_1 = U_1(i_1, i_2)$ свидетельствует о том, что U_1 есть функция двух переменных (i_1 и i_2). Условимся исходные значения токов и напряжений обозначать большими буквами (U, I), а приращения — малыми (Δi, Δu). Пусть токи получили малые приращения Δi_1 и Δi_2 и стали равными $I_1 + \Delta i_1$ и $I_2 + \Delta i_2$. При этом напряжения также получили приращения и стали равными $U_1 + \Delta u_1$ и $U_2 + \Delta u_2$. Следовательно,

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1[(I_1 + \Delta i_1), (I_2 + \Delta i_2)]; \qquad (15.43)$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2[(I_1 + \Delta i_1), (I_2 + \Delta i_2)]. \qquad (15.43а)$$

Найдем связь между приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2 и приращениями токов Δi_1 и Δi_2. С этой целью разложим правые части равенств (15.43) и (15.43а) в ряд Тейлора для функции от двух переменных по степеням приращений Δi_1 и Δi_2 и воспользуемся тем, что в силу малости приращений можно пренебречь слагаемыми, содержащими Δi_1 и Δi_2, в степенях выше первой. Получим:

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1, I_2) + \Delta i_1 (\partial U_1/\partial i_1)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 (\partial U_1/\partial i_2)_{I_1, I_2};$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1, I_2) + \Delta i_1 (\partial U_2/\partial i_1)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 (\partial U_2/\partial i_2)_{I_1, I_2};$$

где $(\partial U_1/\partial i_1)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по i_1, в которую подставлены значения I_1 и I_2, определяющие собой исходные значения токов (до получения приращений); $(\partial U_1/\partial i_2)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по i_2, в которую подставлены значения I_1 и I_2.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{11}; \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{12};$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{21}; \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{22}.$$

Обратим внимание на то, что $R_{21} \neq R_{12}$.

Значения R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} могут быть найдены графическим путем из характеристик транзистора или опытным путем, поэтому в дальнейшем будем полагать их известными. Если из (15.43) вычесть (15.42), а из (15.43а) — (15.42а) и затем частные производные заменить соответственно на R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, то получим:

$$\Delta u_1 = R_{11}\Delta i_1 + R_{12}\Delta i_2; \qquad (15.44)$$

$$\Delta u_2 = R_{21}\Delta i_1 + R_{22}\Delta i_2. \qquad (15.44а)$$

Для некоторых типов маломощных низкочастотных транзисторов $R_{11}=275$ Ом; $R_{12}=250$ Ом; $R_{21}=475$ кОм; $R_{22}=500$ кОм.

Формулы (15.44) связывают малые приращения токов Δi_1 и Δi_2 с малыми приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2. Из этих формул следует, что по отношению к малым приращениям транзистор, являющийся управляемым нелинейным сопротивлением, можно заменить эквивалентной линейной схемой замещения.

§ 15.35. Схема замещения транзистора для малых приращений. В специальной литературе по транзисторам в схемы замещения для малых приращений вводят не сопротивления R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, о которых шла речь, а некоторые расчетные сопротивления — сопротивления базы $R_б$, коллектора $R_к$, эмиттера $R_э$ и некоторый расчетный источник э. д. с., величина э. д. с. которого равна произведению тока управляемой цепи на расчетное сопротивление R_m.

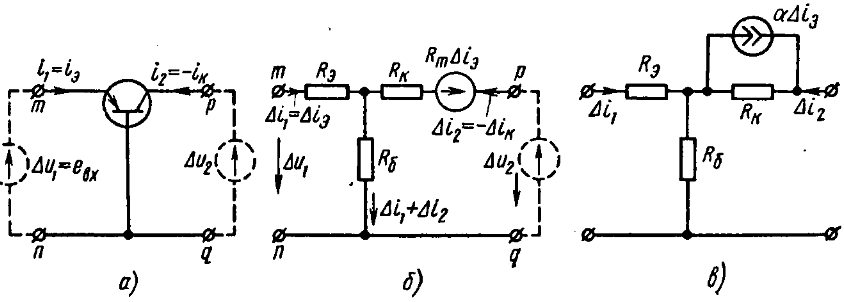


Рис. 15.22

Значения $R_б$, $R_к$, $R_э$ и R_m определяют через R_{11}, R_{12}, R_{21} и R_{22}.

Рассмотрим схему замещения транзистора, когда общим электродом является база. На рис. 15.22, *а* изображена схема с общей базой. Входным током в ней является ток $i_1=i_э$, выходным током $i_2=-i_к$ (положительное направление для тока i_2 принято противоположным положительному направлению тока $i_к$ на рис. 15.20, *а*). Схема рис. 15.22, *б* заменяет схему рис. 15.22, *а* для малых приращений.

По второму закону Кирхгофа составим уравнения для двух контуров схемы рис. 15.22, *б*:

$$\Delta u_1=(R_э+R_б)\,\Delta i_1+R_б\,\Delta i_2; \qquad (15.45)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u_2-R_m\,\Delta i_э=R_б\,\Delta i_1+(R_к+R_б)\,\Delta i_2;\\ &\Delta u_1=u_{mn}=\varphi_m-\varphi_n;\quad \Delta u_2=u_{pq}=\varphi_p-\varphi_q,\end{aligned}\right\} \qquad (15.45а)$$

где φ_m — потенциал точки m; φ_q — потенциал точки q и т. д.

При сопоставлении (15.45) и (15.45а) с (15.44) и (15.44а) определим:

$$R_э+R_б=R_{11};\quad R_б=R_{12};$$

$$R_m+R_б=R_{21};\quad R_к+R_б=R_{22}.$$

Последние уравнения дают возможность найти сопротивления $R_б$, $R_э$, $R_к$ и R_m по известным сопротивлениям R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}. Источник э. д. с. $R_m\,\Delta i_э$ $(\Delta i_э=\Delta i_1)$ введен в схему замещения рис. 15.22, *б* для того, чтобы учесть в расчете усилительное действие транзистора; э. д. с. этого источника пропорциональна входному току.

Таким образом, для расчета малых приращений входных и выходных токов в нелинейной схеме рис. 15.22, *а* определения коэффициентов усиления и входных сопротивлений следует произвести расчет линейной схемы рис. 15.22, *б*, подключив к ее входным зажимам mn источник малой (обычно синусоидальной) э. д. с., а к выходным зажимам pq — нагрузку $R_н$.

Отметим, что источники э. д. с. (тока), э. д. с. (ток) которых зависит от входного тока (напряжения), называют *зависимыми источниками*. Источник э. д. с. $R_m\,\Delta i_э$ в схеме рис. 15.22, *б* является *зависимым источником э. д. с.*

В заключение остановимся еще на двух положениях.

1. В схемах замещения транзисторов вместо зависимого источника э. д. с. и последовательно с ним включенного сопротивления $R_к$ часто используют *зависимый источник тока* и шунтирующее его сопротивление. Так, в схеме рис. 15.22, *в* вместо источника э. д. с. $R_m\,\Delta i_э$ и сопротивления $R_к$ можно включить источник тока $\frac{R_m}{R_к}\,\Delta i_э=\alpha\,\Delta i_э$ и зашунтировать его сопротивлением $R_к$.

2. При относительно высоких частотах и быстро протекающих процессах следует учитывать, что *p-n*-переходы обладают емкостными свойствами и имеет место инерционность основных носителей зарядов. Емкостные свойства учитывают

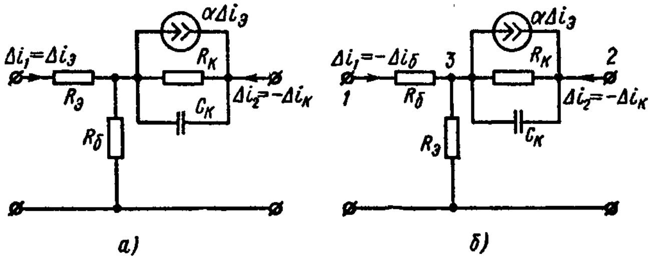


Рис. 15.23

в расчете, шунтируя в схеме замещения коллекторный *p-n*-переход некоторой емкостью $C_к$. Инерционность носителей заряда учитывают, вводя зависимость коэффициента усиления α транзистора от частоты ω (оператора p):

$$\alpha=\frac{\alpha_0}{1+p/\omega_0},$$

где α_0 — коэффициент усиления транзистора на постоянном токе; $\omega_0^{-1}=R_кC_к$.

Емкость эммитерного перехода обычно не учитывают, так как она шунтирует относительно малое по сравнению с $R_к$ сопротивление $R_э$. Для высокой частоты схема замещения транзистора, собранного по схеме с общей базой, изображена на рис. 15.23, *а*, с общим эмиттером — на рис. 15.23, *б*. В зависимости от типа транзистора $R_к$ имеет значение от нескольких десятых мегома до нескольких мегом; $R_э$ — нескольких десятков ом; $R_б$ — нескольких десятков или сотен ом; $C_к$ — от нескольких единиц до нескольких десятков пикофарад.

§ 15.36. Графический расчет схем на транзисторах. Расчет схем на транзисторах при относительно низких частотах на практике иногда производят не с помощью рассмотренных схем замещения, при использовании которых необходимо знать $R_э$, $R_б$, $R_к$ и R_m, а путем непосредственного использования семейства характеристик транзистора. Этот способ расчета показан на примере 153.

Пример 153. Определить коэффициенты усиления по току, напряжению и мощности схемы рис. 15.24, *а*, предназначенной для усиления слабых синусоидальных колебаний.

В этой схеме использован транзистор П14. Его выходные характеристики изображены на рис. 15.24, *в* и входные — на рис. 15.24, *б*. Параметром на рис. 15.24, *в* является ток $i_б$. Сопротивление нагрузки $R_н=500$ Ом. Э. д. с. смещения в выходной цепи $E_{к0}=10$ В. Э. д. с. смещения в цепи управления $E_{у0}=0{,}25$ В.

Решение. На рис. 15.24, *в* проводим прямую, представляющую собой в. а. х. нагрузки $R_н = 500$ Ом. Эта прямая пройдет через точку $i_к = 0$ и $u_{эк} = E_{к0} = 10$ В и через точку $i_к = E_{к0}/R_н = 20$ мА и $u_{эк} = 0$.

Семейство входных характеристик транзистора П14, как это видно из рис. 15.24, *б*, обладает той особенностью, что в интервале значений $u_{эк} = 0{,}2 \div 10$ В зависимость тока базы $i_б$ от напряжения между эмиттером и базой изображается одной и той же кривой (практически не зависит от $u_{эк}$). Найдем значение тока $i_б = I_{б0}$ при отсутствии синусои-

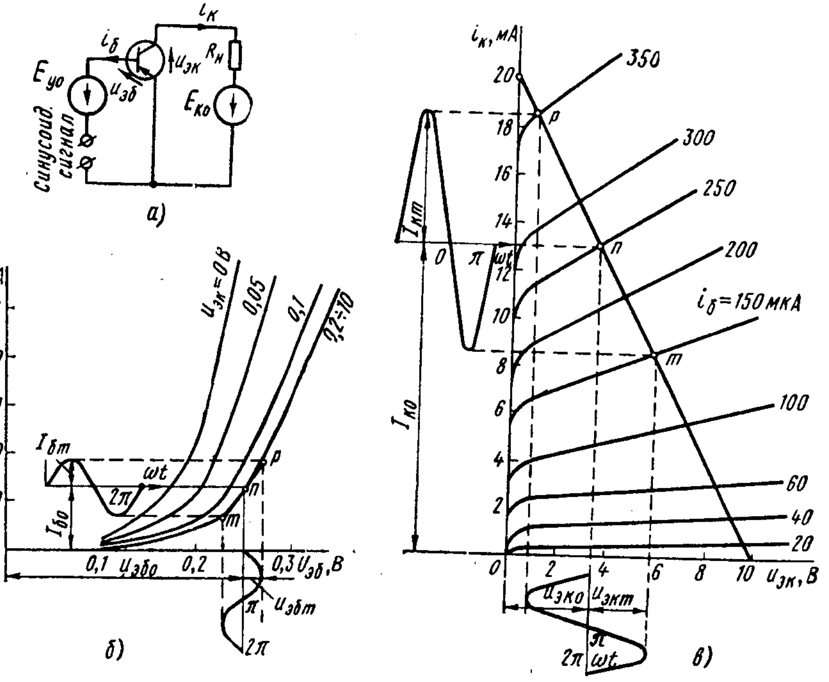


Рис. 15.24

дального сигнала на входе, т. е. в режиме, когда на вход цепи управления действует только постоянная э. д. с. $E_{у0} = 0{,}25$ В (цепь управления замкнута через источник сигнала).

Из рис. 15.24, *б* следует, что при $u_{эб} = 0{,}25$ В ток $i_б = I_{б0} = 250$ мкА (точка *n*). Далее найдем ток $i_к = I_{к0}$ и напряжение $u_{эк} = U_{эк0}$ в этом режиме.

На семействе кривых рис. 15.24, *в* режим работы при $E_у = E_{у0}$ определяется точкой *n*, полученной в результате пересечения в. а. х. нагрузки с той кривой семейства $i_к = f(u_{эк})$, для которой параметром является $i_б = 250$ мкА.

В точке *n* $i_к = I_{к0} = 13{,}1$ мА и $u_{эк} = U_{эк0} = 3{,}5$ В. Линеаризуем входную характеристику в рабочей точке. С этой целью проведем в окрестности точки *n* (рис. 15.24, *б*) прямую так, чтобы она на возможно большем участке совпала с касательной к кривой $i_б = f(u_{эб})$

в точке n. Крайними точками проведенной прямой будем считать точки p и m. В точке p ток $i_б = 350$ мкА и $u_{эб} = 0,27$ В. В точке m ток $i_б = 150$ мкА и $u_{эб} = 0,23$ В. Этим точкам соответствуют одноименные точки p и m на рис. 15.24, *в*.

В точке p рис. 15.24, *в* $i_к = 18,6$ мА, в точке m $i_к = 8,6$ мА. Таким образом, при подаче на вход схемы синусоидального напряжения с амплитудой $U_{эб\,m} = 0,02$ В в цепи управления появится синусоидальная составляющая тока, имеющая амплитуду $I_{бm} = I_{уm} = 100$ мкА, а в выходной цепи кроме постоянного тока $I_{к0}$ появится синусоидальный ток с амплитудой $I_{кm} = 5,0$ мА *. При этом на выходных зажимах транзистора действует синусоидальная составляющая напряжения, имеющая амплитуду $U_{эк\,m} = 2,45$ В.

Найдем искомые коэффициенты усиления.

Коэффициент усиления по току

$$k_i = \Delta i_{вых}/\Delta i_{вх} = I_{кm}/I_{уm} = 5,0\ (мА)/100\ (мкА) = 50.$$

Коэффициент усиления по напряжению

$$k_u = \Delta u_{вых}/\Delta u_{вх} = R_н I_{кm}/U_{эб\,m} = 500 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}/0,02 = 125.$$

Коэффициент усиления по мощности

$$k_P = \Delta P_{вых}/\Delta P_{вх} = (R_н I_{кm}^2)/(U_{эб\,m} I_{уm}) =$$
$$= 500\,(5,0 \cdot 10^{-3})^2/0,02 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 6250.$$

Входное сопротивление транзистора между зажимами эмиттер — база для синусоидальной составляющей

$$R_{вх.\,эб} = U_{эб\,m}/I_{уm} = 0,02\ (В)/100\ (мкА) = 200\ (Ом).$$

Выходное сопротивление между зажимами эмиттер — коллектор для синусоидальной составляющей

$$R_{вых.\,эк} = U_{эк\,m}/I_{кm} = 2,45\ (В)/5,0\ (мА) = 490\ (Ом).$$

В тепловом отношении транзистор работает в ненапряженных условиях, так как мощность, выделяемая в нем в режиме, соответствующем точке n (рис. 15.24, *б*),

$$U_{эк0} I_{к0} = 3,5\ (В) \cdot 13,1\ (мА) = 45,8\ (мВт),$$

что значительно меньше допустимой для данного транзистора мощности рассеяния 150 мВт.

§ 15.37. Основные сведения о трехэлектродной лампе. Трехэлектродная лампа (триод) имеет три электрода: катод, анод и сетку. Эти электроды находятся в вакуумированном стеклянном или металлическом баллоне.

Катод, подогреваемый нитью накала от вспомогательной батареи (обычно не показываемой на схемах), испускает электроны вследствие явления термоэлектронной эмиссии. Поток электронов направляется

---

* Берем первую гармонику переменной составляющей коллекторного тока.

ко второму (холодному) электроду — аноду — только в том случае, если потенциал анода выше потенциала катода. Если же потенциал анода сделать ниже потенциала катода, то потока электронов от катода к аноду не будет (в этом случае анод не притягивает электроны, а отталкивает их). В результате этого электронная лампа обладает несимметричной в. а. х.

Третий электрод — сетка — расположен ближе к катоду, чем анод. Поэтому электрическое поле, создаваемое между сеткой и катодом, даже при малых напряжениях между ними оказывает сильное влияние на поток электронов с катода на анод. Сетка является управляющим электродом. Путем изменения потенциала сетки можно управлять анодным током лампы. Как и транзистор, электронная лампа может быть включена в схему тремя основными способами: с общим катодом, с общей сеткой и с общим анодом (в зависимости от того, какой из электродов является общим для анодной и сеточной цепей).

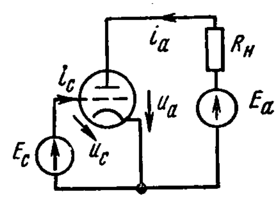


Рис. 15.25

На рис. 15.25 изображена наиболее часто употребляемая схема — схема с общим катодом. Как и транзистор, электронная лампа может служить в качестве усилителя тока, напряжения и мощности. Возможность выполнения лампой всех этих функций основывается на том, что изменение разности потенциалов между сеткой и катодом оказывает более сильное влияние на поток электронов с катода на анод, чем изменение (на ту же величину) разности потенциалов между анодом и катодом.

§ 15.38. **Вольт-амперные характеристики трехэлектродной лампы для мгновенных значений.** Цепь, образованная анодом и катодом трехэлектродной лампы, источником э. д. с. $E_а$ и нагрузкой $R_н$, называют анодной цепью.

Цепь, образованную сеткой и катодом электронной лампы и источником э. д. с. $E_с$, называют сеточной цепью.

Напряжение между анодом и катодом $u_а$ называют анодным напряжением, между сеткой и катодом $u_с$ — сеточным напряжением.

Ток в анодной цепи $i_а$ и ток в сеточной цепи $i_с$ нелинейно зависят от анодного и сеточного напряжений $u_а$ и $u_с$.

Под анодными характеристиками трехэлектродной лампы понимают зависимость анодного тока $i_а$ от анодного напряжения $u_а$ при сеточном напряжении $u_с$, взятом в качестве параметра.

На рис. 15.26 изображено семейство анодных характеристик лампы. Стрелка на рис. 15.26 (а также на рис. 15.27 и 15.28) указывает направление, в котором возрастает параметр.

Если семейство анодных характеристик рассечь прямыми $u_а = \text{const}$, то можно получить семейство кривых $i_а = f(u_с)$ при параметре $u_а$. Такие кривые называются сеточными (анодно-сеточными) характеристиками трехэлектродной лампы (рис. 15.27). Для них характерно, что ток $i_а \neq 0$ при $u_с = 0$, а также что имеется область насыщения, в которой ток $i_а$ почти не увеличивается с ростом $u_с$.

Семейство зависимостей сеточного тока i_c от сеточного напряжения u_c при различных значениях анодного напряжения и положительных значениях u_c для одного из типов ламп изображено на рис. 15.28.

В общем случае при работе лампы одновременно меняются u_a и u_c и изображающая точка на семействах анодных и сеточных характеристик перемещается с одних кривых на другие. В частном случае работы, когда u_a остается неизменным или почти неизменным, $i_a = f(u_c)$ изображается одной кривой семейства кривых рис. 15.27.

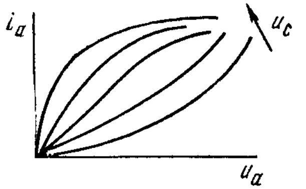


Рис. 15.26

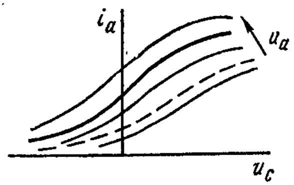


Рис. 15.27

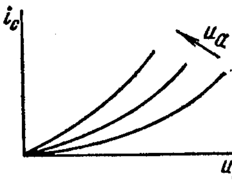


Рис. 15.28

Если электронная лампа работает при отрицательных или сравнительно малых положительных напряжениях на сетке, то сеточный ток имеет малую величину и его в расчете, как правило, не учитывают.

Следует отметить своеобразие сеточной характеристики по сравнению с обычными вольт-амперными: сеточная характеристика дает связь не между током через нелинейное сопротивление и напряжением на нем, что характерно для «обычных» в. а. х., а между мгновенным значением тока через нелинейное сопротивление и мгновенным значением управляющего напряжения на этом сопротивлении.

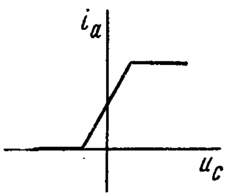


Рис. 15.29

§ 15.39. Аналитическое выражение сеточной характеристики электронной лампы. Сеточная характеристика при $u_a = \text{const}$ может быть приближенно представлена отрезками прямых (рис. 15.29). Часть сеточных характеристик, например характеристика, выделенная жирной линией на рис. 15.27, может быть описана полиномом третьей степени:

$$i_a = i_{a0} + au_c - bu_c^3.$$

Здесь i_{a0} — значение тока i_a при $u_c = 0$; a и b — числовые коэффициенты; a измеряется в А·В$^{-1}$; b — в А·В$^{-3}$.

Для определения коэффициентов a и b следует выбрать на характеристике две точки с координатами i_{a1}, u_{c1} и i_{a2}, u_{c2} и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} i_{a1} &= i_{a0} + au_{c1} - bu_{c1}^3; \\ i_{a2} &= i_{a0} + au_{c2} - bu_{c2}^3. \end{aligned}\right\}$$

Характеристика по типу пунктирной кривой на рис. 15.27 может быть приближенно описана полиномом второй степени:

$$i_a = i_{a0} + pu_c + qu_c^2,$$

где p и q — числовые коэффициенты.

Существуют аналитические выражения и для анодных характеристик.

§ 15.40. Связь между малыми приращениями входных и выходных величин электронной лампы. Как уже говорилось в § 15.39, анодный ток $i_а$ является функцией не только анодного, но и сеточного напряжения: $i_а = I_а(u_а, u_с)$. Если по отношению к некоторому исходному состоянию $(U_а, U_с)$ сеточное напряжение получит небольшое приращение $\Delta u_с$, то оно вызовет приращения анодного напряжения $\Delta u_а$ и анодного тока $\Delta i_а$.

Если проделать выкладки, аналогичные выкладкам § 15.34, то получим

$$\Delta i_а = \Delta u_а \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а, U_с} + \Delta u_с \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а, U_с}.$$

Частную производную $(\partial I_а / \partial u_а)_{U_а,\ U_с}$, в которую подставлены значения $U_а$ и $U_с$, соответствующие исходному состоянию, принято называть *внутренней проводимостью* электронной лампы (проводимость между анодом и катодом)

$$g_i = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}. \qquad (15.46)$$

Величину, обратную g_i, называют *внутренним сопротивлением* лампы (сопротивление между анодом и катодом):

$$R_i = 1/g_i. \qquad (15.47)$$

Частную производную $(\partial I_а / \partial u_с)_{U_а,\ U_с}$, подсчитанную при исходных значениях $U_а$ и $U_с$, называют *крутизной характеристики* лампы (имеет размерность проводимости):

$$S = \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}. \qquad (15.48)$$

Проводимость g_i и крутизна характеристики S зависят от вида характеристик лампы и исходных напряжений $U_а$ и $U_с$. Отношение S к g_i называют *коэффициентом усиления* лампы:

$$\mu = \frac{S}{g_i} = \frac{\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}}{\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}}. \qquad (15.49)$$

Коэффициент усиления лампы μ показывает, во сколько раз приращение напряжения между сеткой и катодом $\Delta u_с$ оказывается более эффективным, чем приращение напряжения между анодом и катодом $\Delta u_а$ в отношении получения одинакового приращения анодного тока $\Delta i_а$. С учетом сказанного формулу для $\Delta i_а$ можно записать следующим образом:

$$\Delta i_а = \Delta u_а g_i + \Delta u_с S, \qquad (15.50)$$

или

$$\Delta u_а = R_i \, \Delta i_а - \mu \, \Delta u_с. \qquad (15.50а)$$

§ 15.41. Схема замещения электронной лампы для малых приращений. На схеме рис. 15.30, *а* через $U_н$, $U_а$, $U_с$, $I_а$ обозначены постоянные составляющие напряжений и тока, соответствующие исходному состоянию схемы (до получения приращения сеточного напряжения). Положительные направления для приращений $\Delta u_с$, $\Delta u_а$, $\Delta i_а$ те же, что и для исходных напряжений и токов.

Составим уравнение для приращений напряжений в анодной цепи, вызванных приращением напряжения $\Delta u_с$ на сетке лампы. С этой целью составим два уравнения по второму закону Кирхгофа для анодной цепи. Одно из них для режима до получения приращений: $U_а + U_н = E$, другое — для режима после получения приращений: $U_а+\Delta u_а+U_н+\Delta u_н=E$. Если в последнем уравнении $U_а+U_н$ заменить на E, то окажется, что

$$\Delta u_а+\Delta u_н=0, \tag{15.51}$$

где $\Delta u_н$ — приращение напряжения на нагрузке $R_н$.

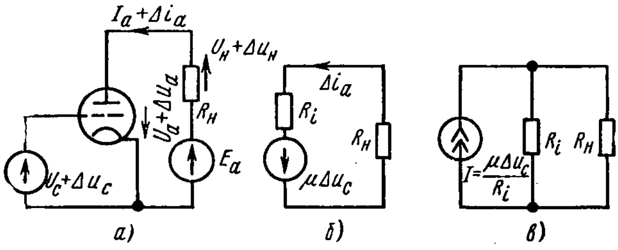


Рис. 15.30

В уравнение (15.51) вместо $\Delta u_н$ подставим $R_н\,\Delta i_а$ и вместо $\Delta u_а$ в соответствии с уравнением (15.50а) подставим $R_i\,\Delta i_а-\mu\,\Delta u_с$. Получим

$$(R_н+R_i)\,\Delta i_а=\mu\,\Delta u_с. \tag{15.52}$$

Уравнению (15.52) отвечает схема рис. 15.30, *б*. В этой схеме к источнику э. д. с. $\mu\,\Delta u_с$ присоединены сопротивление нагрузки $R_н$ и внутреннее сопротивление электронной лампы R_i. Таким образом, для малых приращений анодную цепь электронной лампы замещают (имитируют) источником э. д. с. $\mu\,\Delta u_с$ и последовательно с ним включенным сопротивлением R_i. Э. д. с. этого источника пропорциональна изменению напряжения на сетке лампы (т. е. это зависимый источник э. д. с.; ср. с § 15.35).

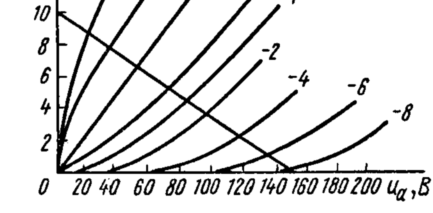


Рис. 15.31

На рис. 15.30, *в* изображена другая часто используемая схема замещения. В ней вместо источника э. д. с. включены источник тока $\mu\,\Delta u_с/R_i$ и шунтирующее его сопротивление R_i (напомним, что переход от источника э. д. с. к источнику тока рассмотрен в § 1.2).

В схемах 15.30, *б*, *в* не учтены межэлектродные емкости, поэтому такие схемы применимы для относительно низких частот. (Схема замещения для высоких частот изображена на рис. 9.3, *б*.)

Пример 154. Между сеткой и катодом триода 6С2С приложено напряжение $U_с+\Delta u_с=U_с+U_{сm}\sin\omega t=-2+0{,}05\sin\omega t$ (рис. 15.30, *а*). Зависимость анодного тока $i_а$ от анодного напряжения $u_а$ при параметре $u_с$ изображена на рис. 15.31. Э. д. с. $E_а=150$ В; $R_н=15$ кОм. Найти параметры схемы замещения триода и определить с помощью этой схемы амплитуду синусоидальной составляющей тока в анодной цепи.

Решение. Определим положение рабочей точки на характеристиках лампы по постоянному току. На рис. 15.31 наносим прямую, характеризующую нагрузочное сопротивление анодной цепи $R_н$. (Ее часто называют нагрузочной прямой.) Прямая проходит через точки $i_а=0$, $u_а=150$ В и $i_а=E_а/R_н=10$ мА, $u_а=0$.

Рабочей точкой в рассматриваемом режиме будет точка пересечения прямой с той кривой семейства, для которой параметр $u_с=-2$ В. Координаты этой точки: $u_а=94$ В и $i_а=3{,}67$ мА.

По определению [см. формулу (15.46)], для нахождения g_i следует, считая за исходное положение найденную рабочую точку, при неизменном $u_c = -2$ В дать приращение анодному напряжению Δu_a, найти соответствующее ему приращение анодного тока Δi_a и разделить Δi_a на Δu_a:

$$g_i = \partial i_a/\partial u_a \approx \Delta i_a/\Delta u_a = 5 \text{ мА}/50 \text{ В} = 10^{-4} \text{ См}. \quad R_i = 1/g_i = 10^4 \text{ Ом}.$$

Проводимость g_i пропорциональна тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке к кривой $i_a = f(u_a)$, для которой $u_c = -2$ В.

Для определения крутизны характеристики S при $u_a = 94$ В даем приращение сеточному напряжению $\Delta u_c = -1-(-2) = 1$ В и из рисунка находим соответствующее ему приращение $\Delta i_a = 4{,}67 - 3{,}67 = 1$ мА. Следовательно, $S = \partial i_a/\partial u_c \approx \Delta i_a/\Delta u_c = 10^{-3}$ А/В. Коэффициент усиления $\mu = S/g_i = 10$. Амплитуда синусоидальной составляющей тока в анодной цепи согласно (15.52)

$$I_{1m} = \frac{\mu u_{cm}}{R_н + R_i} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ А}.$$

Анодный ток $i_a = 3{,}67 + 0{,}02 \sin \omega t$ мА.

§ 15.42. Построение зависимости вход — выход для электронной лампы при больших сигналах. Напряжение между сеткой и катодом u_c является входным, а напряжение на нагрузке $R_н$ (см. рис. 15.30, *а*) — выходным. Напряжение на нагрузке равно произведению тока i_a на сопротивление $R_н$. Если амплитуда переменной составляющей напряжения u_c достаточно большая (например, соизмерима или больше постоянной составляющей напряжения U_c), то линейные схемы замещения рис. 15.30, *б*, *в* применять нельзя. Определение зависимости тока i_a от времени t при подаче на сетку лампы напряжения любой формы и любой амплитуды можно производить путем графических построений. Сущность последних состоит в следующем:

1. Придавая времени t различные значения, находят отвечающие им мгновенные значения u_c.

2. Для каждой пары соответствующих друг другу значений t и u_c анодный ток i_a определяют ординатой точки пересечения нагрузочной прямой и той кривой семейства $i_a = f(u_a)$, для которой данное значение u_c является параметром.

3. Строят кривую зависимости $i_a = f(t)$. Разложение ее в ряд Фурье позволяет найти постоянную составляющую, а также амплитуду первой и высших гармоник ряда Фурье. Повторив построения при иной амплитуде или иной форме напряжения u_c, определяют новые значения постоянной составляющей и амплитуд первой и высших гармоник тока i_a. В результате ряда таких построений получают данные, на основании которых можно построить любые представляющие интерес зависимости между входными и выходными величинами. В принципе аналогичные построения могут быть проделаны и для транзистора.

§ 15.43. Тиристор — управляемый полупроводниковый диод. На рис. 15.32, *а* изображена простейшая схема включения тиристора. Тиристор — это четырехслойный полупроводниковый прибор с тремя *p-n*-переходами (*1*, *2*, *3*). Напряжения на них обозначены u_1, u_2, u_3; в. а. х. *p-n*-переходов *1* и *3* изображены на рис. 15.32, *б*; в. а. х. перехода *2* — на рис. 15.32, *в* (включен встречно *p-n*-переходам *1* и *3*). При $u_2 = u_{заж}$ в переходе *2* происходит лавинная ионизация (пунктир на рис. 15.32, *в*). Суммарная в. а. х. трех переходов $i = f(u)$, т. е. в. а. х. всего тиристора, изображена на рис. 15.32, *г*. Она получена сложением абсцисс рис. 15.32, *в* и двух абсцисс рис. 15.32, *б*. Участок *1* — *2* на ней соответствует участку лавинной ионизации второго *p-n*-перехода.

Если при замкнутом ключе *К* рис. 15.32, *а* э. д. с. *Е* станет немного больше $u_{заж}$, тиристор зажжется, т. е. перейдет в открытое состояние. Ток в цепи станет равным току i_p на рис. 15.32, *д*. Прямую *1* на рис. 15.32, *д* называют нагрузочной. Для погашения тиристора необходимо, чтобы ток через него уменьшился до $i < i_2$ (рис. 15.32, *г*). До сих пор речь шла о работе тиристора в режиме отсутствия управляющего сигнала (так работает тиристор — см. § 13.2). При воздействии управляющего сигнала (импульса тока или напряжения) на управляющий электрод (расположенный вблизи *p-n*-перехода *2*, см. рис. 15.32, *а*) от вспомогательной цепи, не показанной на рис. 15.32, *а*, происходит лавинная ионизация *p-n*-перехода *2*. Подавая импульсы управления, можно снижать напряжение зажигания (т. е. зажигать прибор при более низком $u_{заж}$).

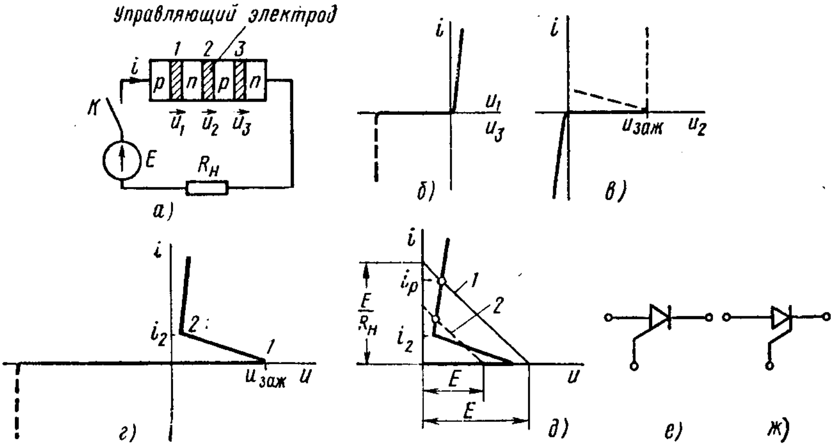


Рис. 15.32

Пунктиром на рис. 15.32, *д* показано положение нагрузочной прямой *2* в управляемом тиристоре. Переход от закрытого состояния к открытому происходит за доли микросекунды. Тиристоры выполняют на токи от долей миллиампер до нескольких килоампер. На рис. 15.32, *е*, *ж* показано условное изображение тиристора на схемах.

Рис. 15.32, *е* соответствует управлению тиристором со стороны анода, рис. 15.32, *ж* — со стороны катода.

§ 15.44. Общая характеристика методов анализа и расчета нелинейных электрических цепей переменного тока. Анализ нелинейных явлений и получение числовых соотношений в нелинейных цепях переменного тока является более сложным и трудоемким, чем анализ и расчет линейных электрических цепей.

Как правило, в нелинейных электрических цепях содержатся либо нелинейные индуктивности, либо нелинейные емкости, либо безынерционные в тепловом отношении нелинейные активные сопротивления. Токи и напряжения в таких цепях в той или иной степени несинусоидальны.

Токи и напряжения в большей степени синусоидальны в цепях, содержащих только инерционные в тепловом отношении нелинейные активные сопротивления.

Все методы анализа нелинейных цепей можно подразделить на две большие группы: аналитическую и графическую. Аналитические методы в отличие от графических дают возможность проводить анализ в общем виде, а не только для частных значений параметров.

Недостатком аналитических методов является то, что приходится выражать аналитически характеристики нелинейных сопротивлений, а это всегда связано с некоторой погрешностью. Расчет сколько-нибудь сложных нелинейных электрических цепей переменного тока можно произвести лишь с известной степенью приближения.

Наиболее широко распространены следующие методы анализа и расчета нелинейных цепей переменного тока:

1) графический при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений;

2) аналитический при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации;

3) аналитический или графический при использовании в. а. х. по первым гармоникам;

4) аналитический или графический при использовании в. а. х. по действующим значениям несинусоидальных величин;

5) аналитический путем расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам;

6) с помощью линейных схем замещения;

7) малого параметра;

8) интегральных уравнений;

9) моделирования на моделях.

В дальнейшем кратко охарактеризован каждый метод. Тот или иной метод целесообразно применять в зависимости от характера цепи, формы в. а. х. нелинейного сопротивления, а также от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется. Чем сложнее характер нелинейного явления, тем более сложным и громоздким оказывается метод его анализа. И, наоборот, анализ грубых нелинейных явлений производится более простыми средствами.

§ 15.45. Графический метод при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений. Этот метод применим, как правило, к цепям, в которых известен закон изменения во времени какой-либо одной определяющей работу нелинейного сопротивления величины, например тока, напряжения, заряда.

Последовательность расчета данным методом такая:

1) исходя из физических предпосылок, положенных в основу анализа, находят закон изменения во времени одной из определяющих работу нелинейного сопротивления величины;

2) используя характеристики (характеристику) нелинейного сопротивления для мгновенных значений, путем графических построений

находят закон изменения во времени второй величины, определяющей работу нелинейного сопротивления;

3) по результатам п. 2 путем вспомогательных графических построений и простейших расчетов находят выходную величину и искомое соотношение между параметрами схемы.

Достоинствами метода являются простота и наглядность, а также легкость учета гистерезисных явлений. Примеры см. в § 15.8 и 15.24.

§ 15.46. Аналитический метод при использовании характеристики нелинейного сопротивления для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации. Основным содержанием метода является сведение задачи о нахождении периодического решения нелинейных уравнений к нахождению периодического решения системы линейных уравнений.

Основные этапы метода следующие:

1) замена вольт-амперной (вебер-амперной, кулон-вольтной) характеристики нелинейного сопротивления (нелинейного элемента) для мгновенных значений отрезками прямых линий;

2) подстановка в нелинейные дифференциальные уравнения уравнений прямых п. 1 (этим нелинейные дифференциальные уравнения будут сведены к линейным). Каждому нелинейному уравнению будет соответствовать столько линейных уравнений, сколько отрезков прямых заменяет характеристику нелинейного сопротивления (элемента);

3) решение системы линейных дифференциальных уравнений. Каждому линейному участку характеристики нелинейного сопротивления будет соответствовать свое решение со своими постоянными интегрирования;

4) определение постоянных интегрирования исходя из согласования решения на одном линейном участке с решением на другом линейном участке.

Наиболее эффективен этот метод, когда характеристику нелинейного элемента с известной степенью приближения можно заменить отрезками прямых, расположенных таким образом, что когда одна величина, определяющая режим работы нелинейного элемента, например ток, меняется, то другая, например потокосцепление, неизменна.

Еще более эффективен метод, если отрезки прямых, заменяющие в. а. х. нелинейного элемента, могут быть взяты совпадающими с осями координат.

Пример решения задачи для этого случая см. в § 15.51 ÷ 15.53.

§ 15.47. Аналитический (графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений. В этом методе по сложному закону изменяющиеся токи и напряжения на нелинейном сопротивлении заменяют их первыми гармониками. В расчете используют в. а. х. по первым гармоникам в аналитической форме или в виде графической зависимости.

Основные этапы расчета в аналитическом варианте:

1) выражают аналитически в. а. х. нелинейного сопротивления для мгновенных значений;

2) путем подстановки в нее первой гармоники напряжения или тока получают формулу, которая дает нелинейную связь между амплитудой первой гармоники тока через нелинейное сопротивление и амплитудой первой гармоники напряжения на нем [в качестве примера такой связи можно назвать формулу (15.19)];

3) в уравнение, составленное для исследуемой цепи по второму закону Кирхгофа, подставляют вместо мгновенных значений тока и напряжения на нелинейном сопротивлении мгновенные значения их первых гармоник, а высшими гармониками пренебрегают;

4) уравнение разбивают на два уравнения: одно из них выражает собой равенство коэффициентов при синусных слагаемых левой и правой частей уравнения, другое — равенство коэффициентов при косинусных слагаемых обеих частей уравнения;

5) производят совместное решение этих двух уравнений.

Основные этапы расчета в графическом варианте:

1) в качестве зависимости между амплитудой первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении и амплитудой первой гармоники тока через него берется нелинейная зависимость в виде графика. Эта зависимость может быть получена любым путем, в том числе и опытным;

2) произвольно задаются амплитудой I_{1m} первой гармоники тока через нелинейное сопротивление, из графика находят соответствующую ей амплитуду первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении и затем путем построения векторной диаграммы по первой гармонике для всей схемы определяют амплитуду U_{1m} первой гармоники напряжения на входе схемы. Построение векторной диаграммы производится так же, как и для обычных линейных цепей синусоидального тока, а именно: если не учитывать потери в сердечнике, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивности опережает первую гармонику протекающего через нее тока на 90°, первая гармоника напряжения на нелинейной емкости отстает от протекающего через нее тока на 90°; первые гармоники напряжения и тока на нелинейном активном сопротивлении по фазе совпадают;

3) путем построения нескольких векторных диаграмм для различных значений I_{1m} находят соответствующие им U_{1m} и строят в. а. х. всей схемы $U_{1m}=f(I_{1m})$.

Данный метод позволяет исследовать такие нелинейные явления, как преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, явление резонанса на основной гармонике, триггерный эффект на первой гармонике, некоторые типы автомодуляционных процессов. Но он не позволяет исследовать более сложные явления, как, например, резонанс на высших и низших гармониках, резонанс на дробных гармониках и др.

Если пользоваться аналитическим вариантом этого метода, то решение можно получить в общем виде, что весьма существенно, так как становится возможным исследовать решение при изменении любого из параметров цепи. Этот метод будет применен для анализа работы автогенератора (см. § 15.55) и для анализа разветвленной цепи с нелинейной индуктивностью (см. пример 159).

§ 15.48. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования вольт-амперных характеристик для действующих значений. В этом методе графический расчет проводят путем использования в. а. х. нелинейных сопротивлений для действующих значений, полученных расчетным или опытным путем.

В этом методе полагают, что в действительности несинусоидально изменяющиеся токи и напряжения могут быть заменены эквивалентными им синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения).

Все этапы расчета рассматриваемым методом полностью совпадают с перечисленными в § 15.47 этапами графического расчета методом первой гармоники. Отличие между методами состоит только в том, что в данном методе используется в. а. х. не для первых гармоник, а для действующих значений.

Метод применен в дальнейшем для исследования простейших явлений в феррорезонансных цепях (см. § 15.57—15.62).

Если исследуют нерезонансные электрические цепи или резонансные, но для которых по тем или иным соображениям заранее известно, что в изучаемых режимах работы в них не могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках, то амплитуда первой гармоники тока, как правило, оказывается больше амплитуд высших гармоник тока. При этом действующее значение тока в цепи сравнительно мало отличается от действующего значения первой гармоники тока.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример: пусть ток в цепи содержит первую и третью гармоники и действующее значение третьей гармоники тока составляет 40% от действующего значения первой гармоники ($I_3 = 0{,}4 I_1$). Действующее значение несинусоидального тока будет $\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1{,}075 I_1$, т. е. всего на 7,5% больше действующего значения первой гармоники I_1.

Метод позволяет изучать некоторые свойства нерезонансных электрических цепей, как, например, эффект усиления мощности. Для исследования свойств резонансных нелинейных цепей метод пригоден в ограниченной степени. Так, им можно приближенно исследовать простейший триггерный эффект (см. § 15.59), но нельзя, например, исследовать резонансные явления на высших гармониках.

§ 15.49. Аналитический метод расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам. Решение этим методом осуществляют в такой последовательности: 1) составляют систему дифференциальных уравнений цепи; 2) аналитически выражают характеристики нелинейных элементов и полученные выражения подставляют в дифференциальные уравнения цепи.

Решение для искомой величины изображают в виде ряда, состоящего из первой и одной или нескольких высших или низших гармоник, например в виде

$$x = x_{1m} \sin \omega t + x_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3).$$

Предполагаемое решение подставляют в уравнения системы.

В результате этой подстановки оказывается возможным разбить уравнения системы на несколько трансцендентных алгебраических уравнений, составленных относительно амплитуды первой гармоники, амплитуд высших (соответственно низших) гармоник и их фаз.

Число трансцендентных уравнений в общем случае в два раза больше числа учитываемых гармоник, поскольку для каждой из гармоник уравнение разбивается на два — на уравнение для синусной и уравнение для косинусной составляющих.

Далее совместно решают систему трансцендентных уравнений. Трудность решения состоит в том, что каждое из трансцендентных уравнений обычно содержит все неизвестные. Поэтому при решении часто используют метод последовательных приближений.

Решение этим методом, как правило, довольно громоздко. Однако метод позволяет исследовать такие сложные явления в нелинейных цепях, как резонанс на высших гармониках, низших и дробных гармониках и т. п. Более подробно с методом можно ознакомиться, например, в [21].

Рассматриваемый метод в литературе называют также методом гармонического баланса. Частным случаем его является метод первой гармоники (см. § 15.47).

§ 15.50. Расчет с помощью линейных схем замещения. Этот метод применим к расчету нелинейных электрических цепей, на которые воздействуют постоянные и синусоидально изменяющиеся э. д. с., если переменные составляющие токов и напряжений относительно малы, например во много раз меньше соответственно постоянных составляющих токов и напряжений.

Последовательность расчета такова:

1) определяют положение рабочей точки на характеристике нелинейного сопротивления по постоянному току. В окрестности этой точки будет перемещаться изображающая точка под воздействием малой переменной э. д. с.;

2) через рабочую точку по постоянному току проводят касательную к характеристике нелинейного сопротивления и производят замену участка характеристики нелинейного сопротивления отрезком касательной;

3) составляют линейную схему замещения для расчета переменной составляющей. Вид схемы зависит от характера нелинейного сопротивления, а ее параметры — от величины тангенса угла, составленного касательной к характеристике и одной из осей координат.

Применение вычислительных машин. Математические счетные машины применяют для: 1) табулирования решений систем трансцендентных уравнений и систем алгебраических уравнений высоких степеней; 2) табулирования решений, выраженных в виде медленно сходящихся рядов; 3) интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, к которым сводятся нелинейные дифференциальные уравнения при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных сопротивлений, а также в некоторых других случаях.

§ 15.51. Расчет электрических цепей, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых имеют почти прямоугольную кривую намагничивания. Кривые намагничивания некоторых высококачественных магнитномягких материалов, например 65НП, 68НМП и др., близки по форме к прямоугольной: на участке $O-a$ рис. 15.33, *а* кривая почти совпадает с осью ординат, а на участке $a-b$ расположена почти параллельно оси абсцисс.

На рис. 15.33, *а* пунктиром показана предельная петля гистерезиса. Коэрцитивная сила H_c для таких материалов очень мала и составляет всего 1 — 10 А/м.

Расчет электрических цепей переменного тока, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых выполнены из упомянутых магнитных материалов, обычно производят с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации (см. § 15.46). Для облегчения расчета кривую намагничивания заменяют идеально прямоугольной (рис. 15.33, *б*). Участки *4—1* и *2—3* параллельны оси абсцисс, а участок *1—2* совпадает с осью ординат.

Если изображающая точка перемещается по участку *1—2*, то изменяется только индукция в сердечнике при напряженности поля в сердечнике, почти равной нулю.

При движении изображающей точки по участкам *4—1* и *2—3* меняется только напряженность поля H, а индукция в сердечнике остается неизменной.

Пример 155. Схема рис. 15.33, *в* состоит из источника синусоидальной э. д. с. $u = e = E_m \sin \omega t$, нелинейной индуктивности с заданной зависимостью потокосцепления ψ от тока i и активного сопротивления R.

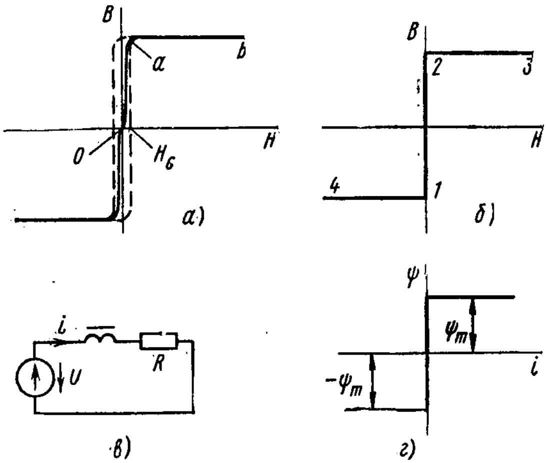


Рис. 15.33

Вывести формулу для определения ψ и i и построить графики изменения ψ и i во времени в установившемся режиме.

Решение. Так как потокосцепление ψ равно произведению индукции в сердечнике B на площадь поперечного сечения сердечника и на число витков обмотки, т. е. $\psi = BSw$, а по закону полного тока ток $i = \frac{Hl}{w}$, т. е. пропорционален напряженности магнитного поля в сердечнике, то зависимость потокосцепления ψ от тока i (рис. 15.33, *г*) качественно такая же, как и зависимость $B = f(H)$ (рис. 15.33, *б*). Имеем

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t. \qquad (15.53)$$

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_1$ (назовем его первым) ток $i = 0$, все напряжение приходится на нелинейную индуктивность, $d\psi/dt = E_m \sin \omega t$ и потокосцепление ψ изменяется от $-\psi_m$ до $+\psi_m$ (изображающая точка на рис. 15.33, *б* перемещается от *1* к *2*).

В этом интервале $d\psi = E_m \sin \omega t \, dt$, следовательно,

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C, \qquad (15.54)$$

где C — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ потокосцепление ψ остается постоянным и равным ψ_m; $d\psi/dt = 0$; из уравнения (15.33) получим

$$Ri = E_m \sin \omega t, \quad \text{или} \quad i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t. \tag{15.55}$$

Таким образом, во втором интервале времени ток i изменяется по закону синуса, потокосцепление ψ постоянно и равно ψ_m. При этом изображающая точка на рис. 15.33, *б* перемещается по участку *2—3*.

Найдем постоянную интегрирования C и значение ωt_1. Для определения C запишем уравнение (15.54) при $\omega t = 0$. При $\omega t = 0$ $\psi = -\psi_m$, поэтому $-\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C$. Отсюда $C = -\psi_m + \frac{E_m}{\omega}$.

Для определения ωt_1 воспользуемся также уравнением (15.54), учтя, что при $\omega t = \omega t_1$ $\psi = \psi_m$. Получим

$$\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t_1 - \psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

Отсюда

$$\cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m} \quad \text{или} \quad \omega t_1 = \arccos\left(1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right).$$

Характер изменения тока i, потокосцепления ψ и $\frac{d\psi}{dt}$, когда $\frac{\omega\psi_m}{E_m} < 1$, показан на рис. 15.34.

Если амплитуда э. д. с. $E_m < \omega\psi_m$, то второго интервала времени не возникнет, т. е. ток $i = 0$ в течение всего периода.

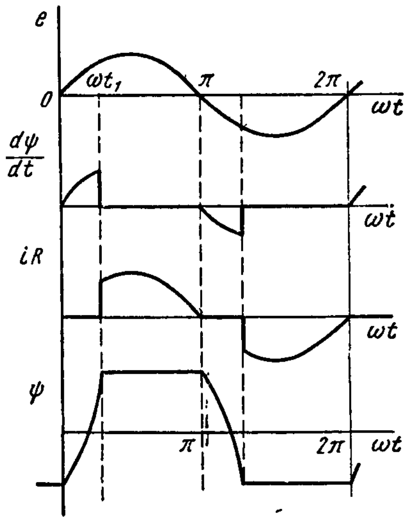


Рис. 15.34

§ 15.52. Расчет электрических цепей, содержащих нелинейные емкости с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой. Метод расчета рассмотрим на примере цепи рис. 15.35, *а*, которая состоит из источника синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin \omega t$, нелинейной емкости с почти прямоугольной кулон-вольтной характеристикой (рис. 15.35, *б*) и активного сопротивления R. Задача эта близка рассмотренной в § 15.51. По второму закону Кирхгофа, $u_C + R\frac{dq}{dt} = e$. При перезарядке емкости изображающая точка движется по участку *2—1* характеристики $q = f(u_C)$; при этом $u_C = 0$. Когда перезарядка закончится, все напряжение источника окажется приложенным к емкости. При $t = 0$ $q = -q_m$. В интервале перезарядки, когда $u_C = 0$,

$$R\frac{dq}{dt} = E_m \sin \omega t; \quad q = -\frac{E_m}{\omega R}\cos \omega t - q_m + \frac{E_m}{\omega R}.$$

К концу перезарядки при ωt_1 q достигает значения q_m:

$$\cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\omega R q_m}{E_m}.$$

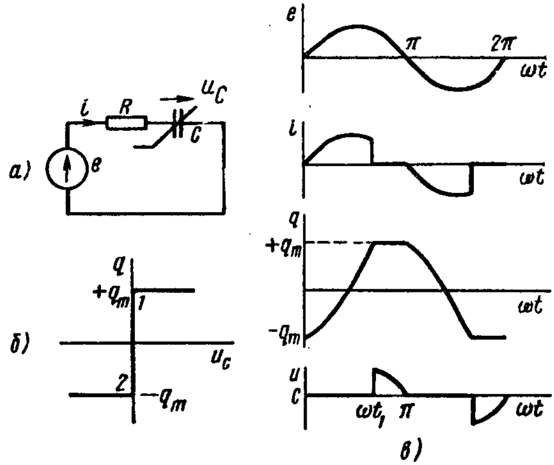


Рис. 15.35

В интервале времени от ωt_1 до π $u_C = E_m \sin \omega t$.

Графики i, q, u_C изображены на рис. 15.35, *в*.

§ 15.53. Субгармонические колебания. *Субгармоническими* называют колебания, период которых $T_{ск}$ больше периода $T = 2\tau$ вынуждающей силы $e(t)$. Число $m = T_{ск}/T$ характеризует порядок субгармонических колебаний. В цепи рис. 15.36, *а*

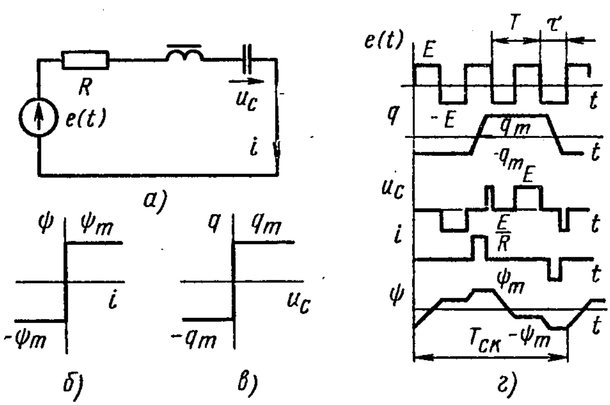


Рис. 15.36

с нелинейной индуктивностью и нелинейной емкостью, имеющими идеально прямоугольные характеристики (рис. 15.36, *б*, *в*), при воздействии э. д. с. $e(t) = \pm E$

в виде меандра (рис. 15.36, *г*) могут существовать субгармонические колебания нечетного порядка.

Если обозначить $a = 2\psi_m/(\tau E)$ и $b = 2Rq_m/(\tau E)$, то для существования субгармонических колебаний в цепи рис. 15.36, *а* необходимо, чтобы $a > 1$ и $b < 1$. Порядок m равен сумме смежных чисел натурального ряда, в интервале между которыми находится сумма $a+b$. Так, для существования колебаний третьего порядка необходимо, чтобы $1 < a+b < 2$. Физически субгармонические колебания возникают потому, что за время τ потокосцепление ψ нелинейной индуктивности не успевает измениться на величину $2\psi_m$. Условие $b < 1$ означает, что перезарядка нелинейной емкости на величину $2q_m$ должна происходить за время, меньшее τ.

Графики э. д. с. $e(t)$, заряда q, напряжения на емкости u_C, тока i и потокосцепления ψ при колебаниях третьего порядка ($m=3$, $a=1{,}25$ и $b=0{,}5$) изображены на рис. 15.36, *г*. При построении кривых учтено, что увеличение заряда может иметь место *только после того*, как ψ достигло значения ψ_m, а уменьшение заряда — *только после того*, как ψ достигло значения $-\psi_m$.

§ 15.54. Выпрямление переменного напряжения. Под выпрямлением переменного напряжения понимают процесс преобразования переменного напряжения в постоянное или пульсирующее. Выпрямление производят с помощью полупроводниковых, ламповых или других типов выпрямителей (диодов).

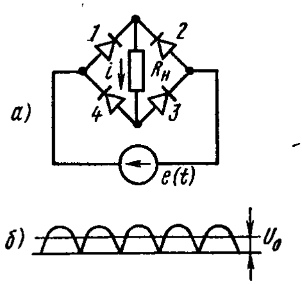


Рис. 15.37

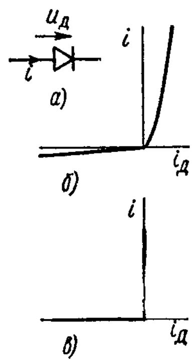


Рис. 15.38

Неуправляемый диод изображают на схемах в виде большой треугольной стрелки с поперечной чертой у острия. Стрелка показывает проводящее направление. Сопротивление диода в проводящем направлении в тысячи раз меньше, чем в непроводящем.

По числу фаз выпрямленного переменного напряжения выпрямительные схемы делятся на однофазные и многофазные. Однофазные схемы подразделяют на схемы однополупериодного и двухполупериодного выпрямления.

В однополупериодных схемах выпрямление производится в течение одного полупериода питающего напряжения, в двухполупериодных — в течение обоих полупериодов.

Простейшая мостовая схема однофазного двухполупериодного выпрямления представлена на рис. 15.37, *а*. Она состоит из четырех полупроводниковых диодов (*1*, *2*, *3* и *4*), источника выпрямляемого синусоидального напряжения $e(t)$ и активной нагрузки $R_н$. На рис. 15.38, *а* показаны положительные направления тока i и напряжения $u_д$ на диоде.

На рис. 15.38, *б* изображена в. а. х. диода.

В целях облегчения анализа вместо нее будем пользоваться идеализированной в. а. х., изображенной на рис. 15.38, *в*.

В соответствии с этой идеализированной характеристикой, когда через диод проходит ток, падение напряжения на нем равно нулю и, следовательно, сопротивление самого диода равно нулю. Когда напряжение на диоде отрицательно (т. е. отрицательна взятая в направлении стрелки рис. 15.38, *а* разность потенциалов на самом диоде), диод не проводит тока ($i=0$) и сопротивление его равно бесконечности.

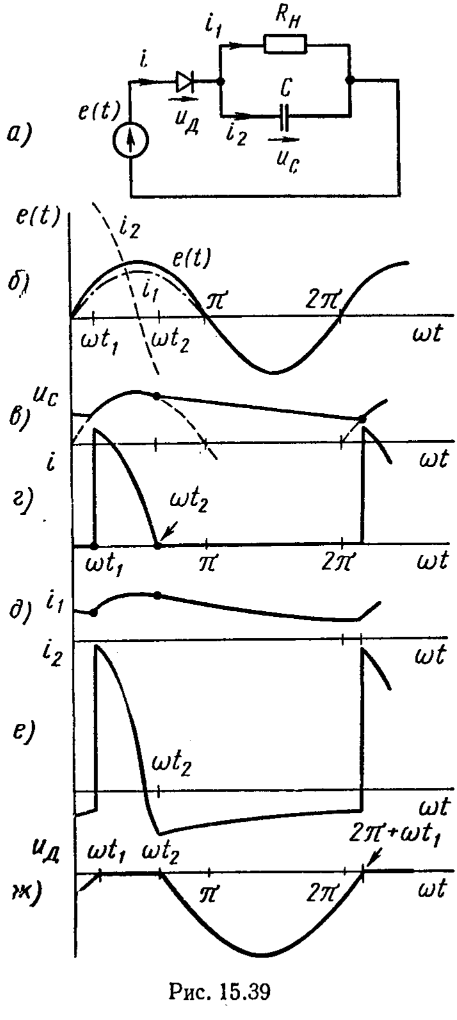


Рис. 15.39

Диод *открывается*, когда напряжение на нем, увеличиваясь, становится равным нулю, и *закрывается*, когда ток через него, уменьшаясь, становится равным нулю.

Рассмотрим работу мостовой схемы рис. 15.37, *а*.

Источник э. д. с. включен в одну диагональ этой схемы, а нагрузка $R_н$ — в другую. Диоды работают попарно.

В первый полупериод, когда э. д. с. $e(t)$ действует согласно с положительным направлением напряжения на диодах *1* и *3*, эти диоды проводят ток, а диоды *2* и *4* тока не проводят. Во второй полупериод, когда э. д. с. $e(t)$ изменит знак и действует согласно с положительным направлением напряжения на диодах *2* и *4*, ток проводят диоды *2* и *4*, а диоды *1* и *3* тока не проводят. Направление прохождения тока через нагрузку показано на рис. 15.37, *а* стрелкой. Ток через нагрузку протекает все время в одном и том же направлении. Форма напряжения на нагрузке иллюстрируется кривой рис. 15.37, *б*. Через U_0 обозначено среднее значение напряжения на нагрузке.

Пример 156. Рассмотрим работу схемы однополупериодного выпрямления, когда нагрузка $R_н$ шунтирована емкостью C (рис. 15.39, *а*); $e(t)=E_m \sin \omega t$.

Решение. По законам Кирхгофа, $u_д+u_C=e(t)$, $u_C=i_1R_н$, $i=i_1+i_2$. В соответствии с в. а. х. рис. 15.38, *в* диод закрыт и сопротивление его теоретически равно бесконечности, когда напряжение на нем $u_д$ отрицательно. Диод открывается в момент ωt_1, когда напряжение на нем $u_д = e(t) - u_C$, увеличиваясь, становится равным нулю. Как только диод откроется, напряжение на емкости становится равным э. д. с.: $u_C = E_m \sin \omega t_1$.

Как только диод откроется, ток через емкость станет изменяться по закону $i_2 = C \frac{du_C}{dt} = \omega C E_m \cos \omega t$ (пунктир на рис. 15.39, *б*), а ток через нагрузку — по закону $i_1 = \frac{u_C}{R_н} = \frac{E_m}{R_н} \sin \omega t$ (пунктир с точкой на рис. 15.39, *г*). Ток через диод $i = i_1 + i_2 = E_m \left(\omega C \cos \omega t + \frac{1}{R_н} \sin \omega t \right)$ (рис. 15.39, *г*) в момент ωt_2 становится равным нулю и диод закрывается; $\operatorname{tg} \omega t_2 = -\omega CR$; $\omega t_2 = \operatorname{arctg}(-\omega CR)$; $(R = R_н)$.

В интервале от ωt_2 до $2\pi + \omega t_1$ емкость разряжается на $R_н$ (рис. 15.39, *в*) и напряжение на ней изменяется во времени по показательному закону $u_C = E_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{(\omega t - \omega t_2)}{\omega CR}}$, $\omega t > \omega t_2$ (см. гл. 8). При этом $i_1 = u_C / R_н$, $i_2 = -i_1$ (кривые рис. 15.39, *д*, *е*). Зависимость $u_д(\omega t)$ изображена на рис. 15.39, *ж*. Момент открытия диода ωt_1 определим из условия $u_C(\omega t_1) = e(\omega t_1)$. Из этого условия получаем трансцендентное уравнение относительно ωt_1:

$$\sin \omega t_2 e^{-\frac{(2\pi + \omega t_1 - \omega t_2)}{\omega CR}} = \sin \omega t_1.$$

В следующий период процесс повторяется. Чем больше величина RC по сравнению с периодом $2\pi/\omega$, тем меньше пульсация напряжения на нагрузке $R_н$.

§ 15.55. Ламповый генератор. Ламповый генератор * является простейшим, не содержащим подвижных частей преобразователем энергии источника постоянной э. д. с. в энергию переменного тока.

Возникающие в ламповом генераторе колебания относятся к классу колебаний, называемых автоколебаниями.

Автоколебания представляют собой периодические колебания, возникающие в системах, находящихся под воздействием постоянных вынуждающих сил (сил, не являющихся функцией времени).

В системе, описанной здесь, источником постоянной вынуждающей силы является источник постоянной э. д. с. $E_а$.

Рассмотрим принцип работы лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 15.40, *а*). В анодную цепь лампы включены индуктивность $L_а$ и источник э. д. с. $E_а$. В сеточной цепи имеется колебательный контур, состоящий из индуктивности L, магнитно связанной с $L_а$, активного сопротивления R и емкости C.

Выходными зажимами генератора являются зажимы индуктивности $L_а$. Напряжение на этих зажимах по форме близко к синусоидальному.

Воспользовавшись методом первой гармоники (см. § 15.47), определим амплитуду и угловую частоту автоколебаний в схеме рис. 15.40, *а*, когда сеточная характеристика лампы по форме близка: а) к жирной

* Его называют также ламповым автогенератором. Кроме схемы рис. 15.40, *а* с колебательным контуром в сеточной цепи применяется схема и с колебательным контуром в анодной цепи. Все выводы § 15.55 распространяются и на схему с колебательным контуром в анодной цепи.

кривой рис. 15.27 и б) к пунктирной кривой рис. 15.27. Эти кривые повторены на рис. 15.40, *б*, *в*.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений величин колебательного контура сеточной цепи, учтя, что

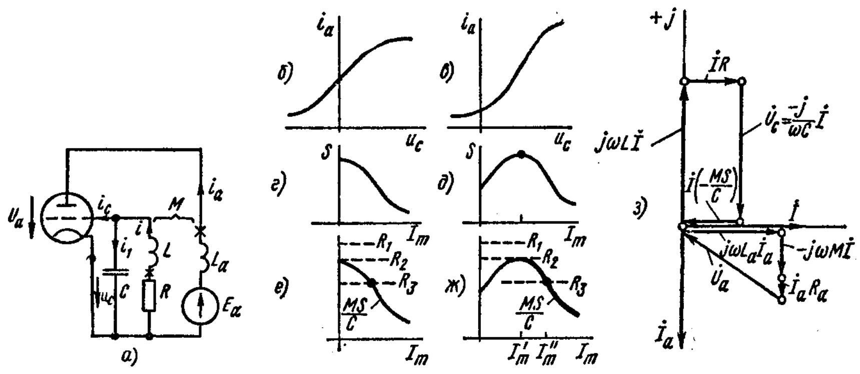


Рис. 15.40

при выбранных положительных направлениях для токов имеет место встречное включение магнитносвязанных индуктивностей L и L_a:

$$L\frac{di}{dt}-M\frac{di_a}{dt}+Ri+u_C=0, \tag{15.56}$$

где u_C — напряжение на сетке лампы (оно же напряжение на емкости).

Из опыта известно, что ток i изменяется во времени почти по гармоническому закону, поэтому положим $i=I_m\sin\omega t$. Тогда

$$\frac{di}{dt}=\omega I_m\cos\omega t;\quad u_C=\frac{1}{C}\int i\,dt=-\frac{1}{\omega C}I_m\cos\omega t=-U_{Cm}\cos\omega t,$$

где $U_{Cm}=I_m 1/\omega C$ $(i_C=0)$.

Анодный ток является функцией сеточного напряжения $i_a=f(u_C)$ (рис. 15.40, *б*, *в*). Так как зависимость $i_a=f(u_C)$ однозначна, то первая гармоника тока i_a, т. е. $-I_{am}\cos\omega t$, находится в фазе с первой гармоникой $u_C=-U_{Cm}\cos\omega t$.

Производная di_a/dt уравнения (15.56) может быть найдена следующим образом: $\frac{di_a}{dt}=\frac{di_a}{du_C}\cdot\frac{du_C}{dt}$. Но

$$\frac{di_a}{du_C}\approx\frac{\Delta i_a}{\Delta u_C}=\frac{-I_{am}\cos\omega t}{-U_{Cm}\cos\omega t}=\frac{I_{am}}{U_{Cm}}=S, \tag{15.57}$$

где S — крутизна характеристики лампы по первой гармонике. Ее находят графическим или аналитическим путем по характеристике $i_a=f(u_C)$, придавая I_m различные значения. Каждому значению I_m соответствует некоторое U_{Cm}, а значит, и некоторые I_{am} и S. В свою очередь,

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{d}{dt}(-U_{Cm}\cos\omega t)=\frac{I_m}{C}\sin\omega t\ (U_{Cm}=I_m 1/\omega C).$$

На рис. 15.40, *г*, *д* изображены зависимости $S=f(I_m)$, соответствующие рис. 15.40, *б*, *в*. Для рис. 15.40, *г* с ростом I_m уменьшается S вследствие насыщения (из рис. 15.40, *б* видно, что при больших u_C анодный ток почти не увеличивается с ростом u_C). Зависимость $S=f(I_m)$, изображенная на рис. 15.40, *д*, имеет другой характер: сначала S возрастает вследствие перехода на более крутой участок кривой $i_а=f(u_C)$ рис. 15.40, *в*, а затем уменьшается вследствие насыщения. Подставив найденные значения $di_а/dt$, u_C и тока i в уравнение (15.56), получим

$$\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)I_m\cos\omega t+\left(R-\frac{MS}{C}\right)I_m\sin\omega t=0. \qquad (15.58)$$

Сумма двух функций, одна из которых изменяется во времени по закону синуса, а другая — по закону косинуса, равна нулю для любого момента времени. Это может быть либо в случае, когда $I_m=0$ (колебания отсутствуют), либо при $I_m\neq 0$, когда выполняются два условия:

$$\omega L=1/(\omega C); \qquad (15.59)$$

$$R=MS/C. \qquad (15.60)$$

Из (15.59) следует, что угловая частота автоколебаний

$$\omega=1/\sqrt{LC}. \qquad (15.61)$$

Исследуем условия возбуждения колебаний, используя (15.60). С этой целью построим зависимость левой и правой частей (15.60) в функции от I_m — рис. 15.40, *е*, *ж* (рис. 15.40, *е* соответствует рис. 15.40, *г*, а рис. 15.40, *ж* — рис. 15.40, *д*), полагая, что изменяется R, а M и C неизменны. Сопротивление R не является функцией амплитуды тока I_m, поэтому левая часть (15.60) представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. Чем меньше R, тем ниже расположится прямая. Правая часть (15.60) — кривая, подобная кривой рис. 15.40, *г* или кривой рис. 15.40, *д*.

При $R>R_2$ прямая не пересекается с кривой, поэтому колебания отсутствуют. Колебания возбудятся при $R\leqslant R_2$. Рис. 15.40, *е* иллюстрирует так называемое *мягкое возбуждение колебаний*, когда при уменьшении R амплитуда тока I_m плавно увеличивается начиная с нулевого значения. Рис. 15.40, *ж* иллюстрирует так называемое *жесткое возбуждение колебаний*, когда при плавном уменьшении R амплитуда I_m скачком увеличивается с нуля до некоторого относительно большого значения, например при $R=R_2$ до I'_m, а при $R=R_3$ до I''_m.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены условия возбуждения колебаний, если оставить неизменными R и M и изменять C или если R и C неизменны, а меняется M. Правая ветвь кривой рис. 15.40, *ж* соответствует устойчивым колебаниям (вычерчена утолщенной линией), левая — неустойчивым колебаниям (левая ветвь кривой является нерабочей ветвью). Для токов и напряжений сеточной и анодной цепей (для их первых гармоник) могут быть построены векторные диаграммы для действующих значений первых гармоник (рис. 15.40, *з*). Уравнению (15.58) соответствует уравнение в комплексах

$$j\omega L\dot{I} - \frac{j}{\omega C}\dot{I} + \dot{I}R - \dot{I}\frac{MS}{C} = 0. \tag{15.62}$$

Для мгновенных значений изменяющихся во времени величин анодной цепи (постоянная составляющая тока $i_а$, напряжения $u_а$ и постоянная э. д. с. $E_а$ не учитываются) справедливо уравнение

$$L_а\frac{di_а}{dt} - M\frac{di}{dt} + i_аR_а + u_а = 0.$$

Ему соответствует уравнение в комплексах

$$j\omega L_а\dot{I}_а - j\omega M\dot{I} + \dot{I}_аR_а + \dot{U}_а = 0, \tag{15.63}$$

где $R_а$ — активное сопротивление индуктивности $L_а$; $\dot{U}_а$ — комплекс первой гармоники анодного напряжения.

Энергия на покрытие потерь в сеточной цепи доставляется из анодной цепи вследствие наличия магнитной связи между ними.

Воздействие выходной цепи (в данном случае анодной) на входную цепь (в рассматриваемом случае на сеточную) называют *обратной связью*. Обратная связь является необходимым условием существования автоколебаний.

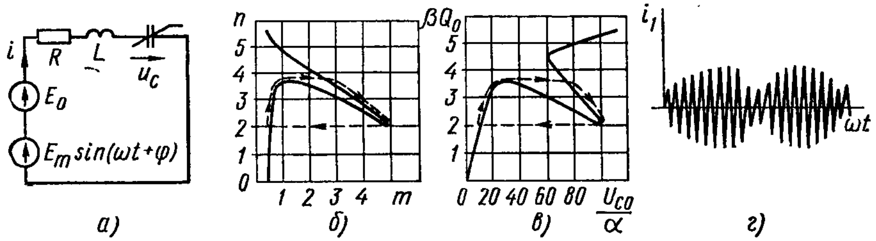


Рис. 15.41

§ 15.56. **Автомодуляция.** *Автомодуляцией* называют режим работы нелинейной электрической цепи, находящейся под воздействием периодической вынуждающей силы частотой ω, при которой амплитуды токов и напряжений в цепи периодически изменяются без воздействия внешнего модулирующего фактора. Автомодуляция возникает вследствие неустойчивости периодического режима работы на частоте вынуждающей силы ω. Процесс оказывается периодическим или почти периодическим для огибающих амплитуд первых гармоник.

Выведем основные зависимости, описывающие процесс автомодуляции в схеме рис. 15.41, *а* с нелинейной емкостью, кулон-вольтную характеристику которой в соответствии с § 15.26 выразим в виде $u_C = \alpha \operatorname{sh} \beta q$.

Так как в цепи действуют постоянная E_0 и синусоидальная $E_m \sin(\omega t + \varphi)$ э. д. с., то заряд q имеет постоянную и синусоидальную компоненты: $q = Q_0 + Q_m \sin \omega t$.

Постоянная составляющая напряжения на емкости (см. § 15.16)

$$U_{C0} = \alpha \operatorname{sh} \beta Q_0 J_0(j\beta Q_m);$$

первая гармоника $u_{C_1} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1(j\beta Q_m)] \sin \omega t$;

первая гармоника тока $i_1 = \omega Q_m \cos \omega t$.

Если в уравнение цепи

$$iR+L\frac{di}{dt}+u_C=E_0+E_m\sin(\omega t+\varphi)$$

подставить записанные выражения для i_1, $U_{C_0}+u_{C_1}$ и разбить его в соответствии с методом гармонического баланса на уравнение для постоянной составляющей, для синусной и косинусной компонент, а затем два последних уравнения возвести в квадрат и сложить для устранения угла φ, то, введя обозначения

$$a=\beta E_m/(\omega^2 L),\ b=R/\omega L,\ c=2\alpha\beta/(\omega^2 L);\ \beta Q_0=n,\ \beta Q_m=m,$$

получим два следующих уравнения:

$$\alpha\ \mathrm{sh}\ nJ_0(jm)=E_0=U_{C0}; \qquad (а)$$

$$b^2m^2+\{c[-jJ_1(jm)\ \mathrm{ch}\ n-m\}^2=a^2. \qquad (б)$$

Разрешим (б) относительно ch n:

$$\mathrm{ch}\ n=\frac{m\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}}{c[-jJ_1(jm)]}. \qquad (в)$$

Уравнение (в) дает связь между n и m, обусловленную параметрами цепи по первой гармонике частоты ω, а уравнение (а) по постоянной составляющей. На рис. 15.41, *б* изображена зависимость n от m, построенная по соотношению (в) при $a=0{,}5$; $b=0{,}1$; $c=0{,}054$. Верхний участок кривой соответствует знаку плюс, а нижний — знаку минус перед радикалом в формуле (в).

Задаваясь значениями n в интервале $0\div 6$ и беря соответствующие им значения m из рис. 15.41, *б*, по формуле (а) строим зависимость $\beta Q_0=f(U_{C0}/\alpha)$ (рис. 15.41, *в*). Из рисунка видно, что в области значений $U_{C0}/\alpha=35\div 60$ имеется падающий участок, не прикрытый восходящими участками.

Если $E_0=U_{C0}$ будет такова, что изображающая точка окажется на падающем участке характеристики рис. 15.41, *в*, то режим вынужденных колебаний окажется неустойчивым и в системе начнется процесс автомодуляции. Последний будет процессом устойчивым, так как для него имеется единственный предельный цикл.

На рис. 15.41, *б*, *в* пунктиром показано, как двигается изображающая точка при автомодуляции. Стрелки указывают направление движения.

На рис. 15.41, *г* показан характер изменения во времени тока i_1 (первой гармоники тока i).

§ 15.57. Определение феррорезонансных цепей. Рассмотрим группу довольно грубых явлений, которые имеют место в цепях, содержащих нелинейную индуктивность и линейную емкость; такие цепи называют *феррорезонансными*. Аналогичные явления имеют место в цепи с линейной индуктивностью и нелинейной емкостью.

Для анализа этих явлений можно воспользоваться методом первой гармоники (см. § 15.47) или методом расчета по действующим значениям (см. § 15.48). В § 15.58 — 15.61 будет применен метод расчета по действующим значениям. При этом будем пользоваться в. а. х. нелинейной индуктивности для действующих значений тока и напряжения. В этом методе в действительности несинусоидальные токи и напряжения заменяют их эквивалентными синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения по § 7.12).

Когда в § 15.58 — 15.61, 15.64, 15.67 говорится о сдвиге по фазе между током и напряжением на каком-либо элементе схемы, то под ним понимают угол между эквивалентным синусоидальным током и эквивалентным синусоидальным напряжением.

§ 15.58. Построение вольт-амперной характеристики последовательной феррорезонансной цепи. В схеме рис. 15.42, *а* последовательно включены нелинейная индуктивность L, линейное активное сопротивление R и линейная емкость C. В. а. х. катушки со стальным сердечником $U_L = f(I)$ изображается кривой *1* на рис. 15.42, *б*; в. а. х. емкости $U_C = I\frac{1}{\omega C}$ — прямой *2*; в. а. х. активного сопротивления $U_R = RI$ — прямой *3*.

Точки, принадлежащие результирующей в. а. х. схемы — кривой *4*, получаем следующим образом.

Произвольно задаемся некоторым током I, находим для него разность напряжений $U_L - U_C$ (напряжения на индуктивности и на емкости находятся в противофазе) и напряжение U_R; результирующее напряжение U равно гипотенузе треугольника, построенного на катетах U_R и $U_L - U_C$.

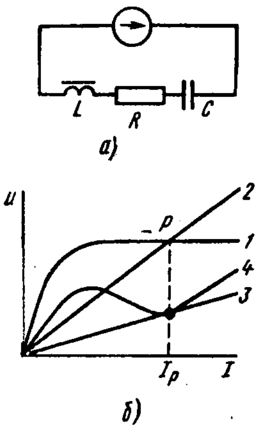


Рис. 15.42

При сравнительно малом активном сопротивлении R на результирующей в. а. х. цепи имеется падающий участок, а сама в. а. х. имеет N-образную форму. С увеличением R падающий участок на в. а. х. исчезает.

§ 15.59. Триггерный эффект в последовательной феррорезонансной цепи. Феррорезонанс напряжений. На рис. 15.43, *а* отдельно представлена кривая *4* рис. 15.42, *б*. Будем начиная с нуля плавно увеличивать напряжение источника э. д. с. в схеме 15.42, *а*. При этом изображающая точка на рис. 15.43, *а* перемещается от точки *0* через точку *1* к точке *2*. Если напряжение и дальше повышать, то изображающая точка скачком переместится из точки *2* в точку *4*, а затем движение будет происходить по участку *4* — *5*.

При уменьшении напряжения изображающая точка перемещается от точки *5* через *4* к точке *3*, затем произойдет скачок в точку *1* и далее от точки *1* к точке *0*. Таким образом, при увеличении напряжения и достижении им значения U_2 в цепи происходит скачкообразное увеличение тока со значения I_2 до I_4. При этом резко изменяется угол сдвига фаз между током в цепи и общим напряжением: в точке *2* ток отстает от напряжения ($U_L > U_C$), в точке *4* ток опережает напряжение ($U_C > U_L$). При плавном уменьшении напряжения источника э. д. с. и достижении им значения U_1 ток в цепи скачком уменьшается со значения I_3 до I_1.

Явление резкого изменения тока в цепи при незначительном изменении напряжения на входе будем называть *триггерным эффектом в последовательной феррорезонансной цепи.*

Если схему рис. 15.42, *а* подключить к источнику напряжения U, величина которого находится в интервале между U_1 и U_2, то в схеме установится один из двух возможных режимов. Первый режим соответствует положению рабочей точки на участке между точками *1* и *2*, второй — на участке между точками *3* и *4*.

На каком из двух участков окажется рабочая точка, зависит от характера переходного процесса в цепи при подключении ее к источнику э. д. с.

Феррорезонансом напряжений называют режим работы цепи рис. 15.42, *а*, при котором первая гармоника тока в цепи совпадает по фазе с напряжением U источника э. д. с. На рис. 15.42, *б* построены в. а. х. для действующих значений; феррорезонанс напряжений приблизительно соответствует точке p (находится немного левее ее).

Феррорезонанс напряжения можно достичь путем изменения напряжения или частоты источника питания схемы, путем изменения емкости и параметров катушки со стальным сердечником.

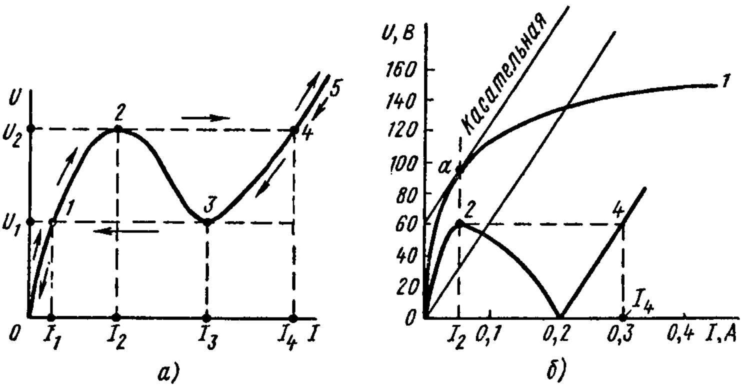


Рис. 15.43

Пример 157. Кривая *1* рис. 15.43, *б* представляет собой в. а. х. нелинейной индуктивности. Пренебрегая активным сопротивлением, определить емкость, которую следует включить последовательно с нелинейной индуктивностью (схема рис. 15.42, *а*), чтобы триггерный эффект происходил при 60 В. Во сколько раз ток после скачка I_4 будет больше тока до скачка I_2, если $\omega = 314$ с$^{-1}$?

Решение. Из точки $U = 60$ В, $I = 0$ проводим касательную к в. а. х. нелинейной индуктивности. Касание произойдет в точке a. В. а. х. емкости (прямая) должна быть проведена из начала координат параллельно касательной. Тангенс угла наклона ее к оси абсцисс численно равен $1/(\omega C)$.

Из рис. 15.43, *б* находим: $1/(\omega C) = 600$ Ом; $C = 10^6/314 \cdot 600 = 5{,}32$ мкФ.

Ток при скачке изменяется с $I_2 = 0{,}06$ А до $I_4 = 0{,}3$ А; $I_4/I_2 = 5$.

§ 15.60. Вольт-амперная характеристика параллельного соединения емкости и катушки со стальным сердечником. Феррорезонанс токов.

В схеме рис. 15.44, *а* параллельно соединены нелинейная индуктивность L и линейная емкость C. В. а. х. нелинейной индуктивности изображена кривой *1* на рис. 15.44, *б*, а емкости — прямой *2*.

По первому закону Кирхгофа, $\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_L$. Так как токи $\dot{I}_C$ и $\dot{I}_L$ находятся в противофазе, то точке *p* пересечения кривой *1* и прямой *2* соответствует режим феррорезонанса токов — ток $I = 0$. Результирующая в. а. х. всей схемы изображена в виде пунктирной кривой *3* рис. 15.44, *б* (абсциссы кривой *3* равны модулю разности абсцисс кривой *1* и прямой *2*). Кривая *3* рис. 15.44, *б* повторена на рис. 15.44, *в*

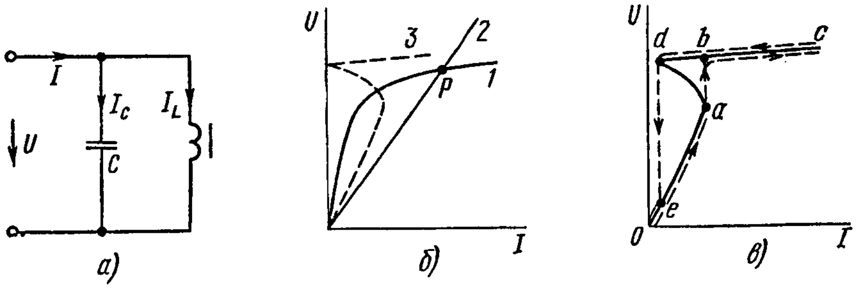


Рис. 15.44

с тем отличием, что на рис. 15.44, *в* учтено, что в режиме феррорезонанса токов (точка *d* на рисунке) ток *I* в неразветвленной части схемы до нуля не снижается за счет высших гармоник и активной составляющей первой гармоники в токе I_L.

§ 15.61. Триггерный эффект в параллельной феррорезонансной цепи. Если схему рис. 15.44, *а* питать от *источника напряжения*, плавно увеличивая величину напряжения этого источника при неизменной частоте, то изображающая точка пройдет без скачков по всем участкам в. а. х. схемы. Если же схему питать от *источника тока*, то при плавном увеличении величины тока этого источника и неизменной угловой частоте ω изображающая точка будет сначала перемещаться по участку *0 — e — a*, затем произойдет перескок из *a* в *b*, после этого движение будет происходить по участку *b — c*. При последующем плавном уменьшении тока движение будет происходить от *c* через *b* к *d*, затем произойдет скачок из *d* в *e* и далее от *e* к *0*. Обратим внимание на то, что режим феррорезонанса токов в схеме рис. 15.44, *а* и режим феррорезонанса напряжений в схеме рис. 15.42, *а* могут быть достигнуты изменением величины входного напряжения *U* при фиксированных угловой частоте ω, емкости *C* и неизменной в. а. х. нелинейной индуктивности.

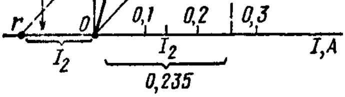


Рис. 15.45

Пример 158. В. а. х. нелинейной индуктивности в схеме рис. 15.44, *а* изображена в виде кривой *1* на рис. 15.45. Пренебрегая активным сопротивлением и высшими гармониками, определить емкость C, которую нужно включить в схеме рис. 15.44, *б*, чтобы триггерный эффект имел место при токе $I_2=0{,}15$ А; $\omega=314$ с$^{-1}$.

Решение. На рис. 15.45 откладываем величину тока I_2 влево от точки *0*; получаем точку *r*. Из нее проводим пунктиром касательную к кривой *1* в точке *n*. Через точку *n* проводим горизонталь. Ордината ее равна напряжению $U_2=112$ В, при котором произойдет триггерный скачок. Из точки *0* проводим прямую *2*, параллельную касательной *rn*. Прямая *2* представляет собой в. а. х. емкости. Абсцисса точки *q* (0,235 А) равна току через емкость при напряжении U_2. Следовательно, $1/(\omega C)=112/0{,}235=478$ Ом; $C=6{,}68$ мкФ.

§ 15.62. Частотные характеристики нелинейных цепей. Под *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) понимают зависимость амплитуды какой-либо величины, определяющей работу нелинейного элемента, от изменения угловой частоты ω при неизменной амплитуде внешнего воздействия.

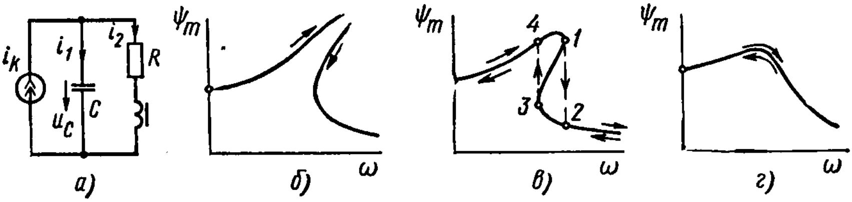


Рис. 15.46

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) — зависимость фазы этой величины от ω при неизменной амплитуде и фазе внешнего воздействия.

Построим АЧХ цепи рис. 15.46, *а*, полагая, что вебер-амперная характеристика нелинейной индуктивности описывается уравнением $i_2=\alpha\psi^3$, ток источника тока $i_k=I_m\sin\omega t$, $I_m=\mathrm{const}$, $\omega=\mathrm{var}$, $R=0$.

В уравнение $i_1+i_2=i_k$ подставим $i_1=C\dfrac{du_C}{dt}=C\dfrac{d^2\psi}{dt^2}$ и $i_2=\alpha\psi^3$. Примем $\psi=\psi_m\sin\omega t$ и в токе i_2 удержим * только первую гармонику $0{,}75\alpha\psi_m^3\sin\omega t$. Получим уравнение, в которое входят ω и ψ_m:

$$0{,}75\alpha\psi_m^3-\omega^2 C\psi_m=\pm I_m.$$

Плюс в правой части соответствует режиму до резонанса, минус — после резонанса. Разрешим уравнение относительно ω:

$$\omega=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{\alpha\psi_m^2}{C}\mp\frac{I_m}{C\psi_m}}.$$

При построении зависимости $\psi_m(\omega)$ учтем, что угловая частота $\omega\geqslant 0$ и действительна, а также что при $x\ll 1$ $\sqrt{1\pm x}\approx 1\pm 0{,}5x$.

---

* $i_2=\alpha(\psi_m\sin\omega t)^3=\alpha\dfrac{3}{4}\psi_m^3\sin\omega t-\alpha 0{,}25\psi_m^3\sin 3\omega t$, так как $\sin^3\beta=0{,}75\sin\beta-0{,}25\sin 3\beta$.

Если $\omega = 0$, то $\psi_m = \sqrt[3]{4I_m/(3\alpha)}$. При $0{,}75\alpha\psi_m^3 \gg I_m$

$$\omega \approx \psi_m \sqrt{\frac{3}{4}\frac{\alpha}{C}}\left(1 \mp \frac{2}{3}\frac{I_m}{\alpha\psi_m^3}\right),$$

при $I_m > 0{,}75\alpha\psi_m^3$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{I_m}{C\psi_m}}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\alpha\psi_m^3}{I_m}\right).$$

Характер зависимости $\psi_m(\omega)$ показан на рис. 15.46, *б*. Если не учитывать активное сопротивление R второй ветви, то ψ_m теоретически могла бы возрастать до бесконечности. С учетом небольшого активного сопротивления этой ветви зависимость $\psi_m(\omega)$ имеет N-форму (рис. 15.46, *в*).

При плавном увеличении ω имеет место скачок из точки *1* в точку *2*; при последующем плавном уменьшении ω — скачок из точки *3* в точку *4*. При значительном R зависимость $\psi_m(\omega)$ приобретает вид кривой рис. 15.46, *г*.

§ 15.63. Применение символического метода и построение векторных и топографических диаграмм для нелинейных цепей. В § 15.57—15.62 были рассмотрены некоторые явления, которые анализировались графически с помощью вольт-амперных характеристик по действующим значениям или по первым гармоникам. Приближенное исследование режимов работы сложных разветвленных нелинейных цепей переменного тока, особенно когда высшие гармоники выражены слабо, часто производят путем построения векторных или топографических диаграмм.

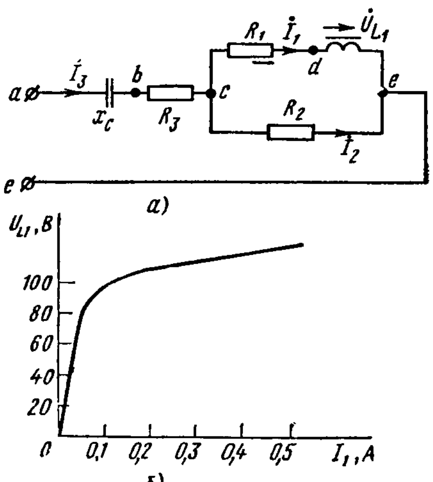


Рис. 15.47

Диаграммы строят отдельно для каждой из гармоник. Построение производят в принципе так же, как и для линейных цепей (см. § 3.18). Отличие состоит в том, что зависимость первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении от первой гармоники тока через него является нелинейной и берется из графика или ее подсчитывают, пользуясь аналитическим выражением.

Если не учитывать потери в ферромагнитном сердечнике и потери от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивности по фазе на 90° опережает первую гармонику тока через нее. Если же учитывать потери в стали сердечника и (или) потери в активных сопротивлениях цепи от высших гармоник тока, то этот угол меньше 90° (см., например, рис. 15.49, *в*). Аналогично, если не учитывать наличие потерь в сегнетодиэлектрике и потерь в цепи от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на нелинейной емкости на 90° отстает от первой гармоники тока через емкость.

Пример 159. Для цепи рис. 15.47, *а* построить топографическую диаграмму по первой гармонике при $I_1 = 0{,}2$ А. В. а. х. по первой гармонике для нелинейной индуктивности изображена на рис. 15.47, *б*. Емкостное сопротивление по первой гармонике $X_C = 229$ Ом; $R_1 = 250$ Ом; $R_2 = 407$ Ом; $R_3 = 122$ Ом.

Решение. Обозначим токи в ветвях и узловые точки схемы в соответствии с рис. 15.47, *а*. На рис. 15.48 направим ток $\dot{I}_1 = 0{,}2$ А по оси $+1$. Потенциал точки *е* примем равным нулю. Находим $\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_e + \dot{U}_{L1}$. Напряжение на нелинейной индуктивности $\dot{U}_{L1}$ при токе $\dot{I}_1 = 0{,}2$ А по модулю равно 110 В (найдено из кривой рис. 15.47, *б*) и по фазе на 90° опережает ток $\dot{I}_1$; $\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_d + \dot{I}_1 R_1$; $\dot{I}_1 R_1 = 0{,}2 \cdot 250 = 50$ В и по фазе совпадает с $\dot{I}_1$.

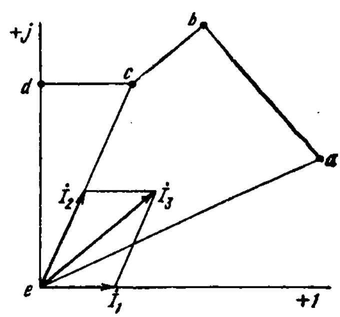


Рис. 15.48

Под действием напряжения $\dot{U}_{ce}$, по модулю приблизительно равного 122 В, протекает ток $\dot{I}_2$, численно равный $122/407 = 0{,}3$ А и по фазе совпадающий с $\dot{U}_{ce}$. Ток $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. По модулю ток $I_3 \approx 0{,}41$ А; $\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_3 R_3$; $I_3 R_3 = 0{,}41 \times \times 122 = 50$ В; $\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + \dot{I}_3(-jX_C)$.

Напряжение на емкости $\dot{U}_{ab}$ численно равно $0{,}41 \cdot 229 = 94$ В и по фазе на 90° отстает от тока $\dot{I}_3$.

Напряжение на входе схемы рис. 15.47, *а* в рассматриваемом режиме работы по модулю равно 164 В.

Из рис. 15.48 можно определить углы между любыми токами и напряжениями цепи рис. 15.47, *а*. Проделав аналогичные подсчеты и построения при других значениях тока I_1 (например, равных 0,5; 1; 2; 3 А и т. д.), можно определить в этих режимах значения всех токов, напряжений и углов сдвига фаз, свести данные в таблицу и затем, пользуясь ею, построить кривую зависимости любого тока, напряжения, угла сдвига фаз в функции от модуля входного напряжения или от модуля какого-либо другого напряжения (тока).

При рассмотрении характеристик управляемой нелинейной индуктивности (см. § 15.24), феррорезонансных схем (см. § 15.57 — 15.62) нелинейную индуктивность полагали идеализированной, а именно: не учитывали потери в ее сердечнике, наличие потока рассеяния и падение напряжения в активном сопротивлении самой обмотки. Это делалось с той целью, чтобы основные свойства упомянутых схем и устройств не были завуалированы относительно второстепенными факторами.

Рассмотрим векторную диаграмму нелинейной индуктивности с учетом этих факторов.

§ 15.64. Векторная диаграмма нелинейной индуктивности. Нелинейная индуктивность изображена на рис. 15.49, *а*. Активное сопротивление самой обмотки w назовем R.

Проходящий по обмотке ток создает в сердечнике магнитный поток. Большая часть этого потока (поток Φ_m) замыкается по сердечнику, а меньшая часть (поток Φ_s) — по воздуху. Поток Φ_m называют *основным*, а Φ_s — *потоком рассеяния*.

Обычно поток Φ_s составляет всего несколько процентов от потока Φ_m. Однако могут быть и такие режимы работы, в которых поток Φ_s оказывается соизмеримым с потоком Φ_m. Такие режимы имеют место, если сердечник работает при большом насыщении или когда в сердечнике имеется относительно большой воздушный зазор δ.

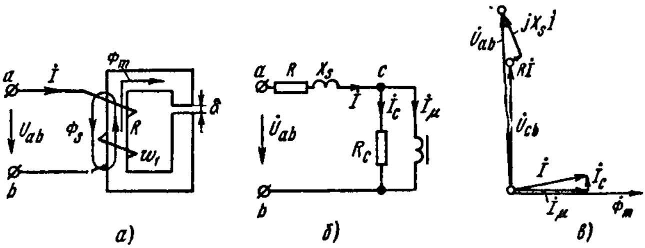


Рис. 15.49

При построении векторной диаграммы заменим в действительности несинусоидальный ток и несинусоидальный поток эквивалентными синусоидальными величинами.

Отношение потокосцепления рассеяния $\psi_s = w_1\Phi_s$ к току I принято называть *индуктивностью рассеяния*:

$$L_s = \psi_s/I = w_1\Phi_s/I. \qquad (15.64)$$

Индуктивное сопротивление $X_s = \omega L_s$ называют *индуктивным сопротивлением рассеяния*.

Схема замещения нелинейной индуктивности изображена на рис. 15.49, *б*. Она отличается от схемы рис. 15.3, *а* тем, что в ней добавлено сопротивление X_s. В неразветвленной части схемы включены активное сопротивление R обмотки w и индуктивное сопротивление рассеяния X_s.

На участке cb есть две ветви. Правую ветвь образует идеализированная нелинейная индуктивность, по которой проходит намагничивающий ток I_μ. Левую ветвь образует активное сопротивление R_c, потери в котором равны потерям P_c на гистерезис и на вихревые токи в сердечнике нелинейной индуктивности. По левой ветви течет ток

$$I_c = P_c/U_{cb}. \qquad (15.65)$$

На рис. 15.49, *в* изображена векторная диаграмма нелинейной индуктивности в соответствии со схемой рис. 15.49, *б*. Эта векторная диаграмма строится так же, как и для обычных линейных схем.

Начнем ее построение с потока Φ_m.

Оба потока $\dot{\Phi}_m$ и $\dot{\Phi}_s$ пронизывают обмотку w_1 рис. 15.49, *а* и наводят в ней э. д. с. самоиндукции.

Напряжение $\dot{U}_{cb}$ на зажимах идеализированной нелинейной индуктивности равно по величине и противоположно по знаку э. д. с. самоиндукции, возникающей в обмотке w_1 схемы рис. 15.49, *а* под действием основного потока $\dot{\Phi}_m$:

$$\dot{U}_{cb} = j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}. \qquad (15.66)$$

Деление $\dot{\Phi}_m$ на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения потока к действующему. Напряжение $\dot{U}_{cb}$ на 90° опережает поток $\dot{\Phi}_m$.

Ток $\dot{I}_\mu$ — это ток через идеализированную индуктивность (т. е. через индуктивность, в сердечнике которой нет потерь энергии); он на 90° отстает от напряжения $\dot{U}_{cb}$ и по фазе совпадает с потоком $\dot{\Phi}_m$. Ток $\dot{I}_c$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_{cb}$. О том, как определять токи $\dot{I}_\mu$ и $\dot{I}_c$, сказано в § 15.65 и 15.66.

По первому закону Кирхгофа,

$$\dot{I} = \dot{I}_\mu + \dot{I}_c. \qquad (15.67)$$

Напряжение $\dot{U}_{ab}$ на входе схемы равно геометрической сумме напряжения $\dot{U}_{cb}$, падения напряжения $\dot{I}R$ в активном сопротивлении и падения напряжения $j\dot{I}X_s$ в индуктивном сопротивлении рассеяния.

Токи I_μ и I_c не пропорциональны напряжению U_{cb}, а следовательно, и напряжению U_{ab} на входе схемы, т. е. если напряжение U_{ab} увеличить, например, в 1,3 раза, то токи I_μ и I_c увеличатся не в 1,3 раза, а больше.

При построении векторной диаграммы исходили из того, что напряжение U_{cb} известно. По напряжению U_{cb} определили токи I_μ и I_c и затем нашли напряжение U_{ab} на входных зажимах индуктивной катушки.

Однако обычно бывает известно напряжение U_{ab}, а напряжение U_{cb} неизвестно. Поэтому при построении векторной диаграммы при заданном U_{ab} сначала следует разобраться, может ли напряжение U_{cb} в исследуемом режиме работы схемы значительно отличаться от напряжения U_{ab}.

Если падения напряжения в сопротивлениях R и X_s составляют малую величину по сравнению с U_{ab}, например всего 3—8% от U_{ab}, то можно в первом приближении считать, что $U_{cb} \approx U_{ab}$. Если же падения напряжения в сопротивлениях R и X_s соизмеримы с напряжением U_{cb}, то тогда для определения напряжения U_{cb} приходится проделывать вспомогательную работу, а именно: строить векторные диаграммы для нескольких значений U_{cb}, например равных 1; 0,9; 0,8; 0,7 от U_{ab}; для каждого из этих значений U_{cb} находить свое U_{ab}, по результатам строить вспомогательную кривую $U_{cb} = f(U_{ab})$, из нее находить U_{cb} при заданном U_{ab} и затем строить искомую векторную диаграмму.

§ 15.65. Определение намагничивающего тока. Ток I и его составляющие I_μ и I_c находят либо опытным путем, либо аналитическим, либо путем графических построений.

Рассмотрим их аналитическое определение. Если l (м) обозначить длину средней магнитной линии на пути в стали (рис. 15.50), δ (м) — длину «воздушного» зазора в магнитной цепи, B (Т) — мгновенное значение магнитной индукции, H (А/м) — мгновенное значение напряженности поля в сердечнике, то на основании закона полного тока мгновенное значение намагничивающего тока

$$i_\mu = \frac{Hl + 0{,}8B\delta \cdot 10^6}{w_1} \text{ [А]}. \quad (15.68)$$

На векторной диаграмме откладывают действующее значение намагничивающего тока I_μ.

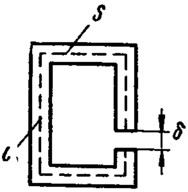


Рис. 15.50

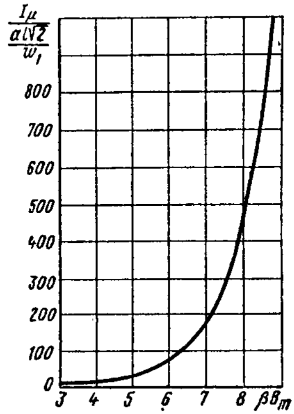


Рис. 15.51

Для определения действующего значения намагничивающего тока нужно в выражении (15.68) подставить $B_m \sin \omega t$ вместо B $(B_m = \Phi_m/S)$, H заменить на $\alpha \operatorname{sh}(\beta B_m \sin \omega t)$, разложить гиперболический синус от периодического аргумента в ряд по функциям Бесселя [см. формулу (15.9)] и воспользоваться формулой (7.11'), с помощью которой определяется действующее значение тока через амплитуды отдельных гармоник. В результате получим

$$I_\mu = \frac{\sqrt{2}\alpha l}{w_1} \times$$
$$\times \sqrt{\left[-jJ_1(j\beta B_m) + \frac{0{,}8\delta\beta B_m \cdot 10^6}{2\alpha l \beta}\right]^2 + [jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \ldots} \quad (15.69)$$

На рис. 15.51 изображена кривая, выражающая зависимость $I_\mu w_1/(\sqrt{2}\alpha l) = f(\beta B_m)$ и построенная по (15.69) при $\delta = 0$. С помощью этой зависимости по βB_m находится $I_\mu w_1/(\sqrt{2}\alpha l)$, а затем определяется I_μ (w, α и l известны).

§ 15.66. Определение тока потерь. Ток I_c, обусловленный потерями в стальном сердечнике, определяется как частное от деления потерь в сердечнике от вихревых токов и гистерезиса на э. д. с., наведенную рабочим потоком Φ_m в обмотке w_1 и равную напряжению U_{cb}:

$$I_c = P_c/U_{cb}; \quad (15.70)$$

$$U_{cb} = \omega w_1 \Phi_m/\sqrt{2} = 4{,}44 f w_1 \Phi_m. \quad (15.71)$$

Здесь $P_c = mp_c$ — полные потери в стали от вихревых токов и гистерезиса, где m — масса сердечника, кг; p_c — потери в 1 кг сердечника.

Величина потерь в 1 кг электротехнической стали при индукциях 1,0 и 1,5 Т и частоте 50 Гц нормирована ГОСТ 802—58.

Обозначим: $p_{1,0}$ — потери в 1 кг стали при $B_m = 1$ Т и $f = 50$ Гц; $p_{1,5}$ — потери в 1 кг стали при $B_m = 1{,}5$ Т и $f = 50$ Гц. Значения $p_{1,0}$ и $p_{1,5}$ приведены в табл. 15.2.

Таблица 15.2

Марка стали	Толщина листа, мм	$p_{1,0}$, Вт/кг	$p_{1,5}$, Вт/кг
Э41	0,5	1,6	3,6
Э42	0,5	1,4	3,2
Э43	0,5	1,25	2,9
Э41	0,35	1,35	3,2
Э42	0,35	1,2	2,8
Э43	0,35	1,05	2,5

Потери при других индукциях и частотах, мало отличающихся от 50 Гц, определяются следующей эмпирической формулой:

$$p_c = p_{1,0} B^n (f/50)^{1,3} \text{ Вт/кг}; \quad n = 5{,}69 \lg \frac{p_{1,5}}{p_{1,0}}.$$

§ 15.67. Основные соотношения для трансформатора со стальным сердечником. В § 3.39 рассматривались соотношения, характеризующие работу трансформатора, для которого зависимость между напряженностью поля и потоком в сердечнике была линейной, а потери в сердечнике отсутствовали.

Для улучшения магнитной связи между первичной (w_1) и вторичной (w_2) обмотками трансформатора его сердечник выполняют из ферромагнитного материала (рис. 15.52) *.

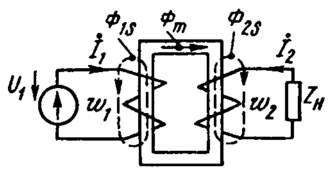


Рис. 15.52

В данном параграфе рассмотрены соотношения, характеризующие работу трансформатора с учетом того, что зависимость между напряженностью поля и потоком в ферромагнитном (стальном) сердечнике нелинейна и что в сердечнике есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами.

Для уменьшения тока холостого хода сердечник трансформатора стремятся изготовить таким образом, чтобы он имел возможно меньший воздушный зазор, расположенный перпендикулярно магнитному потоку, либо совсем не имел его.

В силу нелинейной зависимости между потоком и напряженностью поля в сердечнике по обмоткам трансформатора протекают несинусоидальные токи **.

Анализ работы трансформатора будем проводить, заменив в действительности несинусоидальные токи и потоки их эквивалентными в смысле действующего значения величинами: $\dot{I}_1$ — комплекс действующего значения тока первичной обмотки; $\dot{I}_2$ — комплекс действующего

* На рис. 15.52 и 15.53 для большей наглядности обмотки w_1 и w_2 показаны находящимися на разных стержнях. Практически их располагают обычно на одном и том же стержне.

** Несинусоидальность проявляется главным образом в режимах работы, близких к холостому ходу.

значения тока вторичной обмотки; $\dot{\Phi}_m$ — комплексная амплитуда основного магнитного потока, проходящего по сердечнику трансформатора, пронизывающего обмотки w_1 и w_2 и наводящего в них э. д. с.

Вследствие наличия рассеяния небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$ поток — *поток рассеяния первичной обмотки* $\dot{\Phi}_{1s}$ — замыкается по воздуху, образуя потокосцепление только с обмоткой w_1. Другой, также небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$, поток — *поток рассеяния вторичной обмотки* $\dot{\Phi}_{2s}$ — замыкается по воздуху, сцепляясь только с обмоткой w_2.

Полагают, что потокосцепление потока $\dot{\Phi}_{1s}$ с обмоткой w_1 пропорционально току $\dot{I}_1$:

$$\dot{\psi}_{1s} = w_1\dot{\Phi}_{1s} = L_{1s}\dot{I}_1. \qquad (15.72)$$

Коэффициент пропорциональности L_{1s} между потокосцеплением $\dot{\psi}_{1s}$ и током $\dot{I}_1$ называют *индуктивностью рассеяния первичной обмотки*; L_{1s} зависит от числа витков и конструкции обмотки.

Принимают также, что потокосцепление $\dot{\psi}_{2s}$ потока $\dot{\Phi}_{2s}$ с обмоткой w_2 пропорционально току вторичной цепи $\dot{I}_2$:

$$\dot{\psi}_{2s} = w_2\dot{\Phi}_{2s} = L_{2s}\dot{I}_2. \qquad (15.73)$$

Коэффициент пропорциональности L_{2s} между потокосцеплением $\dot{\psi}_{2s}$, обусловленным потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$ и током $\dot{I}_2$, называют *индуктивностью рассеяния вторичной обмотки*; L_{2s} зависит от числа витков и конструкции вторичной обмотки.

Индуктивное сопротивление первичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{1s}$,

$$X_{1s} = \omega L_{1s}. \qquad (15.74)$$

Аналогично, индуктивное сопротивление вторичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$,

$$X_{2s} = \omega L_{2s}. \qquad (15.75)$$

Пусть R_1 — активное сопротивление первичной обмотки, R_2 — активное сопротивление вторичной обмотки, $Z_н$ — сопротивление нагрузки.

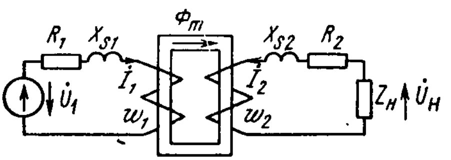


Рис. 15.53

На рис. 15.53 изображена схема того же трансформатора, что и на рис. 15.52, но на ней активные сопротивления и индуктивные сопротивления, обусловленные потоками рассеяния, представлены отдельно выделенными: R_1, X_{s1}, R_2, X_{s2}. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для обеих цепей.

Для первичной цепи

$$\dot{I}_1R_1 + jX_{s1}\dot{I}_1 + j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} = \dot{U}_1. \qquad (15.76)$$

Для вторичной цепи

$$\dot{I}_2R_2+jX_{s2}\dot{I}_2+j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}+\dot{U}_н=0. \qquad (15.77)$$

Здесь $j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное э. д. с., наводимой в обмотке w_1 основным рабочим потоком $\dot{\Phi}_m$. Деление $\dot{\Phi}_m$ на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения к действующему. Аналогично, $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное э. д. с., наводимой в обмотке w_2 основным рабочим потоком $\dot{\Phi}_m$.

Обозначим ток $\dot{I}_1$ при холостом ходе трансформатора через $\dot{I}_0$. Магнитодвижущая сила трансформатора при холостом ходе равна $\dot{I}_0w_1$. М. д. с. трансформатора при наличии тока $\dot{I}_2$ равна $\dot{I}_1w_1+\dot{I}_2w_2$. Трансформаторы конструируют обычно таким образом, что падения напряжения $\dot{I}_1R_1$ и $j\dot{I}_1X_{s1}$ много меньше, чем падение напряжения $\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$. Если это учесть, то для правильно сконструированных трансформаторов уравнение (15.76) запишем так:

$$j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}\approx\dot{U}_1. \qquad (15.76')$$

Уравнение (15.76′) справедливо как при холостом ходе, так и при нагрузке. Другими словами, при переходе от холостого хода к режиму работы при нагрузке поток $\dot{\Phi}_m$ практически остается неизменным по величине.

Но если в этих двух режимах поток $\dot{\Phi}_m$ один и тот же, то должны быть равны и создающие его м. д. с. в этих двух режимах, т. е.

$$\dot{I}_1w_1+\dot{I}_2w_2=\dot{I}_0w_1. \qquad (15.78')$$

Отсюда, поделив обе части равенства на w_1, получим

$$\dot{I}_1=\dot{I}_0+\dot{I}'_2, \qquad (15.78)$$

где

$$\dot{I}'_2=-\dot{I}_2\frac{w_2}{w_1}.$$

Таким образом, ток первичной цепи $\dot{I}_1$ может быть представлен как геометрическая сумма двух токов: тока холостого хода $\dot{I}_0$ и тока $\dot{I}'_2$. Ток $\dot{I}'_2$ принято называть *приведенным* (к числу витков первичной обмотки) *вторичным током*. Он численно равен току $\dot{I}_2$, измененному в w_2/w_1 раз.

Кроме того, в правильно сконструированных трансформаторах падения напряжений $\dot{I}_2R_2$ и $j\dot{I}_2X_{s2}$ малы по сравнению с $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$, поэтому из уравнения (15.77) следует, что

$$j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}\approx-\dot{U}_н. \qquad (15.79)$$

Если почленно разделить (15.76′) на (15.79) и перейти к модулям, то получим

$$U_1/U_н \approx w_1/w_2, \tag{15.80}$$

т. е. отношение напряжения на входе трансформатора к напряжению на его выходе (на нагрузке) приблизительно равно отношению числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки.

В правильно сконструированных трансформаторах при нагрузке, близкой к номинальной, ток I_0 составляет всего 1—10% от тока I_1, поэтому уравнение (15.78) можно приближенно представить так:

$$\dot{I}_1 w_1 \approx -\dot{I}_2 w_2.$$

Между модулями токов I_1 и I_2 при нагрузке, близкой к номинальной, имеет место следующее приближенное соотношение:

$$I_1/I_2 \approx w_2/w_1, \tag{15.81}$$

т. е. ток I_1 почти пропорционален току I_2. Эта пропорциональность немного нарушается за счет тока холостого хода I_0.

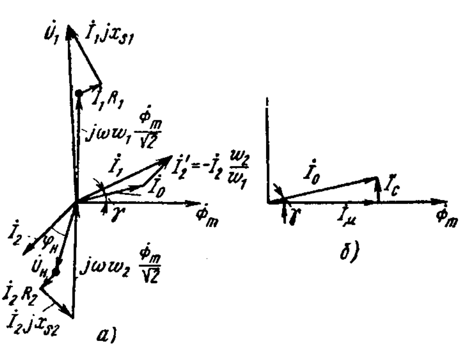


Рис. 15.54

В активных сопротивлениях вторичной цепи выделяется энергия, которая переносится магнитным потоком из первичной цепи во вторичную и восполняется источником питания схемы.

§ 15.68. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником. На рис. 15.54, *а* изображена векторная диаграмма при индуктивной нагрузке $Z_н = R_н + jX_н$.

Построение диаграммы начнем с тока $\dot{I}_2$, расположив его произвольно. Под углом $\varphi_н = \operatorname{arctg} X_н/R_н$ к нему расположим вектор напряжения на нагрузке $\dot{U}_н$. Прибавим к вектору $\dot{U}_н$ векторы $\dot{I}_2R_2$ и $\dot{I}_2jX_{s2}$. Сумма падений напряжения во вторичной цепи равна нулю. Это дает возможность построить вектор $j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$.

Далее строим вектор $\dot{\Phi}_m$ $\left(\text{он на } 90° \text{ отстает от вектора } j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}\right)$.

В сердечнике трансформатора, как и в сердечнике нелинейной индуктивности, есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами. Вследствие этого ток холостого хода $\dot{I}_0$ состоит из геометрической суммы намагничивающего тока $\dot{I}_\mu$ и тока потерь $\dot{I}_c$ (рис. 15.54, *б*): $\dot{I}_0 = \dot{I}_\mu + \dot{I}_c$.

Ток $\dot{I}_\mu$ совпадает по фазе с потоком $\dot{\Phi}_m$, а ток $\dot{I}_c$ опережает поток $\dot{\Phi}_m$ на 90°. Токи I_μ и I_c определяют так же, как для нелинейной индуктивности.

Ток холостого хода $\dot{I}_0$ опережает поток $\dot{\Phi}_m$ на некоторый угол γ. В соответствии с уравнением (15.78) ток $\dot{I}_1$ равен геометрической сумме тока $\dot{I}_0$ и тока $\dot{I}_2' = -\dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1}$. Геометрическая сумма падений напряжений $\dot{I}_1 R_1$, $\dot{I}_1 jX_{s1}$ и $j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ дает напряжение на входе первичной цепи $\dot{U}_1$.

С целью удобочитаемости на рис. 15.54, *а* не выдержаны имеющие место в действительности соотношения между модулями напряжений, а также между модулями токов.

Пример 160. Повышающий трансформатор имеет сердечник из трансформаторной стали Э41 при толщине листов 0,5 мм. Кривая намагничивания $H = 0{,}71\,\mathrm{sh}\,(5{,}75B)$. Сердечник выполнен из пластин, имеющих кольцевую форму без воздушного зазора; $w_1 = 250$, $w_2 = 1750$; $S = 2{,}2$ см^2, $l = 25$ см. Пренебрегая R_1 и X_{s1}, определить ток холостого хода I_0 при $U_1 = 15$ В и $f = 50$ Гц.

Решение. Амплитуда индукции $B_m = \frac{U}{4{,}44 f w_1 S} = 1{,}22$ Т. Произведение $\beta B_m = 5{,}75 \cdot 1{,}22 = 7{,}02$.

По кривой рис. 15.51 при $\beta B_m = 7{,}02$ находим $w_1 I_\mu/(\alpha l \sqrt{2}) = 185$. Но $\alpha l \sqrt{2}/w_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}25 \sqrt{2}/250 = 10^{-3}$. Следовательно, $I_\mu = 0{,}185$ А.

Масса сердечника $m = 7{,}8$ (г/см^3) $\cdot$ 2,2 (см^2) $\cdot$ 25 (см) $= 0{,}428$ (кг). Из табл. 15.2 находим: $p_{1,0} = 1{,}6$ Вт/кг, $p_{1,5} = 3{,}6$ Вт/кг; $n = 5{,}69 \lg (3{,}6/1{,}6) \approx 1{,}13$.

Удельные потери в стали при $B_m = 1{,}22$ Т $p_c = 1{,}6 \cdot 1{,}22^{1{,}13} \cdot 1 = 2{,}1$ Вт/кг.

Полные потери в сердечнике массой 0,428 кг $P_c = 0{,}428 \cdot 2{,}1 = 0{,}9$ Вт.

Ток, обусловленный потерями в стали, $I_c = P_c/U_1 = 0{,}9/15 = 0{,}06$ А.

Ток холостого хода I_0 практически равен току I_μ.

§ 15.69. Метод интегральных уравнений. От нелинейного дифференциального уравнения можно перейти к интегральному, используя одну из форм записи интеграла Дюамеля. Поясним идею этого перехода. Решение линейного дифференциального уравнения, например уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t), \tag{а}$$

может быть записано в виде

$$x(t) = f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau. \tag{б}$$

Под $g(t)$ понимается здесь либо переходная проводимость, либо переходная функция в зависимости от того, чем является x по отношению к вынуждающей силе $f(t)$; $g(t)$ определим как решение (а) при $f(t) = 1$.

Если исходное уравнение нелинейно, например

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x + bx^2 = f(t),$$

то нелинейный член bx^2 можно перенести в правую часть и рассматривать как внутреннюю вынуждающую силу:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) - bx^2. \tag{в}$$

Используя (б), запишем решение уравнения (в):

$$x = [f(t) - bx^2(t)]\, g(0) + \int_0^t [f(\tau) - bx^2(\tau)]\, g'(t-\tau)\, d\tau. \tag{г}$$

Переходная функция $g(t)$ определяется по линейной части исходного нелинейного дифференциального уравнения при воздействии на нее $1(t)$. Уравнение (г) является интегральным уравнением по типу Вольтерра второго рода. Его можно решать методом последовательных приближений, полагая $x_0(t)=x(0)$ и пользуясь следующим соотношением для k-го приближения:

$$x_k(t)=[f(t)-bx_{k-1}^2(t)]\,g(0)+\int_0^t[f(\tau)-bx_{k-1}^2(\tau)]\,g'(t-\tau)\,d\tau.$$

Метод имеет смысл применять только в том случае, когда процесс последовательных приближений будет сходящимся.

Пример 161. Решить уравнение $\frac{dx}{dt}+x^2=1$ при $x(0)=0$.

Решение. Для определения $g(t)$ на линейную часть системы воздействуем единичным напряжением $dx/dt=1$; $g(t)=t$; $g'(t)=1$; $g(0)=0$; $g'(t-\tau)=1$. Записываем рекуррентное соотношение:

$$x_k(t)=\int_0^t[1-x_{k-1}^2(\tau)]\,d\tau;$$

$$x_1=\int_0^t d\tau=t;\quad x_2=\int_0^t(1-\tau^2)\,d\tau=t-\frac{t^3}{3};$$

$$x_3=\int_0^t\left[1-\left(\tau-\frac{\tau^3}{3}\right)^2\right]d\tau=t-\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}-\frac{t^7}{63}.$$

§ 15.70. Метод малого параметра. Нелинейное дифференциальное уравнение иногда решают путем последовательных приближений, представляя искомую величину x в виде ряда по степеням некоторого коэффициента μ, который называют *малым параметром*:

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots,$$

где x_0 — решение уравнения нулевого приближения; последнее получают из исходного, полагая, что все нелинейные члены в исходном уравнении отсутствуют; x_1 — решение уравнения первой поправки; эта поправка учитывает влияние нелинейных членов в первом приближении; x_2 — решение уравнения второй поправки и т. д.

Если исходное уравнение является дифференциальным уравнением второго или более высокого порядка, а принужденный режим представляет собой колебательный процесс, то квадрат угловой частоты первой гармоники ω^2 или первую степень ω также разлагают в ряд по малому параметру:

$$\omega^2=\omega_0^2+\mu f_1+\mu^2 f_2,$$

где ω_0^2 — квадрат угловой частоты в нулевом приближении, когда всеми нелинейными членами пренебрежено; μf_1 — поправка первого приближения, вызванная нелинейными членами уравнения; $\mu^2 f_2$ — поправка второго приближения и т. д.

Последовательность решения рассмотрим на двух примерах.

1. При $x(0)=0$ решить уравнение

$$\frac{dx}{dt}+x^2=1. \tag{15.82}$$

К такому уравнению, например, сводится задача о переходном процессе в цепи, состоящей из нелинейной индуктивности и активного сопротивления, при подключении ее к постоянному напряжению и при квадратичной аппроксимации зависимости потокосцепления от тока.

Все линейные члены уравнения переносим в левую часть, а нелинейные, умножив на некоторый малый параметр μ, — в правую (в примере $\mu=1$):

$$\frac{dx}{dt}-1=-\mu x^2. \qquad (15.82а)$$

Представим решение (15.82) в виде ряда по степеням μ:

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2 x_2+\ldots \qquad (15.82б)$$

Подставим (15.82б) в (15.82а):

$$\frac{dx_0}{dt}+\mu\frac{dx_1}{dt}+\mu^2\frac{dx_2}{dt}-1=-\mu x_0^2-\mu^2 2x_0x_1-\mu^3(x_1^2+2x_0x_2)-\ldots \qquad (15.83)$$

Из (15.83) образуем систему уравнений, приравняв члены левой и правой частей его при одинаковых степенях μ:

уравнение нулевого приближения $\frac{dx_0}{dt}-1=0$; (15.84)

уравнение для первой поправки $\frac{dx_1}{dt}=-x_0^2$; (15.85)

уравнение для второй поправки $\frac{dx_2}{dt}=-2x_0x_1$. (15.86)

Проинтегрируем (15.84):

$$x_0=t+C_0.$$

Постоянную $C_0=0$ определили из начальных условий.

Подставляем $x_0=t$ в уравнение (15.85) и интегрируем его:

$$x_1=-\frac{t^3}{3}+C_1.$$

Для первой поправки начальные условия также нулевые. Поэтому $C_1=0$ и $x_1=-t^3/3$.

Подставим x_0 и x_1 в (15.86):

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{2t^4}{3};\quad x_2=\frac{2t^5}{15}+C_2;\quad C_2=0.$$

В соответствии с (15.82б)

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots=t-\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}. \qquad (15.87)$$

Аналогичным путем можно было бы получить и последующие члены ряда (15.82б). Так как уравнение (15.82) имеет точное решение $x=\operatorname{th} t$, то, взяв в разложении $\operatorname{th} t$ три первых члена ряда, можно убедиться, что они оказываются совпадающими с правой частью (15.87).

2. Решить уравнение для лампового генератора (вывод уравнения см. в примере 165) при начальных условиях $x(0)=A_0$ и $x'(0)=0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-k_1(1-x^2)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0. \qquad (15.88)$$

Коэффициент k_1 при нелинейном члене в дальнейшем будем считать малым параметром и обозначим μ. В соответствии с предыдущим

$$\begin{aligned} x&=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots, \\ \omega^2&=\omega_0^2+\mu f_1+\mu^2 f_2+\ldots \end{aligned} \qquad (15.89)$$

В уравнении (15.88) вместо x подставим правую часть (15.89) и $\omega^2-\mu f_1-\mu^2 f_2$ вместо ω_0^2:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+\mu\frac{d^2x_1}{dt^2}+\mu^2\frac{d^2x_2}{dt^2}-\mu\left[1-(x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots)^2\right]\times$$

$$\times\left(\frac{dx_0}{dt}+\mu\frac{dx_1}{dt}+\mu^2\frac{dx_2}{dt}+\ldots\right)+(\omega^2-\mu f_1-\mu^2 f_2)(x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots)=0. \quad (15.90)$$

Образуем из уравнения (15.90) три уравнения, соответствующие μ в нулевой, первой и второй степенях:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+\omega^2x_0=0; \quad (15.91)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2x_1=(1-x_0^2)\frac{dx_0}{dt}+x_0f_1; \quad (15.92)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega^2x_2=(1-x_0^2)\frac{dx_1}{dt}-2x_0x_1\frac{dx_0}{dt}+f_1x_1+f_2x_0. \quad (15.93)$$

Проинтегрируем (15.91):

$$x_0=A_0\cos\omega t.$$

Подставив x_0 в (15.92) и учтя, что $\sin\alpha\cos^2\alpha=0{,}25\sin\alpha+0{,}25\sin 3\alpha$, получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2x_1=-\omega A_0(1-0{,}25A_0^2)\sin\omega t+A_0f_1\cos\omega t+0{,}25\omega A_0^3\sin 3\omega t. \quad (15.94)$$

Уравнение (15.94) можно трактовать следующим образом: на колебательный LC-контур без потерь [левая часть уравнения (15.94)] воздействуют вынуждающая сила с угловой частотой ω, *равной* собственной частоте колебательного контура, и сила с угловой частотой, в три раза большей.

Известно, что если подключить колебательный LC-контур, имеющий активное сопротивление $R\to 0$, к источнику синусоидальной э. д. с. $E_m\sin\omega t$ при оговоренных условиях, то амплитуда тока в цепи будет нарастать до бесконечности. Действительно,

$$i=i_{\text{пр}}+i_{\text{св}}=\frac{E_m}{R}\sin\omega t-\frac{E}{R}e^{-\delta t}\sin(\omega t+\nu).$$

При $R\to 0$ $\nu\to 0$ и $\delta=R/(2L)\to 0$.

Разложим $e^{-\delta t}$ в ряд и, учитывая малость δ, возьмем два первых члена ряда. Получим

$$i\approx\frac{E}{2L}t\sin\omega t.$$

Такие члены в решении дифференциальных уравнений, амплитуды которых нарастают теоретически до бесконечности при увеличении времени t, называют *вековыми членами*. При дальнейшем решении уравнения (15.94) необходимо помнить о том, что амплитуды вековых членов должны оказаться равными нулю при любом $t>0$.

Решение (15.94) запишем следующим образом:

$$x_1=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t+(C_1\sin\omega t+D_1\cos\omega t)\,t+E_1\sin 3\omega t+F_1\cos 3\omega t. \quad (15.95)$$

Первое и второе слагаемые представляют собой полное решение однородного уравнения; четвертое и пятое — частное решение неоднородного уравнения. Третье слагаемое представляет собой вековой член. Его можно было бы не вводить в дальнейшие выкладки по определению коэффициентов A_1, B_1, E_1, F_1, C_1, D_1, однако введем его, чтобы показать, что его присутствие выкладкам не помешает.

Дважды продифференцируем (15.95) по времени:

$$x_1''=-A_1\omega^2\sin\omega t-B_1\omega^2\cos\omega t+C_1\omega\cos\omega t-$$
$$-D_1\omega\sin\omega t+\omega(C_1\cos\omega t-D_1\sin\omega t)-t\omega^2(C_1\sin\omega t+D_1\cos\omega t)-$$
$$-9\omega^2E_1\sin 3\omega t-9\omega^2F_1\cos 3\omega t. \quad (15.96)$$

Подставим (15.95) и (15.96) в (15.94), выделим из левой и правой частей (15.94) слагаемые соответственно с $\sin \omega t$ [формула (15.97)], $\cos \omega t$ [формула (15.98)], $\sin 3\omega t$ [формула (15.99)], $\cos 3\omega t$ [формула (15.100)]:

$$D_1 = 0{,}5A_0 (1 - 0{,}25A_0^2); \tag{15.97}$$

$$2\omega C_1 = A_0 f_1; \tag{15.98}$$

$$-8\omega^2 E_1 = 0{,}25\omega A_0^3; \tag{15.99}$$

$$8\omega^2 F_1 = 0. \tag{15.100}$$

Слагаемые (15.94) с вековыми членами дают нуль:

$$t\,(C_1 \sin \omega t + D_1 \cos \omega t)\,(\omega^2 - \omega^2) = 0. \tag{15.101}$$

Используем также заданные начальные условия для определения A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Так как начальные условия уже были удовлетворены при определении x_0, то для всех последующих приближений начальные условия нулевые. Имея это в виду, из (15.95) находим:

$$x_1(0) = B_1 + F_1 = 0.$$

Из (15.100) $F_1 = 0$, поэтому $B_1 = 0$. Из уравнения (15.95), используя условие $x_1'(0) = 0$, имеем

$$\omega A_1 + D_1 + 3\omega E_1 = 0.$$

Но D_1 и E_1 известны из (15.97) и (15.99), поэтому

$$A_1 = -3E_1 = \frac{3}{32\omega} A_0^3.$$

Поправку на угловую частоту f_1, а вместе с тем и значение A_0 найдем, исходя из того, что амплитуда векового члена должна быть равна нулю при любом $t > 0$. Отсюда $C_1 = 0$ и $D_1 = 0$.

Из (15.98) следует, что $f_1 = 0$, а из (15.97), что $A_0 = 2$.

Таким образом,

$$A_1 = \frac{3}{32\omega} A_0^3; \quad B_1 = 0; \quad C_1 = D_1 = 0; \quad E_1 = -\frac{A_0^3}{32\omega}; \quad F_1 = 0; \quad \omega = \omega_0.$$

Ограничившись первым приближением и перейдя от μ к k_1, получим

$$x = x_0 + \mu x_1 = A_0 \cos \omega t + k_1 \left(\frac{3}{32\omega} A_0^3 \sin \omega t - \frac{A_0^3}{32\omega} \sin 3\omega t \right).$$

Первое приближение привело к изменению амплитуды первой гармоники с $A_0 = 2$ до $2\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}75k_1}{2\omega}\right)^2}$ и к появлению третьей гармоники.

Угловая частота первой гармоники в первом приближении не изменилась и равна угловой частоте ω_0 нулевого приближения. Аналогичным образом производится и второе приближение. Однако каждое последующее приближение по сравнению с предыдущим более трудоемко.

В основу данного метода положены работы французского математика Пуанкаре по небесной механике. Метод называют методом малого параметра потому, что в нем производят разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Насколько этот параметр должен быть мал в каждом примере, заранее сказать нельзя. Важно, чтобы ряды для x и для ω^2 или ω сходились. Если ряды будут сходиться медленно или вообще не будут сходиться, то пользоваться этим методом не имеет смысла.

Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте известные Вам типы нелинейных активных, индуктивных в емкостных сопротивлений. 2. Какие физические явления могут наблюдаться и нелинейных и не могут в линейных цепях? 3. Как из характеристик для мгно-

венных значений можно получить в. а. х. для первых гармоник и в. а. х. для действующих значений величин? 4. Начертите схемы замещения электронной лампы и транзистора для малых переменных составляющих. 5. Охарактеризуйте основные положения известных Вам методов расчета периодических процессов нелинейных цепей. 6. Сформулируйте условия нахождения моментов времени открытия и закрытия диодов. 7. Определите, что понимают под автоколебаниями; как выявить условие, когда они возникают. 8. В чем причина возникновения субгармонических колебаний? 9. В чем принципиальное отличие феррорезонанса напряжений и токов от резонансов в соответствующих линейных цепях? 10. Что понимают под частотными характеристиками нелинейных цепей? 11. В чем сходство и в чем различие в построении векторных диаграмм по первым гармоникам для нелинейных и линейных цепей? 12. Дайте определение понятий «индуктивность рассеяния», «намагничивающий ток», «ток потерь». 13. Постройте векторную диаграмму трансформатора со стальным сердечником при активно-емкостной нагрузке. 14. В чем идея метода малого параметра? 15. Запишите рекуррентное соотношение, являющееся решением нелинейного интегрального уравнения. 16. К нелинейному активному сопротивлению с симметричной характеристикой приложено периодическое напряжение без постоянной составляющей. Можно ли утверждать, что протекающий через него ток не может содержать постоянную составляющую? 17. Решите задачи 10.9; 10.10; 10.20; 10.23; 10.37; 10.38; 10.39; 10.41; 10.48; 10.58; 10.61.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 16.1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов. Методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть классифицированы: а) по виду основных операций, которые необходимо выполнять для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, — на графические (графо-аналитические) и аналитические; б) по характеру величины, для которой производится расчет (расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений).

Под *графическими* (*графо-аналитическими*) понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости от времени искомых токов и напряжений являются графические построения, нередко сопровождаемые и некоторыми вспомогательными числовыми подсчетами.

В графических (графо-аналитических) методах характеристики нелинейных сопротивлений обычно не требуется выражать аналитически.

В данной главе рассмотрены следующие графические методы: 1) метод, основанный на графическом подсчете определенного интеграла (см. § 16.2); 2) метод, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой по формуле трапеций (см. § 16.5).

Аналитическими называют такие методы, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых токов и напряжений от времени является точное (приближенное) аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи путем использования аналитических выражений характеристик нелинейных сопротивлений.

Рассмотрены следующие аналитические методы: 1) метод интегрируемой нелинейной аппроксимации (§ 16.3); 2) метод кусочно-линейной аппроксимации (§ 16.4); 3) метод медленно меняющихся амплитуд (§ 16.7).

К группе аналитических относятся также методы, рассмотренные в § 15.69 и 15.70. Графические методы имеют следующие преимущества перед аналитическими: а) отсутствие необходимости выражать характеристики нелинейных элементов аналитически, что позволяет избавиться от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик; б) простота учета гистерезиса и других сложных нелинейных зависимостей.

В свою очередь аналитические методы также имеют перед графическими преимущества. Из них основным является то, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров. Получить решение в общем виде желательно потому, что анализ его позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как уже упоминалось, все методы расчета могут быть подразделены на две подгруппы: на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Расчет по огибающим важен, потому что он дает возможность, не вдаваясь в мелкие детали процесса внутри каждого периода действующей в схеме периодической э.д.с. (внутри каждого периода автоколебаний в автоколебательной системе), судить о макроструктуре процесса. Расчет по огибающим возможен не только для нелинейных цепей; он представляет существенный интерес и для линейных цепей.

Точность расчета по огибающим уступает точности расчета по мгновенным значениям. Однако относительная быстрота проведения расчета по огибающим и возможность судить о макроструктуре процесса часто являются решающими факторами.

Там, где это необходимо, целесообразно дополнять расчет по огибающим расчетом по мгновенным значениям. Метод расчета по огибающим представлен методом медленно меняющихся амплитуд (см. § 16.7). Все остальные методы относятся к подгруппе расчета по мгновенным значениям.

Довольно часто электрические цепи содержат несколько нелинейных сопротивлений. Переходные процессы в таких цепях можно рассчитывать методом Волынкина (см. § 16.5).

Теория переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными индуктивными, емкостными и активными сопротивлениями выходит за рамки курса. Интересующиеся этим вопросом могут ознакомиться с ним, например, по [21].

§ 16.2. Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла. Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, применим к нелинейным электрическим цепям, описываемым дифференциальными уравнениями первого порядка, допускающим разделение переменных. Последняя оговорка очень существенна. Она свидетельствует о том, что метод применим к цепям постоянного и, как правило, неприменим к цепям переменного тока. Основные этапы и последовательность расчета проиллюстрируем на конкретном примере.

Нелинейная емкость через сопротивление R подключается к источнику напряжения U (рис. 16.1, *а*). Кулон-вольтная характеристика емкости задана графи-

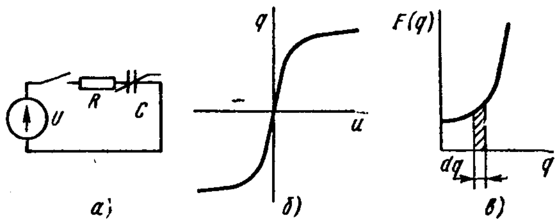


Рис. 16.1

чески (рис. 16.1, *б*). Полагая, что в схеме нулевые начальные условия, построить кривые изменения заряда q, напряжения на емкости u_C и тока i в функции времени.

Составим дифференциальное уравнение:

$$u_C(q) + R\frac{dq}{dt} = U. \tag{16.1}$$

Разделим переменные:

$$dt = R\frac{dq}{U - u_C(q)}, \quad \text{или} \quad dt = RF(q)\,dq, \tag{16.1a}$$

где

$$F(q) = \frac{1}{U - u_C(q)}. \tag{16.2}$$

Для построения кривой $F(q)$ (рис. 16.1, *в*) используем кулон-вольтную характеристику. С этой целью задаемся произвольным значением q. По кулон-вольтной характеристике находим соответствующее ему u_C и по (16.2) подсчитываем $F(q)$. При $q=0$ $u_C=0$ и $F(q)=1/U$; при $u_C=U$ $F(q)=\infty$. Левую часть уравнения (16.1а) проинтегрируем по t от 0 до текущего значения t, а правую — по q от $q = 0$ до текущего значения q. Получим

$$t = R\int_0^q F(q)\,dq. \tag{16.3}$$

Графически подынтегральное выражение $F(q)\,dq$ представляет собой заштрихованную площадку рис. 16.1, *в*.

Согласно уравнению (16.3), для определения времени t, соответствующего конкретному значению q, нужно подсчитать площадь, выраженную определенным интегралом $\int_0^q F(q)\,dq$, и умножить ее на сопротивление R.

Кривая *1* рис. 16.2, *а* качественно представляет собой зависимость q от t. С помощью кривой $q=f(t)$ и кулон-вольтной характеристики нелинейной емкости строят зависимость $u_C=f(t)$ (кривая *2*).

Ток в цепи для произвольного момента времени определяется по формуле $i=(U-u_C)/R$ (кривая *3*).

§ 16.3. Расчет методом интегрируемой нелинейной аппроксимации. Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации основан на аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления такой нелинейной функцией, которая, во-первых, достаточно точно отображает характеристику нелинейного сопротивления в предполагаемом интервале перемещения изображающей точки по ней и, во-вторых (и это главное), дает возможность точно проинтегрировать уравнение в известных функциях.

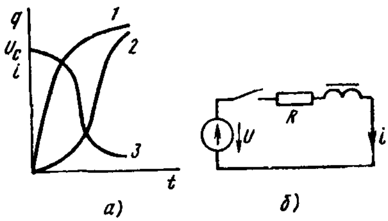


Рис. 16.2

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования получают зависимость исследуемой величины от времени и от всех параметров схемы.

Метод применим к дифференциальным уравнениям первого порядка, а также к уравнениям, сводящимся к уравнениям первого порядка путем замены переменных.

Пример 162. Определить закон нарастания во времени тока i при замыкании ключа в схеме рис. 16.2, *б*. Зависимость тока i от потокосцепления ψ нелинейной индуктивности выражена формулой $i=k\psi^4$. В схеме нулевые начальные условия.

Решение. Из дифференциального уравнения цепи $\frac{d\psi}{dt}+Ri=U$ следует, что $dt=d\psi/(U-Ri)$.

Вынесем из знаменателя множитель R и заменим i на $k\psi^4$:

$$dt=\frac{1}{R}\frac{d\psi}{I_y-k\psi^4}, \quad \text{где} \quad I_y=U/R.$$

Обозначим $I_y=a^2$ и заменим $k\psi^4$ на ψ_1^4; $d\psi$ на $d\psi_1/\sqrt[4]{k}$.

Получим:

$$dt=\frac{1}{R\sqrt[4]{k}}\frac{d\psi_1}{a^2-\psi_1^4}; \quad \frac{1}{a^2-\psi_1^4}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-\psi_1^2}+\frac{1}{a+\psi_1^2}\right);$$

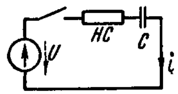
$$t=\frac{1}{2I_y^{3/4}Rk^{1/4}}\left(0{,}5\ln\frac{1+\sqrt[4]{i/I_y}}{1-\sqrt[4]{i/I_y}}+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{i/I_y}\right). \quad (16.4)$$

С помощью (16.4) можно определить время, которое необходимо, чтобы отношение i/I_y достигло заданной величины.

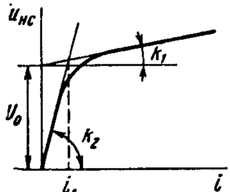
§ 16.4. Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации. При расчете методом кусочно-линейной аппроксимации осуществляется замена характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий, что позволяет перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся друг от друга лишь значениями коэффициентов.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по соответствующему линеаризованному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и (или) синусоидальной э.д.с., к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной э.д.с. основная трудность расчета данным методом заключается в определении постоянных интегрирования, исходя из законов коммутации и времени работы на каждом линейном участке. В сложных цепях неизвестные определяют обычно из трансцендентных уравнений, часто применяют ЭВМ. Впервые идея этого метода была высказана русским физиком Н. Д. Папалекси в 1912 г.



а)



б)

Рис. 16.3

Рассмотрим основные этапы расчета на простейшем примере.

Пример 163. Емкость C заряжается через $НС$ от источника постоянного напряжения U (рис. 16.3, *а*). Определить закон изменения тока в цепи при зарядке.

Решение. В. а. х. $НС$ заменим двумя отрезками прямых линий (рис. 16.3, *б*). Пусть на участке от $i=0$ до $i=i_1$ $u_{НС}=k_2 i$, где $u_{НС}$—напряжение на нелинейном сопротивлении; k_2—коэффициент. На участке $i>i_1$ $u_{НС}=U_0+k_1 i$.

Размерность коэффициентов k_1 и k_2 равна размерности сопротивления. В уравнение цепи $u_C+u_{НС}=U$ вместо u_C подставим $\frac{1}{C}\int i\,dt$, заменим $u_{НС}$ для первого участка на $U_0+k_1 i$, а для второго—на $k_2 i$.

При зарядке емкости ток постепенно уменьшается от максимального значения до нуля. Поэтому изображающая точка перемещается сначала по первому участку, а затем по второму.

Для первого участка

$$\frac{1}{C}\int i\,dt+U_0+k_1 i=U;$$

для второго

$$\frac{1}{C}\int i\,dt+k_2 i=U.$$

Для первого участка

$$i=i_{\text{пр}}+i_{\text{св}}=0+A_1 e^{-t/k_1 C}.$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия: $t=0$, $u_C=0$. Поэтому $U_0+k_1 i(0_+)=U$ и $i(0_+)=A_1=(U-U_0)/k_1$.
Следовательно, при работе на первом участке

$$i=\frac{U-U_0}{k_1}e^{-t/k_1 C}. \tag{16.5}$$

Пусть при $t=t_1$ ток $i=i_1$. Подставим в (16.5) i_1 вместо i и t_1 вместо t и решим полученное уравнение относительно t_1:

$$t_1=k_1 C\ln\frac{U-U_0}{k_1 i_1}. \tag{16.6}$$

При работе на втором участке

$$i=A_2 e^{-\frac{(t-t_1)}{k_2 C}}, \text{ причем } A_2=i_1.$$

* * *

Практически важной является задача о переходном процессе при подключении ненагруженного трансформатора (с разомкнутой вторичной обмоткой) или нелинейной индуктивности к источнику синусоидальной э.д.с. $E_m\sin(\omega t+\varphi)$ (рис. 16.4, *а*). Рассмотрим эту задачу качественно.

Если активное сопротивление первичной обмотки трансформатора R_1 мало, а амплитуда установившегося значения потокосцепления $\psi_m = E_m/\omega$ соответствует окрестности точки a (рис. 16.4, *б*), то при замыкании ключа в момент, когда э.д.с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ проходит через нулевое значение, в цепи возникают очень большие кратковременные броски тока. Последние могут превышать амплитуду тока холостого хода трансформатора в 20—50 раз и даже более. Физически они возникают вследствие того, что к концу первого полупериода (π/ω) потокосцепление достигает величины, близкой к $2\psi_m$.

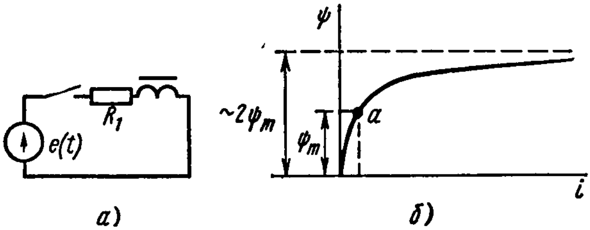


Рис. 16.4

Из кривой рис. 16.4, *б* видно, что если $\psi \approx 2\psi_m$, то в цепи будет очень большой ток, во много раз превышающий ток при $\psi = \psi_m$.

Хотя броски тока и очень кратковременны, но все же в системах с мощными трансформаторами они нежелательны, так как требуют принятия специальных мер для устранения вредных последствий.

§ 16.5. Метод расчета, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой. Еще в 1916 г. Волынкиным были разработаны основы

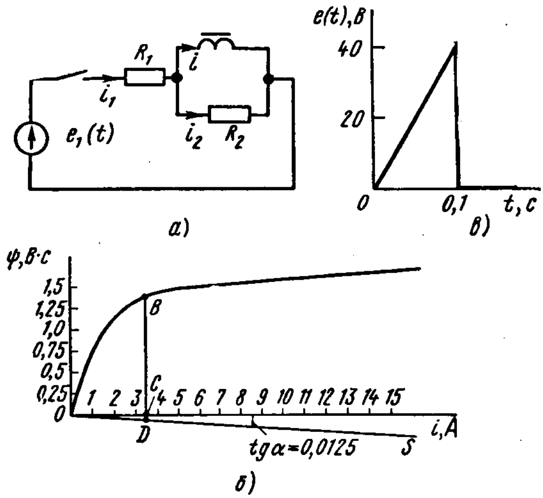


Рис. 16.5

графо-аналитического метода расчета переходных процессов в нелинейных цепях, основанного на замене определенного интеграла приближенной суммой по формуле трапеций.

Из курса математики известно, что если интервал интегрирования $(b-a)$ в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ разбить на n равных частей и через y_0, y_1,

$y_2, \ldots, y_n$ обозначить значение функции $f(x)$ соответственно при $x=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$ и т. д., где $h=(b-a)/n$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n). \tag{16.7}$$

Рассмотрим метод на примере цепи рис. 16.5, *а*, состоящей из нелинейной индуктивности и сопротивлений R_1 и R_2. Зависимость ψ от i для нелинейной индуктивности задана кривой рис. 16.5, *б*. Пусть э. д. с. $e_1(t)$ имеет форму, изображенную на рис. 16.5, *в*

Обозначим токи в ветвях в соответствии с рис. 16.5, *а*. Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1=i+i_2;\quad i_2=\frac{1}{R_2}\frac{d\psi}{dt};\quad i_1R_1+\frac{d\psi}{dt}=e_1(t).$$

Отсюда

$$\frac{d\psi}{dt}+iR=e(t); \tag{16.8}$$

$$R=\frac{R_1}{1+R_1/R_2};\quad e(t)=\frac{e_1(t)}{1+R_1/R_2}. \tag{16.9}$$

Разобьем время t на равные промежутки τ $(t=n\tau)$; тогда вместо $(b-a)/2n$ получим $(n\tau-0)/2n=\tau/2$. Последовательно проинтегрируем (16.8) от $t=0$ до $t=\tau$, затем от $t=0$ до $t=2\tau$ и т. д., каждый раз используя формулу трапеций.

Для $t=\tau$

$$\psi_1-\psi_0+R\int_0^\tau i\,dt=\int_0^\tau e(t)\,dt.$$

Но по (16.7) $\int_0^\tau i\,dt=\frac{\tau}{2}i_1$, следовательно,

$$\psi_1+\frac{R\tau}{2}i_1=\psi_0+\int_0^\tau e(t)\,dt, \tag{16.10}$$

где ψ_0 — остаточное потокосцепление, в дальнейшем примем его равным нулю.

Для $t=2\tau$

$$\psi_2+R\int_0^{2\tau} i\,dt=\int_0^{2\tau} e(t)\,dt.$$

Но по (16.7) $\int_0^{2\tau} i\,dt=\frac{\tau}{2}(2i_1+i_2)$, следовательно,

$$\psi_2+\frac{R\tau}{2}i_2=\int_0^{2\tau} e(t)\,dt-R\tau i_1. \tag{16.11}$$

Для $t=n\tau$

$$\psi_n+\frac{R\tau}{2}i_n=\int_0^{n\tau} e(t)\,dt-R\tau\sum_{k=1}^{k=n-1} i_k. \tag{16.12}$$

Уравнение (16.12) позволяет последовательно определять i_1, i_2, i_3 и т. д. В левой части его находятся неизвестный ток i_n и соответствующее ему потокосцепление ψ_n, а $\sum_{k=1}^{k=n-1} i_k$ в правой части известна по результатам подсчета за предыдущие интервалы времени.

Последовательность расчета такая:

1. По заданной $e(t)$ строят кривую $\int_0^{n\tau} e(t)\,dt$.

2. На рис. 16.5, *б* проводят прямую OS под углом α к оси абсцисс, тангенс которого равен $R\tau/2$.

3. Ток i_1 находят из (16.10). С этой целью на рис. 16.6 берут значение $\int_0^{\tau} e(t)\,dt$, равное отрезку $11'$. Этот отрезок откладывают на рис. 16.5, *б* и перемещают параллельно оси ординат до тех пор, пока один его конец не окажется на кривой $\psi(i)$ (точка B), а другой — на прямой OS (точка D). При этом отрезок BC равен ψ_1, отрезок CD — $\frac{R\tau}{2} i_1$. Ток i_1 равен отрезку OC.

4. Ток i_2 находят аналогично, только в соответствии с (16.11) из $\int_0^{2\tau} e(t)\,dt$, равного отрезку $22'$ (рис. 16.6), предварительно вычитают $R\tau i_1$, а затем уже перемещают полученный отрезок параллельно оси ординат.

5. Для определения i_3 из $\int_0^{3\tau} e(t)\,dt$ вычитают $R\tau(i_1+i_2)$ и т. д. Если $e(t)$ — функция периодическая с периодом T, то рекомендуется брать $\tau=\left(\frac{1}{18} \div \frac{1}{36}\right)T$; если непериодическая, то τ выбирают после предварительных пробных подсчетов.

Пример 164. В схеме рис. 16.5, *а* $R_1=R_2=2$ Ом. Зависимость $\psi=f(i)$ изображена на рис. 16.5, *б*. В интервале от $t=0$ до $t=0{,}1$ с $e(t)=400t$, далее $e(t)=0$.

Построить кривую $i=f(t)$, полагая начальные условия нулевыми и остаточное потокосцепление $\psi_0=0$.

Решение. Принимаем интервал времени $\tau=0{,}025$ с. Находим $R\tau/2=0{,}0125$. Результаты подсчетов сводим в табл. 16.1.

Таблица 16.1

n	$n\tau$	$\int_0^{n\tau} e(t)\,dt$	$\frac{R_1\tau}{1+R_1/R_2}\sum_{k=1}^{n-1} i_k$	$\int_0^{n\tau} e(t)\,dt-\frac{R_1\tau}{1+R_1/R_2}\sum_{k=1}^{n-1} i_k$	i_n
1	0,025	0,125	0	0,125	0,16
2	0,05	0,5	0,004	0,496	0,24
3	0,075	1,13	0,01	1,12	1,85
4	0,10	2	0,0562	1,943	15,7
5	0,125	2	0,45	1,55	4,6
6	0,15	2	0,565	1,435	3,2
7	0,175	2	0,645	1,355	2,76
8	0,2	2	0,715	1,285	2,36

По данным табл. 16.1 на рис. 16.6 построен график $\int e(t)\,dt=f(t)$, а на рис. 16.7, *а* — график $i=f(t)$.

§ 16.6. Расчет переходных процессов в схемах с несколькими нелинейными сопротивлениями. Метод Волынкина может быть применен и к цепям с несколькими нелинейными сопротивлениями, а также к цепям, описываемым уравнениями второго, третьего и более высоких порядков.

В качестве примера рассмотрим вопрос о переходном процессе в простейшей цепи с двумя нелинейностями.

В схеме рис. 16.7, *б* к источнику э. д. с. $e(t)$ подключены последовательно соединенные нелинейная индуктивность (зависимость $i=f(\psi)$ задана) и нелиней-

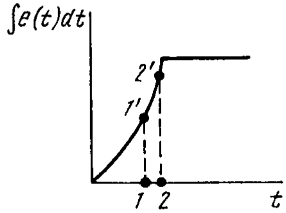


Рис. 16.6

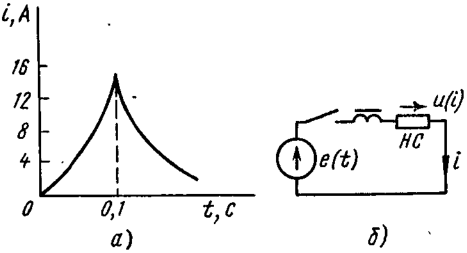


Рис. 16.7

ное активное сопротивление с заданной в. а. х. $u=f(i)$. Проинтегрируем уравнение цепи $\frac{d\psi}{dt}+u(i)=e(t)$ по t от 0 до $t=n\tau$, учтем, что

$$\int_0^{n\tau} u(i)\,dt=\frac{\tau}{2}\left[2u(i_1)+2u(i_2)+\ldots+2u(i_{n-1})+u(i_n)\right].$$

В результате получим формулу, аналогичную (16.12):

$$\psi_n+\frac{\tau}{2}u(i_n)=\int_0^{n\tau} e(t)\,dt-\tau\sum_{k=1}^{k=n-1}u(i_k). \tag{16.13}$$

Последовательность расчета по (16.13) такая же, как и по (16.12). Разница лишь в том, что вместо прямой $\frac{\tau R}{2}i$ (прямой OS) на рис. 16.5, *б* следует нанести кривую $\frac{\tau}{2}u(i)$.

§ 16.7. Метод медленно меняющихся амплитуд.

В электротехнике и радиотехнике для расчета переходных процессов широко применяют метод медленно меняющихся амплитуд. Этот метод был предложен в 1921 г. голландским ученым Ван-дер-Полем.

Рассмотрим основы этого метода на примере нелинейной цепи второго порядка, находящейся под воздействием периодической возмущающей силы.

Пусть уравнение этой цепи записано следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A\sin\omega t. \tag{16.14}$$

Под действием периодической силы с частотой ω в цепи устанавливается вынужденное колебание, первая гармоника которого имеет частоту ω. Полагаем, что высшие гармоники выражены слабо.

Искомая функция $x(t)$ может быть представлена как

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \tag{16.15}$$

где a и b — медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения a и b во времени определяется тем, что их производные по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями ωa и ωb:

$$\frac{da}{dt} \ll \omega a, \quad \frac{db}{dt} \ll \omega b. \tag{16.16}$$

Если это учесть, то, вместо того чтобы взять

$$\frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t + \sin\omega t\,\frac{da}{dt} + \cos\omega t\,\frac{db}{dt}, \tag{16.17}$$

можно в первом приближении принять

$$\frac{dx}{dt} \approx a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t. \tag{16.18}$$

Аналогично, вместо того чтобы вторую производную брать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\omega^2 a\sin\omega t - \omega^2 b\cos\omega t + \omega\cos\omega t\,\frac{da}{db} - \omega\sin\omega t\,\frac{db}{dt} + \\ + \frac{d^2a}{dt^2}\sin\omega t + \frac{d^2b}{dt^2}\cos\omega t + \omega\cos\omega t\,\frac{da}{dt} - \omega\sin\omega t\,\frac{db}{dt},$$

пренебрежем в ней слагаемыми второго порядка малости и оставим слагаемые первого порядка малости. Получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\left(\omega^2 a + 2\omega\frac{db}{dt}\right)\sin\omega t + \left(-\omega^2 b + 2\omega\frac{da}{dt}\right)\cos\omega t. \tag{16.19}$$

Обратим внимание на то, что слагаемые первого порядка малости оставлены в выражении для d^2x/dt^2 и ими пренебрежено в выражении для dx/dt. Объясняется это тем, что исследуемая цепь обладает малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части (16.14) относительно мала по сравнению с амплитудами первого и третьего слагаемых левой части (16.14).

Далее, в функцию $f(x)$ вместо x подставим (16.15) и разложим $f(x)$ в ряд Фурье. Затем умножим ряд Фурье, которым выразилось $f(x)$, на $\frac{dx}{dt}$ [на правую часть (16.18)]. Получим

$$f(x)\frac{dx}{dt} = F_0(a, b) + F_1(a, b)\sin\omega t + F_2(a, b)\cos\omega t + \\ + F_3(a, b)\sin 2\omega t + F_4(a, b)\cos 2\omega t + \ldots \tag{16.20}$$

Так как расчет ведется по первой гармонике, то постоянной составляющей $F_0(a, b)$ и высшими гармониками ряда Фурье [$F_3(a, b)$, $F_4(a, b)$ и др.] в дальнейшем пренебрегаем.

В (16.14) подставим правую часть (16.19) вместо d^2x/dt^2, $F_1(a, b)\sin\omega t + F_2(a, b)\cos\omega t$ вместо $f(x)\,dx/dt$ и $\omega_0^2(a\sin\omega t + b\cos\omega t)$ вместо $\omega_0^2 x$.

Тогда (16.14) разобьется на два уравнения. Одно из них [уравнение (16.21)] будет выражать собой равенство коэффициентов при $\cos\omega t$ в левой и правой частях (16.14), другое [уравнение (16.22)] — равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в левой и правой частях (16.14):

$$-2\omega\frac{db}{dt}+F_1(a,\ b)+a(\omega_0^2-\omega^2)=A; \tag{16.21}$$

$$2\omega\frac{da}{dt}+F_2(a,\ b)+b(\omega_0^2-\omega^2)=0. \tag{16.22}$$

Система уравнений (16.21) и (16.22) представляет собой два совместных дифференциальных уравнения, составленных относительно мгновенных значений медленно меняющихся амплитуд a и b.

В общем случае решение системы (16.21) — (16.22) может производиться методом малого параметра или методами числового интегрирования, а также при помощи метода Волынкина. В частном случае, когда внешняя периодическая сила равна нулю ($A=0$) и функция $F_1(a,\ b)=0$, система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{F_2(a)}{2\omega}\quad (b=0). \tag{16.23}$$

Ранее были рассмотрены основные этапы перехода от дифференциального уравнения для мгновенных значений [уравнение (16.14)] к дифференциальным уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. Метод применим и к другим, более сложным уравнениям.

В заключение необходимо отметить, что если максимальное значение слагаемого $f(x)\,dx/dt$ в (16.14) (и подобных ему), выражающее собой падение напряжения в активном сопротивлении контура (контуров), соизмеримо с максимальными значениями остальных слагаемых (16.14), то в выражении dx/dt должны быть сохранены слагаемые первого порядка малости, которыми ранее пренебрегли. Огибающая колебаний определяется уравнением

$$f(t)=\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}.$$

Пример 165. Определить закон нарастания амплитуд колебаний напряжения на сетке лампового генератора § 15.55.

Решение. Уравнение лампового генератора было выведено ранее [см. уравнение (15.56)]:

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c-M\frac{di_a}{dt}=0.$$

Анодный ток i_a выразим через сеточное напряжение u_c следующим образом:

$$i_a=i_{a0}+a'u_c-bu_c^3.$$

[Ср. с (15.46), см. пунктирную кривую рис. 15.27.]

Производная от анодного тока по времени

$$\frac{di_a}{dt}=(a'-3bu_c^2)\frac{du_c}{dt}.$$

Подставив ее в (16.56), получим

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+(RC-a'M+3bMu_c^2)\frac{du_c}{dt}+u_c=0.$$

Поделив последнее уравнение на $LC=1/\omega_0^2$, где ω_0 — угловая частота автоколебаний [см. формулу (15.61)], и обозначив

$$k_1=\frac{Ma'-RC}{LC}; \quad k_2=\frac{3bM}{Ma'-RC'}, \tag{16.24}$$

будем иметь

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}-k_1(1-k_2u_c^2)\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2u_c=0. \tag{16.25}$$

Примем $x=u_c\sqrt{k_2}$; $\frac{du_c}{dt}=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{dx}{dt}$; $\frac{d^2u_c}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{d^2x}{dt^2}$.

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2}-k_1(1-x^2)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0. \tag{16.26}$$

Множитель $-k_1(1-x^2)$ и представляет собой функцию $f(x)$ уравнения (16.14).

Так как на систему не действует внешняя периодическая сила и частота автоколебаний равна ω_0, а не ω, то примем, что $x=a\sin\omega_0t$. Таким образом,

$$\frac{dx}{dt}\approx a\omega_0\cos\omega_0t; \tag{16.27}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx 2\omega_0\frac{da}{dt}\cos\omega_0t-\omega_0^2a\sin\omega_0t. \tag{16.28}$$

Подставим (16.27) и (16.28) в (16.26), учтя, что

$$\sin^2\omega_0t\cos\omega_0t=0{,}25(\cos\omega_0t-\cos 3\omega_0t):$$

$$2\omega_0\cos\omega_0t\frac{da}{dt}-a\omega_0^2\sin\omega_0t+a\omega_0^2\sin\omega_0t-k_1a\omega_0\cos\omega_0t+0{,}25k_1\omega_0a^3\times$$
$$\times(\cos\omega_0t-\cos 3\omega_0t)=0.$$

Так как расчет ведем по медленно меняющейся первой гармонике, то слагаемое с $\cos 3\omega_0t$ не учитываем. Получим

$$2\frac{da}{dt}=ak_1(1-0{,}25a^2). \tag{16.29}$$

Введем новую переменную $y=0{,}25a^2$. Вместо (16.29) будем иметь

$$dy/dt=k_1y(1-y). \tag{16.30}$$

Уравнение (16.30) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными:

$$k_1t=\int\frac{dy}{y(1-y)}; \quad k_1t=-\ln C_0+\ln\frac{y}{1-y}.$$

Здесь $-\ln C_0$ обозначена постоянная интегрирования;

$$\frac{y}{1-y}=C_0e^{k_1t}; \quad y=\frac{C_0e^{k_1t}}{1+C_0e^{k_1t}}=\frac{1}{1+C_1e^{-k_1t}};$$

$$C_1=\frac{1}{C_0}; \; a=2\sqrt{y}=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}; \quad x=a\sin\omega_0t=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}\sin\omega_0t.$$

Амплитуда напряжения на емкости изменяется во времени следующим образом:

$$U_C=\frac{a}{\sqrt{k_2}}=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}\sqrt{\frac{a'M-RC}{3bM}}. \tag{16.31}$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальному значению амплитуды напряжения U_C. Так, если при $t=0$ $U_C=U_C(0_-)$, то

$$C_1=\frac{4}{U_C^2(0_-)}\cdot\frac{a'M-RC}{3bM}-1.$$

Мгновенное значение напряжения на емкости

$$u_C=U_C\sin\omega_0 t=\frac{2}{\sqrt{1+C_1 e^{-k_1 t}}}\sqrt{\frac{a'M-RC}{3bM}}\sin\omega_0 t. \qquad (16.32)$$

§ 16.8. Перемагничивание ферритовых сердечников импульсами тока. В устройствах вычислительной техники в качестве запоминающих элементов применяют миниатюрные ферритовые сердечники различной формы, в частности кольцевые с внешним диаметром порядка 1 мм из материала с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ). Через отверстия в них пропускают проводники, являющиеся одновитковыми обмотками (на рис. 16.8, *а* показан только один проводник). При

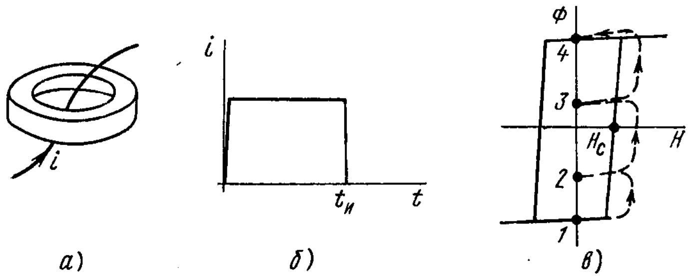


Рис. 16.8

записи информации по одному из проводников пропускают прямоугольный или почти прямоугольный импульс тока (рис. 16.8, *б*) длительностью всего в несколько десятков наносекунд или несколько микросекунд. Под действием этого импульса сердечник перемагничивается. Хотя в ферритовом сердечнике и отсутствуют макроскопические вихревые токи (в нем нет замкнутых токопроводящих контуров, играющих роль вторичных обмоток трансформатора), перемагничивается он все же не мгновенно.

На длительность процесса перемагничивания сердечника при высоких скоростях перемагничивания решающее влияние оказывает магнитная вязкость. Она как бы создает внутреннее поле трения, которое влияет на процесс перемагничивания. Это влияние зависит от величины и скорости изменения намагниченности и от превышения воздействующей напряженности поля $H_{\text{вн}}$ над коэрцитивной силой.

При математическом описании тормозящего действия магнитной вязкости исходят из уравнения

$$H_0=H_{\text{вн}}-a\frac{dJ}{dt}, \qquad (16.33)$$

где H_0 — напряженность поля, при котором происходит перемагничивание феррита с ППГ; H_0 несколько больше коэрцитивной силы H_c по статической петле гистерезиса; H_0 находят опытным путем для каждого типа феррита.

Напряженность внешнего поля, вызванная током i, $H_{\text{вн}}=iw/l$, где w — число витков, l — длина средней магнитной линии.

Член $a\dfrac{dJ}{dt}$ учитывает тормозящее действие магнитной вязкости. Множитель $a=\dfrac{1}{k\left(1-\dfrac{J^2}{J_s^2}\right)}$, где k — некоторый коэффициент; J — текущее значение намагниченности; J_s — намагниченность насыщения.

Решим уравнение (16.33) относительно dJ/dt, заменив J на индукцию B а J_s на индукцию насыщения B_s. Получим уравнение относительно B:

$$\frac{dB}{dt}=k\left(1-\frac{B^2}{B_s^2}\right)(H_{вн}-H_0). \tag{16.34}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из (16.34) следует, что для перехода из точки *1* в точку *4* (рис. 16.8, *в*) под действием импульса тока i длительностью $t_и$ должно выполняться соотношение

$$\int_0^{t_и}(H_{вн}-H_0)\,dt\geqslant\int_{-B_s}^{B_s}\frac{dB}{k\left(1-\dfrac{B^2}{B_s^2}\right)}=M.$$

Если же $\int_0^{t_и}(H_{вн}-H_0)\,dt<M$, то изображающая точка из положения *1* после прекращения действия импульса перейдет в точку *2* или *3* или им подобную [конечное состояние зависит от величины $\int_0^{t_и}(H_{вн}-H_0)\,dt$ и амплитуды импульса тока]. Из состояния *1* в состояние *4* сердечник может быть переведен и иным путем — путем воздействия на него несколькими следующими друг за другом импульсами одинаковой полярности, для каждого из которых $\int_0^{t_и}(H_{вн}-H_0)\,dt<M$. После первого импульса рабочая точка перейдет из положения *1*, скажем, в положение *2*, после второго из *2* — в *3* и затем из *3* — в *4*.

§ 16.9. Определение фазовой плоскости и характеристики областей ее применения. Качественное исследование процессов в нелинейных электрических цепях, описываемых дифференциальными уравнениями первого и особенно второго порядков, в ряде случаев производят с помощью фазовой плоскости.

Фазовой плоскостью (ф. п.) называют плоскость, по оси абсцисс которой откладывают исследуемую величину (назовем ее x), а по оси ординат — производную от исследуемой величины dx/dt (последнюю принято обозначать y).

В литературе можно встретить и другие виды фазовых плоскостей: 1) когда по оси абсцисс откладывается какая-либо одна величина (например, ток первой ветви), а по оси ординат — другая величина (например, напряжение на емкости во второй ветви); 2) когда по оси абсцисс откладывается амплитуда синусной составляющей колебания, а по оси ординат — амплитуда косинусной составляющей колебания и т. д.

В каждой конкретной задаче под x понимают либо ток, либо напряжение, либо заряд, либо индукцию. Любому сочетанию значений x и y исследуемой цепи соответствует вполне определенная точка ф. п.

Для качественного исследования процессов в электрических цепях, описываемых уравнениями третьего порядка, применяют трехмерное фазовое пространство. На одной оси декартовой системы этого пространства откладывают значение функции x, на другой — dx/dt, на третьей — d^2x/dt^2.

Качественное исследование — это выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. Под общими свойствами понимают обычно зависимость характера переходного процесса от начальных условий, возможность возникновения в схеме автоколебаний, резонансных явлений, автомодуляции, а также устойчивость перечисленных режимов и режимов равновесия.

Все эти вопросы в ряде случаев можно решить и иным путем, без привлечения ф. п. Применение последней делает исследование более наглядным и оправдано в тех случаях, когда объем работы соизмерим или меньше объема работы при решении тех же задач иными методами.

Обычно ф. п. применяют для исследования процессов в электрических цепях, содержащих источники постоянной э. д. с. и не содержащих источники периодической э. д. с. Однако ее можно использовать и для исследования процессов в цепях, содержащих источники синусоидальной (постоянной) э. д. с., если предварительно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений, к уравнениям для медленно меняющихся составляющих (величин).

§ 16.10. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл. Зависимость $y=f(x)$, получаемая из решения дифференциального уравнения системы, представляет собой семейство кривых на фазовой плоскости, соответствующих различным значениям постоянных интегрирования. Кривые $y=f(x)$, соответствующие различным начальным условиям, называют *интегральными кривыми.*

Начальное положение изображающей точки на ф. п. определяется значениями x и $dx/dt=y$ при $t=0$.

Интегральную кривую, проходящую через точку ф. п. с заданными начальными условиями, называют *фазовой траекторией.*

Вид фазовой траектории зависит от конфигурации схемы, характера нелинейности и соотношения между параметрами.

Если процесс в цепи является периодическим, то через интервалы времени, равные периоду процесса, соответствующие друг другу значения x и $dx/dt=y$ повторяются и фазовая траектория в этом случае является замкнутой кривой. Замкнутую фазовую траекторию называют *предельным циклом.*

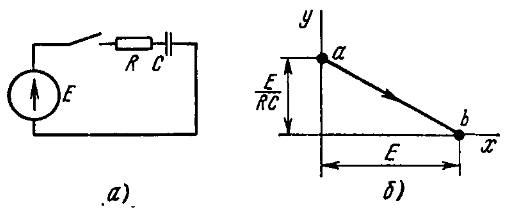


Рис. 16.9

Если интегральные кривые и снаружи и изнутри навиваются на предельный цикл, то его называют *устойчивым*, если удаляются от него — *неустойчивым*. Если же процесс непериодический, то фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую.

Фазовую траекторию можно наблюдать на экране электроннолучевого осциллографа. С этой целью на одну пару отклоняющих пластин его подают исследуемую величину x, а на другую пару — производную от x.

§ 16.11. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости. Рассмотрим несколько простейших примеров на описание процессов в линейных цепях.

Требуется изобразить на фазовой плоскости переходный процесс в схеме рис. 16.9, *а*, вызываемый при нулевых начальных условиях замыканием ключа. Обозначим i — ток в цепи, u_C — напряжение на емкости. В уравнение цепи $Ri+$ $+u_C=E$ вместо i подставим $C\frac{du_C}{dt}$:

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E.$$

Положим $u_C=x$, $du_C/dt=dx/dt=y$, тогда

$$y=(E-x)/RC.$$

Последнее уравнение описывает прямую ab рис. 16.9, *б*, которая является фазовой траекторией рассматриваемого процесса. Точка b — это точка равновесия.

В качестве второго примера рассмотрим изображение синусоидального колебания $i=I_m \sin \omega t$ (рис. 16.10, *а*).

Обозначим $i=x$, тогда

$$y=dx/dt=\omega I_m \cos \omega t,$$

т. е. $x=I_m \sin \omega t$; $y=\omega I_m \cos \omega t$.

Разделив первое уравнение на I_m, второе — на ωI_m, возведя в квадрат полученные выражения и сложив их, получим уравнение эллипса:

$$(x/I_m)^2+[y/(\omega I_m)]^2=1.$$

Следовательно, изображением синусоидального процесса (фазовой траекторией) на ф. п. является эллипс (рис. 16.10, *б*).

Направление движения изображающей точки показано стрелкой. В верхней полуплоскости $y=\frac{dx}{dt}>0$; следовательно, изображающая точка движется в сторону увеличения координаты x. В нижней полуплоскости $y=\frac{dx}{dt}<0$, поэтому изображающая точка движется в сторону уменьшения координаты x. В целом перемещение изображающей точки на ф. п. происходит всегда по часовой стрелке.

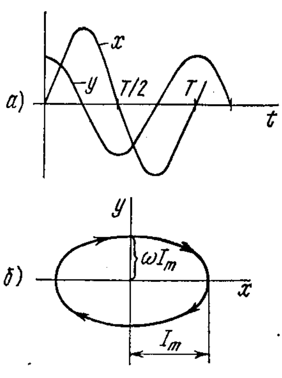


Рис. 16.10

§ 16.12. Изоклины. Особые точки. Построение фазовых траекторий. Тангенс угла наклона, образованного касательной к интегральной кривой в некоторой точке ф. п. и осью абсцисс, определяет величину dy/dx в этой точке. Совокупность точек ф. п., для которых $dy/dx=\mathrm{const}$, называют *изоклиной*. На ф. п. можно провести множество изоклин, для каждой из которых свое значение dy/dx.

Для всех точек ф. п., отображающей процессы в цепи второго порядка (кроме особых точек), dy/dx имеет вполне определенное значение. В особых точках (о. т.) $dy/dx=0/0$, т. е. не определено. Через эти точки может быть проведено множество изоклин с различными значениями dy/dx.

Особые точки классифицируют по виду интегральных кривых, окружающих эти точки.

Если о. т. окружена эллипсами (рис. 16.11, *а*), то ее называют о. т. типа центр; она соответствует двум мнимым корням характеристического уравнения.

Если о. т. окружена свертывающейся спиралью, то ее называют устойчивым фокусом (рис. 16.11, *б*); ей соответствуют комплексно-сопряженные корни с отрицательной действительной частью.

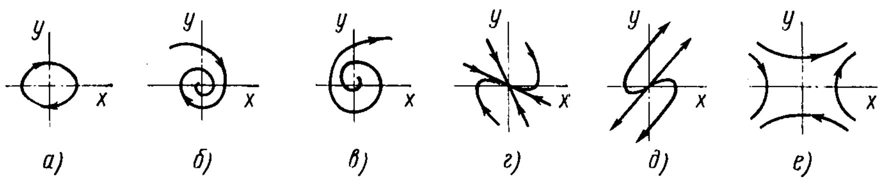


Рис. 16.11

Если о. т. окружена раскручивающейся спиралью — неустойчивый фокус (рис. 16.11, *в*), то ей соответствуют комплексно-сопряженные корни с положительной действительной частью.

Если корни отрицательные и действительные, то о. т. типа устойчивый узел (рис. 16.11, *г*). При положительных действительных корнях получают о. т. типа неустойчивый узел (рис. 16.11, *д*).

Когда один корень положителен, а другой отрицателен, о. т. типа седло (рис. 16.11, *е*).

Пример 166. В цепи рис. 16.12, *а* ключ замыкают при нулевых начальных условиях; $E=1$ В, $R=1$ Ом, $L=1$ Г, $C=1$ Ф.

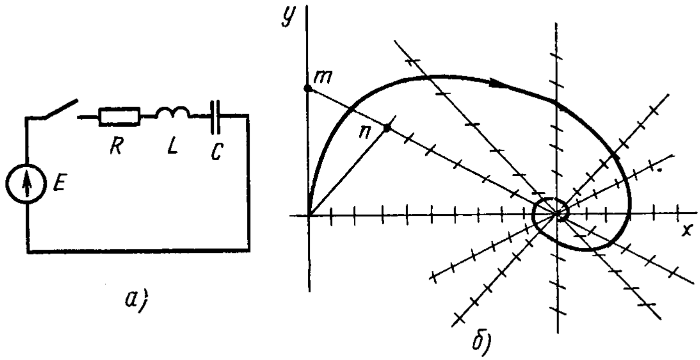


Рис. 16.12

Вывести формулу для построения семейства изоклин для напряжения на емкости u_C. Определить положение и тип о. т. Построить фазовую траекторию переходного процесса.

Решение. В уравнении цепи

$$LC\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right)+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E.$$

Заменим u_C на x, $\dfrac{du_C}{dt}$ на y,

$$\frac{d}{dt}(y) \text{ на } \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=y\frac{dy}{dx} \text{ и}$$

учтем, что $L=R=C=E=1$. Решим уравнение $y\dfrac{dy}{dx}+y+x=1$ относительно y и относительно dy/dx:

$$y=\frac{1-x}{1+(dy/dx)}; \tag{а}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-y}{y}. \tag{б}$$

Из уравнения (б) следует, что координаты особой точки $y=0$, $x=1$. Последовательно придавая dy/dx значения 0, 1, 2, ..., ∞, -1, -2, ..., строим семейство изоклин (рис. 16.12, *б*). Все изоклины проходят через о. т. и представляют собой прямые линии (цепь линейна). Масштабы по осям x и y приняты одинаковыми. Черточки на каждой изоклине характеризуют значение dy/dx для нее.

Так как $x(0)=u_C(0)=0$ и $y(0)=(du_C/dt)_0=0$, то к началу процесса изображающая точка находится в начале координат.

В установившемся режиме $x=1$ и $y=0$.

Для построения интегральной кривой из исходной точки $x=y=0$ проводим два луча до пересечения с изоклиной $dy/dx=1$ в точках m и n. Первый луч соответствует значению $dy/dx=\infty$ той изоклины, с которой начинается движение, второй — значению $dy/dx=1$ следующей изоклины, на которую точка перейдет. Делим расстояние mn пополам и проводим через исходную и полученную точки плавную кривую — кусочек фазовой траектории. Продолжаем аналогичный процесс далее и строим всю фазовую траекторию в виде свертывающейся спирали.

Особая точка в примере является устойчивым фокусом. Время в явном виде на фазовой плоскости не отражено.

Временные зависимости $x=f(t)$ по фазовой траектории $y=dx/dt=\varphi(x)$ получают по формуле $t=\int\limits_{x_0}^{x} dx/\varphi(x)$, где x_0 — начальное значение x, x — текущее.

В окрестности точки пересечения кривой $\varphi(x)$ с осью абсцисс подынтегральное выражение стремится к бесконечности. Чтобы избежать планиметрирования площади под кривой, уходящей в бесконечность при $\varphi(x)\to 0$, подсчет времени Δt на этом участке производят по средней скорости $\varphi_{ср}(x)$ на этом участке: $\Delta t = \Delta x/\varphi_{ср}(x)$.

Примеры применения ф. п. при анализе процессов в нелинейных цепях приведены, например, в [20].

Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте известные Вам группы методов расчета переходных процессов в нелинейных цепях. 2. Укажите, в чем положительные и в чем отрицательные стороны расчетов по мгновенным значениям и по огибающим первых гармоник, графо-аналитических и аналитических методов? 3. Почему метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, неприменим даже для цепей первого порядка, если вынуждающая сила является функцией времени? 4. Почему метод интегрируемой нелинейной аппроксимации не удается применить к электрическим цепям, описываемых уравнениями второго и более высоких порядков? 5. Чем физически можно объяснить, что при подключении линейной цепи RL к источнику синусоидальной э. д. с. максимальное значение тока при переходном процессе не может превысить удвоенного значения амплитуды тока установившегося режима, тогда как при подключении цепи «R — нелинейная индуктивность» к источнику синусоидальной э. д. с. это превышение может быть во много раз больше? 6. Покажите что метод расчета переходных процессов, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой по формуле трапеций, применим к уравнениям второго, третьего и более высоких порядков. 7. Охарактеризуйте идею метода медленно изменяющихся амплитуд. 8. Как расчетным путем учитывают магнитную вязкость при перемагничивании ферритовых сердечников импульсами тока?

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 17.1. Устойчивость «в малом» и «в большом». Устойчивость по Ляпунову. Режим работы электрической цепи, содержащей нелинейные сопротивления, может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. Как правило, режим работы большинства электрических цепей является устойчивым и в значительно меньшем числе случаев — неустойчивым.

Различают устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом».

Под *устойчивым режимом работы «в малом»* понимают такой, при котором достаточно малое отклонение режима работы от исходного (установившегося) — независимо от того, какими причинами оно вызвано, — с течением времени уменьшается и система возвращается в исходное состояние.

При неустойчивом режиме работы «в малом» достаточно малое отклонение с течением времени увеличивается и система не возвращается в исходное состояние.

Устойчивым «в большом» называют такой режим работы, при котором система, получив достаточно большое начальное отклонение, возвращается в исходное состояние после прекращения действия возмущения.

Если при достаточно большом отклонении от исходного состояния по прекращении действия возмущения система не возвращается в исходное состояние, то ее называют системой, неустойчивой «в большом».

Различие между устойчивостью «в малом» и устойчивостью «в большом» можно проиллюстрировать с помощью рис. 17.1, *а*. На этом рисунке изображен желоб с помещенным в нем шариком. Если шарик толкнуть так, что он переместится из положения *1* в положение *2*, а затем предоставить его себе самому, то под действием силы тяжести шарик возвращается в исходное положение (положение равновесия). Если шарик толкнуть с большей силой, то он пройдет через положение *3* и выскочит из желоба. Таким образом, система рис. 17.1, *а* устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

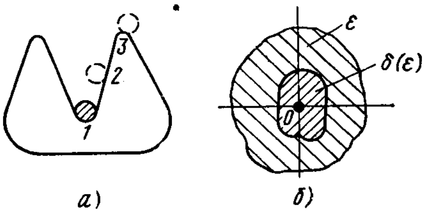


Рис. 17.1

В литературе можно встретить также термин «устойчивость по Ляпунову». Системой, устойчивой по Ляпунову, называют систему, для которой можно указать область допустимых отклонений [область $\delta(\varepsilon)$ на рис. 17.1, *б*] от состояния равновесия (точки 0), для которой ни одно из движений, начинающихся внутри области δ, никогда не достигнет границ некоторой заданной области ε.

Величина области δ зависит от величины области ε.

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы (типы движения): 1) состояние равновесия; 2) периодическое движение при отсутствии в системе источников периодической э. д. с. (тока) — автоколебания; 3) периодическое движение с частотой источника периодической э. д. с. (тока) — вынужденные колебания; 4) резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках; 5) квазипериодические (как бы периодические) процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов движений. Каждый из этих режимов (типов движений) может быть исследован на устойчивость.

В большинстве практических задач производят исследование устойчивости «в малом». Исследование устойчивости «в большом» производят путем анализа хода интегральных кривых на фазовой плоскости или путем использования «второго метода Ляпунова». Основы теории устойчивости были разработаны крупнейшим русским математиком А. М. Ляпуновым в 1892 г. и изложены в его книге «Общая задача об устойчивости движения».

§ 17.2. Общие основы исследования устойчивости «в малом». Общие основы исследования устойчивости «в малом» применимы ко всем или почти ко всем известным в настоящее время типам движения. В каждом конкретном случае возможны некоторые особенности при применении общих принципов.

Для исследования устойчивости исследуемой величине x (величинам) дают малое приращение Δx, развертывают уравнение, описывающее процесс, в ряд по степеням малого приращения Δx и ввиду малости Δx отбрасывают все члены ряда, содержащие Δx в степенях выше первой.

В полученном уравнении (уравнениях) выделяют слагаемые, содержащие Δx и производные от Δx по времени, и образуют из них дифференциальное уравнение (уравнения) относительно Δx. Уравнение относительно Δx алгебраизируют, получают характеристическое уравнение и определяют его корни.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения положителен или положительна действительная часть комплексно-сопряженных корней, то это свидетельствует о том, что возникшее приращение Δx будет не убывать, а возрастать по времени, т. е. исследуемое движение является неустойчивым.

Если же все действительные корни характеристического уравнения отрицательны, а все комплексно-сопряженные корни имеют отрицательную действительную часть, то исследуемое движение является устойчивым.

Характеристическое уравнение, составленное относительно приращения Δx, для системы второго порядка имеет вид

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0;$$

для системы третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для суждения о характере корней характеристического уравнения разработано несколько математических критериев. Воспользуемся критерием Гурвица (Рауса — Гурвица).

Критерий (теорема) Гурвица состоит в следующем: для того чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры (Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1}) определителя Гурвица (Δ_n) были больше нуля.

Определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}.$$

Следовательно, условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения выражают следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

Сам определитель Гурвица Δ_n составляют так:

1) по главной диагонали определителя в порядке возрастания индексов вписывают коэффициенты от a_1 до a_n;

2) в ту часть каждого столбца, которая расположена выше главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке возрастания индексов;

3) в ту часть каждого столбца, которая расположена ниже главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке уменьшения индексов (до a_0 включительно).

Следствием теоремы Гурвица является лемма: *все коэффициенты характеристического уравнения* (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) *устойчивой системы положительны.*

Из изложенного вытекает, что для системы с характеристическим уравнением второго порядка положительные вещественные корни (или комплексно-сопряженные с положительной действительной частью) имеют место в том случае, если какой-либо из коэффициентов уравнения (a_0, a_1, a_2) окажется отрицательным. Для системы с характеристическим уравнением третьего порядка положительные вещественные корни (комплексно-сопряженные с положительной действительной частью) будут в том случае, если: а) какой-либо из коэффициентов (a_0, a_1, a_2) окажется отрицательным; б) $a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$.

Аналогичные заключения могут быть сделаны и для систем с характеристическими уравнениями более высоких порядков.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... могут оказаться отрицательными в следующих основных случаях:

а) когда в состав исследуемой на устойчивость системы входят нелинейные активные сопротивления, обладающие падающим участком характеристики, и когда точка равновесия оказывается на падающем участке характеристики;

б) в схемах с чрезмерно большим воздействием выходной величины на входную (в схемах с чрезмерно большой положительной обратной связью). В этом случае поступление энергии из выходной цепи во входную превышает потребление энергии во входной цепи и приращение Δx возрастает;

в) в схемах с управляемыми нелинейными индуктивностями (или нелинейными емкостями) при наличии неявно (в некоторых случаях и явно) действующих обратных связей. В таких схемах обратные связи при определенных условиях приводят к появлению на характеристиках нелинейных индуктивностей (нелинейных емкостей) падающих участков.

Режим работы системы может оказаться неустойчивым, если изображающая точка окажется на падающем участке характеристики управляемой нелинейной индуктивности (управляемой нелинейной емкости).

§ 17.3. Исследование устойчивости состояния равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой. Когда рабочая точка по постоянному току окажется на падающем участке в. а. х., то состояние равновесия в системе при определенных условиях может оказаться неустойчивым.

При исследовании устойчивости нелинейное сопротивление заменяют расчетной схемой — схемой замещения. Она должна учитывать свойства НС как при медленных (при $\omega \to 0$), так и при весьма быстрых (при $\omega \to \infty$) малых приращениях тока и напряжения на НС.

Свойства НС при $\omega \to 0$ определяются самой в. а. х. НС, снятой при постоянном токе, на падающем участке которой дифференциальное сопротивление $R_д < 0$.

Если к НС подвести некоторое постоянное напряжение или через него пропустить некоторый постоянный ток такой величины, чтобы рабочая точка находилась на падающем участке в. а. х., и затем воздействовать на НС синусоидальным напряжением или током малой амплитуды, то сопротивление $Z(j\omega)$, оказываемое НС синусоидальной составляющей малой амплитуды, будет представлять собой комплексное число. Опыт показывает, что при достаточно большой ω действительная часть этого сопротивления оказывается положительной, т. е. $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$. Объясняется это тем, что физические процессы в самом НС являются процессами инерционными, причем инерционность все сильнее проявляется с ростом частоты.

В одних НС инерционность вызвана тепловыми процессами, в других — процессами накопления энергии в электрическом и (или) магнитном полях, в-третьих — процессами ионизации и деионизации (которые также протекают не мгновенно), в-четвертых — инерционностью процессов диффузии носителей тока и емкостью, обусловленной объемными зарядами. Но чаще всего инерционность есть следствие нескольких взаимно связанных друг с другом процессов.

Таким образом, схема замещения НС, когда точка равновесия находится на падающем участке характеристики, по отношению к малым приращениям должна быть такой, чтобы при $\omega \to 0$ $\operatorname{Re} Z(j\omega) = R_д < 0$, а при $\omega \to \infty$ $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$.

На рис. 17.2, *а* изображена одна из возможных схем замещения для НС с S-образной в. а. х. (рис. 17.2, *б*), удовлетворяющая перечисленным условиям. В этой схеме $L_п$ — некоторая малая индуктивность, которую часто называют «паразитной», $R_{доб} > |R_д| > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление.

На рис. 17.2, *в* изображена одна из возможных схем замещения для НС с N-образной в. а. х. (рис. 17.2, *г*). В ней $C_п$ — некоторая малая емкость, называемая часто «паразитной», и $R'_{доб} > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление. Параметры $L_п$ и $R_{доб}$, а также $C_п$ и $R'_{доб}$ зависят от физических процессов в НС и изменяются при переходе из одной точки на падающем участке в. а. х. в другую.

§ 17.4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике. В качестве исходных при исследовании устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний обычно служат уравнения, получаемые по методу медленно меняющихся амплитуд (см. § 16.7). Однако в тех случаях, когда напряжение на каком-либо элементе (ток в исследуемой цепи) резко отличается по форме от синусоиды, например имеет пикообразную форму, исследование устойчивости целесообразно проводить по средним за полпериода значениям величин.

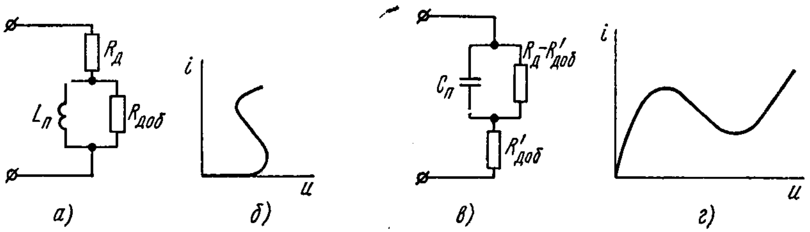


Рис. 17.2

Если через a и b обозначить медленно меняющиеся амплитуды синусной и косинусной составляющих исследуемого колебания, то из исходных уравнений системы можно получить два уравнения для медленно меняющихся амплитуд:

$$da/dt = A(a,\ b); \tag{17.1}$$

$$db/dt = B(a,\ b). \tag{17.2}$$

Здесь A и B являются функциями амплитуд a и b, функциями всех параметров схемы, угловой частоты колебаний ω и амплитуды вынуждающей силы. Обозначим значения a и b в установившемся режиме (когда амплитуды не изменяются во времени) через a_0 и b_0. Для определения a_0 и b_0 в (17.1) и (17.2) следует положить $da/dt = 0$ и $db/dt = 0$ и решить систему уравнений:

$$A(a_0,\ b_0) = 0; \tag{17.3}$$

$$B(a_0,\ b_0) = 0. \tag{17.4}$$

Пусть в результате возмущения амплитуды колебания получили малые приращения Δa и Δb и стали равными: $a = a_0 + \Delta a$ и $b = b_0 + \Delta b$.

Подставим эти значения a и b в (17.1) и (17.2), развернем $A(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b)$ и $B(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b)$ в ряд Тейлора по малым приращениям Δa и Δb и в силу малости приращений ограничимся слагаемыми ряда с первыми степенями Δa и Δb. Получим:

$$A(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b) = A(a_0,\ b_0) + \Delta a A_1 + \Delta b B_1, \tag{17.5}$$

$$B(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b) = B(a_0,\ b_0) + \Delta a A_2 + \Delta b B_2. \tag{17.6}$$

Для сокращения записи обозначено:

$$A_1=\left[\frac{\partial A(a,\ b)}{\partial a}\right]_y;\quad B_1=\left[\frac{\partial A(a,\ b)}{\partial b}\right]_y; \tag{17.7}$$

$$A_2=\left[\frac{\partial B(a,\ b)}{\partial a}\right]_y;\quad B_2=\left[\frac{\partial B(a,\ b)}{\partial b}\right]_y. \tag{17.8}$$

Индекс y свидетельствует о том, что в частные производные должны быть подставлены значения a и b установившегося режима, т. е. a_0 и b_0.

Коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 являются функциями a_0 и b_0, но не являются функциями приращений Δa и Δb. Подставим правые части (17.5) и (17.6) в (17.1) и (17.2), учтя при этом (17.3) и (17.4), а также то, что $\frac{d(a_0+\Delta a)}{dt}=\frac{d\Delta a}{dt}$ и $\frac{d(b_0+\Delta b)}{dt}=\frac{d\Delta b}{dt}$.

В результате получим два уравнения:

$$d\Delta a/dt=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{17.9}$$

$$d\Delta b/dt=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{17.10}$$

Алгебраизируем их:

$$p\Delta a=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{17.9а}$$

$$p\Delta b=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{17.10б}$$

Составим характеристическое уравнение

$$p^2+mp+q=0, \tag{17.11}$$

где

$$m=-(A_1+A_2); \tag{17.12}$$

$$q=A_1B_2-B_1A_2. \tag{17.13}$$

В соответствии с критерием Гурвица для затухания приращений Δa и Δb необходимо, чтобы

$$m>0,\quad q>0. \tag{17.14}$$

В автоколебательных системах периодические вынуждающие силы, как правило, отсутствуют, поэтому обычно можно взять $b=0$, т. е. взять колебание в виде $a(t)\sin\omega t$ (см. пример 165). В этом случае вместо двух уравнений (17.9) и (17.10) будет одно уравнение

$$d\Delta a/dt=A_1\Delta a, \tag{17.15}$$

где

$$A_1=\left[\frac{dA(a)}{da}\right]_{a=a_0}. \tag{17.16}$$

Для устойчивости автоколебаний в этом случае необходимо выполнение условия $A_1<0$.

Пример на исследование устойчивости автоколебаний по формуле (17.15) см. в § 17.6 *.

---

* Исследование устойчивости вынужденных колебаний на высших гармониках и субгармониках, процессов в цепях с переменными во времени параметрами, а также исследование устойчивости процессов автомодуляции даны, например, в [21].

§ 17.5. Исследование устойчивости состояния равновесия в генераторе релаксационных колебаний. *Релаксационные колебания* представляют собой автоколебания, при определенных условиях возникающие в нелинейных электрических цепях с одним накопителем энергии, например в цепи с одной емкостью (без индуктивности) или в цепи с одной индуктивностью (без емкости).

На рис. 17.3, *а* изображена принципиальная схема генератора релаксационных колебаний. Она состоит из источника постоянной э. д. с. E, линейного сопротивления R, емкости C и параллельно соединенного с ней нелинейного сопротивления HC, имеющего в. а. х. S-образной формы.

В качестве НС с такой в. а. х. могут быть взяты неоновая лампа или тиратрон. На рис. 17.3, *б* дана схема генератора с неоновой лампой.

Кривая *1* рис. 17.3, *в* представляет собой в. а. х. неоновой лампы, прямая *2* — в. а. х. линейного сопротивления R.

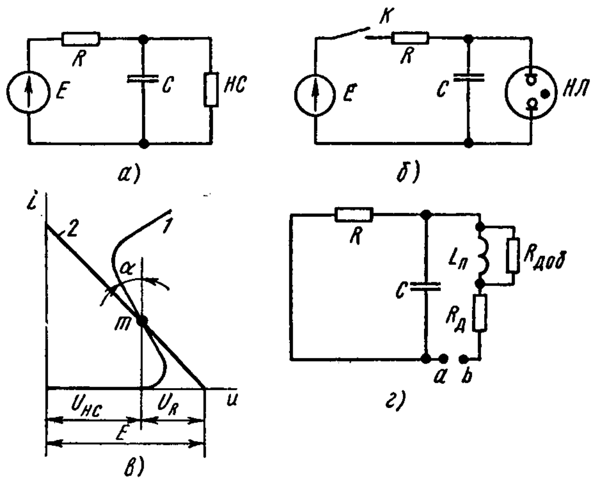


Рис. 17.3

Если бы не было релаксационных колебаний, то режим работы определился бы точкой m пересечения кривой *1* и прямой *2*.

Для этой точки сумма падений напряжений на НС и R в соответствии со вторым законом Кирхгофа равна э. д. с. E.

Точку m будем называть *точкой равновесия*. Она определяет режим работы схемы при прохождении по сопротивлению R и неоновой лампе постоянного тока.

Убедимся в том, что режим работы, определяемый точкой m, является неустойчивым режимом: достаточно ничтожно малого отклонения от состояния равновесия, чтобы изображающая точка «ушла» из точки m и не возвратилась в нее. В схеме начнутся релаксационные колебания.

Для того чтобы убедиться в неустойчивости состояния равновесия, составим линейную схему замещения релаксационного генератора.

Так как НС имеет S-образную в. а. х., то в схеме для исследования устойчивости оно имитировано (в соответствии с § 17.3) дифференциальным сопротивлением $R_д$ и последовательно с ним включенной малой паразитной индуктивностью $L_п$, зашунтированной активным сопротивлением $R_{доб}$.

Дифференциальное сопротивление $R_д$ в точке m пропорционально тангенсу угла α на рис. 17.3, *в* и является отрицательной величиной.

Источник э. д. с. в схеме замещения рис. 17.3, *г* не включен, так как исследуется поведение схемы в режиме приращений по отношению к режиму, определяемому точкой m.

Входное сопротивление схемы в операторной форме относительно точек a и b

$$Z_{ab}(p)=R_д+\frac{R_{доб}pL_п}{R_{доб}+pL_п}+\frac{R\frac{1}{Cp}}{R+1/Cp}.$$

Характеристическое уравнение цепи

$$p^2L_пCR(R_{доб}+R_д)+p[L_п(R+R_{доб}+R_д)+CRR_{доб}R_д]+R_{доб}(R+R_д)=0.$$

Так как рабочая точка находится на падающем участке в. а. х. НС, то $R>R_д$ и поэтому свободный член положителен. Из условия $\operatorname{Re}Z(j\omega)>0$ при $\omega\to\infty$ следует, что $R_{доб}>|R_д|$, поэтому коэффициент при p^2 тоже положителен. Состояние равновесия будет неустойчивым, если коэффициент при p окажется отрицательным, т. е. при

$$L_п(R+R_{доб}+R_д)+CRR_{доб}R_д<0.$$

Рассмотрим последовательность смены состояний при релаксационных колебаниях.

Пусть в схеме рис. 17.3, *б* при нулевых начальных условиях замыкается ключ K. Емкость C начнет заряжаться, и напряжение на ней будет расти (рис. 17.4, *а*). Так как емкость и неоновая лампа *НЛ* включены параллельно, то в любом режиме работы напряжения на них одинаковы. Как только напряжение на емкости возрастет до величины, равной напряжению зажигания $u_з$ неоновой лампы, последняя зажжется и ток в ней возрастет от нуля до i_4 (рис. 17.4, *б*).

Емкость быстро разрядится через *НЛ*, внутреннее сопротивление которой мало по сравнению с сопротивлением R. При этом изображающая точка на в. а. х. *НЛ* переместится из точки *4* в точку *1*. В точке *1* напряжение на *НЛ* равно напряжению гашения ее $u_г$, поэтому неоновая лампа гаснет и ток в ней становится равным нулю (точка *2*).

Далее емкость вновь заряжается до напряжения $u_з$, *НЛ* снова зажигается и процесс повторяется.

Траектория движения изображающей точки на рис. 17.4, *б* образует замкнутую петлю *12341*.

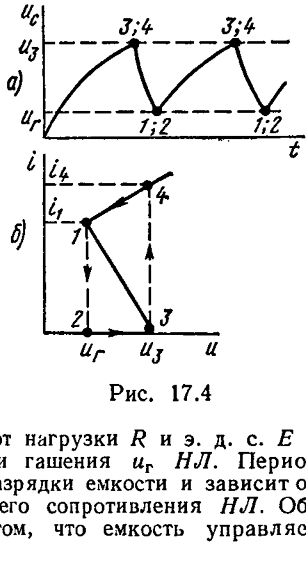


Рис. 17.4

Следует подчеркнуть, что если условия возбуждения колебаний в схеме выполнены, то размах колебаний напряжения на емкости не зависит от нагрузки R и э. д. с. E и определяется только напряжениями зажигания $u_з$ и гашения $u_г$ *НЛ*. Период колебаний равен сумме времени зарядки и времени разрядки емкости и зависит от э. д. с. E, емкости C, сопротивления R и внутреннего сопротивления *НЛ*. Обратная связь в схеме находит свое выражение в том, что емкость управляет режимом работы *НЛ*.

§ 17.6. Исследование устойчивости периодического движения в ламповом генераторе синусоидальных колебаний. Рассмотрим вопрос об исследовании устойчивости синусоидальных колебаний в ламповом генераторе (см. рис. 15.40). С этой целью воспользуемся формулами (16.24) и (16.29).

В соответствии с (16.29) производная от амплитуды колебаний

$$A(a)=da/dt=0{,}5ak_1(1-0{,}25a^2).$$

В установившемся режиме работы амплитуду колебаний обозначим a_0. Для определения a_0 приравняем da/dt нулю и решим уравнение $1-0{,}25a_0^2=0$. Отсюда $a_0=2$.

В соответствии с § 17.4 для исследования устойчивости периодического движения $a\sin\omega t$ в автоколебательной системе, на которую не воздействует внешняя периодическая сила частотой ω, достаточно найти знак производной $dA(a)/da$ при

$a=a_0$. Если при этом $dA(a)/da<0$, то процесс устойчив. В нашем случае

$$\left(\frac{dA(a)}{da}\right)_{a_0=2}=0,5k_1(1-0,75a_0^2)=-k_1.$$

Ранее [см. уравнение (16.32)] было выяснено, что $a'M>RC$ и $k_1>0$, так как только в этом случае амплитуда колебаний представляет собой вещественную величину.

Следовательно, $(dA(a)/da)_{a=a_0}<0$. Процесс устойчив.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение системы, устойчивой в малом, устойчивой в большом, устойчивой по Ляпунову. 2. Изложите общие основы исследования устойчивости в малом. 3. Как по коэффициентам характеристического уравнения, составленного для малых приращений, можно судить об устойчивости системы? 4. В каких группах электрических цепей можно ожидать неустойчивых режимов работы? 5. Изобразите схемы замещения НС с в. а. х. S- и N-типа для исследования устойчивости, когда изображающая точка оказывается на падающем участке в. а. х. этих сопротивлений. Покажите, что для этих схем выполняются условия $\operatorname{Re} Z(j\omega)_{\omega\to 0}<0$ и $\operatorname{Re} Z(j\omega)_{\omega\to\infty}>0$. 6. Изложите идею исследования устойчивости вынужденных колебаний и автоколебаний.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 18.1. Элементы цепей. Электрические цепи с переменными во времени параметрами представляют собой электрические цепи, в состав которых входят активные сопротивления, индуктивности, емкости и взаимные индуктивности, изменяющиеся во времени (если в состав цепи входит хотя бы одно изменяющееся во времени сопротивление, то она принадлежит к рассматриваемому классу цепей).

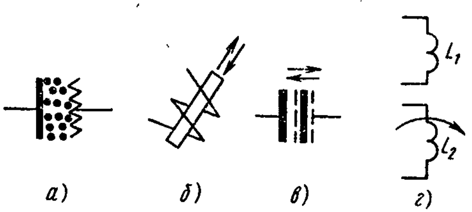


Рис. 18.1

Угольный микрофон — простейшее изменяющееся активное сопротивление (рис. 18.1, *а*). Сопротивление его является функцией звукового давления, оказываемого мембраной на порошок графита.

Индуктивная катушка с незамкнутым ферромагнитным сердечником, который выдвигается из катушки и вдвигается в нее (рис. 18.1, *б*),— пример переменной во времени индуктивности.

Конденсатор, пластины которого раздвигаются и сдвигаются, не соприкасаясь (рис. 18.1, *в*), — пример емкости, изменяющейся во времени.

Две индуктивные катушки L_1 и L_2 (рис. 18.1, *г*), взаимное расположение которых меняется во времени (например, если одна из них вращается вокруг своей оси, перпендикулярной рисунку), — пример взаимной индуктивности, меняющейся во времени.

Изменение параметров цепи во времени может происходить под действием внешней механической силы или чисто электрическим путем.

Параметр цепи может изменяться во времени периодически и непериодически. Рис. 18.2, *а*—*в* иллюстрирует несколько различных периодических законов изменения параметров.

§ 18.2. Некоторые общие свойства электрических цепей. Несмотря на то что цепи с переменными во времени параметрами являются линейными цепями (описываются линейными дифференциальными уравнениями), они обладают свойствами, сближающими их с нелинейными цепями.

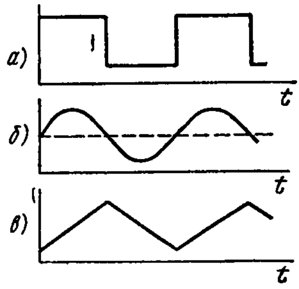


Рис. 18.2

Переменные во времени сопротивления, подобно нелинейным сопротивлениям, являются генераторами высших гармоник тока и напряжения. В силу этого в цепях с переменными параметрами протекают токи не только тех частот, которые имеют источник вынуждающей силы и переменная составляющая сопротивления, но и токи множества других частот.

Благодаря этому в цепях с переменными параметрами при наличии в их составе индуктивностей и емкостей могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках при отсутствии гармоник данной кратности у источника э. д. с.

Обратим внимание на то, что амплитуды отдельных гармоник тока в цепях с переменными параметрами линейно зависят от амплитуд остальных гармоник (в нелинейных цепях аналогичная зависимость нелинейна).

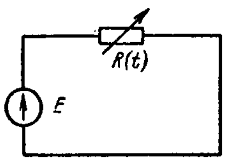


Рис. 18.3

Наряду с этим цепи с переменными во времени параметрами обладают линейными свойствами, принципиально отличающими их от нелинейных цепей. Так, в цепях с переменными во времени параметрами амплитуды гармоник тока и напряжения пропорциональны амплитуде вынуждающей силы. Другими словами, если э. д. с. источника увеличить вдвое, то и амплитуды токов и напряжений увеличатся вдвое. В цепях с нелинейными сопротивлениями, где имеет место насыщение, такой пропорциональности, как известно, нет.

Ранее говорилось, что переменное сопротивление является генератором высших гармоник тока. Убедимся в этом на простейшем примере. На рис. 18.3 изображена схема, состоящая из источника постоянной э. д. с. E и активного сопротивления, изменяющегося во времени в соответствии с кривой рис. 18.2, *б*:

$$R(t) = R_0(1 - \underset{k<1}{k} \sin \omega t). \qquad (18.1)$$

По закону Ома, ток в цепи

$$i=\frac{E}{R(t)}=\frac{E}{R_0}\frac{1}{1-k\sin\omega t}. \tag{18.1a}$$

Известно, что функция $1/(1-x)$ при $|x|<1$ может быть разложена в степенной ряд:

$$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n. \tag{18.2}$$

Роль, которую играет x в (18.2), в (18.1a) выполняет $k\sin\omega t$. Поэтому при $k<1$

$$\frac{i}{E/R_0}=1+k\sin\omega t+k^2\sin^2\omega t+k^3\sin^3\omega t+\ldots \tag{18.3}$$

Воспользуемся известными из тригонометрии формулами

$$\sin^2\alpha=0{,}5(1-\cos 2\alpha);\quad \sin^3\alpha=-0{,}25\sin 3\alpha+0{,}75\sin\alpha;$$

$$\sin^4\alpha=0{,}375-0{,}5\cos 2\alpha+0{,}125\cos 4\alpha$$

и объединим слагаемые правой части ряда (18.3) с аргументами одинаковой кратности. Получим

$$\frac{i}{E/R_0}=(1+0{,}5k^2+0{,}375k^4+\ldots)+(k+0{,}25k^3+\ldots)\sin\omega t-$$
$$-(0{,}5k^2+0{,}5k^4+\ldots)\cos 2\omega t-(0{,}25k^3+\ldots)\sin 3\omega t+\ldots$$

Таким образом, несмотря на то, что в цепи рис. 18.3 включена постоянная э. д. с., а переменная составляющая сопротивления изменяется по закону синуса с частотой ω, ток имеет и высшие гармоники (частоты 2ω, 3ω). Постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока нелинейно зависят от коэффициента k, но линейно зависят от э. д. с. E.

Обратим внимание также на то, что при $k\neq 0$ постоянная составляющая тока в цепи рис. 18.3 не равна E/R_0, т. е. в схеме наблюдается своеобразный выпрямительный эффект.

Энергия, выделяющаяся в виде теплоты в цепи с переменными во времени параметрами, доставляется не только источниками э. д. с. (тока), имеющимися в цепи, но и теми внешними источниками (например, механическими двигателями), которые совершают работу при изменении параметра (параметров) цепи.

Какую долю энергии доставляет источник э. д. с., а какую дает внешний источник, совершающий работу при изменении параметра, для каждой цепи с переменными параметрами следует рассматривать применительно к конкретным условиям. Доля энергии, доставляемая внешним источником, может составлять в одном предельном случае нуль, в другом — 100%.

§ 18.3. Методика расчета электрических цепей в установившемся режиме. Если переменный параметр изменяется во времени периодически, претерпевая резкие скачкообразные изменения (см. рис. 18.2, *а*), то расчет цепей целесообразно проводить с помощью классического метода расчета переходных процессов. В этом случае постоянные интегрирования определяют, исходя из законов коммутации и периодичности процесса.

Если же переменный параметр изменяется так, что его можно представить в виде постоянной составляющей и одной или нескольких синусоидальных составляющих, то расчет производят, применяя метод гармонического баланса.

Метод гармонического баланса применительно к нелинейным цепям был рассмотрен в § 15.49. Основные черты его и здесь те же. Последовательность расчета такая: искомый ток (или любая другая величина) изображается в виде ряда Фурье, например в виде

$$i = I_0 + I_{11}\sin\omega t + I_{12}\cos\omega t + I_{21}\sin 2\omega t + I_{22}\cos 2\omega t + \ldots$$

Полученное выражение для тока подставляют в дифференциальное уравнение цепи и выделяют из него уравнение, выражающее собой равенство постоянных составляющих левой и правой его частей, уравнение, выражающее собой равенство синусных составляющих левой и правой частей, и т. д. Каждое из этих уравнений в общем случае содержит несколько неизвестных (I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}), но является линейным уравнением относительно этих неизвестных (в этом отличие от нелинейных цепей). Далее решают систему линейных уравнений относительно I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}.

Метод гармонического баланса можно применять к расчету цепей, содержащих несколько переменных во времени параметров (например, изменяющееся во времени активное сопротивление и изменяющуюся во времени индуктивность), причем характер изменения во времени э. д. с. (тока) может быть по любому периодическому закону.

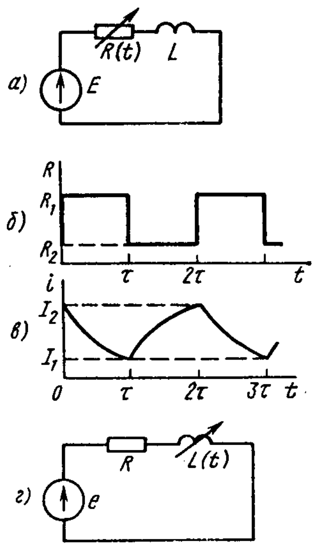


Рис. 18.4

Пример 167. В схеме рис. 18.4, *а* э. д. с. E и индуктивность L постоянны, а сопротивление меняется в соответствии с рис. 18.4, *б*. Определить закон изменения тока в установившемся режиме.

Решение. Так как сопротивление изменяется периодически, то и ток изменяется периодически. Обозначим значение тока в момент $t=0$ через I_2. В этот момент сопротивление цепи скачком возрастает от R_2 до R_1 и ток в цепи начинает уменьшаться. В момент $t=\tau$ ток принимает значение I_1 и сопротивление скачком уменьшается с R_1 до R_2. Последнее приводит к тому, что ток начинает увеличиваться.

В первом интервале времени от $t=0$ до $t=\tau$ ток можно представить в виде суммы принужденного E/R_1 и свободного $C_1 e^{p_1 t}$ токов, причем $p_1 = -R_1/L$ — корень характеристического уравнения цепи $pL + R_1 = 0$; C_1 — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени от $t=\tau$ до $t=2\tau$

$$i = (E/R_2) + C_2 e^{p_2(t-\tau)}; \quad p_2 = -R_2/L.$$

Задача сводится к определению двух постоянных C_1 и C_2.

При $t=0$ $i=I_2$, следовательно,

$$I_2=(E/R_1)+C_1. \tag{18.4}$$

При $t=\tau$ $i=I_1$, поэтому

$$I_1=(E/R_1)+C_1e^{p_1\tau}. \tag{18.5}$$

Начальное значение тока для второго интервала времени I_1 можно найти и иначе:

$$I_1=(E/R_2)+C_2. \tag{18.6}$$

К концу второго интервала времени, когда $t=2\tau$, $i=I_2$,

$$I_2=(E/R_2)+C_2e^{p_2\tau}. \tag{18.7}$$

Приравнивая правые части уравнений (18.4) и (18.7), получим

$$(E/R_1)+C_1=(E/R_2)+C_2e^{p_2\tau}.$$

Аналогично, из уравнений (18.5) и (18.6) следует, что

$$(E/R_2)+C_2=(E/R_1)+C_1e^{p_1\tau}.$$

Совместное решение двух последних уравнений дает:

$$C_1=\frac{a\,(1-e^{p_2\tau})}{1-e^{p_1\tau+p_2\tau}}; \tag{18.8}$$

$$C_2=-a+C_1e^{p_1\tau};\quad a=\frac{E}{R_2}-\frac{E}{R_1}. \tag{18.9}$$

В первом интервале времени $i=(E/R_1)+C_1e^{p_1t}$, во втором $i=(E/R_2)+C_2e^{p_2(t-\tau)}$. Кривая $i=f(t)$ показана на рис. 18.4, *в*.

Пример 168. В схеме рис. 18.4, *г* э. д. с. $e=E+E_m\sin(\omega t+\psi)$; $L=L_0\times(1+k\sin\omega t)$, активное сопротивление R не является функцией времени. Определить постоянную составляющую, а также первую и вторую гармоники тока ($k<1$).

Решение. В дифференциальное уравнение

$$Ri+\frac{d}{dt}(Li)=E+E_m\sin(\omega t+\psi) \tag{18.10}$$

подставляем ток

$$i=I_0+I_{11}\sin\omega t+I_{12}\cos\omega t+I_{21}\sin 2\omega t+I_{22}\cos 2\omega t. \tag{18.11}$$

Выделив постоянную составляющую, получим уравнение

$$RI_0=E. \tag{18.12}$$

Равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в обеих частях (18.10) после подстановки в него (18.11) и деления на R дает

$$I_{11}-aI_{12}-0{,}5kaI_{21}=(E_m/R)\cos\psi. \tag{18.13}$$

Равенство коэффициентов при $\cos\omega t$ (после деления на R) дает

$$aI_{11}+I_{12}-0{,}5akI_{22}=-akI_0+\frac{E_m}{R}\sin\psi, \tag{18.14}$$

при $\sin 2\omega t$

$$akI_{11}+I_{21}-2aI_{22}=0; \tag{18.15}$$

при $\cos 2\omega t$

$$akI_{12}+2aI_{21}+I_{22}=0; \tag{18.16}$$

$$a=\omega L_0/R. \tag{18.17}$$

Из (18.12) следует, что в схеме рис. 18.4, *г* постоянная составляющая тока I_0 не зависит от переменной составляющей индуктивности и от переменной составляющей э. д. с. Однако постоянная составляющая потокосцепления, равная $L_0 I_0 + 0{,}5kL_0 I_{11}$, зависит от амплитуды переменной составляющей индуктивности (kL_0) и от амплитуды первой гармоники переменного тока.

Это свойство в известном смысле напоминает первое из свойств нелинейных симметричных сопротивлений, описанное в § 15.17.

Запишем решение уравнений (18.13) — (18.16):

$$I_{11} = \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad I_{12} = \frac{N - \beta I_{11}}{\alpha}; \quad I_{21} = \gamma I_{11} - \nu I_{12};$$

$$I_{22} = \nu I_{11} - \gamma I_{12}; \quad M = \frac{E_m}{R}\cos\psi; \quad N = \frac{E_m}{R}\sin\psi - akI_0;$$

$$\alpha = \frac{1 + 4a^2 - 0{,}5a^2k^2}{1 + 4a^2}; \quad \gamma = \frac{ak}{1 + 4a^2}; \quad \beta = \frac{a(1 + 4a^2 - a^2k^2)}{1 + 4a^2};$$

$$\nu = \frac{2a^2k}{1 + 4a^2}.$$

Изменяя величину постоянной э. д. с. E в схеме рис. 18.4, *г*, можно управлять величиной переменного тока.

§ 18.4. Параметрические колебания. Возникающие в электрических цепях без источников э. д. с. и источников тока незатухающие колебания, обусловленные периодическим изменением индуктивности или емкости системы, называют параметрическими. Колебания поддерживаются либо за счет работы механической

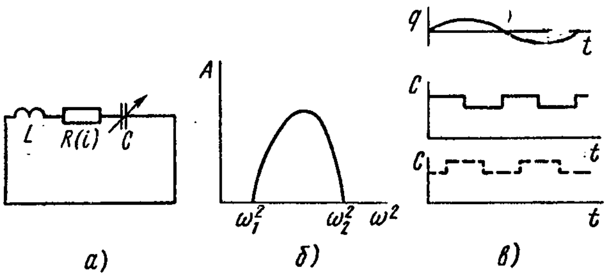


Рис. 18.5

силы при периодическом изменении параметра, либо за счет энергии, вносимой в цепь при периодическом изменении параметра электрическим путем. Частота первой гармоники параметрических колебаний оказывается в два раза меньше частоты изменения параметра.

На рис. 18.5, *а* изображена простейшая цепь, в которой при определенных условиях возникают колебания рассматриваемого типа. Цепь состоит из линейной индуктивности L, нелинейного активного сопротивления, ограничивающего амплитуду колебаний, $R(i) = R_0 + ki^2$ и изменяющейся во времени емкости $C = C_0 - \Delta C \cos 2\omega t$ $(\Delta C / C_0 \ll 1)$. (Предположение, что $\Delta C / C_0 \ll 1$, принято только для облегчения решения.)

Сначала рассмотрим случай, когда емкость изменяется механическим путем.

Внешняя сила, совершающая работу при изменении величины емкости, доставляет в цепь энергию. Эта энергия равна потерям в активном сопротивлении. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$L\frac{di}{dt} + R(i)\,i + \frac{\int i\,dt}{C_0\left(1 - \frac{\Delta C}{C_0}\cos 2\omega t\right)} = 0.$$

В соответствии с формулой (18.2) последнее слагаемое представим так:

$$\frac{1}{C_0}\left(1+\frac{\Delta C}{C_0}\cos 2\omega t\right)\int i\,dt.$$

Подставим в это уравнение $i=a\sin\omega t-b\cos\omega t$, разобьем его на синусные и косинусные составляющие частоты ω (высшими гармониками пренебрежем) и решим относительно квадрата амплитуды тока $a^2+b^2=A^2$:

$$A^2=\frac{2L}{3k\omega}\sqrt{\left(\frac{1}{LC_0}\right)^2\left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2-4\left(\omega^2-\frac{1}{LC_0}\right)^2}-\frac{4R_0}{3k}.$$

При $A^2>0$ колебания существуют; $A^2>0$ при $\omega_1<\omega<\omega_2$ (рис. 18.5, *б*); $\omega_{1,2}$ определяют как корни уравнения $A^2=0$. При $\omega^2=1/(LC_0)$

$$A^2=A^2_{\max}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{L}{C_0}}\,\frac{\Delta C}{C_0}-2R_0\right).$$

Условием возникновения колебаний в этом случае является

$$\frac{\Delta C}{C_0}>\frac{2R_0}{\sqrt{L/C_0}}.$$

Качественно поясним сущность процесса поступления энергии в цепь при изменении емкости во времени. Энергия, запасенная в электрическом поле емкости C с зарядом $\pm q$ на пластинах, $W_э=q^2/(2C)$. Если при неизменном q емкость изменить на ΔC $\left(\frac{\Delta C}{C}\ll 1\right)$, то энергия станет равна

$$\frac{q^2}{2(C+\Delta C)}\approx\frac{q^2}{2C}\left(1-\frac{\Delta C}{C}\right).$$

Приращение энергии

$$\Delta W_э=-\frac{q^2}{2C}\,\frac{\Delta C}{C}.$$

Верхняя кривая рис. 18.5, *в* изображает по синусоидальному закону во времени изменяющийся заряд q. Средняя кривая иллюстрирует характер изменения емкости во времени (для простоты рассуждений он принят не синусоидальным, а прямоугольным). Когда заряд q проходит через максимум, емкость почти скачком уменьшается ($\Delta C<0$), когда через нуль, емкость почти скачком возрастает ($\Delta C>0$).

Уменьшение емкости соответствует раздвиганию пластин конденсатора, а увеличение — их сближению. Поэтому, чтобы при $q=q_m$ емкость почти скачком уменьшить, нужно быстро раздвинуть пластины. Но пластины заряженного конденсатора притягиваются друг к другу. Следовательно, для того чтобы раздвинуть пластины, внешний источник энергии должен затратить работу на преодоление сил притяжения пластин. Эта работа переходит в энергию электрического поля конденсатора. За период изменения q энергия конденсатора дважды возрастает на величину

$$\Delta W_э=\frac{q_m^2}{2C}\,\frac{|\Delta C|}{C}.$$

Сближение пластин (увеличение C) происходит при $q=0$, когда силы, действующие на пластины (силы поля), равны нулю. Поэтому при сближении пластин внешняя сила не совершает работы.

Поступление энергии в параметрическую цепь при изменении параметра цепи называют *накачкой энергии*. Рис. 18.5, *в* качественно поясняет также, почему частота колебания в схеме рис. 18.5, *а* в два раза меньше частоты изменения параметра (емкости). Если емкость стала бы изменяться во времени в соответствии с пунктирной кривой рис. 18.5, *в*, то энергия в этом случае в цепь не доставлялась бы (не накачивалась), ибо сколько энергии доставит в цепь внешний источник при уменьшении емкости, столько же цепь отдаст ему обратно при увеличении. Накачка энергии в цепь может происходить не только при изменении емкости, но и при изменении во времени индуктивности.

§ 18.5. Параметрический генератор и параметрический усилитель. В параметрическом генераторе (ПГ) и параметрическом усилителе (ПУ) емкость варьируют не механическим, а чисто электрическим путем — изменяя емкость диода (варикапа), находящегося в запертом состоянии. Схема показана на рис. 18.6, *а*, причем в ПГ зажимы *ab* закорочены, а в ПУ к зажимам *ab* подключают источник сигнала частотой ω_c (показано пунктиром). Источник постоянной э. д. с. E_0 запирает диод.

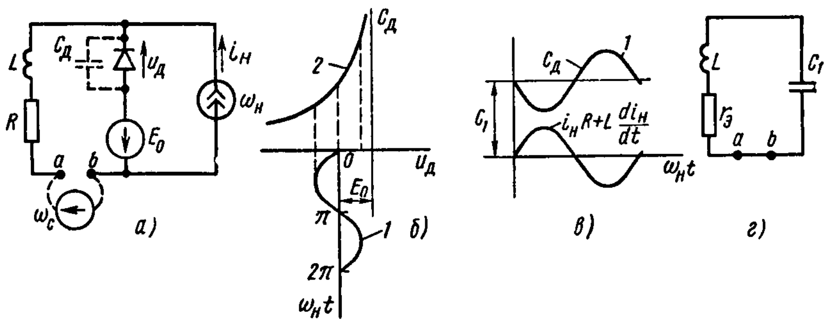


Рис. 18.6

Накачка энергии осуществляется от источника синусоидального тока $i_н$ частотой $\omega_н$ и амплитудой $I_{нm}$. Этот ток проходит через R и L и совместно с E_0 образует падение напряжения на диоде $u_д = -E_0 - Ri_н - L\frac{di_н}{dt}$ (кривая *1* рис. 18.6, *б*). Чтобы диод был заперт, это напряжение должно быть отрицательным. Диод будет заперт, если

$$I_{нm} < \frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega_н L)^2}}.$$

Зависимость емкости *p-n*-перехода $C_д$ от напряжения на диоде $u_д$ иллюстрируется кривой *2* рис. 18.6, *б*, а изменение емкости $C_д$ во времени — кривой *1* рис. 18.6, *в*. Среднее за период значение емкости $C_д$ обозначим C_1.

Схема замещения параметрического генератора для частоты параметрических колебаний $\omega_р = \omega_н/2 \approx 1/\sqrt{LC_1}$ изображена на рис. 18.6, *г*. Вносимая генератором накачки (источником синусоидального тока) на частоте $\omega_н$ энергия компенсирует потери в активном сопротивлении R на частоте $\omega_р$. Этот процесс можно трактовать как уменьшение активного сопротивления колебательного контура $r_э$ до нуля $\left[\text{ср. с ламповым генератором § 15.55, в котором } r_э = R - \frac{MS}{C} = 0\right]$. Амплитуда установившихся колебаний определяется энергетическим балансом.

Если допустить, что глубина модуляции емкости $C_д$ $m \ll 1$, то, составив дифференциальное уравнение для колебательного контура L, R, $C_д$ (зажимы *ab* на рис. 18,6, *а* короткозамкнуты)

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C_д}\int i\,dt = 0$$

и подставив в него

$$\frac{1}{C_д} = \frac{1}{C_1(1-m\sin 2\omega_р t)} \approx \frac{1}{C_1}(1+m\sin 2\omega_р t)$$

$$\text{и} \quad i = I_{mр}\sin\omega_р t,$$

получим два уравнения (синусная и косинусная компоненты):

$$r_э = R - \frac{m}{2\omega_p C_1} = 0 \quad \text{и} \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}.$$

При работе схемы рис. 18.6, *а* в качестве параметрического усилителя генератор накачки настраивают на такой режим, при котором вносимая им энергия уменьшает активное сопротивление контура $r_э$ не до нуля (как это было в случае с ПГ), а до $r_э \ll R$. Параметры L и C_1 подбирают так, чтобы $\omega_c = 1/\sqrt{LC_1}$. При этом источник сигнала (источник э. д. с. E_c частотой ω_c) вызовет ток $I_c = E_c/r_э$. Отношение выходного напряжения (на индуктивности) к входному $\frac{U_{вых}}{E_c} = \omega_c \frac{L}{r_э} = \frac{\sqrt{L/C_1}}{r_э}$ достаточно велико — схема работает в качестве усилителя.

Вопросы для самопроверки

1. Почему можно сказать, что линейные электрические цепи с изменяющимися во времени параметрами занимают промежуточное положение между линейными цепями с неизменными параметрами и нелинейными электрическими цепями? 2. Изложите известные Вам методы расчета цепей с переменными во времени параметрами. 3. Какие колебания называют параметрическими? 4. Что понимают под накачкой энергии в параметрическую цепь? Как ее практически осуществляют? 5. Расскажите о принципе работы параметрического генератора и параметрического усилителя.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТЯМ I И II

ПРИЛОЖЕНИЕ А

НАПРАВЛЕННЫЕ И НЕНАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

§ А.1. **Характеристика двух направлений в теории графов.** *Графом* называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей. Каждый граф характеризуется своей топологией, т. е. информацией о том, какими ветвями связаны друг с другом отдельные узлы графа и какова проводимость (передача) каждой ветви.

Эта информация о связях и проводимостях может быть представлена либо в аналитическом виде — совокупностью уравнений, либо в графическом виде — схемой, на которой показаны узлы, соединяющие их ветви, и дана информация о передаче каждой ветви.

Теория графов — это учение об общих топологических свойствах графов и о вытекающих из них методах расчета.

Теория графов представляет интерес для электриков, радистов, а также для тех, кто работает в области автоматики и телемеханики, кибернетики, теории информации. Она находит применение и в других областях техники, например при анализе пропускной способности сложной разветвленной железнодорожной сети.

В соответствии с тем, что информация об электрической схеме (системе) может быть выражена двояко, теория графов развивалась в двух, хотя и взаимосвязанных и дополняющих друг друга, но все же достаточно самостоятельных направлениях.

В первом направлении за основу принимается информация о схеме (системе), выраженная в виде совокупности уравнений. Во втором направлении за основу принимается информация о системе, выраженная в виде некоторого геометрического образа или остова некоторой электрической схемы (ее эквивалента), на которой показаны только узлы и ветви (а иногда и направление передачи по каждой ветви).

В первом направлении изучение свойств цепей производят путем использования общих свойств матриц и определителей. Во втором направлении изучение свойств цепей производят, применяя правила по преобразованию графов либо (что особенно существенно) используя правило Мэзона.

Несмотря на то что первое направление исследования в теории графов (с использованием матричной алгебры) зародилось много раньше второго (первые работы по исследованию топологических свойств цепей путем использования свойств матриц относят еще ко временам Кирхгофа и Максвелла), наибольшие результаты достигнуты на втором направлении, которое начало интенсивно развиваться примерно с 1953 г.

Второе направление в теории графов в свою очередь развивалось двумя путями: в соответствии с теорией направленных графов (см. § А.2—А.6) и теорией ненаправленных графов (см. § А.7—А.12).

I. Направленные графы

§ А.2. **Основные определения.** *Направленным* или *линейным* графом (графом сигнала, диаграммой прохождения сигнала) называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей, стрелки на которых указывают направление передачи сигнала (воздействия) от одного узла к другому.

Узлами в направленных графах обычно являются токи и (или) потенциалы узлов исследуемых электрических цепей, а не узловые точки этих цепей, как это имеет место в ненаправленных графах (см. § А.7—А.12).

Каждая ветвь графа характеризуется величиной передачи. Под *передачей* ветви понимают отношение выходной величины ко входной. Так, например, выходная величина x_2 ветви (рис. А.1, *а*) равна произведению входной величины (входного сигнала) x_1 на передачу a: $x_2 = ax_1$.

Передача ветви может иметь размерность проводимости, сопротивления или нулевую размерность.

К тому или иному узлу графа кроме входного и выходного в общем случае может подходить и от него может уходить по нескольку ветвей. На рис. А.1, *б* в качестве примера изображен некоторый граф с узлами *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6*. Передачи ветвей этого графа обозначены буквами *a, b, c, ...* Направление передачи указано стрелками.

Под x_1 будем понимать узловой сигнал первого узла, под x_2—узловой сигнал второго узла и т. д.

Узловой сигнал k-го узла равен сумме сигналов, приходящих к k-му узлу. При составлении узлового сигнала k узла *выходящие из k-го узла* сигналы не учитываются; они учитываются при составлении узловых сигналов тех узлов, к которым эти сигналы подходят.

Так, узловой сигнал первого узла графа рис. А.1, *б* $x_1 = 1 \cdot x_0 + dx_4$; второго узла $x_2 = bx_3 + g'x_5$; третьего узла $x_3 = gx_1$ и т. д.

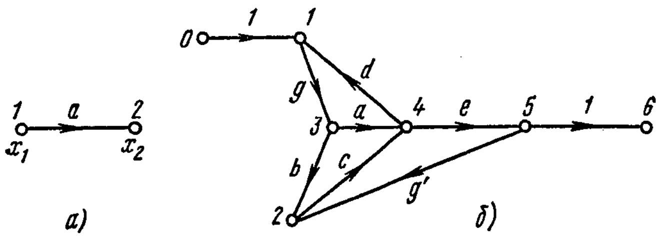


Рис. А.1

Узел графа, выражающий собой величину, принятую в изучаемой системе за входную, обычно изображают на чертеже слева, а узел графа, соответствующий выходной величине,—справа.

Принято так изображать граф, чтобы от входного узла отходила только одна ветвь, а подходящих ко входному узлу ветвей вообще не было.

Аналогично, к выходному узлу должна подходить только одна ветвь (отходящих от него ветвей не должно быть). Это можно сделать, введя в граф дополнительные узлы и ветви, передачи которых равны единице. Так, в графе рис. А.1, *б* дополнительными узлами являются узлы *1* и *5*. Между входным узлом *0* и дополнительным узлом *1* имеется ветвь с передачей *1*. Аналогично, дополнительный узел *5* соединен с выходным узлом *6* ветвью с передачей, равной *1*. Часто узлы, передача между которыми равна единице, обозначают одинаково. Так, например, для схемы рис. А.1, *б* узел *0* можно назвать узлом *1* (тогда на рисунке будет два узла, обозначенных цифрой *1*).

§ А.3. Переход от изучаемой системы к направленному графу. Для того чтобы от изучаемой системы, например какой-либо электрической цепи, перейти к соответствующему ей направленному графу, применяют различные методы в зависимости от того, каким образом записывают уравнения для этих цепей: на основании законов Кирхгофа, используя метод узловых потенциалов или метод контурных токов и т. п.

Направленный граф содержит ту же информацию, что и система уравнений. Только информация эта выражена графически.

Если за основу взять уравнения, составленные на основании применения законов Кирхгофа, то узлами графа являются токи ветвей и напряжения на элементах схемы.

В том случае, когда за основу взяты уравнения, составленные по методу узловых потенциалов, узлы графа будут выражать собой потенциалы узловых точек схемы и искомые токи (напряжения).

При некотором навыке граф вычерчивают, даже не записывая сами уравнения, послужившие основой для его составления.

Упорядоченный переход от заданной электрической схемы к направленному графу, минуя этап составления уравнений, рассмотрим сначала, положив в основу метод контурных токов (переход от рис. А.2 к рис. А.3, *а*).

Направления контурных токов во всех контурах выбираем одинаковыми, например по часовой стрелке. Число узлов в графе будет равно числу контурных токов плюс число не равных нулю контурных э. д. с. плюс выходная величина. Каждому контурному току, каждой контурной э. д. с. и выходной величине соответствует свой узел. Так, схеме рис. А.2, в которой три контурных тока I_{11}, I_{22} и I_{33}, одна контурная э. д. с. и выходная величина—ток I_5, соответствует граф рис. А.3, *а*, в котором имеется пять узлов.

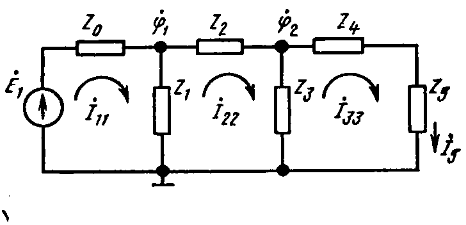


Рис. А.2

Узлы I_{kk} располагаем в серединах соответствующих контуров, а узлы E_{kk} и узел выходной величины выносим на периферию рисунка. Соединяем нарисованные узлы ветвями, указываем на них стрелки и записываем значения передач ветвей. Каждый узел I_{kk} соединен с узлом E_{kk} ветвью с передачей $b_{kk}=1/Z_{kk}$, где Z_{kk}—собственное сопротивление k-контура. Стрелка на этой ветви направлена к узлу I_{kk}. Численное значение E_{kk} может быть и положительным и отрицательным. Оно положительно, если суммарная э. д. с. k-контура направлена согласно направлению контурного тока I_{kk}. Кроме того, каждый узел I_{kk} соединен с каким-то другим узлом I_{pp} (если между контурами k и p на схеме есть общая ветвь) двумя ветвями. Одна ветвь имеет стрелку, направленную к узлу I_{kk}, и передачу $b_{kp}=Z_{kp}/Z_{kk}$, где Z_{kp}—сопротивление смежной ветви между k- и p-контурами. На другой ветви стрелка направлена к узлу I_{pp}. Ее передача $b_{pk}=Z_{kp}/Z_{pp}$, где Z_{pp}—собственное сопротивление p-контура.

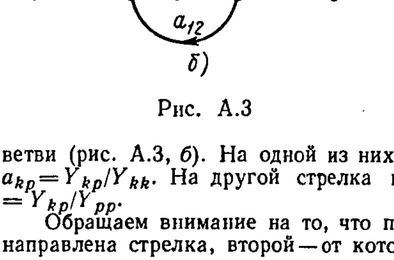


Рис. А.3

При согласном направлении всех контурных токов передачи всех ветвей между узлами k и p положительны.

По методу узловых потенциалов граф строят так же, как и по методу контурных токов, только узлами графов являются потенциалы узлов схемы, узловые токи и выходная величина.

Если в электрической схеме узлы k и p соединены ветвью с проводимостью Y_{kp}, а суммарная проводимость ветвей, сходящихся в узлах k и p, обозначена соответственно через Y_{kk} и Y_{pp}, то на графе между узлами φ_k и φ_p будут две ветви (рис. А.3, *б*). На одной из них стрелка направлена к узлу φ_k, а ее передача $a_{kp}=Y_{kp}/Y_{kk}$. На другой стрелка направлена к узлу φ_p, а ее передача $a_{pk}= =Y_{kp}/Y_{pp}$.

Обращаем внимание на то, что первый индекс у a указывает узел, к которому направлена стрелка, второй—от которого направлена стрелка. Если узлы k и p на схеме не соединены ветвью с проводимостью Y_{kp}, то и на графе узлы φ_k и φ_p не соединены ветвями. Узел φ_k соединен с узлом узлового тока I_{kk} ветвью с передачей $a_{kk}=1/Y_{kk}$, направленной к узлу φ_k. Искомому току I_{kp} в ветви с проводимостью Y_{kp} (полагаем его направленным от узла k к узлу p) на графе соответствует узел выходной величины I_{kp}.

В соответствии с законом Ома для участка цепи к узлу графа I_{kp} должны подходить две ветви, стрелки на которых направлены к узлу I_{kp}. Передача от узла φ_k равна Y_{kp}, передача от узла φ_p равна $-Y_{kp}$. Если какой-либо из этих узлов заземлен, то этот узел и передача от него будут отсутствовать.

Если граф составляют для цепи постоянного тока, то комплексное сопротивление Z следует заменить на активное сопротивление R, комплексную проводимость Y — на активную проводимость g, а точки над φ, E, I, свидетельствующие о синусоидальном характере изменения этих величин во времени, не ставят.

Пример 169. Составить граф для лестничной схемы рис. А.2, считая входной величиной э. д. с. $\dot{E}_1$ и выходной ток $\dot{I}_5$.

Решение. Граф рис. А.3, *а* составлен по методу контурных токов для уравнений, записанных в комплексной форме:

$$\dot{I}_{11}(Z_0+Z_1)-\dot{I}_{22}Z_1=\dot{E}_1;$$

$$-\dot{I}_{11}Z_1+\dot{I}_{22}(Z_1+Z_2+Z_3)-\dot{I}_{33}Z_3=0;$$

$$-\dot{I}_{22}Z_3+\dot{I}_{33}(Z_3+Z_4+Z_5)=0.$$

Передачи ветвей на рис. А.3, *а* обозначены:

$$b_{11}=1/(Z_0+Z_1);\quad b_{21}=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3};$$

$$b_{32}=\frac{Z_3}{Z_3+Z_4+Z_5};\quad b_{12}=\frac{Z_1}{Z_0+Z_1};\quad b_{23}=\frac{Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}.$$

Передача от узла $\dot{I}_{33}$ к узлу $\dot{I}_5$ равна 1, так как $\dot{I}_5=\dot{I}_{33}$.

Пример 170. Составить граф для схемы рис. А.2 на основании метода узловых потенциалов.

Решение. Обозначим: $Y_0=1/Z_0$; $Y_1=1/Z_1$; $Y_2=1/Z_2$; $Y_{45}=1/(Z_4+Z_5)$ и $Y_{11}=Y_0+Y_1+Y_2$; $Y_{22}=Y_2+Y_3+Y_{45}$. Запишем систему уравнений:

$$\dot{\varphi}_1 Y_{11}+\dot{\varphi}_2(-Y_2)=\dot{E}_1Y_0=\dot{I}_{11};$$

$$\dot{\varphi}_1(-Y_2)+\dot{\varphi}_2Y_{22}=0;\quad \dot{I}_5=\dot{\varphi}_2Y_{45}.$$

На рис. А.3 $a_{11}=1/Y_{11}$; $a_{12}=Y_{12}/Y_{11}=Y_2/Y_{11}$, $a_{21}=Y_{12}/Y_{22}=Y_2/Y_{22}$.

Предполагается, что не равен нулю ни один из знаменателей выражений b_{kp}, b_{pk}, a_{kp}, a_{pk} для значений параметров схемы, находящихся в рабочем диапазоне.

Порядок расположения узлов на чертеже может быть любым (о расположении узлов входа и выхода уже говорилось), однако рекомендуется это делать таким образом, чтобы их последовательность при движении слева направо в наибольшей степени соответствовала фактическому прохождению сигнала (информации) от входа к выходу.

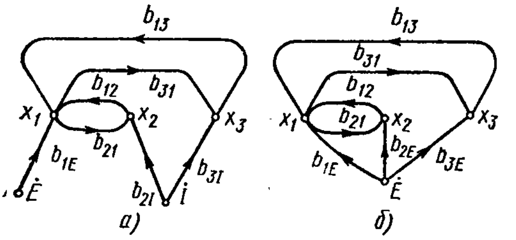


Рис. А.4

В зависимости от того, какие величины выбраны в качестве узлов, для одной и той же схемы граф имеет различную структуру и различную сложность. Заметим, что если в схеме имеется несколько источников сигнала (несколько источников тока или э. д. с.), то пользуются принципом наложения, т. е. сначала определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от первого источника, затем определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от второго источника, и т. д. После этого суммируют выражения для выходной величины. Однако можно поступить и иначе, а именно: граф с несколькими источниками сигналов одинаковой частоты свести к графу с одним источником (рис. А.4). С этой целью один из сигналов, например сигнал $\dot{E}$ на рис. А.4, *а*, примем за базисный. Узлы остальных сигналов (в примере узел тока $\dot{I}$) объединяют с базисным, так изменяя величины передач от этих узлов к остальным, чтобы сигналы, подходящие к ним, остались неизменными.

В рассматриваемом примере объединяем узел $\dot{I}$ с узлом $\dot{E}$ (рис. А.4, *б*) и изменяем передачи b_{2I} и b_{3I} на b_{2E} и b_{3E}, исходя из условий $b_{2E}\dot{E}=b_{2I}\dot{I}$, $b_{3E}\dot{E}=b_{3I}\dot{I}$. Отсюда $b_{2E}=b_{2I}\dot{I}/\dot{E}$, $b_{3E}=b_{3I}\dot{I}/\dot{E}$.

Когда граф составлен, его используют для определения передачи от истока к стоку. Входной сигнал называют истоком, выходной — стоком.

Определение передачи графа производят двумя способами: 1) последовательным упрощением его путем применения правил, рассмотренных в § А.4; 2) применением общего выражения для определения передачи направленного графа (правила Мэзона) — см. § А.5. Возможен и промежуточный путь, когда сначала граф частично упрощают, а затем применяют это правило.

§ А.4. Правила, используемые для упрощения направленных графов. Познакомимся с операциями по упрощению графов.

1. Передача последовательно соединенных ветвей (рис. А.5, *а*) равна произведению передач этих ветвей (рис. А.5, *б*). Действительно, $x_2=ax_1$, $x_3=bx_2$. Подставив в последнее выражение вместо x_2 его эквивалент из предыдущего, получим $x_3=abx_1$.

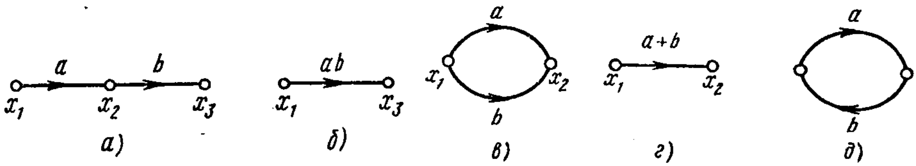


Рис. А.5

2. Передача двух параллельных, одинаковым образом направленных ветвей равна сумме передач этих ветвей (рис. А.5, *в*, *г*).

Рассмотренное преобразование не может быть применено к параллельным ветвям, стрелки на которых направлены неодинаковым образом. Так, например, это преобразование не распространяется на рис. А.5, *д*.

3. Устранение простой узловой точки. Условимся *простой узловой точкой* называть точку графа, к которой в общем случае подходят и от которой уходят

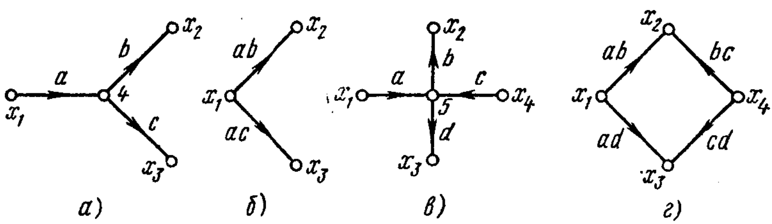


Рис. А.6

несколько ветвей и которая не входит в петлю обратной связи. Простыми узловыми точками на рис. А.6, *а*, *в* являются соответственно точки *4* и *5*. Для графа рис. А.6, *а*

$$x_4=ax_1; \quad x_2=bx_4; \quad x_3=cx_4.$$

Следовательно,

$$x_2=abx_1; \quad x_3=acx_1. \tag{A.1}$$

Граф рис. А.6, *б* эквивалентен графу рис. А.6, *а*. Для графа рис. А.6, *в*

$$x_5=ax_1+cx_4; \quad x_2=bx_5=abx_1+bcx_4; \quad x_3=dx_5=adx_1+dcx_4.$$

Граф рис. А.6, *г* эквивалентен графу рис. А.6, *в*.

4. Устранение контура на пути. Граф рис. А.7, *а* имеет ветвь обратной связи с передачей *c* между узлами *3* и *2*. Контур, образованный ветвями *b* и *c*, называют *контуром на пути* (контуром в пути). Простейшими преобразованиями этот

контур можно устранить и граф свести к рис. А.7, *б*. Для графа рис. А.7, *а*

$$x_2 = ax_1 + cx_3; \quad x_3 = bx_2.$$

Следовательно,

$$x_3 = abx_1 + bcx_3. \tag{А.2}$$

Ветвь, выходящую из некоторого узла и приходящую к этому же узлу, будем называть *петлей*. Петля bc на рис. А.7, *б* соответствует слагаемому bcx_3 правой части равенства (А.2).

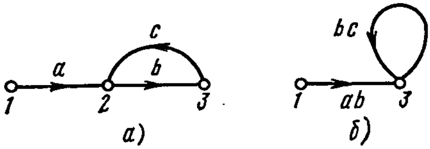


Рис. А.7

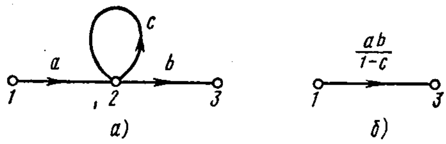


Рис. А.8

5. Исключение петли. Граф на рис. А.8, *а* имеет петлю с передачей c. Эту петлю можно устранить и свести граф к изображенному на рис. А.8, *б*. Действительно, для графа рис. А.8, *а* можно написать

$$x_2 = ax_1 + cx_2; \quad x_3 = bx_2.$$

Из первого уравнения находим $x_2 = ax_1/(1-c)$ и, подставляя во второе, получаем

$$x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1. \tag{А.3}$$

Предполагается, что $|c| < 1$.

6. Замена двух и большего числа петель одной петлей. Петли с передачами b и c рис. А.9, *а* можно заменить одной петлей рис. А.9, *б* с передачей $b+c$. Это вытекает из следующих преобразований для схемы рис. А.9, *а*:

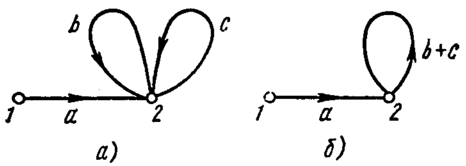


Рис. А.9

$$x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_2 = \\ = ax_1 + (b+c)\,x_2.$$

Схема рис. А.9, *б* удовлетворяет этой строчке.

7. Удлинение (растяжение) узла. В некоторых случаях при преобразовании графов оказывается полезным удлинить (растянуть) узел. Положим, что требуется удлинить узел *2* графа рис. А.10, *а*. С этой целью:

а) узел *2* подразделяют на два узла (рис. А.10, *б*): на старый узел *2*, от которого *отходят* те же ветви, что и в первоначальном графе, и на новый узел *2'*, к которому *подходят* те же ветви, которые в исходном графе подходили к узлу *2*;

б) узлы *2'* и *2* соединяют ветвью, передача которой равна *1*.

Проверим справедливость преобразования. С этой целью для исходного графа рис. А.10, *а* запишем узловой сигнал в узле *2*:

$$x_2 = ax_1 + cx_4.$$

Узловые сигналы узлов *2'* и *2* графа рис. А.10, *б*

$$x_2' = ax_1 + cx_4 \quad \text{и} \quad x_2 = 1 \cdot x_2'.$$

Таким образом, узловой сигнал в узле *2* остался без изменений. Не изменились и узловые сигналы в остальных узлах графа.

Рассмотрим два примера на определение передачи графов путем последовательного упрощения.

Первый пример иллюстрирует рис. А.11, *а—д*, второй — рис. А.12.

Положим, что верхняя и нижняя петли g и h рис. А.12 отсутствуют и имеется только петля ef.

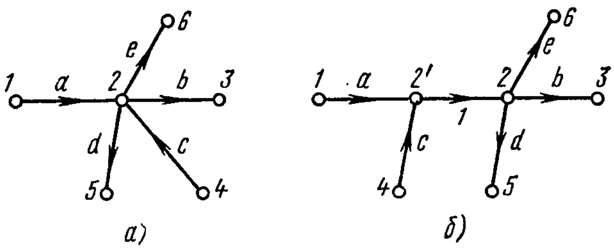


Рис. А.10

Составим передачу от узла *1* к узлу *2*:

$$i + \frac{ac + bd + afd + bec}{1 - ef}.$$

Учтя наличие верхней и нижней петель и поделив соответствующие члены на $(1-g)$ и $(1-h)$, получим

$$i + \frac{\dfrac{ac}{1-g} + \dfrac{bd}{1-h} + \dfrac{afd + bec}{(1-h)(1-g)}}{1 - \dfrac{ef}{(1-g)(1-h)}}.$$

§ А.5. Общая формула для передачи графа. В 1956 г. Мэзон предложил общую формулу для определения передачи графа. Эта формула является основной при расчете графов. Прежде чем перейти к ней, познакомимся с некоторыми новыми понятиями.

Прямой путь P — это путь вдоль стрелок от истока к стоку, при прохождении которого ни один из узлов не встречается более одного раза.

Передача прямого пути равна произведению передач ветвей этого пути.

Между истоком и стоком графа может быть несколько прямых путей. Так, например, для схемы рис. А.13 между истоком (узел *1*) и стоком (узел *2*) есть два прямых пути. Первый прямой путь — это путь по ветвям с передачами a и b. Передача этого пути $P_1 = ab$. Второй прямой путь — это путь по ветвям с передачами c, e, b. Передача его $P_2 = ceb$.

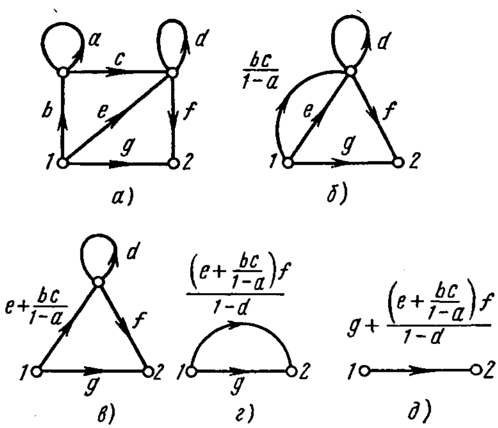


Рис. А.11

Ни один из других возможных путей от узла *1* к узлу *2* в этом графе не относится к категории прямых путей. Например, путь через ветви c, f, g, e, b не является прямым путем, так как на этом пути узел *3* встречается дважды. В общей формуле необходимо учитывать также передачи петель обратной связи.

Петля обратной связи представляет собой замкнутый путь, вдоль которого (по кругу) каждый узел может встретиться только по одному разу.

Передачу петли обратной связи часто обозначают T с индексом. Передача петли обратной связи равна произведению передач ветвей, образующих эту петлю. В графе на рис. A.13 три петли обратной связи: первая петля с $T_1=h$, вторая с $T_2=fg$, третья с $T_3=ed$.

Общая формула для определения передачи графа G записывается следующим образом:

$$G=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+\ldots+P_n\Delta_n}{\Delta}, \tag{A.4}$$

где P_k — передача k-го прямого пути от истока к стоку; n — число прямых путей.

Определитель Δ_k равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей, не касающихся k-го прямого пути (но эти петли могут касаться друг друга), плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга и k-го прямого пути, минус сумма тройного произведения петель обратных связей, не касающихся друг друга и k-го прямого пути, плюс и т. д.

Определитель Δ равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей (касающихся и не касающихся друг друга) плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга, минус сумма тройных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга, плюс и т. д.

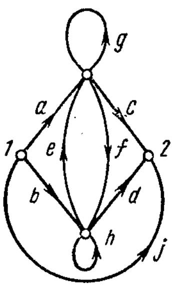


Рис. A.12

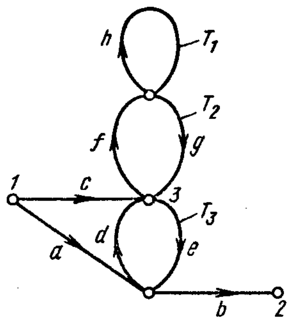


Рис. A.13

Пример 171. Применить формулу (A.4) к графу рис. A.13.

Решение. Для первого прямого пути с передачей $P_1=ab$ определитель Δ_1 равен единице минус сумма передач петель обратной связи, взятых поодиночке и не касающихся этого прямого пути (T_1+T_2), плюс попарное произведение передач петель обратной связи, не касающихся друг друга и выбранного прямого пути.

В графе рис. A.13 отсутствуют петли, которые бы не касались друг друга и не касались первого прямого пути. Поэтому слагаемые с попарным произведением передач петель обратной связи, как и взятые по трое (и более), в выражении для Δ_1 отсутствуют.

Следовательно, $\Delta_1=1-(T_1+T_2)$; $T_1=h$; $T_2=fg$.

Для второго прямого пути $P_2=cef$; $\Delta_2=1-T_1$.

Знаменатель $\Delta=1-(T_1+T_2+T_3)+T_1T_3$; $T_3=ed$.

В выражении для Δ вошло произведение T_1 и T_3 двух несоприкасающихся петель графа. Таким образом,

$$G=\frac{ab\,(1-T_1-T_2)+ceb\,(1-T_1)}{1-(T_1+T_2+T_3)+T_1T_3}. \tag{A.5}$$

§ A.6. Вывод формулы для передачи графа*. Положим, что граф имеет n узлов. Для любого (k-го) узла справедливо уравнение

$$x_k=f_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{A.6}$$

где x_k — переменная линейного графа или независимая переменная.

* При первом чтении § A.6 можно опустить. Идея вывода взята из кн.: Робишо А. и др. Направленные графы, «Энергия», 1964.

Обозначим проводимость ветви, соединяющей произвольным образом выбранные узлы j и k, через t_{jk}. Матрица проводимостей ветвей графа имеет порядок n:

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & \dots & t_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{A.7}$$

Элементами матрицы являются производные

$$t_{jk}=\partial f_k/\partial x_j. \tag{A.8}$$

Все элементы k-строки будут нулями, если x_k — независимая переменная. Матрицу-столбец, составленный из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, обозначим $[X]$:

$$[X]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{A.9}$$

Единичную матрицу порядка n назовем $[U]$:

$$[U]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

Обозначим матрицу-столбец независимых переменных $\varphi_k=x_k-f_k$. Систему уравнений, выражаемую графом, записывают так:

$$[U-T][X]=[\varphi], \tag{A.11}$$

где

$$[U-T]=\begin{bmatrix} 1-t_{11} & -t_{21} & \dots & -t_{n1} \\ -t_{12} & 1-t_{22} & \dots & -t_{n2} \\ -t_{13} & -t_{23} & \dots & -t_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & \dots & 1-t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{A.12}$$

Введем систему уравнений, матрица которой $[A]=[U-T]$:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{A.13}$$

Из линейной алгебры известно, что определитель Δ-матрицы может быть записан следующим образом:

$$\Delta=\sum(-1)^{I+I'}(a_{\alpha\alpha'}, a_{\beta\beta'}, a_{\nu\nu'}, a_{nn'}). \tag{A.14}$$

Каждый член суммы содержит n множителей. У каждого множителя имеется по два индекса. Первый индекс соответствует строке, второй — столбцу; I — число инверсий чисел $1, 2, \dots, n$ в последовательности обозначений $\alpha, \beta, \nu, \dots, n$ для первого индекса; I' — число инверсий чисел $1, 2, \dots, n$ в последовательности обозначений $\alpha', \beta', \nu', \dots, n'$ для второго индекса.

Напомним, что инверсией индексов называют такое чередование индексов, при котором $r > s$. При подсчете общего числа инверсий данного (например, первого) индекса нужно сложить все инверсии, которые образуются при переходе от исходной цифры этого индекса ко всем последующим. Так, положим, что какой-то индекс, например первый, имеет чередования *461352*. Так как за цифрой *4* в этой последовательности следуют цифры *1*, *3*, *2*, меньшие *4*, то это дает первые три инверсии. За цифрой *6* находятся четыре цифры: *1*, *3*, *5*, *2*, меньшие *6*, что дает еще четыре инверсии.

Все цифры, стоящие справа от *1*, больше единицы, поэтому по отношению к индексу *1* инверсии отсутствуют. За цифрой *3* находится цифра *2* — одна инверсия; за цифрой *5* — цифра *2* — еще одна инверсия. Итого в последовательности *461352* имеется $3+4+1+1=9$ инверсий.

Вспомним также, что замкнутой последовательностью двух индексов называют такую последовательность индексов, в которой второй индекс у последнего члена принимает то же значение, с которого начал изменяться индекс первого члена.

Запишем возможные комбинации чередования индексов, образующих замкнутые последовательности:

$$ij,\ jk,\ kl,\ lx,\ \ldots,\ yp,\ pi; \tag{A.15}$$

$$ij,\ ji,\ \ldots,\ nm,\ mp,\ pn,\ \ldots,\ qu,\ \ldots,\ lq. \tag{A.16}$$

В комбинации (A.15) замкнутая последовательность образована n множителями. Первый индекс изменяется со значения i, а второй — со значения j.

Последовательность является замкнутой, так как у последнего члена второй индекс принимает то же значение i, с которого начал изменяться индекс первого члена. Как уже говорилось, I — число инверсий первого индекса, I' — число инверсий второго индекса.

Для последовательности (A.15) число инверсий второго индекса на $n-1$ больше числа инверсий первого индекса. Действительно, первый индекс в (A.15) имеет нуль инверсий, второй индекс претерпевает $n-1$ инверсий, поскольку более старшие индексы j, k, l, x, ..., p (их число равно $n-1$) расположены до младшего индекса i. Следовательно, $I'-I=n-1$.

Множители в чередовании (A.16) разделены на k групп. Первая группа состоит из $d_1=2$ множителей; вторая группа — из $d_2=3$ множителей; последняя k-я группа — из $k+1$ множителей. Число всех множителей в (A.16) равно порядку определителя, т. е. равно n. Поэтому $d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k=n$. Для каждой группы множителей справедлива формула $I'-I=d-1$. Определим, насколько различаются I' и I между собой для всей последовательности (A.16), имеющей k групп:

$$\begin{aligned} I'-I &= d_1-1+d_2-1+d_3-1+\ldots+d_k-1= \\ &=(d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k)-k=n-k, \end{aligned} \tag{A.17}$$

или

$$I'=I+n-k.$$

В произведении типа (A.16) могут быть множители, имеющие одинаковые индексы, например mm. Каждый такой множитель можно рассматривать как группу, состоящую из одного члена. Для такой группы $d=1$ и $I'=I=0$, т. е. для этой группы выполняется то же условие $I'-I=d-1$, что и для любой другой группы в (A.16).

При определении знака каждого слагаемого в (A.14) следует учесть, что при любом числе k инверсия в $2k$ не скажется на знаке, так как $(-1)^{2k}=1$. Поэтому в правую часть (A.17) можно добавить $2k$. Тогда

$$I'=I+n+k. \tag{A.17a}$$

Распространим полученный результат на определитель матрицы (A.12). При раскрытии определителя матрицы (A.12) имеем дело с произведениями множителей двух типов. Первый тип множителя — это $1^n=1$; второй тип — произведение n отрицательных множителей вида $-t_{ij}$. Таким образом, для матрицы (A.12) знак перед каждым слагаемым определителя зависит от знака произведения $(-1)^{I+I'}(-1)^n$, т. е. знак перед каждым слагаемым второго типа определяется значением $I+I'+n$. Но с учетом (A.17a)

$$(-1)^{I+I'+n}=(-1)^{I+I+n+k+n}=(-1)^{2(I+n)+k}=(-1)^k. \tag{A.18}$$

Следовательно, знак перед каждым слагаемым второго типа определяется числом групп замкнутых в нем последовательностей.

Множители второго типа могут быть нескольких разновидностей.

Первую разновидность образуют замкнутые последовательности типа (А.15). В каждой из них только одна последовательность чередования индексов ($k=1$). Поэтому перед каждым слагаемым этой разновидности в соответствии с (А.18) следует поставить знак минус.

Вторую разновидность образуют произведения множителей в виде двух замкнутых последовательностей чередования индексов ($k=2$). Перед каждым слагаемым этой разновидности должен быть поставлен знак плюс, так как $(-1)^2=1$.

Третью разновидность образуют произведения множителей с тремя ($k=3$ замкнутыми последовательностями чередования индексов и т. д. Таким образом

$$\Delta=1-\sum M_1+\sum M_2-\sum M_3+\ldots$$

Положим, что выходным сигналом является выходной сигнал второго узла x_2, а входным — сигнал x_1 первого узла. Воздействия на остальные узлы равны нулю. Для нахождения x_2 составим выражение

$$x_2=\frac{\begin{bmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\Delta}. \qquad (А.19)$$

Разложим числитель (А.19) на слагаемые. Каждое из них после перегруппировки множителей имеет вид

$$x_1 t_{1k} t_{kj} t_{j2} \ldots t_{rr} \ldots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$$

и может быть записано в виде

$$x_1 P_k \Delta_k,$$

где x_1 — входной сигнал; P_k — произведение множителей, у которых первый индекс у первого множителя 1, а второй индекс у последнего множителя 2.

Следовательно, P_k представляет собой передачу прямого пути из узла *1* в узел *2*; Δ_k представляют собой множители, которые не содержат цифр 1 и 2 (индексов входного и выходного узлов) и всех цифр, встречающихся в индексах у множителей P_k.

После перегруппировки множители Δ_k представляют собой замкнутые последовательности, у которых первый индекс первого множителя и второй индекс последнего множителя одинаковы.

Это означает, что все Δ_k представляют собой передачи замкнутых петель, не касающихся прямого пути P_k между входным и выходным узлами.

Окончательно

$$x_2=x_1\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}. \qquad (А.20)$$

Формулу (А.20) в литературе иногда называют *топологическим законом передачи*.

II. Ненаправленные графы

§ А.7. Определение и основная формула. *Ненаправленный граф* представляет собой топологическое изображение самой электрической схемы. Узлы и ветви этого графа соответствуют ее узлам и ветвям. В ненаправленных графах в отличие от направленных стрелок на ветвях не ставят. Свойства ветвей характеризуют их проводимости. Передачи ветвей, имеющие размерность проводимости, в дальнейшем обозначены латинскими буквами a, b, c, ... Поскольку каждой планарной электрической цепи соответствует некоторая дуальная ей цепь, то каждому ненаправленному графу, соответствующему планарной электрической цепи, может соответствовать дуальный ему граф. При работе с ненаправленными графами основной является формула

$$\frac{I}{B_{mn}}=\frac{1}{\Delta}\sum C_r\Delta_r\,^*. \tag{A.21}$$

Правая часть (А.21) по структуре полностью аналогична формуле Мэзона (А.4) для направленных графов.

Формулу (А.21) используют для нахождения входного сопротивления (входной проводимости), взаимной проводимости ветвей и др.

Здесь I — ток, протекающий по некоторой выбранной ветви графа, по отношению к которой и определяется входная или взаимная проводимость **; B_{mn} — напряжение (ток) источника питания схемы, присоединенного зажимами к узлам m и n; C_r — произведение проводимостей ветвей пути между узлами m и n, проходящего по выбранной ветви; Δ_r — определитель для системы, полученной из исходной при коротком замыкании (закорачивании) ветвей выбранного пути C_r; Δ — определитель исходной электрической схемы.

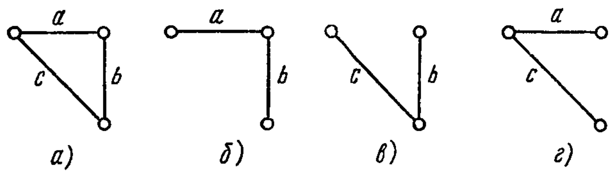


Рис. А. 14

Число членов $C_r\Delta_r$ в числителе (А.21) равно числу возможных путей между узлами m и n графа. В это число не входит путь от m к n через источник питания схемы.

Определитель Δ мог быть получен как определитель матрицы проводимостей ветвей схемы, составленной по методу узловых потенциалов. Однако такой способ подсчета Δ довольно громоздок и трудоемок. Дело в том, что при вычислении Δ путем раскрытия определителя упомянутой матрицы пришлось бы иметь дело с большим числом слагаемых, часть которых имела бы одинаковые абсолютные значения, но разные знаки (эти слагаемые соответствуют так называемым избыткам в каждой строке определителя).

Подсчет Δ, при котором не возникает взаимно уничтожающих друг друга слагаемых, осуществляют путем вычисления его как суммы величин всех возможных деревьев, которые могут быть образованы для данного графа. Под *деревом* понимают совокупность ветвей, которые касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Остальные ветви графа, не вошедшие в *данное* дерево, называют *хордами*. Для простейшего графа рис. А.14, *а* образуемые деревья показаны на рис. А.14, *б—г*.

Величина дерева равна произведению проводимостей ветвей этого дерева. Величина дерева рис. А.14, *б* равна ab, дерева А.14, *в* — bc, дерева рис. А.14, *г* — ac. Определитель графа рис. А.14, *а* $\Delta=ab+ac+bc$.

§ А.8. Определение числа деревьев графа. Для определения числа деревьев графа положим, что проводимость каждой его ветви равна единице. Тогда все ветви каждого дерева будут иметь проводимость по 1 и величина каждого

---

* Произведение $C_r\Delta_r$ часто обозначают и иначе, например $P_k\Delta_k$ [см. формулу (А.20)] или $P'_k\Delta'_k$. Если это произведение обозначают как $P'_k\Delta'_k$, то слагаемые определителя знаменателя формулы (А.21), т. е. слагаемые Δ, обозначают как $P_k\Delta_k$.

** В общем случае роль I в формуле (А.21) может выполнять не только ток, но и напряжение.

дерева также будет равна 1 (произведение единиц равно единице). Если в рассматриваемых условиях для исследуемой электрической цепи составить матрицу узловых проводимостей при любом заземленном узле этой цепи, то численное значение определителя этой матрицы будет равно числу возможных деревьев графа.

В качестве примера подсчитаем число деревьев для графа рис. А.14, *а*, положив $a=b=c=1$:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=3.$$

Хотя знание числа возможных деревьев и полезно, но оно мало что дает для расчета, так как деревья еще нужно составить и определить величину каждого дерева. Для относительно сложных схем отыскание возможных деревьев оказывается делом довольно утомительным и потому на практике применяют упорядоченные способы определения Δ, которые рассмотрены в § А.9—А.11.

§ А.9. Разложение определителя по произвольно выбранному узлу. Положим, что к некоторому узлу s подходит n ветвей с проводимостями $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определитель раскрывается по узлу при помощи формулы

$$\Delta=\sum a_l\Delta_l+\sum a_la_j\Delta_{lj}+\sum a_la_ja_k\Delta_{ljk}+\ldots+a_ia_ja_k\ldots a_n\Delta_{ijk\ldots n}, \qquad (\text{А.22})$$

где $\sum a_l\Delta_l=a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+a_3\Delta_3+\ldots+a_n\Delta_n$; Δ_k—определитель, получающийся из определителя исходной схемы путем закорачивания ветви a_k и исключения всех остальных ветвей, подходящих к узлу s при холостом ходе всех остальных ветвей этого узла;

$$\sum a_la_j\Delta_{lj}=a_1a_2\Delta_{12}+a_1a_3\Delta_{13}+a_2a_3\Delta_{23}+\ldots;$$

Δ_{kr}—определитель, получающийся из определителя исходной системы при одновременном закорачивании ветвей a_k и a_r и исключении из схемы (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу s;

$$\sum a_la_ja_k\Delta_{ljk}=a_1a_2a_3\Delta_{123}+a_1a_2a_4\Delta_{124}+\ldots;$$

Δ_{ljk}—определитель, получающийся из определителя исходной схемы при одновременном закорачивании ветвей i, j, k и исключении (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу s, по которому производится разложение.

Множитель $\Delta_{l\ldots n}$ у последнего слагаемого правой части (А.22) представляет собой определитель схемы при одновременном закорачивании всех ветвей, подходящих к узлу s

§ А.10. Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами. При разложении следует выбирать узлы, по отношению к которым схема в геометрическом смысле наиболее симметрична. Это упрощает подсчеты. Разложение определителя Δ по этому методу производят при помощи формулы

$$\Delta=\sum P_k\Delta_k, \qquad (\text{А.23})$$

где P_k—произведение проводимостей ветвей k-го пути между выбранными узлами; Δ_k—определитель k-го пути, подсчитанный по схеме, полученной из исходной при закорачивании ветвей, по которым проходит k-й путь.

Пример 172. Найти определитель Δ двумя методами для одной и той же мостовой скрещенной схемы рис. А.15, *а*.

Решение. Сначала определим Δ путем разложения по узлу *1*. К этому узлу подходят три ветви [a, d, f вместо a_1, a_2 a_3 в (А.22)], поэтому

$$\Delta=a\Delta_a+d\Delta_d+f\Delta_f+af\Delta_{af}+ad\Delta_{ad}+df\Delta_{df}+adf\Delta_{adf}.$$

Определитель Δ_a находим для подграфа рис. А.15, *б*. Он получен из графа рис. А.15, *а* путем закорачивания ветви a и размыкания ветвей d и f; $\Delta_a= =ce+cb+eb$ (попарное произведение проводимостей ветвей см. § А.8). Для определения Δ_d служит рис. А.15, *в*, для определения Δ_f—рис. А.15, *г*; $\Delta_d=\Delta_f=\Delta_a$.

В соответствии с рис. А.15, *д—ж*

$$\Delta_{ad}=b+c;\quad \Delta_{af}=b+e;$$

$$\Delta_{df}=c+e;\quad \Delta_{adf}=1.$$

Таким образом,

$$\Delta=(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf. \qquad (а)$$

Теперь найдем Δ для схемы рис. А.15, *а* разложением по путям между узлами *1* и *4* (зачерненные кружки на рис. А.16, *а*). На рис. А.16, *б—е* показаны пять возможных путей между узлами *1* и *4* и соответствующие им подсхемы (подграфы) для нахождения Δ_k.

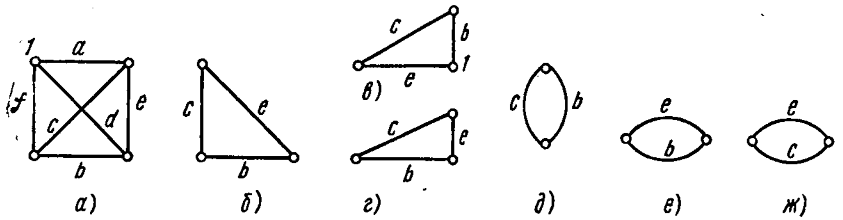


Рис. А.15

Для первого пути по ветвям *a* и *e* P_1 равно произведению проводимостей ветвей этого пути: $P_1=ae$. При закорачивании ветвей *a* и *e* подграф представляет собой параллельное соединение ветвей *f*, *c*, *b*. Следовательно, $\Delta_1=f+c+b$.

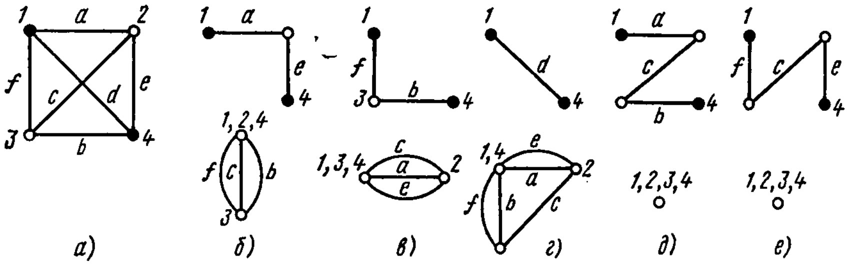


Рис. А.16

Для второго пути (рис. А.16, *в*) по ветвям *f*, *b*

$$P_2=fb;\quad \Delta_2=a+e+c.$$

Для третьего пути по ветви *d* (рис. А.16, *г*)

$$P_3=d;\quad \Delta_3=(a+e)c+(a+e)(f+b)+c(f+b).$$

Для четвертого пути по ветвям *a*, *c*, *b* (рис. А.16, *д*)

$$P_4=acb,\quad \Delta_4=1,$$

так как при закорачивании ветвей *a*, *c*, *b* граф вырождается в точку.

Для пятого пути по ветвям *f*, *c*, *e* (рис. А.16, *е*)

$$P_5=fce,\quad \Delta_5=1.$$

Таким образом,

$$\Delta=\sum P_k\Delta_k=ae(f+c+b)+fb(a+e+c)+$$

$$+d[(a+e)c+(a+e)(f+b)+(f+b)c]+acb+fce. \qquad (б)$$

Результаты подсчета Δ обоими методами совпадают.

§ А.11. Разложение определителя по произвольно выбранной ветви. Положим, что проводимость произвольно выбранной ветви графа равна a. Тогда определитель графа подсчитывают по формуле

$$\Delta = a\Delta_a + \Delta^a, \qquad (А.24)$$

где Δ_a — определитель графа при коротком замыкании ветви a; Δ^a — определитель графа при разомкнутой ветви a.

§ А.12. Применение основной формулы. Как говорилось в § А.7, формулу (А.21) применяют для определения входной и взаимной проводимостей, передачи по току, по напряжению и в других целях.

Рассмотрим вопрос о том, как ею следует пользоваться. Обозначим m и n узлы графа, к которым присоединяется ветвь, содержащая источник питания схемы. В дальнейшем полагаем, что источником питания является либо источник э. д. с., либо источник тока, поскольку к ним можно свести любой реальный источник питания. Кроме того, считаем, что источник питания только один. Если же источников питания несколько, то следует воспользоваться принципом наложения, последовательно находя искомую величину от действия каждого из источников, учитывая при подсчетах внутренние сопротивления последних.

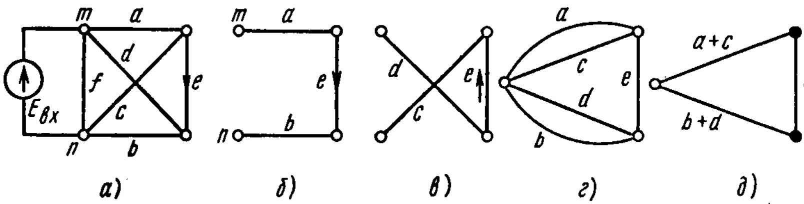


Рис. А.17

Под B_{mn} в (А.21) подразумевается либо напряжение источника питания, если в качестве последнего взят источник э. д. с., либо ток I_{mn} источника тока.

В качестве тока I в числителе левой части (А.21) берут ток по той ветви, по отношению к которой нужно найти искомую величину. Если необходимо определить передачу от источника питания к некоторой s-й ветви, то под I понимают ток в s-й ветви.

Число слагаемых в числителе (А.21) равно числу возможных путей между узлами m и n, причем каждый из них должен проходить по выбранной s ветви (путь через источник питания не учитывают).

В сумму $\sum C_r\Delta_r$ часть слагаемых может входить со знаком плюс, часть со знаком минус, так как C_r может иметь знак либо плюс, либо минус.

Для того чтобы определить, какой знак будет иметь C_r, руководствуются следующим: произвольно выбирают положительное направление вдоль ветви s (ставят стрелку на ветви s). Если при движении по пути C_r пройдем по ветви s согласно с положительным направлением этой ветви (по стрелке на ветви), то C_r берется со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

Вычисляя определитель системы Δ, следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания схемы. При питании схемы от источника э. д. с. Δ подсчитывают при закороченных узлах mn (внутреннее сопротивление источника э. д. с. равно нулю). При питании схемы от идеального источника тока ветвь mn, в которую включен источник, при подсчете Δ разрывают.

Пример 173. Определить взаимную проводимость ветви с источником э. д. с. (подключенной к узлам mn) и ветви с проводимостью e (рис. А.17, $а$).

Решение. Для учета знака C_r примем за положительное направление ветви e, указанное стрелкой. Тогда

$$I_e/E_{вх} = \sum C_r\,\Delta_r/\Delta.$$

В графе есть два пути между узлами m и n, которые проходят через ветвь e. Первый путь изображен на рис. А.17, *б*: $C_1 = aeb$. Этот путь берется со знаком плюс, так как при прохождении его по ветви e движемся согласно с направлением стрелки на этой ветви. Поскольку при закорачивании ветвей a, e, b (ветвей этого пути) граф вырождается в точку, то $\Delta_1 = 1$.

Второй путь C_2 проходит по ветвям d, e, c (рис. А.17, *в*). Так как при прохождении этого пути по ветви e проходим встречно стрелке в этой ветви (ср. рис. А.17, *б*, *в*), то $C_2 = -dec$. При закорачивании ветвей d, e, c граф вырождается в точку, поэтому $\Delta_2 = 1$.

Для нахождения определителя системы Δ закорачиваем узлы m и n (схема питания от источника э. д. с.) и получаем граф рис. А.17, *г*. От последнего переходим к графу рис. А.17, *д*.

Для вычисления Δ графа рис. А.17, *д* воспользуемся разложением его по путям между зачерненными точками. Между этими точками два пути: первый — по ветви e, второй — по ветвям $(a+c)$, $(b+d)$. Поэтому $\Delta = e(a+c+b+d) + (a+c)(b+d) \cdot 1$. Таким образом,

$$\frac{I_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{aeb - dec}{e(a+c+b+d) + (a+c)(b+d)}. \tag{А.25}$$

Для определения передачи схемы рис. А.17, *а* по напряжению между входной ветвью (ветвью с источником э. д. с. между узлами m и n) и выходной (e) воспользуемся тем, что выходное напряжение на зажимах ветви e равно току $I_{\text{вых}}$ этой ветви, поделенному на ее проводимость. Следовательно,

$$\frac{U_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = K_U = \frac{I_{\text{вых}}/e}{E_{\text{вх}}} = \frac{ab - dc}{\Delta}.$$

Пример 174. Рассмотрим, какие изменения произойдут в вычислениях, если схема рис. А.17, *а* питается не от источника э. д. с., а от источника тока (рис. А.18). Определить передачу по току к ветви e и отношение напряжения на выходе (на ветви e) к входному току. Выходной ветвью по-прежнему является ветвь e, по ней проходит ток $I_{\text{вых}}$. Положительное направление для прохождения по этой ветви то же, что и в примере 173.

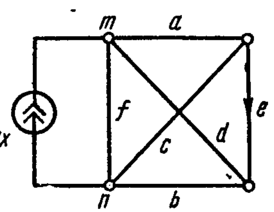


Рис. А.18

Решение. В отличие от примера 173 входной величиной является теперь входной ток $I_{\text{вх}}$. Поэтому

$$I_{\text{вых}}/I_{\text{вх}} = \sum C_r\Delta_r/\Delta. \tag{А.26}$$

Числитель правой части (А.26) такой же, как и числитель правой части (А.25). Определитель Δ в (А.26) отличен от определителя в (А.25) за счет того, что для (А.25) он подсчитывался при питании схемы от источника э. д. с., тогда как в рассматриваемом случае он должен быть подсчитан при питании схемы от источника тока. Для подсчета в этих условиях ветвь с источником тока следует считать разомкнутой. Определитель для этого случая был подсчитан ранее [см. формулу (а) в § А.10]. Поэтому

$$\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{aeb - dec}{(a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+e) + adf}.$$

Отношение выходного напряжения на ветви e к входному току

$$\frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вых}}/e}{I_{\text{вх}}} = \frac{ab - dc}{(a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+e) + adf}.$$

Для определения *входной проводимости* схемы, питающейся от источника э. д. с., в числителе (А.21) должны быть учтены все возможные пути между узлами m и n (путь через источник э. д. с. исключается). Так, например, при вычислении входной проводимости схемы рис. А.19, *а* в числителе (А.21) должно быть взято четыре слагаемых, так как возможны четыре пути между узлами m

и n (рис. А.19, *б—д*):

$$\frac{I_{вх}}{E_{вх}} = \frac{\sum C_r\Delta_r}{\Delta} = \frac{ab\,(d+c+e)+de\,(a+c+b)+dcb\cdot 1+ace\cdot 1}{(a+b)\,(d+e)+(a+b)\,c+(d+e)\,c}.$$

Все C_r в числителе взяты со знаком плюс, потому что направления всех четырех путей взяты в виде продолжения по часовой стрелке направления входного тока. Определитель Δ (схема питается от источника э. д. с.) подсчитан в соответствии с рис. А.19, *е*.

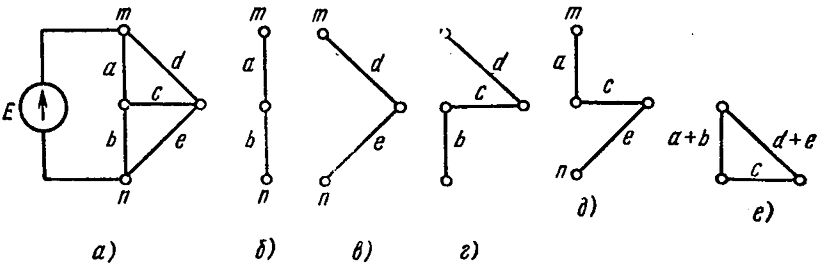


Рис. А.19

Пример 175. Определить передачу по току в двойном Т-мосте (рис. А.20, *а*). Схема питается от источника тока $I_{вх}$. Выходной ветвью является ветвь g. По ней протекает ток $I_{вых}$, положительное направление которого показано стрелкой.

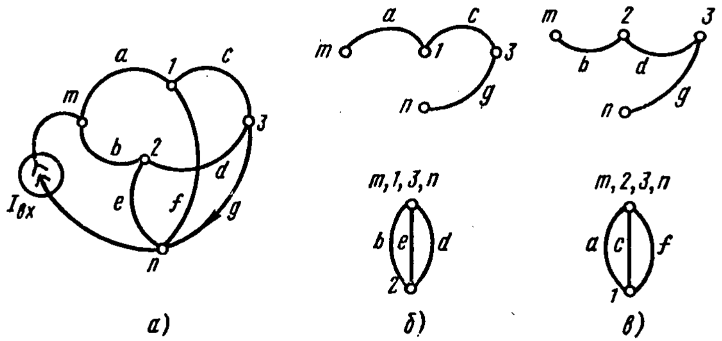


Рис. А.20

Решение. На рис. А.20, *б*, *в* показаны два пути C_1 и C_2 с передачами $C_1 = acg$ и $C_2 = bdg$ и соответствующие им подграфы для нахождения определителей:

$$\Delta_1 = b+e+d \quad \text{и} \quad \Delta_2 = a+c+f.$$

Определитель графа рис. А.21, *а* найдем методом разложения по ветвям между узлами *1* и *2* (зачернены). Между этими узлами имеются пять путей в соответствии с рис. А.21, *б—е*.

Подграфы этих путей изображены на тех же рисунках. В результате получим

$$\frac{I_{вых}}{I_{вх}} = \frac{C_1\Delta_1+C_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{acg\,(b+e+d)+bdg\,(a+c+f)}{ab\,[(e+f)g+(e+f)\,(c+d)+(c+d)\,g]+} \to \ldots$$

$$\to \ldots \frac{+acg\,(b+e+d)+bdg\,(a+c+f)}{+ef\,(a+b)\,(c+d+g)+cge\,(a+b)+fgd\,(a+b)}.$$

§ **А.13. Сопоставление направленных и ненаправленных графов.** 1. В направленных и ненаправленных графах расчет состоит из простых и наглядных операций, при проведении которых мала вероятность ошибки.

2. По сравнению с обычными алгебраическими методами решение системы уравнений при помощи графов может дать некоторую экономию времени.

3. При составлении определителя системы ненаправленного графа отпадает необходимость подсчитывать взаимно уничтожающие друг друга слагаемые, кото-

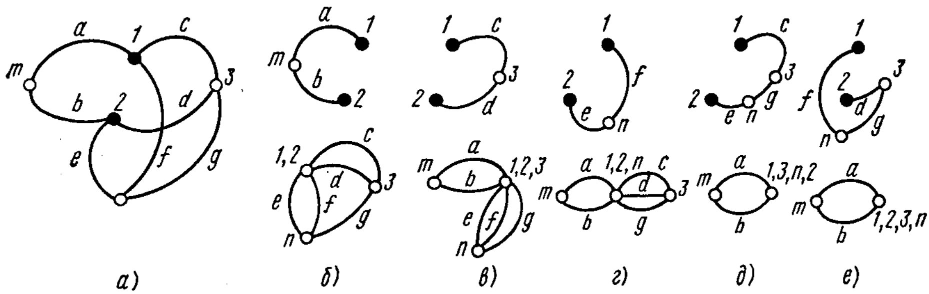


Рис. А.21

рые появляются при раскрытии определителя матрицы проводимостей системы уравнений, составленных по методу узловых потенциалов.

4. Преимущество направленных графов перед ненаправленными — простота нахождения передачи по (А.4). Однако, поскольку граф в готовом виде не задан, сначала нужно построить граф и подсчитать передачи его ветвей.

5. Преимущество ненаправленных графов состоит в том, что не требуется составлять никаких уравнений и строить граф (так как графом является сама электрическая схема); однако определение передачи по (А.21) требует несколько большего времени, чем применение (А.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

МАТРИЦЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

§ **Б.1. Основные свойства матриц.** Матрица — это совокупность величин, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Чтобы отличать матрицу по внешнему виду от определителя, ее заключают в квадратные скобки [ ] или в двойные вертикальные черты ‖ ‖.

Каждый элемент матрицы часто снабжают двумя индексами: первый соответствует номеру строки, второй — номеру столбца.

Матрицу называют *квадратной*, если число строк в ней равно числу столбцов, например

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Диагональной называют матрицу, у которой элементы главной диагонали не равны нулю, а все остальные — нули, например

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрицу, у которой элементы, расположенные по главной диагонали, равны единице, а все остальные — нули, называют *единичной*, например

$$[1]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Неопределенной называют матрицу, в которой сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю.

Две матрицы равны, если равны соответствующие элементы этих матриц. Так, матрица $[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ равна матрице $[B]=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$; $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$.

У равных матриц равны определители. Для рассмотренного примера $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$, но из равенства двух определителей еще не следует равенства самих матриц.

Операции над матрицами (их сложение, умножение) постулированы из соображений рациональности. При сложении (вычитании) матриц следует сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц. Например,

$$[A]+[C]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12}\\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22}\end{bmatrix}.$$

Умножение двух матриц (число столбцов первой должно быть равно числу строк второй) производится по правилу «i-строка первой матрицы умножается на k-столбец второй». Для иллюстрации этого правила умножим две матрицы, элементами которых являются числа:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix}.$$

Руководствуясь приведенным правилом, нетрудно убедиться в том, что $[A][B]\neq[B][A]$, т. е. результирующая матрица зависит от последовательности расположения матриц сомножителей.

По отношению к матрице $[A]$, если определитель ее не равен нулю, можно составить обратную матрицу $[A]^{-1}$. Для этого необходимо: а) каждый элемент исходной матрицы $[A]$ заменить его алгебраическим дополнением; б) транспонировать полученную матрицу, т. е. строки сделать столбцами; в) разделить транспонированную матрицу на определитель исходной матрицы $[A]$.

Пример 176. Пусть $[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$. Определить $[A]^{-1}$.

Решение. Заменив элементы матрицы на алгебраические дополнения, получим матрицу $\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{21}\\ -a_{12} & a_{11}\end{bmatrix}$. После транспонирования будем иметь $\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$. Следовательно,

$$[A]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Произведение $[A][A]^{-1}=[1]=1$.

Для решения уравнения $[A][B]=[C]$ относительно матрицы $[B]$ следует обе части этого уравнения умножить на $[A]^{-1}$: $[A]^{-1}[A][B]=[A]^{-1}[C]$ и учесть, что $[A]^{-1}[A]=1$. Получим $[B]=[A]^{-1}[C]$.

В матричном уравнении $[A][X]=0$ можно переставлять столбцы в матрице $[A]$ при одновременной перестановке строк в матрице $[X]$.

§ Б.2. Общая характеристика применения матриц в электротехнике. Матрицы применяют для: а) сокращенной записи систем уравнений; б) упорядочения решения систем уравнений; в) исследования топологических свойств электрических цепей (см., например, [3]), в теории графов, при синтезе цепей, при использовании ЭВМ и т. д.

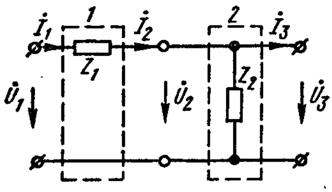


Рис. Б.1

Упорядочение решения систем уравнений при помощи матриц проиллюстрируем на примере составного четырехполюсника.

Пример 177. Составить матрицы $[A_1]$ и $[A_2]$ двух каскадно соединенных четырехполюсников *1* и *2* (рис. Б.1) и матрицу эквивалентного им четырехполюсника.

Решение. Для первого четырехполюсника

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2+Z_1\dot{I}_2;\quad \dot{I}_1=\dot{I}_2;\quad [A_1]=\begin{bmatrix}1 & Z_1\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=[A_1]\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}. \tag{a}$$

Для второго

$$\dot{U}_2=\dot{U}_3;\quad \dot{I}_2=\frac{\dot{U}_3}{Z_2}+\dot{I}_3;\quad [A_2]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/Z_2 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=[A_2]\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}. \tag{б}$$

Заменив $\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$ в правой части (а) на его эквивалент из (б), получим

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=[A_1][A_2]\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}=[A]\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}.$$

Матрица двух каскадно соединенных четырехполюсников

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & Z_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/Z_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{Z_1+Z_2}{Z_2} & Z_1\\ 1/Z_2 & 1\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\dot{U}_1=\frac{Z_1+Z_2}{Z_2}\dot{U}_3+Z_1\dot{I}_3\quad\text{и}\quad \dot{I}_1=\frac{1}{Z_2}\dot{U}_3+1\cdot\dot{I}_3.$$

§ Б.3. Основы матричной теории графов. Пронумеруем ветви и узлы в заданной схеме. Так, в схеме рис. Б.2, *а* 4 узла и 6 ветвей. Произвольно покажем на них стрелками положительные направления отсчета токов и напряжений. Выберем одно из возможных деревьев в схеме (рис. Б.2, *б*). Ветви изобразим сплошными, а хорды — пунктирными линиями.

Фундаментальными контурами называют контуры, в каждый из которых входит только по одной хорде. Так, для дерева рис. Б.2, *б* имеем три контура *a*, *b*, *c* на рис. Б.2, *в*.

Матрицей фундаментальных контуров $[K]$ называют таблицу из чисел 1, — 1, 0, в которой строки (индекс i) соответствуют контурам, а столбцы (индекс j) — ветвям.

Если при обходе i-го контура стрелка на ветви направлена согласно с обходом контура, то в соответствующей клетке таблицы ставят 1, если встречно, то

— 1, если ветвь не встретится — 0. Для рассматриваемого примера, обходя контуры по часовой стрелке, запишем

$$
\begin{array}{r}
 \\ \text{Контуры} \\ a \\ b \\ c
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{Ветви} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\\
[K]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Матрицу $[K]$ используют для записи уравнений по второму закону Кирхгофа. Для того чтобы от заданной схемы прийти к выбранному дереву, например от рис. Б.2, *а* к рис. Б.2, *б*, необходимо отсечь часть ветвей, т. е. сделать их хордами. Каждая ветвь отсекается в двух местах около узлов, к которым она подходит. В примере нужно сделать три отсечения (показаны кружками на рис. Б.2, *а*, *б* и обозначены цифрами I, II, III).

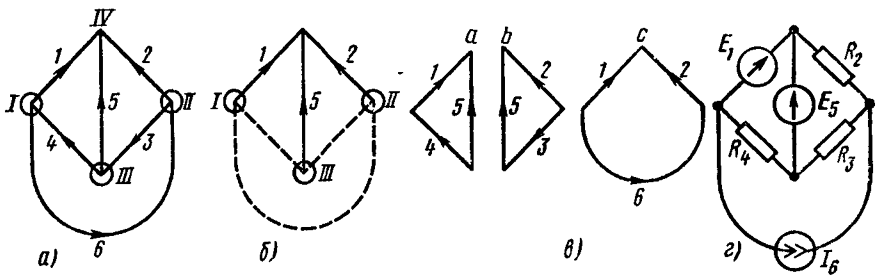


Рис. Б.2

Матрицей отсечения или $[Q]$-матрицей ($[A]$-матрицей) называют таблицу, составленную из чисел 1, — 1, 0 так, что номер строки i соответствует номеру отсечения, а номер столбца j — номеру ветви. Если j-ветвь рассекается i-отсечением (кружком) и стрелка на ней направлена внутрь этого кружка, то в соответствующей клетке таблицы ставят 1, если из кружка, то — 1, если ветвь не затронута отсечением — 0. Для рассматриваемого примера

$$
\begin{array}{r}
 \\ \text{Отсечения} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{Ветви} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\\
[Q]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{array}
\qquad \text{(а)}
$$

С помощью $[Q]$-матрицы удобно записывать уравнения по первому закону Кирхгофа. Ее используют также для записи уравнений по методу узловых потенциалов и по методу контурных токов.

Известно, что с каждой исходной схемой можно сопоставить дуальную (см. § 3.43). Если узлы дуальной схемы взять соответствующими фундаментальным контурам исходной, то $[Q]$-матрица дуальной схемы и $[K]$-матрица исходной схемы будут одинаковы.

Кроме $[K]$- и $[Q]$-матриц в матричной теории графов используют $[M]$- и $[H]$-матрицы.

$[M]$-матрицу, или *матрицу контуров*, составляют так же, как и $[K]$-матрицу, но для всех возможных контуров схемы.

$[H]$-*матрицу*, или *матрицу инциденций* (узловую матрицу), составляют так же, как и $[Q]$-матрицу, но для всех узлов схемы.

Запись уравнений связи напряжений и токов на ветвях через сопротивления или проводимости ветвей в комплексной или операторной формах, т. е. запись уравнений по закону Ома, осуществляют при помощи *матрицы полюсных уравнений* (название обусловлено тем, что каждая ветвь имеет два зажима или полюса).

Схема рис. Б.2, *г* повторяет схему рис. Б.2, *а*. В ветвях *1* и *5* включены источники э. д. с., в ветви *6* — источник тока, а в остальных — активные сопротивления. Для них имеем $R_2I_2=U_2$; $R_3I_3=U_3$; $R_4I_4=U_4$. С помощью матрицы полюсных уравнений эти соотношения запишем как

$$\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}. \tag{б}$$

При решении электротехнических задач за основные обычно принимают уравнения для напряжений вдоль фундаментальных контуров — алгебраическая сумма напряжений вдоль каждого из них равна нулю, либо уравнения для токов, составленные для отсечений, — алгебраическая сумма токов для каждого отсечения равна нулю.

В процессе совместного решения уравнений полезно разделять матрицы на подматрицы или блоки, с тем чтобы одну группу токов или напряжений выражать через другую (одну группу неизвестных через другую). Для образования необходимых подматриц переставляют строки и столбцы матриц.

Пример 178. Для схемы рис. Б.2, *г*, полагая известными U_1, U_5, I_6, R_2, R_3, R_4, составить уравнение для определения токов I_1 и I_5 и напряжения U_6 ($U_1 = E_1$, $U_5 = E_5$).

Решение. Используя $[K]$-матрицу, запишем равенство нулю напряжений вдоль трех фундаментальных контуров рис. Б.2, *в*:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = 0.$$

Переставим строки и столбцы так, чтобы можно было выделить подматрицы $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \left[\begin{array}{c} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ \hdashline U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array}\right] = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0. \tag{в}$$

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов, охваченных отсечениями I, II, III на рис. Б.2, *а*, используя [*Q*]-матрицу:

Ветви

$$\begin{array}{c} \text{Отсечения} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} I_{1'} \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0. \qquad (г)$$

Переставим строки и столбцы в (г) так, чтобы не требующиеся по условию задачи токи I_2, I_3, I_4 можно было выразить через $I_{1'}$, I_5, I_6:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \cdots \\ I_{1'} \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1'} \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}. \qquad (д)$$

Заменим матрицу $\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$ в уравнении (в) на ее эквивалент из (б) и в полученном выражении матрицу $\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$ заменим на правую часть (д):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1'} \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1'} \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0; \qquad (е)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последовательно умножим четыре матрицы. Окончательно

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1'} \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(R_2+R_3) & -(R_2+R_3) & -R_3 \\ -R_4 & 0 & -R_4 \\ R_2 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1'} \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0.$$

Через матрицу отсечений $[Q]$, диагональную матрицу проводимостей схемы $[g]$ и транспонированную матрицу отсечений $[Q]^{\text{T}}$ можно определить узловую матрицу проводимостей $[G]^{\text{У}}$, используемую для записи уравнений узловых потенциалов:

$$[G]^{\text{У}}=[Q]\,[g]\,[Q]^{\text{T}}.$$

Например для схемы рис. Б.2, *а*, полагая, что проводимости ветвей *1—5* равны $g_1—g_5$ (в ветви *6* источник тока и потому ее проводимость 0) и что узел *IV* заземлен, имеем

$$[G]^{\text{У}}=[Q]\,[g]\,[Q]^{\text{T}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1 &&&&&\\ & g_2 &&&&\\ && g_3 &&&\\ &&& g_4 &&\\ &&&& g_5 &\\ &&&&& 0\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1+g_4 & 0 & -g_4\\ 0 & g_2+g_3 & -g_3\\ -g_4 & -g_3 & g_3+g_4+g_5\end{bmatrix}.$$

Если учесть, что матрицу узловых токов в методе узловых потенциалов $[I]^{\text{У}}$ можно записать в виде $-[Q]\,[I_k]^{\text{T}}+[Q]\,[g]\,[E]^{\text{T}}$, где $[I_k]^{\text{T}}$ — транспонированная матрица — строка токов ветвей с источниками токов I_k, шунтирующими ветви k, $[E]^{\text{T}}$ — транспонированная матрица — строка э. д. с. ветвей, то уравнения по методу узловых потенциалов можно записать и так:

$$[Q]\,[g]\,[Q]^{\text{T}}\,[\varphi]=-[Q]\,[I_k]^{\text{T}}+[Q]\,[g]\,[E]^{\text{T}},$$

где $[\varphi]$ — матрица-столбец узловых потенциалов.

Аналогично, матричное уравнение по методу контурных токов можно записать в виде

$$[K]\,[r]\,[K]^{\text{T}}\,[I]=[K]\,[E_{\text{в}}]^{\text{T}}-[K]\,[r]\,[I_k]^{\text{T}}.$$

Здесь $[K]$ — матрица фундаментальных контуров; $[r]$ — диагональная матрица сопротивлений ветвей (матрица полюсных уравнений); $[K]^{\text{T}}$ — транспонированная $[K]$-матрица, $[E_{\text{в}}]^{\text{T}}$ — транспонированная матрица — строка э. д. с. источников э. д. с. ветвей. Со знаком плюс ток источника тока I_k входит в $[I_k]^{\text{T}}$, если по шунтирующей его ветви k он дает ток, согласный со стрелкой на ней.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В НЕЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ-АНАЛОГАХ

Исследование процессов в неэлектрических системах (механических, акустических, тепловых гидравлических и др.) или в частично неэлектрических (например, в электромеханических) часто производят на электрических моделях-аналогах.

Стремление использовать для этой цели электрические модели объясняется тем, что: 1) электрические параметры можно легко изменять в широких пределах; 2) токи и напряжения можно измерять с большой точностью; 3) токи и напряжения относительно просто записать на осциллографе. В качестве неэлектрических будем рассматривать механические системы.

Механические системы подразделяют на системы поступательного, вращательного и поступательно-вращательного движения. В каждой из этих систем могут быть активные и пассивные элементы.

Активными являются источники силы f и источники скорости v для систем поступательного движения и источники вращающего момента M и угловой скорости ω для систем вращательного движения.

Пассивными являются элементы упругости, трения и массы. Как и при рассмотрении электрических цепей, эти элементы часто идеализируют, например считают, что идеальная пружина обладает только упругостью и не имеет массы.

Для заданной механической системы сначала составляют схему замещения, а затем, используя аналогию между механическими и электрическими величинами (о которой будет сказано далее), образуют электрическую схему-аналог, которую и подвергают исследованию (экспериментальному или теоретическому).

Перед составлением схемы замещения механической системы необходимо:

1) выбрать систему отсчета для сил и скоростей (или соответственно для вращающих моментов и угловых скоростей);

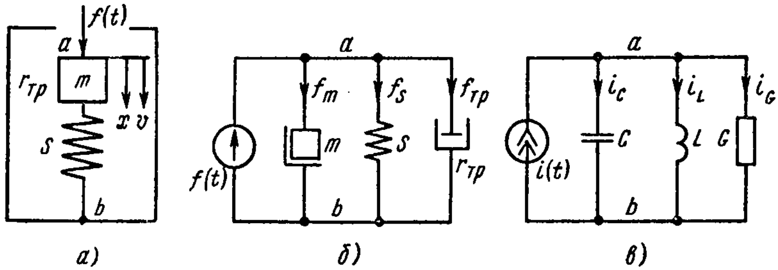


Рис. В.1

2) соединить между собой узлы, имеющие одинаковую скорость или одинаковую величину смещения;

3) соединить неподвижные узлы в один узел;

4) на схеме замещения между соответствующими узлами изобразить активные и пассивные элементы, имеющиеся в изучаемой системе.

Рассмотрим простейший пример.

Механическая система рис. В.1, *а* образована телом массой m, опирающимся на пружину упругости S ($S=1/e$, где e — податливость). На тело действует внешняя сила $f(t)$, являющаяся функцией времени t. При движении тела в вертикальном направлении возникает вязкое трение о среду. Сила вязкого трения пропорциональна скорости v перемещения тела. В схеме всего два узла: подвижный a и неподвижный b.

Выберем положительное направление для отсчета величины перемещения тела x, считая за исходное положение тела при отсутствии силы $f(t)$. Положительное направление для скорости v показано на рис. В.1, *а*. Схема замещения изображена на рис. В.1, *б*. В ней четыре ветви. В первой включен источник силы $f(t)$, во второй — масса m, в третьей — идеальная пружина упругости S, в четвертой — сопротивление трения $r_{\text{тр}}$.

Для схемы замещения составим уравнение по первому закону механики. Согласно этому закону, сумма всех внешних сил, действующих в некотором узле, должна быть равна сумме сил реакций в этом же узле. В узле a действуют три силы реакции: $f_m=m\dfrac{dv}{dt}$ — реакция системы, обусловленная силой инерции; $f_S=\dfrac{1}{e}\displaystyle\int v\,dt$ — реакция системы, обусловленная деформацией пружины; $f_{\text{тр}}=$ $=r_{\text{тр}}v$ — реакция системы, обусловленная трением.

По первому закону механики,

$$f_m+f_S+f_{\text{тр}}=f(t) \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt}+\frac{1}{e}\int v\,dt+r_{\text{тр}}v=f(t).$$

Между отдельными элементами механической системы и элементами соответствующей ей электрической модели (системы) может быть аналогия двух типов в соответствии с тем, что для каждой электрической цепи может быть составлена дуальная ей цепь.

В первом типе аналогий сопоставимыми величинами являются: сила f — напряжение u, скорость v — ток i, масса m — индуктивность L, податливость пружины e — емкость C, сопротивление трения $r_{тр}$ — электрическое сопротивление R.

Во втором типе аналогий сопоставимыми величинами являются: сила f — ток i, скорость v — напряжение u, масса m — емкость C, податливость e — индуктивность L, сопротивление трения $r_{тр}$ — электрическая проводимость G.

На рис. В.1, *в* изображена электрическая схема по второму типу аналогий, соответствующая схеме замещения механической системы рис. В.1, *а*. Для нее

$$i_C+i_L+i_G=i(t), \quad \text{или} \quad C\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}\int u\,dt+Gu=i(t),$$

где u — напряжение между узлами a и b.

Закон изменения напряжения u во времени в схеме рис. В.1, *в* соответствует закону изменения скорости v в системе рис. В.1, *а*, если параметры электрической схемы соответствующим образом подобраны.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ Г.1. Случайные процессы. Корреляционные функции. Положим, что есть несколько систем, находящихся в одинаковых условиях, и в них происходят в принципе одинаковые процессы. В силу влияния на процесс различных случайных факторов, имеющих вероятностный характер, процессы в системах могут несколько отличаться друг от друга. В результате наблюдения можно установить, какая величина при фиксированном моменте времени t является наиболее вероятной.

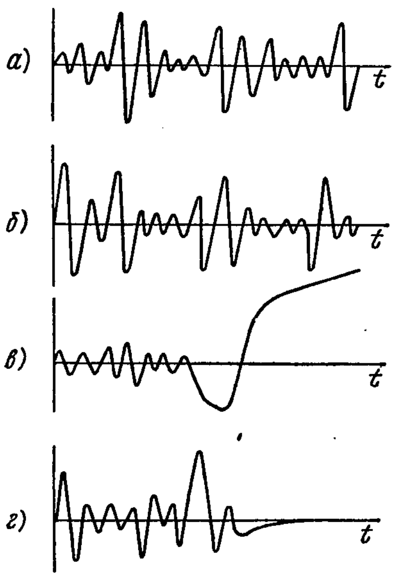


Рис. Г.1

Плотность вероятности случайного процесса обозначают $W(x, t)$. Она выражает собой вероятность того, что в момент времени t значение величины x находится в интервале от x до $x+dx$. *Функцией распределения* $F(x)$ называют вероятность наступления события, при котором значение величины x, характеризующей это событие, находится в интервале от $-\infty$ до x.

Случайные процессы могут быть разделены на стационарные и нестационарные. *Стационарными* называют случайные процессы, для которых все функции распределения не зависят от изменения начала отсчета времени. Для *нестационарных* случайных процессов функции распределения зависят от времени.

В качестве примера на рис. Г.1, *а*, *б* изображены кривые некоторого стационарного случайного процесса. Для этих кривых вероятность возникновения колебания с некоторой амплитудой остается той же, если сдвинуть начало отсчета времени. Иная картина имеет место на рис. Г.1, *в*, *г*, изображающих кривые $x(t)$ для некоторого нестационарного случайного процесса. На рис. Г.1, *в* начиная с некоторого момента времени $x(t)$ неограниченно возрастает, а на рис. Г.1, *г* — стремится к нулю. Ясно, что для этих кривых сдвиг начала отсчета времени изменяет вероятностные зависимости.

Для стационарных случайных процессов среднее по множеству (обозначается $\bar{x}$) равно среднему по времени (обозначается $\langle x \rangle$), т. е. $\bar{x} = \langle x \rangle$.

Это положение называют *эргодической теоремой* (гипотезой). Эргодическая теорема служит основанием для того, чтобы, обрабатывая всего одну из временных зависимостей $x(t)$, полученную экспериментально, судить о статистических свойствах всех зависимостей $x(t)$ при стационарном случайном процессе в изучаемой системе.

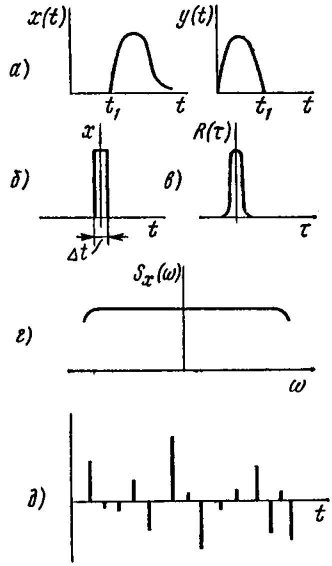


Рис. Г.2

Для характеристики стационарных случайных процессов $x(t)$ вводят автокорреляционную и взаимную корреляционную функции.

Автокорреляционная функция $R(\tau)$ является мерой взаимной связи функции $x(t)$ и функции $x(t+\tau)$, смещенной по отношению к $x(t)$ на время τ:

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt. \qquad (\text{Г.1})$$

Свойства $R(\tau)$:

1) $R(\tau)$ — функция четная, т. е. $R(-\tau) = R(\tau)$ [в этом можно убедиться, введя в (Г.1) новую переменную $t_1 = t+\tau$];

2) если $x(t)$ — функция периодическая, то для нее $R(\tau)$ может быть представлена в виде суммы автокорреляционных функций от постоянной и от синусоидально изменяющихся составляющих;

3) если в $x(t)$ имеются гармонические составляющие, то $R(\tau)$ не содержит информации о начальных фазах гармонических составляющих;

4) для $x(t)$ без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ максимальна при $\tau = 0$;

5) для случайных функций времени без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ уменьшается с увеличением τ и уже при сравнительно небольших τ стремится к нулю [объясняется это тем, что для чисто случайного процесса значение $x(t+\tau)$ уже при относительно небольшом τ не зависит от того значения, которое имела эта функция $x(t)$ в момент времени t].

Взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ двух функций времени — $x(t)$ и $y(t)$ — называют функцию, определяемую следующим образом:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t+\tau)\, dt. \qquad (\text{Г.2})$$

Функция $R_{xy}(\tau)$ является мерой взаимной связи двух случайных функций времени.

На рис. Г.2, *а* изображены две произвольные функции времени: $x(t)$ и $y(t)$, которые позволяют наглядно пояснить свойства функции $R_{xy}(\tau)$.

1. Функция $R_{xy}(\tau)$ зависит от того, сдвинута функция $y(t)$ на $+\tau$ или на $-\tau$, т. е. $R_{xy}(-\tau) \neq R_{xy}(\tau)$.

Если всю кривую $y(t)$ рис. Г.2, *а* сдвинуть на $+\tau$ влево, т. е. взять функцию $y(t+\tau)$, то произведение $x(t)\, y(t+\tau)$ будет равно нулю для любого t, а значит, $R_{xy}(\tau) = 0$. Если же всю кривую $y(t)$ рис. Г.2, *а* сдвинуть на $-\tau$

вправо, т. е. взять функцию $y(t-\tau)$, то на некотором интервале времени произведение ординат кривых $x(t)$ и $y(t-\tau)$ не будет равно нулю.

2. Сдвиг функции $y(t)$ влево на τ дает тот же результат, что и сдвиг функции $x(t)$ вправо на $-\tau$. Поэтому $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$.

3. Для случайных функций времени $x(t)$ и $y(t)$, не содержащих постоянной и гармонических составляющих одинаковой частоты (для некоррелированных функций), $R_{xy}(\tau)=0$.

§ Г.2. Прямое и обратное преобразования Фурье для случайных функций времени. К случайным функциям времени и к их корреляционным функциям применяют преобразование Фурье. Так как в общем случае случайная функция времени $x(t)$ или ее корреляционная функция может и не стремиться к нулю при $t\to\pm\infty$, то, для того чтобы к ним можно было применить преобразование Фурье, поступают следующим образом: преобразование Фурье применяют к функции $x_1(t)$, которая не равна нулю в интервале от $-T$ до $+T$ и равна нулю вне этого интервала. Если затем $T\to\infty$, то $x_1(t)$ будет стремиться к $x(t)$, а Фурье-изображение функции $x_1(t)$ будет стремиться к Фурье-изображению функции $x(t)$.

Подобное рассуждение может быть проведено и по отношению к Фурье-изображению корреляционной функции.

Фурье-изображением автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ называют

$$S_x(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \tag{Г.3}$$

Но

$$R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}=R_x(\tau)\,(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau).$$

Если учесть четность $R_x(\tau)$ и $\cos\omega\tau$ и нечетность $\sin\omega\tau$, то

$$S_x(\omega)=2\int\limits_{0}^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau, \tag{Г.4}$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса, которая обладает следующими свойствами: 1) действительна и положительна при всех частотах; 2) четная; 3) так же как и $R_x(\tau)$, не содержит информации о фазе гармоник, если таковые содержатся в $x(t)$.

Зная $S_x(\omega)$, можно определить автокорреляционную функцию

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\tau. \tag{Г.5}$$

Если на четырехполюсник с передаточной функцией $K(j\omega)$, модуль которой $K(\omega)$, воздействует случайная функция спектральной плотностью $S_{x\,\text{вх}}(\omega)$, то спектральная плотность величины на выходе четырехполюсника (вывод опускаем)

$$S_{x\,\text{вых}}(\omega)=K^2(\omega)\,S_{x\,\text{вх}}(\omega). \tag{Г.6}$$

§ Г.3. Белый шум и его свойства. Представим себе прямоугольный импульс весьма малой, в пределе бесконечно малой длительности (рис. Г.2, *б*). Нетрудно убедиться в том, что для него $R_x(\tau)\neq 0$ только при $\tau<\left|\pm\frac{\Delta t}{2}\right|$. Вне этого интервала $R_x(\tau)=0$. Из предыдущего ясно, что если $R_x(\tau)\neq 0$ только при очень малых τ, то процесс, которому соответствует эта функция, является случайным.

Положим теперь, что $R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, где α очень велико, поэтому $R_x(\tau)$ очень быстро спадает в функции τ по закону экспоненты (рис. Г.2, *в*). Найдем

$S_x(\omega)$ для этого случая. По определению,

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=2\mathrm{Re}\int_0^{\infty} R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\,e^{-j\omega t}\,d\tau=2\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right]=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

На рис. Г.2, *г* качественно построен график $S_x(\omega)$, полагая, что α очень велико.

Если α очень велико, то влияние ω^2 на значение знаменателя $S_x(\omega)$ сказывается только при очень больших ω, соизмеримых с α, т. е. спектральная плотность $S_x(\omega)$ кратковременного игольчатого импульса постоянна в очень широком диапазоне частот.

На основании изложенного можно сказать, что чем у́же импульс (чем он короче во времени), тем шире его частотный спектр.

Белый шум представляет собой совокупность множества беспорядочно и без всякой связи следующих друг за другом игольчатых импульсов (рис. Г.2, *д*), амплитуды которых имеют случайный характер и подчиняются нормальному закону распределения вероятности, при котором плотность распределения вероятности

$$W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где коэффициент a — математическое ожидание; коэффициент σ — дисперсия.

Так как спектральная плотность каждого импульса постоянна в достаточно широком диапазоне частот, то и для белого шума $S_x(\omega)=\mathrm{const}$.

§ Г.4. Источники внутренних шумов в электрических цепях. Активные сопротивления, электронные лампы, транзисторы, магнитные усилители и многие другие элементы схем являются источниками внутренних шумов. Э.д.с., которыми можно в расчетном смысле эквивалентировать эти шумы, обычно очень малы и составляют часто несколько микровольт. Если шумящие элементы схем включены на вход усилителя, имеющего очень большой коэффициент усиления, то шумы ограничивают порог чувствительности схемы и с ними приходится считаться.

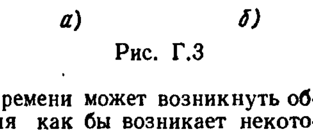


Рис. Г.3

Активное сопротивление как источник шума. Вследствие хаотического теплового движения электронов в некоторый момент времени на одном конце сопротивления образуется избыток электронов, а на другом конце — недостаток. В смежный момент времени может возникнуть обратная картина. На концах активного сопротивления как бы возникает некоторая э. д. с.

Шум, возникающий в активном сопротивлении R (Ом), является белым шумом и имеет спектральную плотность

$$S_ш(\omega)=2kTR,$$

где k — постоянная Больцмана, равная $1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/град; T — абсолютная температура сопротивления.

Шумящее сопротивление в расчетном смысле эквивалентно схеме рис. Г.3, *а*. В ней последовательно соединены нешумящее сопротивление и источник э. д. с. Квадрат напряжения этого источника

$$U_ш^2=S_ш(\omega)\,\Delta\omega/\pi=4kTR\,\Delta f.$$

Через $\Delta\omega$ обозначена полоса пропускания усилителя, на вход которого включено шумящее сопротивление ($\Delta\omega=2\pi\,\Delta f$).

Дробовой эффект в электронной лампе. Эффект испускания электронов нитью накала лампы носит случайный характер. В некоторый момент времени из нити накала вылетает больше электронов, в смежный с ним момент времени — меньше. В результате анодный ток при отсутствии сигнала на сетке лампы непостоянен и имеет некоторую переменную составляющую, которая колеблется около среднего значения анодного тока.

Эффект называют дробовым, так как он напоминает шум дробинок при их ударе о мишень. Шум, вызванный дробовым эффектом, также является белым шумом, спектральная плотность которого не зависит от частоты. В расчетном смысле дробовой эффект учитывают, включив в сеточную цепь лампы (рис. Г.3, *б*) некоторое сопротивление $R = R_ш$ и источник э. д. с. напряжением $U_ш$: $U_ш^2 = 4kTR\,\Delta f$.

Для маломощных триодов пользуются формулой $R_ш = (2 \div 3)/S$ кОм, где S — крутизна характеристики лампы, мА/В. Для многосеточных ламп $R_ш$ значительно больше, чем для триодов.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННЫХ И ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЫ И ДВОЙНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ

Метод основан на использовании неопределенных матриц проводимостей элементов схем, составлении неопределенной матрицы проводимостей всей схемы, получения из нее укороченной матрицы путем вычеркивания столбца и строки, соответствующей заземленному узлу, и применения выведенных далее формул для подсчета искомой величины. Рассмотрение метода начнем с вывода формул Y-параметров транзистора.

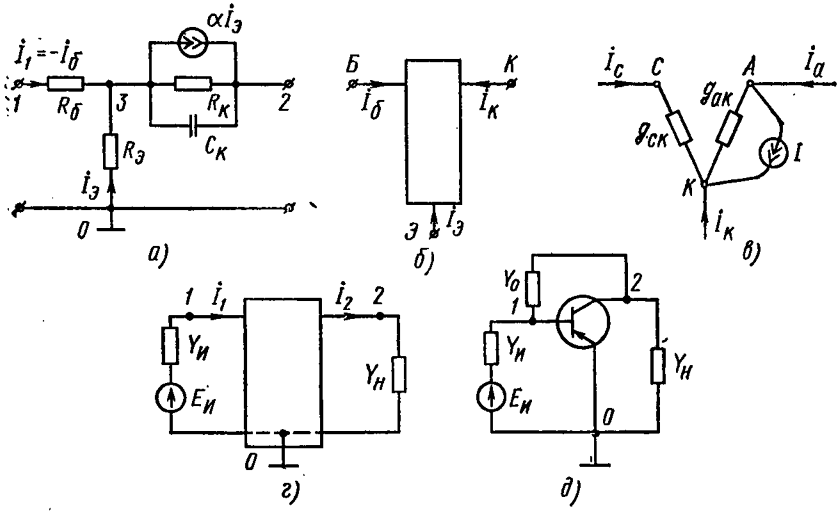


Рис. Д.1

§ Д.1. Y-параметры транзистора. Составим уравнение по методу узловых потенциалов для узла 3 схемы с общим эмиттером рис. Д.1, *а* (см. рис. 15.23, *б*), полагая $Y_б = 1/R_б$;

$$Y_э = 1/R_э; \quad Y_к = (1/R_к) + j\omega C_к.$$

Точки *1*, *2*, *3* имеют потенциалы $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$, $\dot\varphi_3$, а точка *0* имеет нулевой потенциал:

$$\dot\varphi_3(Y_б+Y_э+Y_к)-\dot\varphi_1Y_б-\dot\varphi_2Y_к=-\alpha\dot I_э;$$

$$\dot I_э=-\dot\varphi_3Y_э;$$

$$\dot\varphi_3=\dot\varphi_1\frac{Y_б}{a}+\dot\varphi_2\frac{Y_к}{a};$$

где $a=Y_б+Y_к+Y_э(1-\alpha)$;

$$\dot I_1=(\dot\varphi_1-\dot\varphi_3)Y_б=\dot\varphi_1\frac{Y_б}{a}[Y_к+Y_э(1-\alpha)]-\dot\varphi_2\frac{Y_кY_б}{a}.$$

В свою очередь,

$$\dot I_2=(\dot\varphi_2-\dot\varphi_3)Y_к-\alpha\dot I_э=\dot\varphi_1\frac{Y_б(\alpha Y_э-Y_к)}{a}+\dot\varphi_2\frac{(Y_б+Y_э)Y_к}{a}.$$

Сопоставляя два последних уравнения с уравнениями четырехполюсника в Y-форме и заменяя индекс 1 на б, индекс 2 на к, получим

$$Y_{бб}=Y_{11}=\frac{Y_б[Y_к+Y_э(1-\alpha)]}{a};\quad Y_{бк}=Y_{12}=-\frac{Y_кY_б}{a};$$

$$Y_{кб}=Y_{21}=\frac{Y_б(\alpha Y_э-Y_к)}{a};\quad Y_{кк}=Y_{22}=\frac{Y_к(Y_б+Y_э)}{a}. \qquad (Д.1)$$

Порядок величин для низкочастотных маломощных транзисторов следующий:

$$Y_{бб}\approx10^{-3}\ Ом^{-1},\quad Y_{кк}=34\cdot10^{-6}\ Ом^{-1};$$

$$Y_{бк}=-10^{-6}\ Ом^{-1},\quad Y_{кб}\approx32\cdot10^{-3}\ Ом^{-1}.$$

§ Д.2. Неопределенная матрица узловых проводимостей транзистора. Представим транзистор трехполюсником (рис. Д.1, *б*) с зажимами *Б*, *К*, *Э*. Токи $\dot I_б$, $\dot I_к$, $\dot I_э$ направим соответственно к зажимам *Б*, *К*, *Э*, имеющим потенциалы $\dot\varphi_б$, $\dot\varphi_к$, $\dot\varphi_э$, отсчитываемые от нулевого уровня 0.

Составим выражения для токов $\dot I_б$ и $\dot I_к$, а выражение для тока $\dot I_э$ получим, учитывая, что $\dot I_б+\dot I_к+\dot I_э=0$:

$$\dot I_б=Y_{бб}(\dot\varphi_б-\dot\varphi_э)+Y_{бк}(\dot\varphi_к-\dot\varphi_э);$$

$$\dot I_к=Y_{кб}(\dot\varphi_б-\dot\varphi_э)+Y_{кк}(\dot\varphi_к-\dot\varphi_э);$$

$$\dot I_э=-(Y_{бб}+Y_{кб})\dot\varphi_б+(Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+Y_{кк})\dot\varphi_э-(Y_{бк}+Y_{кк})\dot\varphi_к.$$

Эта система уравнений в матричном виде запишется так:

$$[\dot I]=[Y][\dot\varphi],$$

где

$$[Y]=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} б & э & к \end{array} \\
\begin{array}{c} б \\ э \\ к \end{array} & \left[\begin{array}{ccc}
Y_{бб} & -(Y_{бб}+Y_{бк}) & Y_{бк} \\
-(Y_{бб}+Y_{кб}) & Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+Y_{кк} & -(Y_{бк}+Y_{кк}) \\
Y_{кб} & -(Y_{кб}+Y_{кк}) & Y_{кк}
\end{array}\right]
\end{array}$$

— неопределенная матрица узловых проводимостей.

В неопределенной матрице сумма элементов любого столбца и любой строки равна нулю. Из нее получают укороченную матрицу, вычеркивая тот столбец и ту строку, которые соответствуют заземленному узлу схемы.

§ Д.3. Неопределенная матрица узловых проводимостей электронной лампы. На рис. Д.1, *в* изображена схема, соответствующая схеме рис. 15.30, *в*. В ней имеются три узла (*С*, *А*, *К*), две проводимости: $g_{ак}=g_i$ и $g_{ск}$ — внешняя проводимость между сеткой и катодом (в частном случае она может отсутствовать).

Источник тока

$$I=\frac{\mu\Delta u_C}{R_i}=\frac{\mu}{R_i}(\dot{\varphi}_c-\dot{\varphi}_к)=S(\dot{\varphi}_c-\dot{\varphi}_к).$$

Токи, подтекающие к узлам I_c, I_a, $I_к$, выразим через потенциалы и проводимости:

$$\begin{aligned}I_c&=g_{ск}(\dot{\varphi}_c-\dot{\varphi}_к);\\ I_a&=g_{ак}(\dot{\varphi}_a-\dot{\varphi}_к)+S(\dot{\varphi}_c-\dot{\varphi}_к);\\ I_к&=g_{ск}(\dot{\varphi}_к-\dot{\varphi}_c)+g_{ак}(\dot{\varphi}_к-\dot{\varphi}_a)-S(\dot{\varphi}_c-\dot{\varphi}_к).\end{aligned}\qquad (а)$$

Системе соответствует матричное уравнение $[I]=[Y][\varphi]$, где неопределенная матрица узловых проводимостей

$$[Y]=\begin{array}{c|ccc|}
 & с & а & к\\
с & g_{ск} & 0 & -g_{ск}\\
а & S & g_{ак} & -(g_{ак}+S)\\
к & -(g_{ск}+S) & -g_{ак} & g_{ск}+g_{ак}+S
\end{array}.$$

§ **Д.4. Вывод расчетных формул метода.** На рис. Д.1, *г* изображен трехполюсник с внешними узлами *1*, *2*, *0*. Узел *0* заземлен. Входные зажимы *1*, *0*, выходные *2*, *0*. Потенциалы узлов φ_1 и φ_2. Положительные направления токов I_1 и I_2 указаны на схеме. Обозначим $Y_н$ — проводимость нагрузки, $Y_и$ проводимость источника питания.

Если для этой схемы составить уравнения по методу узловых потенциалов, а затем несколько преобразовать их, выделив в правой части уравнения для узла *1* слагаемое $(\dot{E}_и-\varphi_1)Y_и=I_1$, а для узла *2* слагаемое $-\varphi_2 Y_н=-I_2$, то получим

$$[Y][\dot{\varphi}]=[I],\qquad (Д.2)$$

где $[I]=\begin{bmatrix}I_1\\-I_2\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix}$. Укороченную матрицу узловых проводимостей получают из неопределенной, вычеркивая строку и столбец, соответствующие заземленному узлу. В состав матрицы $[Y]$ проводимости $Y_и$ и $Y_н$ не входят.

Решим уравнение (Д.2) относительно потенциалов внешних узлов φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}I_1+\frac{\Delta_{21}}{\Delta}(-I_2);\qquad (Д.3)$$

$$\varphi_2=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}I_1+\frac{\Delta_{22}}{\Delta}(-I_2),\qquad (Д.4)$$

где Δ — определитель матрицы $[Y]$; Δ_{km} — алгебраическое дополнение вместе с принадлежащим ему знаком; k — номер строки; m — номер столбца.

В левой части (Д.4) заменим φ_2 на $I_2/Y_н$ и решим уравнение относительно I_2:

$$I_2=I_1\frac{\Delta_{12}Y_н}{\Delta+\Delta_{22}Y_н}.$$

Входное сопротивление относительно узлов *1—0*

$$Z_{вх\,1-0}=\frac{\varphi_1}{I_1}=\frac{\Delta_{11}+Y_н\dfrac{\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta}}{\Delta+Y_н\Delta_{22}}.\qquad (Д.5)$$

Из теории определителей известно, что

$$a=(\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21})/\Delta=\Delta_{11,22},$$

где $\Delta_{11,22}$ — двойное алгебраическое дополнение. Им пользуются тогда, когда число строк и число столбцов определителя $\Delta > 2$. При оговоренном условии $\Delta_{11,22}$ получают из определителя системы Δ, вычеркивая 1-ю и 2-ю строки и 1-й и 2-й столбцы и умножая на $(-1)^{1+1+2+2} = 1$. Тогда

$$Z_{\text{вх } 1-0} = \frac{\Delta_{11} + Y_{\text{н}}\Delta_{11,22}}{\Delta + Y_{\text{н}}\Delta_{22}}. \tag{Д.6}$$

Передача по напряжению

$$K_U = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + Y_{\text{н}}\Delta_{11,22}}. \tag{Д.7}$$

Передача по току

$$K_I = \frac{\Delta_{12}Y_{\text{н}}}{\Delta + \Delta_{22}Y_{\text{н}}}. \tag{Д.8}$$

Пример 179. Определить передачу по напряжению K_U и по току K_I однокаскадного транзисторного усилителя с обратной связью, собранного по схеме с общим эмиттером (рис. Д.1, *д*).

Решение. Обозначим узлы схемы через *1* (*Б*), *2* (*К*), *0* (*Э*). Используя неопределенную матрицу транзистора (см. § Д.2), составим неопределенную матрицу схемы рис. Д.1, *д*, не включая в нее $Y_{\text{и}}$ и $Y_{\text{н}}$. Проводимость ветви обратной связи Y_0 войдет со знаком плюс в элементы матриц *1—1* и *2—2* и со знаком минус в элементы *1—2* и *2—1* (с такими же знаками, с какими проводимость входила бы в уравнение узловых потенциалов):

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 0 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
Y_{\text{бб}} + Y_0 & Y_{\text{бк}} - Y_0 & -(Y_{\text{бб}} + Y_{\text{бк}}) \\
Y_{\text{кб}} - Y_0 & Y_{\text{кк}} + Y_0 & -(Y_{\text{кб}} + Y_{\text{кк}}) \\
-(Y_{\text{бб}} + Y_{\text{кб}}) & -(Y_{\text{бк}} + Y_{\text{кк}}) & Y_{\text{бб}} + Y_{\text{бк}} + Y_{\text{кб}} + Y_{\text{кк}}
\end{bmatrix}
\end{array}.$$

Сумма элементов любой строки и любого столбца неопределенной матрицы равна нулю. Так как узел 0 заземлен, то вычеркиваем 0-строку и 0-столбец. Получим укороченную матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
Y_{\text{бб}} + Y_0 & Y_{\text{бк}} - Y_0 \\
Y_{\text{кб}} - Y_0 & Y_{\text{кк}} + Y_0
\end{bmatrix}
\end{array}.$$

Определитель ее $\Delta = (Y_{\text{бб}} + Y_0)(Y_{\text{кк}} + Y_0) - (Y_{\text{кб}} - Y_0)(Y_{\text{бк}} - Y_0)$.

Алгебраические дополнения:

$$\Delta_{12} = Y_{\text{кб}} - Y_0; \quad \Delta_{11} = Y_{\text{кк}} + Y_0; \quad \Delta_{22} = Y_{\text{бб}} + Y_0.$$

Так как число строк и число столбцов матрицы равно двум, то в этом простом примере a подсчитываем, не прибегая к двойному алгебраическому дополнению $\Delta_{11,22}$:

$$a = (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21})/\Delta = 1.$$

Далее определяем искомые передачи:

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + aY_{\text{н}}} = \frac{Y_{\text{кб}} - Y_0}{Y_{\text{кк}} + Y_0 + Y_{\text{н}}};$$

$$K_I = \frac{\Delta_{12}Y_{\text{н}}}{\Delta + \Delta_{22}Y_{\text{н}}} = \frac{Y_{\text{н}}(Y_{\text{кб}} - Y_0)}{(Y_{\text{бб}} + Y_0)(Y_{\text{кк}} + Y_0) - (Y_{\text{кб}} - Y_0)(Y_{\text{бк}} - Y_0) + Y_{\text{н}}(Y_{\text{бб}} + Y_0)}.$$

Формула для K_I может быть упрощена, если оценить порядок малости отдельных слагаемых знаменателя.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

§ Е.1. Огибающая переходной функции. В § 9.4 было показано, что при воздействии на вход четырехполюсника, обладающего переходной функцией $h(t)$, синусоидальным напряжением единичной амплитуды (рис. Е.1, *а*) $u_1(t)=1\cdot\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{j\omega t}$ напряжение на выходе его определится по формуле

$$u_2(t)=\operatorname{Im}\left\{\left[h(0)+\int_0^t h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}\right\}. \tag{Е.1}$$

Если ввести обозначение

$$a(\omega,\ t)=h(0)+\int_0^t h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau, \tag{Е.2}$$

то выходное напряжение

$$u_2(t)=\operatorname{Im}\left[a(\omega,\ t)\,e^{j\omega t}\right], \tag{Е.3}$$

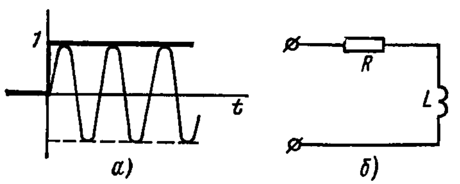


Рис. Е.1

где $a(\omega,\ t)$ представляет собой огибающую переходной функции при воздействии на вход четырехполюсника синусоидального напряжения единичной амплитуды.

Если вместо переходной функции $h(t)$ в формулу (Е.2) подставить входную или взаимную проводимость $g(t)$, то под $a(\omega,\ t)$ следует понимать *огибающую переходной проводимости*, а вместо $u_2(t)$ формула (Е.3) будет определять ток входной или какой-либо другой ветви.

В общем случае $a(\omega,\ t)$ представляет собой комплексную величину и может быть записана следующим образом:

$$a(\omega,\ t)=m(\omega,\ t)+jn(\omega,\ t)=q(\omega,\ t)\,e^{j\varphi(\omega,\ t)},$$

где

$$q(\omega,\ t)=\sqrt{m^2(\omega,\ t)+n^2(\omega,\ t)},\quad \varphi(\omega,\ t)=\operatorname{arctg}\frac{n(\omega,\ t)}{m(\omega,\ t)}.$$

Пример 180. Найти огибающую переходной проводимости для схемы рис. Е.1, *б*.

Решение. Переходная проводимость для этой схемы

$$g(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

В соответствии с (Е.2) $a(\omega,\ t)=g(0)+\int_0^t g'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$. Но $g(0)=0$. Следовательно,

$$a(\omega,\ t)=\frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{1}{R+j\omega L}\left[1-e^{-\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}\right].$$

В показательной форме

$$a(\omega,\ t)=\frac{e^{-j\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t+je^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right).$$

Но

$$1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t+je^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t=$$

$$=\sqrt{\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t\right)^2+\left(e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right)^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t}{1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t}}.$$

Окончательно получим

$$a(\omega,\ t)=\frac{\sqrt{\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t\right)^2+\left(e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,e^{j\varphi(\omega,\ t)},$$

где

$$\varphi(\omega,\ t)=\mathrm{arctg}\frac{e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t}{1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t}-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

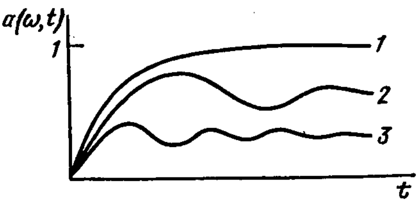


Рис. Е. 2

Чем больше ω, тем меньше установившееся значение модуля $a(\omega,\ t)$.

На рис. Е.2 изображены три кривые, которые характеризируют изменение модуля $a(\omega,\ t)$ с увеличением ω. Для кривой 1 $\omega=\omega_1=0$; для кривой 2 $\omega=\omega_2>\omega_1$; для кривой 3 $\omega=\omega_3>\omega_2$.

§ Е.2. Интеграл Дюамеля для огибающей. Определение реакции линейной системы на амплитудно-модулированное синусоидальное колебание

$$U_m(t)\sin\omega t=\mathrm{Im}[U_m(t)\,e^{j\omega t}]$$

производится путем расчета по огибающей.

С этой целью в формулу

$$u_2(t)=h(0)\,u(t)+\int_0^t u(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau \qquad (Е.4)$$

вместо $u(t-\tau)$ подставим $\mathrm{Im}\,[U_m(t-\tau)\,e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}]$.

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{j\omega t}$, не зависящий от τ, и, воспользовавшись тем, что сумма мнимых частей равна мнимой части суммы, получим напряжение на выходе системы

$$u_2(t)=\mathrm{Im}\left\{\left[h(0)\,U_m(t)+\int_0^t h'(\tau)\,U_m(t-\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}\right\}. \qquad (Е.5)$$

Множитель в квадратных скобках формулы (Е.5) представляет собой огибающую выходного напряжения (тока). Этот множитель можно переписать в более удобном для использования виде, если учесть, что согласно (Е.2) $h(0)=a(\omega,\ 0)$ и

$$\frac{da(\omega,\ t)}{dt}=a'(\omega,\ t)=h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}.$$

Заменив в (Е.5) $h(0)$ на $a(\omega,\ 0)$ и $h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}$ на $a'(\omega,\ \tau)$, получим

$$u_2(t)=\mathrm{Im}\,\{A(\omega,\ t)\,e^{j\omega t}\}, \qquad (Е.6)$$

где $A(\omega,\ t)$ — огибающая выходного напряжения;

$$A(\omega,\ t)=a(\omega,\ 0)\,U_m(t)+\int_0^t a'(\omega,\ \tau)\,U_m(t-\tau)\,d\tau. \qquad (Е.7)$$

Формула (Е.7) для огибающей полностью повторяет формулу (Е.4) интеграла Дюамеля для мгновенных значений. Поэтому формулу (Е.7) называют *интегралом Дюамеля для огибающей*.

Формула (Е.7) весьма существенна, так как она дает возможность исследовать макроструктуру переходных процессов, не вдаваясь в мелкие подробности, имеющие место внутри каждого периода вынуждающей силы.

Пример 181. Определить закон изменения во времени огибающей тока в цепи рис. Е.1, *б* при воздействии на нее напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$, где $U_m(t) = kt$ (линейно нарастающая амплитуда).

Решение. Значение $a(\omega, t)$ возьмем из § Е.1:

$$a(\omega, t) = \frac{1 - e^{-qt}}{R + j\omega L}; \quad q = \frac{R}{L} + j\omega.$$

Воспользуемся формулой (Е.7). Первое слагаемое в ней выпадает, так как $a(\omega, 0) = 0$. Найдем $a'(\omega, \tau)$:

$$a'(\omega, \tau) = \frac{1}{L} e^{-q\tau}; \quad U_m(t - \tau) = k(t - \tau).$$

Огибающая амплитуд тока

$$A(\omega, t) = \int_0^t a'(\omega, \tau)\, U_m(t - \tau)\, d\tau = \frac{k}{L} \int_0^t (t - \tau)\, e^{-q\tau} d\tau = \frac{kt}{L} \int_0^t e^{-q\tau} d\tau -$$

$$- \frac{k}{L} \int_0^t \tau e^{-q\tau} d\tau = -\frac{kt}{Lq} [e^{-qt} - 1] + \frac{k}{L} \left| \frac{\tau}{q} e^{-q\tau} + \frac{1}{q^2} e^{-q\tau} \right|_0^t = -\frac{k}{Lq^2} (1 - e^{-q\tau}) + \frac{kt}{Lq} =$$

$$= \frac{kt}{R + j\omega L} + \frac{kL}{(R + j\omega L)^2} (e^{-qt} - 1)$$

или

$$A(\omega, t) = \frac{kL}{R^2 + (\omega L)^2} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{Rt}{L} + e^{-\frac{R}{L}t} \cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi\right]^2 + \left[\omega t + e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi\right]^2} \times$$

$$\times e^{-j\beta(\omega, t)}, \tag{Е.8}$$

где

$$\beta(\omega, t) = \operatorname{arctg} \frac{\omega t + e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi}{\frac{R}{L} t + e^{-\frac{R}{L}t} \cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

§ Е.3. Теорема Котельникова. Функцией времени с ограниченным спектром называют функцию, спектр которой ограничен частотами $0 - f_c$, т. е. в спектре ее нет частот выше f_c. Применительно к таким функциям В. А. Котельниковым в 1933 г. была сформулирована следующая теорема: «Любую функцию времени $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_c, можно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_c)$ секунд».

Эта теорема является основой различных методов импульсной связи. Она теоретически обосновывает возможность передачи непрерывных сообщений дискретными значениями. Доказательство проводится следующим образом.

Функцию времени определяют через ее спектр $G(j\omega)$ так:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

где

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Поскольку для функции времени с ограниченным спектром $G(j\omega) = 0$ при $\omega > \omega_c$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{E.9}$$

В свою очередь, $G(j\omega)$ в интервале от $-\omega_c$ до ω_c может быть представлев рядом Фурье по частотам (период по частоте равен $2\omega_c$):

$$G(j\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} M_k e^{j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}}, \tag{E.10}$$

где k может принимать целочисленные значения от $-\infty$ до ∞.

Коэффициент ряда Фурье

$$M_k = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\, e^{-j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}}\, d\omega. \tag{E.11}$$

Подставим (E.10) в (E.9):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} M_k e^{j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}} \right) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} M_k \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)}\, d\omega,$$

где

$$\frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)}\, d\omega = \frac{1}{t + \frac{k\pi}{\omega_c}} \cdot \frac{e^{j\omega_c\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)} - e^{-j\omega_c\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)}}{2j} = \frac{\sin \omega_c\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)}{t + \frac{k\pi}{\omega_c}}.$$

Таким образом,

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} M_k \frac{\sin \omega_c\left(t + \frac{k\pi}{\omega_c}\right)}{t + \frac{k\pi}{\omega_c}}. \tag{E.12}$$

В формуле (E.9) придадим t значение $-k\pi/\omega_c$. Получим

$$f\left(-\frac{k\pi}{\omega_c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\, e^{-j\frac{k\pi}{\omega_c}}\, d\omega. \tag{E.13}$$

Сопоставим (E.11) и (E.13). Имеем $M_k = \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_c}\right) = \Delta t f(-k\,\Delta t)$.

Подставим найденное выражение для M_k в формулу (E.12) и изменим знаки перед k, что возможно, поскольку суммирование производится по всем k от $-\infty$ до ∞. Получим

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(k\,\Delta t)\,\frac{\sin\omega_c(t-k\,\Delta t)}{\omega_c(t-k\,\Delta t)}. \tag{E.14}$$

Отсюда следует, что функция времени $f(t)$ может быть представлена рядом (E.14), коэффициентами которого являются значения функции, взятые через интервал времени $\Delta t=\pi/\omega_c=1(2f_c)$. Рис. E.3 является графическим пояснением к формуле (E.14). Поскольку $\sin x/x=1$ при $x\to 0$ и равно 0 при $x=k\pi$, то при всех $t=k\pi$ сумма в правой части (E.14) принимает значения $f(k\,\Delta t)$.

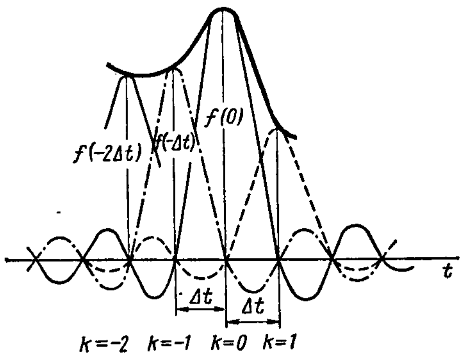


Рис. E.3

Таким образом, для передачи за время $0-T$ N дискретных значений через равностоящие интервалы времени требуется полоса частот $f_c=N/2T$.

Физически можно пояснить, почему для передачи N дискретных значений некоторой функции через равностоящие интервалы времени $\Delta t=T/N$ число требуемых гармоник в 2 раза меньше частоты $1/\Delta t=N/T$. Положим, что рассматриваемая функция имеет период T и что ее выразили обычным рядом Фурье из $N/2$ гармоник. Каждая гармоника ряда Фурье определяется двумя значениями — величиной амплитуды и величиной фазы. Таким образом, у $N/2$ гармоник ряда Фурье неизвестно $N/2$ амплитуд и $N/2$ фаз. Всего неизвестных $N/2+N/2=N$. Для однозначного определения N неизвестных нужно было бы составить N уравнений для всех N дискретных моментов времени, для которых известны значения функции.

Таким образом, N равностоящих значений функций определяют $N/2$ гармоник ряда Фурье и, наоборот, для получения N значений функции достаточно $N/2$ гармоник ряда Фурье.

Строго говоря, теорема Котельникова может быть применена к функциям времени с ограниченным спектром. Но практически ее применяют к функциям времени с неограниченным спектром.

Применение теоремы Котельникова для приближенного представления функций с неограниченным спектром основано на предположении о том, что спектральная плотность этой функции при частотах, бо́льших ω_c, хотя и не равна нулю, но остается достаточно малой по сравнению со значениями спектральной плотности в интервале частот от $\omega=0$ до $\omega=\omega_c$. За счет малости спектральной плотности в диапазоне частот от $\omega=\omega_c$ до $\omega=\infty$ влияние этой части спектра на процесс в целом незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

а) *Учебники*

1. Теоретические основы электротехники. Ч. I — Атабеков Г. И. «Энергия», 1970. Ч. II — Атабеков Г. И. и др. «Энергия», 1970.
2. Зевеке Г. В. и др. Основы теории цепей. «Энергия», 1975.
3. Теоретические основы электротехники. Под ред. П. А. Ионкина. Ч. I и II. «Высшая школа», 1975.
4. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Т. I и II. «Энергия», 1974.
5. Поливанов К. М. Линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами. «Энергия», 1972. Жуховицкий Б Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Ч. II. «Энергия», 1972.

б) *Учебные пособия и монографии по линейным цепям*

6. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
7. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. «Высшая школа», 1974.
8. Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. А. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.
9. Голдман С. Теория информации. ИЛ, 1957.
10. Деруссо П. и др. Пространство состояний в теории управления. «Наука», 1970.
11. Основы инженерной электрофизики. Ч. II. Под ред. П. А. Ионкина. «Высшая школа», 1972.
12. Круг К. А. Переходные и установившиеся процессы в линейных электрических цепях. Госэнергоиздат, 1948.
13. Мезон С., Цеммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, 1963.
14. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. «Высшая школа», 1972.
15. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. «Высшая школа», 1976.
16. Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И. Переходные процессы и обобщенные функции. «Наука», 1966.
17. Харкевич А. А. Основы радиотехники, Гос. изд-во по вопр. связи и радио, 1963.
18. Харкевич А. А. Спектры и анализ Гостехиздат, 1962.
19. Шварц Л. Математические методы для физических наук. «Мир», 1965.

в) *Учебные пособия и монографии по нелинейным цепям*

20. Андронов А. А. и др. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
21. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи. «Высшая школа», 1977.
22. Бессонов Л. А. Автоколебания в нелинейных электрических цепях. Госэнергоиздат, 1958.
23. Данилов Л. В. Электрические цепи с нелинейными R-элементами. «Связь», 1974.
24. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.
25. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования автоматических систем. Физматгиз, 1960.

г) *Задачники*

26. Бессонов Л. А. и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. «Высшая школа», 1975.
27. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория цепей). Под ред. К. М. Поливанова. «Энергия», 1973.
28. Сборник задач по расчету электрических цепей. Под ред. С. И. Куренева и М. И. Пинеса. «Высшая школа», 1967.
29. Шебес М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. «Высшая школа», 1973.

д) *Контрольные задания и методические указания*

30. Бессонов Л. А. и др. Контрольные задания и методические указания по курсу ТОЭ. «Высшая школа», 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Глава первая

Свойства линейных электрических цепей и методы их расчета. Электрические цепи постоянного тока

§ 1.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей 5
§ 1.2. Источник э. д. с. и источник тока 6
§ 1.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи 8
§ 1.4. Напряжение на участке цепи 8
§ 1.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего э.д.с.. 10
§ 1.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с. 10
§ 1.7. Законы Кирхгофа 10
§ 1.8. Составление уравнений для расчета тока в схемах с помощью законов Кирхгофа 11
§ 1.9. Заземление одной точки схемы 13
§ 1.10. Потенциальная диаграмма 13
§ 1.11. Энергетический баланс в электрических цепях 14
§ 1.12. Метод пропорциональных величин 14
§ 1.13. Метод контурных токов 15
§ 1.14. Принцип наложения и метод наложения 19
§ 1.15. Входные и взаимные проводимости ветвей. Входное сопротивление 20
§ 1.16. Теорема взаимности 22
§ 1.17. Теорема компенсации 23
§ 1.18. Линейные соотношения в электрических цепях 24
§ 1.19. Изменения токов ветвей, вызванное приращением сопротивления одной ветви (теорема вариаций) 26
§ 1.20. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники э. д. с. и источники тока, одной эквивалентной 27
§ 1.21. Метод двух узлов 29
§ 1.22. Метод узловых потенциалов 29
§ 1.23. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду 33
§ 1.24. Перенос источников э. д. с. и источников тока 36
§ 1.25. Активный и пассивный двухполюсники 36
§ 1.26. Метод эквивалентного генератора 37
§ 1.27. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке 39
§ 1.28. Передача энергии по линии передачи 40
Вопросы для самопроверки 42

Глава вторая

Электромагнитная индукция. Индуктивность и емкость как параметры электрических цепей

§ 2.1. Явление электромагнитной индукции 42
§ 2.2. Явление самоиндукции и э. д. с. самоиндукции. Индуктивность . . . 45
§ 2.3. Явление взаимоиндукции и э. д. с. взаимоиндукции. Взаимная индуктивность 48

§ 2.4. Энергия магнитного поля уединенной катушки 50
§ 2.5. Плотность энергии магнитного поля 51
§ 2.6. Магнитная энергия магнитносвязанных контуров 52
§ 2.7. Принцип взаимности взаимной индукции 53
§ 2.8. Коэффициент связи 54
§ 2.9. Закон электромагнитной инерции. Правило Ленца 55
§ 2.10. Емкость как параметр электрической цепи 56
Вопросы для самопроверки 58

Глава третья

Электрические цепи однофазного синусоидального тока

§ 3.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины 58
§ 3.2. Среднее и действующее значения синусоидально изменяющейся величины 59
§ 3.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы 60
§ 3.4. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости. Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения 60
§ 3.5. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени с помощью комплексной плоскости. Векторная диаграмма 62
§ 3.6. Мгновенная мощность 63
§ 3.7. Синусоидальный ток в активном сопротивлении 63
§ 3.8. Индуктивность в цепи синусоидального тока 64
§ 3.9. Конденсатор в цепи синусоидального тока 65
§ 3.10. Умножение вектора на j и на $-j$ 67
§ 3.11. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока . . 67
§ 3.12. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока 69
§ 3.13. Комплексная проводимость 69
§ 3.14. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей 70
§ 3.15. Применение логарифмической линейки для перехода от алгебраической формы записи комплекса к показательной и для обратного перехода . . 70
§ 3.16. Законы Кирхгофа в символической форме записи 73
§ 3.17. Применение к расчету цепей синусоидального тока методов, рассмотренных в главе «Электрические цепи постоянного тока» 73
§ 3.18. Применение векторных диаграмм при расчете электрических цепей синусоидального тока 74
§ 3.19. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости 78
§ 3.20. Топографическая диаграмма 78
§ 3.21. Активная, реактивная и полная мощности 81
§ 3.22. Выражение мощности в комплексной форме записи 82
§ 3.23. Измерение мощности ваттметром 83
§ 3.24. Двухполюсник в цепи синусоидального тока 84
§ 3.25. Резонансный режим работы двухполюсника 85
§ 3.26. Резонанс токов 86
§ 3.27. Компенсация сдвига фаз 88
§ 3.28. Резонанс напряжений 88
§ 3.29. Исследование работы схемы рис. 3.26, *а* при изменении частоты и индуктивности 89
§ 3.30. Частотная характеристика двухполюсника 90
§ 3.31. Канонические схемы. Эквивалентные двухполюсники 93
§ 3.32. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке 93
§ 3.33. Согласующий трансформатор 94
§ 3.34. Идеальный трансформатор 95
§ 3.35. Падение и потери напряжения в линии передачи энергии 95
§ 3.36. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитносвязанных катушек 95
§ 3.37. Последовательное соединение двух магнитносвязанных катушек . . . 97
§ 3.38. Определение взаимной индуктивности опытным путем 98

§ 3.39. Трансформатор. Вносимое сопротивление 98
§ 3.40. Резонанс в магнитносвязанных колебательных контурах 101
§ 3.41. «Развязывание» магнитносвязанных цепей 103
§ 3.42. Теорема о балансе активных и реактивных мощностей 103
§ 3.43. Определение дуальной цепи 105
§ 3.44. Преобразование исходной схемы в дуальную 106
Вопросы для самопроверки 108

Глава четвертая

Четырехполюсник и круговые диаграммы

§ 4.1. Определение четырехполюсника 108
§ 4.2. Шесть форм записи уравнений четырехполюсника 109
§ 4.3. Вывод уравнений в A-форме 109
§ 4.4. Определение коэффициентов A-формы записи уравнений четырехполюсника 111
§ 4.5. Т- и П-схемы замещения пассивного четырехполюсника 113
§ 4.6. Определение коэффициентов Y-, Z-, G-, B-форм записи уравнений четырехполюсника 114
§ 4.7. Определение коэффициентов одной формы через коэффициенты другой формы 114
§ 4.8. Применение различных форм записи уравнений четырехполюсника. Соединения четырехполюсников. Условия регулярности 115
§ 4.9. Характеристические сопротивления четырехполюсников 118
§ 4.10. Постоянная передачи и единицы измерения затухания 118
§ 4.11. Уравнения четырехполюсника, записанные через гиперболические функции 119
§ 4.12. Конвертор сопротивления 119
§ 4.13. Инвертор сопротивления 120
§ 4.14. Гиратор 120
§ 4.15. Активный четырехполюсник 120
§ 4.16. Построение дуги окружности по хорде и вписанному углу 121
§ 4.17. Уравнение дуги окружности в векторной форме записи 122
§ 4.18. Круговые диаграммы 123
§ 4.19. Круговая диаграмма тока для двух последовательно соединенных сопротивлений 123
§ 4.20. Круговая диаграмма напряжения для двух последовательно соединенных сопротивлений 125
§ 4.21. Круговая диаграмма для активного двухполюсника 125
§ 4.22. Круговая диаграмма для четырехполюсника 126
§ 4.23. Линейные диаграммы 128
Вопросы для самопроверки 128

Глава пятая

Электрические фильтры

§ 5.1. Назначение и типы фильтров 129
§ 5.2. Основы теории k-фильтров 130
§ 5.3. K-фильтры НЧ и ВЧ, полосовые и заграждающие k-фильтры 132
§ 5.4. Качественное определение k-фильтра 136
§ 5.5. Основы теории m-фильтров. Каскадное включение фильтров 136
§ 5.6. RC-фильтры 140
Вопросы для самопроверки 140

Глава шестая

Трехфазные цепи

§ 6.1. Трехфазная система э. д. с. 141
§ 6.2. Принцип работы трехфазного машинного генератора 141

§ 6.3. Трехфазная цепь. Расширение понятия фазы 142
§ 6.4. Основные схемы соединения трехфазных цепей, определение линейных и фазных величин 142
§ 6.5. Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами . . 144
§ 6.6. Преимущества трехфазных систем 145
§ 6.7. Расчет трехфазных цепей 145
§ 6.8. Соединение звезда—звезда с нулевым проводом 145
§ 6.9. Соединение нагрузки в треугольник 146
§ 6.10. Оператор a трехфазной системы 147
§ 6.11. Соединение звезда—звезда без нулевого провода 148
§ 6.12. Трехфазные цепи при наличии взаимоиндукции 148
§ 6.13. Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы . . . 149
§ 6.14. Измерение активной мощности в трехфазной системе 150
§ 6.15. Круговые и линейные диаграммы в трехфазных цепях 151
§ 6.16. Указатель последовательности чередования фаз 152
§ 6.17. Магнитное поле катушки с синусоидальным током 152
§ 6.18. Получение кругового вращающегося магнитного поля 153
§ 6.19. Принцип работы асинхронного двигателя 155
§ 6.20. Разложение несимметричной системы на системы нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз 155
§ 6.21. Понятие о методе симметричных составляющих 157
Вопросы для самопроверки 159

Глава седьмая

Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях

§ 7.1. Определение периодических несинусоидальных токов и напряжений . . 159
§ 7.2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений с помощью рядов Фурье 160
§ 7.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией 161
§ 7.4. О разложении в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм 162
§ 7.5. Графический (графо-аналитический) метод определения гармоник ряда Фурье 162
§ 7.6. Расчет токов и напряжений при несинусоидальных источниках питания 165
§ 7.7. Резонансные явления при несинусоидальных токах. 167
§ 7.8. Действующее значение несинусоидального тока и несинусоидального напряжения 168
§ 7.9. Среднее по модулю значение несинусоидальной функции 169
§ 7.10. Величины, на которые реагируют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах 170
§ 7.11. Активная и полная мощности несинусоидального тока 170
§ 7.12. Замена несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидальными 171
§ 7.13. Особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем 172
§ 7.14. Биения 176
§ 7.15. Модулированные колебания 177
§ 7.16. Расчет линейных цепей при воздействии модулированных колебаний 179
Вопросы для самопроверки 180

Глава восьмая

Переходные процессы в линейных электрических цепях

§ 8.1. Определение переходных процессов 180
§ 8.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами 181
§ 8.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений 181
§ 8.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивность и скачка напряжения на емкости 183

§ 8.5. Первый закон (правило) коммутации 184
§ 8.6. Второй закон (правило) коммутации 184
§ 8.7. Начальные значения величин 185
§ 8.8. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения 185
§ 8.9. Нулевые и ненулевые начальные условия 185
§ 8.10. Составление уравнений для свободных токов и напряжений 186
§ 8.11. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов 186
§ 8.12. Составление характеристического уравнения системы 187
§ 8.13. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе 189
§ 8.14. Основные и неосновные независимые начальные значения 190
§ 8.15. Определение степени характеристического уравнения 191
§ 8.16. Свойства корней характеристического уравнения 192
§ 8.17. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений 193
§ 8.18. Характер свободного процесса при одном корне 193
§ 8.19. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях 194
§ 8.20. Характер свободного процесса при двух равных корнях 194
§ 8.21. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях 195
§ 8.22. Некоторые особенности переходных процессов 195
§ 8.23. Переходные процессы, сопровождающиеся электрической искрой (дугой) 197
§ 8.24. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивность 197
§ 8.25. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях 198
§ 8.26. Определение классического метода расчета переходных процессов . . . 199
§ 8.27. Определение постоянных интегрирования в классическом методе 199
§ 8.28. О переходных процессах, при макроскопическом рассмотрении которых не выполняются законы коммутации. Обобщенные законы коммутации 208
§ 8.29. Логарифм как изображение числа 210
§ 8.30. Комплексные изображения синусоидальных функций 211
§ 8.31. Введение к операторному методу 211
§ 8.32. Преобразование Лапласа 211
§ 8.33. Изображение постоянной 212
§ 8.34. Изображение показательной функции e^{at} 212
§ 8.35. Изображение первой производной 213
§ 8.36. Изображение напряжения на индуктивности 214
§ 8.37. Изображение второй производной 214
§ 8.38. Изображение интеграла 214
§ 8.39. Изображение напряжения на конденсаторе 215
§ 8.40. Некоторые теоремы и предельные соотношения 216
§ 8.41. Закон Ома в операторной форме. Внутренние э.д.с. 217
§ 8.42. Первый закон Кирхгофа в операторной форме 219
§ 8.43. Второй закон Кирхгофа в операторной форме 219
§ 8.44. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в разделе синусоидального тока 220
§ 8.45. Последовательность расчета операторным методом 221
§ 8.46. Изображение функции времени в виде отношения $N(p)/[M(p)]$ двух полиномов по степеням p 222
§ 8.47. Переход от изображения к функции времени 223
§ 8.48. Разложение сложной дроби на простые 225
§ 8.49. Формула разложения 226
§ 8.50. Дополнения к операторному методу 229
§ 8.51. Переходная проводимость 230
§ 8.52. Понятие о переходной функции по напряжению 232
§ 8.53. Интеграл Дюамеля 234
§ 8.54. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля 236
§ 8.55. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения 237

§ 8.56. Сравнение различных методов расчета переходных процессов 238
§ 8.57. Дифференцирование электрическим путем 239
§ 8.58. Интегрирование электрическим путем 240
§ 8.59. Применение метода эквивалентного генератора для расчета переходных процессов 240
§ 8.60. Переходные процессы при воздействии импульсов напряжения 242
§ 8.61. Дельта-функция, единичная функция и их свойства. Импульсная переходная проводимость 243
§ 8.62. Обобщенные функции и их применение к расчету переходных процессов 245
§ 8.63. Дополняющие двухполюсники 246
§ 8.64. Понятие о передаточных функциях и частотных характеристиках звеньев и систем 246
§ 8.65. Системные функции и понятие о видах чувствительности 248
§ 8.66. Метод пространства состояний 249
Вопросы для самопроверки 254

Глава девятая

Интеграл Фурье. Спектральный метод

§ 9.1. Ряд Фурье в комплексной форме записи 255
§ 9.2. Спектр функции и интеграл Фурье 256
§ 9.3. Теорема Рейли 259
§ 9.4. Применение спектрального метода 260
§ 9.5. Определение переходной функции четырехполюсника через передаточную и передаточной через переходную 265
Вопросы для самопроверки 266

Глава десятая

Синтез электрических цепей

§ 10.1. Характеристика синтеза 266
§ 10.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполюсников 267
§ 10.3. Реализация двухполюсников лестничной (цепной) схемой 268
§ 10.4. Реализация двухполюсников путем последовательного выделения простейших составляющих 272
§ 10.5. Метод Бруне 276
§ 10.6. Понятие о минимально-фазовом и неминимально-фазовом четырехполюсниках 279
§ 10.7. Условия, накладываемые на параметры четырехполюсников и на передаточную функцию 280
§ 10.8. Синтез четырехполюсников Г-образными RC-схемами 283
§ 10.9. Четырехполюсник для фазовой коррекции 284
§ 10.10. Аппроксимация частотных характеристик 285
Вопросы для самопроверки 288

Глава одиннадцатая

Установившиеся процессы в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами

§ 11.1. Основные определения 289
§ 11.2. Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами 291
§ 11.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе 292

§ 11.4. Постоянная распространения и волновое сопротивление 294
§ 11.5. Формулы для определения комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в начале линии . . . 295
§ 11.6. Графическая интерпретация гиперболических синуса и косинуса от комплексного аргумента 296
§ 11.7. Формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в конце линии 296
§ 11.8. Падающие и отраженные волны в линии 297
§ 11.9. Коэффициент отражения 298
§ 11.10. Фазовая скорость 298
§ 11.11. Длина волны 299
§ 11.12. Линия без искажений 299
§ 11.13. Согласованная нагрузка 301
§ 11.14. Определение напряжения и тока при согласованной нагрузке . . . 301
§ 11.15. Коэффициент полезного действия линии передачи при согласованной нагрузке 301
§ 11.16. Входное сопротивление нагруженной линии 301
§ 11.17. Определение напряжения и тока в линии без потерь 302
§ 11.18. Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе 303
§ 11.19. Входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании на конце линии 303
§ 11.20. Входное сопротивление линии без потерь при реактивной нагрузке 304
§ 11.21. Определение стоячих электромагнитных волн 304
§ 11.22. Стоячие волны в линии без потерь при холостом ходе линии . . . 305
§ 11.23. Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии 306
§ 11.24. Четвертьволновый трансформатор 306
§ 11.25. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн 307
§ 11.26. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника 307
§ 11.27. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена 308
§ 11.28. Четырехполюсник заданного затухания 310
§ 11.29. Цепная схема 310
Вопросы для самопроверки 314

Глава двенадцатая

Переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределенными параметрами

§ 12.1. Общие сведения 314
§ 12.2. Исходные уравнения и их решение 315
§ 12.3. Падающие и отраженные волны на линиях 317
§ 12.4. Связь между функциями f_1, f_2 и функциями φ_1, φ_2 317
§ 12.5. Электромагнитные процессы при движении прямоугольной волны по линии 319
§ 12.6. Схема замещения для исследования волновых процессов в линиях с распределенными параметрами 320
§ 12.7. Подключение разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения 321
§ 12.8. Переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий 323
§ 12.9. Линия задержки 326
§ 12.10. Использование линий для формирования кратковременных импульсов 327
Вопросы для самопроверки 328

ЧАСТЬ II

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Глава тринадцатая

Нелинейные электрические цепи постоянного тока

§ 13.1. Основные определения 330
§ 13.2. Вольт-амперные характеристики нелинейных сопротивлений 330
§ 13.3. Общая характеристика методов расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока 332
§ 13.4. Последовательное соединение нелинейных сопротивлений 333
§ 13.5. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений 334
§ 13.6. Последовательно-параллельное соединение нелинейных сопротивлений 335
§ 13.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов 335
§ 13.8. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих НС и э.д.с., одной эквивалентной 337
§ 13.9. Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора 338
§ 13.10. Статическое и дифференциальное сопротивления 339
§ 13.11. Замена нелинейного сопротивления эквивалентным линейным сопротивлением и э.д.с. 340
§ 13.12. Стабилизатор тока 341
§ 13.13. Стабилизатор напряжения 342
§ 13.14. Усилитель постоянного напряжения 343
§ 13.15. Терморезисторы 344
Вопросы для самопроверки 345

Глава четырнадцатая

Магнитные цепи

§ 14.1. Подразделение веществ на две группы — ферромагнитные и неферромагнитные 345
§ 14.2. Основные величины, характеризующие магнитное поле 345
§ 14.3. Основные характеристики ферромагнитных материалов 346
§ 14.4. Потери, обусловленные гистерезисом 348
§ 14.5. Магнитномягкие и магнитнотвердые материалы 349
§ 14.6. Магнитодиэлектрики и ферриты 350
§ 14.7. Закон полного тока 350
§ 14.8. Магнитодвижущая (намагничивающая) сила 350
§ 14.9. Разновидности магнитных цепей 351
§ 14.10. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи 351
§ 14.11. Падение магнитного напряжения 352
§ 14.12. Вебер-амперные характеристики 353
§ 14.13. Построение вебер-амперных характеристик 353
§ 14.14. Законы Кирхгофа для магнитных цепей 355
§ 14.15. Применение к магнитным цепям всех методов, используемых для расчета электрических цепей с НС 357
§ 14.16. Определение м.д.с. неразветвленной магнитной цепи по заданному потоку 357
§ 14.17. Определение потока в неразветвленной магнитной цепи по заданной м.д.с. 358
§ 14.18. Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов 359
§ 14.19. Дополнительные замечания к расчету магнитных цепей 361
§ 14.20. Получение постоянного магнита 362
§ 14.21. Расчет магнитной цепи постоянного магнита 363
§ 14.22. Прямая и коэффициент возврата 364
§ 14.23. Магнитное сопротивление и магнитная проводимость участка магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи 365
§ 14.24. Пояснения к формуле $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$ 366
Вопросы для самопроверки 367

Глава пятнадцатая

Нелинейные электрические цепи переменного тока

§ 15.1. Подразделение нелинейных сопротивлений на три основные группы 368
§ 15.2. Общая характеристика нелинейных активных сопротивлений 368
§ 15.3. Общая характеристика нелинейных индуктивных сопротивлений 369
§ 15.4. Потери в сердечниках нелинейных индуктивностей, обусловленные вихревыми токами 369
§ 15.5. Потери в ферромагнитном сердечнике, обусловленные гистерезисом . . 370
§ 15.6. Схема замещения нелинейной индуктивности 371
§ 15.7. Общая характеристика нелинейных емкостных сопротивлений . . . 372
§ 15.8. Нелинейные сопротивления как генераторы высших гармоник тока и напряжения 373
§ 15.9. Основные преобразования, осуществляемые с помощью нелинейных электрических цепей 373
§ 15.10. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях 376
§ 15.11. Разделение нелинейных сопротивлений по степени симметрии характеристик относительно осей координат 377
§ 15.12. Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений 377
§ 15.13. Аппроксимация симметрических характеристик для мгновенных значений гиперболическим синусом 378
§ 15.14. Понятие о функциях Бесселя 379
§ 15.15. Разложение гиперболических синуса и косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье 380
§ 15.16. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидально меняющейся составляющих в ряд Фурье 381
§ 15.17. Некоторые общие свойства симметричных нелинейных сопротивлений 381
§ 15.18. Появление постоянной составляющей тока (напряжения, потока, заряда) на нелинейном элементе с симметричной характеристикой 383
§ 15.19. Типы характеристик нелинейных сопротивлений 383
§ 15.20. Характеристики для мгновенных значений 383
§ 15.21. Вольт-амперные характеристики по первым гармоникам 383
§ 15.22. Вольт-амперные характеристики для действующих значений 385
§ 15.23. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных сопротивлений по первым гармоникам 385
§ 15.24. Простейшая управляемая нелинейная индуктивность 386
§ 15.25. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам 389
§ 15.26. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам 391
§ 15.27. Основные сведения об устройстве транзистора 392
§ 15.28. Три основных способа включения транзисторов в схему 393
§ 15.29. Принцип работы транзистора в качестве управляемого сопротивления 393
§ 15.30. Вольт-амперные характеристики транзистора 395
§ 15.31. Транзистор в качестве усилителя тока 396
§ 15.32. Транзистор в качестве усилителя напряжения 397
§ 15.33. Транзистор в качестве усилителя мощности 398
§ 15.34. Связь между приращениями входных и выходных величин транзистора 398
§ 15.35. Схема замещения транзистора для малых приращений 399
§ 15.36. Графический расчет схем на транзисторах 400
§ 15.37. Основные сведения о трехэлектродной лампе 402
§ 15.38. Вольт-амперные характеристики трехэлектродной лампы для мгновенных значений 403
§ 15.39. Аналитическое выражение сеточной характеристики электронной лампы 404
§ 15.40. Связь между малыми приращениями входных и выходных величин электронной лампы 405
§ 15.41. Схема замещения электронной лампы для малых приращений 405
§ 15.42. Построение зависимости вход — выход для электронной лампы при больших сигналах 407

§ 15.43. Тиристор — управляемый полупроводниковый диод 407
§ 15.44. Общая характеристика методов анализа и расчета нелинейных электрических цепей переменного тока 408
§ 15.45. Графический метод при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений 409
§ 15.46. Аналитический метод при использовании характеристики нелинейного сопротивления для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации 410
§ 15.47. Аналитический (графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений 410
§ 15.48. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования вольт-амперных характеристик для действующих значений 412
§ 15.49. Аналитический метод расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам 412
§ 15.50. Расчет с помощью линейных схем замещения 413
§ 15.51. Расчет электрических цепей, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых имеют почти прямоугольную кривую намагничивания 413
§ 15.52. Расчет электрических цепей, содержащих нелинейные емкости с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой 415
§ 15.53. Субгармонические колебания 416
§ 15.54. Выпрямление переменного напряжения 417
§ 15.55. Ламповый генератор 419
§ 15.56. Автомодуляция 422
§ 15.57. Определение феррорезонансных цепей 423
§ 15.58. Построение вольт-амперной характеристики последовательной феррорезонансной цепи 424
§ 15.59. Триггерный эффект в последовательной феррорезонансной цепи. Феррорезонанс напряжений 424
§ 15.60. Вольт-амперная характеристика параллельного соединения емкости и катушки со стальным сердечником. Феррорезонанс токов 425
§ 15.61. Триггерный эффект в параллельной феррорезонансной цепи 426
§ 15.62. Частотные характеристики нелинейных цепей 427
§ 15.63. Применение символического метода и построение векторных и топографических диаграмм для нелинейных цепей 428
§ 15.64. Векторная диаграмма нелинейной индуктивности 430
§ 15.65. Определение намагничивающего тока 431
§ 15.66. Определение тока потерь 432
§ 15.67. Основные соотношения для трансформатора со стальным сердечником 433
§ 15.68. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником . . 436
§ 15.69. Метод интегральных уравнений 437
§ 15.70. Метод малого параметра 438
Вопросы для самопроверки 441

Глава шестнадцатая

Переходные процессы в нелинейных электрических цепях

§ 16.1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов 442
§ 16.2. Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла 443
§ 16.3. Расчет методом интегрируемой нелинейной аппроксимации 444
§ 16.4. Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации 445
§ 16.5. Метод расчета, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой 447
§ 16.6. Расчет переходных процессов в схемах с несколькими нелинейными сопротивлениями 449
§ 16.7. Метод медленно меняющихся амплитуд 450
§ 16.8. Перемагничивание ферритовых сердечников импульсами тока 454

§ 16.9. Определение фазовой плоскости и характеристики областей ее применения . . . 455
§ 16.10. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл 456
§ 16.11. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости 456
§ 16.12. Изоклины. Особые точки. Построение фазовых траекторий 457
Вопросы для самопроверки 459

Глава семнадцатая

Основы теории устойчивости режимов работы нелинейных цепей

§ 17.1. Устойчивость «в малом» и «в большом». Устойчивость по Ляпунову . . 459
§ 17.2. Общие основы исследования устойчивости «в малом» 461
§ 17.3. Исследование устойчивости состояния равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой 463
§ 17.4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике 464
§ 17.5. Исследование устойчивости состояния равновесия в генераторе релаксационных колебаний 466
§ 17.6. Исследование устойчивости периодического движения в ламповом генераторе синусоидальных колебаний 467
Вопросы для самопроверки 468

Глава восемнадцатая

Электрические цепи с переменными во времени параметрами

§ 18.1. Элементы цепей 468
§ 18.2. Некоторые общие свойства электрических цепей 469
§ 18.3. Методика расчета электрических цепей в установившемся режиме 470
§ 18.4. Параметрические колебания 473
§ 18.5. Параметрический генератор и параметрический усилитель 475
Вопросы для самопроверки 476

Приложения к частям I и II

Приложение А. Направленные и ненаправленные графы.

§ А.1. Характеристика двух направлений в теории графов 477
I. Направленные графы 477
§ А.2. Основные определения 477
§ А.3. Переход от изучаемой системы к направленному графу. 478
§ А.4. Правила, используемые для упрощения направленных графов 481
§ А.5. Общая формула для передачи графа 483
§ А.6. Вывод формулы для передачи графа 484
II. Ненаправленные графы 487
§ А.7. Определение и основная формула 487
§ А.8. Определение числа деревьев графа 488
§ А.9. Разложение определителя по произвольно выбранному узлу 489
§ А.10. Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами 489
§ А.11. Разложение определителя по произвольно выбранной ветви 491
§ А.12. Применение основной формулы 491
§ А.13. Сопоставление направленных и ненаправленных графов 494

Приложение Б. Матрицы в электротехнике

§ Б.1. Основные свойства матриц 494
§ Б.2. Общая характеристика применения матриц в электротехнике 496
§ Б.3, Основы матричной теории графов 496

Приложение В. Исследование процессов в неэлектрических системах на электрических моделях-аналогах

Приложение Г. Случайные процессы в электрических цепях

§ Г.1. Случайные процессы. Корреляционные функции 502
§ Г.2. Прямое и обратное преобразования Фурье для случайных функций времени 504
§ Г.3. Белый шум и его свойства 504
§ Г.4. Источники внутренних шумов в электрических цепях 505

Приложение Д. Расчет электронных и транзисторных схем методом неопределенной матрицы и двойного алгебраического дополнения

§ Д.1. Y-параметры транзистора 506
§ Д.2. Неопределенная матрица узловых проводимостей транзистора 507
§ Д.3. Неопределенная матрица узловых проводимостей электронной лампы 507
§ Д.4. Вывод расчетных формул метода 508

Приложение Е. Интеграл Дюамеля для огибающей. Теорема Котельникова

§ Е.1. Огибающая переходной функции 510
§ Е.2. Интеграл Дюамеля для огибающей 511
§ Е.3. Теорема Котельникова 512

Литература 515

Лев Алексеевич Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Редактор Е. М. Романчук. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Технический редактор Е. И. Герасимова. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 1088

Изд. № ЭР—235. Сдано в набор 22.12.77. Подп. в печать 11.04.78. Формат 60×90[1]/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 33 усл. печ. л. 33,57 уч.-изд. л. Тираж 125 000 экз. Зак. № 1658. Цена 1 р. 30 к.
Издательство «Высшая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14
Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.