ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

С.А.БАШАРИН, В.В.ФЕДОРОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
в области энергетики и электротехники
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов
654500 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии»

Москва
ACADEMA
2004

УДК 621.3
ББК 31.21.я73
Б33

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения *А. К. Явленский*;
д-р техн. наук, проф. Санкт-Петербургского государственного политехнического университета *В. Л. Чечурин*

Башарин С. А.
Б33 Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / С. А. Башарин, В. В. Федоров. — М.: Издательский центр «Академия», 2004. — 304 с.
ISBN 5-7695-1261-X

Изложены основы теории электрических цепей и электромагнитного поля. Наряду с традиционными материалами в учебник вошли новые положения теории матричного анализа электрических цепей, распространения электромагнтных волн вдоль направляющих систем и в многослойных средах. Приведены примеры решения практических задач в области электротехники.

Для студентов высших технических учебных заведений.

УДК 621.3
ББК 31.21.я73

Учебное издание

Башарин Сергей Артемьевич, Федоров Виктор Викторович

Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля

Учебное пособие

Редактор *В. Н. Путилов*
Технические редакторы *О. С. Александрова, Е. Ф. Коржуева*
Компьютерная верстка: *В. Н. Канивец*
Корректоры *Е. Ю. Куринских, К. М. Корепанова*

Изд. № А-734-I. Подписано в печать 27.07.2004. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 19,0.
Тираж 5100 экз. Заказ № 13665.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.004796.07.04 от 20.07.2004.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 328. Тел./факс: (095)330-1092, 334-8337.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-7695-1261-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов высших технических учебных заведений, изучающих курс «Теоретические основы электротехники».

В основу курса положены материалы ранее изданных учебников по теории электрических цепей и теории электромагнитного поля, дополненные положениями о современных методах теоретической электротехники. Этот курс рассчитан как на специалистов в данной области, так и на людей, впервые изучающих теоретические основы электротехники. В него наряду с традиционными материалами включены новые положения анализа электрических цепей с применением матричных методов, ориентированных на современные компьютерные технологии.

Состоит из двух разделов: «Основы теории электрических цепей» и «Основы теории электромагнитного поля».

Первый раздел базируется на трудах сотрудников кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, в частности П. Н. Матханова [1, 2]. Фундаментальные научные разработки, содержащиеся в его работах, изложены в упрощенной форме и дополнены материалами по теоретической электротехнике Г. И. Атабекова [3]. Кроме того, в этот раздел включено описание некоторых современных методов анализа электрических цепей, разработанных в последнее время в области теоретической электротехники [4...12].

Во втором разделе рассмотрены основные положения теории электромагнитного поля. В нем последовательно изложены фундаментальные законы физики, относящиеся к электромагнитному полю. На их основе даны определения основных понятий векторов напряженности электрического и магнитного полей, электрической и магнитной индукций, скалярных и векторных потенциалов, электрической емкости, индуктивности и проводимости. Из анализа законов выводятся уравнения Максвелла и полная система дифференциальных и интегральных уравнений электромагнитного поля.

В разделе рассмотрены волновые уравнения и граничные условия, которые должны выполняться при их решении для векторов напряженности и индукции электромагнитного поля.

Отдельно приведен анализ группы потенциальных полей, в которых определение напряженности сводится к решению скалярных уравнений Пуассона или Лапласа для потенциалов. Кроме того, рассмотрены различные методы решения скалярных уравнений. Большая часть раздела посвящена переменным электромагнитным полям, их свойствам, отражению волн от границ, распространению их в многослойных средах, излучению и экранированию. Ряд задач решается методами электрических цепей.

Изложенные материалы позволяют читателю самостоятельно на основе фундаментальной теории электрических цепей и электромагнитного поля подойти к решению практических задач.

Наряду с этим, приводится множество примеров решения практических задач в области электротехники. Другие примеры решения типовых задач содержатся в рекомендуемой литературе по этому вопросу [13 ... 15].

В конце книги помещены некоторые сведения по векторному анализу, необходимые для успешного освоения материала.

Первый раздел написан проф. С. А. Башариным, второй — проф. В. В. Федоровым.

Раздел I
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Электрический ток, электрическое напряжение, энергия при протекании тока, мощность электрического тока

Электрическим током называется явление упорядоченного движения электрических зарядов. За направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов, как это условно показано на рис. 1.1. Величина электрического тока представляет собой скорость изменения заряда во времени и может быть определена из выражения

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \quad \text{Кл/с} = \text{А}.$$

В системе СИ электрический ток измеряется в амперах.

Электрический ток обозначается латинскими буквами i или I. Символом $i(t)$ обозначается «мгновенное» значение тока, т. е. ток произвольного вида в любой момент времени. В частном случае он может быть постоянным, например ток i_1 (рис. 1.2) или переменным, например ток i_2. Прописной латинской буквой I обозначается, как правило, постоянное значение тока.

Электрический ток можно условно рассматривать как алгебраическую величину, знак которой зависит от выбранного на-

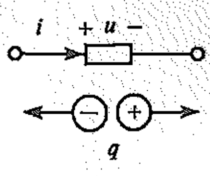


Рис. 1.1. Направление электрического тока

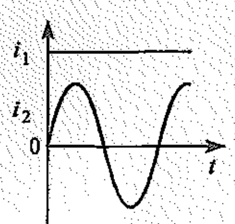


Рис. 1.2. Виды электрического тока

Рис. 1.3. Изменение направления

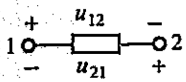


Рис. 1.4. Изменение полярности напряжения

Рис. 1.5. Согласование напряжения и тока

правления. На рис. 1.3 показаны токи в элементе цепи, равные по величине, но различные по направлению: $i_2 = -i_1$.

При протекании тока, как и при всяком перемещении зарядов, происходит процесс преобразования энергии. Количество энергии, которое необходимо затратить на перемещение единицы заряда из одной точки в другую, называется *электрическим напряжением.*

Электрическое напряжение обозначается латинской буквой u. Символом $u(t)$ обозначается «мгновенное» значение напряжения, а прописной латинской буквой U обозначается, как правило, постоянное напряжение.

Электрическое напряжение, как и ток, можно условно считать алгебраической величиной, знак которой зависит от выбранной полярности. На рис. 1.4 показаны два напряжения, равные по величине, но различной полярности: $u_{12} = -u_{21}$.

Если ток в элементе электрической цепи протекает от знака «+» напряжения к знаку «–», то условно считается, что он согласован с напряжением. На рис. 1.5 показан элемент электрической цепи, в котором ток согласован с напряжением.

Величина напряжения определяется из выражения

$$u = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}, \text{ Дж/Кл} = \text{В}.$$

Электрическое напряжение в системе СИ измеряется в вольтах.

Энергия при протекании электрического тока определяется из выражения

$$w = \int_{-\infty}^{t} ui\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t} p\mathrm{d}t, \text{ Дж}.$$

Скорость изменения энергии во времени определяет мощность при протекании электрического тока:

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = ui, \text{ Дж/с} = \text{Вт}.$$

Мощность — величина алгебраическая, знак которой зависит от знаков тока и напряжения. Если мощность положительна, это означает, что энергия потребляется или запасается пассивными элементами цепи, если отрицательна, энергия возвращается в источник.

1.2. Электрическая цепь и ее элементы

Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для протекания по ним электрического тока. Эти устройства называются элементами цепи. Элементы цепи можно условно объединить в группы, как это показано на рис. 1.6.

Источниками электрической энергии называют устройства, преобразующие различные виды энергии, например механическую или химическую, в энергию электрического тока.

При описании электрических цепей реальные физические элементы заменяются идеализированными элементами, процессы в которых удобно представить с помощью математических выражений. С такой позиции источники энергии в цепи можно условно разделить на два типа: идеальный источник напряжения и идеальный источник тока.

1. *Идеальный источник напряжения*, напряжение на зажимах которого не зависит от величины протекающего через него тока. Внутреннее сопротивление идеального источника напряжения можно условно принять равным нулю. Обозначение такого источника и его вольт-амперная характеристика приведены на рис. 1.7.

Идеализация источника напряжения накладывает ограничения на его использование в электрических цепях. На рис. 1.8 приведены примеры некорректного (недопустимого) включения идеальных источников напряжения.

2. *Идеальный источник тока*, величина протекающего тока через который не зависит от напряжения на его зажимах. Внутреннее сопротивление такого источника можно условно принять рав-

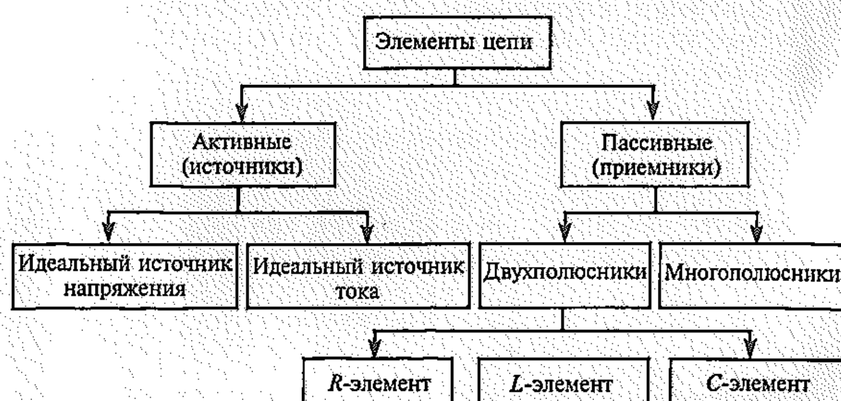


Рис. 1.6. Элементы электрической цепи

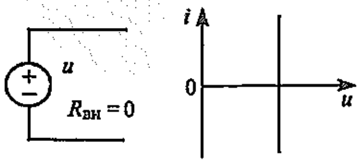


Рис. 1.7. Идеальный источник напряжения и его вольт-амперная характеристика

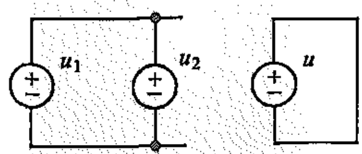


Рис. 1.8. Некорректное включение идеальных источников напряжения

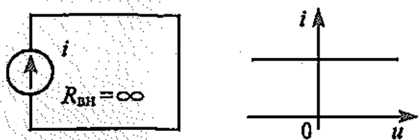


Рис. 1.9. Идеальный источник тока и его вольт-амперная характеристика

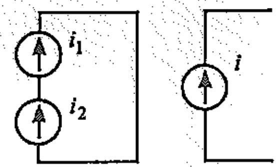


Рис. 1.10. Некорректное включение идеальных источников тока

ным бесконечности. Обозначение идеального источника тока и его вольт-амперная характеристика приведены на рис. 1.9.

Идеализация источника тока также накладывает ограничения на его использование в электрических цепях. На рис. 1.10 приведены примеры некорректного включения идеальных источников тока.

Приемниками называются устройства, потребляющие энергию или преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии. Приемники можно условно разделить на несколько групп, в числе которых двухполюсники и многополюсники.

Двухполюсниками называются цепи, имеющие два зажима для подключения (полюса). Основными идеальными пассивными двухполюсниками являются идеальные *R*-, *L*- и *C*-элементы.

Идеальным R-элементом (резистивным элементом, или резистором) называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую. Изображение идеального *R*-элемента показано на рис. 1.11.

Связь между напряжением и током в *R*-элементе называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Для линейного *R*-элемента вольт-амперная характеристика определяется законом Ома: $i = \dfrac{u}{R}$ или $u = iR$.

Вольт-амперная характеристика линейного *R*-элемента приведена на рис. 1.12. Основным параметром идеального *R*-эле-

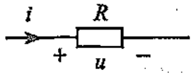


Рис. 1.11. Идеальный R-элемент

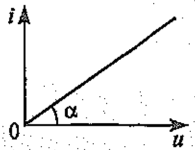


Рис. 1.12. Вольт-амперная характеристика линейного R-элемента

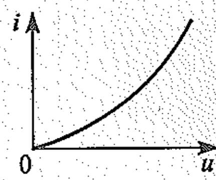


Рис. 1.13. Вольт-амперная характеристика нелинейного R-элемента

мента является его сопротивление. В системе СИ сопротивление измеряется в омах:

$$R = \frac{u}{i}, \quad \text{В/А} = \text{Ом}.$$

Кроме сопротивления, в качестве параметра R-элемента можно использовать его проводимость. *Проводимость* является обратной величиной по отношению к сопротивлению. В системе СИ проводимость измеряется в сименсах.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{u}, \quad \text{А/В} = \text{См}.$$

Сопротивление и проводимость R-элемента определяют связь между током и напряжением и, как следствие, наклон вольт-амперной характеристики линейного R-элемента. Как видно из рис. 1.12, тангенс угла наклона ВАХ определяет его проводимость:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{i}{u} = \frac{1}{R}.$$

На рис. 1.13 приведена вольт-амперная характеристика нелинейного R-элемента. Она определяет произвольную функциональную зависимость между током и напряжением: $i = f_1(u)$ или $u = f_2(i)$. Для нелинейного R-элемента различают два типа сопротивлений: статическое, определяемое в любой точке ВАХ, $R_{\text{ст}} = \frac{U}{I}$, и динамическое, определяющее характер изменения нелинейной ВАХ в заданной точке, $r_{\text{дин}} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}$.

К энергетическим характеристикам R-элемента относятся мощность и энергия. Мощность R-элемента всегда положительна, т.е. энергия в этом элементе может только потребляться, преобразуясь в тепло:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2 \geq 0.$$

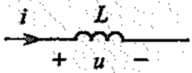


Рис. 1.14. Идеальный L-элемент

Энергию R-элемента можно определить из выражения

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} ui\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} Gu^2\mathrm{d}t.$$

По своим свойствам к идеальным R-элементам близки такие реальные устройства, как лампы накаливания, нагревательные приборы и т. п.

Идеальным L-элементом (индуктивным элементом или катушкой индуктивности) называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического тока в энергию магнитного поля и наоборот. В идеальном L-элементе потери энергии отсутствуют. Обозначение L-элемента показано на рис. 1.14.

Основная характеристика L-элемента — вебер-амперная. Она определяет связь между током, протекающим через элемент, и потокосцеплением (суммарным потоком), создаваемым элементом. Для линейного L-элемента она имеет вид, показанный на рис. 1.15:

$$\psi = Li,$$

где ψ — потокосцепление. Величина L играет роль коэффициента пропорциональности между потоком и током. Она называется индуктивностью. Индуктивность измеряется в генри. Размерность индуктивности определяется из выражения

$$L = \frac{\psi}{i}, \quad \text{Вб/А} = \text{Гн}.$$

На рис. 1.16 приведена вебер-амперная характеристика нелинейного L-элемента. Она имеет произвольную функциональную зависимость, связывающую ток и потокосцепление:

$$\psi = f(i).$$

Вебер-амперные зависимости L-элемента определяются следующими выражениями:

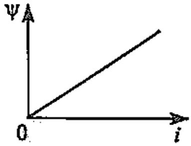


Рис. 1.15. Вебер-амперная характеристика линейного L-элемента

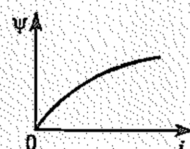


Рис. 1.16. Вебер-амперная характеристика нелинейного L-элемента

$$u = L\frac{di}{dt}; \quad i = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u\mathrm{d}t.$$

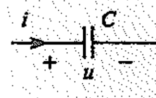


Рис. 1.17. Идеальный C-элемент

Процессы в L-элементе подчиняются закону коммутации, который для индуктивного элемента можно сформулировать так: при напряжении конечной амплитуды потокосцепление не может измениться скачком, т. е. $\psi(0^+) = \psi(0^-)$.

Это равенство можно пояснить с помощью предела:

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta t}.$$

Если Δt стремится к нулю, то и $\Delta\psi$ должно стремиться к нулю. В противном случае напряжение должно стремиться к бесконечности, чего по определению быть не может.

Следствие из закона коммутации: при неизменной индуктивности ток в индуктивном элементе не может измениться скачком, т.е.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-).$$

Мощность L-элемента определяется произведением напряжения на ток ($p = ui$) и является величиной алгебраической. Если $p > 0$, то энергия запасается, если $p < 0$ — энергия возвращается в источник.

Величина энергии определяется из выражения

$$w = \int_{-\infty}^t p\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^t ui\mathrm{d}t, \text{ или } w = w(0) + \int_0^t ui\mathrm{d}t.$$

Если значение энергии к моменту времени $t = 0$ равно 0, то

$$w = \int_0^t L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i\mathrm{d}t = \int_0^t Li\mathrm{d}i = \frac{Li^2}{2}.$$

Идеальным C-элементом (емкостным элементом, или конденсатором) называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического то-

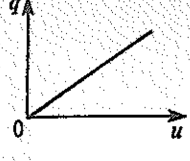


Рис. 1.18. Кулон-вольтная характеристика линейного C-элемента

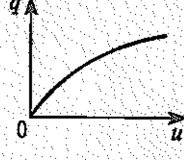


Рис. 1.19. Кулон-вольтная характеристика нелинейного C-элемента

ка в энергию электрического поля и наоборот. В идеальном C-элементе потери энергии отсутствуют. Обозначение C-элемента показано на рис. 1.17.

Основная характеристика C-элемента — кулон-вольтная. Она характеризует связь между зарядом и напряжением на конденсаторе. Для линейного C-элемента она показана на рис 1.18 и имеет вид прямой, проходящей через начало координат: $q = Cu$. Величина C играет роль коэффициента пропорциональности между зарядом и напряжением и называется электрической емкостью. В системе СИ емкость измеряется в фарадах. Размерность емкости определяется из выражения

$$C = \frac{q}{u}, \quad \text{Кл/В} = \text{Ф}.$$

На рис. 1.19 приведена кулон-вольтная характеристика нелинейного C-элемента. Она имеет произвольную функциональную зависимость, связывающую напряжение с зарядом:

$$q = f(u).$$

Вольт-амперные зависимости C-элемента определяются следующими выражениями:

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}; \quad u = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t.$$

Как и в индуктивном элементе, процессы в C-элементе подчиняются закону коммутации, который для емкостного элемента можно сформулировать так: при токе конечной амплитуды заряд на C-элементе не может измениться скачком, т.е.

$$q(0^+) = q(0^-).$$

Это равенство можно пояснить с помощью предела:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Если Δt стремится к нулю, то и Δq должно стремиться к нулю. В противном случае ток должен стремиться к бесконечности, чего по определению быть не может.

Следствие из закона коммутации: при неизменной емкости напряжение на емкостном элементе не может измениться скачком, т.е.

$$u_C(0^+) = u_C(0^-).$$

Мощность C-элемента определяется произведением напряжения на ток: ($p = ui$) и является величиной алгебраической. Если

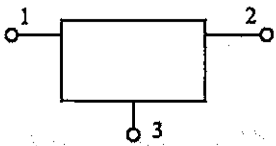


Рис. 1.20. Трехполюсный элемент цепи

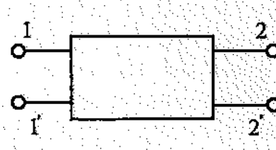


Рис. 1.21. Четырехполюсный элемент цепи

$p > 0$, то энергия запасается, если $p < 0$, — энергия возвращается в источник.

Величина энергии определяется из выражения

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t} ui\,\mathrm{d}t, \text{ или } w = w(0) + \int_{0}^{t} ui\,\mathrm{d}t.$$

Если значение энергии к моменту времени $t = 0$ равно 0, то

$$w = \int_{0}^{t} C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}u\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{t} Cu\,\mathrm{d}u = \frac{Cu^2}{2}.$$

R-, *L*- и *C*-элементы — основные пассивные двухполюсные элементы электрических цепей. Кроме двухполюсников пассивные элементы могут быть многополюсными, т.е. элементами с множеством полюсов. На рис. 1.20 в качестве примера многополюсника приведено изображение трехполюсного элемента цепи, а на рис. 1.21 — четырехполюсного.

1.3. Основные задачи и законы электрических цепей

На рис. 1.22 изображена электрическая цепь, состоящая из источников и приемников. Через элементы цепи протекают токи, а на зажимах элементов имеются напряжения. Напряжения источников напряжения и токи источников тока называются воздействиями, или входными сигналами. Все остальные токи и напряжения называются откликами на эти воздействия, или реакциями. **Задачи**, которые приходится решать при исследованиях электромагнитных процессов в электрических цепях, можно условно разделить на следующие.

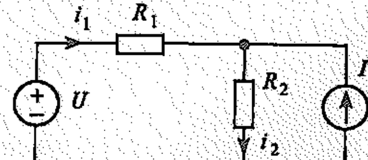


Рис. 1.22. Электрическая цепь

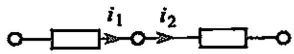


Рис. 1.23. Устранимый узел цепи

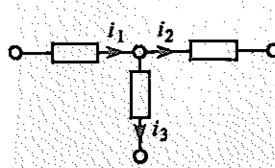


Рис. 1.24. Неустранимый узел цепи

1. *Задачи анализа* — при их решении заданы воздействия, структура цепи и параметры элементов, требуется определить реакции цепи.

2. *Задачи синтеза* — в этом случае заданы воздействия и реакции, требуется определить структуру или параметры цепи (структурный или параметрический синтез).

3. *Задачи идентификации* — обычно заданы воздействия и экспериментально сняты реакции в реальной цепи, требуется определить структуру или параметры цепи (структурная или параметрическая идентификация).

При решении задачи анализа электрической цепи используются **основные законы электрических цепей** — законы Кирхгофа и Ома. Многие методы анализа цепей основаны на этих законах.

Закон токов Кирхгофа (ЗТК) можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма токов ветвей цепи, подключенных к узлу цепи, равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0.$$

Узлом цепи называется такая точка в цепи, к которой подключены две или более ветвей. Если к узлу подключены две ветви, узел называется устранимым. Его можно рассматривать как узел или игнорировать. Если в узел сходятся три или более ветвей, узел называется неустранимым.

На основании закона токов Кирхгофа можно записать уравнение соединения ветвей цепи для узла (уравнения Кирхгофа для токов в узле). Например, для узлов, изображенных на рис. 1.23 и 1.24, можно записать соответственно уравнения соединений

$$-i_1 + i_2 = 0; \quad -i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Закон напряжений Кирхгофа (ЗНК) применяется при записи уравнений соединений для напряжений ветвей цепи. Его можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма напряжений ветвей цепи, входящих в контур, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0.$$

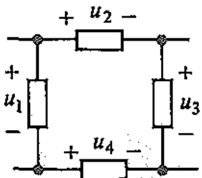


Рис. 1.25. Контур цепи

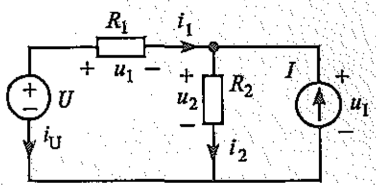


Рис. 1.26. Электрическая цепь, состоящая из двух контуров

Контуром называется путь по ветвям цепи, который начинается и заканчивается в одном и том же узле. Пример контура приведен на рис. 1.25. Уравнение соединений цепи для этого контура, составленное с помощью ЗНК, будет иметь вид

$$-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0.$$

Аналогично можно записать систему уравнений соединений разветвленной цепи, приведенной на рис. 1.26. При составлении уравнений следует помнить, что уравнения соединений должны быть линейно независимыми, т.е. чтобы их число было необходимым и достаточным для определения неизвестных токов или напряжений. Число уравнений для токов в узлах должно быть на единицу меньше числа узлов:

$$n_{\text{I}} = n_{\text{у}} - 1,$$

а число уравнений для напряжений в контурах должно равняться числу ветвей цепи за вычетом числа уравнений для токов:

$$n_{\text{II}} = n_{\text{в}} - n_{\text{I}}.$$

Тогда система уравнений соединений цепи (рис. 1.26), составленная по законам Кирхгофа, будет иметь вид

$$\begin{cases} +i_U + i_1 = 0; \\ -i_1 + i_2 - I = 0; \\ -U + u_1 + u_2 = 0; \\ -u_2 + u_{\text{I}} = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы записанная система уравнений была разрешима, необходимо привести в соответствие число уравнений и число неизвестных. Для этого в элементах цепи напряжения можно выразить через токи на основании закона Ома или, наоборот, токи выразить через напряжения.

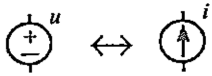


Рис. 1.27. Дуальные элементы цепи

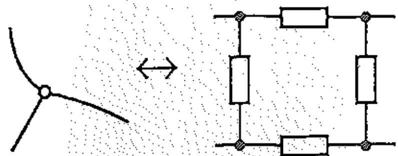


Рис. 1.28. Дуальные понятия

1.4. Понятие о дуальности в электрических цепях

Некоторые приведенные ранее выражения похожи друг на друга, например уравнения соединений цепи по законам токов и напряжений Кирхгофа или выражения, определяющие свойства L- и C-элементов. Для L-элемента напряжение связано с током через производную: $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, а для C-элемента ток связан с напряжением аналогично: $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Эти выражения похожи и преобразуются одно в другое в случае замены напряжений на токи, индуктивностей на емкости и т. д. Такие выражения, как и величины, которые в них необходимо заменить, называются *дуальными*.

В качестве примера дуальных величин можно привести следующие:

напряжение и ток ($u \leftrightarrow i$);
индуктивность и емкость ($L \leftrightarrow C$);
сопротивление и проводимость ($R \leftrightarrow G$);
потокосцепление и заряд ($\psi \leftrightarrow q$).

В приведенных выражениях символ «$\leftrightarrow$» означает дуальность.

Дуальными могут быть элементы цепи. Например, на рис. 1.27 приведен пример дуальных элементов: источник напряжения и источник тока — дуальные элементы цепи.

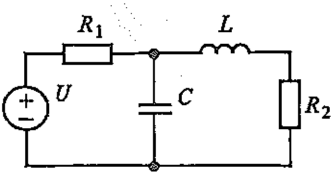


Рис. 1.29. Исходная цепь для дуальных преобразований

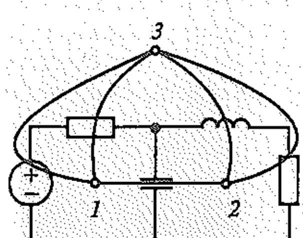


Рис. 1.30. Выбор узлов цепи для дуальных преобразований:
1 и *2* — узлы внутри ячеек; *3* — узлы вне цепи

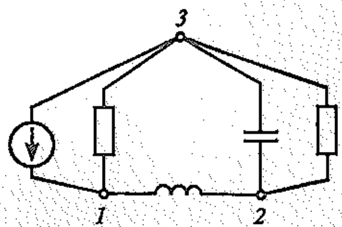


Рис. 1.31. Электрическая цепь, дуальная исходной:
1 и *2* — узлы внутри ячеек; *3* — узел вне цепи

Дуальными могут быть методы или законы, например закон токов Кирхгофа дуален закону напряжений Кирхгофа. Дуальными могут быть некоторые понятия теории электрических цепей. Например, на рис. 1.28 показаны узел и контур цепи, которые являются дуальными понятиями.

Руководствуясь принципом дуальности, можно формировать дуальные цепи, электромагнитные процессы в которых будут аналогичны. Для построения дуальной цепи необходимо соблюдать следующие правила.

1. В каждой ячейке исходной цепи выбирается узел дуальной цепи и один узел вне цепи.

2. Узлы соединяются линиями таким образом, чтобы каждая линия пересекала только один элемент.

3. В линию вводится элемент, дуальный элементу этой ветви в исходной цепи.

Для примера построим дуальную цепь. В исходной цепи (рис. 1.29) узлы *1* и *2* (рис. 1.30) выбирают внутри ячеек, а узел *3* выбирают вне цепи, как показано на рис. 1.30. Узлы соединяются линиями таким образом, чтобы линии пересекали элемент цепи. В линии, соединяющие узлы преобразованной цепи, вводят элементы, дуальные элементам исходной цепи. В результате получается цепь, дуальная исходной (рис. 1.31). Уравнения соединений исходной и дуальной цепей также дуальны.

На основе принципа дуальности можно не только строить схемы с заданными свойствами, но и формулировать теоремы и законы электрических цепей.

Глава 2
АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С *R*-ЭЛЕМЕНТАМИ (РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ)

2.1. Соединения *R*-элементов

Последовательное соединение. Последовательным соединением *R*-элементов называется такое, при котором элементы соединены друг за другом и через них протекает один и тот же ток (между ними нет ответвлений). Пример последовательного соединения *R*-элементов приведен на рис. 2.1. Согласно закону напряжений Кирхгофа напряжение на входе цепи (на зажимах источника) равно сумме напряжений на отдельных элементах:

$$U = u_1 + u_2 + u_3.$$

Если напряжения на отдельных элементах выразить через ток и сопротивление, то записанное выражение примет вид

$$U = R_{вх} i = R_1 i + R_2 i + R_3 i = (R_1 + R_2 + R_3) i.$$

Сумму сопротивлений, стоящую в скобках, обозначим через $R_{вх}$:

$$R_{вх} = R_1 + R_2 + R_3; \quad R_{вх} = \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Отсюда можно сделать вывод: при последовательном соединении *R*-элементов их сопротивления складываются.

На принципах последовательного соединения построено устройство, которое называется делителем напряжения. Делителем напряжения также называется последовательное соединение двух или нескольких элементов (участков) цепи. Схема делителя напряжения, содержащего два элемента, представлена на рис. 2.2. Пользуясь формулами делителя напряжения (ФДН), можно определить напряжение на одном из элементов делителя (на плече де-

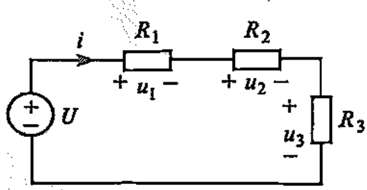


Рис. 2.1. Последовательное соединение *R*-элементов

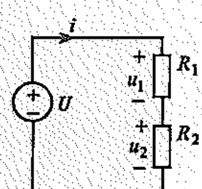


Рис. 2.2. Делитель напряжения

лителя). Общий ток и напряжения на плечах делителя вычисляются согласно закону Ома:

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad u_1 = iR_1; \quad u_2 = iR_2;$$

$$u_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad u_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Выражения, позволяющие определить напряжения на плечах делителя напряжения, являются формулами делителя напряжения.

Параллельное соединение. Параллельным соединением R-элементов называется такое, при котором полюса элементов присоединены к одним и тем же точкам (узлам) цепи и на них одно и то же напряжение. Пример параллельного соединения R-элементов приведен на рис. 2.3. При параллельном соединении элементов входной ток (ток источника) равен сумме токов в отдельных элементах:

$$I = i_1 + i_2 + i_3.$$

Заменив токи в элементах цепи согласно закону Ома произведением проводимостей элементов и напряжения, получим новое выражение, из которого можно определить общую (входную) проводимость параллельного соединения элементов:

$$I = G_{\text{вх}}u = G_1u + G_2u + G_3u = (G_1 + G_2 + G_3)u;$$

$$G_{\text{вх}} = G_1 + G_2 + G_3; \quad G_{\text{вх}} = \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

Последнее выражение позволяет сделать вывод: при параллельном соединении элементов их проводимости складываются.

На принципах параллельного соединения построено устройство, которое называется делителем тока. Схема простейшего делителя тока, состоящего из двух параллельно соединенных элементов цепи, представлена на рис. 2.4. Пользуясь формулами де-

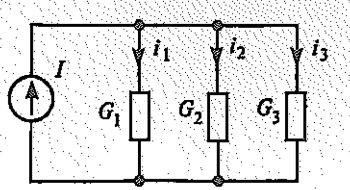


Рис. 2.3. Параллельное соединение R-элементов

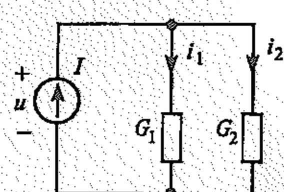


Рис. 2.4. Делитель тока

лителя тока (ФДТ), можно определить ток в одном из элементов делителя (в плече делителя):

$$u = \frac{I}{G_1 + G_2}; \quad i_1 = uG_1; \quad i_2 = uG_2;$$

$$i_1 = \frac{IG_1}{G_1 + G_2}; \quad i_2 = \frac{IG_2}{G_1 + G_2}.$$

Эти выражения, позволяющие определить токи в плечах делителя тока, являются формулами делителя тока. Токи в плечах делителя можно определить и через сопротивления резисторов:

$$i_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}; \quad i_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}.$$

Последние выражения также называют формулами делителя тока, и они могут быть использованы для определения токов в плечах делителя тока.

Смешанное соединение. Смешанным соединением R-элементов называется соединение, которое включает совокупность рассмотренных типов соединений. Пример смешанного соединения R-элементов в цепи приведен на рис. 2.5. Общее (входное) сопротивление цепи относительно зажимов *1—2* можно определить путем постепенного упрощения цепи. Сначала следует объединить сопротивления R_3 и R_4, как последовательно соединенные. В полученной после упрощения цепи, показанной на рис. 2.6, можно объединить сопротивления $R_{3,4}$ и R_2, как параллельно соединенные. Результат дальнейшего упрощения структуры цепи показан

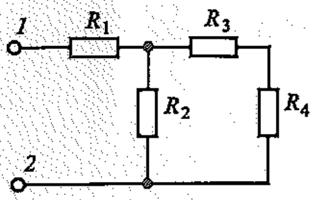


Рис. 2.5. Смешанное соединение R-элементов: *1—3* — зажимы

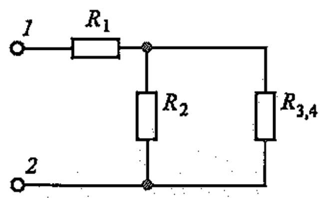


Рис. 2.6. Цепь с упрощением структуры

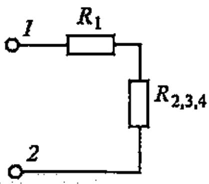


Рис. 2.7. «Свернутая» цепь

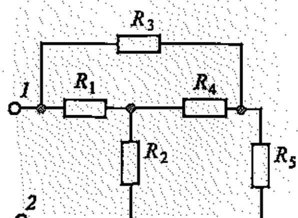


Рис. 2.8. Цепь с перекрещиванием элементов

на рис. 2.7, в которой входное сопротивление будет представлять собой последовательное соединение сопротивлений R_1 и $R_{2,3,4}$.

В тех случаях, когда элементы цепи не включены ни последовательно, ни параллельно, объединять сопротивления нельзя (цепь с перекрещиванием элементов). В этом случае для упрощения структуры цепи следует применять специальные методы преобразования цепей. Пример цепи с перекрещиванием элементов представлен на рис. 2.8.

2.2. Методы преобразования цепей с *R*-элементами

Преобразование элементов цепи из треугольника в звезду. На рис. 2.9 показано соединение *R*-элементов цепи треугольником. Чтобы преобразовать эту схему в звезду из трех элементов, изображенную на рис. 2.10, следует исходить из принципа эквивалентности двух схем. Принцип эквивалентности состоит в том, чтобы после преобразования токи и напряжения в непреобразованной части цепи не изменились. Для определения параметров элементов R_1, R_2 и R_3 из условий эквивалентности предположим, что к зажимам *1* и *2* подключен источник тока *I*, как это показано на рис. 2.11 и 2.12.

Для треугольника из *R*-элементов (см. рис. 2.11) и для звезды из *R*-элементов (см. рис. 2.12) можно соответственно записать уравнения

$$u_{12} = I_{12}\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad u_{12} = I_{12}(R_1 + R_2).$$

Приравнивая левые и правые части уравнений, получим равенство

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2. \qquad (2.1)$$

Подключим теперь источник тока к зажимам *2—3* обеих схем, а затем к зажимам *3—1*. В результате получим еще два равенства, подобных равенству (2.1):

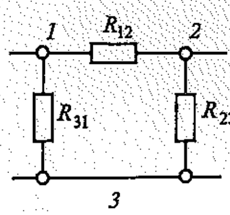


Рис. 2.9. Соединение *R*-элементов треугольником

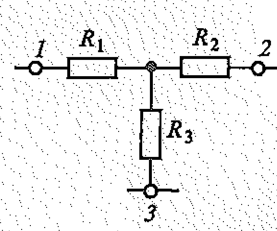


Рис. 2.10. Соединение *R*-элементов звездой

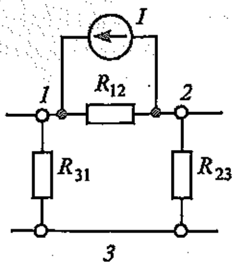


Рис. 2.11. Подключение источника тока к «треугольнику» R-элементов

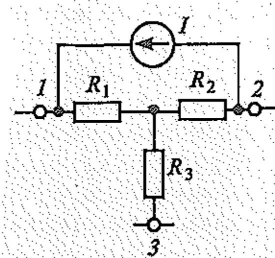


Рис. 2.12. Подключение источника тока к «звезде» R-элементов

$$\frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_2 + R_3; \tag{2.2}$$

$$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_3. \tag{2.3}$$

Решая совместно равенства (2.1), (2.2) и (2.3), определим значения параметров элементов R_1, R_2 и R_3:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \; R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \; R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Преобразование элементов цепи из звезды в треугольник. При обратном преобразовании R-элементов из звезды в треугольник аналогичным образом можно получить выражения для определения параметров элементов треугольника. При этом удобнее оперировать с проводимостями элементов.

На рис. 2.13 и 2.14 изображены схемы соединения G-элементов звездой и треугольником. При использовании в качестве параметров G-элементов их проводимостей формулы для определения параметров элементов треугольника будут иметь следующий вид:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

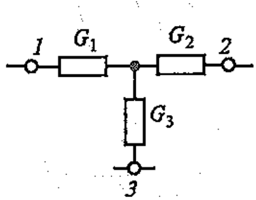


Рис. 2.13. Соединение G-элементов звездой

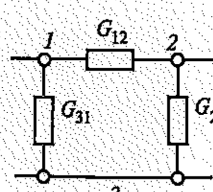


Рис. 2.14. Соединение G-элементов треугольником

Преобразование источников напряжения и тока. Если в цепи источник напряжения включен последовательно с R-элементом, как показано на рис. 2.15, то его можно преобразовать в источник тока с параллельным резистором, как это показано на рис. 2.16. Величина тока, полученного в результате преобразования источника тока, определяется из условия эквивалентности преобразования, т.е. цепь, изображенная на рис. 2.15, должна быть эквивалентна цепи, изображенной на рис. 2.16. Под эквивалентностью здесь следует понимать равенство токов и напряжений в обеих цепях относительно внешних зажимов (зажимов справа). Для доказательства эквивалентности такого преобразования определим ток i в обеих цепях. В цепи (см. рис. 2.15) ток можно определить с помощью закона Ома: $i = \dfrac{U - u}{R}$, в цепи (см. рис. 2.16) этот же ток будет равен $i = I - \dfrac{u}{R}$. Приравнивая левые и правые части уравнений, получим

$$\frac{U - u}{R} = I - \frac{u}{R}, \text{ откуда } I = \frac{U}{R}.$$

При обратном преобразовании источника тока с параллельным резистором в источник напряжения с последовательным резистором напряжение источника определяется аналогичным образом: $U = IR$.

В том случае, если последовательно с источником напряжения не включен резистор, как, например, в цепи на рис. 2.17, то такой источник называют непреобразуемым. Для его преобразования необходимо источник напряжения предварительно разделить на два параллельно включенных одинаковых источника. Затем следует привести цепь к виду, показанному на рис. 2.18, что возможно, поскольку законы Кирхгофа при этом не нарушаются.

Если параллельно с источником тока не включен резистор, как, например, в цепи на рис. 2.19, такой источник тока также называют непреобразуемым. Для его преобразования, как и в предыдущем случае, необходимо источник тока предварительно разделить на два источника тока, а затем представить схему в ви-

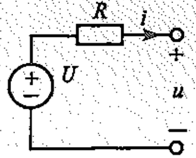


Рис. 2.15. Источник напряжения с последовательным R-элементом

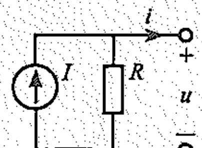


Рис. 2.16. Источник тока с параллельным R-элементом

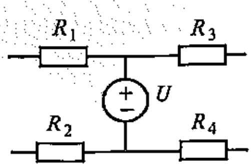


Рис. 2.17. Цепь с непреобразуемым источником напряжения

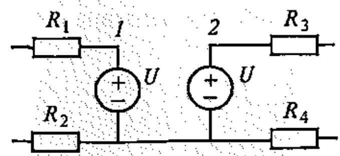


Рис. 2.18. Разделение идеального источника напряжения

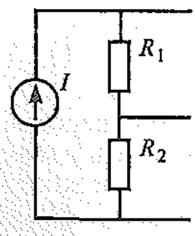


Рис. 2.19. Цепь с непреобразуемым источником тока

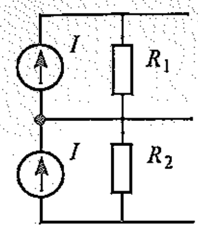


Рис. 2.20. Разделение идеального источника тока

де, приведенном на рис. 2.20. Анализ цепи на рис. 2.20 показывает, что, как и в предыдущем случае, законы Кирхгофа при таком преобразовании не нарушаются.

2.3. Метод пропорциональных величин и метод наложения

Метод пропорциональных величин. Метод основывается на свойстве однородности цепи, и его удобно использовать для расчета цепей лестничного вида. Примером такой цепи может служить цепь, изображенная на рис. 2.21. Пусть в этой цепи задано воздействие U и параметры элементов R_1, R_2, R_3, R_4. Требуется определить реакцию в конце цепи, например, напряжение на элементе R_4. Решение задачи разделяется на два этапа. На первом этапе определяется коэффициент передачи, представляющий отношение реакции к воздействию:

$$k = \frac{u_4}{U}.$$

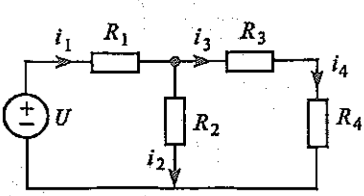


Рис. 2.21. Резистивная цепь лестничной структуры

Расчет коэффициента передачи удобно производить, начиная от конца цепи, условно приняв искомую реакцию, т.е. напряжение на резисторе R_4, равной одному вольту. Тогда все токи и напряжения в цепи можно рассчитать на основе законов Ома и Кирхгофа, последовательно продвигаясь от резистора R_4 к источнику напряжения:

$$u_4' = 1;\, i_4' = \frac{u_4'}{R_4};\, i_3' = i_4';\, u_3' = i_3' R_3;\, u_2' = u_3' + u_4';\, i_2' = \frac{u_2'}{R_2};$$

$$i_1' = i_2' + i_3';\, u_1' = i_1' R_1;\, U' = u_1' + u_2'.$$

Определив таким образом напряжение источника U, можно определить и коэффициент передачи k:

$$k = \frac{u_4}{U} = \frac{1}{U'}.$$

На втором этапе решения, зная коэффициент передачи и составив простейшую пропорцию, можно определить искомую реакцию цепи на любое воздействие. Например, при воздействии, равном U', реакция $u_4 = 1$, а при воздействии, равном U, реакция $u_4 = x$. Отсюда получаем

$$x = u_4 = U\frac{1}{U'} = Uk.$$

Метод наложения (суперпозиции). Метод основан на принципе суперпозиции, согласно которому реакция цепи от воздействия нескольких источников равна алгебраической сумме реакций от воздействия каждого источника в отдельности. Например, на рис. 2.22 изображена цепь, содержащая два источника: источник напряжения и источник тока. Согласно принципу суперпозиции сначала определяют реакции (токи в ветвях с резисторами) от воздействия только одного источника — источника напряжения, источник тока при этом исключаем (рис. 2.23). Зажимы источника тока следует разомкнуть, поскольку его внутреннее сопротивление условно считается равным бесконечности. В этом случае реакции, т. е. токи в ветвях цепи, можно определить по закону Ома:

$$i_1' = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad i_2' = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

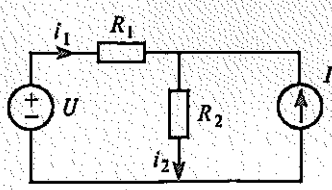


Рис. 2.22. Резистивная цепь с двумя источниками

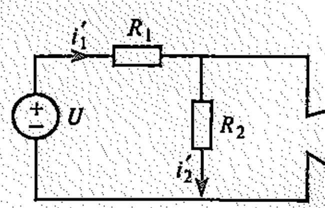


Рис. 2.23. Резистивная цепь с отключенным источником тока

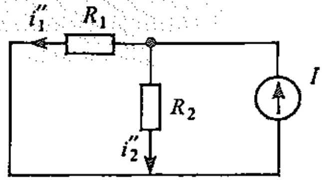


Рис. 2.24. Резистивная цепь с отключенным источником напряжения

Затем определяют реакции от воздействия источника тока, при этом зажимы источника напряжения следует закоротить, (рис. 2.24), поскольку внутреннее сопротивление источника напряжения условно равно нулю. Токи в ветвях цепи можно определить, воспользовавшись формулами делителя тока:

$$i_1'' = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}; \quad i_2'' = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}.$$

Теперь необходимо сложить полученные составляющие токов в соответствии с выбранными направлениями. При этом следует выполнить правило: если направление составляющей соответствует выбранному направлению тока в исходной цепи, то эта составляющая берется в сумме со знаком «+», если направление противоположно — со знаком «–», т.е.

$$i_1 = i_1' - i_1''; \quad i_2 = i_2' + i_2''.$$

2.4. Метод контурного анализа

Метод контурного анализа (МКА) или метод контурных токов (МКТ) применяется для расчета сложных (разветвленных) цепей с большим числом элементов и небольшим количеством независимых контуров (ячеек). Метод рекомендуется применять в тех случаях, когда в цепи имеются только источники напряжения. Если в цепи имеются источники тока, то их рекомендуется преобразовать в источники напряжения.

За переменные в МКА принимаются токи независимых контуров, которые называются контурными токами. Контурные токи условно протекают лишь в контуре и представляют собой не реальные физические токи, а лишь некоторые расчетные величины. Для цепи, представленной на рис. 2.25, контурными токами являются токи $i_1^{\text{к}}, i_2^{\text{к}}, i_3^{\text{к}}$. Согласно методу наложения токи, протекающие в ветвях цепи, можно выразить через контурные токи:

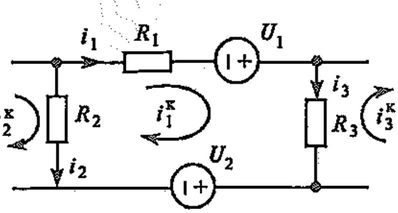


Рис. 2.25. Контур резистивной цепи

$$i_1 = i_1^{\text{к}};$$

$$i_2 = i_2^{\text{к}} - i_1^{\text{к}}; \; i_3 = i_1^{\text{к}} - i_3^{\text{к}}.$$

Рассмотрим внутренний контур цепи и на его примере покажем, как формируются уравнения МКА. Запишем сначала для контура уравнение Кирхгофа:

$$i_1 R_1 - U_1 + i_3 R_3 + U_2 - i_2 R_2 = 0.$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы в качестве неизвестных в уравнении были контурные токи:

$$i_1 R_1 + i_3 R_3 - i_2 R_2 = U_1 - U_2;$$

$$i_1^{\text{к}} R_1 + (i_1^{\text{к}} - i_3^{\text{к}}) R_3 - (i_2^{\text{к}} - i_1^{\text{к}}) R_2 = U_1 - U_2;$$

$$i_1^{\text{к}}(R_1 + R_2 + R_3) - i_2^{\text{к}} R_2 - i_3^{\text{к}} R_3 = U_1 - U_2;$$

$$i_1^{\text{к}} R_{11} + i_2^{\text{к}} R_{12} + i_3^{\text{к}} R_{13} = U_1^{\text{к}}.$$

Последнее уравнение составлено для одного (первого) контура в соответствии с алгоритмом метода контурного анализа. По аналогии с этим уравнением можно записать систему уравнений для n контуров резистивной цепи:

$$\begin{cases} R_{11} i_1^{\text{к}} + R_{12} i_2^{\text{к}} + \ldots + R_{1n} i_n^{\text{к}} = U_1^{\text{к}}; \\ R_{12} i_1^{\text{к}} + R_{22} i_2^{\text{к}} + \ldots + R_{2n} i_n^{\text{к}} = U_2^{\text{к}}; \\ \qquad \ldots \\ R_{n1} i_1^{\text{к}} + R_{n2} i_2^{\text{к}} + \ldots + R_{nn} i_n^{\text{к}} = U_n^{\text{к}}. \end{cases}$$

Эта система уравнений представляет собой математическую модель цепи, составленную по методу контурного анализа. Она отличается от системы уравнений Кирхгофа меньшей размерностью и формализацией записи. Формализация записи позволяет представить систему уравнений в компактной матричной форме

$$R^{\text{к}} i^{\text{к}} = U^{\text{к}},$$

где $R^{\text{к}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} \\ & & \ldots & \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{bmatrix}$ — матрица контурных сопротивлений;

$i^{\text{к}} = \begin{bmatrix} i_1^{\text{к}} \\ i_2^{\text{к}} \\ \ldots \\ i_3^{\text{к}} \end{bmatrix}$ и $U^{\text{к}} = \begin{bmatrix} U_1^{\text{к}} \\ U_2^{\text{к}} \\ \ldots \\ U_n^{\text{к}} \end{bmatrix}$ — векторы контурных токов и контурных напряжений соответственно.

Параметры элементов записанных векторов и матриц определяются следующим образом:

$R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{nn}$ — собственные сопротивления контуров — как арифметическая сумма сопротивлений ветвей, входящих в рассматриваемый контур;

R_{12}, R_{13} и т.д. — взаимные сопротивления контуров — как сумма сопротивлений ветвей на границе между контурами (если контурные токи протекают во взаимном сопротивлении навстречу друг другу, то сумма берется со знаком «–»;

$U_1^{\text{к}}, U_2^{\text{к}}, \ldots, U_n^{\text{к}}$ — контурные напряжения — как алгебраическая сумма напряжений источников напряжения, входящих в контур (если контурный ток не согласован с напряжением источника, в сумме берется знак «+», если согласован, т.е. контурный ток условно протекает от плюса источника к минусу, в сумме берется знак «–»).

Пример. В цепи на рис. 2.26 заданы параметры элементов: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом, $U_1 = U_2 = 10$ В, $U_3 = 5$ В. Требуется определить токи в ветвях цепи i_1, i_2, i_3.

Решение. В цепи (см. рис. 2.26) выбираем независимые контуры, желательно, чтобы это были ячейки, т.е. внутренние контуры, не имеющие внутри ветвей. В выбранных контурах выбираем направления неизвестных контурных токов. Желательно, чтобы направления контурных токов выбирались одинаково, например, по направлению движения часовой стрелки. Затем записывам систему уравнений МКА в общем виде:

$$\begin{cases} R_{11}i_1^{\text{к}} + R_{12}i_1^{\text{к}} = U_1^{\text{к}}; \\ R_{21}i_1^{\text{к}} + R_{22}i_1^{\text{к}} = U_2^{\text{к}}. \end{cases}$$

Рассчитаем параметры системы:

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 2 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -1 \text{ Ом};$$

$$U_1^{\text{к}} = U_1 - U_2; \quad U_2^{\text{к}} = U_2 - U_3.$$

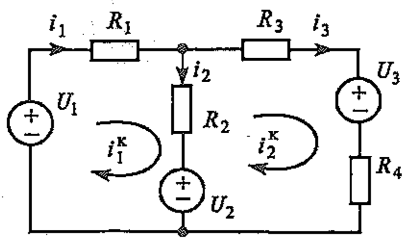


Рис. 2.26. Пример резистивной цепи с источниками напряжения

Уравнения МКА с учетом вычисленных значений их параметров удобно записать в матричной форме:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{array}\right].$$

Находим решение записанной системы относительно неизвестных контурных токов.

Для этой цели можно использовать метод Крамера или метод Гаусса. В результате решения определим неизвестные контурные токи:

$$i_1^{\text{к}} = 1\text{А}; \quad i_2^{\text{к}} = 2\text{А}.$$

По найденным контурным токам можно определить токи в ветвях цепи:

$$i_1 = i_1^{\text{к}} = 1\text{А}; \; i_2 = i_2^{\text{к}} - i_1^{\text{к}} = 1\text{А}; \; i_3 = i_2^{\text{к}} = 2\text{А}.$$

2.5. Метод узлового анализа

Метод узлового анализа (МУА) или метод узловых напряжений (МУН) применяется для расчета сложных цепей с большим числом элементов и небольшим количеством узлов. Метод рекомендуется применять в тех случаях, когда в цепи имеются только источники тока. Если в цепи имеются источники напряжения, то их желательно преобразовать в источники тока.

За переменные в МУА принимаются напряжения независимых узлов, которые называются узловыми напряжениями. Узловые напряжения представляют собой потенциалы узлов и определяются относительно выбранного базисного узла, потенциал которого принимается равным нулю. Обычно за базисный узел принимается тот, к которому подключено большее количество ветвей. Напряжения ветвей в этом случае представляют собой разности узловых напряжений. Для фрагмента цепи, представленного на рис. 2.27, можно записать:

$$u_1 = u_1^{\text{у}};$$

$$u_2 = u_2^{\text{у}} - u_1^{\text{у}}; \quad u_3 = u_3^{\text{у}} - u_1^{\text{у}}.$$

Рассмотрим первый узел в цепи и на его примере покажем, как формируются уравнения МУА. Запишем сначала для узла уравнение Кирхгофа:

$$G_1 u_1 - I_1 - G_2 u_2 + I_2 - G_3 u_3 = 0.$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы в качестве переменных в это уравнение входили узловые напряжения:

$$G_1 u_1 - G_2 u_2 - G_3 u_3 = I_1 - I_2;$$

$$G_1 u_1^{\text{у}} - (u_2^{\text{у}} - u_1^{\text{у}})G_2 -$$

$$-(u_3^{\text{у}} - u_1^{\text{у}})G_2 = I_1 - I_2;$$

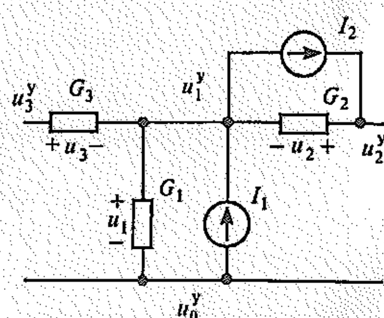


Рис. 2.27. Узел резистивной цепи

$$(G_1+G_2+G_3)u_1^{у}-G_2u_2^{у}-G_3u_3^{у}=I_1-I_2;$$

$$G_{11}u_1^{у}+G_{12}u_2^{у}+G_{13}u_3^{у}=I_1^{у}.$$

Последнее уравнение составлено для одного (первого) узла в соответствии с алгоритмом метода узлового анализа. По аналогии можно записать систему уравнений МУА для n узлов:

$$\begin{cases} G_{11}u_1^{у}+G_{12}u_2^{у}+\ldots+G_{1n}u_n^{у}=I_1^{у}; \\ G_{21}u_1^{у}+G_{22}u_2^{у}+\ldots+G_{2n}u_n^{у}=I_2^{у}; \\ \ldots \\ G_{n1}u_{n1}^{у}+G_{n2}u_2^{у}+\ldots+G_{nn}u_n^{у}=I_n^{у}. \end{cases}$$

Полученная система представляет собой математическую модель цепи, полученную на основе МУА. Ее можно записать в компактной матричной форме:

$$G^{у}u^{у}=I^{у},$$

где $G^{у}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \ldots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \ldots & G_{2n} \\ & & \ldots & \\ G_{n1} & G_{n2} & \ldots & G_{nn} \end{bmatrix}$ — матрица узловых проводимостей;

$u^{у}=\begin{bmatrix} u_1^{у} \\ u_2^{у} \\ \ldots \\ u_n^{у} \end{bmatrix}$ — вектор узловых напряжений; $I^{у}=\begin{bmatrix} I_1^{у} \\ I_2^{у} \\ \ldots \\ I_n^{у} \end{bmatrix}$ — вектор узловых токов.

Параметры элементов векторов и матриц определяются следующим образом:

G_{11}, G_{22}, ... , G_{nn} — собственные проводимости узлов — как арифметическая сумма проводимостей ветвей, подключенных к узлу;

G_{12}, G_{13} и т.д. — взаимные проводимости узлов — как сумма проводимостей ветвей, соединяющих два узла (сумма берется со знаком «–»);

$I_1^{у}$, $I_2^{у}$, ..., $I_n^{у}$ — узловые токи — как алгебраическая сумма токов источников тока, подключенных к узлу. (если ток источника направлен к узлу, в сумме он берется со знаком «+», если от узла — со знаком «–»).

Пример. В цепи (рис. 2.28) заданы параметры элементов: $G_1=G_2=G_3=G_4=1\text{См}$, $I_1=I_2=10\text{А}$, $I_3=5\text{А}$. Требуется определить напряжения на ветвях цепи u_1, u_2 с использованием МУА.

Решение. Сначала выбираем базисный узел цепи, узловое напряжение которого принимаем равным нулю. Затем выбираем неизвестные напряжения узлов. Записываем систему уравнений МУА в общем виде, которая для цепи (см. рис. 2.28) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} G_{11}u_1^y + G_{12}u_1^y = I_1^y; \\ G_{21}u_1^y + G_{22}u_1^y = I_2^y. \end{cases}$$

Рассчитываем параметры системы уравнений:

$$G_{11} = G_1 + G_2 = 2\,\text{См}; \quad G_{22} = G_2 + G_3 + G_4 = 3\,\text{См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_2 = -1\,\text{См};$$

$$I_1^y = I_1 - I_2; \quad I_2^y = I_2 - I_3.$$

С учетом рассчитанных значений параметров система уравнений МУА в матричной форме будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{array}\right].$$

Находим решение записанной системы относительно неизвестных узловых напряжений. Для этой цели можно использовать метод Крамера или метод Гаусса. В результате решения определяем неизвестные узловые напряжения:

$$u_1^y = 1\,\text{В}; \quad u_2^y = 2\,\text{В}.$$

По найденным узловым уравнениям можно найти напряжения ветвей исходной цепи:

$$u_1 = u_1^y = 1\text{В}; \quad u_2 = u_1^y - u_2^y = -1\text{В}; \quad u_3 = u_2^y = 2\,\text{В}.$$

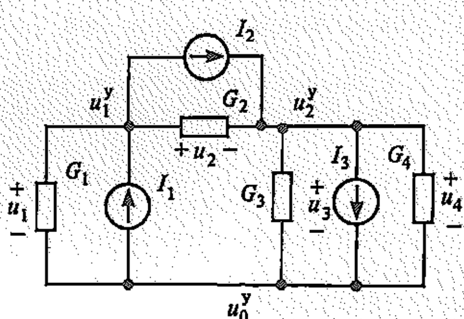


Рис. 2.28. Пример резистивной цепи с источниками тока

2.6. Теоремы об эквивалентных источниках

Теорема замещения. Элемент электрической цепи можно заменить источником напряжения или источником тока. Если в цепи имеется R-элемент R_k, напряжение на зажимах которого равно u_k и через который протекает ток i_k, то его можно заменить эквивалентным источником напряжения или источником тока.

На рис. 2.29 показана электрическая цепь, у которой выделен элемент R_k с напряжением на его зажимах u_k и током через него i_k. На рис 2.30 показано, каким образом этот элемент цепи можно заменить источником напряжения или источником тока.

Теорему легко доказать на примере простой резистивной цепи, изображенной на рис. 2.31. В этой цепи определим напряжение на резисторе R_2:

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad u_{R_2} = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Заменим резистор R_2 источником напряжения, как это показано на рис. 2.32. При этом ток в цепи не изменится:

$$i = \frac{U - u_2}{R_1} = \frac{U - \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2}}{R_1} = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема об эквивалентном источнике напряжения (теорема Тевенена). Электрическую цепь относительно зажимов элемента цепи можно заменить эквивалентным источником напряжения с последовательным R-элементом.

На рис. 2.33 представлена электрическая цепь, у которой выделен элемент $R_{аб}$, подключенный к зажимам *а—б*. Теорема Тевенена говорит о том, что всю электрическую цепь относительно зажимов *а—б* можно заменить источником напряжения с последовательно присоединенным резистором. Докажем эту теорему.

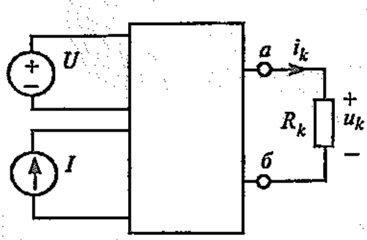


Рис. 2.29. Резистивная цепь с выделенной нагрузкой

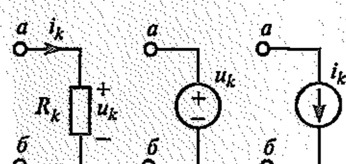


Рис. 2.30. Замещение резистора источниками

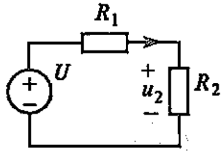


Рис. 2.31. Пример резистивной цепи

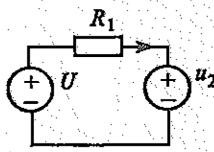


Рис. 2.32. Цепь с заменой резистора источником

Согласно теореме замещения резистор $R_{аб}$ можно заменить источником тока, как это показано на рис. 2.34. По методу наложения определим напряжение $U_{аб}$. Для этого сначала определим составляющую напряжения от действия всех источников в цепи одновременно, за исключением источника тока $i_{аб}$, для чего разомкнем зажимы этого источника, как показано на рис. 2.35. В этом случае напряжение на зажимах $а-б$ в режиме холостого хода (разрыва зажимов $а-б$) запишем следующим образом:

$$u'_{аб} = u_{аб\text{х.х}} = u_0.$$

Затем исключим из цепи все источники, кроме источника тока $i_{аб}$, для чего замкнем зажимы источников напряжения и разомкнем зажимы источников тока, как показано на рис. 2.36. В этом случае напряжение на зажимах $а-б$ будет определяться

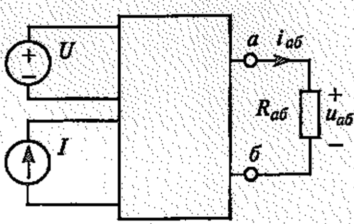


Рис. 2.33. Цепь для использования теоремы Тевенена

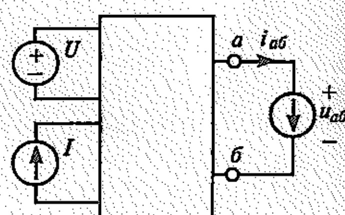


Рис. 2.34. Замещение резистора исоточником тока

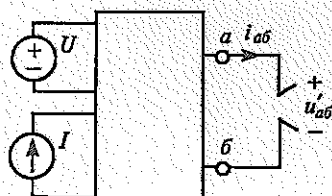


Рис. 2.35. Исключение источника тока

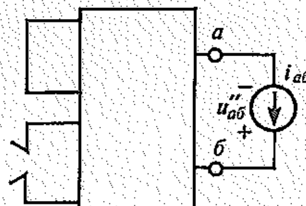


Рис. 2.36. Исключение источников напряжения и тока

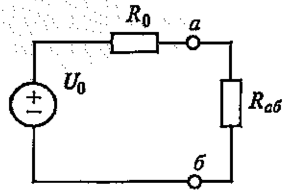


Рис. 2.37. Включение эквивалентного источника напряжения

как произведение тока источника на входное сопротивление цепи со стороны зажимов a—$б$:

$$u''_{аб} = i_{аб} R_0.$$

Теперь согласно методу наложения определим суммарное напряжение $u_{аб}$ на зажимах a—$б$:

$$u_{аб} = i_{аб} R_{аб} = u'_{аб} - u''_{аб} = u_0 - i_{аб} R_0 \text{ или}$$
$$u_0 = i_{аб}(R_0 + R_{аб}).$$

Последнее выражение означает, что электрическая цепь может быть представлена последовательным соединением источника напряжения u_0 и резисторов R_0 и $R_{аб}$, как это показано на рис. 2.37. В такой цепи легко определить ток в ветви $R_{аб}$ в соответствии с законом Ома:

$$i_{аб} = \frac{u_0}{R_0 + R_{аб}}.$$

С помощью рассмотренного метода можно определить ток в отдельной ветви сложной цепи. Метод определения тока по этому выражению получил также название метода эквивалентного источника напряжения (МЭИН).

Метод эквивалентного источника тока (теорема Нортона). Электрическую цепь относительно зажимов элемента цепи можно заменить эквивалентным источником тока с параллельным R-элементом.

Теорема Нортона дуальна теореме Тевенена, и поэтому ее можно доказать на основании полученных ранее результатов. Известно, что электрическую цепь можно заменить источником напряжения с последовательным сопротивлением, как было установлено при доказательстве предыдущей теоремы. Согласно правилу преобразования источников источник напряжения с последовательно соединенным с ним резистором можно преобра-

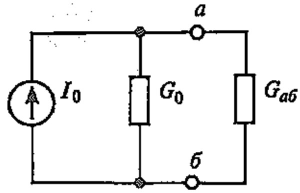


Рис. 2.38. Преобразование эквивалентного источника напряжения в источник тока

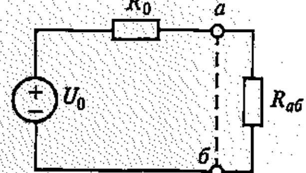


Рис. 2.39. Короткое замыкание нагрузки

зовать в источник тока с параллельно соединенным резистором. Преобразуем источник напряжения в цепи (см. рис. 2.37) в источник тока, как показано на рис. 2.38:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = U_0 G_0 = i_{аб\,\text{к.з}}.$$

Как видно из рис. 2.39, ток источника тока представляет собой ток короткого замыкания зажимов *а—б*, значит $I_0 = i_{аб\,\text{к.з}}$, откуда

$$u_{аб} = \frac{I_0}{G_0 + G_{аб}}.$$

С помощью алгоритма рассмотренного метода можно определить напряжение на любой ветви сложной цепи. Этот метод также называется методом эквивалентного источника тока (МЭИТ).

Глава 3

АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С *R*-, *L*- И *C*-ЭЛЕМЕНТАМИ (ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ)

3.1. Классический метод анализа динамики *R*-, *L*-, *C*-цепей

Классическим методом анализа динамических цепей называют определение реакций цепи путем составления и решения дифференциальных (динамических) уравнений. Поэтому задачу анализа динамических цепей можно условно разделить на две части: составление дифференциальных уравнений цепи и решение составленных дифференциальных уравнений.

Составление динамических уравнений электрической цепи. Дифференциальные уравнения составляются на основе уравнений соединений цепи (уравнений Кирхгофа). Для цепи (рис. 3.1), содержащей реактивные L- и C-элементы, их можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} -i_L + i_R + i_C = 0; \\ -U + u_L + u_R = 0; \\ -u_R + u_C = 0. \end{cases}$$

Выразив напряжения на реактивных элементах через токи в элементах цепи, получим систему интегродифференциальных уравнений, описывающих динамику цепи (см. рис. 3.1):

$$\begin{cases} -i_L + i_R + i_C = 0; \\ -U + L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_R = 0; \\ -Ri_R + \dfrac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

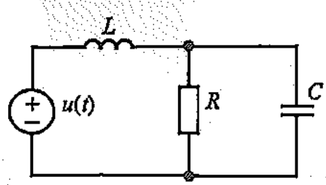


Рис. 3.1. Динамическая цепь, содержащая реактивные L- и C-элементы

Полученную таким образом систему динамических уравнений можно свести к одному дифференциальному уравнению или к системе дифференциальных уравнений, записав их, например, в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{CR}u_C + \dfrac{1}{C}i_L; \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{1}{L}U. \end{cases}$$

Различные способы решения дифференциальных уравнений подробно описаны в курсе высшей математики. Ниже рассматриваются компоненты аналитического точного решения дифференциальных уравнений и некоторые классические подходы к получению такого решения применительно к электрическим цепям.

Решение динамических уравнений электрической цепи. Общий вид аналитического точного решения системы линейных дифференциальных уравнений для тока или напряжения в цепи известен из математики:

$$i(t) = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}; \quad u(t) = u_{\text{вын}} + u_{\text{св}},$$

где $i_{\text{вын}}$ и $u_{\text{вын}}$ — вынужденные составляющие реакций, которые представляют собой частные решения и определяются характером воздействия на цепь, т. е. видом воздействия; $i_{\text{св}}$ и $u_{\text{св}}$ — свободные составляющие реакций, которые представляют собой общие решения уравнений. Они определяются параметрами элементов цепи и начальными условиями:

$$u_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{p_k t}; \quad i_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{p_k t},$$

где A_k — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий; p_k — корни характеристического уравнения или собственные частоты цепи.

Пример 1. Рассмотрим алгоритм составления и решения дифференциального уравнения RL-цепи первого порядка при подключении источника постоянного напряжения, которая изображена на рис. 3.2. Предположим, что к RL-цепи, в которой ранее через L-элемент протекал ток i_{L0}, в момент времени $t = 0$ с помощью идеального ключа K подключается источник постоянного напряжения U. Требуется определить переходный процесс для тока в цепи, т. е. процесс изменения тока в цепи после замыкания ключа.

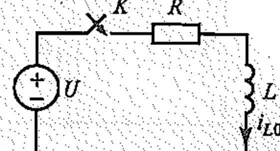


Рис. 3.2. RL-цепь первого порядка

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, поясним некоторые использованные термины. Так, идеальным ключом следует считать ключ, замыкание или размыкание которого (коммутация) происходит мгновенно и собственное сопротивление которого равно нулю. Переходным процессом для любой переменной величины будем называть процесс перехода этой величины от одного установившегося значения к другому.

Решение. Поскольку до коммутации через индуктивный элемент протекал ток i_{L0}, то к моменту коммутации в цепи существовал запас энергии, определяемый величиной этого начального тока:

$$W_L = L\frac{i_{L0}^2}{2}.$$

Составим уравнение соединений цепи по закону напряжений Кирхгофа, при этом напряжения на пассивных элементах выразим через ток:

$$-U + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, общий вид решения которого относительно тока известен:

$$i(t) = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = i_{\text{вын}} + Ae^{pt}.$$

Определяем вынужденную составляющую реакции из частного решения неоднородного уравнения для момента времени $t = \infty$. При этом полагаем, что время прошло бесконечно долго, переходный процесс закончился, все переменные приняли постоянные значения и, следовательно:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ а } i_{\text{вын}} = \frac{U}{R}.$$

Определяем теперь свободную составляющую $i_{\text{св}} = Ae^{pt}$. В качестве компонентов она включает корень характеристического уравнения и постоянную интегрирования. Для определения корня характеристического уравнения составим само характеристическое уравнение, приняв уравнение однородным, т.е. приняв его правую часть равной нулю и заменив оператор дифференцирования переменной p:

$$Lp + R = 0.$$

Из полученного характеристического уравнения определяем корень характеристического уравнения:

$$p = -\frac{R}{L} = -\alpha = -\frac{1}{\tau},$$

где α — коэффициент затухания экспоненты, описывающей переходный процесс для тока в цепи; τ — постоянная времени цепи, которая определяется ее параметрами, $\tau = \frac{L}{R}$. Постоянная времени цепи определяется так же, как интервал времени, в течение которого переменная величина уменьшается по абсолютной величине в $\mathbf{e} \cong 2{,}7$ раз от первоначального значения.

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий:

$$i_{L0} = \frac{U}{R} + A^0.$$

Отсюда

$$A = i_{L0} - \frac{U}{R}.$$

В результате общее решение дифференциального уравнения для тока можно окончательно записать в следующем виде:

$$i(t) = \frac{U}{R} + \left(i_{L0} - \frac{U}{R}\right)\mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Частные случаи решения задачи.

1. В случае если напряжение источника равно нулю, в цепи происходит свободный процесс, т.е. процесс без источника. Такой процесс может протекать за счет энергии, накопленной на индуктивном элементе:

$$U = 0; \quad i_{\text{св}}(t) = i_{L0}\mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

По графику свободного процесса (рис. 3.3) можно определить постоянную времени цепи графическим путем. Если в какой-либо точке графика провести касательную, то расстояние от точки касания до точки пересечения с асимптотой равно постоянной времени цепи. Свободный процесс будет стремиться к асимптоте бесконечно долго, поэтому в теории электрических цепей пользуются понятием практического времени свободного процесса, которое принимают равным трем постоянным времени. На основе таких представлений (рис. 3.3) можно определить постоянную времени цепи, а отло-

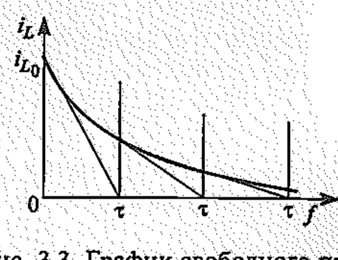


Рис. 3.3. График свободного процесса для тока в L-элементе

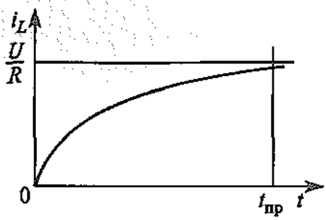


Рис. 3.4. График переходного процесса для тока в L-элементе

жив ее трижды, определить время свободного процесса. Практическое время свободного процесса можно определить так же, как время, в течение которого переменная величина (в данном случае ток) уменьшается по абсолютной величине до 5% от первоначального значения.

2. Начальный ток через индуктивный элемент был равен нулю. В этом случае в цепи будет происходить переходный процесс с нулевыми начальными условиями, график которого показан на рис. 3.4. В этом случае

$$i_{L0} = 0; \quad i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Пример 2. Рассмотрим алгоритм составления и решения дифференциального уравнения RC-цепи первого порядка при подключении источника постоянного напряжения (рис. 3.5). Предположим, что к RC-цепи, в которой ранее на C-элементе имелось начальное напряжение u_{C0}, в момент времени $t = 0$ с помощью идеального ключа K подключается источник постоянного напряжения U. Требуется определить переходный процесс для напряжения на C-элементе и для тока в цепи.

Решение. До коммутации на емкостном элементе имелось начальное напряжение u_{C0}. К моменту замыкания ключа в цепи существовал запас энергии, определяемый величиной этого напряжения:

$$W_C = C\frac{u_{C0}^2}{2}.$$

Составим уравнение соединений цепи по закону напряжений Кирхгофа, при этом напряжения на пассивных элементах выразим через ток:

$$-U + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0.$$

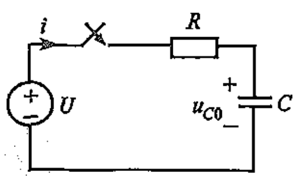


Рис. 3.5. RC-цепь первого порядка

Записанное уравнение не является дифференциальным. Для того чтобы свести его к дифференциальному, необходимо в качестве основной переменной выбрать не ток, а напряжение на емкостном элементе. В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, общий вид решения которого относительно напряжения будет иметь вид

$$u_C(t) = u_{C,\text{вын}} + u_{C,\text{св}} = u_{C,\text{вын}} + Ae^{pt}.$$

Определяем вынужденную составляющую реакции из частного решения неоднородного уравнения для момента времени $t = \infty$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0; \quad u_{C,\text{вын}} = U.$$

Определяем свободную составляющую реакции $u_{C,\text{св}} = Ae^{pt}$. Для определения корня характеристического уравнения составим характеристическое уравнение

$$RCp + 1 = 0.$$

Из полученного характеристического уравнения определяем корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Постоянную времени RC-цепи τ определяем по формуле $\tau = RC$.

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий:

$$u_{C0} = U + A^0.$$

Отсюда $A = u_{C0} - U$.

В результате общее решение дифференциального уравнения для напряжения на C-элементе можно окончательно записать в таком виде:

$$u_C(t) = U + (u_{C0} - U)e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

В том случае, когда в качестве реакции рассматривается ток или другая переменная величина, решение относительно этой переменной можно получить через напряжение на емкостном элементе.

Частные случаи решения задачи.

1. В случае если напряжение источника равно нулю, в цепи будет происходить свободный процесс, протекающий за счет энергии, накопленной на емкостном элементе:

$$U = 0; \quad u_{C,\text{св}}(t) = u_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t}; \quad i_{\text{св}}(t) = -\frac{1}{R}u_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

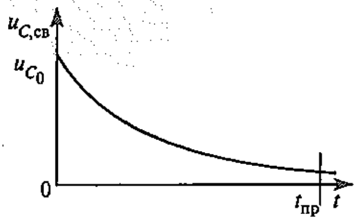


Рис. 3.6. График свободного процесса для напряжения на C-элементе

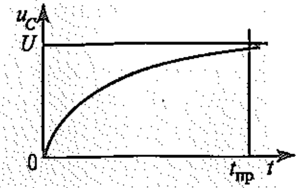


Рис. 3.7. График переходного процесса для напряжения на C-элементе

График свободного процесса для напряжения на емкостном элементе представлен на рис. 3.6.

2. Начальное напряжение на емкостном элементе было равно нулю. В этом случае в цепи будет происходить переходный процесс с нулевыми начальными условиями, график которого показан на рис. 3.7. В этом случае

$$u_{C0} = 0; \quad u(t) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right); \quad i(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}.$$

3.2. Метод расчета переходных процессов в цепях первого порядка с использованием эквивалентных резистивных схем

Предлагаемый метод расчета переходных процессов рекомендуется применять для расчета динамики разветвленных цепей первого порядка. Сущность метода заключается в том, что для отдельных моментов времени динамического процесса строят эквивалентные резистивные схемы замещения динамической цепи, а из них находят компоненты решения дифференциального уравнения. Алгоритм расчета переходных процессов рассмотрим на примере цепи, показанной на рис. 3.8.

Пример. Пусть заданы параметры цепи: $U = 4$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $C = 1$ Ф. Требуется определить переходный процесс для токов в ветвях с пассивными элементами и построить графики реакций (временные диаграммы).

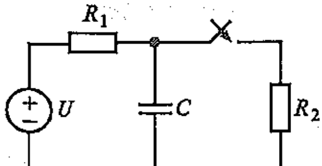


Рис. 3.8. Разветвленная цепь первого порядка

Р е ш е н и е. Общий вид решения, определяющего переходный процесс для токов в ветвях цепи, известен:

$$i(t) = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = i_{\text{вын}} + A\mathrm{e}^{pt}.$$

Найти искомое решение — значит определить его компоненты, т. е. значения вынужденных составляющих реакций $i_{\text{вын}}$, корня характеристического уравнения p и постоянных интегрирования A. Алгоритм нахождения компонентов решения состоит из нескольких этапов.

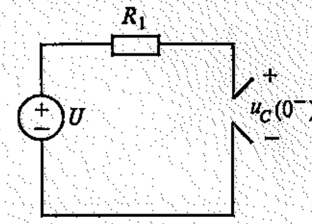


Рис. 3.9. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = 0^-$

1. *Определение независимых начальных условий*. Независимыми начальными условиями называются параметры, которые не зависят от условий коммутации. К независимым начальным условиям в R-, L-, C-цепях относятся напряжения на C-элементах и токи в L-элементах, поскольку они подчиняются законам коммутации и в момент коммутации не могут измениться скачком. В рассматриваемом примере независимым начальным условием является напряжение на емкостном элементе $u_C(0^-)$, которое было к моменту коммутации и которое определяет запас энергии в цепи к моменту коммутации.

Для определения напряжения на емкостном элементе необходимо построить эквивалентную резистивную цепь до коммутации, т. е. в момент времени $t = 0^-$. В этот момент времени токи и напряжения постоянны и, следовательно, зажимы C-элемента следует разорвать, поскольку постоянный ток при обычных условиях через C-элемент не протекает. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = 0^-$ представлена на рис. 3.9. В этой резистивной цепи начальное напряжение на емкостном элементе можно определить как

$$u_C(0^-) = U = 4 \text{ В}.$$

2. *Определение вынужденных составляющих реакций* (токов в R-элементах). Для определения токов в вынужденном установившемся режиме следует изобразить эквивалентную резистивную цепь для момента времени $t = \infty$, поскольку в этот момент времени свободные составляющие, определяемые затухающими экспонентами, будут равны нулю. Емкостной элемент, как и в предыдущем случае, заменяем на разрыв, поскольку в установившемся режиме токи и напряжения также будут постоянными. На рис. 3.10 изображена эквивалентная резистивная цепь для момента $t = \infty$, из которой находим:

$$i_{1,\text{вын}} = i_{2,\text{вын}} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А}; \quad i_{C,\text{вын}} = 0.$$

3. *Определение корня характеристического уравнения* (или, как его называют в теории электрических цепей, собственной часто-

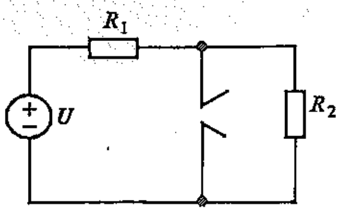


Рис. 3.10. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = \infty$

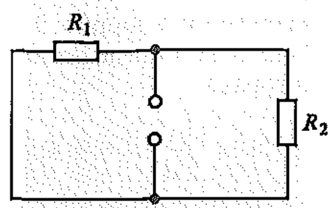


Рис. 3.11. Эквивалентная резистивная цепь для определения корня характеристического уравнения

ты цепи). Выражение для определения корня характеристического уравнения имеет вид

$$p = -\frac{1}{\tau},$$

где $\tau = R_э C$ — постоянная времени цепи; $R_э$ — эквивалентное сопротивление цепи.

Величина $R_э$ представляет собой общее сопротивление цепи относительно зажимов реактивного элемента (в данном случае — C-элемента) при отключенных источниках. Для рассматриваемого примера $R_э$ можно определить из эквивалентной резистивной цепи, изображенной на рис. 3.11:

$$R_э = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\ \text{Ом}.$$

В таком случае постоянная времени будет определяться выражением $\tau = R_э C = \frac{1}{2} c$, а корень характеристического уравнения будет равен $p = -2c^{-1}$.

4. *Определение постоянных интегрирования для каждого тока.* Предварительно определяются начальные значения токов, т.е. значения токов в момент времени $t = 0^+$ (первый момент времени после коммутации). При построении эквивалентной резистивной схемы для этого момента времени емкостной элемент следует заменить источником напряжения, поскольку напряжение на C-элементе в первый момент по закону коммутации должно сохраниться равным $u_C(0^-)$. На основании такого представления эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = 0^+$ будет иметь вид,

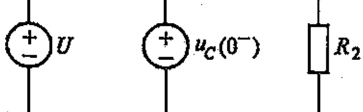


Рис. 3.12. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = 0^+$

представленный на рис. 3.12. В цепи (рис. 3.12) определяются токи в резисторах:

$$i_2 = \frac{u_C(0^-)}{R_2} = 4\ \text{А};$$

$$i_1 = \frac{U - u_C(0^-)}{R_1} = 0;$$

$$i_C = i_1 - i_2 = -4\ \text{А}.$$

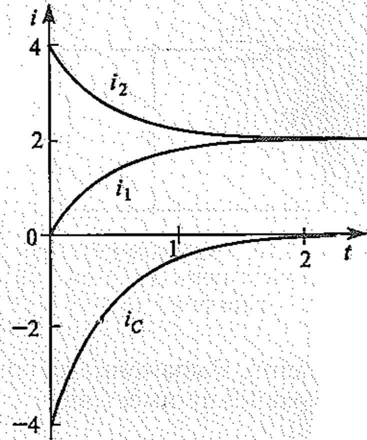


Рис. 3.13. Временны́е диаграммы для токов в ветвях цепи

Определив начальные значения токов, можно из них определить постоянные интегрирования для каждого тока. Выражение для решения относительно любого тока в момент времени $t = 0^+$ будет иметь вид

$$i(0^+) = i_{\text{вын}} + A\mathrm{e}^0,$$

отсюда любую постоянную времени можно определить как

$$A = i(0^+) - i_{\text{вын}}.$$

Согласно этому выражению можно определить все постоянные интегрирования:

$$A_1 = 0 - 2 - 2; \quad A_2 = 4 - 2 = 2; \quad A_C = -4 - 0 = -4.$$

Поскольку все компоненты решения найдены, можно записать общие решения для токов в ветвях цепи с R-элементами и тока в ветви с C-элементами:

$$i_1 = i_{1,\text{вын}} + A_1\mathrm{e}^{pt} = 2 - 2\mathrm{e}^{-2t};$$

$$i_2 = i_{2,\text{вын}} + A_2\mathrm{e}^{pt} = 2 + 2\mathrm{e}^{-2t};$$

$$i_C = i_{C,\text{вын}} + A_C\mathrm{e}^{pt} = -4\mathrm{e}^{-2t}.$$

Временны́е диаграммы найденных токов показаны на рис. 3.13.

3.3. Переходные процессы в последовательном колебательном контуре

Последовательным колебательным контуром называют последовательное соединение R-, L- и C-элементов цепи (рис. 3.14). Такое соединение будет представлять собой динамическую цепь второго порядка, процессы в которой описываются дифференциальным уравнением второго порядка или системой двух дифференциальных уравнений первого порядка. Если в момент времени $t = 0$ на вход такой цепи подключить источник постоянного напряжения, то в цепи будет происходить переходный процесс. В зависимости от значений параметров элементов цепи переходный процесс будет протекать по-разному.

Рассмотрим подробнее динамические процессы, которые будут протекать в последовательном колебательном контуре.

Пусть начальные условия в цепи определяются начальным напряжением на емкостном элементе $u_C(0^-) = u_{C0}$, а начальный ток в контуре равен нулю $i_L(0^-) = 0$. В момент времени $t = 0$ источник постоянного напряжения U подключается к цепи. После замыкания ключа в цепи происходит переходный процесс, характер которого определяется значениями параметров элементов цепи.

Сформируем математическую модель цепи в виде одного дифференциального уравнения второго порядка. Для этого запишем уравнение соединений цепи по закону напряжений Кирхгофа:

$$-U + u_R + u_L + u_C = 0.$$

Выразим напряжения на R- и L-элементах через ток, используя при этом вольт-амперные зависимости элементов:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = U.$$

Выразим ток в полученном уравнении через напряжение на емкостном элементе и подставим его в уравнение

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}; \quad LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U,$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U}{LC}.$$

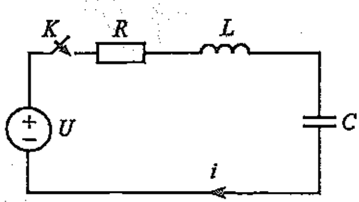


Рис. 3.14. Последовательный колебательный контур

Решение такого дифференциального уравнения известно из математики и может быть записано в общем виде:

$$u_C(t) = u_{C,\text{вын}} + u_{C,\text{св}}.$$

Вынужденная составляющая напряжения на емкостном элементе $u_{C,\text{вын}}$ как основной реакции в цепи определяется характером воздействия и может быть найдена в момент времени $t = \infty$. Резистивная эквивалентная цепь для этого момента времени изображена на рис. 3.15. В цепи можно определить напряжение на емкостном элементе: $u_{C,\text{вын}} = U$.

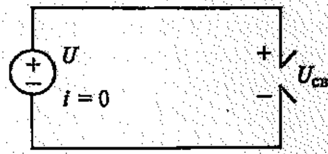


Рис. 3.15. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = \infty$

Корни характеристического уравнения, как известно из математики, можно определить из выражения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

где $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — частота собственных незатухающих колебаний.

В зависимости от соотношения α и ω_0 возможны три вида корней:

вещественные различные отрицательные ($\alpha > \omega_0$);

комплексные сопряженные ($\alpha < \omega_0$);

вещественные отрицательные равные (кратные) ($\alpha - \omega_0$).

Указанным видам корней соответствуют три вида переходного процесса в цепи:

апериодический, когда корни вещественные и различные;

колебательный, когда корни комплексные;

критический, когда корни кратные.

Корни характеристического уравнения в теории электрических цепей называют также собственными частотами цепи. Для наглядности и удобства анализа динамических процессов их откладывают на плоскости комплексной частоты $s = \sigma \pm j\omega$. Картины расположения собственных частот цепи для случаев апериодического, колебательного и критического режимов показаны на рис. 3.16 ... 3.18.

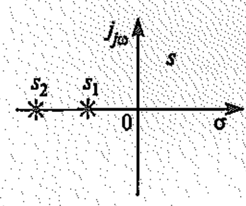


Рис. 3.16. Расположение собственных частот для случая апериодического режима

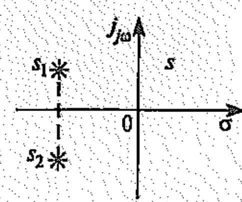


Рис. 3.17. Расположение собственных частот для случая колебательного режима

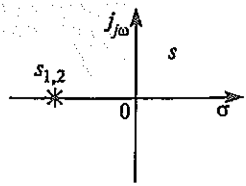


Рис. 3.18. Расположение собственных частот для случая критического режима

Рассмотрим подробнее динамику последовательного колебательного контура для каждого из этих трех случаев в отдельности.

1. Случай вещественных различных корней характеристического уравнения: имеем два различных вещественных корня $p_1 \neq p_2$. В этом случае в цепи будет протекать апериодический переходный процесс.

В случае вещественных различных корней переходный процесс для напряжения на C-элементе определяется суммой вынужденной и свободной составляющих. Вынужденная составляющая напряжения определена раньше и равняется $u_{C,\text{вын}} = U$, а свободная составляющая будет представлять собой сумму двух экспонент:

$$u_C(t) = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где $u_{C,\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 из начальных условий. Для этого подставим в полученное выражение $t = 0^+$:

$$u_C(0^+) = U + A_1 + A_2.$$

В результате получим одно уравнение для определения двух постоянных интегрирования. Второе необходимое уравнение можно вывести путем дифференцирования напряжения на емкостном элементе. Если производную от напряжения умножить на C, получим выражение тока в C-элементе и соответственно тока в контуре:

$$C\frac{du_C}{dt} = i; \qquad C\frac{du_C}{dt} = Cp_1 A_1 e^{p_1 t} + Cp_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Тогда при подстановке вместо $t = 0^+$ получим второе уравнение, необходимое для определения постоянных интегрирования:

$$i(0^+) = Cp_1 A_1 + Cp_2 A_2.$$

Решая оба уравнения совместно, получим выражения, определяющие постоянные интегрирования:

$$A_1 = \frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} p_2; \qquad A_2 = -\frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} p_1.$$

В таком случае общее решение дифференциального уравнения второго порядка, описывающего динамические процессы в колебательном контуре при вещественных различных корнях относительно напряжения на емкостном элементе, будет иметь вид:

$$u_C(t) = U + \frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} p_2 e^{p_1 t} - \frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} p_1 e^{p_2 t} =$$

$$= U + \frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

Если необходимо определить переходный процесс для тока, протекающего в контуре, это можно сделать путем дифференцирования полученного выражения и умножения его на C:

$$i(t) = C p_1 p_2 \frac{u_{C0} - U}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

В частном случае напряжение источника напряжения равно нулю: $U = 0$. При этом в цепи будет протекать свободный процесс за счет энергии, накопленной на емкостном элементе. Электрическую цепь для этого случая можно изобразить в виде, приведенном на рис. 3.19. Свободный процесс в цепи (рис. 3.19) для напряжения на емкостном элементе и для тока будет определяться выражениями

$$u_{C,\text{св}}(t) = \frac{u_{C0}}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t});$$

$$i_{\text{св}}(t) = C p_1 p_2 \frac{u_{C0}}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Временные диаграммы свободного процесса для напряжения на емкостном элементе и тока в контуре представлены на рис. 3.20 и 3.21.

2. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные:

$$p_1 = -\alpha + j\omega_C = -\omega_0 e^{-j\gamma}; \; p_2 = -\alpha - j\omega_C = -\omega_0 e^{-j\gamma}.$$

Переходный процесс в этом случае будет колебательный.

Для комплексных корней характеристического уравнения свободная составляющая напряжения на конденсаторе в общем случае запишется так же, как и для вещественных корней:

$$u_{C,\text{св}}(t) = \frac{u_{C0}}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

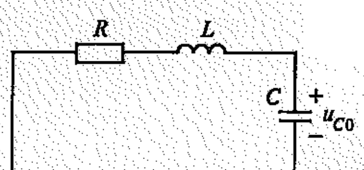


Рис. 3.19. Колебательный контур при отключенном источнике

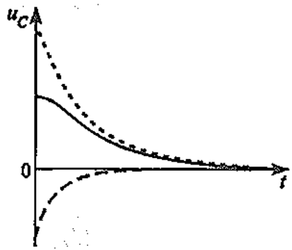


Рис. 3.20. Свободный процесс для напряжения на емкостном элементе (апериодический режим)

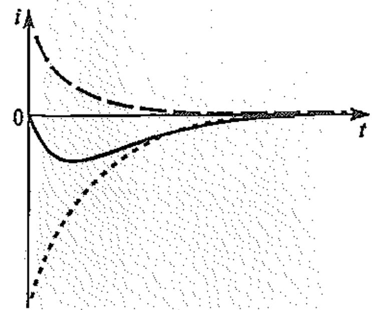


Рис. 3.21. Свободный процесс для тока в контуре (апериодический режим)

Для удобства анализа записанного выражение в случае колебательного процесса преобразуем его, подставив вместо p_1 и p_2 их выражения в показательной или алгебраической форме:

$$u_{C,\text{св}}(t)=\frac{u_{C0}}{-\alpha-j\omega_C+\alpha-j\omega_C}[(-\omega_0)\mathrm{e}^{j\gamma}\mathrm{e}^{(-\alpha+j\omega_C)t}-(\omega_0)\mathrm{e}^{-j\gamma}\mathrm{e}^{(-\alpha-j\omega_C)t}]=$$

$$=\frac{u_{C0}}{-j2\omega_C}(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\alpha t}(\mathrm{e}^{j(\omega_C t+\gamma)}-\mathrm{e}^{-j(\omega_C t+\gamma)})=\frac{u_{C0}}{\omega_C}\omega_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_C t+\gamma).$$

Для тока в контуре выражение, определяющее свободный процесс, можно получить аналогичным образом:

$$i_{\text{св}}=Cp_1p_2\frac{u_{C0}}{p_2-p_1}(\mathrm{e}^{p_1t}-\mathrm{e}^{p_2t})=$$

$$=C\omega_0^2\frac{u_{C0}}{-j2\omega_C}(\mathrm{e}^{(-\alpha+j\omega_C)t}-\mathrm{e}^{(-\alpha-j\omega_C)t})=-\frac{u_{C0}}{\rho}\frac{\omega_0}{\omega_C}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_C t).$$

Временные диаграммы напряжения на емкостном элементе и тока в контуре, построенные по полученным выражениям, представлены на рис. 3.22 и 3.23.

3. Корни характеристического уравнения p_1 и p_2 вещественные равные (кратные). В этом случае в цепи наблюдается критический режим. Для равных вещественных корней решение записывается особым образом в виде

$$u_C(t)=U+A_1\mathrm{e}^{-pt}+A_2t\mathrm{e}^{-pt}.$$

Для $t=0^+$ получим

$$u_{C0}=U+A_1.$$

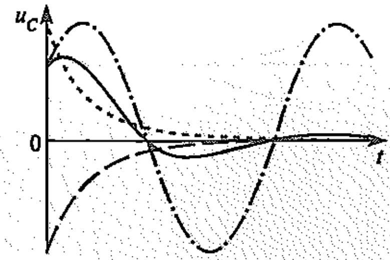


Рис. 3.22. Свободный процесс для напряжения на емкостном элементе (колебательный режим)

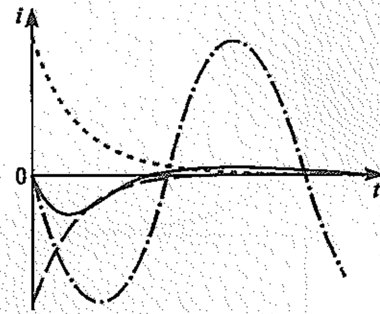


Рис. 3.23. Свободный процесс для тока в контуре (колебательный режим)

Продифференцируем записанное выражение и умножим на C. Тем самым получим второе уравнение, необходимое для определения постоянных интегрирования:

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i(t) = CpA_1\mathbf{e}^{pt} + CA_2\mathbf{e}^{pt} + CA_2pt\mathbf{e}^{pt}.$$

При $t = 0^+$ $\quad i(0^+) = 0 = CpA_1 + CA_2$.

Решая совместно два полученных уравнения, определим постоянные интегрирования:

$$A_1 = u_{C0} - U; \quad A_2 = -(u_{C0} - U)p.$$

Определив таким образом компоненты решения, можно записать полное решение дифференциального уравнения цепи относительно неизвестного напряжения на емкостном элементе:

$$u_C(t) = U + (u_{C0} - U)\mathbf{e}^{pt} - p(u_{C0} - U)t\mathbf{e}^{pt}.$$

Для частного случая, когда напряжение источника равно нулю: $U = 0$, т.е. когда в цепи будет происходить свободный процесс, динамика цепи будет определяться только свободными составляющими реакций:

$$u_{C,\text{св}}(t) = u_{C0}\mathbf{e}^{pt} - pu_{C0}t\mathbf{e}^{pt};$$

$$i_{\text{св}}(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = Cpu_{C0}\mathbf{e}^{pt} - Cpu_{C0}\mathbf{e}^{pt} - Cp^2u_{C0}t\mathbf{e}^{pt} = -Cp^2u_{C0}t\mathbf{e}^{pt}.$$

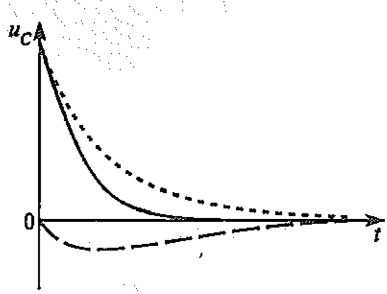


Рис. 3.24. Свободный процесс для напряжения на емкостном элементе (критический режим)

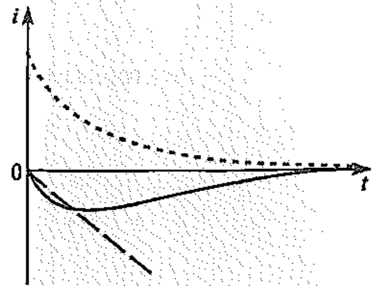


Рис. 3.25. Свободный процесс для тока в контуре (критический режим)

Временные диаграммы напряжения на емкостном элементе и тока в контуре представлены соответственно на рис. 3.24 и 3.25.

3.4. Метод переменных состояния

Метод предназначен для расчета переходных процессов в динамических цепях. Сущность метода заключается в составлении и решении уравнений состояния цепи. Уравнениями состояния называется система дифференциальных уравнений относительно переменных состояния электрической цепи, записанных в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n + b_{11}F_1 + b_{12}F_2 + \ldots + b_{1m}F_m; \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n + b_{21}F_1 + b_{22}F_2 + \ldots + b_{2m}F_m; \\ \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}F_1 + b_{n2}F_2 + \ldots + b_{nm}F_m. \end{cases}$$

За переменные состояния в динамических цепях принимают переменные, которые предоставляют наибольшее количество информации о состоянии цепи. К таким переменным, как правило, относятся напряжения на емкостных элементах u_C и токи в индуктивных элементах i_L. Систему уравнений состояния удобно записать в матричной форме:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + BF,$$

где $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ — вектор переменных состояния цепи;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов при переменных состояния;

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов при воздействиях;

$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{bmatrix}$ — вектор воздействий.

Составление уравнений состояния динамической цепи. Рассмотрим два способа составления уравнений состояния на примере цепи второго порядка, представленной на рис. 3.26.

Первый способ составления уравнений состояния основан на замене реактивных элементов источниками напряжения или тока. Реактивные элементы в цепи (рис. 3.27) заменяются источниками напряжения или тока, как показано на рис. 3.28. В результате замены динамическая цепь, включающая реактивные L- и C-элементы, преобразуется в эквивалентную резистивную цепь, как показано на рис. 3.29. В резистивной цепи (см. рис. 3.29) определяем ток в емкостном элементе i_C и напряжение на индуктивном элементе u_L, используя при этом любой метод расчета резистивных цепей, например, метод уравнений Кирхгофа. Для этого записываем уравнения соединений цепи на основе законов Кирхгофа:

$$\begin{cases} -i_L + i_C + i_2 - I = 0; \\ -U + u_1 + u_L + u_C = 0. \end{cases}$$

Из записанных уравнений определяем ток в емкостном элементе i_C и напряжение на индуктивном элементе u_L:

$$\begin{cases} i_C = I + i_L - i_2; \\ u_L = U - u_1 - u_C. \end{cases}$$

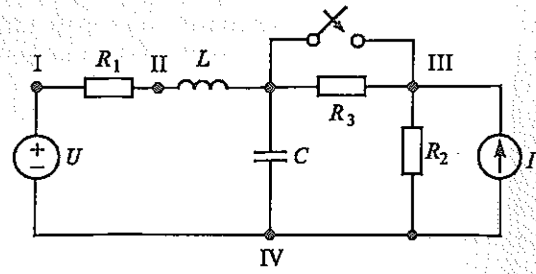


Рис. 3.26. Разветвленная динамическая цепь второго порядка

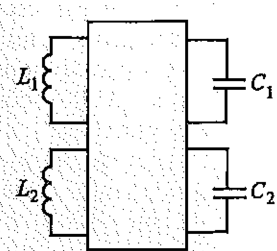


Рис. 3.27. Выделение реактивных элементов в динамической цепи

Заменяем все переменные в уравнениях переменными состояния и воздействиями на основе законов Ома, Кирхгофа и вольт-амперных характеристик элементов цепи:

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}; \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}; \quad i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_C}{R_2}; \quad u_1 = i_1 R_1 = i_L R_1.$$

После подстановки уравнения примут вид

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_C}{R_2} + i_L + I; \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -u_C - R_1 i_L + U. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части полученных уравнений на C и L соответственно, получим систему дифференциальных уравнений цепи, которая называется системой уравнений состояния цепи или системой уравнений Коши в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{CR_2}u_C + \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{C}I; \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{L}u_C - \dfrac{R_1}{L}i_L + \dfrac{1}{L}U. \end{cases}$$

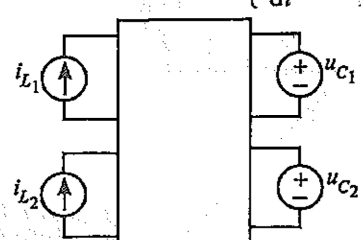


Рис. 3.28. Замена реактивных элементов источниками напряжения и тока

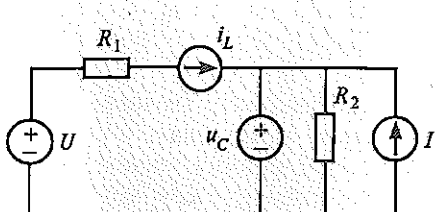


Рис. 3.29. Эквивалентная резистивная цепь

Второй способ составления уравнений состояния основан на использовании топологического графа цепи, подробные сведения о котором содержатся в гл. 7.

На рис. 3.30 изображен топологический граф цепи, показанный на рис. 3.26, который представляет собой геометрическое представление цепи с заменой ветвей цепи или ее элементов линиями. В топологическом графе выбирается дерево (жирные линии на рис. 3.30), т.е. совокупность ветвей, соединяющих узлы без образования контуров. По топологическому графу составляются уравнения главных сечений и главных контуров (см. гл. 7):

$$\begin{cases} i_U + i_1 = 0; \\ -i_1 + i_L = 0; \\ -i_L + i_C + i_2 - I = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -U + u_1 + u_L + u_C = 0; \\ -u_C + u_2 = 0; \\ -u_C - u_I = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений определяются ток в емкостном элементе i_C и напряжение на индуктивном элементе u_L:

$$\begin{cases} i_C = I + i_L - i_2; \\ u_L = U - u_1 - u_C. \end{cases}$$

Далее, как и в первом способе, все переменные в записанных уравнениях выражаются через переменные состояния и воздействия:

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}; \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t};$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_C}{R_2}; \quad u_1 = i_1 R_1 = i_L R_1.$$

После подстановки и преобразований уравнения примут окончательный вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{CR_2}u_C + \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{C}I; \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{L}u_C - \dfrac{R_1}{L}i_L + \dfrac{1}{L}U. \end{cases}$$

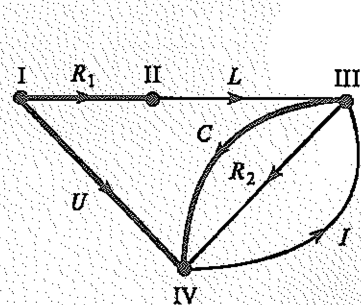


Рис. 3.30. Топологический граф динамической цепи

Аналитическое (точное) решение уравнений состояния. Существует множество методов решения уравнений состояния, среди которых наиболее популярными являются аналитические и численные. Численные методы удобно применять в тех случаях, когда имеется возможность использования компьютеров. В стандартном наборе функций современных программных математических пакетов имеются стандартные программы, позволяющие получать решения уравнений Коши с использованием численных методов. Главными их недостатками являются приближенность решения и отсутствие общего выражения, которое удобно анализировать. Алгоритмы численных методов решения уравнений состояния подробно описаны в специальной литературе.

Для анализа процессов, происходящих в динамических цепях, наиболее предпочтительными являются аналитические решения, поскольку в результате они позволяют получить общее аналитическое выражение. Рассмотрим пример получения точного (аналитического) решения уравнений состояния, составленных для цепи (см. рис. 3.26). Пусть заданы уравнения состояния цепи и ее параметры: $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф, $U = 12$В, $I = 6$А. Общий вид аналитического решения для цепи второго порядка известен:

$$u_C(t) = u_{C,\text{вын}} + u_{C,\text{св}}; \quad i_L(t) = i_{L,\text{вын}} + i_{L,\text{св}}.$$

Решение сводится к нахождению компонентов записанных выражений, которые в методе переменных состояния определяются из уравнений состояния.

1. Определяем независимые начальные условия. К ним относятся напряжение на емкостном элементе до замыкания ключа $u_C(0^-)$ и ток в индуктивном элементе $i_L(0^-)$. Для определения начальных условий изобразим эквивалентную резистивную цепь для момента времени $t = 0^-$ (рис. 3.31). Из цепи, показанной на рис. 3.31, можно определить

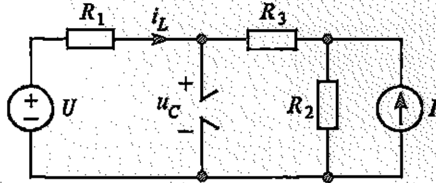
$$i_L = \frac{U - IR_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\text{ А}; \quad u_C = U - i_L R_1 = 10\text{ В}.$$

2. Определяем вынужденные составляющие переменных состояния. Вынужденные составляющие можно определить в режиме $t = \infty$. В этом режиме все токи и напряжения принимают установившиеся постоянные значения. Производные от постоянных переменных состояния равны нулю. В результате уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{CR_2}u_C + \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{C}I; \\ 0 = -\dfrac{1}{L}u_C - \dfrac{R_1}{L}i_L + \dfrac{1}{L}U. \end{cases}$$

Совместное решение уравнений состояния в режиме $t = \infty$ позволяет определить вынужденные составляющие реакций для

Рис. 3.31. Эквивалентная резистивная цепь для момента времени $t = 0^-$



напряжения на емкостном элементе и тока в индуктивном элементе:

$$u_{C,\text{вын}} = 9\text{В}; \quad i_{L,\text{вын}} = 3\text{А}.$$

3. Определяем корни характеристического уравнения или собственные частоты цепи. Для этого можно использовать простой алгоритм, основанный на матричных представлениях уравнений состояния:

$$\det[pE - A] = 0; \; A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{CR_2} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$pE - A = \begin{bmatrix} p+1 & -1 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}; \; \det[pE - A] = p^2 + 2p + 2.$$

Решение характеристического уравнения позволяет определить корни: $p_{1,2} = -1 \pm j$.

4. Определяем постоянные интегрирования. Для определения двух постоянных интегрирования в решении для напряжения на емкостном элементе необходимо сформировать два уравнения. Для этого продифференцируем общее решение для u_C, в результате чего получим систему двух уравнений с двумя неизвестными постоянными интегрирования:

$$\begin{cases} u_C(t) = 9 + e^{-t}(A_1 \cos t + A_2 \sin t); \\ u_C'(t) = -e^{-t}(A_1 \cos t + A_2 \sin t) + e^{-t}(-A_1 \sin t + A_2 \cos t). \end{cases}$$

Значения постоянных интегрирования можно определить из начальных условий, подставив в полученные уравнения $t = 0^+$:

$$u_C(0^+) = 9 + A_1;$$

$$u_C'(0^+) = -A_1 + A_2.$$

В свою очередь, значения $u_C(0^+)$ можно определить из закона коммутации для емкостного элемента $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10$ В, а $u_C^1(0^+)$ можно определить из уравнений состояния при $t = 0^+$:

$$u_C'(0^+) = -u_C(0^+) + i_L(0^+) + I = -2.$$

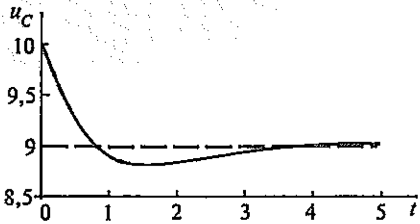


Рис. 3.32. Временна́я диаграмма переходного процесса для напряжения на C-элементе

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными постоянными интегрирования позволяет определить их значения:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = -1.$$

Зная все компоненты решения, можно записать полное аналитическое решение относительно напряжения на емкостном элементе:

$$u_C(t) = 9 + e^{-t}(\cos t - \sin t).$$

На рис. 3.32 показан график (временна́я диаграмма) переходного процесса для напряжения на C-элементе.

Аналогичным образом можно получить точное аналитическое решение для тока в индуктивном элементе. Для него уже найдены корни характеристического уравнения (те же, что и для напряжения на емкостном элементе) и вынужденная составляющая тока. Осталось определить постоянные интегрирования. Дифференцируем общий вид решения и получаем систему двух уравнений для определения двух постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} i_L(t) = 3 + e^{-t}(A_3 \cos t + A_4 \sin t); \\ i_L'(t) = -e^{-t}(A_3 \cos t + A_4 \sin t) + e^{-t}(-A_3 \sin t + A_4 \cos t). \end{cases}$$

Значения постоянных интегрирования определяем из начальных условий, подставив в полученные уравнения $t = 0^+$:

$$i_L(0^+) = 3 + A_3;$$

$$i_L'(0^+) = -A_3 + A_4.$$

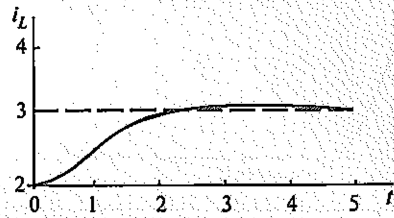
В свою очередь, значения $i_L(0^+)$ можно определить из закона коммутации для индуктивного элемента $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2$ А, а $i_L'(0^+)$ можно определить из уравнений состояния при $t = 0^+$:

$$i_L'(0^+) = -u_C(0^+) - i_L(0^+) + U = 0.$$

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными постоянными интегрирования позволяет определить их значения:

$$A_3 = A_4 = -1.$$

Рис. 3.33. Временная диаграмма переходного процесса для тока в L-элементе



Зная все компоненты решения, можно записать полное аналитическое решение относительно тока в индуктивном элементе:

$$i_L(t) = 3 - e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

На рис. 3.33 показан график (временная диаграмма) переходного процесса для тока в L-элементе.

3.5. Переходная и импульсная характеристики цепи

Переходной характеристикой электрической цепи называется реакция цепи на единичную ступенчатую функцию. Единичная ступенчатая функция широко применяется в теории электрических цепей и представляет собой функцию, общий вид которой показан на рис. 3.34. В курсе высшей математики эта функция называется функцией Хевисайда и аналитически записывается в виде

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Действие сигнала такого вида на входе электрической цепи эквивалентно подключению к цепи источника постоянного напряжения с помощью идеального ключа, напряжение которого равно одному вольту. Эквивалентные постановки этой задачи показаны на рис. 3.35 и 3.36.

Замыкание рубильника в момент времени, отличный от нуля, например, в момент времени $t = \tau$, можно представить как смещение ступенчатой функции на величину τ (рис. 3.37).

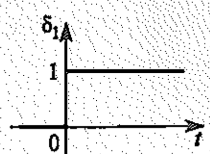


Рис. 3.34. Единичная ступенчатая функция

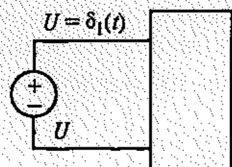


Рис. 3.35. Цепь при воздействии единичной ступенчатой функции

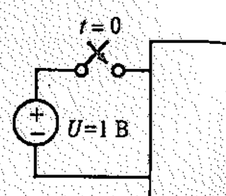


Рис. 3.36. Эквивалентная постановка задачи

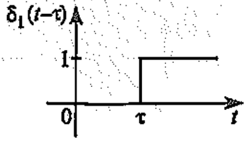


Рис. 3.37. Единичная ступенчатая функция, смещенная во времени

С помощью единичной ступенчатой функции можно формировать различные виды воздействий (рис. 3.38). Как видно из рис. 3.38, умножение экспоненциальной функции на единичную ступенчатую функцию означает умножение всех значений этой функции левее оси ординат на нуль. Умножение этой же функции на смещенную во времени единичную ступенчатую функцию означает умножение на ноль всех значений экспоненциальной функции, расположенных левее $t = \tau$. Умножение экспоненциальной смещенной функции на смещенную единичную ступенчатую функцию означает смещение во времени экспоненциального импульса на величину τ.

Импульсной характеристикой электрической цепи называется реакция цепи на импульсную функцию. Импульсная функция представляет собой функцию, общий вид которой показан на рис. 3.39. В курсе высшей математики эта функция называется функцией Дирака и аналитически записывается в виде

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \infty & t = 0; \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

Импульсная функция, как и ступенчатая функция, может быть смещена во времени, как это показано на рис. 3.40.

Связь между импульсной и ступенчатой функциями можно пояснить с помощью рис. 3.41. При стремлении величины τ к нулю функция $f(t)$ будет стремиться к единичной ступенчатой

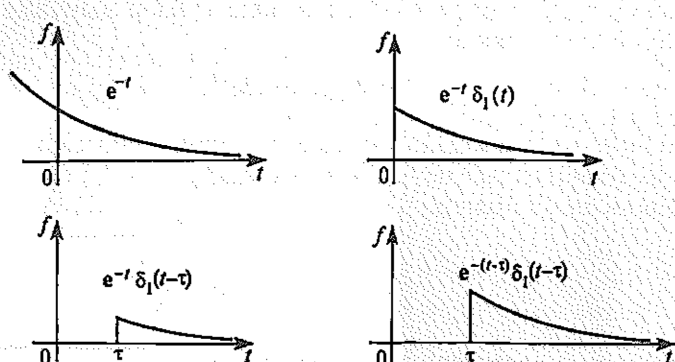


Рис. 3.38. Формирование различных видов воздействий с помощью единичной ступенчатой функции

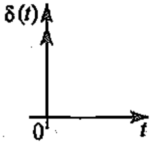


Рис. 3.39. Единичная импульсная функция

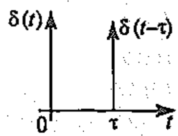


Рис. 3.40. Единичная импульсная функция, смещенная во времени

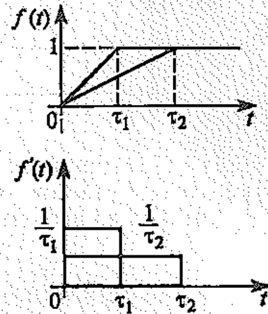


Рис. 3.41. Связь между импульсной и ступенчатой функциями

функции. Производная от этой функции $f'(t)$ при стремлении τ к нулю будет стремиться к импульсной функции, амплитуда которой будет равна бесконечности, длительность стремиться к нулю, а площадь импульсной функции будет равна единице. Связь между ступенчатой и импульсной функциями определяется с помощью производной и интеграла:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\delta_1(t)}{\mathrm{d}t}; \quad \delta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Рассмотрим пример определения переходной и импульсной характеристик динамической цепи первого порядка, представленной на рис. 3.42.

Пример. Пусть параметры элементов цепи известны: $R = 1$ Ом, $C = 1$ Ф. Требуется определить переходную и импульсную характеристики цепи по току.

Р е ш е н и е. Представим эквивалентную постановку задачи. К цепи подключается источник напряжения $U = 1$ В. В таком случае переходная характеристика по току в цепи численно равна самому току и определяется в виде суммы вынужденной и свободной составляющих:

$$h_1(t) = h_{1,\text{вын}} + A\mathrm{e}^{pt}.$$

Компоненты записанного решения определяются из эквивалентных резистивных цепей, как это подробно описано в подразд. 3.2:

$$h_{1,\text{вын}} = 0; \; p = -\frac{1}{RC}; \; A = h_1(0^+) - h_{1,\text{вын}} = \frac{1}{R}.$$

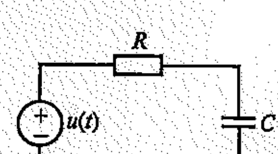


Рис. 3.42. Динамическая цепь первого порядка

Переходная характеристика $h_1(t) = \frac{1}{R} \times$ $\times\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \delta_1(t)$.

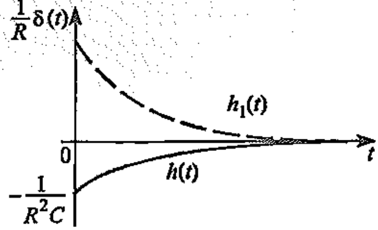


Рис. 3.43. Временные диаграммы переходной и импульсной характеристик цепи

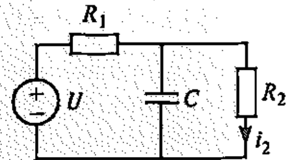


Рис. 3.44. Разветвленная динамическая цепь первого порядка

Импульсная характеристика определяется исходя из связи ее с переходной характеристикой:

$$h_1(t) = \frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\delta_1(t) + f(0)\delta(t);$$

$$h(t) = -\frac{1}{R^2C}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\delta_1(t) + \frac{1}{R}\delta(t).$$

Временные диаграммы переходной и импульсной характеристик цепи приведены на рис. 3.43.

Рассмотрим другой пример. В цепи (рис. 3.44) параметры элементов известны: $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $C = 1$ Ф. Требуется определить переходную и импульсную характеристики цепи по току i_2.

Как и в предыдущем примере, представим, что на вход цепи в момент времени $t = 0$ подключается источник постоянного напряжения $U = 1$ (рис. 3.45). Переходная характеристика, под которой подразумеваем ток i_2, определяется согласно алгоритму решения, подробно описанному в подразд. 3.2. Воздействием является единичная ступенчатая функция $U = \delta_1(t)$, переходной характеристикой является ток $h_1(t) = i_2(t)$, общее решение дифференциального уравнения относительно переходной характеристики $h_1(t) = h_{1,\text{вын}} + A^{pt}$. Согласно алгоритму решения, приведенному в подразд. 3.2, сначала определяем вынужденную составляющую переходной характеристики:

$$h_{1,\text{вын}} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}A,$$

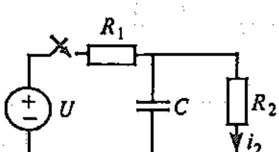


Рис. 3.45. Эквивалентная постановка задачи

затем корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{1}{R_э C} = -2c^{-1},$$

и, наконец, постоянную интегрирования

$$h_1(0^+) = 0; \quad A = 0 - 0{,}5 = -0{,}5.$$

Окончательно переходная характеристика цепи по току i_2 будет иметь такой вид:

$$h_1(t) = (0{,}5 - 0{,}5^{-2t})\delta_1(t).$$

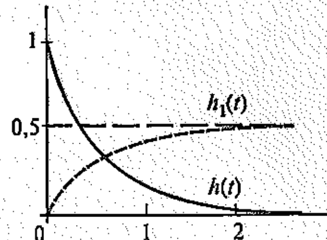


Рис. 3.46. Временные диаграммы переходной и импульсной характеристик

Импульсную характеристику цепи по этому же току получаем на основании связи импульсной характеристики с переходной:

$$h(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}; \quad h(t) = \frac{d\,f(t)}{dt}\delta_1(t) + f(0)\delta(t);$$

$$h(t) = e^{-2t}\delta_1(t).$$

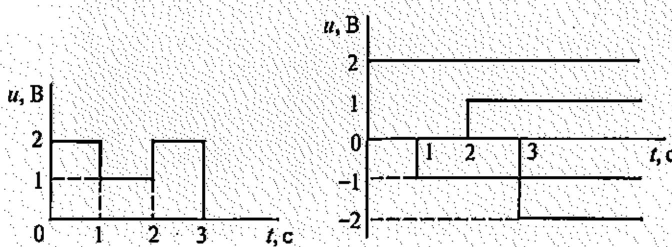
Временные диаграммы переходной и импульсной характеристик представлены на рис. 3.46.

С помощью переходной характеристики можно не только судить о динамических свойствах цепи, но и определить реакцию цепи на произвольное воздействие.

Зная переходную характеристику цепи, можно быстро определить реакцию на воздействие сигнала, который можно представить в виде наложения ступенчатых функций. Например, на рис. 3.47, *а* изображен импульс напряжения, который можно разложить на простейшие составляющие в виде ступенчатых функций, как показано на рис. 3.47, *б*.

Если этот импульс подается на вход цепи, переходная характеристика которой известна:

$$h_1(t) = e^{-t}\delta_1(t),$$



а *б*

Рис. 3.47. Импульс напряжения (*а*) и его разложение на простейшие составляющие в виде ступенчатых функций (*б*)

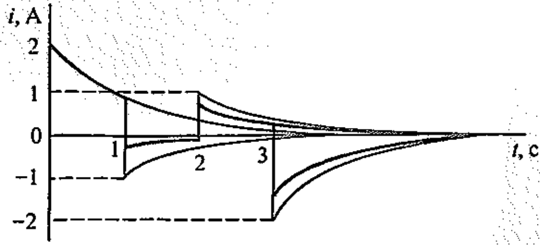


Рис. 3.48. График тока в функции времени

то аналитическое выражение полной реакции на воздействие приведенного импульса можно записать в соответствии с методом наложения как сумму реакций на действие каждой составляющей ступенчатой функции:

$$i(t) = 2e^{-t}\delta_1(t) - e^{-(t-1)}\delta_1(t-1) + e^{-(t-2)}\delta_1(t-2) - 2e^{-(t-3)}\delta_1(t-3).$$

График этой реакции показан на рис. 3.48.

При воздействии сигнала произвольной формы, который представлен в аналитическом виде, реакцию цепи можно определить с помощью интегралов наложения (свертки) на основе использования переходной или импульсной характеристик:

$$f_2(t) = f_1(0)h_1(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Если в записанном равенстве заменить переменные, что, как известно из математики, допустимо, можно получить еще три формы интеграла наложения через переходную характеристику:

$$f_2(t) = f_1(t)h_1(0) + \int_0^t f_1'(\tau)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$f_2(t) = f_1(0)h_1(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau)h_1(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$f_2(t) = f_1(t)h_1(0) + \int_0^t f_1'(t-\tau)h_1(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Аналогичным образом можно записать интеграл наложения через импульсную характеристику:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Заменив переменные в интеграле, можно получить еще одну форму интеграла наложения через импульсную характеристику:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Пример. На вход цепи (рис. 3.49) подается воздействие в виде экспоненциального импульса $u(t)=4\mathbf{e}^{-2t}\times\delta_1(t)$ (рис. 3.50), переходная и импульсная характеристики цепи известны:

$$h_1(t)=\mathbf{e}^{-t}\delta_1(t);$$

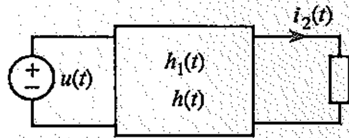


Рис. 3.49. Общий вид динамической цепи

$$h(t)=-\mathbf{e}^{-t}\delta_1(t)+\delta(t).$$

Требуется определить реакцию цепи в виде тока $i_2(t)$ на заданное воздействие.

Решение. Рассмотрим решение поставленной задачи как с использованием переходной, так и импульсной характеристик.

1. Для определения реакции цепи $i_2(t)$ используем интеграл наложения через переходную характеристику:

$$f_2(t)=f_1(0)h_1(t)+\int_0^t f_1'(\tau)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$i_2(t)=4\mathbf{e}^{-t}+\int_0^t -8\mathbf{e}^{-2\tau}\mathbf{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=4\mathbf{e}^{-t}-8\mathbf{e}^{-t}\int_0^t \mathbf{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=4\mathbf{e}^{-t}+8\mathbf{e}^{-t}\mathbf{e}^{-\tau}\Big|_0^t=$$

$$=4\mathbf{e}^{-t}+8\mathbf{e}^{-2t}-8\mathbf{e}^{-t}=8\mathbf{e}^{-2t}-4\mathbf{e}^{-t}.$$

2. Определим теперь ту же реакцию цепи, но с использованием интеграла наложения через импульсную характеристику:

$$f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$i_2(t)=\int_0^t 4\mathbf{e}^{-2(t-\tau)}(-\mathbf{e}^{-t}+\delta(\tau))\mathrm{d}\tau=-4\mathbf{e}^{-2t}\int_0^t \mathbf{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau+4\mathbf{e}^{-2t}\int_0^t \mathbf{e}^{2\tau}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=-4\mathbf{e}^{-2t}\mathbf{e}^{\tau}\Big|_0^t+4\mathbf{e}^{-2t}=-4\mathbf{e}^{-t}+4\mathbf{e}^{-2t}+4\mathbf{e}^{-2t}=8\mathbf{e}^{-2t}-4\mathbf{e}^{-t}.$$

Временая диаграмма реакции $i_2(t)$ показана на рис. 3.51.

Рис. 3.50. Экспоненциальный импульс

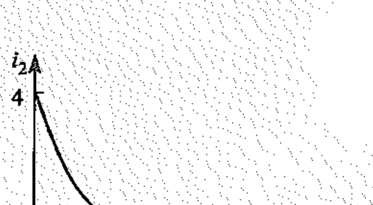


Рис. 3.51. Временная диаграмма реакции i_2t

Глава 4
АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

4.1. Основные понятия и определения

Синусоидальными сигналами или воздействиями называются переменные напряжения и токи источников, которые аналитически можно записать с помощью синусоидальной функции в синусной или косинусной форме:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha'_u) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u);$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha'_i) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i),$$

где U_m и I_m — амплитудные значения напряжения и тока; $\omega t + \alpha = \gamma$ — фаза колебаний; $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$ — угловая частота или скорость изменения фазы, рад/с; α_u и α_i — начальные фазы колебаний (измеряются, как правило, в пределах от $-\pi$ до $+\pi$).

Как правило, в теории электрических цепей синусоидальные функции напряжений и токов записывают в косинусной форме, поскольку косинус является четной функцией и с ней проще оперировать.

Временная диаграмма (график) переменного синусоидального напряжения представлена на рис. 4.1.

При наличии двух или нескольких сигналов между ними может существовать сдвиг фаз φ. Если угол $\varphi > 0$, то напряжение u_1 опережает u_2 на угол $\varphi = \alpha_{u1} - \alpha_{u2}$, как это показано на рис. 4.2. Если угол $\varphi = 0$, то два напряжения совпадают по фазе (рис. 4.3). Если угол $\varphi = \pi$, то говорят, что напряжения находятся в противофазе (рис. 4.4). Если угол $\varphi = \pi/2$, то напряжения находятся в квадратуре (рис. 4.5).

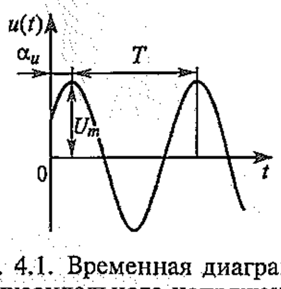


Рис. 4.1. Временная диаграмма синусоидального напряжения

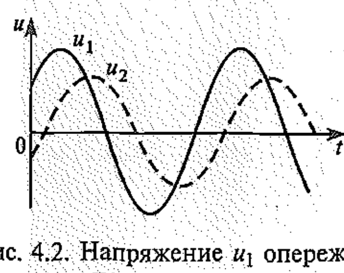


Рис. 4.2. Напряжение u_1 опережает напряжение u_2

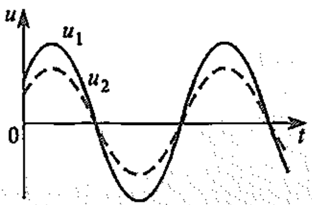


Рис. 4.3. Напряжения совпадают по фазе

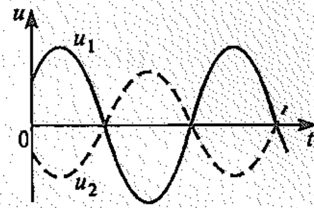


Рис. 4.4. Напряжения находятся в противофазе

Среднее значение синусоидальной функции за некоторый период времени можно вычислить из выражения:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Среднее значение синусоидальной функции за полный период равно нулю, поскольку суммарная площадь, ограниченная этой функцией, за период равна нулю (рис. 4.6). Заштрихованные области, лежащие выше и ниже оси абсцисс, равны и, следовательно, суммарная площадь за период равна нулю. Поэтому когда идет речь о среднем значении синусоидальной функции, его вычисляют только за половину периода. Среднее значение за половину периода синусоидальной функции можно вычислить по формуле:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T/2}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} I_m \cos\frac{2\pi}{T} t\mathrm{d}t = \frac{2}{T} I_m \frac{T}{2\pi} \sin\frac{2\pi}{T} t \Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{2I_m}{\pi} = 0{,}637 I_m.$$

Действующее значение синусоидальной функции определяется из другого выражения:

$$F_{\text{д}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t}.$$

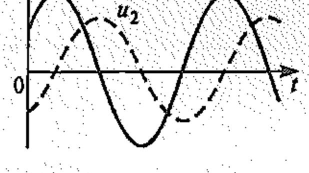


Рис. 4.5. Напряжения находятся в квадратуре

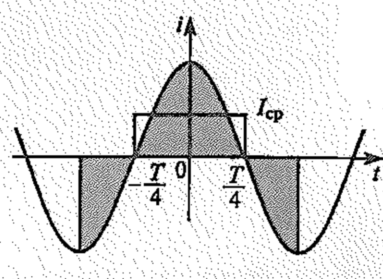


Рис. 4.6. Среднее значение синусоидальной функции

Для синусоидального тока это выражение можно записать следующим образом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T I_m^2 \mathrm{d}t} + \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T I_m^2 \cos 2\omega t \mathrm{d}t} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m.$$

Действующее значение переменного тока — это такой постоянный ток, который в R-элементе за период выделяет такое же количество тепловой энергии, как и переменный ток. Все выводы, сделанные относительно синусоидального тока, применимы и для синусоидального напряжения.

4.2. Законы Кирхгофа и Ома в комплексной форме

Для синусоидальных сигналов законы Кирхгофа и Ома удобно записывать в комплексной форме. Для этого временные функции сигналов представляются в комплексной форме. Это можно сделать следующим образом. Во временной области синусоидальные сигналы записываются в виде

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u); \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i).$$

В комплексной форме синусоидальный сигнал можно представить как вещественную часть комплексного числа или вектора:

$$\dot{a} = a + jb = A\mathrm{e}^{j\gamma} = A\cos\gamma + jA\sin\gamma,$$

где $a = A\cos\gamma = \mathrm{Re}[\dot{a}]$ — вещественная (реальная) часть вектора $\dot{a}$; $b = A\sin\gamma = \mathrm{Im}[\dot{a}]$ — мнимая часть вектора $\dot{a}$; $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль вектора $\dot{a}$; $\gamma = \mathrm{arctg}(b/a)$ — фаза вектора $\dot{a}$.

Для гармонической функции можно записать:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = \mathrm{Re}[U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \alpha_u)}] =$$

$$= \mathrm{Re}[U_m \mathrm{e}^{j\alpha_u} \mathrm{e}^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{U}_m \mathrm{e}^{j\omega t}],$$

где $\dot{U}_m$ — комплексная амплитуда напряжения.

Геометрически комплексная амплитуда представляет собой вектор, характеризуемый модулем и фазой, равными, соответственно, амплитуде и начальной фазе гармонической функции, как это показано на рис. 4.7, $\mathrm{e}^{j\omega t}$ — оператор вращения, представляющий собой единичный вектор, умножение на который комплексной амплитуды напряжения $\dot{U}_m \mathrm{e}^{j\omega t}$ означает вращение вектора комплексной амплитуды против направления движения ча-

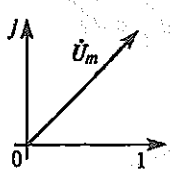


Рис. 4.7. Комплексная амплитуда напряжения

совой стрелки с угловой частотой ω. Производная и интеграл от функции $\mathrm{e}^{j\omega t}$ также представляют собой экспоненциальные функции:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{j\omega t} = j\omega \mathrm{e}^{j\omega t}; \quad \int \mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

При решении задач в комплексной области все токи и напряжения заменяются комплексными амплитудами. Это позволяет операции дифференцирования и интегрирования заменить соответственно операциями умножения и деления на $j\alpha$. Так, синусоидальное напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ в комплексной области заменяется комплексной амплитудой $\dot{U}_m \mathrm{e}^{j\alpha_u}$, а синусоидальный ток $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ заменяется комплексной амплитудой $\dot{I}_m \mathrm{e}^{j\alpha_i}$.

Основные выводы, относящиеся к синусоидальным сигналам, можно обобщить и применить для сигналов других видов, таких как экспоненциальные сигналы или так называемые обобщенные сигналы.

Обобщенным сигналом называется сигнал вида

$$u(t) = U_m \mathrm{e}^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u) \text{ или } i(t) = I_m \mathrm{e}^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_i).$$

Такой сигнал также можно представить в комплексной форме, как и синусоидальный сигнал:

$$u(t) = U_m \mathrm{e}^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u) = \mathrm{Re}[U_m \mathrm{e}^{\sigma t} \mathrm{e}^{j(\omega t + \alpha_u)}] =$$

$$= \mathrm{Re}[U_m \mathrm{e}^{j\alpha_u} \mathrm{e}^{(\sigma + j\omega)t}]\,\mathrm{Re}[\dot{U}_m \mathrm{e}^{st}],$$

где e^{st} — обобщенная экспонента; $s = \sigma \pm j\omega$ — комплексная частота.

В зависимости от значений σ и ω из обобщенного сигнала можно получить целый спектр сигналов, как это, например, показано на рис. 4.8...4.11.

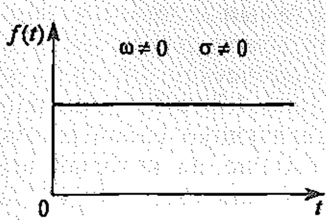


Рис. 4.8. Постоянный сигнал

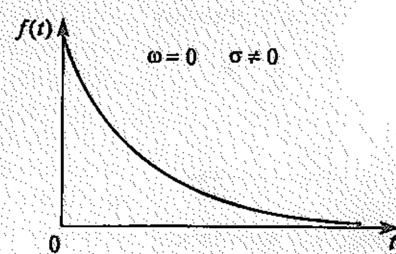


Рис. 4.9. Экспоненциальный сигнал

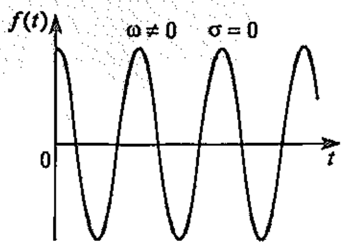


Рис. 4.10. Синусоидальный сигнал

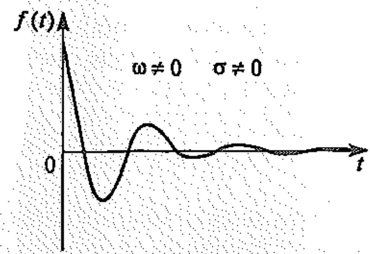


Рис. 4.11. Затухающий синусоидальный сигнал

Законы токов и напряжений Кирхгофа можно записать как для мгновенных значений токов и напряжений, так и для комплексных амплитуд этих токов и напряжений:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0;\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_{k} = 0$ — закон токов Кирхгофа в комплексной форме;

$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{U}_{mk} = 0;\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \dot{U}_{k} = 0$ — закон напряжений Кирхгофа в комплексной форме.

Рассмотрим пример использования законов Кирхгофа в комплексной форме.

Пример. Пусть имеется узел в цепи, к которому подключены четыре ветви, как это показано на рис. 4.12. В первых трех ветвях ток направлен к узлу, а в четвертой — от узла. Все токи синусоидальные и параметры трех из них известны:

$$i_1(t) = 4\cos t;\ i_2(t) = 6\cos(t + 90^\circ);\ i_3(t) = 2\cos(t - 90^\circ).$$

Требуется определить четвертый ток.

Решение. Для решения этой задачи необходимо все токи перевести в комплексную форму, т.е. записать их комплексные амплитуды:

$$\dot{I}_{m1} = 4;\ \dot{I}_{m2} = 6\mathrm{e}^{j90^\circ} = j6;\ \dot{I}_{m3} = 2\mathrm{e}^{-j90^\circ} = -j2.$$

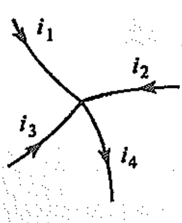


Рис. 4.12. Узел цепи

Затем необходимо воспользоваться законом токов Кирхгофа в комплексной форме для комплексных амплитуд токов:

$$\dot{I}_{m4} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} =$$

$$= 4 + j6 - j2 = 4 + j4 = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ}.$$

И, наконец, по найденной комплексной амплитуде четвертого тока можно записать его временную функцию

$$i_4(t) = 4\sqrt{2}\cos(t + 45^\circ).$$

Эту задачу можно решить графически с помощью векторной диаграммы, которая представляет собой картину расположения векторов токов и напряжений на комплексной плоскости. Для этого, как показано на рис. 4.13, на комплексной плоскости нужно отложить три вектора комплексных амплитуд известных токов, а вектор комплексной амплитуды четвертого тока можно построить путем суммирования векторов комплексных амплитуд известных токов на основе закона токов Кирхгофа.

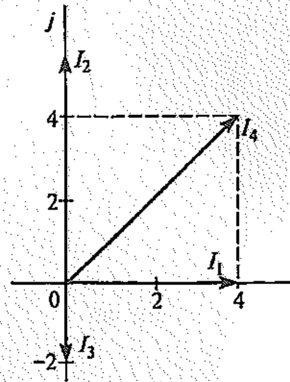


Рис. 4.13. Векторная диаграмма

Закон Ома в комплексной форме связывает комплексы напряжения и тока:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z}; \quad \dot{U}_m = \dot{I}_m Z;$$

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = |Z| e^{j\varphi} = r + jx,$$

где Z — комплексное сопротивление двухполюсника, которое представляет собой комплексное число или вектор, который можно отложить на комплексной плоскости (рис. 4.14).

Комплексная проводимость Y — величина, обратная комплексному сопротивлению:

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\alpha_i - \alpha_u)} = |Y| e^{j\psi} = g + jb.$$

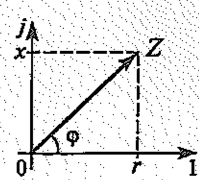


Рис. 4.14. Комплексное сопротивление двухполюсника

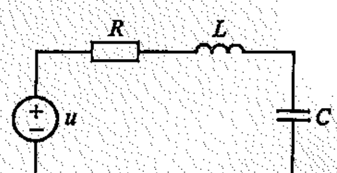


Рис. 4.15. Цепь с последовательным соединением элементов

Комплексные сопротивления и проводимости элементов складываются по тем же правилам, что и сопротивления и проводимости R-элементов. Например, в цепи (рис. 4.15) комплексные сопротивления элементов в последовательном контуре суммируются, а напряжение источника согласно закону Ома в комплексной форме связано с током в контуре следующим выражением:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m(Z_R + Z_L + Z_C).$$

Ток в контуре соответственно можно определить по формуле:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{вх}}},$$

где $Z_{\text{вх}} = (Z_R + Z_L + Z_C)$ — общее или входное сопротивление контура.

4.3. Элементы цепи в синусоидальном установившемся режиме

***R*-элемент и его характеристики.** R-элемент и его схема замещения в комплексной форме показаны на рис. 4.16. Для определения комплексного сопротивления и комплексной проводимости R-элемента выразим синусоидальный ток, условно протекающий в нем, через напряжение и сопротивление, руководствуясь при этом вольт-амперной характеристикой R-элемента:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u); \quad i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R}\cos(\omega t + \alpha_u).$$

Из этого равенства можно получить выражение для комплексного сопротивления резистора:

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad \alpha_i = \alpha_u;$$

Рис. 4.16. R-элемент и его схема замещения

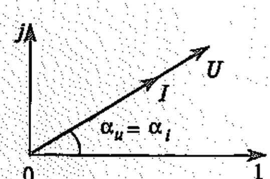


Рис. 4.17. Векторная диаграмма для R-элемента

$$Z_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{\frac{U_m}{R} e^{j\alpha_u}} = R;$$

$$\mathrm{Re}[Z] = R; \quad \mathrm{Im}[Z] = 0.$$

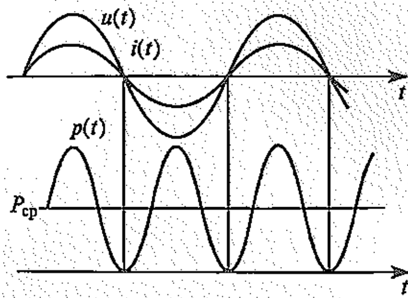


Рис. 4.18. Временные диаграммы для R-элемента

Из записанных выражений можно сделать вывод: в R-элементе ток и напряжения совпадают по фазе. Это можно наглядно показать с помощью векторной диаграммы, изображенной на рис. 4.17.

Аналогично можно получить выражение для комплексной проводимости:

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G; \quad \mathrm{Re}[Y] = G; \quad \mathrm{Im}[Y] = 0.$$

Мгновенная мощность R-элемента определяется произведением тока на напряжение:

$$p(t) = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \alpha_u)\cos(\omega t + \alpha_i) = U_m I_m \cos^2(\omega t + \alpha_u).$$

Из тригонометрии известно, что $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, откуда:

$$p(t) = UI[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_u)].$$

Временные диаграммы напряжения, тока и мощности R-элемента показаны на рис. 4.18. Среднее значение мощности за период (потребляемую мощность) можно определить, вычислив интеграл:

$$P_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t = UI = I^2 R, \text{ Вт},$$

поскольку $\int_0^T \cos(2\omega t + 2\alpha_u)\mathrm{d}t = 0.$

***L*-элемент и его характеристики.** L-элемент и его схема замещения в частотной (комплексной) области представлены на рис. 4.19. Для определения комплексного сопротивления и комплексной проводимости L-элемента выразим синусоидальное напряжение на нем через ток, руководствуясь при этом вольт-амперной зависимостью L-элемента:

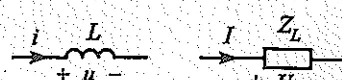


Рис. 4.19. L-элемент и его схема замещения

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i);$$

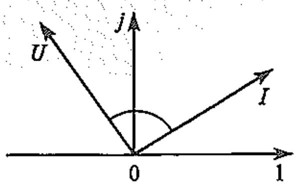


Рис. 4.20. Векторная диаграмма для L-элемента

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -I_m L\omega \sin(\omega t + \alpha_i) =$$

$$= I_m \omega L \cos(\omega t + \alpha_i + 90^\circ).$$

Разделив комплексную амплитуду напряжения на комплексную амплитуду тока, можно получить выражение для комплексного сопротивления L-элемента:

$$Z_L = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \omega L e^{j90^\circ} = j\omega L;$$

$$\mathrm{Re}[Z_L] = 0; \quad \mathrm{Im}[Z_L] = \omega L = x_L.$$

Из записанных выражений можно сделать вывод: в L-элементе ток отстает от напряжения на угол 90°. Этот вывод можно проиллюстрировать с помощью векторной диаграммы, изображенной на рис. 4.20.

Аналогично можно получить выражение для комплексной проводимости:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L};$$

$$\mathrm{Re}[Y_L] = 0; \quad \mathrm{Im}[Y_L] = -\frac{1}{\omega L} = -b_L.$$

Мгновенная мощность L-элемента определяется произведением тока на напряжения или:

$$p(t) = u_i = U_m I_m \cos(\omega t + \alpha_i)\cos(\omega t + \alpha_i + 90^\circ) =$$
$$= UI\cos(2\omega t + 2\alpha_i + 90^\circ),$$

поскольку, как известно из математики,

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Временные диаграммы напряжения, тока, мощности и энергии L-элемента показаны на рис. 4.21. Мгновенная энергия определяется из выражения

$$w_L(t) = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2\cos^2(\omega t + \alpha_i)}{2} = \frac{LI^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_i)].$$

Как видно из рис. 4.21, среднее значение мощности за период равно нулю, а среднее значение энергии можно определить по формуле:

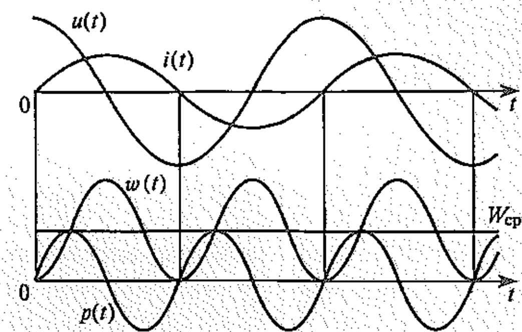


Рис. 4.21. Временные диаграммы для L-элемента

$$W_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{LI^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_i)]\,\mathrm{d}t = \frac{LI^2}{2},$$

где $\int_0^T \cos(2\omega t + 2\alpha_i)\,\mathrm{d}t = 0.$

C-элемент и его характеристики. C-элемент и его схема замещения в частотной (комплексной) области представлены на рис. 4.22. Для определения комплексного сопротивления и комплексной проводимости C-элемента выразим синусоидальный ток на нем через напряжение, исходя из его вольт-амперной характеристики:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u);$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -U_m C\omega \sin(\omega t + \alpha_u) = U_m \omega C \cos(\omega t + \alpha_u + 90^\circ).$$

Из записанных равенств можно получить выражение для комплексного сопротивления C-элемента:

$$Z_C = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{\omega C}\mathrm{e}^{-j90^\circ} = -j\frac{1}{\omega C};$$

$$\mathrm{Re}[Z_C] = 0; \quad \mathrm{Im}[Z_C] = \frac{1}{\omega C} = x_C.$$

Из данных выражений можно сделать вывод: в C-элементе ток опережает напряжение на угол 90°. Это можно наглядно показать с помощью векторной диаграммы (рис. 4.23).

Рис. 4.22. C-элемент и его схема замещения

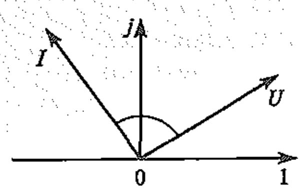


Рис. 4.23. Векторная диаграмма для C-элемента

Аналогично можно получить выражение для комплексной проводимости:

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jb_C;$$

$$\mathrm{Re}[Y_C] = 0; \quad \mathrm{Im}[Y_C] = \omega C.$$

Мгновенная мощность C-элемента определяется произведением тока на напряжения или:

$$p(t) = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \alpha_u)\cos(\omega t + \alpha_u + 90°) =$$

$$= UI\cos(2\omega t + 2\alpha_u + 90°).$$

Временные диаграммы напряжения, тока, мощности и энергии C-элемента показаны на рис. 4.24.

Мгновенная энергия определяется из выражения

$$w_C(t) = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2\cos^2(\omega t + \alpha_u)}{2} =$$

$$= \frac{CU^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_u)].$$

Среднее значение мощности за период равно нулю. Среднее значение энергии можно определить по формуле:

$$W_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{CU^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_u)]\,\mathrm{d}t = \frac{CU^2}{2}.$$

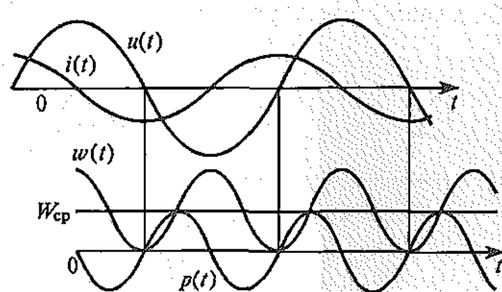


Рис. 4.24. Временные диаграммы для C-элемента

4.4. Мощность пассивного двухполюсника в синусоидальном установившемся режиме

Любой пассивный элемент можно представить в виде двухполюсника, т.е. элемента с двумя выводами, обладающим сопротивлением Z, через который протекает синусоидальный ток i и на зажимах которого синусоидальное напряжение u. Мгновенную мощность такого двухполюсника можно определить как произведение напряжения на ток:

$$p(t) = u(t)i(t),$$

или

$$p(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) I_m \cos(\omega t + \alpha_i).$$

Преобразовав произведение косинусов, получим

$$p(t) = UI \cos(\alpha_u - \alpha_i) + UI \cos(2\omega t + 2\alpha_i + \varphi).$$

Это означает, что мгновенная мощность пассивного двухполюсника будет являться синусоидальной функцией с удвоенной частотой. Временные диаграммы тока, напряжения и мощности показаны на рис. 4.25 и 4.26. Преобразуем полученное выражение для мгновенной мощности по формулам приведения:

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta),$$

тогда

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos\varphi \cdot \cos(2\omega t + 2\alpha_i) - UI\sin\varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\alpha_i),$$

или

$$p(t) = UI\cos\varphi[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_i)] - UI\sin\varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\alpha_i).$$

В результате проделанных преобразований мгновенную мощность можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$p(t) = p_r(t) + p_q(t),$$

где $p_r(t) = UI\cos\varphi[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha_i)]$ — активная составляющая мгновенной мощности; $p_q(t) = -UI\sin\varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\alpha_i)$ — реактивная составляющая мгновенной мощности.

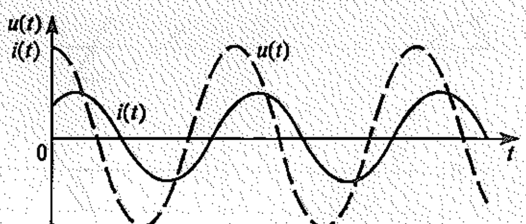


Рис. 4.25. Временные диаграммы тока и напряжения пассивного двухполюсника

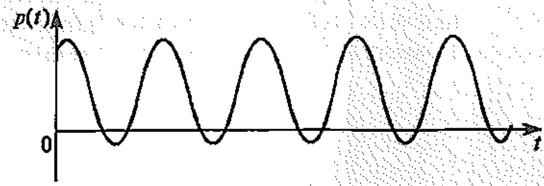


Рис. 4.26. Временные диаграммы мощности пассивного двухполюсника

Среднее значение активной составляющей мгновенной мощности и амплитудное значение реактивной составляющей мгновенной мощности называются соответственно:

$P = UI\cos\varphi$ — активная (потребляемая) мощность, Вт;

$Q = UI\sin\varphi$ — реактивная мощность, вар;

$S = UI$ — полная мощность, В·А.

Мощности пассивного двухполюсника можно выразить через параметры комплексного сопротивления:

$$Z = r + jx; \quad P = I^2 r; \quad Q = I^2 x; \quad S = I^2 |Z|.$$

В комплексной форме полная мощность представляется как комплексное выражение, у которого вещественная часть представляет собой активную мощность, а мнимая часть — реактивную мощность:

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UIe^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ.$$

Пример. Задана цепь, структура которой приведена на рис. 4.27. Воздействие и параметры элементов цепи известны:

$u(t) = 10\sqrt{2}\cos(t - 45^\circ)$; $R = 1$ Ом; $L = 1$ Гн.

Требуется определить мощности в цепи.

Решение. Сначала определим ток в контуре:

$$\dot{U} = 10e^{-j45^\circ}; \quad Z = 1 + j = \sqrt{2}e^{j45^\circ}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{-j90^\circ}.$$

Для наглядности построим векторную диаграмму для напряжения и тока на входе цепи (рис. 4.28). Как видно из векторной диаграммы, угол фазового сдвига между напряжением и током

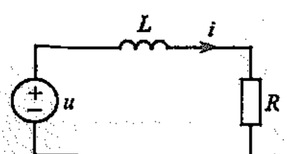


Рис. 4.27. RL-цепь первого порядка

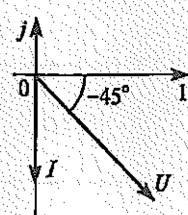


Рис. 4.28. Векторная диаграмма

составляет 45°. Зная действующие значения напряжения и тока, а также угол сдвига между ними, можно определить мощности:

$$P = UI\cos\varphi = 10\frac{10}{\sqrt{2}}\cos 45^\circ = 50 \text{ Вт} — \text{активная мощность;}$$

$$Q = UI\sin\varphi = 10\frac{10}{\sqrt{2}}\sin 45^\circ = 50 \text{ вар} — \text{реактивная мощность;}$$

$$S = UI = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2} \text{ В·А} — \text{полная мощность.}$$

4.5. Метод комплексных амплитуд (символический метод)

Метод применяется для определения вынужденных составляющих реакций при воздействии синусоидальных или обобщенных сигналов. Метод можно применять только в том случае, если собственные частоты цепи не совпадают с частотой входного сигнала. Алгоритм метода рассмотрим на примере анализа цепи, структура которой приведена на рис. 4.29.

Пример. На вход цепи подается синусоидальное воздействие $u(t) = U_m\cos(\omega t + \alpha_u)$. Параметры воздействия и элементов цепи известны: $U_m = 1$ В, $\omega = 1$ с$^{-1}$, $\alpha_u = 90°$, $R = 1$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф. Требуется определить токи и напряжения ветвей, построить векторную диаграмму.

Решение. 1. Представим воздействие в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = U_m \mathrm{e}^{j\alpha} = \mathrm{e}^{j90^\circ}.$$

2. Построим схему замещения цепи в частотной области, заменив элементы цепи комплексными двухполюсниками, как это показано на рис. 4.30.

3. Произведем расчет реакций (токов и напряжений) в комплексной области. При этом можно воспользоваться законами Кирхгофа и Ома в комплексной форме, а также известными методами расчета резистивных цепей:

$$Z_{\text{вх}} = Z_L + Z_{RC};\ Z_L = j\omega L = j;\ Z_{RC} = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C} = -\frac{-j}{1-j};$$

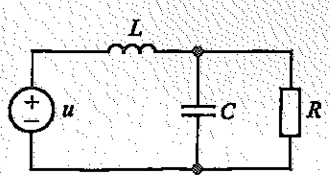


Рис. 4.29. *RLC*-цепь второго порядка

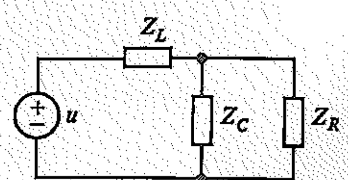


Рис. 4.30. Схема замещения цепи в частотной области

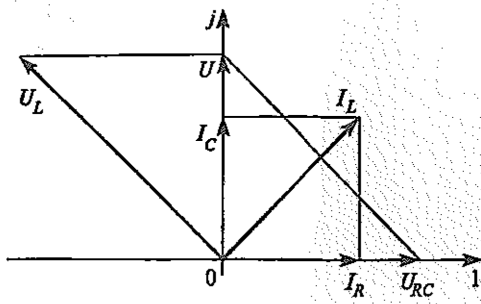


Рис. 4.31. Векторная диаграмма

$$Z_{\text{вх}} = j + \frac{-j}{1-j} = j + \frac{(-j)(1+j)}{2} = j + \frac{1-j}{2} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{j45^\circ};$$

$$\dot{I}_{L,m} = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{вх}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j45^\circ}; \quad \dot{U}_{L,m} = \dot{I}_{L,m} Z_L = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j135^\circ};$$

$$\dot{U}_{RC,m} = \dot{I}_{L,m} Z_{RC} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j45^\circ}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ} = 1;$$

$$\dot{I}_{C,m} = \frac{\dot{U}_{RC,m}}{Z_C} = \frac{1}{-j} = j; \quad \dot{I}_{R,m} = \frac{\dot{U}_{RC,m}}{Z_R} = 1.$$

4. Построим векторную диаграмму для токов и напряжений в цепи. Для этого на комплексной плоскости откладываются в соответствующем масштабе найденные токи и напряжения, как показано на рис. 4.31.

Построение векторной диаграммы, как правило, является конечным результатом решения подобных задач. Векторная диаграмма показывает амплитуду и начальную фазу любого тока или напряжения. При необходимости, имея векторную диаграмму, можно записать временную функцию тока или напряжения. Например, напряжение на L-элементе имеет амплитуду $\sqrt{2}$, а начальную фазу 135°, значит, во временной области это напряжение можно записать так:

$$u_L(t) = \sqrt{2}\cos(t + 135^\circ).$$

4.6. Резонансные явления в простых колебательных контурах

Электрическим резонансом в электрических цепях называется такое явление, при котором ток и напряжение на входе цепи в синусоидальном установившемся режиме совпадают по фазе. Та-

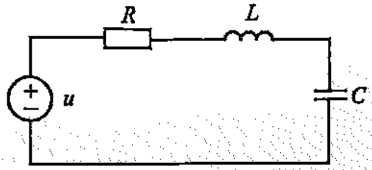


Рис. 4.32. Последовательный резонансный контур

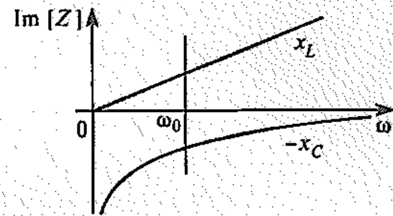


Рис. 4.33. Зависимость мнимой части сопротивления от частоты

кое явление можно наблюдать в том случае, если $\mathrm{Im}[Z_{вх}] = 0$ или $\mathrm{Im}[Y_{вх}] = 0$. Поэтому в цепях различают резонанс в последовательном контуре (резонанс напряжений) или в параллельном контуре (резонанс токов).

Резонанс в последовательном колебательном контуре. Электрическая цепь, которая представляет собой последовательный резонансный контур, представлена на рис. 4.32. В момент резонанса мнимая часть комплексного сопротивления в таком контуре равна нулю, т.е. $\mathrm{Im}[Z] = 0$:

$$Z_{вх} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(x_L - x_C),$$

отсюда $x_L - x_C = 0, \quad \omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0,$

а резонансная частота контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Сопротивления реактивных элементов колебательного контура зависят от частоты, следовательно, эти зависимости можно построить в функции частоты, как это показано на рис. 4.33. Вертикальная линия на рисунке отмечает равенство модулей сопротивлений индуктивного и емкостного элементов, что соответствует частоте резонанса в контуре.

На рис. 4.34 приведены векторные диаграммы для последовательного колебательного контура при резонансе (см. рис. 4.34, *а*), при частоте больше резонансной (см. рис. 4.34, *б*) и при частоте меньше резонансной (см. рис. 4.34, *в*).

Рассмотрим некоторые свойства последовательного колебательного контура. Ток в контуре определяется выражением

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

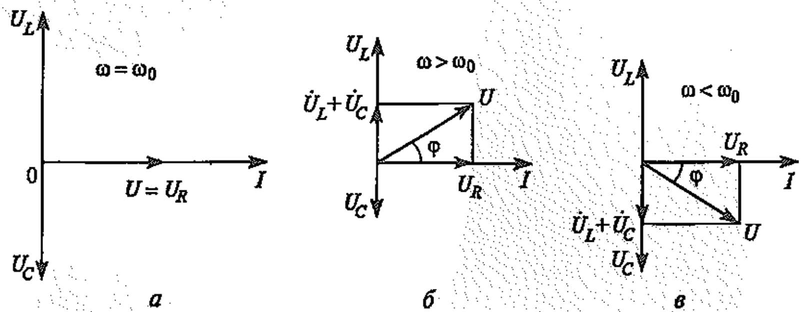


Рис. 4.34. Векторные диаграммы последовательного колебательного контура:

а — при резонансе; *б* — при частоте больше резонансной; *в* — при частоте меньше резонансной

В момент резонанса ток максимален: $I = \dfrac{U}{R}$.

Волновое или характеристическое сопротивление контура определяется по формуле

$$\rho = \omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность контура $Q = \dfrac{U_{L0}}{U} = \dfrac{I\omega_0 L}{IR} = \dfrac{\rho}{R}$.

На рис. 4.35 приведены зависимости тока в контуре (входной проводимости) в функции частоты. Эти зависимости называются резонансными кривыми. На рисунке резонансные кривые построены для двух различных значений добротности. Чем выше добротность контура, тем уже резонансная кривая. Ширина резонансной кривой называется шириной полосы пропускания контура $\Delta\omega$ и определяет величину добротности $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Резонанс в параллельном колебательном контуре. Параллельный колебательный контур дуален последовательному, и все

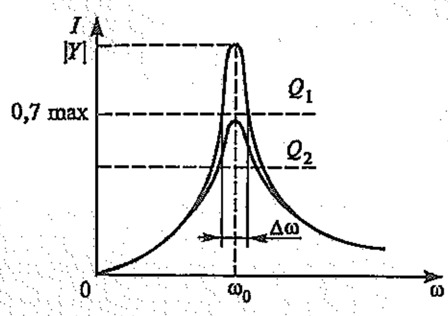


Рис. 4.35. Резонансные кривые последовательного колебательного контура

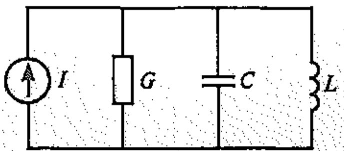


Рис. 4.36. Параллельный резонансный контур

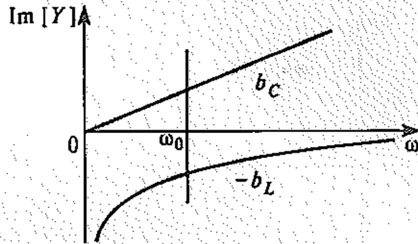


Рис. 4.37. Зависимость мнимой части проводимости от частоты

процессы в нем схожи с процессами в последовательном контуре. Электрическая цепь, которая представляет собой параллельный резонансный контур, представлена на рис. 4.36. В момент резонанса мнимая часть комплексной проводимости в таком контуре равна нулю, т. е. $\mathrm{Im}[Y] = 0$.

$$Y_{\text{вх}} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j(b_C - b_L),$$

отсюда $b_C - b_L = 0, \quad \omega_0 C - \dfrac{1}{\omega_0 L} = 0,$

арезонансная частота контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Проводимости реактивных элементов колебательного контура зависят от частоты, следовательно, эти зависимости можно построить в функции частоты, как это показано на рис. 4.37. На рис. 4.38 приведены векторные диаграммы для параллельного колебательного контура при резонансе (см. рис. 4.38, *а*), при час-

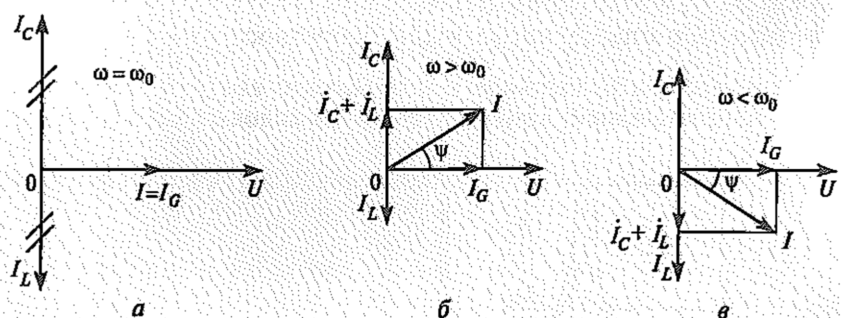


Рис. 4.38. Векторные диаграммы последовательного колебательного контура:

а — при резонансе; *б* — при частоте больше резонансной; *в* — при частоте меньше резонансной

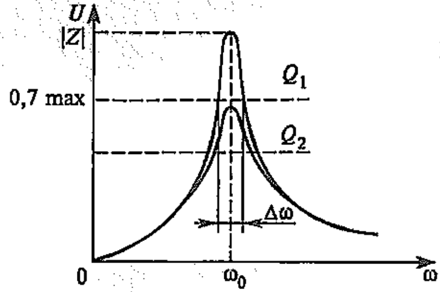


Рис. 4.39. Резонансные кривые параллельного колебательного контура

тоте больше резонансной (см. рис. 4.38, *б*) и при частоте меньше резонансной (см. рис. 4.38, *в*).

Рассмотрим свойства параллельного колебательного контура. Напряжение на контуре определяется выражением

$$U = \frac{I}{|Y|} = \frac{I}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

В момент резонанса напряжение максимально: $U = \dfrac{I}{G}$.

Добротность контура $Q = \dfrac{I_{C0}}{I} = \dfrac{U\omega_0 C}{UG} = \dfrac{1}{\rho G}$.

На рис. 4.39 приведены резонансные кривые параллельного колебательного контура для двух значений добротности.

4.7. Частотные характеристики цепей

Комплексные сопротивления и комплексные проводимости пассивных двухполюсников зависят от частоты:

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega);$$

$$Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{j\psi(\omega)} = g(\omega) + jb(\omega).$$

Зависимости модулей комплексных сопротивлений или проводимостей от частоты называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ): $|Z(\omega)|$; $|Y(\omega)|$.

Зависимости фаз комплексных сопротивлений или проводимостей от частоты называются фазочастотными характеристиками (ФЧХ): $\varphi(\omega)$; $\psi(\omega)$.

Зависимости вещественных частей комплексных сопротивлений или проводимостей от частоты называются вещественными частотными характеристиками (ВЧХ): $r(\omega)$; $g(\omega)$.

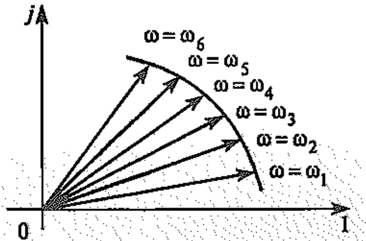


Рис. 4.40. Амплитудно-фазовая характеристика

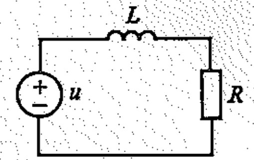


Рис. 4.41. *RL*-цепь первого порядка

Зависимости мнимых частей комплексных сопротивлений или проводимостей от частоты называются мнимыми частотными характеристиками (МЧХ): $x(\omega)$; $b(\omega)$.

Годографы векторов комплексного сопротивления или комплексной проводимости называются амплитудно-фазовыми характеристиками (АФХ). Годографом вектора называется траектория на комплексной плоскости, которую описывает конец вектора комплексного сопротивления или комплексной проводимости (рис. 4.40).

Частотные характеристики цепи можно построить по аналитическим выражениям, изменяя частоту от нуля до бесконечности. При качественном анализе цепей частотные характеристики можно построить качественно по характерным для конкретной зависимости точкам. Как правило, это точки $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Пример. На рис. 4.41 изображена цепь, для которой нужно построить АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ и АФХ входной проводимости. Пусть заданы параметры ее элементов: $R = 1$ Ом, $L = 1$ Гн.

Решение. Запишем аналитическое выражение входной комплексной проводимости цепи в общем виде:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L}.$$

Представим ее в показательной форме:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \mathrm{e}^{-j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)},$$

и в алгебраической форме:

$$Y(j\omega) = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Амплитудно-частотная характеристика представляет собой модуль комплексной проводимости: $|Y(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$. При

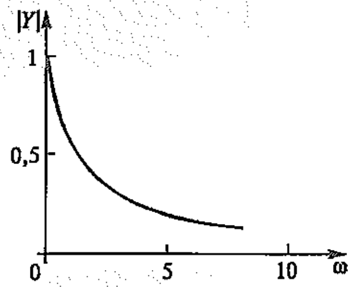


Рис. 4.42. Амплитудно-частотная характеристика

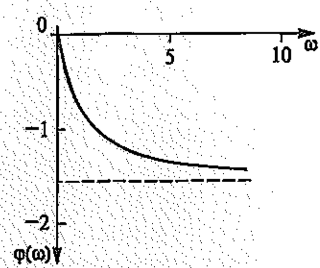


Рис. 4.43. Фазочастотная характеристика

$\omega = 0$ она принимает значение $|Y(j\omega)| = \dfrac{1}{R}$, а при $\omega = \infty$ $|Y(j\omega)| = 0$. Ее график изображен на рис. 4.42.

Фазочастотная характеристика представляет собой фазу комплексной проводимости: $\varphi(\omega) = -j\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)$. При $\omega = 0$ она принимает значение $\varphi(\omega) = 0$, а при $\omega = \infty - \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$. Ее график изображен на рис. 4.43.

Вещественная частотная характеристика представляет собой вещественную часть комплексной проводимости: $\mathrm{Re}[Y(j\omega)] = \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$. При $\omega = 0$ она принимает значение $\mathrm{Re}[Y(j\omega)] = \dfrac{1}{R}$, а при $\omega = \infty - \mathrm{Re}[Y(j\omega)] = 0$. Ее график изображен на рис. 4.44.

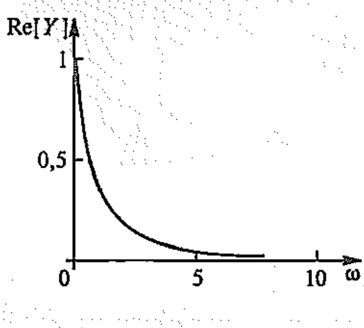


Рис. 4.44. Вещественная частотная характеристика

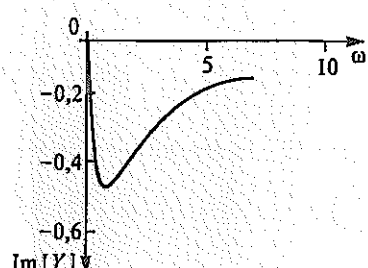


Рис. 4.45. Мнимая частотная характеристика

Мнимая частотная характеристика представляет собой мнимую часть комплексной проводимости: $\mathrm{Im}[Y(j\omega)] = -\dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$. При $\omega = 0$ она принимает значение $\mathrm{Im}[Y(j\omega)] = 0$ и при $\omega = \infty$ также $\mathrm{Im}[Y(j\omega)] = 0$. Ее график изображен на рис. 4.45.

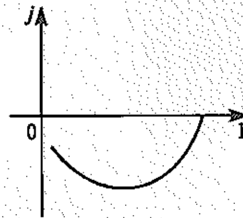


Рис. 4.46. Амплитудно-фазовая характеристика

Амплитудно-фазовую характеристику можно построить по имеющимся АЧХ и ФЧХ, первая из которых определяет зависимость длины вектора проводимости в функции от частоты, а вторая — зависимость угла поворота этого вектора в функции частоты. График АФХ цепи показан на рис. 4.46.

4.8. Переходные процессы при синусоидальных воздействиях

Анализ переходных процессов при синусоидальных воздействиях проводится аналогично тому, как это делалось при постоянных воздействиях. Особенности расчета переходных процессов при синусоидальных воздействиях можно рассмотреть на примере.

Пример. Пусть имеется цепь, изображенная на рис. 4.47. В цепи происходит коммутация, т.е. ключ замыкается. Заданы параметры цепи: $u(t) = 2\sqrt{2}\cos(t - 45^\circ)$; $R = 1$ Ом; $L = 1$ Гн; $C = 0{,}5$ Ф. Требуется определить переходный процесс для тока в контуре.

Решения: 1. Определяем независимые начальные условия. Для этого изображаем схему замещения цепи в частотной области для $t < 0$ (рис. 4.48) и рассчитываем ток в индуктивном элементе:

$$Z_{\text{вх}} = 1 + j - 2j = 1 - j = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ};$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{вх}}} = \frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ}} = 2;$$

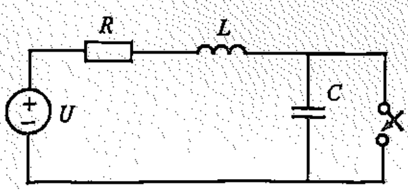


Рис. 4.47. *RLC*-цепь

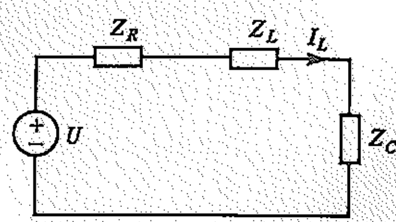


Рис. 4.48. Схема замещения цепи для $t < 0$

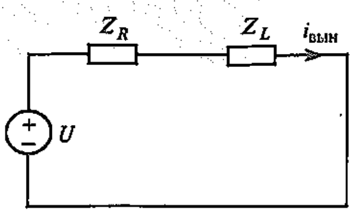


Рис. 4.49. Схема замещения цепи для $t > 0$

$$i_L(t) = 2\cos(t); \quad i_L(0^-) = 2\,\text{А}.$$

2. Определяем вынужденную составляющую реакции. Для этого изображаем схему замещения цепи при $t > 0$ (рис. 4.49) и рассчитываем вынужденную составляющую реакции при $t = \infty$:

$$Z_{\text{вх}} = 1 + j = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j45^\circ};$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{вх}}} = \frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j45^\circ}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{j45^\circ}} = 2\mathrm{e}^{-j90^\circ};$$

$$i_{\text{вын}}(t) = 2\cos(t - 90^\circ).$$

3. Определяем корень характеристического уравнения по тем же правилам, что и для постоянного воздействия, поскольку корень характеристического воздействия определяется не воздействием, а лишь параметрами элементов цепи:

$$p = -\frac{R}{L} = -1\,\text{c}^{-1}.$$

4. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий. Для цепи первого порядка

$$A = i(0^+) - i_{\text{вын}}(0^+) = 2.$$

5. Запишем решение для тока в контуре в аналитическом виде:

$$i(t) = i_{\text{вын}}(t) + i_{\text{св}}(t) = 2\cos(t - 90^\circ) + 2\mathrm{e}^{-t}.$$

6. Построим временную диаграмму тока в контуре, как сумму свободной и вынужденной составляющих (рис. 4.50).

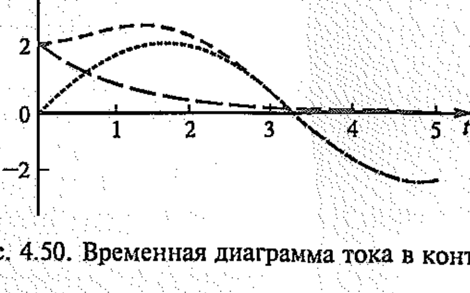


Рис. 4.50. Временная диаграмма тока в контуре

Глава 5
АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

5.1. Основные положения операторного метода, используемые при анализе динамических *R*-, *L*-, *C*-цепей

Преобразование Лапласа применяется для анализа переходных процессов в динамических *R*-, *L*-, *C*-цепях при воздействии сигналов произвольной формы. В отличие от классического метода анализа переходных процессов операторный метод позволяет привести дифференциальные уравнения динамической цепи к алгебраическим уравнениям. Сведение дифференциальных уравнений к алгебраическим, в свою очередь, предоставляет возможность строить модель динамической цепи по типу резистивной и применять для ее анализа все известные методы анализа резистивных цепей.

Кроме того, операторный метод предоставляет возможность введения системных функций цепи, т. е. входных и передаточных функций, которые можно использовать при анализе динамических цепей с одним источником и нулевых начальных условиях в цепи. Метод преобразования Лапласа называют также операторным методом, поскольку он позволяет вводить операторные функции и операторные сопротивления.

В операторном методе все сигналы (токи и напряжения) преобразуются с помощью интеграла прямого преобразования Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

где $F(s)$ — изображение временной функции по Лапласу или операторное изображение функции; s — оператор Лапласа; $f(t)$ — временная функция (оригинал функции).

Запись $F(s) \leftrightarrow f(t)$ или $F(s) = L[f(t)]$ означает, что временной функции $f(t)$ соответствует операторное изображение $F(s)$, или $F(s)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$.

Преобразовывать по Лапласу можно не все функции, а лишь те, которые удовлетворяют следующим ограничениям:

$f(t)$ должна удовлетворять условиям, известным из курса высшей математики как условия Дирихле, т. е. иметь конечное число разрывов первого рода, конечное число максимумов и минимумов и т. д.;

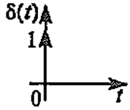


Рис. 5.1. Единичная импульсная функция

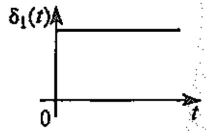


Рис. 5.2. Единичная ступенчатая функция

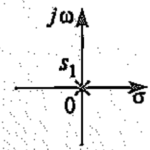


Рис. 5.3. Расположение полюса единичной ступенчатой функции

$f(t)$ должна быть ограниченной возрастающей экспонентой $Me^{\sigma_0 t}$, т.е. значения функции не могут быть бесконечно большими;

$f(t)$ должна быть равна нулю при $t < 0$.

Для получения изображения функции, удовлетворяющей перечисленным условиям, можно взять интеграл прямого преобразования Лапласа. При решении практических задач изображения функций по Лапласу, как правило, находят с помощью справочных таблиц, имеющихся в большинстве математических справочников.

Изображения некоторых функций и картины расположения собственных частот этих функций на плоскости комплексной частоты в t- и s-областях приведены на рис. 5.1...5.15:

$f(t) = \delta(t)$ — импульсная функция, ее изображение по Лапласу $F(s) = 1$, график функции показан на рис. 5.1;

$f(t) = \delta_1(t)$ — единичная ступенчатая функция, ее изображение по Лапласу $F(s) = \frac{1}{s}$, график функции показан на рис. 5.2, а картина расположения полюса — на рис. 5.3;

$f(t) = t\,\delta_1(t)$ — линейная функция, ее изображение по Лапласу $F(s) = \frac{1}{s^2}$, график функции показан на рис. 5.4, а картина расположения полюсов — на рис. 5.5;

$f(t) = e^{-at}$ — экспоненциальная функция, ее изображение по Лапласу $F(s) = \frac{1}{s+a}$, график функции показан на рис. 5.6, а картина расположения полюса — на рис. 5.7;

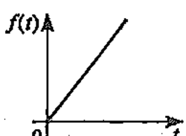


Рис. 5.4. Линейная функция

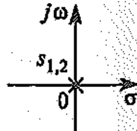


Рис. 5.5. Расположение полюсов линейной функции

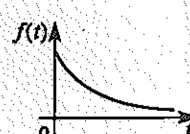


Рис. 5.6. Экспоненциальная

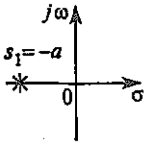


Рис. 5.7. Расположение полюса экспоненциальной функции

Рис. 5.8. Функция косинуса

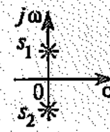


Рис. 5.9. Расположение полюсов функции косинуса

$f(t) = \cos(\omega_0 t)$ — функция косинуса, ее изображение по Лапласу $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, график функции показан на рис. 5.8, а картина расположения полюсов — на рис. 5.9;

$f(t) = \sin(\omega_0 t)$ — функция синуса, ее изображение по Лапласу $F(s) = \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, график функции показан на рис. 5.10, а картина расположения полюсов — на рис. 5.11;

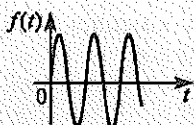


Рис. 5.10. Функция синуса

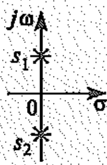


Рис. 5.11. Расположение полюсов функции синуса

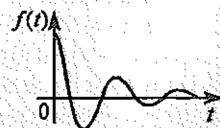


Рис. 5.12. Функция косинуса, умноженная на экспоненту

$f(t) = e^{-at}\cos\omega_0 t$ — функция косинуса, умноженная на экспоненту, ее изображение по Лапласу $F(s) = \dfrac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$, график функции показан на рис. 5.12, а картина расположения полюсов — на рис. 5.13;

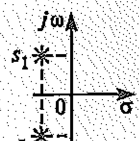


Рис. 5.13. Расположение полюсов функции косинуса, умноженной на экспоненту

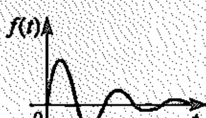


Рис. 5.14. Функция синуса, умноженная на экспоненту

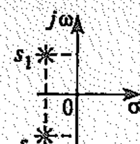


Рис. 5.15. Расположение полюсов функции синуса, умноженной на экспоненту

$f(t) = e^{-at}\sin\omega_0 t$ — функция синуса, умноженная на экспоненту, ее изображение по Лапласу $F(s) = \dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$, график функции показан на рис. 5.14, а картина расположения полюсов — на рис. 5.15.

Изображение каждого из приведенных сигналов по Лапласу в общем виде можно представить в виде отношения полиномов:

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0} =$$

$$= \frac{a_m(s-s_1')(s-s_2')\ldots(s-s_m')}{b_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)},$$

или

$$F(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-s_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)},$$

где s_i' и s_i — нули и полюсы функции $F(s)$, т. е. корни полинома числителя и знаменателя соответственно.

Зная полюсы изображения функции, можно приближенно определить ее вид во временной области. Например, пусть изображение некоторой функции имеет вид

$$F(s) = \frac{M(s)}{s^4+2s^3+s^2+2s} = \frac{M(s)}{s(s+2)(s^2+1)}.$$

Полюсы изображения (корни знаменателя) равны:

$$s_1 = 0; \quad s_2 = -2; \quad s_{3,4} = \pm j.$$

Картина расположения полюсов функции на плоскости комплексной частоты приведена на рис. 5.16. Полюс, равный нулю, в соответствии с приведенными выше примерами изображений некоторых функций, определяет постоянную составляющую временной функции. Вещественный отрицательный полюс определяет экспоненту. Два мнимых сопряженных полюса определяют синусоидальный сигнал. Отсюда можно сделать вывод, что оригинал функции будет иметь следующий вид:

$$f(t) = A_1 + A_2 e^{-2t} + A_3\cos(t+\alpha).$$

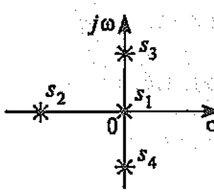


Рис. 5.16. Расположение полюсов функции на плоскости комплексной частоты

5.2. Нахождение оригиналов функций по заданным изображениям

Переход от изображения функции по Лапласу к ее оригиналу, т.е. нахождение временной функции $f(t) = L^{-1}[F(s)]$, можно осуществить путем вычисления интеграла обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s.$$

Однако на практике для перехода из s-области в t-область чаще пользуются теоремой разложения или теоремой вычетов. Воспользуемся для этой цели теоремой вычетов. Для определения оригинала функции по ее изображению в виде рациональной дроби разложим сложную функцию на простые дроби:

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b^1 s^1 + b_0} =$$

$$= \frac{a_m (s - s_1')(s - s_2')\ldots(s - s_m')}{b_n (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)} =$$

$$= \frac{k_1}{(s - s_1)} + \frac{k_2}{(s - s_2)} + \ldots + \frac{k_n}{(s - s_n)},$$

где $s_1 \ldots s_n$ — полюса функции изображения; $k_1 \ldots k_n$ — вычеты в соответствующих полюсах.

Вычеты определяются по общей формуле:

$$k_i = F(s)(s - s_i)\Big|_{s = s_i}.$$

Каждая простая дробь является изображением экспоненциальной функции времени, следовательно, определив вычеты, можно записать функцию времени в виде суммы экспонент.

В зависимости от вида полюсов функции $F(s)$, которые одновременно являются собственными частотами цепи, вычеты можно определить следующим образом.

1. Случай вещественных различных полюсов, т.е. $s_1 \ldots s_n$ — вещественные различные.

Вычеты в этом случае получаются также вещественными, и оригинал функции записывается в виде

$$f(t) = A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t} + \ldots + A_n \mathrm{e}^{s_n t}.$$

Пример. Пусть задано изображение функции, полюса которой вещественные и различные:

$$F(s)=\frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}=\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}.$$

Полюса изображения равны:

$$s_1=0;\quad s_2=-2;\quad s_3=-3.$$

Решение. Определим вычеты в этих полюсах:

$$k_1=\left.\frac{s+1}{s(s^2+5s+6)}s\right|_{s=0}=\frac{1}{6};$$

$$k_2=\left.\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}(s+2)\right|_{s=-2}=\frac{1}{2};$$

$$k_3=\left.\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}(s+3)\right|_{s=-3}=-\frac{2}{3}.$$

В таком случае оригинал функции имеет вид

$$f(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t},$$

а ее график представлен на рис. 5.17.

2. Случай комплексных сопряженных полюсов, т. е. $s_1 \dots s_n$ — комплексные, парно сопряженные: $s=\sigma\pm j\omega$.

Для случая пары комплексных корней общий вид функции во временной области имеет вид

$$f(t)=2|k_1|\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t+\alpha_1),$$

где $k_1=|k_1|\mathrm{e}^{j\alpha_1}$ — вычет в первом из пары комплексных полюсов, т. е. в том полюсе, у которого мнимая часть имеет положительный знак.

Пример. Пусть задано изображение функции $F(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+2}$.

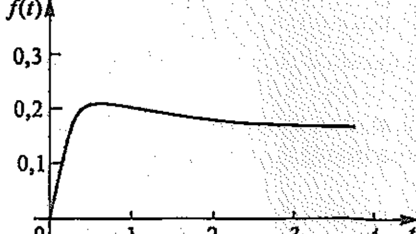


Рис. 5.17. График функции, имеющей вещественные различные полюса

Полюса функции комплексные сопряженные: $s_{1,2} = -1 \pm j$.

Решение. Определим вычет в первом полюсе. Для этого справедливо выражение, которое использовалось в предыдущем случае для вещественных полюсов. При этом вычет в комплексном полюсе также будет комплексным:

$$k_1 = \frac{s}{(s+1-j)(s+1+j)}(s+1-j)\bigg|_{s=-1+j} =$$

$$= \frac{-1+j}{j2} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}^{j45^\circ}.$$

Второй вычет, соответствующий второму полюсу, будет комплексным сопряженным первому, и поэтому его вычислять не нужно. В этом случае оригинал функции будет иметь вид

$$f(t) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{-t}\cos(t + 45^\circ),$$

а ее график представлен на рис. 5.18.

3. Случай равных (кратных) полюсов, т.е. s_1, s_2 — равные вещественные полюса. Изображение сигнала для случая пары кратных полюсов раскладывается на простые дроби особым образом:

$$F(s) = \frac{k_{11}}{s - s_1} + \frac{k_{12}}{(s - s_1)^2}.$$

Вычеты в этом случае также определяются по особым правилам:

$$k_{11} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)(s - s_1)^2]_{s=s_1}; \quad k_{12} = F(s)(s - s_1)^2\Big|_{s=s_1}.$$

Оригинал функции для случая пары кратных полюсов имеет вид

$$f(t) = A_1\mathbf{e}^{st} + A_2 t\mathbf{e}^{st},$$

где $A_1 = k_{11}$; $A_2 = k_{12}$.

Пример. Пусть задано изображение функции $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)^2}$.

Полюса изображения равные вещественные (кратные): $s_{1,2} = -2$.

Решение. Вычеты в полюсах определяются по выражениям:

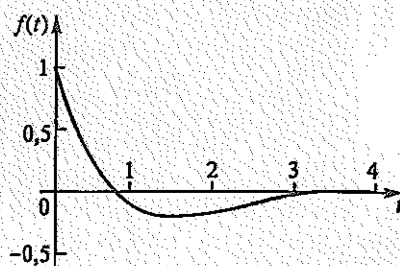


Рис. 5.18. График функции, имеющей комплексные сопряженные полюса

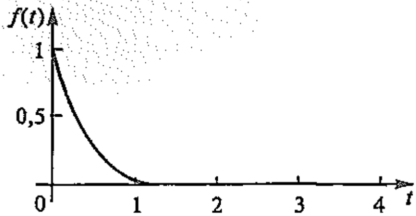


Рис. 5.19. График функции, имеющей вещественные равные (кратные) полюса

$$k_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{(s+2)^2}(s+2)^2\right]_{s=-2} = 1;$$

$$k_{12} = \frac{s+1}{(s+2)^2}(s+2)^2{}_{s=-2} = -1.$$

В этом случае оригинал функции будет иметь вид

$$f(t) = e^{-2t} - te^{-2t},$$

а ее график представлен на рис. 5.19.

5.3. Некоторые свойства и теоремы преобразования Лапласа

Рассмотрим некоторые свойства и теоремы преобразования Лапласа, которые полезно применять для анализа динамических цепей.

Свойство линейности. Умножение функции в t-области на постоянную величину соответствует в s-области умножению ее изображения на ту же величину.

Рассмотрим некоторую временную функцию, имеющую изображение $f(t) \leftrightarrow F(s)$.

В соответствии со свойством линейности $af(t) = aF(s)$.

Свойство линейности имеет и другую формулировку. Изображение суммы функций соответствует сумме изображений этих функций:

$$f_1(t) + f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) + F_2(s).$$

Теорема об изображении производной. Операции дифференцирования функции в t-области соответствует умножение ее изображения на s в s-области:

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^+),$$

где $f(0^+)$ — значение функции при $t = 0^+$.

Теорема об изображении интеграла от функции. Операции интегрирования функции в t-области соответствует деление ее изображения на s в s-области.

$$\int f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^1(0^+)}{s},$$

где $f^1(0^+)$ — значение интеграла от функции при $t = 0^+$.

Теорема о начальном значении функции. Значение функции в начальный момент времени $t = 0^+$ можно определить по ее изображению следующим образом:

$$f(0^+) = sF(s)\big|_{s=\infty}.$$

Пример. Пусть имеется изображение функции:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}.$$

Решение. Согласно теореме о начальном значении функции можем определить:

$$f(0^+) = s\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=\infty} = 0.$$

Теорема о конечном значении функции. Значение функции в момент $t = \infty$ можно определить по ее изображению следующим образом:

$$f(\infty) = sF(s)\big|_{s=0}.$$

Пример. Пусть имеется изображение функции:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}.$$

Решение. Согласно теореме о конечном значении функции можем определить:

$$f(\infty) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}s\bigg|_{s=0} = \frac{1}{6}.$$

Теорема смещения в t-области. При смещении функции $f(t)$ во времени на величину τ ее изображение умножается на экспоненту $e^{-s\tau}$.

Пример 1. Требуется получить изображение прямоугольного сигнала по Лапласу.

Решение. Представленный на рис. 5.20 прямоугольный сигнал можно описать аналитически в виде наложения двух ступенчатых функций, одна из которых смещена во времени, как это показано на рисунке:

$$f(t) = A\delta_1(t) - A\delta_1(t-1).$$

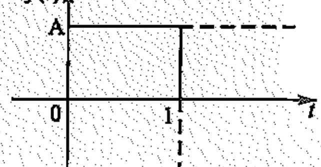


Рис. 5.20. Прямоугольный сигнал и его представление в виде суммы ступенчатых функций

В этом случае изображение суммы двух ступенчатых функций можно получить на основе свойства линейности и теоремы смещения в вещественной области:

$$F(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s}\mathbf{e}^{-t} = \frac{A}{s}(1 - \mathbf{e}^{-t}).$$

Пример 2. Требуется получить изображение сигнала в виде полуволны синусоидальной функции (рис. 5.21).

Решение. Такой сигнал можно представить в виде суммы двух синусоидальных функций, одна из которых смещена во времени:

$$f(t) = A\sin(\omega t)\delta_1(t) + A\sin[\omega(t-1)]\delta_1(t-1).$$

Согласно теореме смещения в t-области изображение суммы смещенных функций будет иметь вид

$$F(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}(1 + \mathbf{e}^{-s}).$$

Пример 3. Требуется получить изображение треугольного сигнала, приведенного на рис. 5.22.

Решение. Треугольный сигнал можно представить в виде суммы трех линейных функций, две из которых смещены во времени, как это показано на рис. 5.22:

$$f(t) = At\delta_1(t) - 2A(t-1)\delta_1(t-1) + A(t-2)\delta_1(t-2).$$

Изображение суммы смещенных функций будет иметь вид

$$F(s) = \frac{A}{s^2} - \frac{2A}{s^2}\mathbf{e}^{-s} + \frac{A}{s^2}\mathbf{e}^{-2s} = \frac{A}{s^2}(1 - 2\mathbf{e}^{-s} + \mathbf{e}^{-2s}).$$

Изображение функций, составленных из отрезков прямых линий, можно получить более простым способом, а именно путем дифференцирования функции до тех пор, пока производная не будет состоять из импульсных функций.

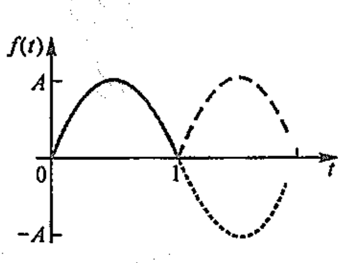


Рис. 5.21. Сигнал в виде полуволны и его представление в виде суммы смещенных функций

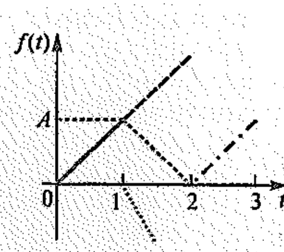


Рис. 5.22. Треугольный сигнал и его представление в виде суммы линейных функций

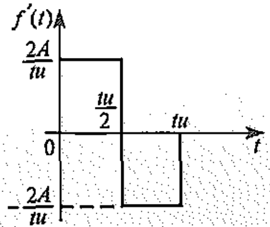


Рис. 5.23. Производная от треугольной функции

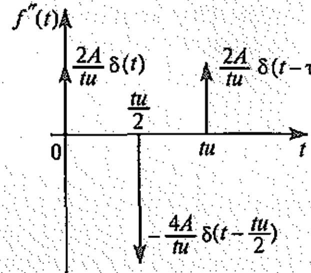


Рис. 5.24. Вторая производная от треугольной функции

Пример 4. Требуется получить изображение треугольной функции методом ее дифференцирования.

Решение. Производная от треугольной функции представляет собой ступенчатый сигнал (рис. 5.23). Возьмем вторую производную от треугольного сигнала и получим совокупность импульсных функций, как это показано на рис. 5.24.

При таком представлении сигнала изображение его второй производной можно записать как сумму изображений смещенных импульсных функций:

$$F''(s) = \frac{2A}{tu} - \frac{4A}{tu}\mathbf{e}^{-s\frac{tu}{2}} + \frac{2A}{tu}\mathbf{e}^{-stu} = \frac{2A}{tu}\left(1 - 2\mathbf{e}^{s\frac{tu}{2}} + \mathbf{e}^{-stu}\right).$$

Для получения изображения самой функции нужно дважды проинтегрировать записанное выражение в s-области, т. е. записанное выражение нужно дважды разделить на s:

$$F(s) = \frac{2A}{tu\, s^2}\left(1 - 2\mathbf{e}^{s\frac{tu}{2}} + \mathbf{e}^{-stu}\right).$$

5.4. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме, операторные схемы замещения элементов

Закон токов Кирхгофа. Алгебраическая сумма изображений токов ветвей, подключенных к узлу, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0.$$

Это утверждение можно доказать на основе свойства линейности. Поскольку сумма мгновенных значений (временных функций) токов ветвей, подключенных к узлу, равна нулю, то и сумма их изображений также равна нулю.

Закон напряжений Кирхгофа. Алгебраическая сумма изображений напряжений ветвей, входящих в контур, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(s) = 0.$$

Это утверждение также можно доказать на основе свойства линейности. Поскольку сумма мгновенных значений (временных функций) напряжений ветвей, входящих в контур, равна нулю, то и сумма их изображений также равна нулю.

На основе законов Кирхгофа в операторной форме можно записать уравнения соединений цепи (уравнения Кирхгофа) в операторной форме. Однако в тех случаях, когда начальные условия ненулевые, т.е. на C-элементе имеется начальное напряжение или через L-элемент протекает начальный ток, то в уравнениях эти начальные условия должны быть обязательно учтены. Сделать это можно путем введения операторных схем замещения элементов.

Для резистора, который не обладает способностью накапливать энергию, операторная схема замещения представляет собой двухполюсник, операторное сопротивление которого $Z_R(s) = R$.

Для индуктивного элемента схему замещения можно построить на основе анализа его вольт-амперной характеристики: $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$. Согласно теореме об изображении производной это выражение в s-области можно записать следующим образом:

$$U_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0^-).$$

Это означает, что напряжение на L-элементе можно представить как алгебраическую сумму двух напряжений, а схему замещения элемента — как последовательное соединение двух элементов. Операторная схема замещения L-элемента, построенная на этом выражении, показана на рис. 5.25. Источник напряжения в операторной схеме замещения можно преобразовать в источник тока. В этом случае схема замещения будет представлять собой параллельное соединение источника тока и операторной проводимости L-элемента, как это показано на рис. 5.26.

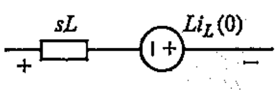


Рис. 5.25. Операторная схема замещения L-элемента

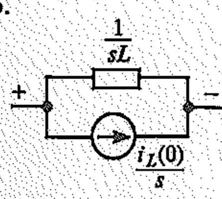


Рис. 5.26. Вариант операторной схемы замещения L-элемента

Для емкостного элемента схему замещения также можно построить на основе анализа его вольт-амперной характеристики: $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Согласно теореме об изображении производной это выражение в s-области можно записать следующим образом:

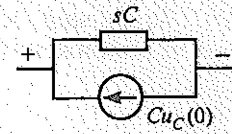


Рис. 5.27. Операторная схема замещения C-элемента

$$I_C(s) = CsU_C(s) - Cu_C(0^-).$$

Это означает, что ток через C-элемент можно представить как алгебраическую сумму двух токов, а схему замещения элемента — как параллельное соединение двух элементов. Такая схема показана на рис. 5.27. Источник тока в операторной схеме можно преобразовать в источник напряжения. В этом случае схема замещения будет представлять собой последовательное соединение операторного сопротивления C-элемента и источника напряжения, как это показано на рис. 5.28.

На основе операторных схем замещения элементов можно строить операторные схемы замещения динамических цепей. Например, на рис. 5.30 показана операторная схема замещения цепи, изображенной на рис. 5.29. Для операторной схемы замещения, изображенной на рис. 5.30, можно записать уравнение Кирхгофа в операторной форме:

$$-U(s) + I(s)R + I(s)sL - Li_L(0^-) + I(s)\frac{1}{sC} + \frac{u_C(0^-)}{s} = 0.$$

Напряжения источников в записанном уравнении будем считать известными, а обозначение общего тока вынесем за скобку:

$$I(s)\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) = U(s) + Li_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}.$$

Полученное выражение отражает закон Ома в операторной форме. Его можно записать в другом виде, решив относительно тока в цепи:

$$I(s) = \frac{U(s) + Li_L(0^-) - \dfrac{u_C(0^-)}{s}}{Z(s)}.$$

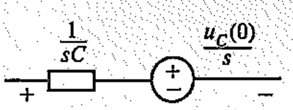


Рис. 5.28. Вариант операторной схемы замещения C-элемента

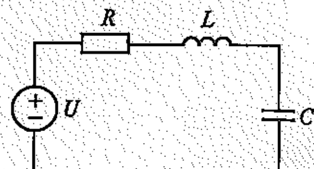


Рис. 5.29. Электрическая цепь второго порядка

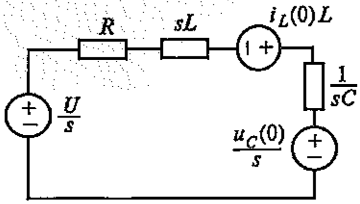


Рис. 5.30. Операторная схема замещения цепи

При нулевых начальных условиях последнее выражение принимает еще более простой и привычный вид, близкий по смыслу к выражению закона Ома для резистивной цепи:

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} \text{ или } U(s) = I(s)Z(s),$$

где $Z(s) = R + sL + \dfrac{1}{sC}$ — общее (входное) сопротивление цепи в операторной форме.

5.5. Анализ переходных процессов в динамических цепях операторным методом

Операторные схемы цепей можно использовать при анализе переходных процессов в динамических цепях. Рассмотрим алгоритм анализа переходных процессов на примере динамической цепи второго порядка, содержащей один индуктивный и один емкостной элемент (рис. 5.31). Кроме того, в цепь включен источник постоянного напряжения. Параметры цепи известны: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 0{,}5$ Ф, $U = 10$ В. В момент времени $t = 0$ ключ размыкается. В цепи будет происходить переходный процесс.

Первым этапом решения задачи при размыкании ключа в динамической цепи, как и при решении задачи классическим методом, остается определение независимых начальных условий, к которым относятся напряжение на емкостном элементе и ток в индуктивном элементе до размыкания ключа (коммутации). Для определения начальных условий построим эквивалентную резистивную цепь замещения исходной динамической цепи для момента времени $t = 0^-$ (рис. 5.32). В цепи до коммутации необходимо определить напряжение на C-элементе и ток в L-элементе к моменту коммутации, т.е. к моменту размыкания ключа. Эти величины определяют запас энергии в цепи к началу переходного процесса. В цепи (рис. 5.32) C-элемент изображается как разрыв, а L-элемент — как короткое замыкание. Ток в L-элементе равен току в резисторе R_1, а напряжение на C-элементе равно напряжению на резисторе R_2:

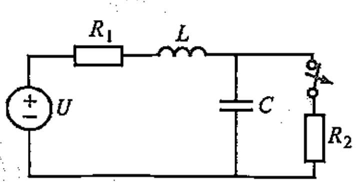


Рис. 5.31. Коммутация в цепи второго порядка

$$i_L = i_R = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2\,\text{А};$$

$$u_C = u_{R_2} = i_L R_2 = 4\,\text{В}.$$

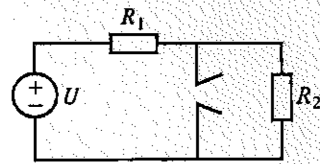


Рис. 5.32. Эквивалентная резистивная цепь для $t = 0^-$

Второй этап решения задачи — построение операторной схемы замещения цепи. При ее построении реактивные элементы заменяются эквивалентными операторными схемами, т.е. операторными сопротивлениями с последовательными или параллельными источниками, как это было показано ранее. Операторная схема замещения цепи (см. рис. 5.31) представлена на рис. 5.33. Операторная схема изображается после коммутации, при этом в рассматриваемом примере напряжение источника записывается в операторной форме как напряжение, деленное на s, поскольку такое представление соответствует изображению постоянной величины, как это показано в подразд. 5.1.

Третий этап — расчет цепи в операторной форме. При расчете необходимо определить искомую реакцию в s-области. Пусть искомой реакцией в рассматриваемом примере будет ток в контуре. В этом случае для определения тока в цепи можно воспользоваться любым из известных методов расчета резистивных цепей. В данном примере определим ток в цепи на основании закона Ома:

$$I(s) = \frac{\sum U(s)}{\sum Z(s)} = \frac{\dfrac{10}{s} + 2 - \dfrac{4}{s}}{3 + s + \dfrac{2}{s}} = \frac{2s + 6}{s^2 + 3s + 2}.$$

Четвертый этап решения задачи — переход во временную область, т.е. определение оригинала полученного изображения реакции.

Для определения оригинала тока воспользуемся теоремой вычетов. Сначала определяем полюса функции $I(s)$, т.е. корни полинома ее знаменателя:

$$s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$s_1 = -1; \quad s_2 = -2.$$

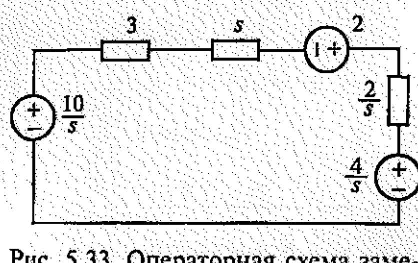


Рис. 5.33. Операторная схема замещения цепи

Затем определим вычеты в полюсах по общему выражению для вещественных различных корней:

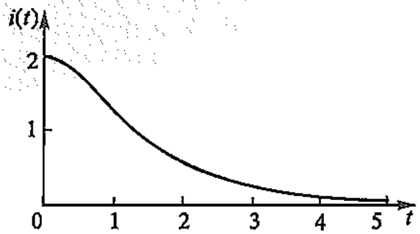


Рис. 5.34. Переходный процесс тока в цепи

$$k_i = I(s)(s - s_i)\big|_{s=s_i};$$

$$k_1 = \frac{2s+6}{s^2+3s+2}(s+1)\Big|_{s=-1} = 4;$$

$$k_2 = \frac{2s+6}{s^2+3s+2}(s+2)\Big|_{s=-2} = -2.$$

Зная вычеты в полюсах, можно разложить изображение тока на простые дроби, как это показано в подразд. 5.2:

$$I(s) = \frac{2s+6}{s^2+3s+2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}.$$

Каждое из записанных слагаемых представляет собой изображение экспоненты, следовательно, временная функция (оригинал) тока в цепи будет иметь вид

$$i(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

На последнем, пятом этапе решения задачи строится временная диаграмма (график) найденной реакции (рис. 5.34).

5.6. Анализ цепей с одним источником при нулевых начальных условиях

Для анализа цепей с одним источником и нулевыми начальными условиями разработаны специальные методы и алгоритмы. Такие цепи представляются, как правило, в виде четырехполюсника, к левым зажимам которого подключается источник, а к правым — сопротивление нагрузки, как показано на рис. 5.35 и 5.36.

Анализ цепей подобного класса проводится с использованием системных функций цепи, представляющих собой множество входных и передаточных функций. Системная функция цепи определяет отношение реакции цепи к воздействию и представляется в виде отношения полиномов:

$$H(s) = \frac{\text{реакция}}{\text{воздействие}} = \frac{M(s)}{N(s)}.$$

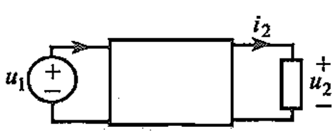


Рис. 5.35. Динамическая цепь с одним источником напряжения

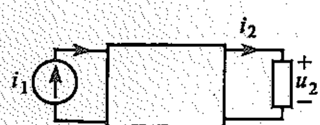


Рис. 5.36. Динамическая цепь с одним источником тока

В понятие системной функции входят входные и передаточные функции цепи. Для цепей с источником напряжения (см. рис. 5.35) рассматривают, как правило, функцию передачи по напряжению, входную и передаточную проводимости:

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}; \quad Y_{11}(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)}; \quad Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)},$$

а для цепей с источником тока (см. рис. 5.36) рассматривают функцию передачи по току, входное и передаточное сопротивления:

$$H_I(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}; \quad Z_{11}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}; \quad Z_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}.$$

Одна из задач анализа цепей такого класса состоит в определении системной функции. Для лестничных цепей наиболее простым методом определения системной функции является метод пропорциональных величин, который использовался для определения коэффициента передачи в подразд. 2.3. При этом методе реакция принимается равной единице, определяется воздействие, а затем берется их отношение.

Пример. Определить функцию передачи цепи по напряжению и входную проводимость цепи, изображенной на рис. 5.37. Пусть заданы параметры элементов цепи: $R = 0{,}5$ Ом, $L = 0{,}5$ Гн, $C = 1$ Ф.

Р е ш е н и е. Примем реакцию цепи, равной единице. Используя законы Ома и Кирхгофа в операторной форме, определим при этом условии воздействие:

$$U_2(s) = 1; \quad I_2(s) = \frac{U_2}{R} = 2; \quad I_C(s) = \frac{U_2}{Z_C} = s;$$

$$I_L(s) = I_C + I_R = s + 2; \quad U_L(s) = I_L Z_L = 0{,}5s^2 + s;$$

$$U_1(s) = U_L + U_2 = 0{,}5s^2 + s + 1.$$

Представим теперь функцию передачи цепи по напряжению как отношение реакции, равной единице, к найденному воздействию, а входную проводимость — как отношение входного тока к найденному воздействию:

$$H_U(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2};$$

$$Y_{11}(s) = \frac{I_1}{U_1} = \frac{I_L}{U_1} = \frac{2s + 4}{s^2 + 2s + 2}.$$

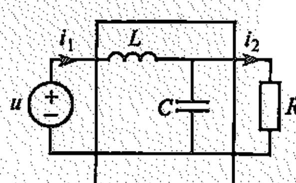


Рис. 5.37. Динамическая цепь с резистивной нагрузкой

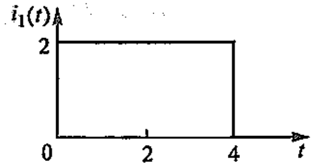


Рис. 5.38. Одиночный прямоугольный сигнал

По известной системной функции цепи можно определить реакцию цепи, если задано воздействие. Алгоритм определения реакции можно записать в виде общего выражения

$$F_2(s) = F_1(s)H(s).$$

Рассмотрим пример использования записанного алгоритма.

Пример. Пусть цепь с одним источником напряжения при нулевых начальных условиях имеет вид, показанный на рис. 5.36. Задана или определена функция передачи цепи по току: $H_I(s) = \dfrac{I_2(s)}{I_1(s)} = \dfrac{1}{s+2}$. На вход цепи подается импульс тока в виде одиночного прямоугольного сигнала (рис. 5.38). Требуется определить реакцию цепи на заданное воздействие.

Решение. Реакцию цепи на заданное воздействие определяем в операторной форме. Для этого сначала находим изображение входного сигнала с помощью теоремы смещения во временной области:

$$I_1(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-4s} = \frac{2}{s}(1 - e^{-4s}).$$

Затем определяем изображение реакции в операторной форме:

$$I_2(s) = \frac{1}{(s+2)}\frac{2}{s}(1 - e^{-4s}) = \frac{2}{s(s+2)}(1 - e^{-4s}).$$

После этого определяем оригинал полученной реакции, т.е. переходим во временную область. При переходе в t-область сначала с помощью теоремы вычетов получим оригинал выражения, стоящего перед скобкой: $f(t) = 1 - e^{-2t}$. Затем согласно теореме смещения во временной области можем записать полную реакцию в t-области с учетом выражения, стоящего в скобках:

$$i_2(t) = (1 - e^{-2t})\delta_1(t) -$$

$$-(1 - e^{-2(t-4)})\delta_1(t-4).$$

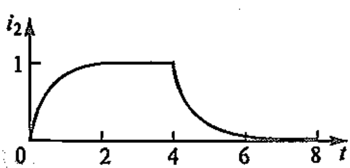


Рис. 5.39. График реакции на входной прямоугольный сигнал

График найденной реакции показан на рис. 5.39.

Используя алгоритм расчета цепей с одним источником, можно определить связь между функциями и характеристиками цепи. Функции цепи — это входные и передаточные функции, а характеристики — это переходные и импульсные характеристики.

Переходная характеристика цепи может быть получена исходя из связи с системной функцией цепи:

$$f_1(t) = \delta_1(t); \quad F_1(s) = \frac{1}{s}; \quad F_2(s) = H_1(s) = \frac{1}{s} H(s).$$

Аналогично можно установить связь импульсной характеристики с системной функцией цепи:

$$f_1(t) = \delta(t); \quad F_1(s) = 1; \quad F_2(s) = H(s).$$

Глава 6
АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОДИНОЧНЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

6.1. Представление периодических сигналов в виде рядов Фурье

Периодический сигнал произвольной формы показан на рис. 6.1. Если сигнал удовлетворяет условиям Дирихле, то его можно аналитически представить в виде ряда Фурье, т.е. в виде суммы бесконечного числа косинусов и синусов различной амплитуды и частоты:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t),$$

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая периодического сигнала, представляющая собой среднее значение сигнала за период; a_k и b_k — коэффициенты ряда Фурье (амплитуды гармоник); k — номер или порядок гармоники, $k = 1, 2, \dots, \infty$; ω_1 — частота первой гармоники, равная частоте сигнала $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$; $a_k \cos(k\omega_1 t)$ и $b_k \sin(k\omega_1 t)$ — гармонические функции, составляющие ряд Фурье (гармоники).

Объединив синусы и косинусы одинаковых частот, можно получить другую форму ряда Фурье, также представляющую собой аналитическую запись периодического сигнала:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \alpha_k),$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\alpha_k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$.

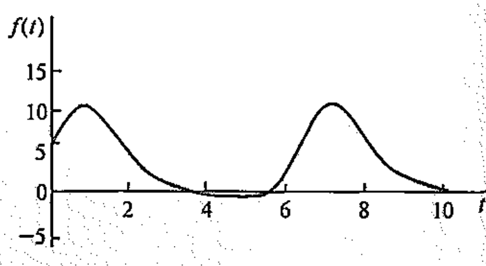
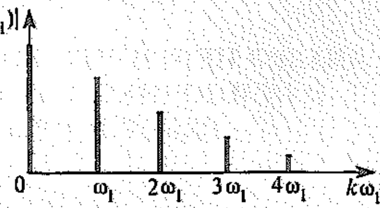


Рис. 6.1. Периодический сигнал произвольной формы

Рис. 6.2. Амплитудно-частотный спектр периодического сигнала



Поскольку косинус можно представить как вещественную часть комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, то ряд Фурье можно записать в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}[A_k \mathbf{e}^{j(k\omega_1 t + \alpha_k)}] = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}[\dot{A}_k \mathbf{e}^{jk\omega_1 t}],$$

где $\dot{A}_k = A_k \mathbf{e}^{j\alpha_k}$ — комплексная амплитуда k-й гармоники ряда Фурье.

Комплексные амплитуды гармоник ряда Фурье содержат амплитуды и начальные фазы гармоник. Совокупность комплексных амплитуд ряда Фурье называется комплексным частотным спектром периодического сигнала и обозначается как $F(jk\omega_1)$:

$$F(jk\omega_1) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathbf{e}^{-jk\omega_1}\mathrm{d}t = \frac{2}{T}F(s)\bigg|_{s=jk\omega_1},$$

где $F(s)$ — изображение по Лапласу одного периода периодического сигнала.

Комплексный частотный спектр периодического сигнала является функцией дискретных значений частоты, кратных основной частоте, и при подстановке значений $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ позволяет определить амплитуды и начальные фазы соответствующих гармоник.

Частотный спектр периодического сигнала можно отобразить графически в виде совокупности двух спектров — амплитудно-частотного и фазочастотного. Амплитудно-частотный спектр сигнала представляет собой совокупность множества амплитуд гармоник ряда Фурье. Для наглядности амплитуды гармоник изображают в виде отрезков прямых линий, отложенных при соответствующих частотах гармоник. На рис. 6.2 показан общий вид амплитудно-частотного спектра периодического сигнала.

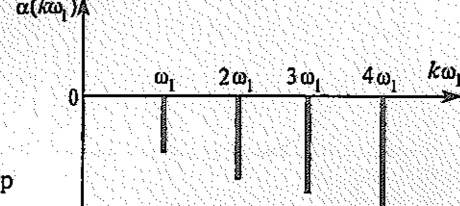


Рис. 6.3. Фазочастотный спектр периодического сигнала

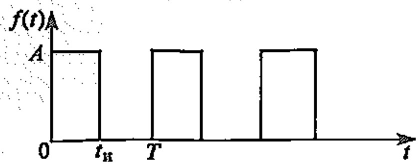


Рис. 6.4. Периодический сигнал прямоугольной формы

Фазочастотный спектр представляет собой совокупность множества начальных фаз гармоник ряда Фурье. Начальные фазы гармоник также можно изобразить в виде отрезков прямых линий, отложенных при соответствующих частотах (рис. 6.3).

Рассмотрим пример построения частотных спектров периодического сигнала прямоугольной формы. Периодический сигнал, изображенный на рис. 6.4, необходимо представить аналитически в виде ряда Фурье. Известны параметры сигнала: $A = 8$, $t_и = 1$ с, $T = 2$ с.

Для получения комплексного частотного спектра периодического сигнала воспользуемся выражением, отражающим связь с преобразованием Лапласа:

$$F(jk\omega_1) = \frac{2}{T}F(s)\Big|_{s=jk\omega_1} = \frac{2}{T}\frac{A}{s}(1 - e^{-st_и})\Big|_{s=jk\omega_1};$$

$$F(jk\omega_1) = \frac{8}{jk\omega_1}(1 - e^{-jk\omega_1}) = 8\frac{\sin\left(\frac{k\omega_1}{2}\right)}{\frac{k\omega_1}{2}}e^{-\frac{jk\omega_1}{2}}.$$

Для приведения выражения в скобках к синусу здесь использовано изображение синуса по Эйлеру:

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}.$$

Выражения амплитудно-частотного и фазочастотного спектров сигнала будут соответственно определяться следующим образом:

$$|F(jk\omega_1)| = \left|8\frac{\sin\left(\frac{k\omega_1}{2}\right)}{\frac{k\omega_1}{2}}\right|; \quad \alpha(k\omega_1) = -\frac{k\omega_1}{2}.$$

Подставив в полученные выражения последовательно значения $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и т.д., получим значения амплитуд и начальных фаз соответствующих гармоник (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Номер гармоники, k	Амплитуда гармоники, A	Фаза гармоники, α
0	8	—
1	5,095	−90°
2	0	—
3	1,698	−90°
4	0	—

Зная коэффициенты ряда Фурье, т.е. амплитуды и начальные фазы гармоник, можно построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала, отложив полученные значения в виде отрезков линий, как это показано на рис. 6.5 и 6.6. По рассчитанным значениям можно также записать ряд Фурье для рассматриваемого сигнала в аналитической форме:

$$f(t) = 4 + 5{,}095\cos(3{,}14t - 90^\circ) + 1{,}698\cos(3 \cdot 3{,}14t - 90^\circ).$$

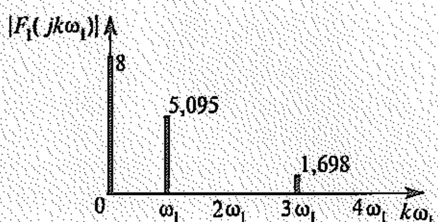


Рис. 6.5. Амплитудно-частотный спектр прямоугольного периодического сигнала

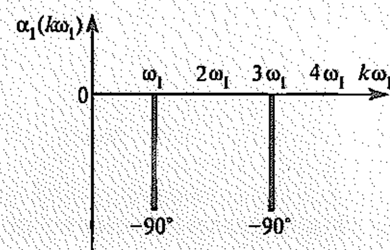


Рис. 6.6. Фазочастотный спектр прямоугольного периодического сигнала

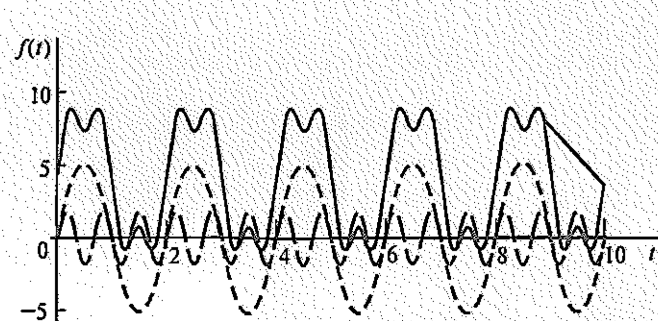


Рис. 6.7. Аппроксимация периодического прямоугольного сигнала

Ряд Фурье содержит бесконечное число гармоник. Если число гармоник ограничено, как в рассматриваемом примере, то ряд Фурье называется редуцированным рядом Фурье. По аналитическому выражению можно построить аппроксимацию сигнала редуцированным (ограниченным тремя гармониками) рядом Фурье. Для этого на временной диаграмме достаточно отложить отдельные составляющие ряда Фурье, а затем их сложить, как это показано на рис. 6.7. Как видно из рисунка, суммирование трех гармоник не дает точной аппроксимации сигнала. В том случае, когда требуется получение более точного представления сигнала, число гармоник следует увеличить.

6.2. Анализ цепей при воздействии периодических сигналов с использованием частотных спектров

Для цепи с одним источником и начальными нулевыми условиями, системная функция (функция передачи) которой известна, алгоритм расчета реакции (тока или напряжения на нагрузке) достаточно прост. Для определения комплексного спектра реакции достаточно комплексный спектр воздействия умножить на комплексную функцию передачи:

$$F_2(jk\omega_1) = F_1(jk\omega_1)H(jk\omega_1).$$

Поскольку при перемножении комплексных функций в показательной форме их модули перемножаются, а фазы складываются, то амплитудно-частотный спектр реакции можно определить путем перемножения амплитудного спектра входного сигнала на выражение, определяющее амплитудно-частотную характеристику функции передачи цепи:

$$|F_2(jk\omega_1)| = |F_1(jk\omega_1)| \cdot |H(jk\omega_1)|.$$

Фазочастотный спектр реакции можно получить путем суммирования фазового спектра входного сигнала с выражением, определяющим фазочастотную характеристику функции передачи цепи:

$$\alpha_2(k\omega_1) = \alpha_1(k\omega_1) + \alpha_H(k\omega_1).$$

Пример. На вход цепи (рис. 6.8) подается периодический сигнал прямоугольной формы, вид которого показан на рис 6.4. Параметры сигнала известны: амплитуда $A = 8$ В, длительность импульса $t_и = 1$ с, период $T = 2$ с. Функция передачи цепи в операторной форме известна:

$$H_U(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Требуется определить реакцию цепи в виде напряжения на R-элементе.

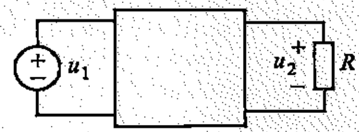


Рис. 6.8. Цепь с одним источником напряжения

Решение. Для заданного входного сигнала ранее были получены аналитические выражения частотных спектров входного сигнала и построены их графические представления в виде линейчатых спектров (см. рис. 6.5 и 6.6).

Для получения частотных спектров реакции заменим в функции передачи $H_U(s)$ s на $jk\omega_1$. В результате получим функцию передачи цепи по напряжению в комплексной форме:

$$H(jk\omega_1) = \frac{2}{-(k\omega_1)^2 + j2k\omega_1 + 2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{[2-(k\omega_1)^2]^2 + (2k\omega_1)^2}} e^{-j\operatorname{arctg}\left(\frac{2k\omega_1}{2-(k\omega_1)^2}\right)},$$

где $|H(jk\omega_1)| = \dfrac{2}{\sqrt{[2-(k\omega_1)^2]^2 + (2k\omega_1)^2}}$ — выражение, определяющее амплитудно-частотную характеристику функции передачи, а $\alpha_H(k\omega_1) = -j\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2k\omega_1}{2-(k\omega_1)^2}\right)$ — выражение, определяющее фазочастотную характеристику функции передачи цепи. Подставив в полученные выражения значения $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ и т. д., получим дискретные значения АЧХ и ФЧХ, которые также можно графически представить в виде линейчатых диаграмм (рис. 6.9 и 6.10).

Умножив значения составляющих амплитудного спектра входного сигнала (см. рис. 6.5) на значения АЧХ функции передачи (рис. 6.9), получим значения составляющих амплитудного спектра реакции, который представлен на рис. 6.11. Сложив значения со-

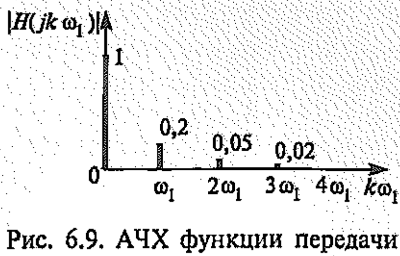


Рис. 6.9. АЧХ функции передачи цепи

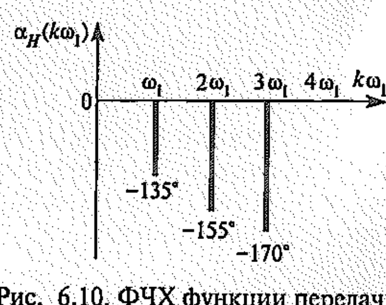


Рис. 6.10. ФЧХ функции передачи цепи

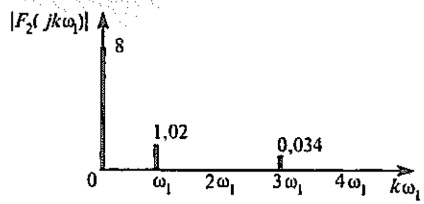


Рис. 6.11. Амплитудно-частотный спектр реакции цепи

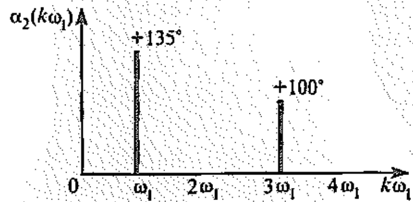


Рис. 6.12. Фазочастотный спектр реакции цепи

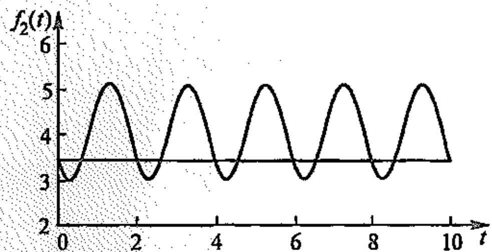


Рис. 6.13. График реакции в функции времени

ставляющих фазового спектра входного сигнала (см. рис. 6.6) со значениями ФЧХ функции передачи (см. рис. 6.10), получим значения составляющих фазового спектра реакции (рис. 6.12).

С помощью амплитудно-частотного и фазочастотного спектров реакции можно записать ряд Фурье для выходного сигнала:

$$f_2(t) = u_2(t) = 4 + 1{,}02\cos(3{,}14t + 135^\circ) + 0{,}034\cos(3 \cdot 3{,}14t + 100^\circ).$$

На рис. 6.13 приведен график реакции $f_2(t) = u_2(t)$ в функции времени.

6.3. Частотные спектры одиночных сигналов

Выражение комплексного частотного спектра одиночного сигнала можно получить с помощью интеграла прямого преобразования Фурье. Этот интеграл сходен с интегралом прямого преобразования Лапласа:

$F(j\omega) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$ — интеграл прямого преобразования Фурье;

$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ — интеграл прямого преобразования Лапласа.

На функцию $f(t)$в интеграле Фурье накладываются дополнительные ограничения. Так, интегрируемая функция дополнительно должна удовлетворять условиям абсолютной интегрируемости, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < \infty$. Этому условию не удовлетворяют многие часто используемые в теории электрических цепей функции, например, единичная ступенчатая или синусоидальная функции. Для получения спектров таких сигналов следует применять специальные методы.

Для сигналов, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости, спектры можно получить на основе связи преобразований Лапласа и Фурье:

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}.$$

В качестве примеров рассмотрим методику построения частотных спектров некоторых простых одиночных сигналов.

1. *Частотные спектры экспоненциального импульса*. График такого сигнала изображен на рис. 6.14.

$$f(t) = 4\mathbf{e}^{-2t}\delta_1(t).$$

Выражение комплексного частотного спектра сигнала можно получить, используя изображение этого сигнала по Лапласу. Изображение экспоненциального сигнала имеет вид

$$F(s) = \frac{A}{s+a} = \frac{4}{s+2}.$$

Заменим $s = j\omega$ и выделим модуль и фазу полученного комплексного выражения:

$$F(j\omega) = \frac{4}{2+j\omega} = \frac{4}{\sqrt{4+\omega^2}}\mathrm{e}^{-j\frac{\omega}{\mathrm{arctg}2}};$$

$$|F(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{4+\omega^2}};$$

$$\alpha(\omega) = -\frac{\omega}{\mathrm{arctg}2}.$$

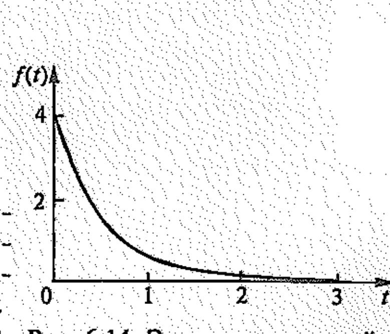


Рис. 6.14. Экспоненциальный импульс

Графики амплитудного и фазового частотных спектров, построенных по полученным выражениям, изображены на рис. 6.15 и 6.16.

2. *Частотные спектры прямоугольного импульса*. График прямо-

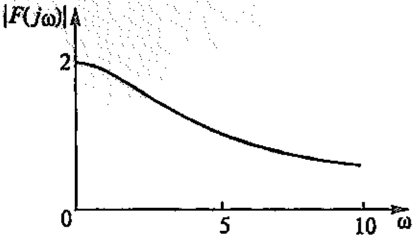


Рис. 6.15. Амплитудно-частотный спектр экспоненциального импульса

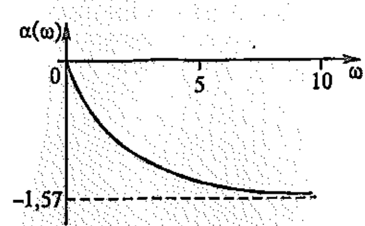


Рис. 6.16. Фазочастотный спектр экспоненциального импульса

угольного импульса изображен на рис. 6.17. Аналитически прямоугольный сигнал можно записать в виде разности двух ступенчатых функций, одна из которых смещена во времени:

$$f(t) = A\delta_1(t) - A\delta_1(t - t_и).$$

Операторное изображение прямоугольного сигнала имеет вид

$$F(s) = \frac{A}{s}(1 - e^{-st_и}).$$

Заменим $s = j\omega$ и выделим модуль и фазу полученного комплексного выражения:

$$F(j\omega) = \frac{A}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_и}) = \frac{2A}{\omega}\left(\frac{e^{j\frac{\omega t_и}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}}{j2}\right) = At_и\,\frac{\sin\left(\frac{\omega t_и}{2}\right)}{\frac{\omega t_и}{2}};$$

$$\left|F(j\omega)\right| = \left|At_и\,\frac{\sin\left(\frac{\omega t_и}{2}\right)}{\frac{\omega t_и}{2}}\right|; \quad \alpha(\omega) = -\frac{\omega t_и}{2}.$$

При подстановке в полученные выражения параметров прямоугольного импульса $A = 4$, $t_и = 2$ с получим амплитудно-частотный и фазочастотный спектры прямоугольного импульса со значениями:

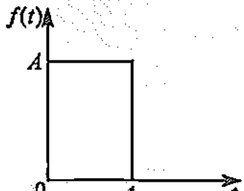
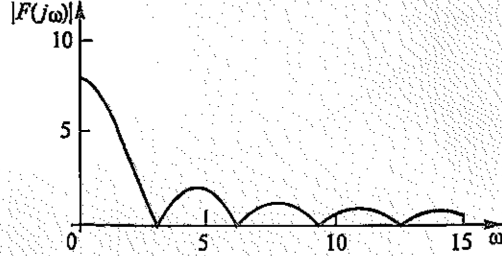


Рис. 6.17. Прямоугольный импульс

$$\left|F(j\omega)\right| = \left|8\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right|; \quad a(\omega) = -\omega,$$

которые показаны на рис. 6.18 и 6.19 соответственно.

Рис. 6.18. Амплитудно-частотный спектр прямоугольного импульса



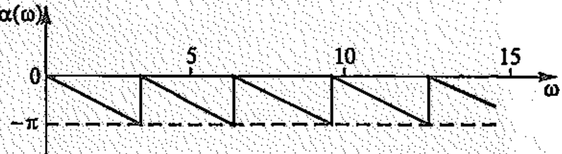


Рис. 6.19. Фазочастотный спектр прямоугольного импульса

3. *Частотные спектры треугольного импульса.* График такого сигнала изображен на рис. 6.20:

$$f(t)=\frac{2A}{t_и}t\,\delta_1(t)-\frac{4A}{t_и}\left(t-\frac{t_и}{2}\right)\delta_1\left(t-\frac{t_и}{2}\right)+\frac{2A}{t_и}(t-t_и)\delta_1(t-t_и).$$

Изображение треугольного сигнала по Лапласу в соответствии с теоремой смещения во временной области имеет вид

$$F(s)=\frac{2A}{t_и s^2}\left(1-2\mathbf{e}^{-\frac{st_и}{2}}+\mathbf{e}^{-st_и}\right).$$

Заменим $s = j\omega$ и выделим модуль и фазу полученного комплексного выражения:

$$F(j\omega)=\frac{2A}{t_и(j\omega)^2}\left(1-2\mathbf{e}^{-\frac{j\omega t_и}{2}}+\mathbf{e}^{-j\omega t_и}\right)=\frac{At_и}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_и}{4}\right)}{\left(\frac{\omega t_и}{4}\right)^2}\mathbf{e}^{-j\frac{\omega t_и}{2}};$$

$$|F(j\omega)|=\left|\frac{At_и}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_и}{4}\right)}{\left(\frac{\omega t_и}{4}\right)^2}\right|;\quad \alpha(\omega)=-\frac{\omega t_и}{2}.$$

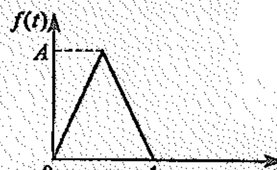


Рис. 6.20. Треугольный импульс

При подстановке в полученные выражения параметров треугольного импульса $A = 4$, $t_и = 2$ с получим амплитуд-

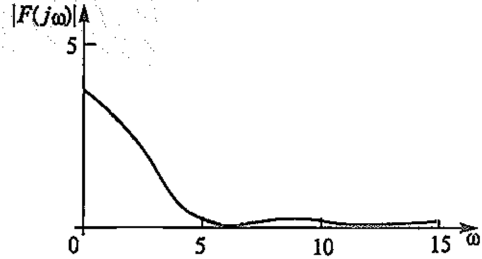


Рис. 6.21. Амплитудно-частотный спектр треугольного импульса

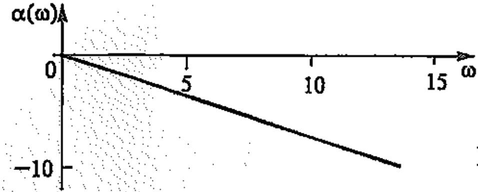


Рис. 6.22. Фазочастотный спектр треугольного импульса

но-частотный и фазочастотный спектры треугольного импульса со значениями:

$$|F(j\omega)| = 4\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}; \quad \alpha(\omega) = -\omega,$$

которые показаны на рис. 6.21 и 6.22 соответственно.

6.4. Некоторые свойства спектральных функций

Все свойства и теоремы преобразования Лапласа справедливы и для преобразования Фурье. Например, теорему смещения во временной области для преобразования Фурье можно записать в аналитической форме аналогично ее записи для преобразования Лапласа:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega); \quad f(t-\tau) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Это означает, что, если сигнал сместить во времени на величину τ (рис. 6.23), то его изображение по Фурье необходимо умножить на экспоненту $e^{-j\omega\tau}$.

Ширина спектра зависит от длительности сигнала. Чем она больше, тем уже его спектр. Например, на рис. 6.24 показаны спектры прямоугольного сигнала длительностью 1 с (диаграмма *1*) и 2 с (диаграмма *2*). Как видно из рисунка, ширина спектра первого сигнала в два раза больше ширины спектра второго сигнала.

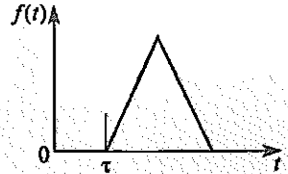


Рис. 6.23. Смещение сигнала по оси времени

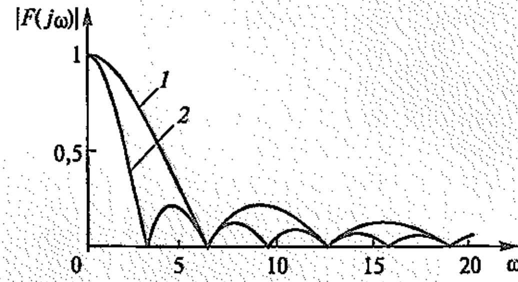


Рис. 6.24. Амплитудно-частотные спектры прямоугольных сигналов разной длительности:
1 — 1 с; *2* — 2 с

Чем больше крутизна переднего фронта импульса, тем шире его спектр. Например, на рис. 6.25 показаны спектры прямоугольного (диаграмма *1*) и треугольного (диаграмма *2*) импульсов одинаковой длительности (1 с). Из рисунка видно, что спектр треугольного сигнала затухает быстрее, в то же время очевидно, что крутизна его переднего фронта меньше, чем у прямоугольного.

Значение амплитудного спектра импульса при $\omega = 0$ численно равно площади импульса. Выражение амплитудного спектра прямоугольного сигнала имеет вид

$$|F(j\omega)| = \left| A\,t_{\text{и}} \frac{\sin\left(\dfrac{\omega\, t_{\text{и}}}{2}\right)}{\dfrac{\omega\, t_{\text{и}}}{2}} \right|.$$

При подстановке $\omega = 0$ получим $|F(j\omega)|_{\omega=0} = A\,t_{\text{и}}$.

С другой стороны, площадь прямоугольного импульса $s = A\,t_{\text{и}}$.

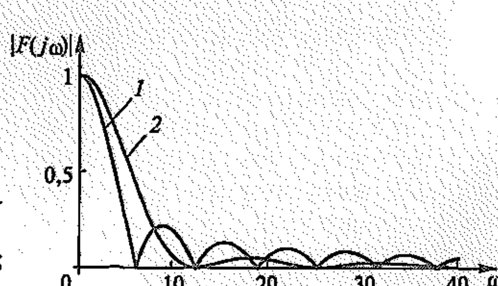


Рис. 6.25. Амплитудно-частотные спектры:
1 — прямоугольного импульса;
2 — треугольного импульса

6.5. Качественный анализ цепей в частотной области

Частотные спектры сигналов позволяют проводить качественный анализ цепей в частотной области, т.е. определить характер искажений сигнала при прохождении его через электрическую цепь. Простейшую оценку возможных искажений сигнала на выходе цепи можно получить, сопоставив амплитудно-частотный спектр входного сигнала с амплитудно-частотной характеристикой функции передачи цепи.

Например, на вход цепи (см. рис. 6.8), функция передачи которой известна, подается прямоугольный сигнал (см. рис. 6.17). Требуется определить, каковы будут искажения сигнала при прохождении его через цепь.

Для качественной оценки искажений следует построить амплитудно-частотный спектр входного сигнала. Для прямоугольного сигнала он имеет вид, показанный на рис. 6.26. Затем следует построить амплитудно-частотную характеристику функции передачи цепи (рис. 6.27). Далее на графике амплитудно-частотного спектра определяется ширина спектра, которую можно условно определить, проведя линию, параллельную оси абсцисс, на уровне 0,1 от максимального значения амплитудно-частотного спектра. Последняя точка пересечения проведенной линии с графиком амплитудного спектра определит его ширину ω_0 (см. рис. 6.26). Для амплитудно-частотной характеристики определяется полоса пропускания цепи. Для этого на графике проводится линия на уровне 0,707 от максимального значения. Диапазон частот, в котором график АЧХ лежит выше проведенной линии, является полосой пропускания цепи. Точка пересечения проведенной линии с графиком будет являться частотой среза ω_c (см. рис. 6.27).

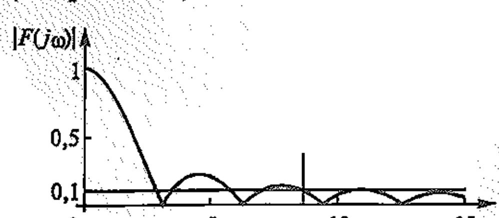


Рис. 6.26. Ширина амплитудного спектра

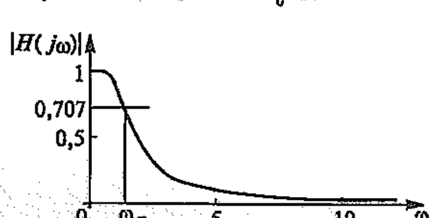


Рис. 6.27. Полоса пропускания цепи

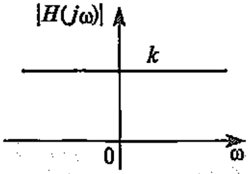


Рис. 6.28. АЧХ цепи, пропускающей сигнал без искажений

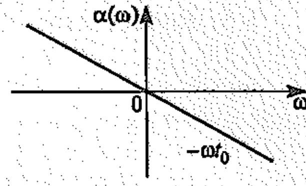


Рис. 6.29. ФЧХ цепи, пропускающей сигнал без искажений

Сопоставляя ширину спектра сигнала с полосой пропускания цепи, можно дать качественную оценку искажениям сигнала на выходе цепи. Так, если ширина спектра меньше полосы пропускания цепи и она размещается в полосе пропускания, искажения сигнала будут минимальными. Если основная часть спектра размещается в полосе пропускания, а незначительная часть спектра выходит за ее пределы, то и искажения сигнала будут незначительными. Если ширина спектра не совпадает с полосой пропускания цепи, то сигнал проходить через цепь практически не будет.

На основе представления сигналов в частотной области можно сформулировать требования к виду амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик цепи, не искажающей входного сигнала. Частотные характеристики цепи, пропускающей сигнал без искажений, должны иметь вид, показанный на рис. 6.28 и 6.29.

Глава 7
МЕТОДЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

7.1. Основные понятия о топологии и матрицах электрических цепей

Методы матричного анализа применяются, как правило, для моделирования и расчета сложных электрических цепей разветвленной структуры. Эти методы ориентированы на использование компьютерных технологий, поскольку операции с матрицами требуют выполнения большого числа вычислительных операций и их применение при «ручных» расчетах становится нерациональным.

Прежде чем приступить к рассмотрению построения матричных моделей резистивных цепей, приведем некоторые определения и введем необходимые для этого понятия.

Топологическим графом электрической цепи называется ее геометрическое представление, при котором ветви цепи заменяются линиями (ветвями графа), а узлы цепи — точками (вершинами или узлами графа). Топологический граф может быть:

планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ветвей;

ориентированным или направленным, если указаны направления его ветвей;

связанным, если имеется хотя бы один путь из одного узла в другой.

Путем графа называется совокупность ветвей, соединяющих два узла. Замкнутый путь, т.е. путь, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, называется *контуром.*

Сечением топологического графа называется совокупность ветвей, удаление которых приводит к распаду графа на подграфы. В частном случае подграфом может быть отдельная вершина графа.

Совокупность ветвей, соединяющих все узлы графа и не образующих при этом контуров, называется *деревом графа.* Ветви, дополняющие дерево до полного графа, называются *ветвями связи* или *хордами.*

Главное сечение графа — это сечение, в состав которого входит только одна ветвь дерева, а остальные ветви — хорды. Главный контур — это контур, в состав которого входит только одна ветвь связи (хорда).

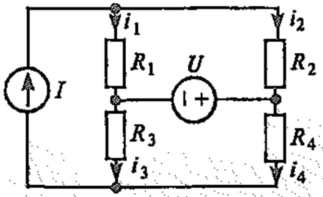


Рис. 7.1. Электрическая цепь, состоящая из резисторов

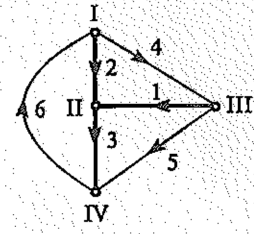


Рис. 7.2. Топологический граф цепи

На рис. 7.1 приведен пример электрической цепи, состоящей из резисторов. Каждый элемент цепи рассматривается как отдельная ветвь. Топологический граф этой цепи изображен на рис. 7.2. В качестве ветвей дерева выбраны ветви с источником напряжения и резисторами R_1 и R_3 (на рисунке они показаны жирными линиями).

На рис. 7.3 линиями, пересекающими ветви графа, показаны главные сечения графа, которые обозначены S_1, S_2, S_3. Стрелками на концах линий показаны условные направления главных сечений, которые совпадают с направлениями ветвей дерева, входящих в главные сечения.

На рис. 7.4 показаны главные контуры топологического графа, которые обозначены L_4, L_5, L_6. Направления главных контуров показаны стрелками и совпадают с направлениями ветвей связи (хорд), которые входят в их состав.

С помощью топологического графа удобно формировать матрицы электрической цепи, которые представляют собой ее числовую модель. Рассмотрим подробнее принципы формирования некоторых матриц на примере цепи, показанной на рис. 7.1.

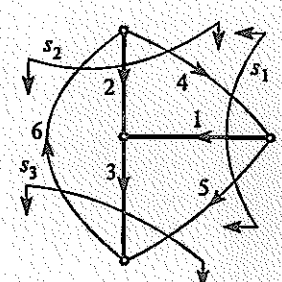


Рис. 7.3. Главные сечения топологического графа

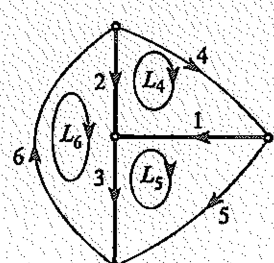


Рис. 7.4. Главные контуры топологического графа

Узловая матрица:

$$A = \begin{array}{c} \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Строки матрицы соответствуют узлам топологического графа, а столбцы — ветвям графа. При этом узлы цепи выбираются в произвольном порядке. Матрица A заполняется по следующим правилам: если ветвь присоединена к узлу и имеет направление от узла топологического графа, в матрицу записывается 1, если ветвь входит в узел, в матрицу записывается -1; если ветвь не присоединена к узлу графа, в матрицу записывается 0.

Матрица главных сечений:

$$Q = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} E & F \end{array} \end{array}.$$

Строки матрицы соответствуют главным сечениям топологического графа, а столбцы — ветвям графа. Если ветвь входит в состав сечения и ее направление совпадает с направлением главного сечения, в матрицу записывается 1, если не совпадает, в матрицу записывается -1; если ветвь не входит в состав сечения, в матрицу записывается 0.

При таком способе формирования матрицы в ее левой части формируется единичная подматрица, а в правой — подматрица F. Подматрица F несет основную информацию о порядке соединений ветвей цепи, поэтому будем в дальнейшем ее называть подматрицей или матрицей соединений (инциденций).

Контурная матрица:

$$B_k = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Строки матрицы соответствуют контурам топологического графа, а столбцы — ветвям графа. Если ветвь входит в контур и ее направление совпадает с направлением контура, в матрицу записывается 1, если не совпадает, в матрицу записывается −1; если ветвь не входит в контур графа, в матрицу записывается 0.

Матрица главных контуров:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
B = \begin{array}{c} M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \\
 & \begin{array}{cc} -F^T & \qquad E \end{array}
\end{array}
$$

Строки матрицы соответствуют главным контурам топологического графа, а столбцы — ветвям графа. Если ветвь входит в главный контур и ее направление совпадает с направлением главного контура, в матрицу записывается 1; если не совпадает, в матрицу записывается −1; если ветвь не входит в главный контур графа, в матрицу записывается 0.

7.2. Формирование математических моделей и методы матричного расчета резистивных цепей

Метод ветвей дерева и хорд. При формировании алгоритма метода ветвей дерева и хорд исходными матрицами цепи являются матрицы главных сечений Q и главных контуров B. Эти матрицы определяют математическую модель резистивной цепи в виде уравнений соединений (уравнений Кирхгофа), которые в матричной форме записываются следующим образом:

$Qi = 0$ — уравнения соединения цепи, записанные на основе закона тока Кирхгофа;

$Bu = 0$ — уравнения соединений цепи, записанные на основе закона напряжений Кирхгофа.

Приняв матричные уравнения соединений за исходную математическую модель цепи, с помощью матричных преобразований можно получить матричный алгоритм их решения относительно токов в ветвях дерева топологического графа и напряжений на ветвях связи (хордах):

$$[E\ F]\begin{bmatrix} i_{д} \\ i_{х} \end{bmatrix} = [0]; \quad Ei_{д} + Fi_{х} = 0; \tag{7.1}$$

$$[-F^T E]\begin{bmatrix} u_{д} \\ u_{х} \end{bmatrix} = [0]; \quad -F^T u_{д} + Eu_{х} = 0. \tag{7.2}$$

Полученные матричные уравнения содержат четыре неизвестных. Чтобы система из этих уравнений была разрешима, необхо-

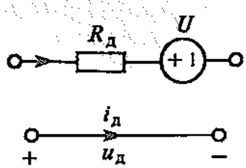


Рис. 7.5. Ветвь дерева топологического графа

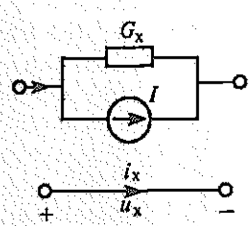


Рис. 7.6. Ветвь связи топологического графа

димо исключить из уравнений два неизвестных. С этой целью используем уравнения ветвей цепи, связывающие напряжения и токи ветвей. Уравнения ветвей цепи можно записать, представив ветвь дерева в виде последовательного соединения источника напряжения и резистора, а ветвь связи (хорду) — в виде параллельного соединения источника тока и резистора, как показано на рис. 7.5 и 7.6. При таком представлении ветвей цепи уравнения ветвей дерева и хорд будут соответственно иметь вид

$$u_д = R_д i_д + U;$$

$$i_х = G_х u_х + I.$$

В результате их подстановки в матричные уравнения (7.1) и (7.2) получим систему двух матричных уравнений с двумя неизвестными $i_д$ и $u_х$:

$$i_д = -FG_х u_х - FI;$$

$$u_х = F^T R_д i_д + F^T U.$$

Эти уравнения уже можно решить относительно токов ветвей дерева и напряжений хорд:

$$i_д = (E_1 + FG_х F^T R_д)^{-1}(-FG_х F^T U - FI); \tag{7.3}$$

$$u_х = (E_2 + F^T R_д F G_х)^{-1}(-F^T R_д FI + F^T U). \tag{7.4}$$

Выражения (7.3) и (7.4) определяют алгоритм метода ветвей дерева и хорд, который позволяет рассчитать токи в ветвях дерева и напряжения на хордах.

Пример. Графическая модель цепи показана на рис. 7.1, а ее топологическая модель — на рис. 7.3. Заданы параметры элементов цепи: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом, $U = 12$ В, $I = 6$ А. Требуется рассчитать токи и напряжения в цепи методом ветвей дерева и хорд.

Р е ш е н и е. Поскольку топологическая модель цепи в виде графа уже построена, решение задачи можно начать с формирования исходных для расчета матриц цепи. Для выбранных на топологическом графе (см. рис. 7.3) главных сечений формируется матрица главных сечений Q или ее подматрица F:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Формируются матрицы сопротивлений ветвей дерева и проводимостей хорд:

$$R_{\text{д}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G_{\text{х}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формируются матрицы напряжений источников напряжения в ветвях дерева и токов источников тока в хордах:

$$U = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Полный алгоритм расчета токов в ветвях дерева и напряжений на хордах в цепи (рис. 7.1), выполненный в программной среде «Mathcad-2000», выглядит следующим образом.

Единичная матрица: Матрица инциденций:

$$\mathrm{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \mathrm{F} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица сопротивлений ветвей дерева: Матрица проводимостей хорд:

$$\mathrm{Rd} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \mathrm{Gh} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица напряжений источников:

$$U := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица токов источников:

$$I := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Матричный алгоритм расчета токов в ветвях дерева и напряжений на хордах:

$$\mathrm{id} := (\mathrm{E} + \mathrm{F} \cdot \mathrm{G_h F^T} \cdot \mathrm{Rd})^{-1} \cdot (-\mathrm{F} \cdot \mathrm{G_h} \cdot \mathrm{F^T U} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{I});$$

$$\mathrm{uh} := (\mathrm{E} + \mathrm{F^T} \cdot \mathrm{Rd} \cdot \mathrm{F} \cdot \mathrm{G_h})^{-1} \cdot (-\mathrm{F^T} \cdot \mathrm{RdF} \cdot \mathrm{I} + \mathrm{F^T} \cdot \mathrm{U}).$$

Токи в ветвях дерева и напряжения на хордах:

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{un} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Конечными результатами проведенного расчета являются матрицы (векторы) токов в ветвях дерева и напряжений на хордах:

$$i_{\text{д}} = \begin{bmatrix} -12 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad u_{\text{х}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Метод контурного анализа в матричной форме. Уравнения резистивной цепи, составленные согласно методу контурного анализа, в матричной форме имеют вид

$$R_{\text{к}} i_{\text{к}} = u_{\text{к}}.$$

Сформировать матрицы этого уравнения и найти его решение можно с помощью матричных преобразований. Исходными для формирования являются контурная матрица $B_{\text{к}}$, составленная для ячеек, в которых выбраны контурные токи, матрица сопротивлений ветвей R и вектор напряжений источников напряжений в ветвях U. При этом в качестве ветви принимается последовательное соединение резистора и источника напряжения, соединенных так, как это показано на рис. 7.7.

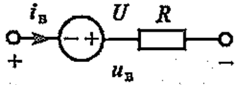


Рис. 7.7. Ветвь графа при использовании МКА

При таком представлении ветвей матрицы, входящие в алгоритм метода, определяются по следующим правилам:

$$R_к = B_к R B_к^T; \quad u_к = B_к U; \quad i_к = R_к^{-1} u_к.$$

Токи в ветвях цепи определяются через токи контуров:

$$i_в = B_к^T i_к.$$

Пример. Графическая модель резистивной цепи показана на рис. 7.8, а ее топологическая модель — на рис. 7.9. Параметры элементов цепи известны: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом, $U_1 = 10$ В, $U_2 = 10$ В, $U_3 = 5$ В. Требуется определить токи ветвей методом контурного анализа.

Решение. Для решения этой задачи необходимо сформировать матрицы цепи с помощью топологического графа, который показан на рис. 7.9. Формируются следующие матрицы:

контурная матрица $B_к$ для контуров, в которых протекают выбранные контурные токи

$$B_к = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

матрица сопротивлений ветвей

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

матрица напряжений источников в ветвях цепи

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

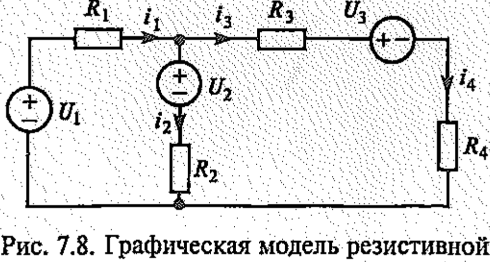


Рис. 7.8. Графическая модель резистивной цепи

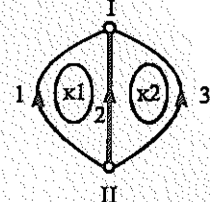


Рис. 7.9. Топологическая модель резистивной цепи

Полное решение задачи в программном пакете «Mathcad-2000» выглядит следующим образом.

Контурная матрица:

$$Bk:=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Матрица сопротивлений ветвей:

$$R:=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Матрица напряжений источников:

$$U:=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 5\end{pmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений:

$$Rk:=Bk\cdot R\cdot Bk^{T}.$$

Матрица контурных напряжений:

$$Uk:=Bk\cdot U.$$

Вектор контурных токов:

$$ik:=Rk^{-1}\cdot Uk;$$

$$ik=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Вектор токов ветвей:

$$iv:=Bk^{T}\cdot ik;$$

$$iv=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Конечными результатами проведенного расчета являются матрица (вектор) контурных токов и токов в ветвях цепи:

$$i_{\text{к}}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix};\quad i_{\text{в}}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Метод узлового анализа в матричной форме. Уравнения резистивной цепи, составленные согласно методу узлового анализа, в матричной форме имеют вид:

$$G_{\text{у}}u_{\text{у}}=i_{\text{у}}.$$

Сформировать матрицы этого уравнения и найти его решение можно с помощью матричных преобразований. Исходными для формирования являются узловая матрица $A_{\text{у}}$, составленная для независимых узлов, в которых выбраны узловые напряжения, матрица проводимостей ветвей G и вектор токов источников тока в ветвях I. При этом в качестве ветви принимается параллельное соединение резистора и источника тока, соединенных так, как это показано на рис. 7.10.

При таком представлении ветвей матрицы, входящие в алгоритм метода, определяются по следующим правилам:

$$G_у = A_у G A_у^T; \quad i_у = A_у I; \quad u_у = G_у^{-1} i_у.$$

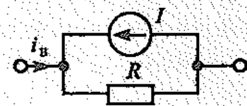


Рис. 7.10. Ветвь графа при использовании МУА

Напряжения на ветвях цепи определяются через напряжения узлов:

$$u_в = A_у^T u_у.$$

Пример. Графическая модель резистивной цепи показана на рис. 7.11, а ее топологическая модель — на рис. 7.12. Параметры элементов цепи известны: $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 1$ См, $I_1 = 10$ А, $I_2 = 10$ А, $I_3 = 5$ А. Требуется определить напряжения ветвей методом узлового анализа.

Решение. Для решения этой задачи необходимо сформировать матрицы цепи с помощью топологического графа, который показан на рис. 7.12.

Формируются следующие матрицы:

узловая матрица $A_у$ для узлов, в которых выбраны неизвестные узловые напряжения,

$$A_у = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

матрица проводимостей ветвей

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

матрица напряжений источников в ветвях цепи

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

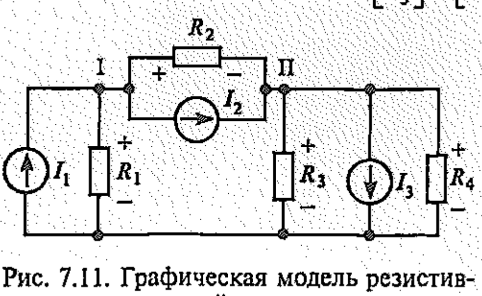


Рис. 7.11. Графическая модель резистивной цепи

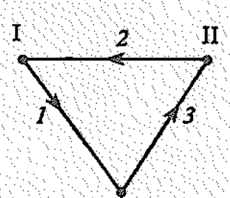


Рис. 7.12. Топологическая модель резистивной цепи

Полное решение задачи в программном пакете «Mathcad-2000» выглядит следующим образом.

Узловая матрица:

$$Au:=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица проводимости ветвей:

$$G:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица токов источников:

$$I:=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица узловых проводимостей:

$$Gu:=Au\cdot G\cdot Au^{T}.$$

Матрица узловых токов:

$$Iu:=Ai\cdot I.$$

Вектор узловых напряжений:

$$uu:=Gu^{-1}\cdot Iu;$$

$$uu=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор напряжений ветвей:

$$uv:=Au^{T}\cdot uu;$$

$$uv=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Конечными результатами проведенного расчета являются матрицы (векторы) узловых напряжений и напряжений на ветвях цепи:

$$u_{\text{у}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad u_{\text{в}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

7.3. Формирование математических моделей и методы матричного расчета динамических цепей

Одним из наиболее распространенных видов математических моделей динамических цепей являются уравнения состояния, которые представляют собой систему уравнений Коши в нормальной форме. Общий вид уравнений состояния динамической цепи в матричной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+BF.$$

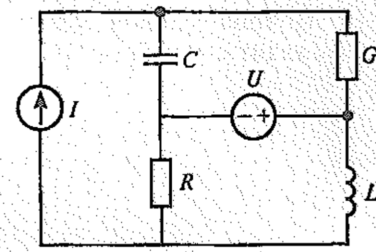


Рис. 7.13. Динамическая цепь второго порядка

Рассмотрим два метода формирования уравнений состояния, основанные на построении топологических моделей электрических цепей.

Метод с использованием эквивалентной резистивной цепи. Метод базируется на замещении динамической цепи эквивалентной резистивной цепью. Его удобно применять в тех случаях, когда имеется возможность производить символьные преобразования с матрицами.

В основу формирования уравнений состояния положен метод ветвей дерева и хорд, который подробно был рассмотрен в подразд. 7.2 при расчете резистивной цепи. Рассмотрим алгоритм формирования уравнений состояния на примере динамической цепи, изображенной на рис. 7.13. Сначала динамическую цепь необходимо свести к резистивной, для чего C-элементы заменяются источниками напряжения с напряжением u_C, а L-элементы — источниками тока с током i_L (рис. 7.14). Затем формируется топологический граф цепи (рис. 7.15), при этом в качестве ветви дерева графа рекомендуется выбирать либо отдельные элементы, либо последовательное соединение источника напряжения с R-элементом, а в качестве ветви связи (хорды) — параллельное соединение источника тока с G-элементом, как это показано на рис. 7.16. Нумерацию ветвей графа рекомендуется производить в следующем порядке: U—C—R—G—L—I, при этом ветви с U—C—R-элементами должны быть ветвями дерева, а ветви с G—L—I-элементами должны быть ветвями связи (хордами).

Далее путем матричных преобразований и решения системы матричных уравнений соединений (см. подразд. 7.2) записывается система алгебраических выражений (7.3) и (7.4):

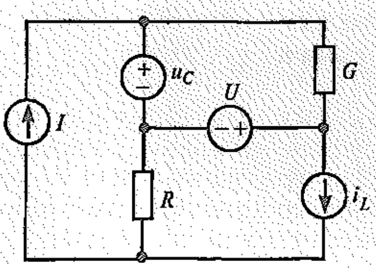


Рис. 7.14. Эквивалентная резистивная цепь

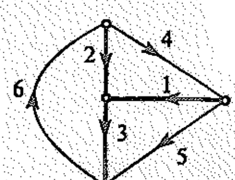


Рис. 7.15. Топологический граф цепи

$$i_д = (E_1 + FG_х F^T R_д)^{-1}(-FG_х F^T U - FI);$$
$$u_х = (E_2 + F^T R_д FG_х)^{-1}(-F^T R_д FI + F^T U).$$

Данные выражения определяют токи в ветвях дерева и напряжения на ветвях связи (хордах), их можно записать в обобщенной форме:

$$i_д = H1U + H2I;$$
$$u_х = H3I + H4U,$$

или в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} i_U \\ i_C \\ i_R \end{bmatrix} = H1\begin{bmatrix} U \\ u_C \\ 0 \end{bmatrix} + H2\begin{bmatrix} 0 \\ i_L \\ I \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_G \\ u_L \\ u_I \end{bmatrix} = H3\begin{bmatrix} 0 \\ i_L \\ I \end{bmatrix} + H4\begin{bmatrix} U \\ u_C \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $H1$, $H2$, $H3$, $H4$ — матрицы постоянных коэффициентов:

$$H1 = (E_1 + FG_х F^T R_д)^{-1}(-FG_х F^T); \quad H2 = (E_1 + FG_х F^T R_д)^{-1}(-F);$$

$$H3 = (E_2 + F^T R_д FG_х)^{-1}(-F^T R_д F); \; H4 = (E_2 + F^T R_д FG_х)^{-1}(F^T).$$

Для формирования уравнений состояния из записанных выражений необходимо выделить уравнения ветвей, определяющие токи в C-элементах, и уравнения, определяющие напряжения на L-элементах:

$$i_C = H1_{21}U + H1_{22}u_C + H2_{22}i_L + H2_{23}I;$$
$$u_L = H3_{22}i_L + H3_{23}I + H4_{21}U + H4_{22}u_C.$$

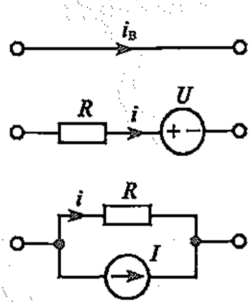


Рис. 7.16. Ветви топологического графа

Действительно, если в этих уравнениях i_C заменить на u_C, а u_L на i_L, использовав при этом вольт-амперные зависимости реактивных элементов, и разделить их на C и на L соответственно, то в результате записанные уравнения можно привести к нормальной форме Коши, т.е. к уравнениям состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{H1_{22}}{C}u_C + \frac{H2_{22}}{C}i_L + \frac{H1_{21}}{C}U + \frac{H2_{23}}{C}I;$$

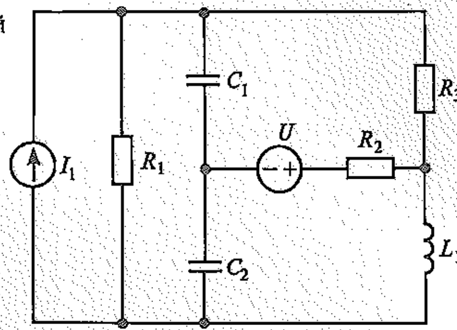


Рис. 7.17. Пример динамической цепи

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{H4_{22}}{L}u_C + \frac{H3_{22}}{L}i_L + \frac{H4_{21}}{L}U + \frac{H3_{23}}{L}I.$$

Пример. Дана электрическая цепь с L-, C- и R-элементами, структура которой приведена на рис. 7.17. Требуется сформировать математическую модель динамической цепи в виде уравнений состояния.

Решение. Сначала изображаем топологическую модель цепи, представленной на рис. 7.17, в виде нормального топологического графа, предназначенного для метода ветвей дерева и хорд (рис. 7.18). Выбираем дерево графа и главные сечения. При выборе ветвей топологического графа динамической цепи каждый элемент представляется как отдельная ветвь. Ветви графа динамической цепи нумеруются в следующей последовательности: сначала ветви дерева — ветви с источниками напряжения, ветви с C-элементами, ветви с R-элементами; затем ветви связи (хорды) — ветви с G-элементами, ветви с L-элементами и ветви с источниками тока (U—C—R—G—L—I).

По топологическому графу формируются матрица главных сечений Q, матрица инциденций F, матрица сопротивлений ветвей дерева $R_{д}$ и матрица проводимостей хорд $G_{х}$. Матрицы формируются аналогично тому, как это делалось для резистивной цепи. Для рассматриваемого примера они имеют вид

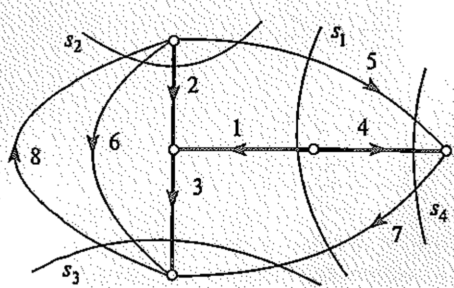


Рис. 7.18. Топологический граф динамической цепи

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&0&1&0\\0&1&0&0&1&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&1&0&-1&0\end{bmatrix};\quad F=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\1&1&0&-1\\0&1&1&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix};$$

$$R_{\text{д}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&R_2\end{bmatrix};\quad G_{\text{х}}=\begin{bmatrix}1/R_3&0&0&0\\0&1/R_1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Далее определяем матрицы коэффициентов при векторах напряжений источников в ветвях дерева и токов источников в хордах $H1$, $H2$, $H3$ и $H4$:

$$H1=(E_1+FG_{\text{х}}F^TR_{\text{д}})^{-1}(-FG_{\text{х}}F^T);\ H2=(E_1+FG_{\text{х}}F^TR_{\text{д}})^{-1}(-F);$$

$$H3=(E_2+F^TR_{\text{д}}FG_{\text{х}})^{-1}(-F^TR_{\text{д}}F);\ H4=(E_2+F^TR_{\text{д}}FG_{\text{х}})^{-1}(F^T).$$

Теперь запишем алгоритм формирования матриц коэффициентов уравнений состояния исходной динамической цепи при переменных состояния и при воздействиях A и B.

Уравнения для токов ветвей дерева и напряжений хорд в развернутом виде будут иметь вид

$$\begin{bmatrix}i_U\\i_{C_1}\\i_{C_2}\\i_{R_2}\end{bmatrix}=H1\begin{bmatrix}U\\u_{C_1}\\u_{C_2}\\0\end{bmatrix}+H2\begin{bmatrix}0\\0\\i_L\\I\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}u_{R_3}\\u_{R_1}\\u_L\\u_I\end{bmatrix}=H3\begin{bmatrix}0\\0\\i_L\\I\end{bmatrix}+H4\begin{bmatrix}U\\u_{C_1}\\u_{C_2}\\0\end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix}i_U\\i_{C1}\\i_{C2}\\i_{R2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H1_{11}&H1_{12}&H1_{13}&H1_{14}\\H1_{21}&H1_{22}&H1_{23}&H1_{24}\\H1_{31}&H1_{32}&H1_{33}&H1_{34}\\H1_{41}&H1_{42}&H1_{43}&H1_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\u_{C1}\\u_{C2}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H2_{11}&H2_{12}&H2_{13}&H2_{14}\\H2_{21}&H2_{22}&H2_{23}&H2_{24}\\H2_{31}&H2_{32}&H2_{33}&H2_{34}\\H2_{41}&H2_{42}&H2_{43}&H2_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\i_L\\I\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}u_{R3}\\u_{R1}\\u_L\\u_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H3_{11}&H3_{12}&H3_{13}&H3_{14}\\H3_{21}&H3_{22}&H3_{23}&H3_{24}\\H3_{31}&H3_{32}&H3_{33}&H3_{34}\\H3_{41}&H3_{42}&H3_{43}&H3_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\i_L\\I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H4_{11}&H4_{12}&H4_{13}&H4_{14}\\H4_{21}&H4_{22}&H4_{23}&H4_{24}\\H4_{31}&H4_{32}&H4_{33}&H4_{34}\\H4_{41}&H4_{42}&H4_{43}&H4_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\u_{C1}\\u_{C2}\\0\end{bmatrix}.$$

Для формирования уравнений состояния из записанных уравнений необходимо выделить уравнения, определяющие токи в C-элементах и напряжениях на L-элементах:

$$i_{C_1} = H1_{21}U + H1_{22}u_{C_1} + H1_{23}u_{C_2} + H2_{23}i_L + H2_{24}I;$$

$$i_{C_2} = H1_{31}U + H1_{32}u_{C_1} + H1_{33}u_{C_2} + H2_{33}i_L + H2_{34}I;$$

$$u_L = H3_{33}i_L + H3_{34}I + H4_{31}U + U4_{32}u_{C_1} + H4_{33}u_{C_2}.$$

Если в этих уравнениях i_C заменить на $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, а u_L на $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ и разделить их соответственно на C и на L, то в результате записанные уравнения преобразуются к уравнениям состояния цепи:

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} = \frac{H1_{22}}{C_1}u_{C_1} + \frac{H1_{23}}{C_1}u_{C_2} + \frac{H2_{23}}{C_1}i_L + \frac{H1_{21}}{C_1}U + \frac{H2_{24}}{C_1}I;$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} = \frac{H1_{32}}{C_2}u_{C_1} + \frac{H1_{33}}{C_2}u_{C_2} + \frac{H2_{33}}{C_2}i_L + \frac{H1_{31}}{C_2}U + \frac{H2_{34}}{C_2}I;$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{H4_{32}}{L}u_{C_1} + \frac{H4_{33}}{L}u_{C_2} + \frac{H3_{33}}{L}i_L + \frac{H4_{31}}{L}U + \frac{H3_{34}}{L}I.$$

Отсюда коэффициенты матрицы A уравнений состояния цепи будут соответственно равны :

$$A_{11} = \frac{H1_{22}}{C_1}; \quad A_{12} = \frac{H1_{23}}{C_1}; \quad A_{13} = \frac{H2_{23}}{C_1};$$

$$A_{21} = \frac{H1_{32}}{C_2}; \quad A_{22} = \frac{H1_{33}}{C_2}; \quad A_{23} = \frac{H2_{33}}{C_2};$$

$$A_{31} = \frac{H4_{32}}{L}; \quad A_{32} = \frac{H4_{33}}{L}; \quad A_{33} = \frac{H3_{33}}{L}.$$

Аналогичным образом выбираем коэффициенты при воздействиях:

$$B_{11} = \frac{H1_{21}}{C_1}; \quad B_{12} = \frac{H2_{24}}{C_1}; \quad B_{21} = \frac{H1_{31}}{C_2};$$

$$B_{22} = \frac{H2_{34}}{C_2}; \quad B_{31} = \frac{H4_{31}}{L}; \quad B_{32} = \frac{H3_{34}}{L}.$$

Полученные в результате коэффициенты матриц A и B уравнений состояния определяют математическую модель динамической цепи.

Полный алгоритм расчета коэффициентов матриц A и B выглядит следующим образом:

$$F:=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\1&1&0&-1\\0&1&1&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix};\ R:=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&R_2\end{bmatrix};\ G:=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_3}&0&0&0\\0&\frac{1}{R_1}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix};$$

$$E:=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$$H1:=(E+F\cdot G\cdot F^T\cdot R)^{-1}\cdot(-F\cdot G\cdot F^T);$$

$$H2:=(E+F\cdot G\cdot F^T\cdot R)^{-1}\cdot(-F);$$

$$H3:=(E+F^T\cdot R\cdot F\cdot G)^{-1}\cdot(-F^T\cdot R\cdot F);$$

$$H4:=(E+F^T\cdot R\cdot F\cdot G)^{-1}\cdot F^T;$$

$$H1=\begin{bmatrix}-0{,}2&0{,}2&0&0{,}2\\0{,}2&-1{,}2&-1&-0{,}2\\0&-1&-1&0\\0{,}2&-0{,}2&0&-0{,}2\end{bmatrix};\quad H2=\begin{bmatrix}0{,}6&0&-0{,}6&0\\-0{,}6&-1&-0{,}4&1\\0&-1&-1&1\\-0{,}6&0&0{,}6&0\end{bmatrix};$$

$$H3=\begin{bmatrix}-1{,}2&0&1{,}2&0\\0&0&0&0\\1{,}2&0&-1{,}2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix};\quad H4=\begin{bmatrix}-0{,}6&0{,}6&0&0{,}6\\0&1&1&0\\0{,}6&0{,}4&1&-0{,}6\\0&-1&-1&0\end{bmatrix};$$

$$A_{1,1}:=\frac{H1_{2,2}}{C1};\ A_{2,2}:=\frac{H1_{3,3}}{C2};\ A_{1,3}:=\frac{H2_{2,3}}{C1};\ B_{1,1}:=\frac{H1_{2,1}}{C1};\ B_{1,2}:=\frac{H2_{2,4}}{C1};$$

$$A_{2,1}:=\frac{H1_{3,2}}{C2};\ A_{2,2}:=\frac{H1_{3,3}}{C2};\ A_{2,3}:=\frac{H2_{3,3}}{C2};\ B_{2,1}:=\frac{H1_{3,1}}{C2};\ B_{2,2}:=\frac{H2_{3,4}}{C2};$$

$$A_{3,1}:=\frac{H4_{3,2}}{L};\ A_{3,2}:=\frac{H4_{3,3}}{L};\ A_{3,3}:=\frac{H4_{3,3}}{L};\ B_{3,1}:=\frac{H4_{3,1}}{L};\ B_{3,2}:=\frac{H3_{3,4}}{L};$$

$$A=\begin{bmatrix}-2{,}4&-2&-0{,}8\\-4&-4&-4\\0{,}4&1&-1{,}2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0{,}4&2\\0&4\\0{,}6&0\end{bmatrix}.$$

Метод декомпозиции матриц. При использовании метода декомпозиции для формирования математической модели динамической цепи основой для формирования уравнений состояния является матрица инциденций F. Для определения коэффициентов матриц уравнений состояния матрица F разбивается на девять подматриц, которые определяют три строки и три столбца матрицы F. Строки матрицы определяются ветвями дерева топологического графа: ветви с источниками напряжения U, ветви с C-элементами и ветви с R-элементами. Столбцы матрицы определяют ветви с G-элементами, L-элементами и ветви с источниками тока I. Матрица F в соответствии с таким разбиением будет выглядеть следующим образом:

$$F = \begin{array}{c} \\ U \\ C \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & L & I \end{array} \\ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кроме матрицы F необходимо дополнительно сформировать диагональную матрицу сопротивлений ветвей дерева $R_д$, проводимостей ветвей дерева $G_д$, сопротивлений ветвей связи $R_х$ и проводимостей ветвей связи $G_х$.

Кроме приведенных формируются вспомогательные матрицы R и G:

$$R = R_х + F_{31}^T R_д F_{31};$$

$$G = G_д + F_{31} G_х F_{31}^T,$$

а также матрица $M = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$.

Имея все приведенные матрицы цепи, можно сформировать матричные алгоритмы для определения коэффициентов матриц A и B уравнений состояния цепи:

$$A = M^{-1} \begin{bmatrix} -F_2 R^{-1} F_{21}^T & -F_{22} + F_{21} R^{-1} F_{31}^T R_д F_{32} \\ F_{22}^T - F_{32}^T G^{-1} F_{31} G_х F_{21}^T & -F_{32}^T G^{-1} F_{32} \end{bmatrix};$$

$$B = M^{-1} \begin{bmatrix} -F_{21} R^{-1} F_{11}^T & -F_{23} + F_{21} R^{-1} F_{31}^T R_д F_{33} \\ F_{12}^T - F_{32}^T G^{-1} F_{31} G_х F_{11}^T & -F_{32}^T G^{-1} F_{33} \end{bmatrix}. \qquad (7.5)$$

Пример. Дана электрическая цепь с L-, C- и R-элементами, структура которой приведена на рис. 7.19. Требуется сформировать математическую модель динамической цепи в виде уравнений состояния.

Р е ш е н и е. Сначала изображаем топологическую модель цепи, представленной на рис. 7.19, в виде нормального топологи-

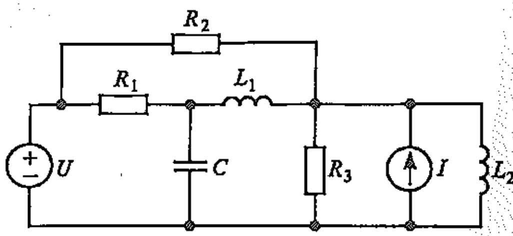


Рис. 7.19. Пример динамической цепи

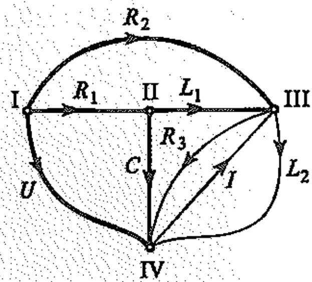


Рис. 7.20. Топологический граф динамической цепи

ческого графа, предназначенного для метода ветвей дерева и хорд (рис. 7.20). Выбираем дерево графа и главные сечения. При выборе ветвей топологического графа динамической цепи каждый элемент представляется как отдельная ветвь. Ветви графа динамической цепи нумеруются в следующей последовательности: сначала ветви дерева — ветви с источниками напряжения, ветви с C-элементами, ветви с R-элементами; затем ветви связи (хорды) — ветви с G-элементами, ветви с L-элементами и ветви с источниками тока ($U—C—R—G—L—I$).

По топологическому графу формируются матрица главных сечений Q и матрица инциденций F:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} U & C & R_2 & G_1 & G_3 & L_1 & L_2 & I \end{array} \\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} G_1 & G_3 & L_1 & L_2 & I \end{array} \\ F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица F разбивается на девять подматриц согласно приведенным ранее принципам. Строки матрицы определяются ветвями дерева топологического графа, а столбцы — ветвями связи. Декомпозиция матрицы F для рассматриваемого примера производится следующим образом:

$$F = \begin{array}{c} \\ U \\ C \\ R_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} G_1 & G_3 & L_1 & L_2 & I \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$F_{11} = [1 \quad 1]; \quad F_{12} = [-1 \quad 1]; \quad F_{13} = [-1];$$

$$F_{21} = [-1 \quad 0]; \quad F_{22} = [1 \quad 0]; \quad F_{13} = [0];$$

$$F_{31} = [0 \quad -1]; \quad F_{32} = [1 \quad -1]; \quad F_{33} = [1].$$

Формируем матрицы сопротивлений ветвей дерева $R_д$ и проводимостей ветвей дерева $G_д$:

$$R_д = R_2; \quad G_д = \frac{1}{R_2},$$

сопротивлений ветвей связи $R_х$ и проводимостей ветвей связи $G_х$:

$$R_х = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix}; \quad G_х = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}.$$

Кроме приведенных матриц формируются вспомогательные матрицы R, G и M, а затем по приведенным алгоритмам (7.5) рассчитываются коэффициенты матриц A и B уравнений состояния.

Полное решение этой задачи в программном пакете «Mathcad-2000» выглядит следующим образом:

$$R1 = 1 \;\; R2 = 1 \;\; R3 = 1 \;\; C = 1 \;\; L1 = 1 \;\; L2 = 1$$

$$F11 = (1 \;\; 1) \;\; F12 = (-1 \;\; 1) \;\; F13 = -1$$

$$F21 = (-1 \;\; 0) \;\; F22 = (1 \;\; 0) \;\; F23 = 0$$

$$F31 = (0 \;\; -1) \;\; F32 = (1 \;\; -1) \;\; F33 = 1$$

$$Rd = R2 \quad Gd = \frac{1}{R2} \quad Rx = \begin{pmatrix} R1 & 0 \\ 0 & R3 \end{pmatrix} \quad Gx = \begin{bmatrix} \frac{1}{R1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R3} \end{bmatrix}$$

$$R = Rx + F31^{T} \cdot Rd \cdot F31 \quad G = Gd + F31 \cdot Gx \cdot F31^{T}$$

$$A011 = -F21 \cdot R^{-1} \cdot F21^{T} \;\; A012 = -F22 + F22 \cdot R^{-1} \cdot F31^{T} \cdot Rd \cdot F32$$

$$A021 = F22^{T} - F32^{T} \cdot G^{-1} \cdot F31 \cdot Gx \cdot F21^{T} \;\; A022 = -F32^{T} \cdot G^{-1} \cdot F32$$

$$M11 = C \quad M22 = \begin{pmatrix} L1 & 0 \\ 0 & L2 \end{pmatrix}$$

$$A11 = M11^{-1} \cdot A011 \quad A12 = M11^{-1} \cdot A012$$

$$A21 = M22^{-1} \cdot A021 \quad A22 = M22^{-1} \cdot A022$$

$$A11 = -1 \quad A12 = (-1 \;\; 0) \qquad A = \begin{bmatrix} A11_{0,0} & A12_{0,0} & A12_{0,1} \\ A21_{0,0} & A22_{0,0} & A22_{0,1} \\ A21_{1,0} & A22_{1,0} & A22_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$A21 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A22 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$B011 = -F21 \cdot R^{-1} \cdot F11^{T} \qquad B012 = -F23 + F21 \cdot R^{-1} \cdot F31^{T} \cdot Rd \cdot F33$$

$$B021 = F12^{T} - F32^{T} \cdot G^{-1} \cdot F31 \cdot Gx \cdot F11^{T} \quad B022 = -F32^{T} \cdot G^{-1} F33$$

$$B11 = M11^{-1} \cdot B011 \qquad B12 = M11^{-1} \cdot B012$$

$$B21 = M22^{-1} \cdot B021 \qquad B22 = M22^{-1} \cdot B022$$

$$B11 = 1 \quad B12 = 0 \qquad B = \begin{bmatrix} B11_{0,0} & B12_{0,0} \\ B21_{0,0} & B22_{0,0} \\ B21_{1,0} & B22_{1,0} \end{bmatrix}$$

$$B21 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad B22 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

7.4. Численный метод решения уравнений состояния динамической цепи

Простейшим методом численного интегрирования, с помощью которого можно рассчитать значения переменных состояния, является метод Эйлера (метод ломаных). При его использовании задаются начальные значения переменных состояния, а их последующие значения вычисляются шаг за шагом с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x.$$

Приращение переменной Δx можно получить из уравнений состояния, заменив их уравнениями в конечных приращениях.

Пусть уравнения состояния динамической цепи имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -u_C + i_L + 6; \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -u_C - i_L + 12. \end{cases} \tag{7.6}$$

Уравнения состояния заменяются уравнениями в конечных приращениях:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta u_C}{\Delta t} = -u_{C,k} + i_{L,k} + 6; \\ \dfrac{\Delta i_L}{\Delta t} = -u_{C,k} - i_{L,k} + 12. \end{cases}$$

Из уравнений в конечных приращениях определяются приращения переменных состояния на текущем этапе расчета и их значения в конце шага:

$$u_{C,k+1} = u_{C,k} + h(-u_{C,k} + i_{L,k} + 6);$$
$$i_{L,k+1} = i_{L,k} + h(-u_{C,k} - i_{L,k} + 12).$$

Записанные уравнения отражают алгоритм метода Эйлера для решения дифференциальных уравнений.

Пример. Решить численно дифференциальные уравнения (7.6) для заданных начальных условий: $u_{C0} = 10$ В, $i_{L0} = 2$ А, $h = 0{,}5$ с.

Решение. На первом этапе расчета в уравнения конечных приращений подставляем начальные условия:

$$u_{C1} = 10 + 0{,}5(-10 + 2 + 6) = 9\text{ В};$$
$$i_{L1} = 2 + 0{,}5(-10 - 2 + 12) = 2\text{ А}.$$

На втором этапе рассчитанные значения напряжения на емкостном элементе и тока в индуктивном элементе подставляются вместо начальных условий и т.д.:

$$u_{C2} = 9 + 0{,}5(-9 + 2 + 6) = 8{,}5\text{ В};$$
$$i_{L2} = 2 + 0{,}5(-9 - 2 + 12) = 2{,}5\text{ А}.$$

На рис. 7.21 приводится графическая интерпретация численного метода Эйлера, а на рис. 7.22 — ход построения графиков переменных состояния для двух этапов численного интегрирования.

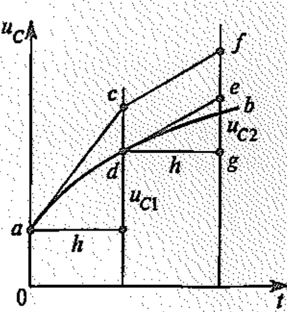


Рис. 7.21. Графическая интерпретация метода Эйлера

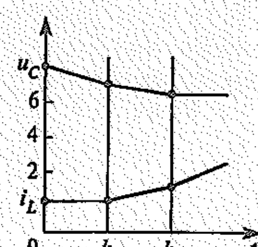


Рис. 7.22. Построение графиков переменных состояния

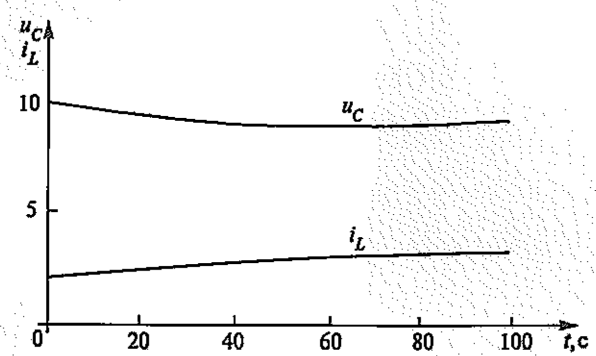


Рис. 7.23. Временные диаграммы переменных состояния цепи

Полный расчет записанных уравнений состояния в программном пакете «Mathcad-200» выглядит следующим образом.

Начальное время расчета: $t/1 := 0$

Конечное время расчета: $t/2 := 3$

Число шагов численного расчета: $n := 100$

Вектор начальных условий: $V := \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Правые части уравнений состояния: $F(t, y) := \begin{pmatrix} -y_0 & +y_1 & +6 \\ -y_0 & -y_1 & +12 \end{pmatrix}$

Вычисление значений переменных состояния методом Рунге—Кутта: $y := \mathrm{rkfixed}(V, t_1, t_2, n, F)$

Число точек для построения графика: $n := 0.99$

Временные диаграммы переменных состояния цепи приведены на рис. 7.23.

Раздел II
ОСНОВЫ ТЕОРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 8
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

8.1. Общие положения

Электромагнитное взаимодействие [16] обладает волновым квантом — фотоном, элементарной стабильной частицей — электроном (позитроном), определяющими основные его свойства.

Электромагнитное поле — вид материи, характеризующийся силовым воздействием на электрические заряженные частицы. В условиях макроскопического наблюдения электромагнитное поле проявляет себя как непрерывно распространяющийся с определенной скоростью волновой процесс (электромагнитные волны) и как дискретный процесс в виде отдельных квантов или фотонов. Оно обладает массой, энергией, импульсом, скоростью, может преобразовываться в элементарные частицы других взаимодействий и, наоборот, возникать при их столкновениях. Так, при столкновении электрона и позитрона эти элементарные частицы перестают существовать как частицы вещества и переходят в два фотона с соблюдением закона сохранения энергии и импульса.

Скорость распространения поля в вакууме в отсутствие сильных гравитационных полей близка к $3 \cdot 10^8$ м/с.

Электромагнитное поле, являясь одним из видов материи, характеризуется энергией W и инертной массой m, которые связаны с величиной скорости света соотношением (формулой А.Эйнштейна):

$$m = \frac{W}{c^2}.$$

Существование инертной массы экспериментально доказал в 1899 г. выдающийся русский физик П.Н. Лебедев, который измерил давление света.

Массы электромагнитных полей, создаваемых с помощью современных технических средств, очень малы, однако не равны нулю. Так, радиостанция мощностью 1000 кВт в течение одного часа излучает электромагнитное поле массой

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{10^6 \cdot 3600}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ кг.}$$

Масса излучения радиозвезд может достигать значительной величины. Так, радиозвезда 3С 273 за один час излучает поток электромагнитной энергии массой, более чем в 10 раз превышающей массу Земли ($6 \cdot 10^{24}$ кг).

В данном разделе рассматривается макроскопическая теория электромагнитного поля, т. е. взаимодействие зарядов и вызванных ими полей на расстояниях, значительно превышающих внутриатомные расстояния ($3 \cdot 10^{-9}$ м), в течение времени, значительно превышающего время обращения электрона в атоме (10^{-13} с).

Свойства вещества в теории электромагнитного поля определяются средними по физически малому объему постоянными параметрами: диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{эл}$ (для вакуума $\varepsilon_{0\,эл} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), магнитной проницаемостью $\mu_{эл}$ (для вакуума $\mu_{0\,эл} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м) и удельной проводимостью $\gamma_{пр}$.

Проводящая среда может быть линейной и нелинейной, однородной и неоднородной, изотропной и анизотропной.

В линейной среде параметры $\varepsilon_{эл}$, $\mu_{эл}$ и $\gamma_{пр}$ не зависят от величины электрического или магнитного поля, в нелинейной среде хотя бы один из этих параметров зависит от величины электрического или магнитного поля.

Однородной называют среду, параметры $\varepsilon_{эл}$, $\mu_{эл}$ и $\gamma_{пр}$ которой не зависят от координат, т.е. свойства среды одинаковы во всех ее точках. Среду, у которой хотя бы один из параметров $\varepsilon_{эл}$, $\mu_{эл}$ или $\gamma_{пр}$ является функцией координат, называют неоднородной.

Если свойства среды одинаковы по разным направлениям, ее называют изотропной. Соответственно среду, свойства которой различны по разным направлениям, называют анизотропной. В изотропной среде параметры $\varepsilon_{эл}$, $\mu_{эл}$ и $\gamma_{пр}$ — скалярные величины, в анизотропной среде, по крайней мере, один из этих параметров является тензором.

Электромагнитное поле как векторное поле характеризуется векторами:

$\overline{E}_{эл}$ — напряженности электрического поля, В/м;

$\overline{D}_{эл}$ — электрической индукции (смещения), Кл/м^2;

$\overline{H}_{эл}$ — напряженности магнитного поля, А/м;

$\overline{B}_{эл}$ — магнитной индукции, Тл;

$\overline{J}_{пр}$ — плотности тока проводимости, А/м^2.

В линейных изотропных средах векторы $\overline{D}_{эл}$ и $\overline{E}_{эл}$, $\overline{B}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$, $\overline{J}_{пр}$ и $\overline{E}_{эл}$ параллельны и пропорциональны между собой:

$$\overline{D}_{эл} = \varepsilon_{эл}\overline{E}_{эл}; \ \overline{B}_{эл} = \mu_{эл}\overline{H}_{эл}; \ \overline{J}_{пр} = \gamma_{пр}\overline{E}_{эл}.$$

Индекс «эл» векторов указывает на то, что они относятся к электромагнитному взаимодействию. Во всех других взаимодействиях, исходя из единства природы [16], поле описывается подобными векторами, но с другими индексами. Так, например, в гравитационном взаимодействии вектор $\overline{E}_{гр}$ характеризует поле ускорений, а вектор $\overline{H}_{гр}$ — импульсное поле.

Теория электромагнитного поля изучается на базе векторного анализа (приложение), позволяющего в наиболее краткой форме сформулировать выводы и провести доказательства конкретной задачи, а анализ ее свести к отысканию решений дифференциальных уравнений, записанных в наиболее подходящей для этой задачи системе координат.

8.2. Основные законы и уравнения электромагнитного поля

Общие положения. Теория электромагнитного поля основана на известных законах Кулона, Гаусса, Кирхгофа, Ома, Ампера, Био—Савара, Фарадея, а также законах полного тока, сохранения заряда, энергии. Математические зависимости (модели) этих законов в интегральной и дифференциальной формах приведены в табл. 8.1 [17].

Переход от интегральных уравнений записи законов, определяющих поле в объеме, к дифференциальным уравнениям, определяющим поле в точке, осуществляется с помощью двух теорем векторного анализа: теоремы Стокса, связывающей интеграл от вектора по замкнутому контуру с интегралом от потока ротора этого вектора через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, $\oint\limits_L \overline{E}d\overline{l} = \int\limits_S \mathrm{rot}\overline{E}d\overline{S}$; и теоремы Остроградского—Гаусса, связывающей интеграл от потока вектора по замкнутой поверхности с интегралом от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному замкнутой поверхностью, $\oint\limits_S \overline{E}d\overline{S} = \int\limits_V \mathrm{div}\overline{E}dV$.

В первом случае контур циркуляции L и, соответственно, поверхность S, ограниченную замкнутым контуром, уменьшают до бесконечно малой величины и определяют ротор как предел, к которому стремится отношение $\mathrm{rot}_n\overline{E} = \lim\limits_{\Delta S} \dfrac{\oint\limits_{\Delta l} \overline{E}\mathrm{d}\overline{\mathrm{e}}}{\Delta S}\overline{\mathrm{e}}_n$, во втором случае замкнутую поверхность S и соответственно объем V внутри этой поверхности уменьшают до бесконечно малой величины и определяют дивергенцию как предел, к которому стремится отношение $\mathrm{div}\overline{E} = \lim\limits_{\Delta V\to 0} \dfrac{\oint\limits_{\Delta S} \overline{E}\mathrm{d}\overline{S}}{\Delta V}$.

Таблица 8.1

Закон	Интегральная форма	Дифференциальная форма
Электростатическое (магнитостатическое) поле		
Закон Кулона	$\overline{F}_{эл} = \dfrac{q_{1эл}q_{2эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}r^2}\overline{\mathrm{e}}_r$	
Теорема Гаусса	$\oint\limits_S \overline{E}_{эл}\mathrm{d}\overline{S} = q/\varepsilon_o$	$\mathrm{div}\overline{E}_{эл} = \rho_{эл}/\varepsilon_o$
Закон сохранения заряда	$I_{эл} = -\dfrac{\partial q_{эл}}{\partial t} = \int\limits_S J_{пр}\mathrm{d}\overline{S}$	$\mathrm{div}\overline{J}_{пр} = 0$
Электрическое поле постоянного тока в проводящих средах		
Первый закон Кирхгофа	$\oint\limits_S \overline{J}_{пр}\mathrm{d}\overline{S} = 0$	$\mathrm{div}\overline{J}_{пр} = 0$
Второй закон Кирхгофа	$\oint\limits_L \overline{E}_{эл}\mathrm{d}\overline{l} = 0$	$\mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = 0$
Закон Ома для электрической цепи	$I_{эл} = U/R$	$\overline{J}_{пр} = \gamma_{пр}\overline{E}_{эл}$
Закон Джоуля—Ленца	$P_{эл} = R_{эл}I^2_{эл}$	$p_{эл} = \gamma_{эл}E^2_{эл}$
Магнитное поле постоянного тока		
Закон Ампера	$\mathrm{d}\overline{F}_{1,2} = \dfrac{[I_{2эл}\mathrm{d}\overline{r}_2(I_{1эл}\mathrm{d}\overline{l}_1 \times \overline{r}_{12})]\mu_{эл}}{4\pi r^3_{12}}$, $\mathrm{d}\overline{F} = [I_{эл}\mathrm{d}\overline{l} \times \overline{B}_{эл}]$	
Закон Био—Савара	$\mathrm{d}\overline{H}_{эл} = \dfrac{[I_{эл}\mathrm{d}\overline{l} \times \overline{\mathrm{e}}_r]}{4\pi r^2}$	
Закон Ома для магнитной цепи	$\psi = \dfrac{I_{эл}W}{R_м}$	$\overline{B}_{эл} = \mu_{эл}\overline{H}_{эл}$

Закон	Интегральная форма	Дифференциальная форма
Сила Лоренца	$\overline{F} = q_{эл}(\overline{E}_{эл} + [v \times \overline{B}_{эл}])$	
Закон полного тока	$\oint\limits_L \overline{H}d\overline{l} = \int\limits_S \overline{J}_{пр}d\overline{S}$	$\mathrm{rot}\overline{H}_{эл} = \overline{J}_{пр}$
Переменное электромагнитное поле		
Обобщенный закон полного тока	$\oint\limits_L \overline{H}d\overline{l} = \int\limits_S \left(\gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл}\overline{v}\right)d\overline{S}$	$\mathrm{rot}\overline{H}_{эл} = \gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл}v$
Закон Фарадея	$ЭДС = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int\limits_S \mu_{эл}\overline{H}_{эл}\frac{\partial \overline{S}}{\partial t} - \mu_{эл}\overline{S}\frac{\partial \overline{H}_{эл}}{\partial t} - \int\limits_S \overline{H}_{эл}\overline{S}\frac{\partial \mu_{эл}}{\partial t}$	
Закон электромагнитной индукции	$\oint\limits_L \overline{E}_{эл}d\overline{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t}d\overline{S}$	$\mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = -\frac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t}$

Дадим некоторые пояснения к законам и приведем примеры непосредственного их применения при решении конкретных задач.

Закон Кулона. Два заряженных тела бесконечно малых размеров (два точечных заряда) отталкиваются, если заряды их одноименны, и притягиваются, если они разноименны, причем сила их взаимодействия пропорциональна произведению электрических зарядов и обратно пропорциональна диэлектрической проницаемости среды, умноженной на 4π, и квадрату расстояния между ними:

$$\overline{F}_{эл} = \frac{q_{1эл}q_{2эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}r^2}\overline{e}_r,$$

где $q_{1эл}$, $q_{2эл}$ — электрические заряды тел, Кл; r — расстояние между ними, м; $\overline{e}_r$ — единичный вектор, направленный по r от центра положительного заряда (рис. 8.1).

Закон Кулона определяет направление и силу электростатического взаимодействия между двумя точечными, неподвижными относительно наблюдателя электрическими зарядами. Он позволяет ввести понятие вектора напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл}$ как силы. Напряженностью электрического поля $\overline{E}_{эл}$ (В/м) называется сила, с которой электрическое поле действует на точечное тело с положительным единичным зарядом в 1 Кл, внесенное в рассматриваемую точку поля (рис. 8.2):

$$\overline{E}_{эл} = \overline{F}_{эл}/q_{эл}.$$

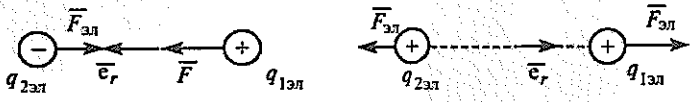


Рис. 8.1. Сила взаимодействия электрических зарядов

Электростатическое поле — векторное поле. Его обычно изображают с помощью линий, которые в каждой точке являются касательными к вектору. Для представления о величине поля эти линии проводят так, чтобы их число на единицу площади, расположенной перпендикулярно линиям, было пропорционально величине вектора. Там, где поле сильнее, линии проводят гуще, там, где слабее, — реже. Линии вектора напряженности электрического поля называют силовыми линиями электрического поля. Обычно принимается направление силовых линий от положительного электрического заряда к отрицательному заряду.

Для точечного заряда $q_{эл}$ вектор напряженности электрического поля определяется из закона Кулона в сферической системе координат в виде

$$\overline{E}_{эл} = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл} r^2}\overline{e}_r.$$

Вектор напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл}$ направлен по радиусу, величина его уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. Другим важным понятием в электростатике является скалярный потенциал.

Под разностью потенциалов $U_{эл1} - U_{эл2}$ между двумя точками электростатического поля понимается взятая с обратным знаком работа, совершаемая силами поля (или сторонними силами) и необходимая для перемещения положительного заряда в 1 Кл из первой точки во вторую (или из второй точки в первую).

Поэтому изменение потенциала $\mathrm{d}U_{эл}$ между двумя бесконечно близкими точками, расположенными на расстоянии $\mathrm{d}l$ друг от друга, равно скалярному произведению вектора напряженности электрического поля (силы) на вектор расстояния:

$$\mathrm{d}U_{эл} = -\overline{E}_{эл}\mathrm{d}\overline{l},$$

а разность потенциалов между двумя точками l_1 и l_2, находящимися на конечном расстоянии друг от друга $l_2 - l_1$, определяется интегралом:

Рис. 8.2. Направление вектора электрического поля

$$U_{эл1} - U_{эл2} = \int_{l_1}^{l_2} \overline{E}_{эл} \mathrm{d}\overline{l},$$

причем этот интеграл в электростатическом поле может быть взят по любому пути, соединяющему точки l_1 и l_2.

Для точечного заряда $q_{эл}$ разность скалярных потенциалов между двумя точками r_1 и r_2 определяется из интеграла после подстановки в него значения вектора напряженности электрического поля:

$$U_{эл1} - U_{эл2} = \int_{r_1}^{r_2} E_r \overline{e}_r \mathrm{d}r \overline{e}_r = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

где учтено, что скалярное произведение двух одинаковых единичных векторов равно единице: $\overline{e}_r \overline{e}_r = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1$.

Потенциал нормируют, т.е. в какой-либо точке пространства принимают равным конкретной величине, например нулю. Так, при $U_{эл2} = 0$ на бесконечно далеком расстоянии $r_2 \to \infty$ от точечного заряда, для потенциала получаем

$$U_{эл} = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл} r}.$$

Результирующий потенциал нескольких точечных зарядов на основании принципа наложения полей определяется как алгебраическая сумма потенциалов отдельных зарядов:

$$U_{эл} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{элi}}{4\pi\varepsilon_{эл} r_i}.$$

Поверхности с одной и той же величиной потенциала называют эквипотенциальными. У точечного заряда эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности радиуса r (рис. 8.3). Вектор электрического поля в любой точке эквипотенциальной поверхности перпендикулярен к ней (совпадает по направлению или противоположен с единичным поверхностным вектором $\mathrm{d}\overline{S}$). Векторные линии напряженности электрического поля и эквипотенциальные поверхности образуют картину электростатического поля электрического заряда. Для наглядного представления пользуются графическим изображением поля. Векторные линии электрического поля и эквипотенциальные линии проводят так, чтобы касательные к ним указывали направление векторов электрического поля и потока, а их густота была прямо пропорциональна их абсолютным значениям.

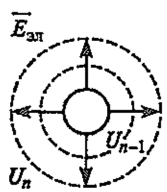


Рис. 8.3. Картина электростатического поля точечного заряда

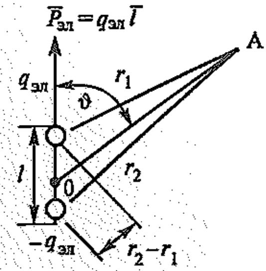


Рис. 8.4. Электростатический диполь

Вектор напряженности электрического поля может быть определен как градиент от скалярного потенциала:

$$\overline{E}_{эл} = -\frac{\mathrm{d}U_{эл}}{\mathrm{d}l}\overline{\mathrm{e}}_l = -\mathrm{grad}\,U_{эл}.$$

Это дифференциальное уравнение определяет зависимость между напряженностью электрического поля и скалярным потенциалом в бесконечно малом объеме, в точке. Оно позволяет определять напряженность электрического поля по известной зависимости скалярного потенциала в любой системе координат.

В качестве примера рассмотрим в сферической системе координат электростатическое поле диполя, т. е. поле двух равных по величине, но противоположных по знаку электрических точечных зарядов, расположенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга (рис. 8.4).

Скалярный потенциал от двух зарядов в удаленной точке А будет равен

$$U_{эл} = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q_{эл}l}{4\pi\varepsilon_{эл}}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{P_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}}\frac{\cos\vartheta}{r^2},$$

где r — расстояние от центра диполя; ϑ — угол между вектором $\overline{P}_{эл}$ и направлением от центра диполя до точки А; $P_{эл}$ — дипольный момент электрического диполя.

Вектор напряженности электростатического поля диполя найдем из общего выражения для градиента от скалярного потенциала в сферической системе координат:

$$\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл} = -\frac{\partial U}{\partial r}\overline{\mathrm{e}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\overline{\mathrm{e}}_\vartheta - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overline{\mathrm{e}}_\varphi.$$

После подстановки в него скалярного потенциала диполя и дифференцирования $\overline{E}_{эл} = \dfrac{q_{эл}l}{4\pi\varepsilon_{эл}r^3}(2\cos\vartheta\overline{\mathrm{e}}_r + \sin\vartheta\overline{\mathrm{e}}_\vartheta)$.

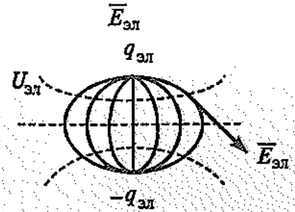


Рис. 8.5. Картина электростатического поля диполя

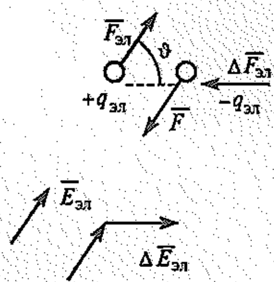


Рис. 8.6. Электростатический диполь во внешнем электрическом

Картина электростатического поля диполя приведена на рис. 8.5.

В однородном внешнем электрическом поле жесткий электростатический диполь (рис. 8.6) за счет возникающего механического момента силы, равного произведению величины силы на плечо $M = q_{эл} l E_{эл} \sin\vartheta$, поворачивается по направлению поля, а в неоднородном поле — совершает дополнительное поступательное движение в направлении приращения поля $\Delta\overline{E}_{эл} = l \operatorname{grad}\overline{E}_{эл}$.

Расчет электростатического поля, в частности, необходим для вычислений электрической емкости конденсаторов разной конструкции.

Электрическая емкость — способность устройства запасать электрический заряд при разности потенциалов между обкладками конденсатора в 1 В , т.е.

$$C = \frac{q_{эл}}{U_{эл1} - U_{эл2}}.$$

Емкость сферического конденсатора с радиусами r_1 внутренней и r_2 внешней сферическими обкладками определяется по формуле:

$$C = \frac{q_{эл}}{U_{эл1} - U_{эл2}} = \frac{4\pi\varepsilon_{эл}}{r_2 - r_1} r_2 r_1.$$

Емкость Земли без учета влияния ионосферы при $r_2 \to \infty$ можно определить по формуле:

$$C = 4\pi\varepsilon_{эл} r_{Земли} = 4_{\pi} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{6} = 7{,}1 \cdot 10^{-4}\ Ф.$$

За счет проводящей ионосферы, расположенной на высоте примерно 80 км от поверхности Земли, ее емкость

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_{эл}}{r_2 - r_1} r_2 r_1 = 7{,}1 \cdot 10^{-4} \frac{6{,}4 \cdot 10^{6}}{80 \cdot 10^{3}} = 0{,}057\ Ф$$

увеличивается в 80 раз.

Теорема Гаусса. В замкнутой поверхности S, окружающей заряд $q_{эл}$, в вакууме полный поток вектора напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл}$, проходящий через эту поверхность, равен заряду $q_{эл}$, разделенному на диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{эл}$:

$$\oint_S \overline{E}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} = q/\varepsilon_0.$$

Максвелл распространил теорему Гаусса на все диэлектрики и вектор $\overline{E}_{эл}$ умножил на диэлектрическую проницаемость. В результате теорема Гаусса преобразовалась в постулат или III уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S \overline{D}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} = q_{эл},$$

поток вектора электрической индукции $\overline{D}_{эл}$ через замкнутую поверхность S объема V равен электрическому заряду $q_{эл}$, расположенному внутри данного объема.

В дифференциальной форме III уравнение Максвелла принимает вид

$$\mathrm{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл}.$$

Таким образом дивергенция (расходимость) вектора электрической индукции равна объемной плотности заряда. Это говорит о том, что линии вектора электрической индукции $\overline{D}_{эл}$ начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных электрических зарядах.

Из III уравнения Максвелла может быть определено электростатическое поле бесконечно длинной заряженной нити с линейной плотностью электрического заряда $\tau_{эл}$ в цилиндрической системе координат:

$$\oint_S \overline{D}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} = \int_{S_{бок}} D_r \overline{e}_r \mathrm{d}S\,\overline{e}_r = D_r \int_{S_{бок}} \mathrm{d}S = D_r S_{бок} = D_r 2\pi r l = \tau_{эл} l$$

или $E_r = \dfrac{\tau_{эл}}{2\pi\varepsilon_{эл} r}$.

При выводе зависимости учтено, что электрическое поле симметрично относительно оси нити, векторы $\overline{D}_{эл}$ направлены от центра по радиусам, а поток электрической индукции $\overline{D}_{эл}$ через основания элементарного цилиндра (рис. 8.7) равен нулю.

Разность потенциалов бесконечно длинной заряженной нити между двумя точками, удаленными от оси нити на расстояния r_1 и r_2:

$$U_{эл1} - U_{эл2} = \int_{r_1}^{r_2} E_r \bar{e}_r \mathrm{d}r \bar{e}_r =$$

$$= \frac{\tau_{эл}}{2\pi\varepsilon_{эл}} \int_{r1}^{r2} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = \frac{\tau_{эл}}{2\pi\varepsilon_{эл}} \ln\frac{r_2}{r_1},$$

пропорциональна натуральному логарифму из отношения расстояний r_1 и r_2.

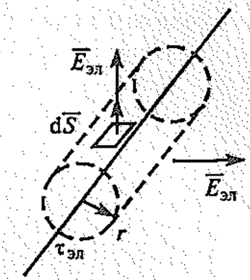


Рис. 8.7. Электростатическое поле бесконечно длинной заряженной нити

В результате картина электрического поля бесконечно длинной заряженной нити представляет собой радиально расходящиеся от ее центра векторные линии напряженности электрического поля $\bar{E}_{эл}$ и перпендикулярные к ним эквипотенциальные цилиндрические поверхности $U_{эл}$ (см. рис. 8.3).

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора, образованного из двух металлических цилиндров с радиусами r_1 и r_2 длиной l:

$$C = \frac{\tau_{эл} l}{U_{эл1} - U_{эл2}} = \frac{2\pi\varepsilon_{эл} l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}},$$

обратно пропорциональна натуральному логарифму из отношения радиусов цилиндров.

Закон сохранения заряда. Количество электричества, выходящего за некоторый промежуток времени через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, равно величине уменьшения в объеме заряда за тот же промежуток времени:

$$I_{эл} = -\frac{\partial q_{эл}}{\partial t} = \oint_S \bar{J}_{пр} \mathrm{d}\bar{S}, \tag{8.1}$$

где $\dfrac{\partial q_{эл}}{\partial t}$ — скорость уменьшения заряда в объеме V; $I_{эл} = \oint_S \bar{J}_{пр} \mathrm{d}\bar{S}$ — ток через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V.

Равенство (8.1) выражает закон сохранения заряда в интегральной форме.

Представляя заряд в виде объемного интеграла из удельной плотности заряда

$$-\frac{\partial q_{эл}}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial \rho_{эл}}{\partial t} \mathrm{d}V = \oint_S \bar{J}_{пр} \mathrm{d}\bar{S},$$

уменьшая объем, а следовательно, и его поверхность до нуля и переходя к пределам, получаем закон сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\bar{J}_{\text{пр}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S}}{\Delta V} = -\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta V} \rho_{\text{эл}} dV}{\Delta V} = -\frac{\partial \rho_{\text{эл}}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{div}\bar{J}_{\text{пр}} = -\frac{\partial \rho_{\text{эл}}}{\partial t}. \tag{8.2}$$

Равенство (8.2) выражает принцип непрерывности постоянного электрического тока и называется уравнением непрерывности.

На основании III уравнения Максвелла удельная плотность электрического заряда может быть заменена дивергенцией от вектора электрической индукции $\operatorname{div}\bar{D}_{\text{эл}}$:

$$\operatorname{div}\bar{J}_{\text{пр}} = -\frac{\partial \operatorname{div}\bar{D}_{\text{эл}}}{\partial t}.$$

Частную производную по времени в полученном уравнении можно подвести под дивергенцию, так как она состоит только из производных по координатам. В результате, объединяя дивергенции левой и правой частей равенства, находим

$$\operatorname{div}\left(\bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial \bar{D}_{\text{эл}}}{\partial t}\right) = 0. \tag{8.3}$$

Производная $\dfrac{\partial \bar{D}_{\text{эл}}}{\partial t}$ по времени от электрической индукции $\bar{D}_{\text{эл}}$ по размерности соответствует удельной плотности электрического тока, которую Максвелл назвал плотностью тока смещения.

Равенство (8.3) представляет собой закон сохранения заряда или уравнение непрерывности в дифференциальной форме.

При постоянном токе распределение зарядов по всему объему проводника остается неизменным во времени, так как количество электричества, поступившего за некоторый промежуток времени в замкнутый объем, в точности равно количеству электричества, вытекающего за тот же промежуток времени из этого объема. Поэтому

$$\oint_S \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S} = 0. \tag{8.4}$$

Равенство (8.4) представляет собой уравнение непрерывности постоянного тока в интегральной форме.

В диэлектрической среде под влиянием электрического поля происходит процесс поляризации. Поляризация протекает различным образом в зависимости от структуры вещества (диэлектрика) и строения его молекулы. Так, у нейтральных диэлектриков имеет место деформационная или электронная поляризация. Она заключается в том, что положительные и отрицательные заряды атомов диэлектрика под действием силы $\overline{E}_{эл}$ электрического поля смещаются относительно друг друга. Положительные заряды атомов движутся в направлении вектора электрического поля $\overline{E}_{эл}$, отрицательные (электронные оболочки) — в противоположном направлении. Диэлектрик поляризуется, т.е. перестает быть нейтральным.

Возможен и другой механизм поляризации. Это связано с тем, что молекулы некоторых веществ (например, воды), называемых дипольными диэлектриками, обладают электрическими дипольными моментами и при отсутствии внешнего электрического поля. Направление этих моментов хаотично (равновероятно) распределено в пространстве, следовательно, их действие при отсутствии поля не проявляется в окружающем пространстве. При воздействии на такую среду электрического поля происходит ориентирование молекулярных диполей по направлению вектора напряженности внешнего электрического поля. Существуют также более сложные виды поляризации, например, у ионных диэлектриков и сегнетодиэлектриков.

Для упрощения расчетов все виды поляризации можно свести к эквивалентной картине возникновения молекулярных электрических диполей. При этом состояние поляризации характеризуют поляризованностью или интенсивностью поляризации вещества $\overline{P}$, связанной с моментами указанных молекулярных диполей следующим образом:

$$\overline{P} = \chi\varepsilon_{0эл}\overline{E}_{эл},$$

где χ — относительная электрическая восприимчивость.

В общем случае плотность тока смещения

$$\overline{J}_{см.эл} = \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} = \varepsilon_{0эл}\frac{\partial \overline{E}_{эл}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial t}$$

определяется движущимся электрическим полем $\varepsilon_{0эл}\frac{\partial \overline{E}_{эл}}{\partial t}$ и движением электрических зарядов в связанных микросистемах $\frac{\partial \overline{P}}{\partial t}$.

Первый закон Кирхгофа. В любой момент алгебраическая сумма токов ветвей, соединяющихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Представляя I_i как бесконечно малый ток $I_i = \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S}$ и интегрируя по всей замкнутой поверхности S окружающей узел, получаем первый закон Кирхгофа в интегральной форме:

$$\oint_S \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S} = 0,$$

поток вектора плотности тока проводимости через замкнутую поверхность равен нулю.

Равенство совпадает с уравнением непрерывности (8.2) для постоянного тока в интегральной форме. Согласно этому закону ток через замкнутую поверхность равен нулю и линии постоянного тока непрерывны, т. е. замкнуты сами на себя.

В дифференциальной форме первый закон Кирхгофа представляется в виде равенства дивергенции от вектора плотности тока проводимости нулю:

$$\operatorname{div} \bar{J}_{\text{пр}} = 0$$

и совпадает с законом сохранения заряда в дифференциальной форме в установившемся режиме.

Второй закон Кирхгофа. В любой момент алгебраическая сумма напряжений ветвей в контуре равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0.$$

Представляя напряжение $U_i = \bar{E}_{\text{эл}} d\bar{e}$ и интегрируя по всему замкнутому контуру L, получаем второй закон Кирхгофа в интегральной форме:

$$\oint_L \bar{E}_{\text{эл}} d\bar{e} = 0,$$

циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру равна нулю.

Согласно теореме Стокса второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме можно записать в виде равенства нулю ротора от вектора напряженности электрического поля:

$$\operatorname{rot} \bar{E}_{\text{эл}} = 0,$$

что говорит о потенциальном характере электрического поля постоянного тока в проводящих средах.

Закон Ома для электрической цепи. В интегральной форме определяется величина тока $I_{эл}$ в проводнике в зависимости от приложенного напряжения $U_{эл}$ и его электрического сопротивления $R_{эл}$:

$$I_{эл} = \frac{U_{эл}}{R_{эл}},$$

а в дифференциальной форме — зависимость между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля в бесконечно малом объеме:

$$\bar{J}_{пр} = \gamma_{пр}\bar{E}_{эл}.$$

Дифференциальная форма закона Ома, справедливая для бесконечно малого обьема проводника, получается после соответствующей замены в интегральной форме закона тока $I_{эл} = \bar{j}_{эл}\mathrm{d}\bar{S}$, напряжения $U_{эл} = \bar{E}_{эл}\mathrm{d}\bar{l}$ и электрического сопротивления $R_{эл} = \dfrac{\mathrm{d}l}{\gamma_{пр}\mathrm{d}S}$.

Закон Джоуля—Ленца. Количество тепла, выделяющееся в проводнике при прохождении через него электрического тока в единицу времени, прямо пропорционально сопротивлению $R_{эл}$ проводника и квадрату силы тока $I_{эл}$, или тепловая мощность имеет вид

$$P_{эл} = R_{эл}I_{эл}^2.$$

После замены в этом выражении $P_{эл} = p_{эл}\mathrm{d}V$, $R_{эл} = \dfrac{\mathrm{d}l}{\gamma_{пр}\mathrm{d}S}$, $I_{эл} = \bar{J}_{пр}\mathrm{d}\bar{S}$ и $\bar{J}_{пр} = \gamma_{пр}\bar{E}_{эл}$, переходя к бесконечно малому объему, получаем $p_{эл} = \gamma_{эл}E_{эл}^2$ — закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме, где $p_{эл}$ — удельная объемная тепловая мощность.

Проводящие среды обладают кроме удельной электрической проводимости диэлектрической и магнитной проницаемостями.

Покажем, что III уравнение Максвелла в дифференциальной форме $\mathrm{div}\bar{D}_{эл} = \rho_{эл}$ справедливо и в случае проводящей среды. С этой целью воспользуемся законом Ома: $\bar{J}_{пр} = \gamma_{пр}\bar{E}_{эл}$, уравнением непрерывности тока: $\mathrm{div}\bar{J}_{пр} = -\dfrac{\partial\rho_{эл}}{\partial t}$ и представим дивергенцию от электрической индукции как

$$\mathrm{div}\bar{D}_{эл} = \mathrm{div}(\varepsilon_{эл}\bar{E}_{эл}) = \mathrm{div}\frac{\varepsilon_{эл}}{\gamma_{пр}}\bar{J}_{пр} = -\frac{\varepsilon_{эл}}{\gamma_{пр}}\frac{\partial\rho_{эл}}{\partial t}.$$

В результате III уравнение Максвелла в дифференциальной форме преобразовалось в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$-\frac{\varepsilon_{эл}}{\gamma_{пр}}\frac{\partial\rho_{эл}}{\partial t}=\rho_{эл} \text{ или } \frac{\partial\rho_{эл}}{\partial t}+\frac{\gamma_{пр}}{\varepsilon_{эл}}\rho_{эл}=0,$$

с решением $\rho_{эл}=\rho_{1эл}e^{-\frac{\gamma_{пр}}{\varepsilon_{эл}}t}$, где $\rho_{1эл}$ — плотность заряда в рассматриваемой точке в момент времени $t=0$.

Из решения следует, что плотность заряда в каждой точке внутри проводящей среды убывает со временем, причем время убывания мало, так как величина $\frac{\gamma_{пр}}{\varepsilon_{эл}}$ весьма большая (для металлов $\frac{\gamma_{пр}}{\varepsilon_{эл}}\approx10^{18}$ 1/с, для морской воды $\frac{\gamma_{пр}}{\varepsilon_{эл}}\approx10^{9}\ldots10^{10}$ 1/с).

Отметим, что убывание зарядов внутри проводника со временем не означает, что заряды исчезают. Они накапливаются на наружной поверхности проводника.

Таким образом, при установившемся процессе во внутренних точках проводящей среды объемная плотность электрических зарядов равна нулю ($\rho_{эл}=0$), а следовательно, и электрическая индукция.

Рассмотрим пример решения задачи с использованием законов и уравнений электрического поля постоянного тока в проводящих средах.

Пример. Дано: $U_{вх}$ — напряжение высоковольтной линии; $\gamma_{пр}$ — удельная электрическая проводимость грунта; r_0 — радиус металлической полусферы заземления, зарытой в грунт; h — ширина шага (рис. 8.8).

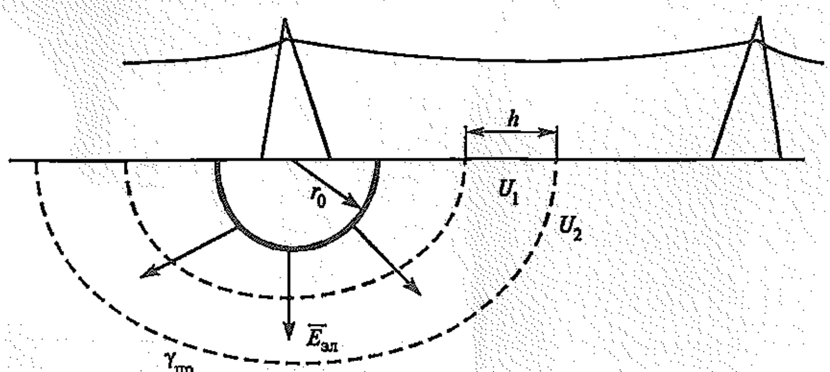


Рис. 8.8. Шаговое напряжение при коротком замыкании высоковольтной линии

Определить: шаговое напряжение $U_ш$, возникающее при коротком замыкании провода высоковольтной линии на заземленную металлическую опору, и сопротивление заземления.

Р е ш е н и е. Исходя из закона Ома в дифференциальной форме напряженность электрического поля в грунте и равномерности растекания в нем тока короткого замыкания находим

$$\overline{E}_{эл} = \frac{\overline{J}_{пр}}{\gamma_{пр}} = \frac{I_{к.з}}{2\pi\gamma_{пр} r^2}\overline{e}_r$$

и шаговое напряжение между двумя ступнями ног при их размещении вдоль направления на опору высоковольтной линии:

$$U_ш = U_{эл1} - U_{эл2} = \int_{r_1}^{r_2} E_r \overline{e}\, r\, d_r \overline{e}_r =$$

$$= \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}} \int_{r1}^{r2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{I_{к.з}}{2\pi\gamma_{пр}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{I_{к.з} h_ш}{2\pi\gamma_{пр} r^2}.$$

Сопротивление заземления определяем как отношение напряжения на поверхности полусферы заземления к току растекания:

$$R_{заз} = \frac{U_{вх}}{I_{к.з}} = \frac{1}{2\pi\gamma_{пр} r_0}.$$

С учетом этого шаговое напряжение может быть выражено через величину напряжения высоковольтной линии передачи:

$$U_ш = \frac{U_{вх} h_ш r_0}{r^2}.$$

Шаговое напряжение $U_ш$ не зависит от проводимости грунта.

Закон Ампера определяет силу магнитного взаимодействия, с которой один элемент тока действует на другой элемент тока. Эта сила определяется из выражения

$$d\overline{F}_{12} = \frac{[I_{2эл} d\overline{l}_2 (I_{1эл} d\overline{l}_1 \times \overline{e}_{r_{12}})]\mu_{эл}}{4\pi r_{12}^2}.$$

Так, два параллельных прямолинейных медных проводника длиной 1 м с токами 1 А (рис. 8.9, *а*) притягиваются друг к другу на расстоянии 1 м с силой $dF_{12} = \frac{\mu}{4\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} = 10^{-7}$ Н, если по ним проходят одинаково направленные токи, и отталкиваются с той же силой, если токи направлены навстречу друг другу (рис. 8.9, *б*).

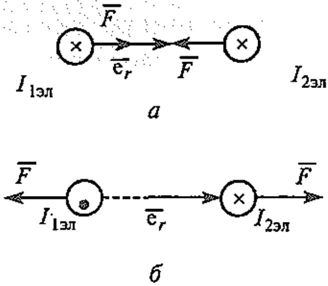


Рис. 8.9. Сила магнитного взаимодействия двух токовых элементов:

а — одинакового направления; *б* — разного направления

Это объясняется тем, что каждый проводник со своим током находится в магнитном поле, создаваемом током другого проводника согласно закону Био—Савара. Под действием внешнего магнитного поля движущиеся в проводнике электрические заряды, а вместе с ними и сам проводник испытывают силовое воздействие.

Закон Био—Савара непосредственно связывает напряженность магнитного поля с линейным распределением тока:

$$\mathrm{d}\overline{H}_{эл} = \frac{[I_{эл}\mathrm{d}\bar{l} \times \overline{\mathrm{e}}_r]}{4\pi r^2}.$$

В результате сила магнитного взаимодействия определяется векторным произведением элемента тока на магнитную индукцию, в поле которой находится данный элемент тока:

$$\mathrm{d}\overline{F} = [I_{эл}\mathrm{d}\bar{l} \times \overline{B}_{эл}]. \tag{8.5}$$

Эта сила возникает, например, в электродвигателях (измерительных электроприборах) при действии магнитного поля статора на проводник с током ротора; под действием ее ротор вращается.

При движении свободных электрических зарядов со скоростью v во внешнем магнитном поле возникающая сила Ампера определяется по формуле

$$\mathrm{d}\overline{F} = [I_{эл}\mathrm{d}\bar{l} \times \overline{B}_{эл}] = \left[-\frac{\mathrm{d}q_{эл}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\bar{l} \times \overline{B}_{эл}\right] = -\mathrm{d}q_{эл}[\bar{v} \times \overline{B}_{эл}].$$

Сила магнитного взаимодействия перпендикулярна вектору напряженности внешнего магнитного поля. Поэтому она отклоняет движущиеся свободные электрические заряды в направлении, перпендикулярном вектору напряженности внешнего магнитного поля. Этим она отличается от силы электрического взаимодействия между зарядами, совпадающей с вектором напряженности электрического поля.

Магнитная индукция $\overline{B}_{эл}$, как видно из выражения (8.5), численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно к направлению этого поля.

Пример. Дано: r_0, W, L_0, I — соответственно радиус, число витков, длина и ток соленоида (совокупности последовательно соединенных витков).

Определить: H_z — напряженность магнитного поля на оси одного витка и соленоида, ψ — магнитный поток сцепления, L_c — индуктивность соленоида.

Решения. 1. Определяем магнитное поле витка на его оси (рис. 8.10).

Из закона Био—Савара на расстоянии z от центра витка результирующий вектор напряженности магнитного поля от двух противоположно лежащих элементов тока витка равен сумме горизонтальных составляющих векторов $\mathrm{d}\overline{H}$, так как нормальные составляющие векторов, одинаковые по величине, противоположны по направлению:

$$\mathrm{d}H_z = 2\frac{I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\cos\alpha = \frac{I\mathrm{d}l}{2\pi r^2}\frac{r_0}{r} = \frac{I\mathrm{d}l r_0}{2\pi r^3}.$$

Интегрируя $\mathrm{d}H_z$ по половине периметра витка, определяем напряженность магнитного поля на оси одного витка:

$$H_z = \frac{Ir_0}{2\pi r^3}\int_0^{\pi r_0}\mathrm{d}l = \frac{Ir_0^2}{2r^3}.$$

2. Определяем магнитное поле на оси соленоида (см. рис. 8.10). Магнитное поле бесконечно малого элемента соленоида определяем как произведение напряженности магнитного поля одного витка на число витков в этом элементе:

$$\mathrm{d}H_z = \frac{Ir_0^2 W}{2r^3 L_0}\mathrm{d}L.$$

После интегрирования этого выражения по всей длине соленоида получаем

$$H_z = \frac{IW}{2L_0}\int_0^{L_0}\frac{r_0^2}{r^3}\mathrm{d}L.$$

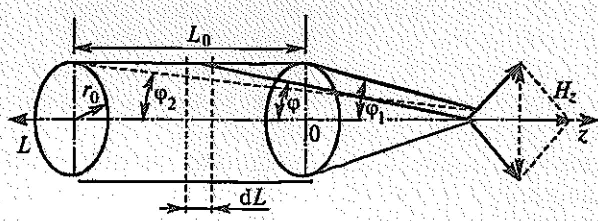


Рис. 8.10. Магнитное поле на оси соленоида

Для решения интеграла воспользуемся подстановкой $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{L+z}{r_0}$ и перейдем к новой переменной φ, принимая во внимание равенство дифференциала от котангенса угла φ $\mathrm{d}\operatorname{ctg}\varphi = -\dfrac{1}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}L}{r_0}$ и отношения $\dfrac{r_0}{r} = \sin\varphi$.

Интегрируя по переменной φ от одного края соленоида φ_1 до другого φ_2, определяем напряженность магнитного поля H_z на оси соленоида:

$$H_z = \frac{IW}{2L_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{r_0^2}{r^3}\left(-\frac{r_0}{\sin^2\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{IW}{2L_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{IW}{2L_0}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1).$$

3. Определяем магнитный поток сцепления соленоида.

При $r_0 \ll L_0$ в центре соленоида напряженность магнитного поля на оси соленоида приближенно составит

$$H_z = \frac{IW}{2L_0}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \cong \frac{IW}{2L_0}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{IW}{L_0}.$$

В этом случае поле однородно и магнитный поток, проходящий внутри соленоида, ориентировочно может быть определен как произведение магнитной индукции на его сечение:

$$\Phi = \frac{IW}{L_0}\mu\pi r_0^2,$$

а магнитный поток сцепления — как произведение числа витков соленоида на магнитный поток:

$$\psi = W\,\Phi = \frac{IW^2}{L_0}\mu\pi r_0^2.$$

4. Определяем индуктивность соленоида, которая равна величине отношения магнитного потока сцепления к току в нем:

$$L_с = \frac{\psi}{I} = \frac{W^2}{L_0}\mu\pi r_0^2.$$

Закон Ома для магнитной цепи в интегральной форме определяет величину потока сцепления ψ в зависимости от числа ампервитков $I_{эл}W$ и магнитного сопротивления магнитопровода $R_м$:

$$\psi = \frac{I_{эл}W}{R_м}.$$

Для бесконечно малого объема магнитопровода можно произвести замену потока сцепления $\psi = \Phi_м W = \overline{B}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} W$, тока $I_{эл} = \overline{H}_{эл} \mathrm{d}\overline{l}$ и магнитного сопротивления $R_м = \dfrac{\mathrm{d}l}{\mu_{эл} \mathrm{d}S}$. В результате получим закон Ома в дифференциальной форме:

$$\overline{B}_{эл} = \mu_{эл} \overline{H}_{эл},$$

устанавливающий связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля в бесконечно малом объеме.

Под воздействием внешнего магнитного поля в магнитной среде происходит определенная ориентация элементарных контурных токов (магнитных диполей, образованных, в частности, электронами, движущимися по внутриатомным орбитам). В результате возникает дополнительное магнитное поле, которое определенным образом накладывается на внешнее поле.

По магнитным свойствам вещества можно разделить на три категории:

ферромагнетики (ферромагнитные среды), относительная магнитная проницаемость которых значительно больше единицы ($\mu_{эл} \gg \mu_{эл\,о}$); при их намагничивании внутреннее дополнительное магнитное поле будет сравнительно большим по величине и по направлению совпадать с намагничивающим полем;

парамагнетики, относительная магнитная проницаемость которых немного больше единицы; внутреннее дополнительное магнитное поле относительно небольшое по величине и направлено в одну сторону с намагничивающим полем;

диамагнетики, относительная магнитная проницаемость которых немного меньше единицы; внутреннее дополнительное магнитное поле небольшое по величине, но направлено противоположно намагничивающему полю.

Если подвергнуть ферромагнетик циклическому перемагничиванию, то зависимость между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля приобретет вид петлеобразной кривой, называемой петлей гистерезиса. Каждый цикл перемагничивания сопровождается затратой энергии (потерями на гистерезис), пропорциональной площади гистерезисной петли.

В зависимости от формы гистерезисной петли ферромагнетики подразделяются на магнитно-мягкие с узкой гистерезисной петлей и малой остаточной намагниченностью (коэрцитивной силой) и магнитно-твердые с широкой гистерезисной петлей и большой величиной коэрцитивной силы. Магнитно-мягкие материалы широко применяются для магнитопроводов электрических машин, трансформаторов, катушек индуктивности и в других устройствах, подвергающихся периодическому перемагничиванию полями сравнительно невысокой частоты. Магнитно-твердые материалы применяются для изготовления постоянных магнитов.

Кроме того, в технике высоких частот используют две особые группы ферромагнитных материалов — так называемые магнитодиэлектрики и ферриты, которые наряду с высокими магнитными свойствами обладают малой удельной электрической проводимостью и, следовательно, малыми потерями на вихревые токи, наводимые переменным магнитным полем в толще ферромагнетика.

Изменение напряженности магнитного поля в веществе, вызванное его намагничиванием, определяется намагниченностью или интенсивностью намагничивания вещества $\bar{J}_{эл}$.

Подобно поляризованности интенсивность намагничивания вещества $\bar{J}_{эл}$ в случае неоднородной среды является функцией координат, а в случае нелинейной среды — нелинейной функцией от напряженности магнитного поля. Если же среда линейна, то вектор $\bar{J}_{эл}$ прямо пропорционален напряженности магнитного поля:

$$\bar{J}_{эл} = k_м \bar{\dot{H}}_{эл}, \quad \bar{B}_{эл} = \mu_{эл\,0}(1 + k_м)\bar{\dot{H}}_{эл},$$

где $k_м$ — магнитная восприимчивость вещества в случае линейной среды, не зависящая от величины $\dot{H}_{эл}$.

Сила Лоренца — результирующая суммарная сила электрического и магнитного взаимодействия, действующая на движущийся электрический заряд в электромагнитном поле:

$$\bar{F} = q_{эл}(\bar{E}_{эл} + [\bar{v} \times \bar{B}]).$$

Так, траекторию перемещения электрического заряда массой m в электромагнитном поле находят из уравнения движения $\frac{d\bar{p}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = q_{эл}(\bar{E}_{эл} + [\bar{v} \times \bar{B}])$, связывающего изменение импульса p частицы во времени с силой Лоренца.

Рассмотрим движение электрических зарядов в постоянных однородных взаимно перпендикулярных полях $\bar{E}_{эл}$ и $\dot{H}_{эл}$. Направление вектора $\bar{E}_{эл}$ выберем вдоль оси x, а направление вектора $\bar{H}_{эл}$ — вдоль оси y. Тогда векторные уравнения движения электрических зарядов

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = m_{эл}\frac{d\bar{v}}{dt} = q_{эл}(E_{x\,эл}\bar{e}_x + [\bar{v} \times B_{y\,эл}\bar{e}_y])$$

можно записать в виде трех скалярных уравнений:

$$m_{эл}\frac{dv_x}{dt} = q_{эл}(E_{x\,эл} - v_z B_{y\,эл}); \; m_{эл}\frac{dv_y}{dt} = 0; \; m_{эл}\frac{dv_z}{dt} = q_{эл} v_x B_{y\,эл}.$$

Сила Лоренца, а следовательно, ускорение вдоль оси y равны нулю, т. е. по направлению вектора $\overline{H}_{эл}$ движение электрических зарядов отсутствует.

Складывая первое уравнение с третьим, умноженным на j, находим

$$m_{эл}\left(\frac{dv_x}{dt} + j\frac{dv_z}{dt}\right) - jq_{эл}B_{yэл}(v_x + jv_z) = q_{эл}E_{xэл}.$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами общее решение уравнения представляется в виде наложения (суммы) общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного интеграла неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения принято называть свободной составляющей, а частный интеграл неоднородного уравнения — вынужденной составляющей.

Свободную составляющую скорости движения электрических зарядов определяем из однородного уравнения

$$\left(\frac{dv_{xсв}}{dt} + j\frac{dv_{zсв}}{dt}\right) - j\omega_{св}(v_{xсв} + jv_{zсв}) = 0,$$

где $\omega_{св} = \dfrac{q_{эл}B_{y\,эл}}{m_{эл}}$ — собственная частота кругового вращения электрических зарядов в виде экспоненты

$$v_{xсв} + jv_{zсв} = ae^{j(\omega_{св}t+\alpha)}.$$

Вынужденная составляющая, подобная правой части неоднородного уравнения, должна быть постоянной величиной, поэтому она находится из равенства

$$-jq_{эл}B_{y\,эл}(v_{xв} + jv_{zв}) = q_{эл}E_{x\,эл},$$

в виде $v_{xв} + jv_{zв} = j\dfrac{E_{xэл}}{B_{yэл}}$.

В результате получаем следующее общее решение уравнения движения электрических зарядов в постоянных однородных взаимно перпендикулярных полях $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$:

$$v_x + jv_z = ae^{j(\omega_{св}t+\alpha)} + j\frac{E_{x\,эл}}{B_{y\,эл}}.$$

Для составляющих вектора скорости движения электрических зарядов, приравнивая вещественные и мнимые части, находим

$$v_x = a\cos(\omega_{\text{св}}t + \alpha); \quad v_z = a\sin(\omega_{\text{св}}t + \alpha) + \frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}.$$

Постоянную интегрирования a и фазовый сдвиг α определяем из начального условия при $t = 0$ равенства сил Лоренца и Кулона:

$$m_{\text{эл}}\frac{dv_x}{dt} = q_{\text{эл}}E_{x\text{эл}}; \quad -m_{\text{эл}}\omega_{\text{св}}a\sin(\omega_{\text{св}}t + \alpha) = q_{\text{эл}}E_{x\text{эл}},$$

в виде $\alpha = \pi/2, \quad a = -\dfrac{q_{\text{эл}}E_{x\text{эл}}}{m_{\text{эл}}\omega_{\text{эл}}}$.

После подстановки этих значений в общее решение для составляющих вектора скорости получаем:

$$v_x = \frac{q_{\text{эл}}E_{x\text{эл}}}{m_{\text{эл}}\omega_{\text{св}}}\sin\omega_{\text{св}}t = \frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}\sin\omega_{\text{св}}t;$$

$$v_z = -\frac{q_{\text{эл}}E_{x\text{эл}}}{m_{\text{эл}}\omega_{\text{св}}}\cos\omega_{\text{св}}t + \frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}} = -\frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}(\cos\omega_{\text{св}}t - 1).$$

Траектория движения электрических зарядов может быть определена из следующих интегралов:

$$x = \int_0^t \frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}\sin\omega_{\text{св}}t\,dt = -\frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}\omega_{\text{св}}}(\cos\omega_{\text{св}}t - 1);$$

$$z = \int_0^t -\frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}(\cos\omega_{\text{св}}t - 1)\,dt = -\frac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}\omega_{\text{св}}}(\sin\omega_{\text{св}}t - \omega_{\text{св}}t).$$

В постоянных однородных взаимно перпендикулярных полях $\overline{E}_{\text{эл}}$ и $\overline{H}_{\text{эл}}$ электрические заряды движутся с постоянной скоростью $v = \dfrac{E_{x\text{эл}}}{B_{y\text{эл}}}$ вдоль оси z, т.е. по направлению, перпендикулярному плоскости, в которой расположены векторы $\overline{E}_{\text{эл}}$ и $\overline{H}_{\text{эл}}$, и одновременно вращаются по направлению движения часовой стрелки с частотой $\omega_{\text{св}} = \dfrac{q_{\text{эл}}B_{y\text{эл}}}{m_{\text{эл}}}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{H}_{\text{эл}}$. При изменении ориентации векторов $\overline{E}_{\text{эл}}$ и $\overline{H}_{\text{эл}}$ на противоположные направления движение электрических зарядов с постоянной скоростью вдоль оси z сохраняется, а направление их вращения изменяется. Электрические заряды будут вращаться против направления движения часовой стрелки.

Закон полного тока устанавливает связь между токами проводимости и напряженностью магнитного поля:

$$\oint\limits_L \overline{H}_{эл} d\bar{l} = \int\limits_S \bar{J}_{пр} d\overline{S} = I_{пр},$$

т.е. циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\overline{H}_{эл}$ по замкнутому контуру L равна току $I_{пр}$, проходящему через поверхность S, расположенную внутри циркуляции, охватываемой этим контуром.

В дифференциальной форме закон полного тока выглядит следующим образом:

$$\mathrm{rot}\,\overline{H}_{эл} = \bar{J}_{пр}.$$

Он определяет характер магнитного поля в любой точке: потенциальный при $\bar{j}_{пр} = 0$ и вихревой при $\bar{j}_{пр} \neq 0$.

Обобщенный закон полного тока в интегральной форме выглядит следующим образом:

$$\oint\limits_L \overline{H} d\bar{l} = \int\limits_S \left(\gamma_{эл} \overline{E}_{эл} + \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} \rho_{эл} \bar{v} + \bar{j}_{стор} \right) d\overline{S}.$$

Связь между всеми токами и напряженностью магнитного поля устанавливается законом полного тока.

В общем случае на основании обобщенного закона полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме всех токов, проходящих через поверхность, расположенную внутри циркуляции.

Токи, создаваемые генераторами, принято называть сторонними электрическими токами, а токи, создаваемые полем в проводящих средах, — токами проводимости. Кроме токов проводимости и сторонних токов существуют токи смещения и кон вективные токи.

В дифференциальной форме обобщенный закон полного тока записывается так:

$$\mathrm{rot}\overline{H}_{эл} = \gamma_{эл} \overline{E}_{эл} + \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл} \bar{v}.$$

Он характеризует вихревой характер магнитного поля независимо от вида тока.

Закон Фарадея. При всяком изменении магнитного потока через проводящий контур в этом контуре возникает электрический ток:

$$ЭДС = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где ЭДС — электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре L при изменении во времени магнитного потока Ф, проходящего через поверхность, опирающуюся на этот контур.

Электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре, по величине равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур.

Внимательное рассмотрение разнообразных индукционных опытов [17] показывает, что индукционный ток возникает тогда и только тогда, когда меняется магнитный поток Ф; ток индукции никогда не возникает, если магнитный поток Ф через данный контур остается неизменным. Индуцированный ток всегда имеет такое направление, при котором его магнитное поле уменьшает (компенсирует) изменение магнитного потока, являющегося причиной возникновения этого тока. Это общее правило, соблюдающееся во всех без исключения случаях индукции, соответствует третьему закону Ньютона — закону равенства действия и противодействия.

Магнитный поток в общем случае равен потоку вектора магнитной индукции через поверхность:

$$\Phi = \int_S \overline{B} \mathrm{d}\overline{S} = \int_S \mu \overline{H} \mathrm{d}\overline{S}.$$

Он является функцией магнитной проницаемости среды, напряженности магнитного поля, площади поверхности контура и может изменяться при их приращении. Поэтому электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре L, может быть представлена в виде суммы трех поверхностных интегралов с разными частными производными по времени:

$$\text{ЭДС} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \mu \overline{H} \frac{\partial \overline{S}}{\partial t} - \mu \overline{S} \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \overline{HS} \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Так, в электрических генераторах при вращении рамки (ротора), т. е. изменении площади ее поверхности во времени, в постоянном магнитном поле индукции возникает ЭДС:

$$\text{ЭДС} = -\int_S \mu \overline{H} \frac{\partial \overline{S}}{\partial t} = -\int_S \overline{B} \frac{\partial \overline{S}}{\partial t}.$$

В приемных магнитных антеннах (рамках) радиоприемников ЭДС наводится в результате изменения напряженности внешнего магнитного поля:

$$\text{ЭДС} = -\mu \overline{S} \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}.$$

При движении любого механического транспортного средства, самолета, корабля за счет изменения магнитных свойств его металлического корпуса под действием внутренних перегрузок в постоянном магнитном поле Земли возникает ЭДС, создающая внешнее его электромагнитное поле:

$$\text{ЭДС} = -\overline{HS}\,\frac{\partial\mu}{\partial t}.$$

Закон электромагнитной индукции. Циркуляция вектора напряженности электрического поля по любой замкнутой регулярной кривой равна уменьшению во времени магнитного потока через любую поверхность, опирающуюся на эту кривую:

$$\oint_L \overline{E}_{\text{эл}}\,\mathrm{d}\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}_{\text{эл}}}{\partial t}\,\mathrm{d}\overline{S}.$$

Закон электромагнитной индукции определяет вихревое электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля.

Полный поток может меняться во времени, а также из-за деформации контура и изменения магнитной проницаемости.

В дифференциальной форме закон электромагнитной индукции выглядит следующим образом:

$$\operatorname{rot}\overline{E}_{\text{эл}} = -\frac{\partial \overline{B}_{\text{эл}}}{\partial t}.$$

Он определяет вихревой характер электрического поля, возникающего при изменении во времени индукции магнитного поля.

Так, напряженность электрического поля внутри соленоида определяется из закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме, который в цилиндрической системе координат для однородного магнитного поля имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) = -\mu\,\frac{\mathrm{d}H_{mz}\cos\omega t}{\mathrm{d}t}\,\mu\omega H_{mz}\sin\omega t.$$

Умножим левую и правую части равенства на $r\mathrm{d}r$ и возьмем неопределенные интегралы:

$$\int \mathrm{d}(rE_\varphi) = \mu\omega H_{mz}\sin\omega t\int r\,\mathrm{d}\,r.$$

Получаем равенство $(rE_\varphi) = \mu\omega H_{mz}\sin\omega t\left(\dfrac{r^2}{2} + C\right)$.

Принимая постоянную C равной нулю, так как величина напряженности электрического поля на оси соленоида не может быть бесконечно большой, находим

$$E_\varphi = \mu\omega H_{mz} \sin\omega t \frac{r}{2}.$$

Вектор напряженности вихревого электрического поля внутри соленоида направлен по касательной к окружности с центром на его оси. Силовые линии электрического поля образуют замкнутые концентрические окружности вокруг магнитного потока.

Вектор Пойнтинга внутри соленоида направлен по радиусу:

$$\overline{\Pi}_{\text{эл}2} = [E_\varphi \bar{e}_\varphi \times H_z \bar{e}_z] = E_\varphi H_z \bar{e}_r.$$

Его мгновенное значение:

$$\Pi_{\text{эл}\,r} = E_\varphi H_z = \mu\omega H_{mz} \sin\omega t \frac{r}{2} H_{mz} \cos\omega t = \mu\omega H_{mz}^2 \frac{r}{4} \sin 2\omega t.$$

Вектор пульсирует с удвоенной частотой.

Поток реактивной мощности, идущий с внутренней боковой поверхности к оси соленоида для создания электромагнитного поля в нем, а также для изменения этого поля во времени, прямо пропорционален индуктивному сопротивлению соленоида:

$$P = \mu\omega H_{mz}^2 \frac{r}{4} \sin 2\omega t L_0 2\pi r = \frac{I_m^2 W^2}{L_0^2} \mu\omega \frac{\pi r^2 L_0}{2} \sin 2\omega t = \omega L_{\text{c}} \frac{I_m^2}{2} \sin 2\omega t.$$

Удельная энергия вихревого электрического поля определяется по формуле

$$w_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{эл}} E_\varphi^2 = \varepsilon_{\text{эл}} \mu_{\text{эл}}^2 \omega^2 (H_{mz} \sin\omega t)^2 \frac{r^2}{8} = \frac{k^2 r^2}{4} w_{\text{м}}.$$

В рассматриваемом случае $kr \ll 1$ составляет малую часть удельной энергии магнитного поля.

Картина электромагнитного поля внутри соленоида подобна картине поля внутри круглого провода с электрическим током. В проводе вокруг тока возникает вихревое магнитное поле, в соленоиде вокруг магнитного потока возникает вихревое электрическое поле. В обоих случаях напряженность вихревого поля прямо пропорциональна радиусу, расстоянию от оси потока.

8.3. Уравнения Максвелла

Основными уравнениями макроскопической теории электромагнитного поля являются уравнения, опубликованные Джеймсом Клерком Максвеллом в 1873 г. в монографии «Трактат об электричестве и магнетизме» [18], а также в более ранних работах [19], например, в труде «О физических силовых линиях» (1861—1862).

В табл. 8.2 [20] приведены «Уравнения (1873)». В ней сохранены ранее принятые обозначения параметров и векторов поля. Обозначения прописными буквами и порядок расположения уравнений принадлежат Д. К. Максвеллу.

Таблица 8.2

Обозначение функции	«Уравнения (1873)»	Определение, источник
Покоящиеся системы координат		
(A)	$[\nabla\overline{A}] = \overline{B}$	Закон I [19, С. 84]
(a)	$\overline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V \frac{\overline{\delta}}{r}\mathrm{d}V$	[18, пп. 715—717]
(B)	$\overline{E} = [\overline{v}\overline{B}] - \frac{\partial\overline{A}_{эл}}{\partial t} - \nabla\varphi$	[18, пп. 598—599], [19, С. 149—151]
(C)	$f = [\overline{\delta}\,\overline{B}] + \nabla\overline{D}\,\overline{E} - m\nabla\Omega$	[18, п.619]
(D)	$\overline{B} = \mu_0\overline{H} + 4\pi\overline{J}$	Уравнение намагниченности [18, п. 610]
(E)	$[\nabla\overline{H}] = \overline{\delta}$	Закон III [18, п. 619], [19, с. 84]
(F)	$\overline{D} = \varepsilon_0\overline{E} + \overline{P}$	В современном написании [18, п. 611]
(G)	$\overline{\delta}_{пр} = \gamma\overline{E}$	Закон IV [18, п. 610], [19, с. 84]
(H)	$\overline{\delta}_{эл} = \dot{\overline{D}} + \gamma\overline{E}$	Уравнение истинных токов [18, п. 610]
(I)	$\overline{\delta}_{эл} = \left(\gamma + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{E}$	Как функция $\overline{E}$ [18, п. 611]
(I^*)	$\overline{\delta}_{эл} = \gamma\overline{E} + \varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$	При γ и ε = const [18, п. 611]

Обозначение функции	«Уравнения (1873)»	Определение, источник
(J)	$\nabla\overline{D} = \rho$	Объемная плотность электричества [18, п. 612]
(K)	$\sigma = \mathrm{Div}\overline{D}$	Поверхностная плотность электричества [18, п. 613]
(L)	$\overline{B} = \mu\overline{H}$	Закон II [18, п. 614], [19, с. 84]
(b)	$\overline{H} = -\nabla\Omega$	Как функция магнитного потенциала [18, п. 619]
(c)	$m = \nabla$	Объемная плотность магнетизма [18, п. 619]
(d)	$[\nabla\overline{B}] = \mu\overline{\delta}$, при $\mu = \mathrm{const}$	[18, п. 616]
(e)	$t' = t - \dfrac{r}{v_{эм}}$	[18, гл. XX]
(i)	$v_{эм} = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$	[18, гл. XX]
(j)	$w = w_э + w_м = \dfrac{\varepsilon E^2}{2} + \dfrac{\mu H^2}{2}$	Объемная плотность электромагнитной энергии
(l)	$U = \int\overline{\delta}\mathrm{d}\overline{S}\cdot\int\overline{A}\mathrm{d}\overline{l}$	Закон II Полный электромагнитный потенциал
	Движущиеся системы координат	
(B')	$\overline{E}' = [\overline{v}'\overline{B}] - \dfrac{\partial\overline{A}'_{эл}}{\partial t} - \nabla(\varphi + \varphi')$	[3, п. 600–601]
(g)	$\dfrac{\partial A'}{\partial t} = -[\overline{v}'\overline{B}] + \dfrac{\partial\overline{A}'_{эл}}{\partial t} - \nabla\varphi'$	
(h)	$-\varphi' = (Av_e)$	

Максвелл ввел понятие плотности тока смещения (поз. H), теорему Гаусса распространил на все диэлектрики (поз. J), а закон полного тока обобщил на случай переменных электромагнитных полей (поз. E).

В настоящее время в основную систему уравнений электромагнитного поля входят четыре уравнения, названных в честь Максвелла: I уравнение (поз. E), II уравнение (поз. B) при выполнении операции ротации, III уравнение (поз. J) и IV уравнение (поз. J) при замене в левой части уравнения электрической индукции на магнитную индукцию и приравняв нулю правую часть уравнения, так как магнитные заряды в природе не существуют. Кроме четырех уравнений Максвелла, определяющих связь между векторами поля, токами и зарядами, приведенных в табл. 8.3, в основную систему уравнений электромагнитного поля входят три уравнения связи (поз. F, d, G) или вещественные уравнения (законы Ома в дифференциальной форме для диэлектриков, магнетиков и проводников):

$$\overline{D}_{эл} = \varepsilon_{эл}\overline{E}_{эл}; \quad \overline{B}_{эл} = \mu_{эл}\overline{H}_{эл}; \quad \overline{J}_{эл} = \gamma_{эл}\overline{E}_{эл},$$

где $\gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \dfrac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл}\overline{v} + \bar{j}_{ст}$ — суммарная плотность токов проводимости, смещения, конвективных и сторонних токов в бесконечно малом объеме.

В основе I уравнения Максвелла лежит обобщенный закон полного тока, II уравнения — закон электромагнитной индукции, III уравнения — теорема Гаусса, IV уравнения — теорема, аналогичная теореме Гаусса, но только для потока магнитной индукции, проходящего через замкнутую поверхность. Три уравнения связи соответствуют закону Ома в дифференциальной форме для диэлектриков, магнетиков и проводников.

I уравнение Максвелла в интегральной форме определяет суммарный эффект циркуляции вектора напряженности магнит-

Таблица 8.3

Уравнение Максвелла	Интегральная форма	Дифференциальная форма
I	$\oint_L \overline{H}_{эл} d\bar{l} = \int_S \left(\gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \dfrac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл}\overline{v} + \bar{j}_{ст}\right) d\overline{S}$	$\operatorname{rot}\overline{H}_{эл} = \gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \dfrac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \rho_{эл}\overline{v} + \bar{j}_{ст}$
II	$\oint_L \overline{E}_{эл} d\bar{l} = -\int_S \dfrac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t} d\overline{S}$	$\operatorname{rot}\overline{E}_{эл} = -\dfrac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t}$
III	$\oint_S \overline{D}_{эл} d\overline{S} = q$	$\operatorname{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл}$
IV	$\oint_S \overline{B}_{эл} d\overline{S} = 0$	$\operatorname{div}\overline{B}_{эл} = 0$

ного поля от потоков плотностей, токов проводимости, смещения, конвективных и сторонних токов, проходящих через поверхность, ограниченную циркуляцией, II уравнение — эффект циркуляции вектора напряженности электрического поля от потока плотности «магнитного» тока, III и IV уравнения — потоков векторов электрической и магнитной индукции, проходящих через замкнутые поверхности объемов, от совокупности, имеющихся внутри них зарядов.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме отображают связь между векторами поля в данной точке пространства.

I уравнение Максвелла устанавливает связь между магнитным полем и плотностью тока в данной точке. Независимо от вида тока вокруг него возникает вихрь магнитного поля. II уравнение Максвелла определяет связь между электрическим полем с изменяющимся во времени магнитным полем. III и IV уравнения Максвелла выражают принцип непрерывности тока и магнитного потока.

Согласно теории Максвелла электрическое и магнитное взаимодействие между телами осуществляется через эфир, заполняющий пространство окружающее их. Пространство, заполненное эфиром, деформированным под воздействием электрических зарядов и магнитов, Максвелл назвал электромагнитным полем. Всякое изменение в расположении зарядов и магнитов вызывает возмущение эфира. Максвелл установил основные дифференциальные уравнения электромагнитного поля и, анализируя их решения, пришел к ряду важных выводов.

1. Возмущения эфира распространяются в пространстве, образуя электромагнитную волну.

2. Электромагнитные волны поперечны, скорость их распространения конечна и зависит от свойства среды. Эта скорость так близка к скорости света, что есть все основания сделать заключение о том, что свет (включая лучистую теплоту) является электромагнитным возмущением эфира.

3. В среде, в которой распространяются электромагнитные волны, существует давление в направлении их распространения, равное по величине плотности энергии электромагнитного поля. «Плоское тело, подвергающееся действию солнечного света, будет испытывать это давление только на своей освещенной стороне, и, следовательно, будет отталкиваться от той стороны, на которую падает свет...» [19]. Такие лучи, падая на тонкий металлический диск, весьма чувствительным образом подвешенный в вакууме, производят наблюдаемый механический эффект».

Максвелл пользовался огромным авторитетом как физик-теоретик, но он умер, так и не дождавшись признания своего самого крупного создания — теории электромагнитного поля.

В 1887—1888 гг. появились классические работы Г. Герца, получившего опытным путем электромагнитные волны, существование которых было предсказано Максвеллом.

В 1900 г. П.Н. Лебедев очень точно определил величину светового давления на твердые тела, а позже и на газы. «Теории Максвелла нужны были опыты Лебедева, чтобы получить всеобщее признание» [21].

Практическое воплощение идей электродинамики впервые было осуществлено А.С. Поповым, открывшим миру радиосвязь.

В начале XX в. уравнения Максвелла были получены из принципа наименьшего действия, представленного в виде интеграла по времени от функции Лагранжа:

II и IV уравнения — из уравнения движения частицы в электромагнитном поле, определенного при варьировании траектории частицы в заданном поле;

I и III уравнения — при варьировании потенциалов поля при заданном движении электрических зарядов.

Согласно принципу наименьшего действия для всякой механической системы существует такой интеграл, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум, поэтому вариация его равна нулю. Так, действие можно представить в виде интеграла по времени из функции Лагранжа, определяющей энергии движущихся частиц, поля и взаимодействия частиц с полем. Для движущейся со скоростью v частицы, обладающей массой m и электрическим зарядом $q_{эл}$, в скалярном электростатическом $U_{ст}$ и электромагнитном поле функция Лагранжа в объеме V может быть записана в следующем виде:

$$L = \frac{mv^2}{2} - q_{эл}\overline{A}_{эл}\overline{v} + q_{эл}U_{ст} + \frac{1}{2}\int\limits_V (\overline{E}_{эл}\overline{D}_{эл} + \overline{H}_{эл}\overline{B}_{эл})\,\mathrm{d}V.$$

Определим II и IV уравнения Максвелла варьированием в действии траекторией частицы в неизменном поле. Для этого производную по времени от частной производной функции Лагранжа по скорости представим в виде частной производной функции Лагранжа от расстояния: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \overline{v}} = \frac{\partial L}{\partial \overline{r}}$.

Производная по времени от частной производной функции Лагранжа по скорости после подстановки функции Лагранжа и дифференцирования по скорости равна разности производных по времени:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \overline{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\overline{v} - q_{эл}\overline{A}_{эл}) = m\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} - q_{эл}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{A}_{эл},$$

а частная производная функции Лагранжа от расстояния — разности градиентов:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{r}} = -q_{эл}\operatorname{grad}(\bar{A}_{эл}\bar{v}) + q_{эл}\operatorname{grad}U_{ст}.$$

В результате получаем равенство разностей производных по времени и градиентов:

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} - q_{эл}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{A}_{эл} = -q_{эл}\operatorname{grad}(\bar{A}_{эл}\bar{v}) + q_{эл}\operatorname{grad}U_{ст}.$$

С учетом формул основных тождеств векторного анализа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{A}_{эл} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{A},\ \operatorname{grad}(\bar{A}_{эл}\bar{v}) =$$

$$= (\bar{A}\nabla)\bar{v} + [\bar{A}\operatorname{rot}\bar{v}] + (\bar{v}\nabla)\bar{A} + [\bar{v}\operatorname{rot}\bar{A}]$$

и помня, что дифференцирование по r производится при постоянной скорости v, находим уравнение движения частицы в электромагнитном поле:

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = q_{эл}\frac{\partial A}{\partial t} + q_{эл}\operatorname{grad}U_{ст} - q_{эл}[\bar{v}\operatorname{rot}A_{эл}] = -q_{эл}\bar{E}_{эл} - q_{эл}[\bar{v}\times\bar{B}_{эл}],$$

где $\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}U_{ст}$, а $\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A}_{эл}$.

Применив операции ротации к вектору $\bar{E}$ и дивергенции к вектору $\bar{B}$, принимая во внимание, что ротор всякого градиента и дивергенция всякого ротора равны нулю, получаем II и IV уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\bar{E}_{эл} = -\frac{\partial \bar{B}_{эл}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\bar{B}_{эл} = 0.$$

Определим III и I уравнения Максвелла варьированием в действии при заданном движении частиц.

Варьируя скалярным потенциалом

$$\frac{\partial L}{\partial U_{ст}} = \frac{\partial}{\partial U_{ст}}\left[\frac{mv^2}{2} - q_{эл}\bar{A}_{эл}\bar{v} + q_{эл}U_{ст} + \frac{1}{2}\int_V(\bar{E}_{эл}\bar{D}_{эл} + \bar{H}_{эл}\bar{B}_{эл})\mathrm{d}V\right]$$

и, приравняв производную к нулю, получаем

$$q_{эл} + \frac{\partial}{\partial U_{ст}}\left(\frac{1}{2}\int_V\bar{E}_{эл}\bar{D}_{эл}\mathrm{d}V\right) = 0.$$

Представляя заряд частиц в виде объемного интеграла, а приращение потенциала через напряженность электростатического поля $\partial U_{\text{ст}} = -\overline{E}_{\text{эл}}\partial\overline{l}$, находим III уравнение Максвелла:

$$\rho_{\text{эл}} - \frac{\partial}{\overline{E}_{\text{эл}}\partial\overline{l}}\left(\frac{1}{2}\overline{E}_{\text{эл}}\overline{D}_{\text{эл}}\right) = 0; \quad \rho_{\text{эл}} = \frac{\partial\overline{D}_{\text{эл}}}{\partial\overline{l}} = \operatorname{div}\overline{D}_{\text{эл}}.$$

Варьируя векторным потенциалом

$$\frac{\partial L}{\partial\overline{A}_{\text{эл}}} = \frac{\partial}{\partial\overline{A}_{\text{эл}}}\left[\frac{mv^2}{2} - q_{\text{эл}}\overline{A}_{\text{эл}}\overline{v} + q_{\text{эл}}U_{\text{ст}} + \frac{1}{2}\int\limits_V(\overline{E}_{\text{эл}}\overline{D}_{\text{эл}} + \overline{H}_{\text{эл}}\overline{B}_{\text{эл}})\mathrm{d}V\right] = 0,$$

с учетом

$$\partial\overline{A}_{\text{эл}} = -\overline{E}_{\text{эл}}\partial t, -\rho_{\text{эл}}\overline{v} - \frac{\partial}{\overline{E}_{\text{эл}}\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{E}_{\text{эл}}\overline{D}_{\text{эл}} + \overline{H}_{\text{эл}}\overline{B}_{\text{эл}}\right) = 0;$$

$$-\rho_{\text{эл}}\overline{v} - \frac{\partial\overline{D}_{\text{эл}}}{\partial t} - \frac{\overline{H}_{\text{эл}}}{\overline{E}_{\text{эл}}}\frac{\partial\overline{B}_{\text{эл}}}{\partial t} = 0, -\rho_{\text{эл}}\overline{v} - \frac{\partial\overline{D}_{\text{эл}}}{\partial t} + \frac{\overline{H}_{\text{эл}}}{\overline{E}_{\text{эл}}}\operatorname{rot}\overline{E}_{\text{эл}} = 0,$$

принимая во внимание

$$\operatorname{div}[\overline{E}_{\text{эл}} \times \overline{H}_{\text{эл}}] = \overline{H}_{\text{эл}}\operatorname{rot}\overline{E}_{\text{эл}} - \overline{E}_{\text{эл}}\operatorname{rot}\overline{H}_{\text{эл}} = 0;$$

$$-\rho_{\text{эл}}\overline{v} - \frac{\partial\overline{D}_{\text{эл}}}{\partial t} + \operatorname{rot}\overline{H}_{\text{эл}} = 0,$$

находим I уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}H_{\text{эл}} = \gamma_{\text{эл}}\overline{E}_{\text{эл}} + \frac{\partial\overline{D}_{\text{эл}}}{\partial t} + \rho_{\text{эл}}\overline{v}.$$

Действие можно представить в виде интеграла по времени из функции Лагранжа, определяющей энергии движущихся частиц, поля и взаимодействия частиц с полем не только электромагнитного взаимодействия, но и гравитационного, а также и других взаимодействий. Это говорит о том, что поле любого взаимодействия может быть описано уравнениями, подобными уравнениям Максвелла [16].

8.4. Волновые уравнения

Для определения уравнения, которому удовлетворяет каждый вектор поля, применим операцию ротации к I и II уравнениям Максвелла:

$$\mathrm{rot\,rot}\overline{H}_{эл} = \gamma_{эл}\mathrm{rot}\overline{E}_{эл} + \frac{\partial \mathrm{rot}\overline{D}_{эл}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v}),\ \mathrm{rot\,rot}\overline{E}_{эл} = -\frac{\partial \mathrm{rot}\overline{B}_{эл}}{\partial t}.$$

После подстановки значений роторов векторов и замены двойного ротора разностью $\mathrm{rot\,rot}\overline{E}_{эл} = \mathrm{grad\,div}\overline{E}_{эл} - \nabla^2 E_{эл}$ находим

$$\mathrm{grad\,div}\overline{H}_{эл} - \nabla^2\overline{H}_{эл} = -\gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial \overline{H}_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{H}_{эл}}{\partial t^2} + \mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v});$$

$$\mathrm{grad\,div}\overline{E}_{эл} - \nabla^2\overline{E}_{эл} = -\gamma_{эл}\mu\frac{\partial \overline{E}_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{E}_{эл}}{\partial t^2} - \mu_{эл}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v}).$$

С учетом III и IV уравнений Максвелла получаем обобщенные неоднородные векторные волновые уравнения:

$$\begin{gathered}\nabla^2\overline{H}_{эл} = \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial \overline{H}_{эл}}{\partial t} + \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{H}_{эл}}{\partial t^2} - \mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v});\\ \nabla^2\overline{E}_{эл} = \gamma_{эл}\mu\frac{\partial \overline{E}_{эл}}{\partial t} + \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{E}_{эл}}{\partial t^2} + \mu_{эл}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v}) + \mathrm{grad}\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon_{эл}}.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Итак, в однородном пространстве вне источников, т.е. когда сторонние токи, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, векторы напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют обобщенному неоднородному векторному волновому уравнению.

Волновыми называются такие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, которые описывают распространение колебаний в среде. Они наряду с пространственными производными второго порядка содержат вторые производные по времени.

Волновые уравнения для стационарного, независимого от времени поля, $\frac{\partial \overline{H}_{эл}}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial \overline{E}_{эл}}{\partial t} = 0$, переходят в уравнения Пуассона, описывающие потенциальные поля:

$$\nabla^2\overline{H}_{эл} = -\mathrm{rot}(\rho_{эл}\overline{v}); \quad \nabla^2\overline{E}_{эл} = \mathrm{grad}\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon_{эл}}.$$

Волновые уравнения записаны в общей форме, пригодной для любой системы координат. Для их решения следует раскрыть оператор Лапласа в конкретной системе координат и заменить векторные уравнения системой скалярных уравнений. Наиболее простой вид оператор Лапласа имеет в декартовой системе координат.

Любая задача теории электромагнитного поля сводится к определению поведения в пространстве и времени векторов $\overline{H}_{эл}$ и $\overline{E}_{эл}$, удовлетворяющих волновым уравнениям при заданных начальных и граничных условиях.

8.5. Векторные и скалярные потенциалы

Векторные и скалярные потенциалы вводят для упрощения решения полевых задач. Вместо решения двух неоднородных волновых уравнений (8.6) для векторов $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$ решается одно уравнение для векторного электрического потенциала $\overline{A}_{эл}$ или магнитного потенциала $\overline{A}^{*}_{эл}$, связанных следующими соотношениями с векторами поля:

$$\begin{aligned} &\overline{B}_{эл} = \mathrm{rot}\overline{A}_{эл}, \overline{E}_{эл} = -\frac{\partial \overline{A}_{эл}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, U_{эл}; \\ &\overline{E}_{эл} = \mathrm{rot}\overline{A}^{*}_{эл}, \overline{H}_{эл} = \varepsilon_{эл}\frac{\partial \overline{A}^{*}_{эл}}{\partial t} + \gamma_{пр}\overline{A}^{*}_{эл} - \mathrm{grad}\, U_{м}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Векторные и скалярные потенциалы $U_{эл}$, $U_{м}$ удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям:

$$\nabla^2 \overline{A}^{*}_{эл} - \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial \overline{A}^{*}_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{A}^{*}_{эл}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\nabla^2 \overline{A}_{эл} - \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial \overline{A}_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 \overline{A}_{эл}}{\partial t^2} = -\mu_{эл} j_{ст};$$

$$\nabla^2 U_{эл} - \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial U_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 U_{эл}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon_{эл}};$$

$$\nabla^2 U_{м} - \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial U_{м}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2 U_{м}}{\partial t^2} = 0$$

при выполнении следующих равенств (условий Лоренца):

$$\mathrm{div}\overline{A}_{эл} = -\mu_{эл}\gamma_{эл}U_{эл} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial U_{эл}}{\partial t}, \mathrm{div}\overline{A}^{*}_{эл} = \mu_{эл}\frac{\partial U_{м}}{\partial t}.$$

Для доказательства этого следует, например, вместо вектора $\overline{E}_{эл}$ подставить $-\dfrac{\partial \overline{A}_{эл}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, U_{эл}$ в правую часть I уравнения Максвелла в дифференциальной форме, а вместо вектора $\overline{H}_{эл} - \frac{1}{\mu_{эл}}\operatorname{rot}\overline{A}_{эл}$ в левую часть этого же уравнения, воспользоваться тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} - \nabla^2\overline{A}$ и условием Лоренца $\operatorname{div}\overline{A}_{эл} = -\mu_{эл}\gamma_{эл} \times$ $\times\, U_{эл} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial U_{эл}}{\partial t}$ и получить искомое волновое уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla^2\overline{A}_{эл} - \gamma_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial\overline{A}_{эл}}{\partial t} - \varepsilon_{эл}\mu_{эл}\frac{\partial^2\overline{A}_{эл}}{\partial t^2} = -\mu_{эл}\bar{j}_{ст}.$$

Волновое уравнение для скалярного магнитного потенциала получается после дифференцирования условия Лоренца по времени, подстановки в него значения производной от векторного потенциала $\frac{\partial\overline{A}_{эл}}{\partial t} = -\overline{E}_{эл} - \operatorname{grad}U_{эл}$, замены дивергенции от вектора напряженности электрического поля правой частью III уравнения Максвелла в дифференциальной форме, деленной на электрическую проницаемость среды, и представления оператора Лапласа вместо дивергенции градиента.

Для стационарных полей волновые уравнения переходят в уравнения Пуассона:

$$\Delta^2\overline{A}_{эл} = -\mu_{эл}\bar{j}_{ст}; \quad \Delta^2 U_{эл} = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon_{эл}}$$

и уравнения Лапласа: $\Delta^2\overline{A}^*_{эл} = 0$; $\Delta^2 U_{м} = 0$.

Векторное уравнение Пуассона в декартовой системе координат распадается на три скалярных уравнения.

Учитывая, что фундаментальное решение уравнения Пуассона для скалярного потенциала в однородных средах имеет вид $U_{эл} = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл}r}$, то в общем случае точечного, объемного, поверхностного и линейного распределений электрических зарядов результирующий скалярный потенциал будет определяться алгебраической суммой их скалярных потенциалов. Поэтому частное решение уравнения Пуассона равно алгебраической сумме скалярных потенциалов отдельных, объемных, поверхностных или линейных зарядов:

$$U_{эл} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_{iэл}}{4\pi\varepsilon_{эл}r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{эл}}\int_V\frac{\rho_{эл}}{r}\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{эл}}\int_S\frac{\sigma_{эл}}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{эл}}\int_L\frac{\tau_{эл}}{r}\mathrm{d}l.$$

Используя фундаментальное решение уравнения Пуассона относительно векторного электрического потенциала, можно определить векторный потенциал $\bar{A}_{эл}$:

$$\bar{A}_{эл} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\bar{J}_{эл}}{r}\mathrm{d}V + \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\bar{j}_{эл}}{r}\mathrm{d}S + \frac{\mu}{4\pi}\int_L \frac{I_{эл}}{r}\mathrm{d}l, \qquad (8.8)$$

где $\bar{j}_{эл}$ — плотность тока, А/м^2.

Напряженность поля в некоторых задачах целесообразно определять, рассчитывая производные потенциала от расстояния аналитически:

$$\bar{E}_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{эл}}\int_V \frac{\rho_{эл}\bar{e}_r}{r^2}\mathrm{d}V; \quad \bar{H}_{эл} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\bar{J}_{эл} \times \bar{e}_r]}{r^2}\mathrm{d}V.$$

В качестве примера рассмотрим использование векторного электрического потенциала при исследовании магнитного поля.

Пример. Дано: по круглому витку радиуса r_0 протекает постоянный ток I (рис. 8.11).

Определить: векторный потенциал на большом расстоянии от центра витка ($r >> r_0$) и показать, что при этом виток действует как магнитный диполь.

Решение. Поместим начало сферической системы координат в центр витка, причем полярную ось $0z$ направим перпендикулярно к плоскости витка, а отсчет азимутального угла φ будем производить от плоскости, проходящей через ось $0z$ и точку наблюдения P (плоскость $z0P$ на рис. 8.11, *а*).

Из симметрии распределения токов относительно указанной плоскости следует, что векторный потенциал имеет лишь азимутальную составляющую $\bar{A}_{эл} = A_{\varphi\, эл}\bar{e}_\varphi$. В этом можно убедиться, если рассмотреть попарно элементы тока, равноудаленные в противоположные стороны от плоскости $z0P'$ (точки I и I' на рис. 8.11, *б*). Каждый из этих элементов можно разложить на две составляющие: $I\mathrm{d}l\cos\varphi\bar{e}_\varphi$, перпендикулярную к плоскости $z0P'$ и, следовательно, параллельную азимутальному направлению φ_0 в точке P, и $I\mathrm{d}l\sin\varphi\bar{e}_\varphi$, параллельную указанной плоскости.

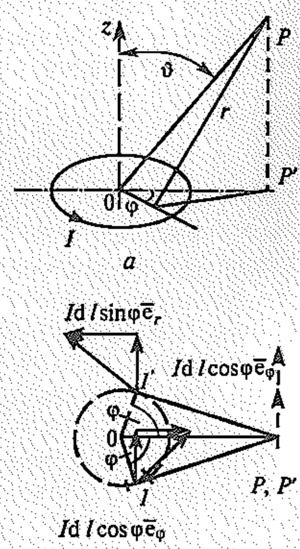


Рис. 8.11. Магнитное поле витка с постоянным током:
а — вид сбоку; *б* — вид сверху

Элементы $I\mathrm{d}l\sin\varphi\bar{e}_\varphi$ равны по величине, но имеют противоположные направления. Создаваемые ими составляющие векторного потенциала взаимно компенсируются. Элементы же $I\mathrm{d}l\cos\varphi\bar{e}_\varphi$ с координатами φ и $-\varphi$ создают в точке наблюдения P равные составляющие векторного потенциала, имеющие направления, совпадающие с азимутальным направлением φ. Перебирая попарно все элементы витка, убеждаемся, что векторный потенциал имеет только одну составляющую $\bar{A}_{эл} = A_{\varphi эл}\bar{e}_\varphi$.

Так как $\mathrm{d}l_\varphi = \mathrm{d}l\cos\varphi$, из выражения (8.7) имеем

$$A_{\varphi эл} = \frac{\mu I_{эл}}{4\pi}\oint_L \frac{\cos\varphi}{r}\mathrm{d}l.$$

Из геометрии задачи следует, что $\mathrm{d}l = r_0\mathrm{d}_\varphi$ и $r^2 = r_c^2 + r_0^2 - 2r_c r_0 \sin\vartheta\cos\varphi$, поэтому

$$A_{\varphi эл} = \frac{\mu I_{эл}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(r^2 + r_c^2 - 2r_c r_0\sin\varphi\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Если учесть, что $r_c \gg r_0$, то

$$(r_c^2 + r_0^2 - 2r_c r_0\sin\vartheta\cos\varphi)^{-1/2} \approx \frac{1}{r_c}\left(1 + \frac{r_0}{r_c}\sin\vartheta\cos\varphi\right).$$

Тогда после интегрирования выражение для векторного потенциала приобретает вид

$$A_{\varphi эл} \approx \frac{\mu I_{эл} r_0^2}{4r_c^2}\sin\vartheta.$$

Напряженность магнитного поля найдем из уравнения $\bar{B}_{эл} = \mathrm{rot}\bar{A}_{эл}$, выполнив операцию дифференцирования в сферической системе координат:

$$\bar{H}_{эл} \approx \frac{I_{эл}r_0^2}{4r_c^3}(2\cos\vartheta\bar{e}_r + \sin\vartheta\bar{e}_\vartheta).$$

Сравнение найденного магнитного поля витка с полем электростатического диполя показывает, что виток ведет себя подобно диполю, находящемуся в точке O и ориентированному по оси Oz:

$$\bar{H}_{эл} \approx \frac{P_м}{4\pi\mu_{эл}r^3}(2\cos\vartheta\bar{e}_r + \sin\vartheta\bar{e}_\vartheta),$$

где $P_м$ — абсолютное значение момента магнитного диполя.

Из сравнения полей диполей находим магнитный момент витка

$$P_м = \mu_{эл}IS,$$

где S — площадь витка.

Выражение для магнитного момента может быть использовано для определения момента витка некруглой конфигурации, если его размеры значительно меньше расстояния до точки наблюдения, в которой рассчитывается поле, создаваемое витком.

8.6. Граничные условия для векторов напряженности и индукции электромагнитного поля

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме, содержащие производные от составляющих векторов по координатам, теряют смысл в точках разрыва на границах раздела сред с различными диэлектрическими, магнитными проницаемостями и удельными проводимостями. Поэтому при решении краевых задач используют граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границе раздела сред.

Граничные условия определяют из уравнений Максвелла в интегральной форме. Предполагают, что граница раздела двух сред обладает некоторой малой толщиной (рис. 8.12), в пределах которой происходит непрерывный переход параметров верхней среды в параметры нижней среды. Такое же непрерывное изменение происходит и с векторами поля.

Пределы интегрирования в I и II уравнениях Максвелла по бесконечно малому замкнутому контуру *abcd* разбивают на горизонтальные участки *ab* по верхней и *cd* нижней границам и на вертикальные участки *bc* и *da* промежуточного слоя. При стремлении толщины промежуточного слоя к нулю, т.е. осуществлении предельного перехода векторов с верхней среды в нижнюю, интегралы с пределами интегрирования на вертикальных участках *bc* и *da* бесконечно малы по величине. Каждый вектор поля предварительно в верхней и нижней средах разлагается на нормальную и тангенциальную составляющие относительно границы.

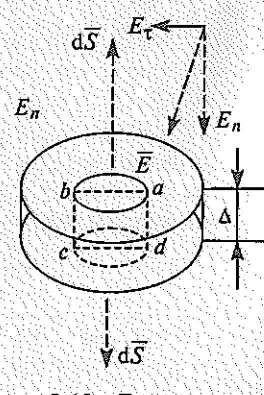


Рис. 8.12. Граничные условия для векторов напряженности и индукции поля

В результате интегралы в I и II уравнениях Максвелла равны сумме двух скалярных произведений или разности произведений тангенциальных составляющих векторов на элемент пути, так как интегрирование по верхней границе противоположно направлению интегрирования по нижней границе:

$$\text{I.}\ \oint\limits_{abcd} \overline{H}_{эл} d\bar{l} = \overline{H}_{эл1} d\bar{l}_1 + \overline{H}_{эл2} d\bar{l}_2 =$$

$$= H_{эл1\tau} dl_1 - H_{эл2\tau} dl_2 = I;$$

$$\text{II.} \oint_L \bar{E}_{\text{эл}} \mathrm{d}\bar{l} = \bar{E}_{\text{эл}1} \mathrm{d}\bar{l}_1 + \bar{E}_{\text{эл}2} \mathrm{d}\bar{l}_2 = E_{\text{эл}1\tau} \mathrm{d}l_1 - E_{\text{эл}2\tau} \mathrm{d}l_2 = 0.$$

Пределы интегрирования в III и IV уравнениях Максвелла по бесконечно малой замкнутой поверхности цилиндра разбивают на участки по его боковой поверхности и основаниям. При стремлении толщины промежуточного слоя к нулю интегралы с пределами интегрирования по боковой поверхности бесконечно малы по величине. В результате интегралы в III и IV уравнениях Максвелла равны сумме двух скалярных произведений или разности произведений нормальных составляющих векторов на элемент поверхности, так как интегрирование по верхнему основанию цилиндра противоположно направлению интегрирования по нижнему основанию цилиндра:

$$\text{III.} \oint_S \bar{D}_{\text{эл}} \mathrm{d}\bar{S} = \bar{D}_{\text{эл}1} \mathrm{d}\bar{S}_1 + \bar{D}_{\text{эл}2} \mathrm{d}\bar{S}_2 = D_{\text{эл}1n} \mathrm{d}S_1 - D_{\text{эл}2n} \mathrm{d}S_2 = q;$$

$$\text{IV.} \oint_S \bar{B}_{\text{эл}} \mathrm{d}\bar{S} = \bar{B}_{\text{эл}1} \mathrm{d}\bar{S}_1 + \bar{B}_{\text{эл}2} \mathrm{d}\bar{S}_2 = B_{\text{эл}1n} \mathrm{d}S_1 - B_{\text{эл}2n} \mathrm{d}S_2 = 0.$$

В результате из уравнений Максвелла в интегральной форме получают следующие граничные условия:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},\ H_{1\tau} - H_{2\tau} - i_{\text{пов}},\ B_{1n} = B_{2n},\ D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}}. \quad (8.9)$$

При отсутствии на границе поверхностных токов $i_{\text{пов}} = 0$ тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей непрерывны, а при отсутствии на границе поверхностных зарядов $\sigma_{\text{пов}} = 0$ непрерывны нормальные составляющие векторов индукции электрического и магнитного полей.

При решении электростатических задач часто используют условия Дирихле, предполагающие постоянство скалярного потенциала на всей поверхности проводника, граничащей с диэлектрической средой, или условия Неймана, определяющие поверхностную плотность электростатического заряда $D_n = \varepsilon_{\text{эл}} E_n = \sigma_{\text{пов}}$ или нормальную составляющую вектора напряженности электрического поля на границе раздела диэлектрика с проводником. Скалярный потенциал на поверхности проводника всюду одинаков, так как токи проводимости, образующиеся при возникновении градиентов потенциала, выравнивают его.

8.7. Закон сохранения энергии для мгновенных значений времени и в комплексном виде

Энергия сторонних токов в данном пространстве может накапливаться полем, распространяться и преобразовываться в другие виды энергии.

Выделим в электромагнитном поле некоторый объем V, ограниченный поверхностью S, и составим уравнение баланса энергии в нем.

Для определения баланса мощностей дополним I уравнение Максвелла вектором $\overline{J}_{ст}$ плотности токов сторонних сил и скалярно умножим его на вектор $\overline{E}_{эл}$, а II уравнение умножим на вектор $\overline{H}_{эл}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{E}_{эл} &= -\frac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\overline{H}_{эл} &= \gamma_{эл}\overline{E}_{эл} + \frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} + \overline{J}_{ст} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\overline{H}_{эл}; \\ &\overline{E}_{эл}. \end{aligned}$$

Из второго произведения вычтем первое:

$$\overline{H}_{эл}\operatorname{rot}\overline{E}_{эл} - \overline{E}_{эл}\operatorname{rot}\overline{H}_{эл} = -\gamma_{эл}\overline{E}_{эл}\overline{E}_{эл} - \overline{E}_{эл}\frac{\partial \overline{D}_{эл}}{\partial t} - \overline{J}_{ст}\overline{E}_{эл} - \overline{H}_{эл}\frac{\partial \overline{B}_{эл}}{\partial t}.$$

Тогда с учетом векторного тождества

$$\operatorname{div}[\overline{E}_{эл} \times \overline{H}_{эл}] = \overline{H}_{эл}\operatorname{rot}\overline{E}_{эл} - \overline{E}_{эл}\operatorname{rot}\overline{H}_{эл} = \operatorname{div}\overline{\Pi}_{эл},$$

получим уравнение Пойнтинга в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов электромагнитного поля:

$$\operatorname{div}\overline{\Pi}_{эл} + \overline{J}_{ст}\overline{E}_{эл} + \gamma_{эл}E_{эл}^2 + \frac{1}{2}\mu_{эл}\frac{\partial H_{эл}^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon_{эл}\frac{\partial E_{эл}^2}{\partial t} = 0, \quad (8.10)$$

где $\overline{\Pi}_{эл} = [\overline{E}_{эл} \times \overline{H}_{эл}]$ — вектор Пойнтинга, представляющий поток мощности электромагнитного поля, проходящий через 1 м^2 поверхности; $\overline{J}_{ст}\overline{E}_{эл}$ — удельная мощность сторонних сил; $\gamma_{эл}E_{эл}^2$ — удельная тепловая мощность; $\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_{эл}\frac{H_{эл}^2}{2} + \varepsilon_{эл}\frac{E_{эл}^2}{2}\right)$ — суммарная удельная мощность, запасенная электрическим и магнитным полем.

Проинтегрируем уравнение Пойнтинга (8.10) по объему. Используя теорему Остроградского—Гаусса, получаем теорему Пойнтинга в интегральной форме для мгновенных значений векторов электромагнитного поля:

$$\oint_S \overline{\Pi}_{эл}\,d\overline{S} + \int_V \overline{J}_{ст}\overline{E}_{эл}\,dV + \int_V \gamma_{эл}E_{эл}^2\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\mu_{эл}\frac{H_{эл}^2}{2} + \varepsilon_{эл}\frac{E_{эл}^2}{2}\right)dV = 0,$$

где первый интеграл суммы — поток вектора плотности мощности электромагнитного поля через замкнутую поверхность S, охватывающую объем V; второй интеграл — мощность источника сторонних токов в объеме; третий интеграл — тепловая мощность в объеме; четвертый интеграл — мощность электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме.

Сумма мощностей источников сторонних токов, тепловых потерь, электрического и магнитного полей в объеме и мощности электромагнитного поля, проходящего через поверхность S объема V, равна нулю, что позволяет рассматривать теорему Пойнтинга в качестве уравнений баланса мгновенных мощностей в пространстве объема V, ограниченном поверхностью S.

Энергия поля внутри рассматриваемого объема может возрастать или убывать, а мощность излучения может быть направлена наружу или внутрь этого объема.

Рассмотрим баланс мгновенных мощностей в объеме, в котором расположены источник постоянного тока, сопротивление нагрузки и двухпроводная линия, соединяющая источник с нагрузкой. Баланс мгновенных мощностей по всему объему равен нулю, так как вся мощность источника идет на тепло в нагрузке и в двухпроводной линии. Излучение энергии в виде электромагнитных волн отсутствует, интеграл, определяющий поток удельной электромагнитной мощности через замкнутую поверхность всего объема, равен нулю.

Баланс мгновенных мощностей в части объема, включающей только отрезок двухпроводной линии, запишем в следующем виде:

$$\oint_S \overline{\Pi}_{\text{эл}} \mathrm{d}\overline{S} = -\int_V \gamma_{\text{эл}} E^2_{\text{эл}} \mathrm{d}V.$$

Баланс свидетельствует о том, что тепловые потери, возникающие в проводах двухпроводной линии при прохождении по ним токов проводимости, компенсируются за счет внешнего поступления в них потока мощности электромагнитного поля.

Для определения баланса комплексных, активных и реактивных мощностей в пространстве II уравнение Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля умножим скалярно на сопряженное значение комплексной амплитуды $\overline{\ddot{H}}_{\text{эл}}$ (с обратным знаком мнимой части $\overline{\dot{H}}_{\text{эл}}$), а I уравнение Максвелла для сопряженных комплексных амплитуд — на вектор $\overline{\dot{E}}_{\text{эл}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\overline{\dot{E}}_{\text{эл}} &= -j\omega\mu \overline{\dot{H}}_{\text{эл}} \\ \mathrm{rot}\,\overline{\ddot{H}}_{\text{эл}} &= \gamma_{\text{эл}} \overline{\ddot{E}}_{\text{эл}} - j\omega\varepsilon_{\text{эл}} \overline{\ddot{E}}_{\text{эл}} + \overline{\ddot{J}}_{\text{эл}} \end{aligned} \left| \begin{aligned} &\overline{\ddot{H}}_{\text{эл}}; \\ &\overline{\dot{E}}_{\text{эл}}. \end{aligned} \right.$$

Из первого произведения вычтем второе:

$$\dot{\overline{H}}_{эл}\,\mathrm{rot}\dot{\overline{E}}_{эл} - \dot{\overline{E}}_{эл}\,\mathrm{rot}\ddot{\overline{H}}_{эл} = -\gamma_{эл}\dot{\overline{E}}_{эл}\ddot{\overline{E}}_{эл} +$$
$$+ j\omega\varepsilon_{эл}\dot{\overline{E}}_{эл}\ddot{\overline{E}}_{эл} - \ddot{\overline{J}}_{ст}\dot{\overline{E}}_{эл} - j\omega\mu\dot{\overline{H}}_{эл}\ddot{\overline{H}}_{эл}.$$

С учетом векторного тождества

$$\mathrm{div}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}] = \ddot{\overline{H}}_{эл}\,\mathrm{rot}\dot{\overline{E}}_{эл} - \dot{\overline{E}}_{эл}\,\mathrm{rot}\ddot{\overline{H}}_{эл} = 2\mathrm{div}\tilde{\Pi}_{эл},$$

а также значений $\dot{\overline{E}}_{эл}\ddot{\overline{E}}_{эл} = \left|\dot{\overline{E}}_{эл}\right|^2 = E^2_{mэл}$, $\dot{\overline{H}}_{эл}\ddot{\overline{H}}_{эл} = \left|\dot{\overline{H}}_{эл}\right|^2 = H^2_{mэл}$

получим

$$\mathrm{div}\tilde{\Pi}_{эл} + \frac{1}{2}\gamma_{эл}E^2_{mэл} + \frac{1}{2}\ddot{\overline{J}}_{ст}\dot{\overline{E}}_{эл} + \frac{j\omega}{2}(\mu H^2_{mэл} - \varepsilon_{эл}E^2_{mэл}) = 0, \quad (8.11)$$

где $\tilde{\Pi}_{эл}$ — усредненный за период комплексный вектор Пойнтинга.

Уравнение (8.10) представляет теорему Пойнтинга в дифференциальной форме для комплексных амплитуд векторов поля. Каждое слагаемое в нем определяет величину удельной объемной мощности, усредненной за период волны в бесконечно малом объеме. В точке первое слагаемое определяет расходимость активной и реактивной мощностей, второе — мощности тепловых потерь, третье — активную и реактивную мощности источника, четвертое — изменение реактивной мощности.

Интегрируя уравнение (8.10) по объему V и воспользовавшись теоремой Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S \tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}\overline{S} + \int_V \frac{1}{2}\gamma_{эл}E^2_{mэл}\mathrm{d}V +$$

$$+ \int_V \frac{1}{2}\ddot{\overline{J}}_{ст}\dot{\overline{E}}_{эл}\mathrm{d}V + \int_V \frac{j\omega}{2}(\mu H^2_{mэл} - \varepsilon_{эл}E^2_{mэл})\,\mathrm{d}V = 0,$$

получаем теорему Пойнтинга в интегральной форме для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля.

Диэлектрическая $\varepsilon_{эл}$ и магнитная $\mu_{эл}$ проницаемости, удельная проводимость $\gamma_{пр}$, частота колебаний ω, а также $E^2_{mэл}$, $H^2_{mэл}$ являются вещественными величинами. Поэтому второй интеграл теоремы Пойнтинга представляет собой усредненную за период колебаний активную мощность тепловых потерь в объеме V, а четвертый интеграл — реактивную мощность, затраченную на изменение электрического и магнитного поля в нем. Первый и третий интегралы являются комплексными величинами.

Разделяя вещественные и мнимые части, запишем отдельно баланс активных и реактивных мощностей в пространстве объема V:

$$\oint\limits_S \mathrm{Re}\tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}\bar{S} + \int\limits_V \frac{1}{2}\gamma_{эл}E^2_{mэл}\mathrm{d}V + \int\limits_V \mathrm{Re}\frac{1}{2}\bar{\dot{J}}_{ст}\bar{\dot{E}}_{эл}\mathrm{d}V = 0;$$

$$\oint\limits_S \mathrm{Im}\tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}\bar{S} + \int\limits_V \mathrm{Im}\frac{1}{2}\bar{\dot{J}}_{ст}\bar{\dot{E}}_{эл}\mathrm{d}V + \int\limits_V \frac{\omega}{2}(\mu_{эл}H^2_{mэл} - \varepsilon_{эл}E^2_{mэл})\mathrm{d}V = 0.$$

Рассмотрим баланс мощностей в частных случаях.

1. В объеме V отсутствуют источники сторонних электрических токов. Уравнения баланса мощностей упрощаются:

$$\oint\limits_S \mathrm{Re}\tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}\bar{S} = -\int\limits_V \frac{1}{2}\gamma_{эл}E^2_{mэл}\mathrm{d}V;$$

$$\oint\limits_S \mathrm{Im}\tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}S = -\int\limits_V \frac{\omega}{2}(\mu_{эл}H^2_{mэл} - \varepsilon_{эл}E^2_{mэл})\mathrm{d}V.$$

В этом случае тепловые потери в объеме V компенсируются за счет притока через его внешнюю замкнутую поверхность S вещественной составляющей потока комплексного вектора Пойнтинга, а реактивная мощность, затрачиваемая на изменение электрического и магнитного полей, — за счет мнимой составляющей потока комплексного вектора Пойнтинга.

2. В объеме V отсутствуют источники сторонних электрических токов и тепловые потери (удельная проводимость $\gamma_{пр} = 0$), как, например, в идеальных конденсаторах, соленоидах, объемных резонаторах.

Все слагаемые баланса активных мощностей равны нулю, а слагаемые баланса реактивных мощностей выражаются формулой

$$\oint\limits_S \mathrm{Im}\tilde{\Pi}_{эл}\mathrm{d}\bar{S} = -\int\limits_V \frac{\omega}{2}(\mu_{эл}H^2_{mэл} - \varepsilon_{эл}E^2_{mэл})\mathrm{d}V.$$

Реактивная мощность, затрачиваемая на создание электромагнитного поля в этих устройствах, компенсируется за счет пульсации с удвоенной частотой мнимой составляющей потока комплексного вектора Пойнтинга, которая может иметь как емкостной характер в конденсаторах, так и индуктивный характер в соленоидах. В объемных резонаторах мнимая составляющая потока комплексного вектора Пойнтинга равна нулю, так как при резонансе удельные электрическая и магнитная мощности равны между собой. В объемном резонаторе, как и в любой резонансной структуре, для генерирования колебаний достаточно притока вещественной составляющей потока комплексного вектора Пойнтинга, необходимого для компенсации в них тепловых потерь.

3. При распространении плоских волн в воздухе, в вакууме, в средах без тепловых потерь удельные электрическая и магнитная мощности равны между собой: $\mu_{эл} H_{mэл}^2 = \varepsilon_{эл} E_{mэл}^2$, так как в плоских волнах всегда сохраняется соотношение между напряженностью магнитного и электрического полей: $E_{mэл}\sqrt{\hat{\varepsilon}_{эл}} = H_{mэл}\sqrt{\mu_{эл}}$. Поэтому баланс активных и реактивных мощностей равен нулю. Это говорит о том, что распространение электромагнитных волн в диэлектрических средах с удельной электрической проводимостью $\gamma_{пр} = 0$ происходит без затрат какой-либо энергии.

4. При распространении электромагнитных волн в проводящих средах, в которых токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости, так как $\varepsilon_{эл} \ll \gamma_{эл}/\omega$, т.е. в средах с тепловыми потерями, как следует из баланса мощностей в объеме без источников

$$\oint_S \mathrm{Re}\widetilde{\Pi}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} = -\int_V \frac{1}{2}\gamma_{эл} E_{mэл}^2 \mathrm{d}V; \quad \oint_S \mathrm{Im}\widetilde{\Pi}_{эл} \mathrm{d}\overline{S} \equiv -\int_V \frac{\omega}{2}\mu_{эл} H_{mэл}^2 \mathrm{d}V,$$

они затухают, отдавая часть активной энергии на нагрев проводников. Реактивная часть потока мощности индуктивного характера при этом идет на создание вихревого электромагнитного поля в нем.

По мере проникновения волны с поверхности внутрь проводящей среды она затухает и проявляется так называемый поверхностный эффект.

Пример. Произведем расчет двухпроводной линии постоянного тока. Дано: r_0 — радиус провода; $\gamma_{пр}$ — удельная электрическая проводимость провода; d — расстояние между проводами; I, $U_{вх}$ — ток и напряжение в двухпроводной линии.

Определить: напряженность электрического и магнитного полей внутри проводов и во внешней среде, параметры линии.

Решение. Электромагнитное поле внутри круглого провода радиусом r_0 с удельной электрической проводимостью $\gamma_{пр}$ и постоянным током I.

Решение выполним в цилиндрической системе координат r, φ, z с центром, совпадающим с центром провода.

Из закона Ома в дифференциальной форме $\overline{J}_{пр} = \gamma_{пр}\overline{E} = \gamma_{пр}E_z\overline{e}_z$ определяем вектор напряженности электрического поля $\overline{E}_1 = \dfrac{J_{пр}}{\gamma_{пр z}}\overline{e}_z$ или, представляя плотность тока проводимости через ток, $\overline{E}_1 = \dfrac{I}{\gamma_{пр}\pi r_0^2}\overline{e}_z$.

На основании I уравнения Максвелла в дифференциальной форме $\mathrm{rot}\overline{H} = \overline{j}_{пр} = j_{пр}\overline{e}_z$, приравнивая составляющие векторов по оси $0z$, для напряженности магнитного поля внутри провода при $r \le r_0$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi 1}) = j_{пр}.$$

Умножая левую и правую части уравнения на $r\partial r$ и интегрируя $\int r\partial r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi 1}) = \int j_{пр} r\partial r$, находим $rH_{\varphi 1} = j_{пр}\frac{r^2}{2}$ или $H_{\varphi 1} = j_{пр}\frac{r}{2} = \frac{Ir}{2\pi r_0^2}$.

Для напряженности магнитного поля провода во внешней диэлектрической среде при $r \ge r_0$ из I уравнения Максвелла получаем аналогичное дифференциальное уравнение с правой частью, равной нулю, так как в диэлектрической среде отсутствуют токи проводимости:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi 2}) = 0.$$

Производная равна нулю при условии $rH_{\varphi 2} = \mathrm{A}$. Постоянная А определяется из граничного условия непрерывности тангенциальных составляющих (в нашем случае H_φ) векторов напряженности магнитного поля при $r = r_0$ на поверхности провода $H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}$ как $\mathrm{A} = \frac{I}{2\pi}$. С учетом этого получим напряженность магнитного поля провода во внешней диэлектрической среде:

$$H_{\varphi 2} = \frac{I}{2\pi r}.$$

Вектор Пойнтинга внутри провода $\overline{\Pi}_{эл} = [\overline{E}_{эл} \times \overline{H}_{эл}]$, представляющий поток удельной активной мощности электромагнитного поля и проходящий через его боковую поверхность, направлен по радиусу к центру провода, а его величина пропорциональна радиусу:

$$\overline{\Pi}_{эл} = [\overline{E}_{эл} \times \overline{H}_{эл}] = [E_z\overline{e}_z \times H_{\varphi 1}\overline{e}_\varphi] = -E_{z1}H_{\varphi 1}\overline{e}_r = -\frac{I^2 r}{\gamma_{пр} 2\pi^2 r_0^4}\overline{e}_r.$$

Вся активная мощность электромагнитного поля, проникающая с боковой поверхности на расстояние $(r_0 - r)$ внутрь провода длиной l, пропорциональна квадрату радиуса:

$$P=\int_{S_{\text{бок}}}\overline{\Pi}\mathrm{d}\overline{S}=\Pi_r S_{\text{бок}}=\frac{I^2 r}{\gamma_{\text{пр}}2\pi^2 r_0^4}2\pi rl$$

и при $r=r_0$ на основании закона Джоуля—Ленца равна мощности тепловых потерь:

$$P=\frac{I^2}{\gamma_{\text{пр}}\pi r_0^2}l=I^2R,$$

где R — активное сопротивление провода.

Таким образом, поток активной мощности электромагнитного поля входит через боковую поверхность провода для обеспечения движения его свободных электронов при прохождении электрического тока, при котором часть энергии расходуется на тепло и повышение температуры провода.

Внутренняя индуктивность провода может быть определена через его внутреннюю энергию магнитного поля:

$$L_{\text{вн}}=\frac{2W_{\text{м}}}{I^2}=\frac{2}{I^2}\int_V w_{\text{м}}\mathrm{d}V=\frac{1}{I^2}\int_V \mu H_{\varphi 1}^2\mathrm{d}V=\frac{\mu}{4\pi^2 r_0^4}\int_V r^2\mathrm{d}V=$$

$$=\frac{\mu l}{4\pi^2 r_0^4}\int_0^{r_0} r^2 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu l}{8\pi}$$

или через поток сцепления:

$$L_{\text{вн}}=\frac{\Psi_{\text{м}}}{I}=\frac{\mu}{I}\int_S\frac{Ir}{2\pi r_0^2}\frac{\pi r^2}{\pi r_0^2}\mathrm{d}S=\frac{\mu l}{2\pi r_0^4}\int_0^{r_0} r^3\mathrm{d}r=\frac{\mu l}{8\pi}.$$

Внутренняя индуктивность цилиндрического провода на низких частотах не зависит от его радиуса.

Напряженность внешнего электрического поля двухпроводной линии определим через ее известное входное напряжение $U_{\text{вх}}$. Для этого воспользуемся III уравнением Максвелла в дифференциальной форме. С учетом симметричности провода и однородности поля вдоль него уравнение Максвелла в цилиндрической системе координат преобразуется к виду

$$\operatorname{div}\overline{D}_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_{r_2})+\frac{1}{r}\frac{\partial D_{\varphi 2}}{\partial\varphi}+\frac{\partial D_{z2}}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_{r2})=0.$$

Производная равна нулю, если $rD_{r2}=\mathrm{A}_1$, где A_1 — постоянная. Из этого равенства определяем напряженность электрического поля $E_{r2} = \dfrac{A_1}{\varepsilon_{\text{эл}2} r}$. Из выражения для разности потенциалов, создаваемой одним проводом:

$$U_{r_0} - U_{d-r_0} = -\frac{1}{2}U_{\text{вх}} = \int_{r_0}^{d-r_0} E_{r2}\mathrm{d}r = \frac{A_1}{\varepsilon_{\text{эл}2}} \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{A_1}{\varepsilon_{\text{эл}2}} \ln\frac{d-r_0}{r_0},$$

находим отношение $\dfrac{A}{\varepsilon_{\text{эл}2}} = \dfrac{U_{\text{вх}}}{2\ln\dfrac{d-r_0}{r_0}}$, а затем напряженность электрического поля во внешней среде от одного провода:

$$E_{r2} = \frac{U_{\text{вх}}}{2r\ln\dfrac{d-r_0}{r_0}}.$$

Результирующая напряженность электрического поля во внешней среде от двух проводов линии равна геометрической сумме их напряженностей с учетом противоположной направленности токов:

$$\overline{E}_2 = E_{r1}\overline{e}_{r1} - E_{r2}\overline{e}_{r2} = \frac{U_{\text{вх}}}{2\ln\dfrac{d-r_0}{r_0}}\left(\frac{1}{r_1}\overline{e}_{r1} - \frac{1}{r_2}\overline{e}_{r2}\right).$$

В промежутке между проводами (рис. 8.13) напряженность электрического поля во внешней среде усиливается при наложении полей от каждого провода, а по двум сторонам линии — взаимно ослабляется.

Результирующая напряженность магнитного поля двухпроводной линии во внешней среде также равна геометрической сумме напряженностей отдельных проводов:

$$\overline{H}_2 = H_{\varphi1}\overline{e}_{\varphi1} - H_{\varphi2}\overline{e}_{\varphi2} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1}\overline{e}_{\varphi1} - \frac{1}{r_2}\overline{e}_{\varphi2}\right).$$

Как и в случае электрического поля в промежутке между проводами (рис. 8.13) напряженность магнитного поля во внешней среде усиливается при наложении полей от каждого провода, а по двум сторонам линии — взаимно ослабляется.

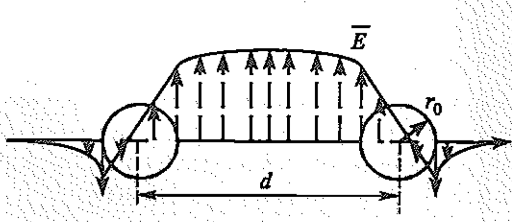


Рис. 8.13. Изменение напряженности электрического поля двухпроводной линии

Вектор Пойнтинга во внешней среде $\overline{\Pi}_{эл2} = [\overline{E}_{эл2} \times \overline{H}_{эл2}]$ после подстановки решений для векторов напряженности составит

$$\overline{\Pi}_{эл2} = \frac{U_{вх} I}{4\pi \ln \dfrac{d - r_0}{r_0}} \left[\left(\frac{1}{r_1} \overline{e}_{r1} - \frac{1}{r_2} \overline{e}_{r2} \right) \left(\frac{1}{r_1} \overline{e}_{\varphi 1} - \frac{1}{r_2} \overline{e}_{\varphi 2} \right) \right] =$$

$$= \frac{U_{вх} I}{4\pi \ln \dfrac{d - r_0}{r_0}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 \overline{e}_z.$$

Поток мощности во всех точках внешней среды распространяется вдоль двухпроводной линии в одном направлении от источника к нагрузке, несмотря на то, что токи в проводах идут в противоположных направлениях. В промежутке между проводами поток мощности максимален.

Из граничных условий (8.9) определим поверхностную плотность электрического заряда:

$$\sigma_{пов} = D_{r2} = \varepsilon_2 E_{r2} = \frac{\varepsilon_2 U_{вх}}{2r \ln \dfrac{d - r_0}{r_0}},$$

и, соответственно, линейную плотность электрического заряда:

$$\tau = \sigma_{пов} \frac{S}{l} = \frac{\varepsilon_2 U_{вх}}{2r \ln \dfrac{d - r_0}{r_0}} \frac{2\pi r l}{l} = \frac{\varepsilon_2 \pi U_{вх}}{\ln \dfrac{d - r_0}{r_0}}.$$

Затем определим емкость двухпроводной линии:

$$C = \frac{\tau l}{U_{вх}} = \frac{\varepsilon_2 \pi l}{\ln \dfrac{d - r_0}{r_0}};$$

внешнюю индуктивность двухпроводной линии:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2\mu l}{I} \int_{r_0}^{d - r_0} \frac{I \, dr}{2\pi r} = \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0};$$

и сопротивление утечки двухпроводной линии:

$$R_{ут} = \frac{U_{вх}}{I_{ут}} = \frac{U_{вх}}{\gamma_{пр2} E_{r2} l 2\pi r} = \frac{1}{\pi \gamma_{пр2} l} \ln \frac{d - r_0}{r_0}.$$

Результаты расчета двухпроводной линии постоянного тока могут быть использованы и для линии переменного тока низкой частоты при длине волны в воздухе много большей расстояния между проводами и проявлении слабого поверхностного эффекта.

Глава 9
ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

9.1. Особенности потенциальных полей

Электрические и магнитные поля подразделяют на вихревые и потенциальные. Основным признаком потенциальности поля в дифференциальной форме является равенство нулю ротора вектора напряженности поля, а в интегральной форме — циркуляции вектора по замкнутому контуру:

для электрического поля $\operatorname{rot}\overline{E}_{эл} = 0$ или $\oint\limits_L \overline{E}_{эл} \mathrm{d}\overline{l} = 0$,

для магнитного поля $\operatorname{rot}\overline{H}_{эл} = 0$ или $\oint\limits_L \overline{H}_{эл} \mathrm{d}\overline{l} = 0$.

Во всех остальных случаях, когда $\operatorname{rot}\overline{E}_{эл} \neq 0$ или $\operatorname{rot}\overline{H}_{эл} \neq 0$, поля являются вихревыми.

Векторы напряженности потенциальных полей могут быть определены через градиенты скалярных потенциалов:

$$\overline{E}_{эл} = -\operatorname{grad} U_{эл}; \quad \overline{H}_{эл} = -\operatorname{grad} U_{м}.$$

Разности скалярных потенциалов между двумя точками пространства — в виде определенных интегралов циркуляций векторов напряженности поля по любому контуру, соединяющему эти точки:

$$U_{эл1} - U_{эл2} = \int\limits_{l_1}^{l_2} \overline{E}_{эл} \mathrm{d}\overline{l}; \quad U_{м1} - U_{м2} = \int\limits_{l_1}^{l_2} \overline{H}_{эл} \mathrm{d}\overline{l}.$$

Электрический скалярный потенциал $U_{эл}$ определяется в вольтах, а магнитный скалярный потенциал $U_{м}$ — в амперах.

Из I и II уравнений Максвелла и основных законов электромагнитного поля следует, что к потенциальным полям относятся:

электростатические (магнитостатические) поля, свойства которых определяют законы Кулона, теорема Гаусса и закон сохранения заряда;

электрические поля постоянного тока в проводниках, свойства которых определяют законы Кирхгофа, Ома, Джоуля—Ленца;

магнитные поля постоянного тока в области, где токи проводимости равны нулю; их свойства определяют законы Ампера, Био—Савара, Ома и обобщенный закон полного тока.

Источниками потенциальных полей в случае электростатических (магнитостатических) полей являются заряды $\mathrm{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл}$ или $\oint_S \overline{D}_{эл}\mathrm{d}\overline{S} = q_{эл}$, в остальных случаях — постоянные токи проводимости $\mathrm{div}\overline{J}_{эл} = 0$, $I_{эл} = \int_S \overline{J}_{эл}\mathrm{d}\overline{S}$.

Векторные силовые линии напряженности электростатических (магнитостатических) полей начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах, векторные линии электрического ($\mathrm{div}\overline{J}_{эл} = 0$) и магнитного полей ($\mathrm{div}\overline{B}_{эл} = 0$) постоянного тока всегда замкнуты, не имеют ни начала, ни конца.

Система интегральных и дифференциальных уравнений для потенциальных полей может быть получена из уравнений Максвелла, принимая в них производные от индукции по времени равными нулю:

для электростатических (магнитостатических) полей

$$\oint_L \overline{E}_{эл}\mathrm{d}\overline{l} = 0;\ \mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = 0;\ \overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл};$$

$$\oint_S D_{эл}\mathrm{d}\overline{S} = q_{эл};\ \mathrm{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл};\ \mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,U_{эл} = -\rho_{эл};\ \nabla^2 U_{эл} = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon_{эл}},$$

для электрического поля постоянного тока в проводящих средах

$$\oint_L \overline{E}_{эл}\mathrm{d}\overline{l} = 0;\ \mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = 0;\ \overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл};$$

$$I_{эл} = \int_S \overline{J}_{эл}\mathrm{d}\overline{S};\ \mathrm{div}\overline{J}_{эл} = 0;\ \mathrm{div}\,\gamma\,\mathrm{grad}\,U_{эл} = 0;\ \nabla^2 U_{эл} = 0,$$

для магнитного поля постоянного тока

$$\oint_L \overline{H}_{эл}\mathrm{d}\overline{l} = 0;\ \mathrm{rot}\overline{H}_{эл} = 0;\ \overline{H}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{м};$$

$$\int_S \overline{B}_{эл}\mathrm{d}\overline{S} = 0;\ \mathrm{div}\overline{B}_{эл} = 0;\ \mathrm{div}\,\mu\,\mathrm{grad}\,U_{эл} = 0;\ \nabla^2 U_{м} = 0.$$

Потенциалы $U_{эл}$, $U_{м}$ удовлетворяют скалярным уравнениям Пуассона и Лапласа. Эта их особенность и послужила основной причиной разделения полей на потенциальные и вихревые.

Вихревые поля требуют решения векторных уравнений с использованием векторных потенциалов или непосредственного определения из уравнений Максвелла.

Потенциальные поля — трехмерные поля с пространственным распределением внутри рассматриваемой среды. Удельные объемные плотности энергии электростатического поля и магнитного поля постоянного тока на основании выражения (8.10) равны $\varepsilon_{эл}\dfrac{E_{эл}^2}{2}$, $\mu_{эл}\dfrac{H_{эл}^2}{2}$, а удельная тепловая мощность электрических потерь — $\gamma_{эл}E_{эл}^2$.

Вся энергия электростатического поля и магнитного поля постоянного тока W и вся мощность тепловых электрических потерь P, сосредоточенные в пространстве V, равны объемным интегралам:

$$W=\int_V\left(\mu_{эл}\frac{H_{эл}^2}{2}+\varepsilon_{эл}\frac{E_{эл}^2}{2}\right)\mathrm{d}V \quad \text{и} \quad P=\int_V\gamma_{эл}E_{эл}^2\mathrm{d}V.$$

Расчет энергии и мощности в электрических цепях производят, используя напряжения, токи, сопротивления. Это возможно, так как любой объем V можно представить в виде суммы бесконечно малых объемов $\mathrm{d}V=\mathrm{d}\bar{S}\mathrm{d}\bar{l}$ с взаимно перпендикулярными единичными векторами $\mathrm{d}\bar{S}\perp\mathrm{d}\bar{l}$ и с векторами напряженности электрического или магнитного поля, параллельными $\mathrm{d}\bar{S}$. Тогда $W_{эл}, W_{м}$ и P равны суммарной энергии и мощности сопротивлений, емкости и индуктивности электрической цепи, расположенных в объеме V:

$$W_{эл}=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_{эл}E_{эл}^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_{эл}\bar{E}_{эл}\bar{E}_{эл}\mathrm{d}\bar{S}\mathrm{d}\bar{l}=\frac{1}{2}\int_V\bar{D}_{эл}\mathrm{d}\overline{S E}_{эл}\mathrm{d}l=$$

$$=\frac{1}{2}\int_V\mathrm{d}q_{эл}\mathrm{d}U_{эл}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}C_iU_i^2;$$

$$W_{м}\frac{1}{2}\int_V\mu_{эл}H_{эл}^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\mu_{эл}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}l}H_{эл}^2\mathrm{d}l^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_{мi}}I_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}L_iI_i^2;$$

$$P=\int_V\gamma_{эл}E_{эл}^2\mathrm{d}V=\int_V\gamma_{эл}\bar{E}_{эл}\bar{E}_{эл}\mathrm{d}\bar{S}\mathrm{d}\bar{l}=\int_V\bar{J}_{эл}\mathrm{d}\overline{S E}_{эл}\mathrm{d}l=$$

$$=\int_V(\bar{J}_{эл}\mathrm{d}\bar{S})^2\frac{\bar{E}_{эл}\mathrm{d}\bar{l}}{\bar{J}_{эл}\mathrm{d}\bar{S}}=\sum_{i=1}^{n}R_iI_i^2.$$

Потенциальные поля — силовые поля, поэтому широко используются на практике, в частности, в системах ориентации и стабилизации для подвеса шарового ротора гироскопа, в электронно-лучевых трубках для ускорения и отклонения электронного пучка.

Суммарная сила, действующая на движущийся заряд в электромагнитном поле, определяется силой Лоренца:

$$\overline{F} = q_{эл}(\overline{E}_{эл} + [\overline{v} \times \overline{B}]).$$

В лучевой трубке электрон за счет электрического поля $\overline{E}_{эл}$, созданного высоким напряжением между катодом и анодом (экраном), испытывает электрическое силовое воздействие по оси трубки и приобретает скорость, а под действием магнитного поля отклоняется в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Аналогичное явление в магнитостатике используется для подъема металлических предметов с помощью постоянных магнитов.

Расчет потенциальных полей заключается в нахождении из общих дифференциальных уравнений для данного поля одной из величин как функции координат.

Задачи делятся на прямые и обратные. В прямых задачах по известному распределению источников поля определяется структура поля. При этом должны быть заданы:

для электрического поля в диэлектрической среде — распределение зарядов или потенциалов, для электрического поля в проводящей среде — ток или разность потенциалов;

для магнитного поля — распределение токов или разность магнитных скалярных потенциалов.

Обратные задачи сводятся к нахождению закона распределения зарядов или токов по заданному распределению напряженности полей или потенциалов.

В каждой конкретной задаче должны быть также заданы взаимное расположение сред и их свойства.

Система координат для каждой задачи должна выбираться так, чтобы координатные поверхности совпадали с граничными поверхностями задачи или были ближе всего к ним. Исходными уравнениями для расчета полей являются: для однородных сред — уравнение Лапласа или Пуассона, для неоднородных — уравнения Максвелла.

При геометрическом подобии граничных поверхностей и аналогичном распределении потенциалов на них решения уравнения Лапласа для различного вида полей будут также подобны и ответ одной задачи может быть получен из ответа аналогичной задачи в другом виде поля.

9.2. Математическая аналогия дифференциальных уравнений различных потенциальных полей и их моделирование

«Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к различным областям явлений» [22].

Математическую аналогию дифференциальных уравнений и ее применение к некоторым задачам расчета полевых характеристик и параметров электромагнитных устройств рассмотрим на примере трех потенциальных полей: электростатического (магнитостатического) поля в диэлектрике (магнетике) при отсутствии в нем электрических (магнитных) зарядов, электрического поля постоянного тока в проводящей среде при отсутствии в ней источников ЭДС и магнитного поля постоянного тока в магнетике при отсутствии в нем токов проводимости (табл. 9.1).

Таблица 9.1

№ п/п	Электростатическое поле	Электрическое поле постоянного тока	Магнитное поле постоянного тока
	Аналогичные дифференциальные уравнения		
1	$\mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = 0,\ \overline{E}_{эл}$	$\mathrm{rot}\overline{E}_{эл} = 0,\ \overline{E}_{эл}$	$\mathrm{rot}\overline{H}_{эл} = 0,\ \overline{H}_{эл}$
2	$\mathrm{div}\overline{D}_{эл} = 0,\ \overline{D}_{эл}$	$\mathrm{div}\overline{J}_{эл} = 0,\ \overline{J}_{эл}$	$\mathrm{div}\overline{B}_{эл} = 0,\ \overline{B}_{эл}$
3	$\overline{D}_{эл} = \varepsilon_{эл}\overline{E}_{эл},\ \varepsilon_{эл}$	$\overline{J}_{пр} = \gamma_{пр}\overline{E}_{эл},\ \gamma_{пр}$	$\overline{B}_{эл} = \mu_{эл}\overline{H}_{эл},\ \mu_{эл}$
4	$\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл},\ U_{эл}$	$\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл},\ U_{эл}$	$\overline{H}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{м},\ U_{м}$
5	$\nabla^2 U_{эл} = 0$	$\nabla^2 U_{эл} = 0$	$\nabla^2 U_{м} = 0$
	Граничные условия		
6	$D_{1n} = D_{2n},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$J_{1n} = J_{2n},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$B_{1n} = B_{2n},$ $H_{1\tau} = H_{2\tau}$
	Интегральные аналогичные величины		
7	$\oint_S \overline{D}_{эл} d\overline{S} = q_{эл},$ $\psi_D = \int_S \overline{D}_{эл} d\overline{S},$ $q_{эл},\ \psi_D$	$I_{эл} = \int_S J_{пр} d\overline{S},$ $I_{эл}$	$\psi_B = \int_S \overline{B}_{эл} d\overline{S},$ ψ_B

Окончание табл. 9.1

№ п/п	Электростатическое поле	Электрическое поле постоянного тока	Магнитное поле постоянного тока
8	$C=\dfrac{q_{эл}}{U_{эл1}-U_{эл2}}$, C	$\dfrac{1}{R}=\dfrac{I_{эл}}{U_{эл1}-U_{эл2}}$, $\dfrac{1}{R}$	$L=\dfrac{\Psi_B}{U_{м1}-U_{м2}}$, L
		Поле диполей	
9	$U_{эл}=\dfrac{q_{эл}l}{4\pi\varepsilon_{эл}}\dfrac{\cos\vartheta}{r^2}$, $\overline{E}_{эл}=\dfrac{q_{эл}l}{4\pi\varepsilon_{эл}r^3}\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$	$U_{эл}=\dfrac{Il}{4\pi\gamma_{эл}}\dfrac{\cos\vartheta}{r^2}$, $\overline{E}_{эл}=\dfrac{Il}{4\pi\gamma_{эл}r^3}\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$	$U_{эл}=\dfrac{P_м}{4\pi\mu_{эл}}\dfrac{\cos\vartheta}{r^2}$, $\overline{E}_{эл}=\dfrac{P_м}{4\pi\mu_{эл}r^3}\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$
		Сфера в однородном поле	
10	$U_{эл1}=-\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0r\cos\vartheta$, $\overline{E}_{эл1}=\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$, $U_{эл2}=-E_0r\cos\vartheta+$ $+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2r_0^3}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2r^2}E_0\cos\vartheta$, $\overline{E}_2=E_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)+$ $+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2r_0^3}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2r^3}E_0\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$	$U_{эл1}=-\dfrac{3\gamma_2}{\gamma_1+2\gamma_2}\times$ $\times E_0r\cos\vartheta$, $\overline{E}_{эл1}=\dfrac{3\gamma_2}{\gamma_1+2\gamma_2}E_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$, $U_{эл2}=-E_0r\cos\vartheta+$ $+\dfrac{\gamma_1-\gamma_2r_0^3}{\gamma_1+2\gamma_2r^2}E_0\cos\vartheta$, $\overline{E}_2=E_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)+$ $+\dfrac{\gamma_1-\gamma_2r_0^3}{\gamma_1+2\gamma_2r^3}E_0\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$	$U_{м1}=-\dfrac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\times$ $\times H_0r\cos\vartheta$, $\overline{H}_1=\dfrac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}H_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$, $U_{м2}=-H_0r\cos\vartheta+$ $+\dfrac{\mu_1-\mu_2r_0^3}{\mu_1+2\mu_2r^2}H_0\cos\vartheta$, $\overline{H}_2=H_0\times$ $\times(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)+$ $+\dfrac{\mu_1-\mu_2r_0^3}{\mu_1+2\mu_2r^3}E_0\times$ $\times(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$

В строках 1...4 табл. 9.1 приведены аналогичные дифференциальные уравнения и соответствующие им аналогичные векторы и параметры сред, в строках 5 и 6 — уравнения Лапласа для скалярных потенциалов и подобные граничные условия для векторов индукции и напряженности поля, в строке 7— аналогичные элементы конструкций (емкость, проводимость, индуктивность),

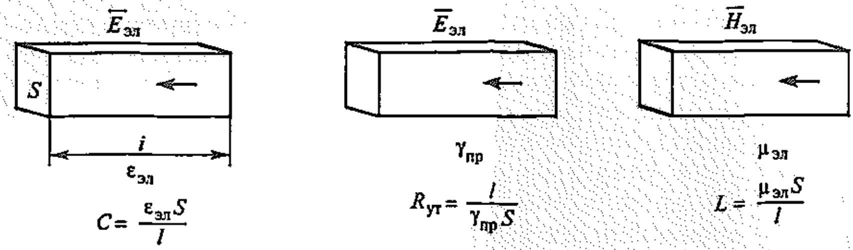


Рис. 9.1. Аналогичные параметры прямоугольных проводов

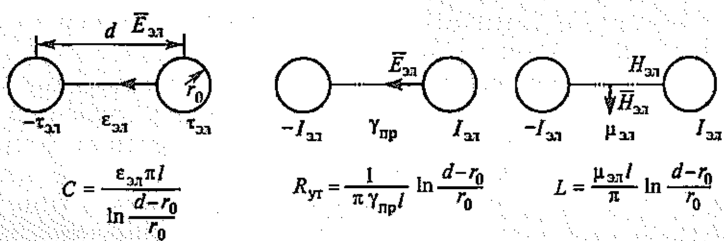


Рис. 9.2. Параметры двухпроводной линии

в строках 8 и 9 — аналогичные поля диполей и сферы во внешнем однородном поле.

На рис. 9.1 приведены параметры аналогичных конструкций (прямоугольников) при одинаковой направленности подобных векторов, а на рис. 9.2 — при взаимной перпендикулярности $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$ для двухпроводной линии.

Математическая аналогия дифференциальных уравнений различных потенциальных полей позволяет проводить их моделирование как физическое с использованием, например, метода электромоделирования в электролитических ваннах или с помощью проводящей бумаги, так и математическое с использованием вычислительной техники.

Математическая аналогия дифференциальных уравнений потенциальных полей распространяется и на потенциальные гравитационные, тепловые, нуклонные и другие поля разных взаимодействий [16].

9.3. Методы решения уравнений Пуассона и Лапласа

Существуют аналитические, численные и графический методы решения уравнения Лапласа [17]. К аналитическим относятся метод разделения переменных, метод зеркальных изображений и метод конформных преобразований.

Условия, при выполнении которых решение уравнения, полученное каким-либо методом, можно считать единственным, определяются теоремой единственности. Она формулируется так: «Из множества функций, являющихся решениями уравнения Лапласа, существует только одна, удовлетворяющая граничным условиям, т.е. если каким-то путем удалось найти решение граничной задачи, то оно и только оно является искомым решением».

Из теоремы единственности следует также, что если две функции, представляющие собой решения уравнения Лапласа, совпадают на поверхности S, ограничивающей объем V, то они совпадают во всем объеме V.

Рассмотрим аналитические методы решения уравнений Лапласа на конкретных примерах.

Метод разделения переменных. Метод применяется для решения уравнения Лапласа, когда искомая функция зависит от нескольких переменных. Он состоит в представлении решения уравнения Лапласа в виде суммы произведений функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных. При этом одно уравнение Лапласа в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, число которых равно числу независимых переменных. Известны общие решения скалярного уравнения Лапласа [23], полученные методом разделения переменных для потенциальных полей в разных системах координат (табл. 9.2).

Здесь $I_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})$, $K_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})$ — модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода; $P_n^m(\cos\vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Постоянные интегрирования, входящие в решения уравнений, определяются так, чтобы решение исходного уравнения удовлетворяло заданным граничным условиям.

Сущность метода разделения переменных рассмотрим на примере определения магнитного поля полой стальной сферической оболочки, расположенной в однородном магнитном поле (рис. 9.3).

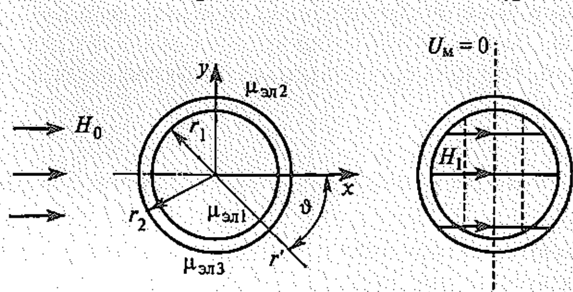


Рис. 9.3. Сфера в однородном поле

Таблица 9.2

Система координат	Решения уравнения Лапласа
Прямоугольная $(x,\ y,\ z)$	$(Ae^{-jk_z z} + Be^{jk_z z})e^{-i(k_x x + k_y y)}$
Круговая цилиндрическая (r, φ, z)	$\sum_m (A_m I_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})\, e^{-ik_z z} + B_m K_m(r\sqrt{k_z^2 - k2})\, e^{-ik_z z})e^{jm\varphi}$
Сферическая (r, ϑ, φ)	$\sum_{n,m} (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$

Полую стальную сферическую оболочку с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами поместим во внешнее однородное магнитное поле с напряженностью $\overline{H}_0$, например в поле Земли.

В этом случае скалярный потенциал магнитного поля внутри и в стенке оболочки, а также во внешней среде удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферической системе координат с учетом независимости потенциала от угла из-за симметрии системы $\dfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2 U_м}{\partial\varphi^2} = 0$ состоит из двух слагаемых:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_м}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U_м}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Предполагаемое решение представляем в виде произведения двух функций $U_м = X(\vartheta)Y(r)$, каждая из которых зависит только от одной координаты ϑ или r. Подставив его в уравнение Лапласа, получаем

$$\frac{X(\vartheta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Y(r)}{\partial r}\right) + \frac{Y(r)}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial X(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Разделим равенство на предполагаемое решение $X(\vartheta)Y(r)$:

$$\frac{1}{Y(r)r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Y(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{X(\vartheta)r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial X(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

В результате деления получаем уравнение из двух равных независимых слагаемых. Одно слагаемое зависит только от координаты r, а другое — от координаты ϑ. Это уравнение можно представить в виде двух равенств:

$$\frac{1}{Y(r)r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Y(r)}{\partial r}\right) = \lambda;\quad \frac{1}{X(\vartheta)r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial X(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) = -\lambda,$$

где λ — постоянная величина.

Первое равенство представляет собой уравнение Эйлера, решением которого является сумма $Y(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$, где A_n, B_n — постоянные величины, $n = 0, 1, 2, 3...$

Подставив это решение в уравнение Эйлера, после дифференцирования по r определяем $\lambda = n\,(n+1)$.

Второе равенство при $\lambda = n(n+1)$ представляет собой уравнение Лежандра [24], решением которого служит полином Лежандра от аргумента $\cos \upsilon$, т.е. $X(\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$.

Общее решение для скалярного потенциала магнитного поля представляется в виде бесконечной суммы:

$$U_{\text{м}} = X(\vartheta)Y(r) = \sum_{n}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\vartheta).$$

Из бесчисленного множества решений уравнения Лапласа путем последовательного изменения значения $n = 0, 1, 2$ ... находим истинное решение для данной исследуемой задачи, удовлетворяющее ее граничным условиям: равенству нормальных составляющих вектора магнитной индукции и равенству тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля.

При $n = 0$ решение $U_0 = A_0 r^0 + B_0 r^{-1}$ не удовлетворяет исследуемой задаче, так как при $r = 0$ внутри сферы скалярный потенциал стремится к бесконечности, при $n = 2, 3...$ полином Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$ не обеспечивает граничные условия.

Истинным решением является слагаемое при $n = 1$:

$$U_{\text{м}} = (Ar + Br^{-2})P_1(\cos\vartheta) = (Ar + Br^{-2})\cos\vartheta.$$

Только оно, как будет показано в дальнейшем, удовлетворяет граничным условиям.

Нормируем скалярный потенциал магнитного поля, принимая в центре сферы его нулевое значение. Тогда для трех областей можно принять скалярный потенциал:

внутри сферы $U_{\text{м}1} = A_1 r\cos\vartheta$;

в оболочке сферы $U_{\text{м}2} = (A_2 r + B_2 r^{-2})\cos\vartheta$;

во внешней среде $U_{\text{м}3} = (A_3 r + B_3 r^{-2})\cos\vartheta$.

Соответственно для вектора напряженности магнитного поля в сферической системе координат

$$\overline{H} = -\operatorname{grad} U_{\text{м}} = -\frac{\partial U_{\text{м}}}{\partial r}\overline{\text{e}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\text{м}}}{\partial\vartheta}\overline{\text{e}}_\vartheta$$

находим:

внутри сферы

$$\overline{H}_1 = A_1(-\cos\vartheta\overline{\text{e}}_r + \sin\vartheta\overline{\text{e}}_\vartheta);$$

в оболочке сферы

$$\overline{H}_2 = (-A_2 + 2B_2 r^{-3})\cos\vartheta \bar{e}_r + (A_2 + B_2 r^{-3})\sin\vartheta \bar{e}_\vartheta;$$

во внешней среде

$$\overline{H}_3 = (-A_3 + 2B_3 r^{-3})\cos\vartheta \bar{e}_r + (A_3 + B_3 r^{-3})\sin\vartheta \bar{e}_\vartheta.$$

На внутренней и внешней поверхностях сферы должны выполняться следующие граничные условия.

Равенство нормальных составляющих вектора магнитной индукции, в данной задаче — равенство радиальных составляющих при $r = r_1$ $-\mu_1 A_1 = \mu_2(-A_2 + 2B_2 r_1^{-3})$ и при $r = r_2$ $\mu_2(-A_2 + 2B_2 r_2^{-3}) = \mu_3(-A_3 + 2B_3 r_2^{-3})$;

равенство тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля, в данной задаче — равенство касательных (по координате ϑ) составляющих при $r = r_1$ $A_1 = A_2 + 2B_2 r_1^{-3}$ и при $r = r_2$ $A_2 + 2B_2 r_2^{-3} = A_3 + 2B_3 r_2^{-3}$.

Решая систему равенств относительно A_3, находим постоянные:

$$A_1 = \frac{9\mu_2\mu_3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} A_3;$$

$$A_2 = \frac{3(\mu_1 + 2\mu_2)\mu_3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} A_3;$$

$$B_2 = \frac{3(\mu_1 - \mu_2)\mu_3 r_1^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} A_3;$$

$$B_3 = \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 - \mu_3)r_2^3 + (\mu_1 - \mu_2)(2\mu_2 + \mu_3)r_1^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} A_3.$$

Постоянная A_3 определяется из условия отсутствия влияния сферы на внешнее однородное магнитное поле на бесконечности, т.е. при r, стремящемся к бесконечности, напряженность магнитного поля во внешней среде равна напряженности магнитного поля $\overline{H}_0$:

$$\overline{H}_3 = -A_3\cos\vartheta \bar{e}_r + A_3 \sin\vartheta \bar{e}_\vartheta = \overline{H}_0 = H_0 \bar{e}_x,$$

поэтому $A_3 = -H_0$.

С учетом найденных постоянных определим скалярные потенциалы и векторы напряженности магнитного поля в средах:

внутри сферы

$$U_{м1} = -\frac{9\mu_2\mu_3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} H_0 r\cos\vartheta;$$

$$\overline{H}_1 = \frac{9\mu_2\mu_3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} H_0(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta);$$

в оболочке сферы

$$U_{м2} = -\frac{3\mu_3\left[(\mu_1+2\mu_2)r-(\mu_1-\mu_2)\frac{r_1^3}{r^2}\right]}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} H_0\cos\vartheta,$$

$$\overline{H}_2 = -\frac{3\mu_3\left\{\left[\mu_1+2\mu_2+2(\mu_1-\mu_2)\frac{r_1^3}{r^3}\right]\cos\vartheta\overline{e}_r\right.}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} -$$

$$-\frac{\left.\left[\mu1+2\mu2-(\mu1-\mu2)\frac{r_1^3}{r^3}\right]\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta\right\}}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} H_0;$$

во внешней среде

$$U_{м3} = -H_0 r\cos\vartheta +$$

$$+\frac{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2-\mu_3)r_2^3+(\mu_1-\mu_2)(2\mu_2+\mu_3)r_1^3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} H_0 r^{-2}\cos\vartheta;$$

$$\overline{H}_3 = H_0(\cos\vartheta\overline{e}_r-\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)+$$

$$+\frac{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2-\mu_3)r_2^3+(\mu_1-\mu_2)(2\mu_2+\mu_3)r_1^3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2-\mu_3)+\frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)}\times$$

$$\times H_0 r^{-3}(2\cos\vartheta \bar{e}_r + \sin\vartheta \bar{e}_\vartheta).$$

Внутри сферы магнитное поле однородно. Вектор напряженности $\overline{H}_1$ параллелен вектору напряженности внешнего магнитного поля $\overline{H}_0$ (см. рис. 9.3):

$$\overline{H}_1 = \frac{9\mu_2\mu_3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)}\overline{H}_0.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Стальная сплошная сфера лежит на грунте в море, т.е. $\mu_1 = \mu_2 >> \mu_0$, $\mu_3 = \mu_0$, $r_1 = r_2 = r_0$:

$$\overline{H}_1 = \frac{3\mu_3}{\mu_2 + 2\mu_3}\overline{H}_0 \cong \frac{3\mu_0}{\mu_2}\overline{H}_0.$$

Напряженность магнитного поля внутри сферы меньше напряженности внешнего магнитного поля. В этом случае происходит размагничивание металлической сферы. Так, при $\mu_2 = 300\mu_0$ $\overline{H}_1 \cong 0{,}01\overline{H}_0$.

2. Стальная полая тонкостенная сфера находится в воздухе, т.е. $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0, \mu_2 >> \mu_0, r_1 \approx r_2$:

$$\overline{H}_1 = \frac{9\mu_2\mu_0}{(\mu_0 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_0) + \frac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_0 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_0)}\overline{H}_0 \cong$$

$$\cong \frac{9\mu_0}{\left(2 - \frac{r_1^3}{r_2^3}\right)\mu_2}\overline{H}_0 = \frac{9\mu_0}{\mu_2}\overline{H}_0.$$

И в этом случае происходит ослабление внешнего постоянного магнитного поля внутри полой металлической сферы.

Поэтому подобные замкнутые конструкции, оболочки (сферические, цилиндрические, прямоугольные и др.) применяются в качестве экранов внешнего постоянного магнитного поля. В них размещают те устройства, на которые внешнее поле оказывает нежелательное воздействие.

Для практики представляет определенный интерес сравнение магнитных моментов двух вариантов конструкций металлических сферических оболочек.

1. При полой оболочке ($\mu_2 >> \mu_1, \mu_3 = \mu_1 = \mu_0$):

$$P_м = 4\pi \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 - \mu_3)r_2^3 + (\mu_1 - \mu_2)(2\mu_2 + \mu_3)r_1^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} H_0 \cong$$

$$\cong 4\pi \frac{2(r_2^3 - r_1^3)r_2^3}{4r_2^3 - r_1^3} H_0.$$

2. При сплошной оболочке ($\mu_1 >> \mu_0, \mu_3 = \mu_2 = \mu_0$):

$$P_м = 4\pi \frac{(\mu_1 - \mu_2)r_1^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)} H_0 \cong 4\pi r_1^3 H_0.$$

Сплошная металлическая магнитная сфера обладает бóльшим магнитным моментом по сравнению с тонкой металлической оболочкой.

Магнитные экраны, используемые для защиты электротехнических устройств от влияния посторонних магнитных полей, выполняют из материала с высокой магнитной проницаемостью.

Расчет цилиндрического экрана, ось которого перпендикулярна направлению однородного внешнего поля, проведенный методом разделения переменных, показывает, что в полости экрана поле также однородно, но слабее, чем в сферическом экране, в 1,5 раза.

Экран характеризуется коэффициентом экранирования K, равным отношению напряженности поля в полости экрана к напряженности внешнего поля:

$$K = \frac{9\mu_2\mu_3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)}.$$

За счет сферической оболочки во внешнем поле кроме параллельной вектору $\overline{H}_0$ возникает перпендикулярная ему составляющая, равная для металлической оболочки:

$$H_3^{\perp} = -\frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 - \mu_3)r_2^3 + (\mu_1 - \mu_2)(2\mu_2 + \mu_3)r_1^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_3) + \dfrac{r_1^3}{r_2^3}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} \times$$

$$\times H_0 r^{-3} 3\cos\vartheta \sin\vartheta \bar{e}_y.$$

При перемещении магнитометра вдоль $\overline{H}_0$ его показания над сферой при $\vartheta = -\pi/2$, зависящие от вектора $\overline{H}_3^{\perp}$, изменяются на противоположные. Эта особенность поля используется при поиске затонувших кораблей, мин.

Метод зеркальных изображений. Метод основан на теореме единственности решения уравнения Лапласа и применяется для расчета электрических и магнитных полей, в которых заряды или токи расположены вблизи поверхностей раздела нескольких сред. Подобные задачи являются сложными краевыми задачами расчета поля в неоднородной среде.

Метод зеркальных изображений состоит в том, что путем введения фиктивных зарядов или токов сложную задачу сводят к ряду простых, имеющих те же граничные условия. Расположение и величину фиктивных зарядов или токов определяют при сохранении граничных условий. При этом каждая из простых задач представляет собой расчет поля в однородной среде.

Этот метод применяется для расчета как электрического, так и магнитного полей. При расчетах электрического поля проводов с зарядами или магнитного поля проводов с токами между результатами сохраняется обратное соответствие величин. Так, расчет электрического поля точечного заряда $q_{эл}$, расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{эл1}$ на высоте h от границы раздела с нижней средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{эл2}$, сводится к двум простым задачам (рис. 9.4).

Для расчета поля в верхней среде все пространство заполняется однородной средой с $\varepsilon_{эл1}$ и зеркально на расстоянии h от границы раздела в нижней среде размещается фиктивный точечный заряд $q'_{эл}$. Рассматривается электрическое поле в верхней среде от двух точечных зарядов $q_{эл}$ и $q'_{эл}$ в однородной среде с $\varepsilon_{эл1}$. Заряд $q'_{эл}$, расположенный симметрично относительно поверхности раздела сред заданному заряду $q_{эл}$, называется его зеркальным изображением.

Для расчета поля в нижней среде все пространство заполняется однородной средой с $\varepsilon_{эл2}$ и в точке расположения заданного

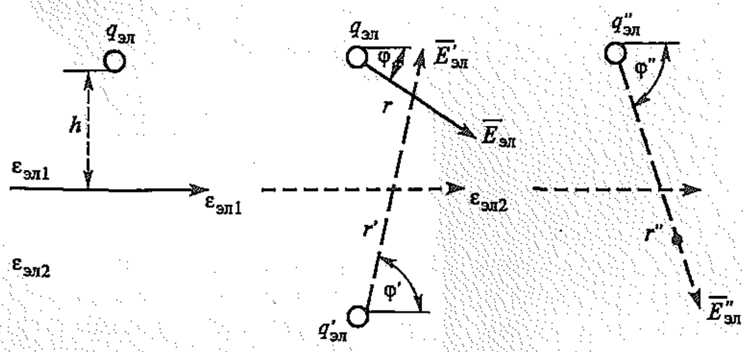


Рис. 9.4. Метод зеркальных изображений

заряда размещается фиктивный точечный заряд $q''_{эл}$. Рассматривается электрическое поле в нижней среде от одного точечного заряда в однородной среде с $\varepsilon_{эл2}$.

На основании закона Кулона векторы напряженности электрического поля точечных зарядов равны:

$$\overline{E}_{эл}=\frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r^2}\overline{e}_r;\ \overline{E}'_{эл}=\frac{q'_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r'^2}\overline{e}_{r'};\ \overline{E}''_{эл}=\frac{q''_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл2}r''^2}\overline{e}_{r''}.$$

В верхней среде вектор напряженности электрического поля равен геометрической сумме двух векторов заданного заряда $q_{эл}$ и зеркального фиктивного заряда $q'_{эл}$ (или двух волн — прямой и отраженной от границы):

$$\overline{E}_{эл1}=\overline{E}_{эл}+\overline{E}'_{эл}=\frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r^2}\overline{e}_r+\frac{q'_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r'^2}\overline{e}_{r'},$$

а в нижней среде — вектору напряженности фиктивного заряда $q''_{эл}$:

$$\overline{E}_{эл2}=\overline{E}''_{эл}=\frac{q''_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл2}r''^2}\overline{e}_{r''}.$$

Из граничных условий выражения (8.9) при $r=r'=r''$ и $\varphi=\varphi'=\varphi''$, равенства тангенциальных составляющих векторов электрического поля $E_{1\tau}=E_{2\tau}$ и нормальных составляющих векторов электрической индукции $D_{1n}=D_{2n}$ в верхней и нижней средах находим

$$\frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r^2}\cos\varphi+\frac{q'_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1}r'^2}\cos\varphi'=\frac{q''_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл2}r''^2}\cos\varphi'';$$

$$\frac{q_{эл}}{\varepsilon_{эл1}}+\frac{q'_{эл}}{\varepsilon_{эл1}}=\frac{q''_{эл}}{\varepsilon_{эл2}};$$

$$\frac{q_{эл}}{4\pi r^2}\sin\varphi-\frac{q'_{эл}}{4\pi r'^2}\sin\varphi'=\frac{q''_{эл}}{4\pi r''^2}\sin\varphi'';\ q_{эл}-q'_{эл}=q''_{эл},$$

или

$$q'_{эл}=\frac{\varepsilon_{эл1}-\varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1}+\varepsilon_{эл2}}q_{эл}\ \text{и}\ q''_{эл}=\frac{2\varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1}+\varepsilon_{эл2}}q_{эл}.$$

В результате векторы напряженности электрического поля электрического заряда $q_{эл}$, расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{эл1}$ на высоте h от границы раздела с нижней средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{эл2}$, составят:

в верхней среде

$$\overline{E}_{эл1} = \overline{E}'_{эл} + \overline{E}'_{эл} = \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1} r^2}\overline{e}_r + \frac{\varepsilon_{эл1} - \varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}} \frac{q_{эл}}{4\pi\varepsilon_{эл1} r'^2}\overline{e}_{r'};$$

в нижней среде

$$\overline{E}_{эл2} = \overline{E}''_{эл} = \frac{2}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}} \frac{q_{эл}}{4\pi r''^2}\overline{e}_{r''}.$$

Расчет электрического поля линейных зарядов, параллельных плоским поверхностям раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{эл1}$ и $\varepsilon_{эл2}$, производится аналогично расчету точечного заряда при замене $q_{эл}$ на $\tau_{эл}$. В этом случае линейные плотности фиктивных зарядов составят:

$$\tau'_{эл} = \frac{\varepsilon_{эл1} - \varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}}\tau_{эл} \text{ и } \tau''_{эл} = \frac{2\varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}}\tau_{эл},$$

а векторы напряженности электрического поля с учетом обратно пропорциональной зависимости напряженности электрического поля линейных зарядов от расстояния r (вместо r^2 для точечных зарядов) определяются следующим образом:

в верхней среде

$$\overline{E}_{эл1} = \overline{E}'_{эл} + \overline{E}'_{эл} = \frac{\tau_{эл}}{2\pi\varepsilon_{эл1} r}\overline{e}_r + \frac{\varepsilon_{эл1} - \varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}} \frac{\tau_{эл}}{2\pi\varepsilon_{эл1} r'}\overline{e}_{r'};$$

в нижней среде

$$\overline{E}_{эл2} = \overline{E}''_{эл} = \frac{2}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}} \frac{\tau_{эл}}{2\pi r''}\overline{e}_{r''}.$$

Расчет магнитного поля бесконечно длинного провода с током I, расположенного параллельно плоской поверхности раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями $\mu_{эл1}$ и $\mu_{эл2}$, может быть произведен аналогично расчету электрического поля линейных зарядов по принципу обратного соответствия, т.е. с заменой $\tau_{эл}$ на I и $\varepsilon_{эл1}$ на $\dfrac{1}{\mu_{эл1}}$, а $\varepsilon_{эл2}$ на $\dfrac{1}{\mu_{эл2}}$.

Тогда фиктивные токи

$$I'_{эл} = \frac{\mu_{эл2} - \mu_{эл1}}{\mu_{эл1} + \mu_{эл2}} I_{эл} \text{ и } I''_{эл} = \frac{2\mu_{эл1}}{\mu_{эл1} + \mu_{эл2}} I_{эл},$$

а векторы напряженности магнитного поля с учетом обратно пропорциональной зависимости напряженности магнитного поля линейных токов от расстояния r определяются следующим образом:

в верхней среде

$$\overline{H}_{эл1} = \overline{H}'_{эл} + \overline{H}'_{эл} = \frac{I_{эл}}{2\pi r}\overline{e}_{\varphi} + \frac{\mu_{эл2} - \mu_{эл1}}{\mu_{эл1} + \mu_{эл2}}\frac{I_{эл}}{2\pi r'}\overline{e}_{\varphi'};$$

в нижней среде

$$\overline{H}_{эл2} = \overline{H}''_{эл} = \frac{2\mu_{эл1}}{\mu_{эл1} + \mu_{эл2}}\frac{I_{эл}}{2\pi r''}\overline{e}_{\varphi''}.$$

В качестве примера произведем расчет емкости воздушной двухпроводной линии с учетом поверхности Земли.

Пример. Дано: r_0 — радиус проводов линии, $\varepsilon_{эл1} = \varepsilon_0$ и $\varepsilon_{эл2} = \infty$ — диэлектрические проницаемости воздуха и грунта, d — расстояние между проводами, h — высота линии над поверхностью Земли (рис. 9.5), $d \gg r_0$, $h \gg r_0$.

Определить: емкость воздушной двухпроводной линии с учетом поверхности Земли.

Решение. Из определения емкости как способности устройства запасать электрический заряд при приложенной разности потенциала между его электродами для данной задачи можно записать

$$C = \frac{q_{эл}}{U_{элA} - U_{элB}},$$

где $U_{элA} - U_{элB}$ — разность потенциалов между ближайшими точками A и B проводов линии.

Разность потенциалов между проводами, как видно из рис. 9.5, определяют заряды $\tau_{эл}$ и $-\tau_{эл}$ самой линии и расположенные зеркально им фиктивные заряды $-\tau_{эл}$ и $\tau_{эл}$, учитывающие влияние поверхности Земли, так как

$$\tau'_{эл} = \frac{\varepsilon_{эл1} - \varepsilon_{эл2}}{\varepsilon_{эл1} + \varepsilon_{эл2}}\tau_{эл} = \frac{\varepsilon_0 - \infty}{\varepsilon_0 + \infty}\tau_{эл} = -\tau_{эл}.$$

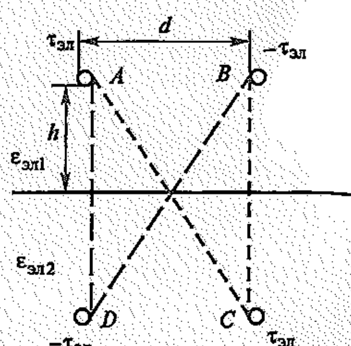


Рис. 9.5. Двухпроводная линия над проводящей поверхностью

От четырех линейных зарядов разность потенциалов составит

$$U_{элA} - U_{элB} = 2\int\limits_{r_0}^{d-r_0} E_r \bar{e}_r \mathrm{d}r\bar{e}_r + 2\int\limits_{2h}^{\sqrt{4h^2+(d-r_0)^2}} E_r \bar{e}_r \mathrm{d}r\bar{e}_r =$$

$$= \frac{\tau_{эл}}{\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_{r_0}^{d-r_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}r - \int\limits_{2h}^{\sqrt{4h^2+(d-r_0)^2}}\frac{1}{r}\mathrm{d}r\right] = \frac{\tau_{эл}}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\frac{2h}{\sqrt{4h^2+(d-r_0)^2}}\right).$$

После подстановки разности потенциалов в исходное выражение для емкости получаем емкость отрезка длиной l бесконечно длинной воздушной двухпроводной линии с учетом проводящей поверхности Земли

$$C = \frac{\tau_{эл} l}{U_{элA} - U_{элB}} = \pi\varepsilon_0 l\left\{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\frac{2h}{\sqrt{4h^2+(d-r_0)^2}}\right)\right\}^{-1}.$$

При $2h >> d$ емкость равна значению емкости двухпроводной линии, расположенной в безграничной однородной среде.

Метод конформных преобразований. Метод основан на свойствах функций комплексного переменного и позволяет упростить расчет плоскопараллельного поля сложной конфигурации, изображаемого в комплексной плоскости $z = x + jy$, сводя эту задачу к простому расчету однородного поля в другой системе координат — вещественной U и мнимой V.

Комплексный потенциал $W = U + jV$, с помощью которого осуществляется указанное преобразование, представляет собой комплексную функцию, вещественной (или мнимой) частью которой является потенциал $U(x, y)$, а мнимой (или вещественной) — функция потока $\psi = Vl$, потока вектора напряженности поля $\bar{E}_{эл}$ ($\bar{H}_{эл}$), отнесенного к единице длины l плоскопараллельного поля $\mathrm{d}\psi = E_{эл}\mathrm{d}a = \mathrm{d}V$.

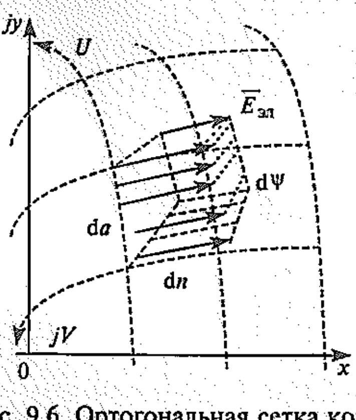


Рис. 9.6. Ортогональная сетка комплексного потенциала

Уравнение $U(x,y) = 0$ является уравнением эквипотенциальных линий, уравнение $V(x,y) = 0$ — уравнением силовых линий. Те и другие образуют ортогональную сетку (рис. 9.6). Из полного дифференциала от комплексного потенциала

$$\frac{dW}{dz}=\frac{d(U+jV)}{d(x+jy)}=\frac{\partial U}{\partial x}+j\frac{\partial V}{\partial x}=-j\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y},$$

приравнивая вещественные и мнимые части, находим, что потенциал и функция потока связаны между собой условиями Коши—Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y};\quad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцируем первое равенство по y, а второе по x и просуммируем их:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y};\quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x};\quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y}=0,$$

т.е. функция $V(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Продифференцировав первое равенство по x, а второе по y, после их сложения находим, что и функция $U(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Величина вектора напряженности поля равна модулю производной комплексного потенциала:

$$E_{эл}=\left|E_x+jE_y\right|=\left|-\frac{\partial U}{\partial x}-j\frac{\partial U}{\partial y}\right|=\left|-\frac{\partial U}{\partial x}+j\frac{\partial V}{\partial x}\right|=\left|\frac{dW}{dz}\right|.$$

Хотя метод конформных преобразований чрезвычайно упрощает задачу расчета поля, его основным недостатком является отсутствие общего способа нахождения комплексного потенциала. Лишь для полей, ограниченных ломаной прямой, существует формула Кристоффеля—Шварца, определяющая комплексный потенциал.

Для примера рассмотрим расчет поля двух заряженных проводящих плоскостей, образующих угол α_0, но не соприкасающихся и имеющих потенциалы V_1 и V_2 (рис. 9.7).

Это поле может быть преобразовано в однородное в координатной плоскости U, V с помощью комплексного потенциала вида

$$W=k\ln z+c=U+jV,$$

где k и c определяются из граничных условий.

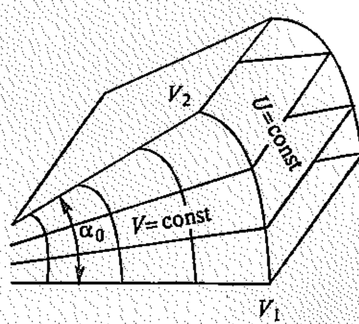


Рис. 9.7. Поле двух заряженных проводящих плоскостей

В цилиндрической системе координат $z = re^{j\alpha}$, $\ln z = j\alpha + \ln r$, а $W = k(j\alpha + \ln r) + c_1 + jc_2 = U + jV$. Из равенства вещественных и мнимых частей получаем: $U = k\ln r + c_1$, $V = k\alpha + c_2$.

При $\alpha = 0$ $V = V_1$ и $c_2 = V_1$, при $\alpha = \alpha_0$ $V = V_2$ и $k = \dfrac{V_2 - V_1}{\alpha_0}$, а

$$W = \frac{V_2 - V_1}{\alpha_0}\ln r + c_1 + j\left[\frac{\alpha}{\alpha_0}c_2(V_2 - V_1) + V_1\right].$$

Эквипотенциальные линии V представляют собой лучи, так как V зависит только от α, а силовые линии электрического поля — от дуги концентрических окружностей.

Напряженность электрического поля:

$$E_{эл} = \left|\frac{dW}{dz}\right| = \frac{V_2 - V_1}{\alpha_0}\left|\frac{d\ln z}{dz}\right| = \frac{V_2 - V_1}{\alpha_0 r}.$$

Пространство между проводящими плоскостями с потенциалами V_1 и V_2 может быть заполнено диэлектриком или проводящей средой.

Полученные результаты могут быть перенесены на аналогичную задачу расчета магнитного поля в воздушном зазоре магнитопровода. Так, при магнитных потенциалах $V_{м1}$ и $V_{м2}$ плоскостей магнитопровода, ограничивающих воздушный зазор, напряженность магнитного поля в зазоре $H = \dfrac{V_{м2} - V_{м1}}{\alpha_0 r}$.

Численные методы. Численные методы [25], лежащие в основе специальных математических программ, позволяют достаточно быстро решать сложные полевые задачи на компьютерах с наглядным представлением результатов расчета и картин поля.

Специфика работы компьютера требует замены операций дифференцирования в уравнениях Лапласа операциями над числами и перехода от бесконечной совокупности чисел к конечной. Поэтому необходим переход от исходных непрерывных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений. Переход осуществляется путем составления разностного уравнения, являющегося дискретным аналогом соответствующего дифференциального уравнения.

Для получения разностных уравнений выбирается система узлов, заполняющих одно-, двух- или трехмерную расчетную область. Выбор сетки, т.е. конфигурации дискретных областей, и определяемой ими системы узлов и ячеек, осуществляют исходя из условий получения возможно меньших погрешностей при переходе от непрерывного уравнения к дискретному и представления границ расчетной области и поверхностей раздела сред с различными свойствами. В практических задачах часто выбирают сетки, имеющие плоские, цилиндрические или сферические поверхности сторон ячеек, заменяя при этом граничные поверхности совокупностью таких же плоских и криволинейных поверхностей. При расчете двухмерных полей узлы сетки могут образовывать ячейки различной формы (прямоугольной, треугольной, шестиугольной) с прямолинейными сторонами либо криволинейными (две стороны — прямые линии, две другие — дуги окружностей). При расчете трехмерных полей узлы сетки образуют пирамиды, призмы с плоскими, цилиндрическими или сферическими гранями.

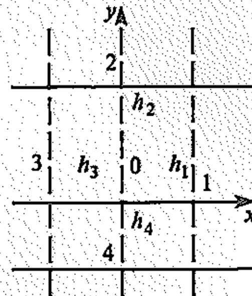


Рис. 9.8. Система узлов, используемых при аппроксимации уравнения Лапласа

Замене непрерывных функций дискретными (сеточными) соответствует замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек (узлов), образующих сетку или решетку. Поэтому при аппроксимации исходных дифференциальных уравнений в частных производных алгебраическими зависимостями прежде всего задают систему узлов — сетку. Пусть плоскопараллельное электростатическое поле в области S, заполненной однородной средой, описывается потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Рассмотрим прямоугольную сетку с неравными шагами по координатам, аппроксимируя уравнение Лапласа в узле 0 (рис. 9.8). Используя разложение потенциала в ряд Тейлора в точке 0, для потенциалов узлов 1...4 получаем:

$$U_1 = U_0 + \frac{\partial U}{\partial x} h_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h_1^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} h_1^4 + \ldots;$$

$$U_2 = U_0 + \frac{\partial U}{\partial y} h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} h_2^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} h_2^4 + \ldots;$$

$$U_3 = U_0 - \frac{\partial U}{\partial x} h_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h_3^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h_1^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} h_3^4 - \ldots;$$

$$U_2 = U_0 - \frac{\partial U}{\partial y} h_4 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} h_4^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} h_4^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} h_4^4 - \ldots$$

Суммы значений Uh составят:

$$U_1 h_3 + U_3 h_1 = U_0(h_1 + h_3) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(h_1^2 h_3 + h_3^2 h_1) +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(h_1^3 h_3 - h_3^3 h_1) + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(h_1^4 h_3 + h_3^4 h_1)\ldots;$$

$$U_2 h_4 + U_4 h_2 = U_0(h_2 + h_4) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(h_2^2 h_4 + h_4^2 h_2) +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(h_2^3 h_4 - h_4^3 h_2) + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(h_2^4 h_4 + h_4^4 h_2)\ldots$$

Пренебрегая в последних двух выражениях членами, содержащими производные потенциала выше второй, определяем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{2U_1}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{2U_3}{h_3(h_1 + h_3)} - \frac{2U_0}{h_1 h_3};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{2U_2}{h_2(h_2 + h_4)} + \frac{2U_4}{h_4(h_2 + h_4)} - \frac{2U_0}{h_2 h_4}.$$

После сложения вторых производных получаем:

$$\frac{2U_1}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{2U_3}{h_3(h_1 + h_3)} + \frac{2U_2}{h_2(h_2 + h_4)} +$$
$$+\frac{2U_4}{h_4(h_2 + h_4)} - \left(\frac{2}{h_1 h_3} + \frac{2}{h_2 h_4}\right)U_0 \approx 0.$$

Данное выражение связывает значения потенциалов в пяти узлах 0...4 и является разностной аппроксимацией уравнения Лапласа. Равенство приближенное, так как не содержит отброшенные производные потенциала выше второй. Погрешность аппроксимации определяется значениями высших производных потенциала, шагов сетки и их соотношениями.

В случае численного решения уравнения Пуассона $\nabla^2 U_{\text{эл}} = -\frac{\rho_{\text{эл}}}{\varepsilon_{\text{эл}}}$ методом конечных разностей выражения разностной аппроксимации совпадают с выражениями уравнения Лапласа за исключением правой части, где вместо нуля подставляется $\left(-\frac{\rho_{\text{эл}}}{\varepsilon_{\text{эл}}}\right)$.

Полученные уравнения являются линейными алгебраическими уравнениями, связывающими потенциалы узлов. Число

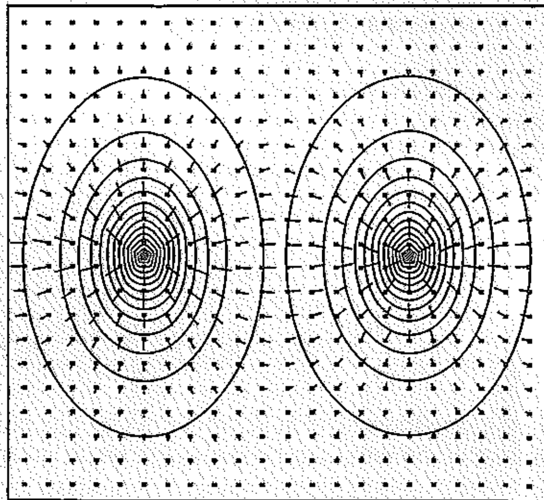


Рис. 9.9. Картина поля двухпроводной линии, расположенной в металлическом прямоугольном экране

уравнений равно сумме внутренних узлов области и узлов ее границы.

Системы конечно-разностных уравнений можно решать прямыми и итерационными методами, а также комбинированными методами, основанными на их совместном использовании. Например, методом прогонки, являющимся модификацией метода исключения Гаусса, методом простой итерации, методами треугольной итерации (Зейделя, верхней релаксации, Ричардсона) и методами вариационного типа.

Аппроксимация поверхностей тел, граничных и краевых условий, особенно при криволинейных поверхностях, представляет собой сложную задачу при использовании метода сеток. Эта задача решается проще, если расчетная область разбивается на элементы конечного размера, т.е. используется метод конечных элементов. В пределах любого элемента потенциал выражается через полином степени n от координат x, y, z с коэффициентами, связанными с потенциалами узлов и обеспечивающими условие минимума энергии поля, достаточного для соответствия искомого распределения потенциала уравнениям Максвелла.

Для примера на рис. 9.9 приведена картина поля двухпроводной линии.

Графический метод. Моделирование полей используется в случаях, когда конфигурация поверхностей, ограничивающих поля, настолько сложна, что аналитический расчет поля становится невозможным.

Метод моделирования полей, различных по физической природе, основан на аналогии их дифференциальных уравнений и заключается в экспериментальном снятии картины электрического поля в проводящей среде как наиболее легко воспроизводимого и измеряемого. Полученная картина поля позволяет найти не только напряженность электрического и магнитного полей в каждой точке, но и интегральные характеристики моделируемых устройств: емкость, индуктивность, электрическое и магнитное сопротивления.

Для моделирования плоскопараллельных полей применяют проводящий лист, для моделирования любых полей, плоскопараллельных и трехмерных, — электролитическую ванну.

Графический метод применяется для исследования потенциальных плоскопараллельных и аксиально-симметричных полей. Он особенно удобен в тех случаях, когда краевые условия настолько сложны, что их нельзя сформулировать аналитически. Предварительно в электролитической ванне или на электропроводящей бумаге определяют положение эквипотенциальных линий, отличающихся между собой равными величинами приращения ΔU.

Графический метод расчета плоскопараллельных полей состоит в построении силовых линий и линий равного потенциала по заданным граничным условиям.

Графические картины потенциальных полей (рис. 9.10) строят по определенным правилам, соответствующим трем аналогичным дифференциальным уравнениям:

электростатического поля — $\mathrm{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл}$, $\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл}$, $\nabla^2 U_{эл} = 0$;

электрического поля в проводящих средах — $\mathrm{div}\overline{E}_{эл} = 0$, $\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{эл}$, $\nabla^2 U_{эл} = 0$;

магнитного поля — $\mathrm{div}\overline{B}_{эл} = 0$, $\overline{H}_{эл} = -\mathrm{grad}\,U_{м}$, $\nabla^2 U_{м} = 0$.

При построении картины поля следует руководствоваться следующими правилами.

1. Векторные силовые линии электрического поля $\overline{E}_{эл}$ должны быть непрерывными, начинаться и заканчиваться на зарядах при исследовании электростатических полей или электродах при исследовании электрических полей в проводящих средах, так как в исследуемых областях $\mathrm{div}\overline{D}_{эл} = \rho_{эл}$ или $\mathrm{div}\overline{E}_{эл} = 0$, векторные

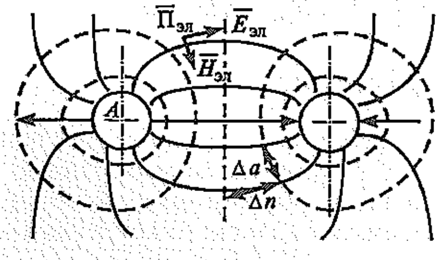


Рис. 9.10. Графический метод расчета плоскопараллельных полей

линии напряженности магнитного поля $\overline{H}_{эл}$ должны быть всегда замкнутыми.

2. Векторные линии электрического и магнитного полей должны быть перпендикулярны эквипотенциальным линиям, т. е. линиям равного потенциала, так как $\overline{E}_{эл} = -\mathrm{grad}\, U_{эл}$, $\overline{H}_{эл} = -\mathrm{grad}\, U_{м}$.

3. Ячейки, полученные при пересечении эквипотенциальных и векторных линий напряженности поля, должны быть подобными, т. е. отношение линейных размеров двух прилегающих сторон каждой ячейки $\Delta a/\Delta n$ должно быть постоянным для всей картины поля, где Δa — расстояние между двумя ближайшими векторными линиями электрического поля, а Δn — расстояние между двумя ближайшими эквипотенциальными линиями. При этом обеспечиваются условия Коши—Римана, потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа, а напряженность поля может быть определена из отношения $\Delta U/\Delta n$.

Проводники имеют один и тот же электрический потенциал, поэтому векторные линии электрического поля $\overline{E}_{эл}$ должны быть перпендикулярными к контурам, ограничивающим сечение проводников.

Графическую картину рисуют вначале ориентировочно, стремясь удовлетворить ортогональность векторных и эквипотенциальных линий, а также векторных линий к поверхности проводника, затем картину исправляют так, чтобы удовлетворить подобие ячеек, то есть $\Delta a/\Delta n = \mathrm{const}$. Обычно для облегчения построения картины поля выбирают отношение $\Delta a/\Delta n = 1$.

По картине поля рассчитывают в любой точке модели напряженность электрического и магнитного полей, величину вектора Пойнтинга, мощность электромагнитного потока энергии, идущей вдоль линии. Кроме этого, по картине поля определяют параметры линии: емкость, внешнюю индуктивность и сопротивление утечки.

В качестве примера приведем расчет поля в точке A и параметров двухпроводной линии (рис. 9.10):

$$E_{элA} = \frac{\Delta U_{эл}}{\Delta n} = \frac{U_{эл}}{n\Delta n};\;\; H_{элA} = \frac{I}{\Delta a m};\;\; \Pi_{элA} = \frac{IU_{эл}}{mn\Delta n\Delta a};$$

$$P_{ШчA} = \frac{IU_{эл}}{mn};\;\; P_{трA} = \frac{IU_{эл}}{m};\;\; P_{лин} = IU_{эл},$$

где n — число эквипотенциальных промежутков; m — число токовых трубок.

Для определения емкости электродов на единицу длины полезно использовать представление о дискретной модели, построенной из параллельно и последовательно включенных емкостей. Емкость ячейки определяется как емкость плоского конденсато-

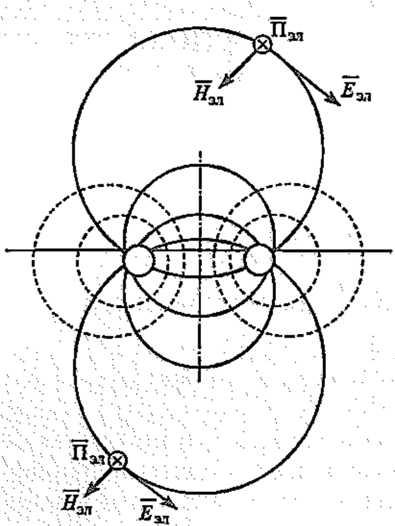


Рис. 9.11. Картина электромагнитного поля двухпроводной линии

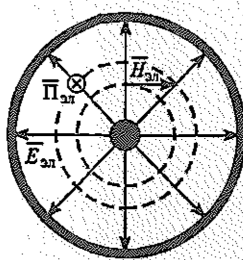


Рис. 9.12. Картина электромагнитного поля коаксиального кабеля

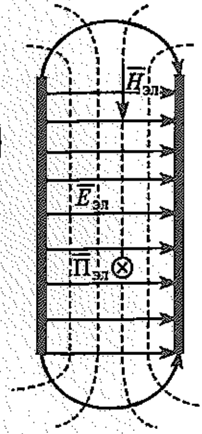


Рис. 9.13. Картина электромагнитного поля несимметричной полосковой линии

ра $C_{яч} = \varepsilon_{эл} l \dfrac{\Delta a}{\Delta n}$, емкость токовой трубки как емкость n последовательно соединенных одинаковых ячеек $C_{тр} = \varepsilon_{эл} l \dfrac{\Delta a}{n \Delta n}$, а емкость линии — емкость параллельно соединенных одинаковых трубок $C = \varepsilon_{эл} l \dfrac{m \Delta a}{n \Delta n}$.

Для определения поверхностной плотности зарядов на электродах используется граничное условие $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{пов}$. Так как электростатическое поле в проводниках отсутствует, $\sigma_{пов} = D_n = \varepsilon_{эл} E_n$.

Сопротивление утечки линии определяют по аналогии с емкостью $R = \left(\gamma_{пр} l \dfrac{m \Delta a}{n \Delta n} \right)^{-1}$, а внешнюю индуктивность — через магнитный поток, проходящий между проводами линии $L = \mu_{эл} l \dfrac{n \Delta n}{m \Delta a}$.

На рис. 9.11...9.13 приведены картины электромагнитного поля для двухпроводной линии, коаксиального кабеля и несимметричной полосковой линии, построенные по правилам графического метода.

Глава 10
ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ИЗЛУЧЕНИЕ И ЭКРАНИРОВАНИЕ

10.1. Уравнения Максвелла в комплексном виде. Волновое уравнение Гельмгольца

Объединим плотности токов проводимости и смещения:

$$\gamma_{эл}\overline{\dot{E}}_{эл} + \frac{\partial \overline{\dot{D}}_{эл}}{\partial t} = \gamma_{эл}\overline{\dot{E}}_{эл} + \varepsilon_{эл}\frac{\partial \overline{\dot{E}}_{эл}}{\partial t} = \gamma_{эл}\overline{\dot{E}}_{эл} + j\omega\varepsilon_{эл}\overline{\dot{E}}_{эл}.$$

Тогда при изменении векторов поля во времени по гармоническому закону (в комплексной форме как $e^{j\omega t}$) система уравнений Максвелла в дифференциальной форме может быть приведена к комплексному виду:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \operatorname{rot}\overline{\dot{H}}_{эл} = j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\overline{\dot{E}}_{эл}; \quad \text{II. } \operatorname{rot}\overline{\dot{E}}_{эл} = -j\omega\mu\overline{\dot{H}}_{эл}; \\ &\text{III. } \operatorname{div}\overline{\dot{D}}_{эл} = 0; \quad \text{IV. } \operatorname{div}\overline{\dot{B}}_{эл} = 0, \end{aligned} \tag{10.1}$$

где $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\gamma_{эл}/\omega$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

В этом случае волновые уравнения преобразуются в уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2\overline{\dot{E}}_{эл} + k^2\overline{\dot{E}}_{эл} = 0; \quad \nabla^2\overline{\dot{H}}_{эл} + k^2\overline{\dot{H}}_{эл} = 0, \tag{10.2}$$

где $k = \omega\sqrt{\mu_{эл}(\varepsilon_{эл} - j\gamma_{эл}/\omega)}$ — комплексное волновое число.

Электромагнитное поле в условиях макроскопического наблюдения проявляет себя как непрерывно распространяющийся с определенной скоростью волновой процесс (электромагнитные волны) и как дискретный процесс в виде отдельных квантов — фотонов с энергией $W_{квант} = hf$. Оно обладает массой, энергией и импульсом. В связи с этим комплексное волновое число может быть выражено через квант энергии для эфира:

$$k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \frac{W^2_{квант}}{h^2}\frac{1}{v^2} = \frac{W_{квант}}{h^2}\frac{mv^2}{v^2} =$$

$$= \frac{2W_{кин}}{h^2}m = 2\frac{m}{h^2}(W_{полн} - U_{пот}),$$

где $W_{квант} = mv^2 = hf = 2W_{кин}$; m — инертная масса волнового кванта.

Таблица 10.1

Система координат	Решения уравнения Гельмгольца
Прямоугольная (x, y, z)	$(Ae^{-jk_z z} + Be^{jk_z z})e^{-j(k_x x + k_y y)}$
Круговая цилиндрическая (r, φ, z)	$\sum_m (A_m I_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})e^{-jk_z z} +$ $+ B_m K_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})e^{-jk_z z})e^{jm\varphi}$
Сферическая (r, ϑ, φ)	$\sum_{n,m} [A_{nm} j_n(kr) + B_{nm} h_n^{(1)}(kr)] P_n^m(\cos\vartheta) e^{jm\varphi}$

Уравнения Гельмгольца приобретают вид, аналогичный уравнениям Шредингера для элементарных частиц (электронов, позитронов, протонов и др.), обладающих кинетической энергией:

$$\nabla^2 \bar{\dot{E}} + 2\frac{m}{h^2}(W_{\text{полн}} - U_{\text{пот}})\bar{\dot{E}} = 0;\ \nabla^2 \bar{\dot{H}} + 2\frac{m}{h^2}(W_{\text{полн}} - U_{\text{пот}})\bar{\dot{H}} = 0.$$

Уравнения Гельмгольца — векторные уравнения. Из курса высшей математики известны общие решения скалярного уравнения Гельмгольца, например, в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат. В табл. 10.1 приведены решения скалярного уравнения Гельмгольца, полученные методом разделения переменных.

Здесь $I_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})$, $K_m(r\sqrt{k_z^2 - k^2})$ — модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода; $j_n(rk)$, $h_n^{(1)}(rk)$ — сферические функции Бесселя первого и второго рода; $P_n^m(\cos\vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра.

При решении конкретной задачи, как и в случае потенциальных полей из бесчисленного множества решений уравнения Гельмгольца выбирают то, которое удовлетворяет условиям на границе раздела сред, на бесконечно больших и нулевых расстояниях.

Переменное во времени электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде плоских, цилиндрических, сферических, эллиптических, сфероидальных и других типов волн. Любая сложная волна может быть представлена в виде суммы плоских волн.

10.2. Основные свойства плоских электромагнитных волн

Плоской называют волну, распространяющуюся вдоль какой-либо линейной координаты и неизменную в каждый фиксированный момент времени в плоскости, перпендикулярной этой координате. Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси z декартовой системы координат (рис. 10.1), а вектор напряженности электрического поля направлен по оси x, т.е.

$$\dot{E}_x = E_{mx}\mathrm{e}^{j(\omega t-kz)};\quad E_y = 0;\quad E_z = 0.$$

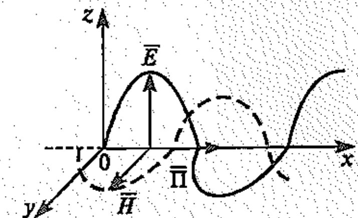


Рис. 10.1. Поле плоской электромагнитной волны

Рассмотрим основные свойства и характеристики плоских волн.

1. Вектор напряженности электрического поля удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца (10.2):

$$\nabla^2\dot{E}_x = \frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial z^2} = E_{mx}\mathrm{e}^{j\omega t}\frac{\partial^2\mathrm{e}^{-jkz}}{\partial z^2} = -k^2\dot{\bar{E}}_x.$$

2. Вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен вектору напряженности электрического поля $\overline{H}_{эл} \perp \overline{E}_{эл}$.

Из II уравнения Максвелла (10.1) находим:

$$\mathrm{rot}\dot{\overline{E}} = \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}\overline{\mathrm{e}}_y = -jk\dot{E}_x\overline{\mathrm{e}}_y = -j\omega\mu_{эл}\dot{H}_y\overline{\mathrm{e}}_y,$$

или

$$E_{mx}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{эл}} = H_{my}\sqrt{\mu_{эл}}.$$

3. Отношение $\dot{E}_x/\dot{H}_y \to [\text{В}]/[\text{А}] = [\text{Ом}]$ называется волновым или характеристическим сопротивлением среды, определяющим связь между векторами электрического и магнитного поля в плоской волне:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \sqrt{\frac{\mu_{эл}}{\dot{\varepsilon}_{эл}}} = \sqrt{\frac{\mu_{эл}}{\varepsilon_{эл} - j\gamma_{эл}/\omega}} = |Z|\mathrm{e}^{j\varphi_z}. \qquad (10.3)$$

Волновое сопротивление среды, а следовательно, взаимная связь между векторами поля определяются параметрами пространства, в котором распространяется плоская волна, и частотой самой волны.

Для воздуха $Z_c = 377$ Ом, для проводящих сред $Z_c = \sqrt{\dfrac{\mu_{эл}\omega}{\gamma_{эл}}}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$,

т.е. в проводящих средах вектор напряженности электрического поля опережает вектор напряженности магнитного поля по фазе на угол $\pi/4$.

4. Векторы $\overline{E}_{эл}, \overline{H}_{эл}$ и $\overline{\Pi}_{эл}$ взаимно перпендикулярны, т.е. $\overline{E}_{эл} \perp \overline{H}_{эл} \perp \overline{\Pi}_{эл}$.

5. Комплексное волновое число:

$$k = \omega\sqrt{\mu_{эл}(\varepsilon_{эл} - j\gamma_{эл}/\omega)} = \beta - j\alpha,$$

где β — коэффициент фазы; α — постоянная затухания, определяет характер изменения амплитуды и фазы напряженности плоской волны с расстоянием z:

$$\dot{E}_x = E_{mx}e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}; \quad \dot{H}_y = H_{my}e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

6. Фазовая скорость волны — скорость перемещения фронта волны фиксированного значения фазы $\omega t - \beta z = \text{const}$ вдоль направления распространения волны, т.е. $v_ф = \frac{dz}{dt}$ или $\omega dt - \beta dz = 0$:

$$v_ф = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

7. Длина волны λ — расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π, т. е. $\beta\lambda = 2\pi$, или $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_ф}{f}$.

8. Явление поверхностного эффекта заключается в неравномерном распределении переменного электромагнитного поля в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны (рис. 10.2). При этом происходит неравномерное распределение плотности тока и магнитной индукции; в установившемся режиме эти величины имеют максимальные значения у поверхности проводника.

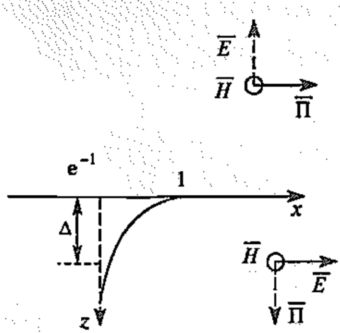


Рис. 10.2. Поверхностный эффект

Расстояние, на котором амплитуда вектора $\overline{E}_{эл}$ или $\overline{H}_{эл}$ волны в проводящих средах уменьшается в е = 2,71 раз, называется глубиной проникновения и обозначается символом Δ:

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{эл}\gamma_{эл}}}.$$

В большинстве случаев поверхностный эффект вреден, так как увеличивает электрическое сопротивление переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. Поверхностный эффект может быть и полезен, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки, в электромагнитных экранах.

9. Вектор Пойнтинга определяет направление и величину потока электромагнитной мощности, проходящей через единицу поверхности (1 м^2) в направлении распространения волны.

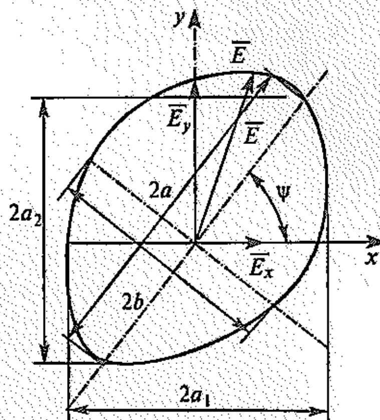


Рис. 10.3. Поляризация волны

10. Поляризация волны — закон изменения направления и величины вектора напряженности электрического поля в данной точке пространства за период колебания.

Пусть направление распространения плоской гармонической волны совпадает с осью z. Разложим вектор $\overline{E}_{эл}$ в плоскости x, y по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 10.3):

$$E_{xэл} = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \quad E_{yэл} = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ — постоянные амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора $\overline{E}_{эл}$.

Исключая из проекций $E_{xэл}$ и $E_{yэл}$ временной множитель, получаем уравнение эллипса:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi$ оси эллипса совпадают с осями координат. Если $a_1 = a_2$ эллипс преобразуется в окружность, при $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ — в прямую, т.е. эллиптическая поляризация волн становится круговой или линейной.

Обозначая главные оси эллипса через a и b, а угол, который составляет большая ось эллипса с осью x, через ψ, легко найти следующие соотношения:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2; \quad \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\eta \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\eta \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\quad \operatorname{tg}\eta = \dfrac{a_2}{a_1}$.

Любая волна может быть представлена в виде суммы плоских волн. Так, цилиндрическая и сферическая волны как интегралы Зоммерфельда:

$$K_0(-jk_k\sqrt{x^2+z^2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-(z+h)\mu_k}}{\mu_k}\cos\lambda x\,d\lambda;$$

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \int_0^\infty \frac{e^{-(z+h)\mu_k}}{\mu_k}\lambda J_0(-\lambda r)\,d\lambda,$$

где $R=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$.

10.3. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела двух сред

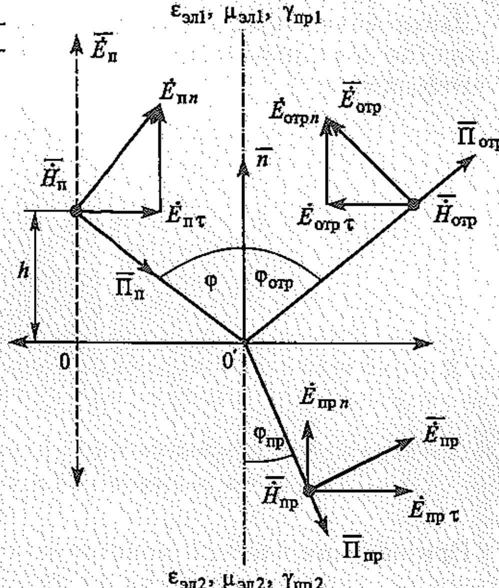
При падении плоской монохроматической электромагнитной волны на границу двух сред с различными свойствами [26] возникают преломленная и отраженная волны.

Пусть граница раздела между двумя однородными средами совпадает с плоскостью $z = 0$ декартовой системы координат. Среды, расположенные сверху ($z < 0$) и снизу ($z > 0$) от границы, обладают соответственно параметрами $\varepsilon_{эл1}$, $\mu_{эл1}$, $\gamma_{пр1}$ и $\varepsilon_{эл2}$, $\mu_{эл2}$, $\gamma_{пр2}$. На эту границу из верхней среды падают под углом φ к оси z волна с вертикальной поляризацией (рис. 10.4) и волна с горизонтальной поляризацией (рис. 10.5).

При наклонном падении волн используют понятие плоскости падения. Плоскостью падения называется плоскость, в которой лежат вектор Пойнтинга, совпадающий с направлением волны, и нормаль к границе в точке падения. При этом линейно поляризованные волны условно подразделяют на вертикально и горизонтально поляризованные волны. Поляризацию волны определяют по вектору напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл}$. Если вектор напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл}$ лежит в плоскости падения (рис. 10.4), то говорят, что волна поляризована вертикально, если же $\overline{E}_{эл}$ перпендикулярен плоскости падения и, следовательно, параллелен границе раздела, волну называют горизонтально поляризованной (рис. 10.5).

Задача на отражение электромагнитной волны от плоской границы раздела сред состоит в нахождении углов, определяющих направления распространения отраженной и преломленной волн, и определении их амплитуд или связанных с ними коэффициентов отражения и преломления.

Рис. 10.4. Отражение и преломление вертикально поляризованной волны



Законы, определяющие углы $\varphi_{отр}$, $\varphi_{пр}$, называются законами отражения и преломления Снеллиуса, а формулы для определения коэффициентов отражения и преломления — формулами Френеля.

Для определения этих законов воспользуемся общими решениями уравнения Гельмгольца для плоских падающих волн:

$$\dot{E}_{п} = E_{mп}\,e^{j(\omega t - k_1 l)}; \quad \dot{H}_{п} = \frac{1}{Z_{c1}}\dot{E}_{п}.$$

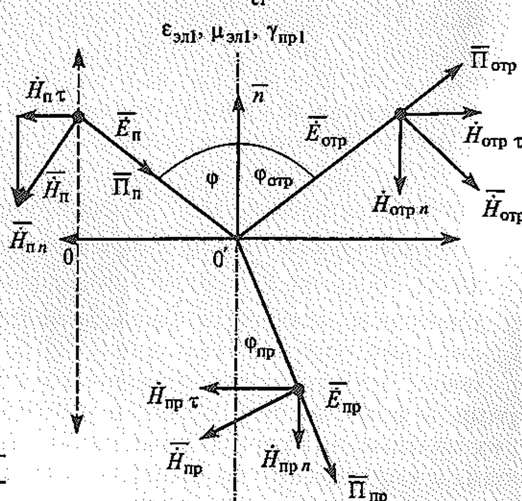


Рис. 10.5. Отражение и преломление горизонтально поляризованной волны

Так как указанные решения определены для обеих сред, то при плоской волне, падающей на плоскую границу раздела сред, отраженная и преломленная волны будут также плоскими:

$$\dot{E}_{\text{отр}} = E_{m\,\text{отр}} \mathrm{e}^{j(\omega_{\text{отр}} t - k_1 l - k_1 l_1)}; \quad \dot{H}_{\text{отр}} = \frac{1}{Z_{c1}} \dot{E}_{\text{отр}};$$

$$\dot{E}_{\text{пр}} = \dot{E}_2 = E_{m\text{пр}} \mathrm{e}^{j(\omega_{\text{пр}} t - k_1 l - k_2 l_2)}; \quad \dot{H}_{\text{пр}} = \dot{H}_2 = \frac{1}{Z_{c2}} \dot{E}_{\text{пр}}.$$

При $z = 0$ должны выполняться граничные условия, заключающиеся в непрерывности тангенциальных составляющих векторов электрического и магнитного суммарного волнового поля и непрерывности нормальных составляющих индукции, т.е. равенств:

$$\dot{E}_{\text{п}\tau} + \dot{E}_{\text{отр}\tau} = \dot{E}_{\text{пр}\tau}; \quad \dot{H}_{\text{п}\tau} + \dot{H}_{\text{отр}\tau} = \dot{H}_{\text{пр}\tau};$$

$$\dot{D}_{\text{п}n} + \dot{D}_{\text{отр}n} = \dot{D}_{\text{пр}n}; \quad \dot{B}_{\text{п}n} + \dot{B}_{\text{отр}n} = \dot{B}_{\text{пр}n}.$$

Для дальнейшего рассмотрения задачи представим расстояния распространения волн через координаты и направляющие углы:

падающей волны от источника до границы $l = x \sin\varphi + h\cos\varphi$;

отраженной волны от границы до данной точки верхней среды $l_1 = (x - 00')\sin\varphi_{\text{отр}} + z\cos\varphi_{\text{отр}}$;

преломленной волны от границы до данной точки нижней среды $l_2 = (x - 00')\sin\varphi_{\text{пр}} + z\cos\varphi_{\text{пр}}$.

Подставляя выражения для комплексных амплитуд и расстояний в граничные условия при $z = 0$, получаем:

для волн с вертикальной поляризацией

$$\cos\varphi E_{m\text{п}} \mathrm{e}^{j\omega t} - \cos\varphi_{\text{пр}} E_{m\text{отр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{отр}} t} = \cos\varphi_{\text{пр}} E_{m\text{пр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{пр}} t};$$

$$\frac{1}{Z_{c1}} \dot{E}_{\text{п}} + \frac{1}{Z_{c1}} \dot{E}_{\text{отр}} = \frac{1}{Z_{c2}} \dot{E}_{\text{пр}};$$

$$\varepsilon_1 \sin\varphi E_{m\text{п}} \mathrm{e}^{j\omega t} + \varepsilon_1 \sin\varphi_{\text{отр}} E_{m\text{отр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{отр}} t} = \varepsilon_2 \sin\varphi_{\text{пр}} E_{m\text{пр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{пр}} t};$$

для волн с горизонтальной поляризацией

$$\cos\varphi H_{m\text{п}} \mathrm{e}^{j\omega t} - \cos\varphi_{\text{отр}} H_{m\,\text{отр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{отр}} t} = \cos\varphi_{\text{пр}} H_{m\text{пр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{пр}} t};$$

$$\dot{E}_{\text{п}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}};$$

$$\mu_1 \sin\varphi H_{m\text{п}} \mathrm{e}^{j\omega t} + \mu_1 \sin\varphi_{\text{отр}} H_{m\text{отр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{отр}} t} = \mu_2 \sin\varphi_{\text{пр}} H_{m\text{пр}} \mathrm{e}^{j\omega_{\text{пр}} t}.$$

Уравнения удовлетворяются при равенстве частот падающей, отраженной и преломленной волн $\omega_{\text{п}} = \omega_{\text{отр}} = \omega_{\text{пр}}$, углов падения и отражения волн $\varphi = \varphi_{\text{отр}}$ и выполнении соотношения $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_{\text{пр}}} = \dfrac{k_2}{k_1}$.

Итак, направления отраженных и преломленных волн определяются законами Снеллиуса: законом отражения $\varphi = \varphi_{\text{o}}$ и законом преломления $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_{\text{пр}}} = \dfrac{k_2}{k_1}$.

С учетом этого из систем равенств для коэффициентов отражения и преломления Френеля находим:

для волн с вертикальной поляризацией

$$V = \frac{E_{m\text{отр}}}{E_{m\text{п}}} = \frac{Z_{c1}\cos\varphi - Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}};$$

$$W = \frac{E_{m\text{пр}}}{E_{m\text{п}}} = 1 - V = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}}; \qquad (10.4a)$$

для волн с горизонтальной поляризацией

$$V^* = \frac{H_{m\text{отр}}}{H_{m\text{п}}} = \frac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\varphi_{\text{пр}}}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\varphi_{\text{пр}}};$$

$$W^* = \frac{H_{m\text{пр}}}{H_{m\text{п}}} = 1 + V^* = \frac{2Z_{c1}\cos\varphi_{\text{пр}}}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\varphi_{\text{пр}}}. \qquad (10.4б)$$

В многослойных средах отражение и преломление плоских волн от границ осуществляются по тем же законам, что и от одной границы.

В результате наложения падающих и отраженных волн в верхней среде и преломления падающих волн в нижнюю среду векторы напряженности электромагнитного поля в верхней и нижней средах составят:

для волн с вертикальной поляризацией

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\text{п}} e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)}[\cos\varphi(1 - Ve^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_x - \sin\varphi(1 + Ve^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_z];$$

$$\overline{\dot{H}}_1 = \frac{1}{Z_{c1}}\dot{E}_{\text{п}}(1+V)\overline{e}_y;$$

$$\overline{\dot{E}}_2 = W\dot{E}_{\text{п}}(\cos\varphi_{\text{пр}}\overline{e}_x - \sin\varphi\overline{e}_z)e^{-jk_1(00'\sin\varphi + h\cos\varphi)}e^{-jk_2[(x-00')\sin\varphi_{\text{пр}} + z\cos\varphi_{\text{пр}}]},$$

$$\overline{\dot{H}}_2 = \frac{1}{Z_{c2}}\dot{E}_2\overline{e}_y;$$

для волн с горизонтальной поляризацией

$$\overline{\dot{H}}_1 = \dot{H}_п e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)}[-\cos\varphi(1 - V^* e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_x +$$

$$+\sin\varphi(1 + V^* e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_z];$$

$$\overline{\dot{E}}_1 = Z_{c1}\dot{H}_п(1 + V^*)\overline{e}_y;$$

$$\overline{\dot{H}}_2 = W^*\dot{H}_п(-\cos\varphi_{пр}\overline{e}_x +$$

$$+\sin\varphi\overline{e}_z)e^{-jk_1(00'\sin\varphi + h\cos\varphi)}e^{-jk_2[(x-00')\sin\varphi_{пр} + z\cos\varphi_{пр}]},$$

$$\overline{\dot{E}}_2 = Z_{c2}\overline{H}_2\overline{e}_y.$$

Решения могут быть использованы для расчета векторов поля в верхней и нижней средах.

Отметим одну особенность результирующего поля в верхней среде. В воздухе при отражении падающей волны от идеально проводящей плоскости ($Z_{c2} \approx 0$) коэффициенты отражения:

$$V = \frac{Z_{c1}\cos\varphi - Z_{c2}\cos\varphi_{пр}}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\varphi_{пр}} \approx 1 \text{ и } V^* = \frac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\varphi_{пр}}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\varphi_{пр}} \approx -1.$$

В результате наложения падающей и отраженной волн образуется суммарное поле с периодически изменяющимися вдоль оси z составляющими векторов напряженности электрического и магнитного полей:

для волн с вертикальной поляризацией

$$\overline{\dot{E}}_1 = \dot{E}_п e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)}[\cos\varphi(1 - e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_x - \sin\varphi(1 + e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_z] =$$

$$= \dot{E}_п e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)}e^{j\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi}2[-j\cos\varphi\sin(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi)\overline{e}_x -$$

$$-\sin\varphi\cos(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi)\overline{e}_z],$$

$$\overline{\dot{H}}_1 = \frac{1}{Z_{c1}}\dot{E}_п(1 + V)\overline{e}_y \approx \frac{2}{Z_{c1}}\dot{E}_п\overline{e}_y;$$

для волн с горизонтальной поляризацией

$$\dot{\overline{H}}_1 = \dot{\overline{H}}_{п} e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)}[-\cos\varphi(1 + e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_x + \sin\varphi(1 - e^{jk_1 z\cos\varphi})\overline{e}_z] =$$

$$= \dot{H}_{п} e^{-jk_1(x\sin\varphi + h\cos\varphi)} e^{j\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi} 2[-\cos\varphi\sin(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi)\overline{e}_x -$$

$$-j\sin\varphi\sin(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi)\overline{e}_z];$$

$$\dot{\overline{E}}_1 = Z_{c1}\dot{H}_{п}(1 + V^*)\overline{e}_y \approx \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi_{пр}} Z_{c2}\dot{H}_{п}\overline{e}_y.$$

На расстояниях z, на которых аргументы тригонометрических функций

$\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi = \frac{\pi}{2}p$ при $p = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. $z = \frac{\pi}{k_1\cos\varphi}p = \frac{\lambda}{2\cos\varphi}p$,

нормальные составляющие векторов волн с вертикальной поляризацией и горизонтальные составляющие векторов волн с горизонтальной поляризацией равны нулю.

При $\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi = \pi p$, т.е. $z = \frac{2\pi}{k_1\cos\varphi}p = \frac{\lambda}{\cos\varphi}p$, горизонтальные составляющие векторов волн с вертикальной поляризацией и нормальные составляющие векторов волн с горизонтальной поляризацией также равны нулю.

Поэтому на любом из этих расстояний можно, не нарушая структуры поля, расположить верхнюю идеально проводящую плоскость и получить направляющую систему из двух параллельных идеально проводящих плоскостей.

Параметр p определяет порядковый номер волны, ее мода.

Вдоль оси x такой направляющей системы распространяется поток мощности электромагнитного поля с удельной плотностью:

для волн с вертикальной поляризацией (рис. 10.6)

$$\tilde{\Pi}_x = \frac{1}{Z_1}E_{mп}^2\sin\varphi\cos^2\left(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi\right);$$

для волн с горизонтальной поляризацией (рис. 10.7)

$$\tilde{\Pi}_x^* = Z_1 H_{mп}^2\sin\varphi\sin^2\left(\frac{1}{2}k_1 z\cos\varphi\right).$$

Эта особенность структуры электромагнитного поля используется в замкнутых металлических волноводах. Высота и ширина волновода выбираются исходя из необходимого двузначного (по высоте и ширине) порядкового номера моды волны, возбуждаемой в волноводе, обеспечивающего равенство нулю тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля и нор-

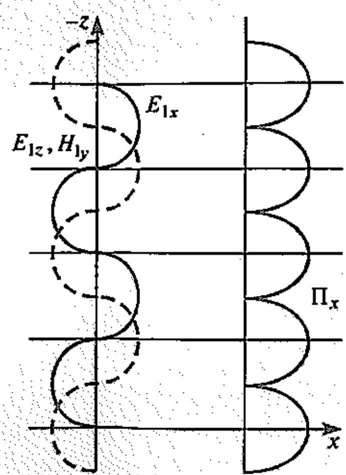


Рис. 10.6. Графики изменения поля над проводящей поверхностью для волн с вертикальной поляризацией

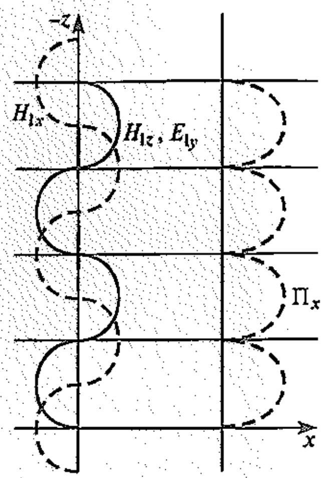


Рис. 10.7. Графики изменения поля над проводящей поверхностью для волн с горизонтальной поляризацией

мальных составляющих вектора напряженности магнитного поля внутри волновода на его стенках. В металлических волноводах в соответствии с существующими двумя типами вертикальной и горизонтальной поляризаций распространяются волны двух типов — E и H.

Волны типа E имеют составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную вектору Пойнтинга, а волны типа H — магнитного поля.

Из выражения для коэффициента отражения следует, что существует такой угол падения волны, при котором коэффициент отражения для волн с вертикальной поляризацией равен нулю. В этом случае вся энергия падающей волны переходит во вторую среду в виде энергии преломленной волны. Этот угол, при падении под которым вертикально поляризованная волна не отражается, называют углом полного преломления, или углом Брюстера.

Коэффициент отражения $V = \dfrac{Z_{c1}\cos\varphi - Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}} = 0$ при равенстве нулю числителя отношения, т. е. при условии $Z_{c1}\cos\varphi = Z_{c2}\cos\varphi_{\text{пр}}$.

Из этого тождества с учетом закона преломления находим:

$$\cos\varphi = \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\cos\varphi_{\text{пр}} = \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\sqrt{1-\sin^2\varphi_{\text{пр}}} = \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}(1 - \cos^2\varphi)} = \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\mu_1} \frac{\mu_2 \dot{\varepsilon}_2 - \mu_1 \dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2^2 - \dot{\varepsilon}_1^2}}.$$

В диэлектрических средах без потерь $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}}$, а угол преломления $\varphi_{пр} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, так как

$$\sin\varphi_{пр} = \frac{k_1}{k_2}\sin\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)} = \cos\varphi.$$

В средах с потерями при угле полного преломления коэффициент отражения по модулю не равен нулю, а достигает только минимальной величины.

Волны с горизонтальной поляризацией при любом угле падения отражаются: $V^* = \dfrac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\varphi_{пр}}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\varphi_{пр}} \neq 0$. Числитель коэффициента отражения обращается в нуль только при $Z_1 = Z_2$, т.е. когда отсутствует граница раздела.

При известных параметрах сред и заданном угле падения волны угол преломления можно определить из закона преломления:

$$\sin\dot{\varphi}_{пр} = \sin(\operatorname{Re}\varphi_{пр} + j\operatorname{Im}\varphi_{пр}) = \frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2}\sin\varphi = \left(\operatorname{Re}\frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2} + j\operatorname{Im}\frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2}\right)\sin\varphi.$$

При соблюдении неравенства $\left|\dot{k}_1\right| \geq \left|\dot{k}_2\right|$ всегда можно подобрать угол падения $\varphi = \varphi_o$, при котором $\sin(\operatorname{Re}\varphi_{пр}) = 1$, а $\operatorname{Re}\varphi_{пр} = \dfrac{\pi}{2}$, преломленная волна распространяется параллельно границе раздела. Этот угол называют предельным углом полного внутреннего отражения:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Im}\varphi_{пр})}{\operatorname{Re}\dfrac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2}}.$$

Явление полного внутреннего отражения сопровождается возникновением в нижней среде преломленной волны, распространяющейся вдоль границы раздела сред с волновыми числами по осям x и z:

$$\dot{k}_{x2} = \dot{k}_2 \sin\dot{\varphi}_{пр} = \dot{k}_2 \sin(\operatorname{Re}\varphi_{пр} + j\operatorname{Im}\varphi_{пр}) =$$
$$= \dot{k}_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\operatorname{Im}\varphi_{пр}\right) = \dot{k}_2 \operatorname{ch}(\operatorname{Im}\varphi_{пр});$$

$$\dot{k}_{z2} = \dot{k}_2 \cos\phi_{пр} = \dot{k}_2 \cos(\operatorname{Re}\varphi_{пр} + j \operatorname{Im}\varphi_{пр}) =$$
$$= \dot{k}_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + j \operatorname{Im}\varphi_{пр}\right) = -j\dot{k}_2 \operatorname{Sh}(\operatorname{Im}\varphi_{пр}).$$

Преломленная волна в направлении, перпендикулярном границе раздела, вдоль оси z, затухает по экспоненте

$$e^{-jz\dot{k}_2} = e^{-z\dot{k}_2 \operatorname{sh}(\operatorname{Im}\varphi_{пр})}.$$

Волна как бы «прижимается» к верхней среде, обладающей большей величиной волнового числа, чем нижняя среда. Волны такого типа называют поверхностными, или боковыми.

Вся энергия преломленной волны возвращается в верхнюю среду. Эта особенность распространения электромагнитных волн используется, в частности, при создании радиосвязи между подземными объектами, удаленными друг от друга на расстояния, во много раз превышающие глубину проникновения волны в грунт. В этом случае прямые волны значительно затухают, преломленные же волны, проникая из грунта в воздух, распространяются вдоль поверхности земли в воздухе, где тепловые потери волны минимальны, на значительные расстояния.

Кроме того, боковые волны используются в диэлектрических волноводах, где преломленная волна, возвращаясь в диэлектрический волновод, вновь преломляется в воздух с другой стороны волновода.

10.4. Излучение

Электромагнитное поле элементарных осцилляторов. Под излучением понимается перенос (передача) электромагнитными волнами энергии из области, включающей источники, в окружающее пространство. На основании закона сохранения энергии мощность излучения определяется значением потока среднего за период вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность этой области: $P_{изл} = \oint\limits_S \overline{\Pi} d\overline{S}$.

Излучение электромагнитной энергии происходит при воз никновении волнового процесса. Вектор Пойнтинга в комплексной форме имеет действительную и мнимую части:

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}[\overline{\dot{E}}_{эл} \times \overline{\ddot{H}}_{эл}] = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\overline{\dot{E}}_{эл} \times \overline{\ddot{H}}_{эл}] + \frac{1}{2}\operatorname{Im}[\overline{\dot{E}}_{эл} \times \overline{\ddot{H}}_{эл}].$$

Действительная часть вектора Пойнтинга характеризует перенос энергии через единичную поверхность, а мнимая часть — колебание энергии через ту же поверхность. Удельная реактивная мощность $\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}]$ источника не отрывается от него, пульсирует с удвоенной частотой; удельная активная мощность $\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}]$ покидает источник. Средняя за период величина удельной реактивной мощности равна нулю. Значение среднего за период вектора Пойнтинга определяет удельную активную мощность:

$$\tilde{\Pi} = \mathrm{Re}\,\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}].$$

Мощность излучения равна активной мощности, выходящей через замкнутую поверхность S:

$$P_{изл} = \frac{1}{2}\oint_S \mathrm{Re}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}]\mathrm{d}\overline{S}.$$

Излучение энергии осуществляется различного вида антеннами, состоящими из элементарных электрических или магнитных осцилляторов [27].

К элементарным осцилляторам (вибраторам) (рис. 10.8) относятся электрический диполь в виде круглого плоского проводника бесконечно малой длины, магнитные диполи — одно- или многовитковые рамки, узкая щель в проводящем бесконечно протяженном экране, элемент Гюйгенса — элемент поверхности плоской площадки волнового фронта с одинаковыми величинами амплитуд и фаз возбуждающих их токов.

Предполагается, что геометрические размеры элементарных осцилляторов малы по сравнению с длиной волны образованного ими в окружающем пространстве электромагнитного поля.

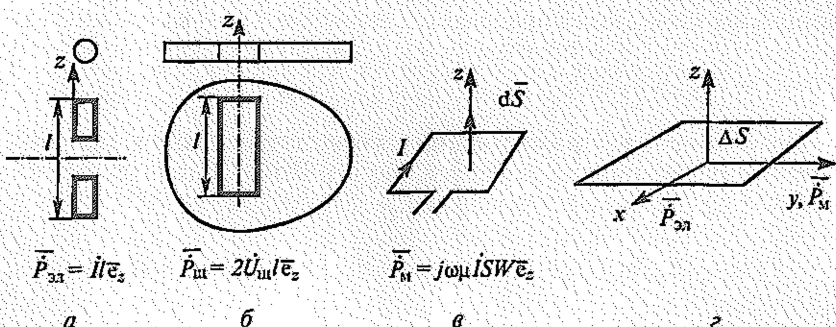


Рис. 10.8. Элементарные осцилляторы:

а — электрический диполь; *б* — щель; *в* — рамка; *г* — элемент Гюйгенса

Электромагнитное поле элементарных осцилляторов в сферической системе координат определяется через векторные потенциалы: $\dot{\bar{A}}_{эл} = \dot{\bar{P}}_{эл} \dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$ и $\dot{\bar{A}}^{*}_{эл} = \dot{\bar{P}}_{м} \dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$, где $\dot{\bar{P}}_{эл}$ — электрический момент; $\dot{\bar{P}}_{м}$ — магнитный момент осцилляторов.

С учетом условий Лоренца векторы $\dot{\bar{E}}_{эл}$ и $\dot{\bar{H}}_{эл}$ в комплексной форме равны:

$$\dot{\bar{B}}_{эл} = \operatorname{rot} \dot{\bar{A}}_{эл}; \quad \dot{\bar{E}}_{эл} = -j\omega\left(\dot{\bar{A}}_{эл} + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\bar{A}}_{эл}\right);$$
$$\dot{\bar{E}}_{эл} = \operatorname{rot} \dot{\bar{A}}^{*}_{эл}; \quad \dot{\bar{H}}_{эл} = j\omega\varepsilon_{эл}\left(\dot{\bar{A}}^{*}_{эл} + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{A}^{*}_{эл}\right). \tag{10.5}$$

В сферической системе координат при вертикальной ориентации моментов осцилляторов по направлению оси z после подстановки векторных потенциалов $\dot{A}_{эл}$ и $\dot{A}^{*}_{эл}$ в выражения (10.5) и дифференцирования получаем:

для элементарного электрического осциллятора

$$\dot{\bar{B}}_{эл} = \frac{1 + jkr}{r}\sin\vartheta \dot{A}_{zэл}\bar{e}_{\varphi};$$

$$\dot{\bar{E}}_{эл} = j\omega\sin\vartheta\dot{A}_{zэл}\bar{e}_{\vartheta} + \frac{1 + jkr}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\mu_{эл}r^2}(2\cos\vartheta\bar{e}_r + \sin\vartheta\bar{e}_{\vartheta})\dot{A}_{zэл};$$

для элементарного магнитного осциллятора

$$\dot{\bar{H}}_{эл} = j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\sin\vartheta\dot{A}^{*}_{zэл}\bar{e}_{\vartheta} + \frac{1 + jkr}{j\omega\mu_{эл}r^2}(2\cos\vartheta\bar{e}_r + \sin\vartheta\bar{e}_{\vartheta})\dot{A}^{*}_{zэл};$$
$$\dot{\bar{E}}_{эл} = \frac{1 + jkr}{r}\sin\vartheta\dot{A}^{*}_{zэл}\bar{e}_{\varphi}. \tag{10.6}$$

Любую реальную излучающую систему можно представить в виде эквивалентных элементарных осцилляторов (диполей).

Рассмотрим основные свойства электромагнитного поля электрического осциллятора.

1. Векторы $\bar{E}_{эл}$ и $\bar{H}_{эл}$ в любой точке пространства взаимно перпендикулярны: $\bar{E}_{эл} = E_{rэл}\bar{e}_r + E_{\vartheta эл}\bar{e}_{\vartheta}$; $\bar{H}_{эл} = H_{\varphi эл}\bar{e}_{\varphi}$.

2. Составляющие $E_{rэл}$, $E_{\vartheta эл}$ и $H_{\varphi эл}$ не зависят от координаты φ, т.е. поле является симметричным относительно оси z, проходящей через ось диполя.

3. Фазы $j\beta r$ составляющих векторов поля не зависят от полярного угла ϑ, а только от расстояния r, поэтому поверхностями

равных фаз являются сферические поверхности с центром в точке расположения середины диполя.

4. Векторными линиями напряженности магнитного поля $\overline{H}_{эл} = H_{\varphi эл}\overline{e}_{\varphi}$ являются концентрические окружности, параллельные экваториальной плоскости $x0y$, с центрами на оси диполя.

5. Векторные силовые линии напряженности электрического поля $\overline{E}_{эл} = E_{rэл}\overline{e}_r + E_{\vartheta эл}\overline{e}_{\vartheta}$, $E_{\varphi эл} = 0$ лежат в меридиональных плоскостях.

6. Комплексный вектор Пойнтинга имеет две составляющие Π_{ϑ} и Π_r:

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \ddot{\overline{H}}_{эл}] = \frac{1}{2}[(\dot{E}_{rэл}\overline{e}_r + \dot{E}_{\vartheta эл}\overline{e}_{\vartheta}) \times \ddot{H}_{\varphi эл}\overline{e}_{\varphi}] =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{E}_{rэл}\ddot{H}_{\varphi эл}\overline{e}_{\vartheta} + \dot{E}_{\vartheta эл}\ddot{H}_{\varphi эл}\overline{e}_r) = \Pi_{\vartheta}\overline{e}_{\vartheta} + \Pi_r\overline{e}_r.$$

Составляющая вектора Пойнтинга Π_{ϑ} лежит в меридиональной плоскости осциллятора, Π_r направлена радиально:

$$\Pi_{\vartheta} = \frac{1}{2}\dot{E}_{rэл}\ddot{H}_{\varphi эл} = \frac{1+\alpha r + j\beta r}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\mu_{эл}r^2}\cos_{\vartheta}\dot{A}_{zэл}\,\frac{1+\alpha r - j\beta r}{r\mu_{эл}}\sin\vartheta\ddot{A}_{zэл} =$$

$$= \frac{I_m^2 \mathrm{d}l^2}{32\pi^2}\frac{(1+\alpha r)^2 + \beta^2 r^2}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}r^5}\sin 2\vartheta \mathrm{e}^{-2\alpha r};$$

$$\Pi_r = \frac{1}{2}\dot{E}_{\vartheta эл}\ddot{H}_{\varphi эл} =$$

$$= \frac{I_m^2 \mathrm{d}l^2}{32\pi^2}\left[\frac{j\omega\mu_{эл}(1+\alpha r - j\beta r)}{r^3} + \frac{(1+\alpha r)^2+\beta^2 r^2}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}r^5}\right]\sin^2\vartheta \mathrm{e}^{-2\alpha r}.$$

В меридиональном направлении в среде без потерь излучение энергии не происходит, так как вещественная часть $\mathrm{Re}\Pi_{\vartheta} = 0$, а имеет место периодическая пульсация с удвоенной частотой реактивной удельной мощности потока:

$$\Pi_{\vartheta} = -j\frac{I_m^2 \mathrm{d}l^2}{32\pi^2}\frac{1+\beta^2 r^2}{\omega\varepsilon_{эл}r^5}\sin 2\vartheta.$$

Эта реактивная часть удельной мощности потока имеет емкостной характер.

В проводящих средах $j\omega\dot{\varepsilon}_{эл} = \gamma_{эл}$, поэтому

$$\Pi_{\vartheta} = \frac{I_m^2 \mathrm{d}l^2}{32\pi^2}\frac{(1+\alpha r)^2+\beta^2 r^2}{\gamma_{эл}r^5}\sin 2\vartheta \mathrm{e}^{-2\alpha r}.$$

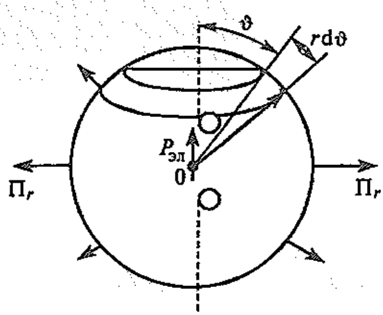


Рис. 10.9. Излучение элементарного электрического осциллятора

Величина Π_ϑ — действительная, а энергия электромагнитного поля переходит в тепловую энергию. Основной поток Π_ϑ проходит в непосредственной близости к диполю и фактически полностью затухает на расстояниях r, равных глубине проникновения.

Радиальная составляющая Π_r всегда имеет действительную и мнимую части. В проводящих средах, как и Π_ϑ, она фактически полностью затухает на расстояниях r, равных глубине проникновения. В средах без потерь реактивная часть удельной мощности потока имеет емкостной характер при $\beta r << 1$ и индуктивный при $\beta r >> 1$.

Действительная часть Π_r определяет плотность энергии излучения. Полная мощность, которую излучает электрический диполь в окружающее пространство, определяется всем выходящим потоком $\operatorname{Re}\Pi_r$ через замкнутую сферическую поверхность (рис. 10.9).

Мощность излучения определяется выражением

$$P_{изл} = \oint\limits_S \operatorname{Re}\dot{\Pi}_r \bar{e}_r d\bar{S} = \oint\limits_S \frac{I_m^2 dl^2}{32\pi^2} \frac{\omega\mu_{эл}\beta}{r^2} \sin^2\vartheta dS =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{I_m^2 dl^2}{2} \frac{\omega\mu_{эл}\beta}{16\pi^2 r^2} \sin^2\vartheta\, 2\pi r \sin\vartheta r d\vartheta = \frac{I_m^2 dl^2}{2} \frac{\omega\mu_{эл}\beta}{8\pi} \int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{I_m^2 dl^2}{2} \frac{\omega\mu_{эл}\beta}{8\pi} \frac{4}{3} = \frac{I_m^2 dl^2}{2} \frac{\omega\mu_{эл}\beta}{6\pi}.$$

Как всякую активную мощность, мощность излучения можно представить в виде произведения квадрата действующего значения тока на сопротивление излучения:

$$P_{изл} = \oint\limits_S \operatorname{Re}\dot{\Pi}_r \bar{e}_r d\bar{S} = \frac{I_m^2}{2} R_{изл}.$$

Для вакуума $R_{изл} = \dfrac{dl^2 \omega\mu_{эл}\beta}{6\pi} = 790 \dfrac{dl^2}{\lambda^2}$.

7. Направленность излучения антенны вообще и осциллятора в частности, характеризуют коэффициентом направленного действия D_a (рис. 10.10), который определяется как отношение плотности потока мощности в направлении ϑ к плотности пото-

ка мощности, создаваемого гипотетической ненаправленной антенной $P_{изл}/4\pi r^2$, при одной и той же мощности излучения обеих антенн:

$$D_а = \frac{\mathrm{Re}\Pi_r}{P_{изл}} 4\pi r^2 = \frac{3}{2}\sin^2\vartheta.$$

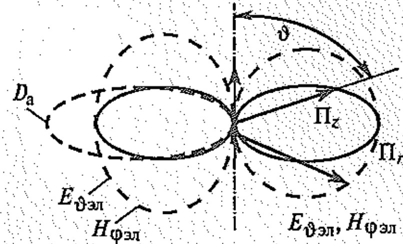


Рис. 10.10. Диаграмма направленности излучения элементарного электрического осциллятора

Зависимость $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$ от направления изображается полярными диаграммами направленности, длина радиуса-вектора на них равна отношению напряженности в направлении ϑ к направлению, перпендикулярному оси диполя. В направлении оси диполя излучения нет, в направлении, перпендикулярном оси диполя, излучение максимально.

8. Ближняя зона соответствует расстояниям, малым по сравнению с длиной электромагнитной волны. В этой зоне можно пренебречь запаздыванием и приближенные выражения для векторов $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$ получаются такими же, как и для постоянного поля.

В ближней зоне $\beta r \ll 1$ напряженность магнитного поля соответствует закону Био—Савара $\dot{\overline{H}}_{эл} = \frac{\dot{I}\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\sin\vartheta\overline{e}_\varphi = \frac{[\dot{I}\mathrm{d}\overline{l}\times\overline{e}_r]}{4\pi r^2}$, а электрическое поле аналогично полю электростатического диполя в средах без потерь $\dot{\overline{E}}_{эл} = \frac{\dot{I}\mathrm{d}l}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}4\pi r^3}(2\cos\vartheta\overline{e}_r + \sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$;

$\dot{U}_{эл} = \frac{\dot{I}\mathrm{d}l\cos\vartheta}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}4\pi r^2}$, так как при $\dot{\varepsilon}_{эл} = \varepsilon_{эл}$ и $\dot{I} = -\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} = -j\omega q$; $\dot{\overline{E}}_{эл} = -\frac{\dot{q}\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_{эл}r^3}(2\cos\vartheta\overline{e}_r + \sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)$; $\dot{U}_{эл} = -\frac{\dot{q}\mathrm{d}l\cos\vartheta}{4\pi\dot{\varepsilon}_{эл}r^2}$,

или полю диполя постоянного тока в проводящей среде при $\dot{\varepsilon}_{эл} = -j\frac{\gamma_{пр}}{\omega}$,

$$\dot{\overline{E}}_{эл} = \frac{\dot{I}\mathrm{d}l}{4\pi\dot{\varepsilon}\gamma_{пр}r^3}(2\cos\vartheta\overline{e}_r + \sin\vartheta\overline{e}_\vartheta);\ \dot{U}_{эл} = \frac{\dot{I}\mathrm{d}l\cos\vartheta}{4\pi\gamma_{пр}r^2}.$$

При синусоидальном токе в диполе, исходя из приближенных выражений напряженности, векторы $\overline{E}_{эл}$ и $\overline{H}_{эл}$ имеют сдвиг по фазе на $\pi/2$ и определяют только реактивную мощность. Среднее за период значение вектора Пойнтинга равно нулю, поэтому принимают, что в ближней зоне электромагнитное поле носит реактивный характер и излучение отсутствует.

Мгновенное значение удельной электромагнитной мощности изменяется по гармоническому закону с удвоенной частотой:

$$\overline{\Pi}(t)=\frac{1}{2}[\overline{E}_{эл}\times\overline{H}_{эл}]=\frac{1}{2}\left[\frac{I_m \mathrm{d}l}{\omega\varepsilon_{эл}4\pi r^3}(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)\sin\omega t\times\right.$$

$$\left.\times\frac{I_m \mathrm{d}l}{4\pi r^2}\sin\vartheta\cos\omega t\overline{e}_\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{I_m^2\mathrm{d}l^2}{\omega\varepsilon_{эл}32\pi^2 r^5}[(2\cos\vartheta\overline{e}_r+\sin\vartheta\overline{e}_\vartheta)\times\sin\vartheta\overline{e}_\varphi]\sin 2\omega t.$$

В течение первой части периода тока энергия находится во внешнем пространстве, а второй части периода — в источнике. Поток мощности пульсирует в ближней зоне, не отрываясь от осциллятора. Пульсация электромагнитной энергии эквивалентна движению инертной массы, т.е. гравитационного заряда [16], при гармоническом перемещении создающего переменное гравитационное поле ускорений и импульсное поле.

Следовательно, в ближней зоне одновременно с электромагнитным полем образуется переменное гравитационное поле удвоенной частоты.

9. Дальняя зона $\beta r \gg 1$ соответствует расстояниям, значительно превышающим длину волны. В этой зоне напряженности поля по величине обратно пропорциональны расстоянию, отношение их амплитуд равно, как и в случае плоских волн, волновому сопротивлению среды, реактивная мощность мала по сравнению с излучаемой:

$$\dot{\overline{B}}_{эл}=jk\sin\vartheta\dot{A}_{z\,эл}\overline{e}_\varphi;\quad \dot{\overline{E}}_{эл}=j\omega\sin\vartheta\dot{A}_{z\,эл}\overline{e}_\vartheta.$$

10. Поле магнитного диполя подобно электрическому диполю при замене $\overline{E}_{эл}$ на $\overline{H}_{эл}$ и наоборот. Сопротивление излучения магнитных осцилляторов $R_{изл}=\dfrac{\omega\mu_{эл}k^3\mathrm{d}S^2}{6\pi}=\dfrac{\omega^4\mu_{эл}(\varepsilon\mu)^{3/2}\mathrm{d}S^2}{6\pi}$ пропорционально четвертой степени частоты, что определяет их преимущественное использование на высоких частотах.

При ориентации векторных потенциалов осцилляторов вместо оси z вдоль осей x или y в выражениях (10.6) зависимости составляющих векторов напряженности поля от расстояния r сохраняются, а зависимости от φ и ϑ изменяются (табл. 10.2).

Элемент Гюйгенса рассматривают как элементарный излучатель, обладающий одновременно электрическим $\dot{P}_{эл\,x}(y)$ и магнитным

Таблица 10.2

$\bar{e}_z$	$\bar{e}_x$	$\bar{e}_y$
$\sin\vartheta\bar{e}_\varphi$	$-\sin\varphi\bar{e}_\vartheta - \cos\vartheta\cos\varphi\bar{e}_\varphi$	$\cos\varphi\bar{e}_\vartheta - \cos\vartheta\sin\varphi\bar{e}_\varphi$
$-\sin\vartheta\bar{e}_\vartheta$	$\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\bar{e}_\varphi$	$\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta + \cos\vartheta\bar{e}_\varphi$
$-2\cos\vartheta\bar{e}_r$	$2\cos\varphi\sin\vartheta\bar{e}_r$	$2\sin\varphi\sin\vartheta\bar{e}_r$

$\dot{P}_{му}(y)$ моментами. При ориентации электрического момента вдоль оси x, а магнитного момента вдоль оси y результирующее поле в прежней сферической системе координат определяется векторной суммой полей двух элементарных осцилляторов.

Электрический и магнитный моменты элемента Гюйгенса определяются через тангенциальные компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей:

$$\dot{P}_{элx}(y) = \dot{H}_0 \Delta S,\ \dot{P}_{элy}(y) = -\dot{E}_0 \Delta S.$$

Между собой компоненты векторов взаимно перпендикулярны, а их отношение равно волновому сопротивлению среды.

Электрический осциллятор элемента Гюйгенса с моментом, направленным вдоль оси x, образует в любой зоне поле с напряженностью

$$\bar{\dot{E}}_{эл} = -[j\omega(\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\bar{e}_\varphi) + \frac{1+jkr}{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\mu_{эл}r^2}(2\cos\varphi\sin\vartheta\bar{e}_r +$$

$$+\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\bar{e}_\varphi)]\dot{H}_0\Delta S\mu_{эл}\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\bar{\dot{H}}_{эл} = -\frac{1+jkr}{r}\dot{H}_0 \sin\Delta S(\sin\varphi\bar{e}_\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\varphi)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}.$$

Магнитный осциллятор с противоположно направленным вдоль оси y моментом образует поле с напряженностью

$$\bar{\dot{H}}_{эл} = [j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}(\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta + \cos\varphi\bar{e}_\varphi) + \frac{1+jkr}{j\omega\mu_{эл}r^2}(2\sin\vartheta\sin\varphi\bar{e}_r +$$

$$+\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta + \cos\varphi\bar{e}_\varphi)]\dot{E}_0\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\bar{\dot{E}}_{эл} = \frac{1+jkr}{r}(\cos\varphi\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\varphi)\dot{E}_0\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}.$$

В дальней зоне результирующее поле элемента Гюйгенса, исходя из общих решений, составит

$$\dot{\overline{H}}_{эл} = -j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}(\cos\vartheta + 1)(\sin\varphi\overline{e}_{\vartheta} + \cos\varphi\overline{e}_{\varphi})\dot{E}_0\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\dot{\overline{E}}_{эл} = -jk(\cos\vartheta + 1)(\cos\varphi\overline{e}_{\vartheta} - \sin\varphi\overline{e}_{\varphi})\dot{E}_0\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}.$$

Векторы в зоне излучения не имеют радиальных составляющих, они взаимно перпендикулярны, а отношение их модулей равно волновому сопротивлению среды. Электромагнитное поле элемента Гюйгенса отличается от поля элементарных осцилляторов по направленности векторов: в осцилляторах векторы пропорциональны $\sin\vartheta$, причем угол ϑ отсчитывается от их осей, в элементе Гюйгенса — пропорциональны $(1+\cos\vartheta)$, а угол yz отсчитывается от направления внешней нормали к поверхности.

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в плоскости yz определяется функцией $(1+\cos yz)$, представляющей собой кардиоиду. В результате вращения кардиоиды вокруг оси z получается пространственная диаграмма направленности элемента Гюйгенса (рис. 10.11). Коэффициент направленного действия равен 3 при одностороннем излучении.

Линейный симметричный электрический вибратор. Первым по сложности в сравнении с элементарным электрическим вибратором (диполем) является линейный симметричный вибратор. Он представляет собой проводник некоторой длины $2l$, возбуждаемый в середине источником электродвижущей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Размер поперечного сечения проводника $2a$ значительно меньше длины плеча вибратора l (рис. 10.12).

В симметричном вибраторе, ориентированном вдоль оси z, синусоидальное распределение тока с максимумом в его центре

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_п \sin\beta(l - |z|),$$

где $\dot{I}_п$ — амплитуда в пучности тока вибратора; l — длина плеча вибратора; β — коэффициент фазы тока в вибраторе.

На каждом плече симметричного вибратора выделим два элементарных электрических диполя dz, отстоящих от центра вибратора на расстоянии z.

Токи в элементах dz совпадают по амплитуде и фазе. Для дальней зоны можно принять $r_1 = r_2 = r$, $\Delta r = r_1 - r = -z\cos\vartheta$, $\Delta r = r_2 - r = z\cos\vartheta$ и для напряженности магнитного поля двух элементарных электрических осцилляторов на основании выражений (10.6) записать:

$$d\dot{H}_{эл} = \frac{jk}{4\pi r}\dot{I}_п \sin\beta(l - |z|)dz\, e^{-jkr}(e^{jkz\cos\vartheta} + e^{-jkz\cos\vartheta})\sin\vartheta.$$

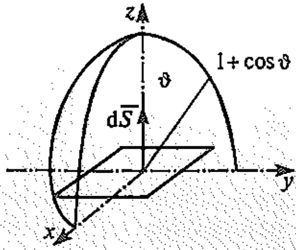


Рис. 10.11. Пространственная диаграмма направленности излучения элемента Гюйгенса

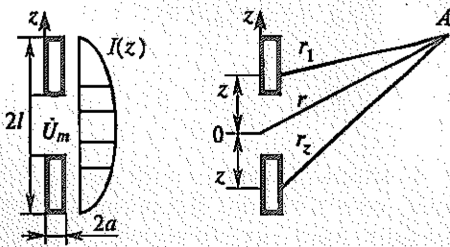


Рис. 10.12. Линейный симметричный электрический вибратор

Магнитное поле, образованное всеми элементарными излучателями, определяется интегралом с пределами интегрирования от нуля до l, т.е. по всей длине плеча вибратора:

$$\dot{H}_{\text{эл}} = \int_0^l \frac{jk}{4\pi r} \dot{I}_{\text{п}} \sin\beta(l - |z|) e^{-jkr} (e^{jkz\cos\vartheta} + e^{-jkz\cos\vartheta}) \sin\vartheta dz;$$

$$\dot{H}_{\text{эл}} = \frac{j^2}{4\pi r} \dot{I}_{\text{п}} e^{-jkr} \frac{\cos(kl\cos\vartheta) - \cos kl}{\sin\vartheta}. \qquad (10.7)$$

Структура поля линейного симметричного электрического вибратора совпадает со структурой поля его элементарных диполей. Различие существует в направленных свойствах.

Из выражений (10.7) видно, что нормированная диаграмма направленности симметричного вибратора определяется функцией

$$F(\vartheta) = \frac{1}{F_m} \frac{\cos(kl\cos\vartheta) - \cos kl}{\sin\vartheta},$$

где F_m — постоянный множитель, нормирующий функцию к единице в направлении главного максимума.

Функция $F(\vartheta)$ не зависит от угла φ, следовательно, диаграмма направленности представляет поверхность вращения вокруг продольной оси вибратора, т.е. диаграмма направленности в экваториальной плоскости является окружностью. В меридианной плоскости она зависит от параметра $kl = 2\pi \frac{l}{\lambda}$, т.е. относительной длины вибратора.

Задаваясь различными величинами параметра $2\pi \frac{l}{\lambda}$, можно аналитически получить соответствующие диаграммы направленности линейного симметричного вибратора (рис. 10.13).

Анализ диаграмм направленности приводит к следующим выводам:

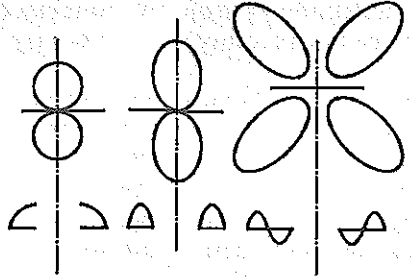


Рис. 10.13. Диаграммы направленности линейного симметричного электрического вибратора

при длине симметричного вибратора $2l \ll \lambda$ максимум излучения перпендикулярен проводу вибратора, диаграмма направленности в меридианной плоскости имеет лишь один лепесток, который тем уже, чем больше относительная длина вибратора;

при $2\frac{l}{\lambda} > 1$ появляются боковые лепестки, которые растут с увеличением $2\frac{l}{\lambda}$, однако при $2\frac{l}{\lambda} \le \frac{5}{4}$ главный максимум все же перпендикулярен оси вибратора;

при $2\frac{l}{\lambda} = 2, 4, 6, \ldots$, т.е. когда по длине вибратора укладываются две или любое четное число длин волн, излучение в направлении, перпендикулярном оси вибратора, отсутствует;

при $2\frac{l}{\lambda} > 2$ с увеличением $2\frac{l}{\lambda}$ главный максимум прижимается к оси вибратора.

В случае полуволнового вибратора $2\frac{l}{\lambda} = 0{,}5$ нормированная диаграмма направленности определяется функцией $F(\vartheta) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$, где нормирующий множитель $F_m = 1$, так как в максимуме при $\vartheta = 90^\circ$ функция равна единице. Пространственная диаграмма направленности представляет собой тороид, немного сплющенный вдоль оси z.

Мощность излучения и сопротивление излучения определяются, как и в случае элементарного вибратора, путем интегрирования плотности потока мощности по замкнутой поверхности сферы, охватывающей вибратор, в волновой зоне:

$$P_{\text{изл}} = \frac{I_{m\text{п}}^2}{8\pi^2} Z_c \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos(kl\cos\vartheta) - \cos kl}{\sin\vartheta} \right)^2 \frac{2\pi r \sin\vartheta}{r^2} r d\vartheta;$$

$$R_{\text{изл}} = \frac{2P_{\text{изл}}}{I_{m\text{п}}^2} = \frac{Z_c}{8\pi} [\sin 2kl(\mathrm{si}4kl - 2\mathrm{si}2kl) + \cos kl(0{,}577 + \ln kl) +$$
$$+ \mathrm{ci}4kl - 2\mathrm{ci}2kl + 2(0{,}577 + \ln kl - \mathrm{ci}2kl)].$$

Интеграл вычисляется с использованием тригонометрических и специальных функций — интегральных синусов и косинусов [24].

На рис. 10.14 приведены графики зависимости сопротивления излучения и коэффициента направленного действия линейного симметричного электрического вибратора от длины его плеча [28].

Сопротивление излучения имеет максимумы при длине вибратора, приблизительно равной длине четного числа полуволн, и минимумы — нечетного. Причина возникновения минимумов, например, при $2\frac{l}{\lambda} = 1{,}5$, — появление участка по длине вибратора с током противоположного направления, излучение которого частично компенсирует излучение других частей вибратора с током основного направления.

Сопротивление излучения полуволнового вибратора $\left(2\frac{l}{\lambda} = 0{,}5\right)$ равно 73,1 Ом, волнового вибратора — 200 Ом.

Коэффициент направленного действия линейного симметричного вибратора $D = \frac{120(1 - \cos kl)}{R_{\text{изл}}}$ зависит от длины плеча вибратора. Для коротких вибраторов $D = 1{,}5$, для полуволнового — 2,4. Максимальное значение КНД $D = 3{,}15$ при $\frac{l}{\lambda} = 0{,}62$.

Входное сопротивление линейного симметричного вибратора определяется отношением комплексных амплитуд напряжения и тока на его входных электродах:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}.$$

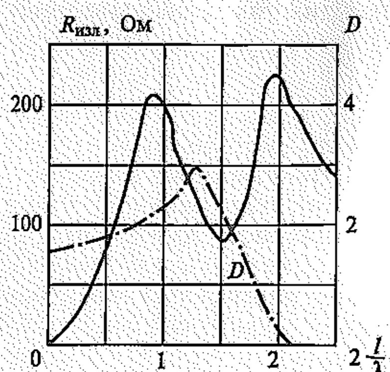


Рис. 10.14. Графики изменения сопротивления излучения и коэффициента направленного действия линейного симметричного электрического вибратора от длины его плеча

Активная компонента $R_{\text{вх}}$ входного сопротивления характеризует потери энергии на излучение и тепловые потери в вибраторе, реактивная компонента $X_{\text{вх}}$ определяет реактивную мощность в пространстве, ограниченном «ближней зоной» вибратора.

Инженерный метод расчета входного сопротивления основывается на использовании теории длинных линий. Оно определяется как входное сопротивление разомкнутой на конце двухпроводной линии с потерями:

$$R_{вх} = \frac{R_{изл}}{\sin^2 \beta l + R_{изл}^2 / Z_c^2}; \quad X_{вх} = -\frac{Z_c}{2} \frac{\sin 2\beta l}{\sin^2 \beta l + R_{изл}^2 / Z_c^2},$$

где $R_{изл}$ — сопротивление излучения вибратора длиной $\frac{l}{\lambda}$, отнесенное к амплитуде тока в пучности; β — коэффициент фазы волны на вибраторе; Z_c — волновое сопротивление вибратора, определяемое из зависимостей $Z_c = 120\left(\ln\frac{l}{a} - 1\right)$ при $l \ll \lambda$ и $Z_c = 120\left(\ln\frac{l}{a} - 0{,}577\right)$ при $l > 0{,}25\lambda$.

На рис. 10.15 приведены графики изменения входного сопротивления ($R_{вх}$ и $X_{вх}$) от его относительной длины с волновыми сопротивлениями 372 и 156 Ом.

Линейный симметричный электрический вибратор широко используется на практике в качестве приемно-передающих антенн.

Излучение открытого конца прямоугольного волновода. Металлические волноводы — наиболее распространенный тип линий передачи электромагнитной энергии в диапазоне сантиметровых волн. Волноводами обычно называют металлические трубы прямоугольного, круглого, эллиптического сечения, т.е. с любым замкнутым контуром поперечного сечения. Трубы волноводов стандартизованы. Размеры волноводов рекомендованы международной электротехнической комиссией (МЭК).

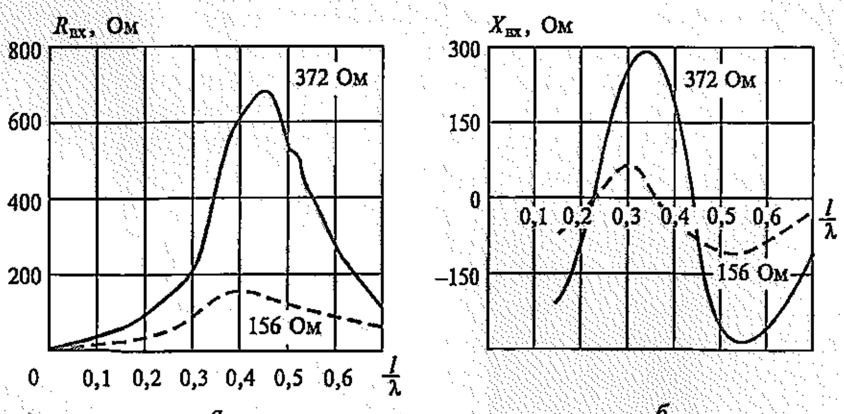


Рис. 10.15. Графики изменения входного сопротивления линейного симметричного электрического вибратора от его относительной длины:
а — активного; *б* — реактивного

Открытый волновод рассматривают как плоскую излучающую поверхность, состоящую из синфазных элементов Гюйгенса, ограниченную прямоугольным контуром. Направленность излучения зависит от площади *излучающего отверстия*, *называемого* апертурой, а также от характера распределения амплитуд и фаз, возбуждающих их полей.

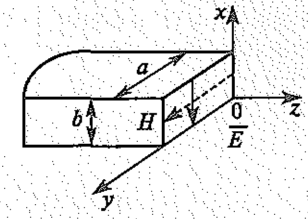


Рис. 10.16. Структура электромагнитого поля в поперечном сечении прямоугольного волновода для волны H_{10}

Волноводы прямоугольного сечения обычно возбуждаются таким образом, что в них распространяется поперечная волна основного типа H_{10}, а возникновение волн высших типов исключено. Это достигается соответствующим возбуждающим устройством и выбором сечения трубы. Возбуждающими устройствами в большинстве случаев являются различные модификации электрического осциллятора, магнитного вибратора в виде рамки с током или отверстия связи в боковой стенке. Рабочие длины волн в передаваемом спектре частот и широкая внутренняя стенка волновода a находятся в соотношении $a < \lambda_{раб} > 2a$. При передаче по волноводу требуемого спектра частот исходят из условия: $a = 0{,}75\lambda_{раб}$, где $\lambda_{раб}$ — средняя длина волны рабочего диапазона антенны. Узкая стенка обычно равна примерно половине широкой стенки, но может быть и меньше.

Структура электромагнитного поля (рис. 10.16) в поперечном сечении прямоугольного волновода для волны H_{10} характеризуется составляющей вектора напряженности электрического поля $\dot{E}_x$, ориентированной параллельно узкой стенки волновода, и составляющ ей вектора напряженности магнитного поля $\dot{H}_y$, ориентированной параллельно широкой стенки волновода.

Составляющие $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$ неизменны вдоль узкой стенки волновода, т. е. вдоль оси, и изменяются по синусоидальному закону вдоль широкой стенки волновода:

$$\dot{E}_x(y) = \dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z}; \quad \dot{H}_y(y) = \dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z},$$

где $\dot{E}_0$, $\dot{H}_y$ — максимальные значения векторов в центре широкой стенки волновода; k_z — волновое число волны H_{10}, распространяющейся внутри волновода вдоль оси z, $k_z = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$.

В излучающем отверстии волновода действительная картина распределения полей несколько отличается от рассмотренной, но это сказывается только при оценке тонкой структуры излучения и может быть опущено.

Открытый конец волновода может излучать в воздушное пространство, в диэлектрик и полупроводник.

Так же, как на разомкнутом конце длинной линии, происходит отражение и от открытого конца волновода. Коэффициенты отражения и преломления Френеля находим из выражений (10.4а, б) при $\varphi = 0$, т.е. при нормальном падении волн на границу раздела двух сред с волновыми сопротивлениями Z_{c1}, Z_{c2}:

для волн с вертикальной поляризацией

$$V = \frac{E_{m\text{отр}}}{E_{m\text{п}}} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}; W = \frac{E_{m\text{пр}}}{E_{m\text{п}}} 1 - V = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}};$$

для волн с горизонтальной поляризацией

$$V^* = \frac{H_{m\text{отр}}}{H_{m\text{п}}} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}; W^* = \frac{H_{m\text{пр}}}{H_{m\text{п}}} = 1 + V^* = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}.$$

Коэффициенты отражения определяются экспериментально. Они равны по величине и противоположны по знаку. Их приближенно вычисляют, рассматривая волновод как длинную линию с волновым сопротивлением Z_{c1}, нагруженную на волновое сопротивление свободного пространства Z_{c2}.

Тангенциальные составляющие напряженности поля в раскрыве волновода найдем, складывая падающую и отраженную волны:

$$\dot{E}_x(y) = W\dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_y(y) = W^* \dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-jk_z z}.$$

Отношение тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей во всех точках раскрыва остается величиной постоянной:

$$\frac{\dot{H}_y}{\dot{E}_x} = \frac{1}{Z_{c2}} e^{-j\beta},$$

где β — сдвиг фаз между напряженностью электрического и магнитного полей. Обычно принимают $\cos\beta \approx 1$.

Раскрыв волновода представим в виде системы одинаково ориентированных элементов Гюйгенса с моментами:

$$\dot{P}_{\text{му}}(y) = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S;$$

$$\dot{P}_{\text{элх}}(y) = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S.$$

Каждый бесконечно малый элемент поверхности ΔS с моментами $\dot{P}_{\text{му}}(y)$ и $\dot{P}_{\text{элх}}(y)$ создает во внешнем пространстве в сферической системе координат электромагнитное поле:

$$\begin{aligned}\overline{\dot{E}}_{\text{эл}} = &-[j\omega(\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\bar{e}_\varphi) + \frac{1 + jkr}{j\omega\dot{\varepsilon}_{\text{эл}}\mu_{\text{эл}}r^2}(2\cos\varphi\sin\vartheta\bar{e}_r + \\ &+\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta - \sin\varphi\bar{e}_\varphi)]\frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}\dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\,\mu_{\text{эл}}\frac{\mathbf{e}^{-jkr}}{4\pi r};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\dot{B}}_{\text{эл}} = &-\frac{1 + jkr}{r}\frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}\dot{H}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\,\mu_{\text{эл}}(\sin\varphi\bar{e}_\vartheta + \\ &+\cos\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\varphi)\frac{\mathbf{e}^{-jkr}}{4\pi r};\end{aligned} \tag{10.8а}$$

$$\begin{aligned}\overline{\dot{H}}_{\text{эл}} = &[j\omega\dot{\varepsilon}_{\text{эл}}(\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta + \cos\varphi\bar{e}_\varphi) + \frac{1 + jkr}{j\omega\mu_{\text{эл}}r^2}(2\sin\vartheta\sin\varphi\,\bar{e}_r + \\ &+\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\vartheta + \cos\varphi\bar{e}_\varphi)]\frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\frac{\mathbf{e}^{-jkr}}{4\pi r};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\dot{E}}_{\text{эл}} = &\frac{1 + jkr}{r}(\cos\varphi\bar{e}_\vartheta - \\ &-\sin\varphi\cos\vartheta\bar{e}_\varphi)\frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\frac{\mathbf{e}^{-jkr}}{4\pi r}.\end{aligned} \tag{10.8б}$$

Поле системы всех элементов Гюйгенса определяется интегрированием выражений (10.8а, б) по всей площади апертуры.

На расстояниях от открытого конца волновода, соизмеримых с длиной волны, а следовательно, и с поперечными размерами самого волновода, векторы напряженности поля необходимо рассчитывать по общим формулам в каждом конкретном случае путем интегрирования их составляющих по всей площади поперечного сечения волновода.

Так, при исследовании диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью отношение волновых сопротивлений стремится к нулю, коэффициент отражения — к единице, электрический момент элемента Гюйгенса — к нулю, а магнитный момент удваивается, что эквивалентно поверхностному распределению по поперечному сечению синфазных элементарных

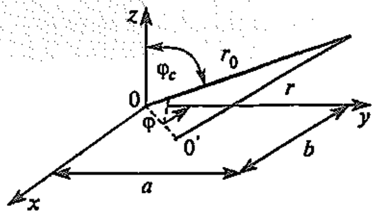


Рис. 10.17. Поле апертуры прямоугольного волновода

магнитных диполей, каждый из которых создает в ближней зоне электромагнитное квазистатическое поле.

При исследовании электромагнитного поля в дальней зоне от открытого конца волновода, т.е. на расстояниях, значительно превышающих длину волны в свободном пространстве и поперечные размеры волновода, определяют составляющие векторов напряженности поля путем интегрирования выражений (10.8) по координатам ϑ и φ от элемента Гюйгенса по всей площади апертуры ab.

Выражения (10.8) определяют поле в безграничной среде от каждого элемента Гюйгенса в сферической системе координат с центром в самом элементе. При интегрировании по площади апертуры центр сферической системы координат перемещается относительно выбранного начала координат. За счет этого координаты r, ϑ, φ получают приращения (рис. 10.17).

Учитывая, что ширина a и высота b волновода малы по сравнению с расстоянием до исследуемой точки свободного пространства, приращениями углов пренебрегают, приращение Δr определяют из треугольника $00'C$, как $\Delta r = \sin\vartheta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$.

В результате в выражениях углы при интегрировании не изменяются, а расстояние является функцией от x и y:

$$r = r_0 - \sin\vartheta(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

где r_0 — расстояние от исследуемой точки до начала выбранной системы координат.

Составляющие векторов напряженности поля по осям ϑ и φ в свободном пространстве от элемента Гюйгенса, с учетом противоположного направления вектора напряженности электрического поля по сравнению с направлением оси x составят

$$\dot{\overline{E}}_{эл} = -j\omega(\cos\varphi\cos\vartheta\overline{e}_\vartheta - \sin\varphi\overline{e}_\varphi)\frac{2Z_{c1}}{Z_{c2}+Z_{c1}}\dot{H}_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\,\mu_{эл}\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\dot{\overline{H}}_{эл} = -jk\frac{2Z_{c1}}{Z_{c2}+Z_{c1}}\dot{H}_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S(\sin\varphi\overline{e}_\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\overline{e}_\varphi)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\dot{\overline{H}}_{эл} = -j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}(\sin\varphi\cos\vartheta\overline{e}_\vartheta + \cos\varphi\overline{e}_\varphi)\frac{2Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}}\dot{\overline{E}}_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r};$$

$$\dot{\overline{E}}_{эл} = -jk(\cos\varphi\overline{e}_\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta\overline{e}_\varphi)\frac{2Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}}\dot{E}_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Delta S\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}.$$

При интегрировании векторов напряженности по всей поверхности апертуры волновода, принимая во внимание зависимость моментов элемента Гюйгенса от координаты y, как $\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$, и расстояния r от x, y, как $r = r_0 - \sin\vartheta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$, результирующие составляющие этих векторов будут пропорциональны интегралу:

$$Q = \int\limits_S \frac{e^{-jkr}}{r}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)dS =$$

$$= \int\limits_0^a dy\int\limits_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\frac{e^{-jkr_0 + jkx\sin\vartheta\cos\varphi + jky\sin\vartheta\sin\varphi}}{r_0}dx =$$

$$= \frac{\pi}{a}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\frac{1 - e^{jkb\sin\vartheta\cos\varphi}}{k\sin\vartheta\cos\varphi}\frac{1 + e^{jka\sin\vartheta\sin\varphi}}{k^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \cong$$

$$\cong -j\frac{4\pi}{a}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\frac{\sin(0{,}5kb\sin\vartheta\cos\varphi)}{k\sin\vartheta\cos\varphi}\frac{\cos(0{,}5ka\sin\vartheta\sin\varphi)}{k^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

При вычислении интеграла принято:

$$\sin\left(\frac{\pi b}{a}\right) = 0; \quad \cos\left(\frac{\pi b}{a}\right) = -1.$$

Окончательные выражения для результирующих составляющих векторов в дальней зоне от открытого конца волновода в свободном пространстве при размещении начала сферической системы координат в центре апертуры имеют следующий вид:

$$\dot{E}_{\varphi\text{эл}} = j\omega\sin\varphi\,\mu_{\text{эл}}(1 + \cos\vartheta)\frac{2}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0 Q;\ \dot{H}_{\vartheta\text{эл}} = -\frac{1}{Z_{c2}}E_{\varphi\text{эл}};$$

$$\dot{E}_{\vartheta\text{эл}} = -j\omega\mu_{\text{эл}}\cos\varphi(\cos\vartheta + 1)\frac{2}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0 Q;\ \dot{H}_{\varphi\text{эл}} = \frac{1}{Z_{c2}}\dot{E}_{\vartheta\text{эл}}.$$

В плоскости вектора E при $\varphi = 0$ составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей определяются по формулам:

$$\dot{E}_{\vartheta\text{эл}} = \omega\mu_{\text{эл}}(\cos\vartheta + 1)\frac{2}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0\frac{4a}{\pi}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\frac{\sin(0{,}5kb\sin\vartheta)}{k\sin\vartheta};$$

$$\dot{H}_{\varphi\text{эл}} = \frac{1}{Z_{c2}}\dot{E}_{\vartheta\text{эл}}; \quad \dot{E}_{\varphi\text{эл}} = 0, \dot{H}_{\vartheta\text{эл}} = 0,$$

а в плоскости вектора H при $\varphi = \pi/2$ — по формулам:

$$\dot{E}_{\varphi эл} = -\omega\mu_{эл}(\cos\vartheta + 1)\frac{2}{Z_{c1} + Z_{c2}}\dot{E}_0\frac{2b\pi}{a}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\frac{\cos(0{,}5ka\sin\vartheta)}{k^2\sin^2\vartheta - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2};$$

$$\dot{H}_{\vartheta эл} = -\frac{1}{Z_{c2}}\dot{E}_{\varphi эл};\quad \dot{E}_{\vartheta эл} = 0,\quad \dot{H}_{\varphi эл} = 0.$$

Диаграммы направленности излучения открытого конца прямоугольного волновода в свободном пространстве в обеих плоскостях отличаются от диаграммы направленности элемента Гюйгенса в основном из-за разных множителей: $\dfrac{\sin(0{,}5kb\sin\vartheta)}{0{,}5kb\sin\vartheta}$ и $\dfrac{\cos(0{,}5ka\sin\vartheta)}{\left(\dfrac{ka}{\pi}\sin\vartheta\right)^2 - 1}$, графики которых приведены на рис. 10.18.

Фазированные антенные решетки. Для большинства линий радиосвязи, как правило, требуется направлять поток излученной энергии в некотором пространственном угловом секторе.

В настоящее время широкое распространение получили остронаправленные сканирующие антенны сверхвысоких частот (СВЧ) [28]. Сканирование позволяет осуществлять обзор окружающего пространства, сопровождение движущихся объектов и определение их координат местоположения. В диапазоне СВЧ антенны создают остронаправленное излучение с шириной луча в единицы и доли градусов и имеют коэффициент усиления, достигающий десятков и сотен тысяч. При этом улучшаются помехозащищенность, скрытность и другие характеристики систем.

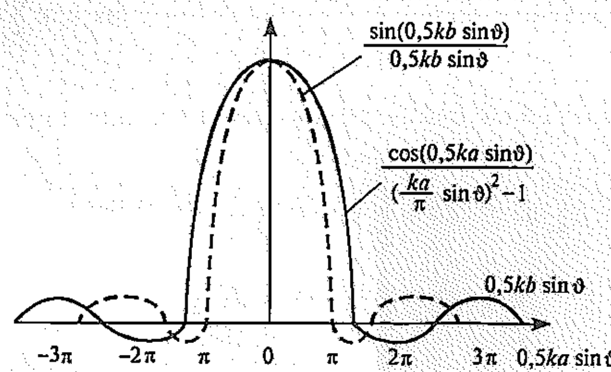


Рис. 10.18. Диаграмма направленности излучения открытого конца прямоугольного волновода

Для создания сканирующих остронаправленных антенн применяются, в частности, фазированные антенные решетки (ФАР). В качестве излучающих элементов в ФАР используются вибраторные, полосковые, директорные, волноводные и другие излучатели.

Одним из наиболее распространенных типов ФАР являются линейные и плоские решетки.

Рассмотрим подробнее линейную решетку, состоящую из электрических или магнитных диполей, расположенных симметрично вдоль оси на равном расстоянии друг относительно друга (рис. 10.19).

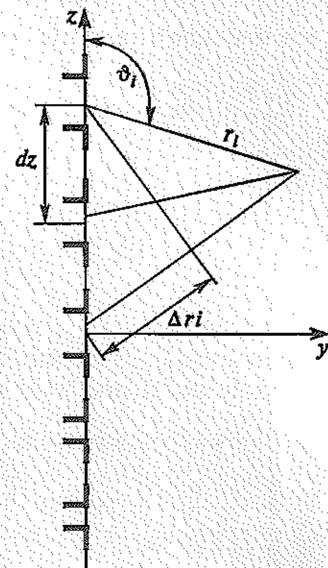


Рис. 10.19. Поле фазированной антенной решетки

Предположим, что моменты диполей равны по амплитуде, фазе и ориентированы по оси z. В дальней зоне при $r \gg N_z \mathrm{d}z$ электромагнитное поле решетки определяется как результат суммирования полей отдельных диполей (10.6). В этом случае векторы напряженности пропорциональны $\sum_{i=1}^{N_z} \sin\vartheta_i \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{r_i}$.

Приближенно принимают $\vartheta_i \cong \vartheta$ и $r_i = r + \Delta r_i = r + il_z \cos\vartheta \mathrm{d}z$.

Ряд $\sum_{i=1}^{N_z} \sin\vartheta_i \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{r_i} \cong \sin\vartheta_i \frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{r} \sum_{i=1}^{N_z} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta}$ приводится к простому выражению $\sin\vartheta \dfrac{\sin\left(\dfrac{kN_z l_z}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\left(\dfrac{kl_z}{2}\cos\vartheta\right)} \dfrac{\mathrm{e}^{-jkr}}{r}$, так как $\sum_{i=1}^{N_z} \mathrm{e}^{-jl_z kl\cos v}$ представляет собой сумму членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=1}^{N_z} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} - \sum_{i=N_z}^{\infty} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} - \mathrm{e}^{-jkN_z\cos\vartheta} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} =$$

$$= (1 - \mathrm{e}^{-jkN_z\cos\vartheta}) \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-jl_z ki\cos\vartheta} = (1 - \mathrm{e}^{-jkN_z\cos\vartheta})(1 - \mathrm{e}^{-jk\cos\vartheta})^{-1}.$$

В результате структура поля из N_z диполей совпадает со структурой одиночного диполя по всем параметрам, за исключением характеристики направленности.

Если для одиночного диполя, ориентированного вдоль оси z, она описывается тригонометрической функцией $\sin\vartheta$, то для линейной решетки она описывается произведением $\sin\vartheta$ на множитель решетки:

$$F(\vartheta) = \sin\vartheta \frac{\sin\left(\frac{kN_z l_z}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{kl_z}{2}\cos\vartheta\right)},$$

где второй сомножитель носит наименование множителя комбинирования, или множителя решетки.

Числитель функции направленности $\sin(0{,}5kN_z l_z \cos\vartheta)$ обращается в нуль, когда аргумент синуса кратен π:

$$0{,}5kN_z l_z \cos v_{0n} = \pi n.$$

В соответствии с порядковым номером минимума функции направленности $n = 1, 2, 3...$ находим положение нулей $\cos\vartheta_{0n} = \frac{2\pi n}{kN_z l_z}$.

В направлении нормали к оси решетки $\vartheta = \pi/2$ поля всех диполей складываются арифметически:

$$F(\vartheta) = \sin\vartheta \frac{\sin\left(\frac{kN_z l_z}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{kl_z}{2}\cos\vartheta\right)} \cong \frac{\frac{kN_z l_z}{2}\cos\vartheta}{\frac{kl_z}{2}\cos\vartheta} = N_z.$$

Ширина основного лепестка определяется при $n = 1$ как

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{0n}\right) = \pi - 2\arccos\frac{2\pi}{kN_z l_z} \cong \frac{2\lambda}{N_z l_z}.$$

Формула отражает фундаментальное положение теории антенн о том, что повышение направленности излучения антенны возможно на базе увеличения ее размеров в сравнении с длиной волны.

В характеристиках направленности наряду с главным лепестком существуют и боковые (рис. 10.20).

Так, для получения остронаправленного главного лепестка шириной 3° требуется решетка протяженностью 40 длин волн.

Линейная решетка обеспечивает увеличение направленности излучения в одной меридианной плоскости. Для увеличения направленности излучения в пространстве применяют двухмерные или трехмерные решетки.

Выводы справедливы для систем из любых однотипных излучателей, в том числе и из линейных симметричных вибраторов.

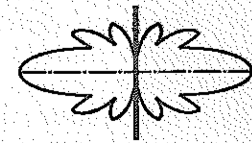


Рис. 10.20. Диаграмма направленности фазированной антенной решетки

10.5. Электромагнитное экранирование

Электромагнитные экраны применяют как для защиты отдельных элементов, блоков, устройств и целых комплексов различных электротехнических систем от внешнего переменного электромагнитного поля, так и для ослабления внешнего поля самих устройств. В качестве экранов используют металлические оболочки. Общий метод расчета экранов состоит в определении электрического и магнитного поля во внешней среде, стенке оболочки и внутри нее и относится к числу сложнейших задач электродинамики. В аналитическом виде решение возможно только для оболочек, совпадающих по конфигурации с одной из известных координатных систем [29].

Экранирование электромагнитного поля открытыми проводящими оболочками возможно за счет возбуждения в них токов, создающих встречные компенсирующие поля. На основании закона электромагнитной индукции электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре, равна отрицательной скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Это говорит о том, что возникающая в контуре ЭДС вызывает в нем ток такого направления, при котором создаваемый им вокруг контура вторичный магнитный поток препятствует изменению первичного магнитного поля. В результате внутри контура внешний магнитный поток ослабляется встречным вторичным магнитным потоком. Ослабление поля зависит от сопротивления контура. В разомкнутом контуре ток отсутствует, а следовательно, отсутствует и эффект экранирования. Поэтому оболочки должны быть замкнутыми, в них могут быть окна, отверстия, вырезы различной конфигурации, не нарушающие замкнутость контуров. Поперечные и продольные размеры отверстий должны быть малы по сравнению с длиной волны. Этому требованию, в частности, удовлетворяют металлические сетки, широко используемые на практике для экранирования помещений.

На высоких частотах сопротивление проводящего контура практически равно его реактивной части, т.е. индуктивному сопротивлению, пропорциональному частоте. С ростом частоты увеличивается сопротивление контура, но пропорционально частоте увеличивается и величина ЭДС. Поэтому на высоких частотах ослабление поля мало зависит от частоты.

Коэффициент экранирования определяется как отношение напряженности магнитного поля внутри экрана к напряженности внешнего магнитного поля.

На высоких частотах коэффициент экранирования стремится к нулю. В этом случае встречный магнитный поток внутри экрана полностью компенсирует внешний магнитный поток.

С уменьшением частоты внешнего электромагнитного поля реактивное индуктивное сопротивление контура становится соизмеримым с активной составляющей сопротивления, определяемой тепловыми потерями в контуре. В результате ЭДС с понижением частоты уменьшается быстрее, чем сопротивление контура, вихревые токи и, следовательно, встречный магнитный поток ослабляются, а коэффициент экранирования стремится к единице.

В закрытых проводящих оболочках коэффициент экранирования существенно зависит от соотношения ее толщины и глубины проникновения волны. За счет поверхностного эффекта внешнее поле дополнительно ослабляется.

Рассмотрим экранирующее действие металлической оболочки на примере бесконечно длинного полого тонкостенного цилиндра (рис. 10.21) при воздействии на него плоских электромагнитных волн с вертикальной ($\dot{E}_{y\text{п}} = a e^{jkx}, \dot{H}_{z\text{п}} = -\dfrac{a}{Z_0} e^{jkx}$) и горизонтальной ($\dot{E}_{z\text{п}} = a e^{jkx}, \dot{H}_{y\text{п}} = \dfrac{a}{Z_0} e^{jkx}$) поляризацией.

При решении задачи воспользуемся векторными потенциалами $\dot{A}^*_{z\text{п}} = j\dfrac{a}{k} e^{jkx}, \dot{A}_{z\text{п}} = j\dfrac{a}{\omega} e^{jkx}$, и разложением показательной функции в ряд по функциям Бесселя в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью рассматриваемого цилиндра:

$$e^{jkx} = e^{jkr\cos\varphi} = I_0(jkr) + 2\sum_{p=1}^{\infty} I_p(jkr)\cos p\varphi.$$

В каждой среде решения для векторных потенциалов, имеющих в данной задаче только составляющие по оси z, находим в виде бесконечных сумм:

во внешней среде

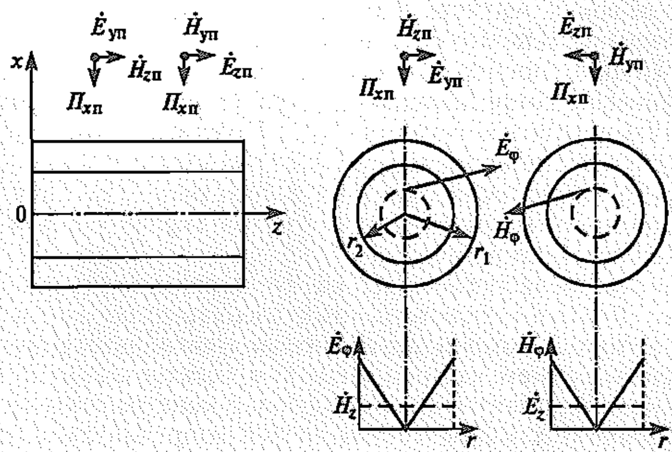


Рис. 10.21. Поле бесконечно длинного полого тонкостенного цилиндра при воздействии плоских электромагнитных волн

$$A_{0z} = A_{00} I_0(jkr) + 2\sum_{p=1}^{\infty} A_{0p} I_p(jkr + B_{0p} K_p(jkr) \cos p\varphi;$$

в стенке оболочки

$$A_{1z} = A_{10} I_0(jkr) + 2\sum_{p=1}^{\infty} A_{1p} I_p(jkr) + B_{1p} K_p(jkr) \cos p\varphi;$$

внутри оболочки

$$A_{0z} = A_{20} I_0(jkr) + 2\sum_{p=1}^{\infty} A_{2p} I_p(jkr) \cos p\varphi.$$

Постоянные коэффициенты B_{2p} для внутренней полости цилиндра принимаем равными нулю, так как модифицированные функции Бесселя второго рода $K_p(jkr)$ при малых аргументах стремятся к бесконечности.

С учетом равенства дивергенции от векторного потенциала определяем составляющие $\dot{\bar{E}}_{эл}$ и $\dot{\bar{H}}_{эл}$ в комплексной форме из выражений (10.5):

$$\dot{\bar{B}}_{эл} = \operatorname{rot} \dot{\bar{A}}_{эл};\ \dot{\bar{E}}_{эл} = -j\omega \dot{\bar{A}}_{эл};\ \dot{\bar{E}}_{эл} = \operatorname{rot} \dot{\bar{A}}^{*}_{эл};\ \dot{\bar{H}}_{эл} = j\omega \dot{\varepsilon}_{эл} \dot{\bar{A}}^{*}_{эл}.$$

Постоянные коэффициенты A_{0p}, A_{1p}, A_{2p}, B_{0p} и B_{1p} находим из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях экрана.

В результате, опуская промежуточные решения, для составляющих векторов напряженности электрического и магнитного поля внутри экрана получаем:

при воздействии волн с вертикальной поляризацией

$$E_{2r}=-j\frac{2}{k_2r}\sum_{p=1}^{\infty}A_{2p}pI_p(jk_2r)\sin p\varphi;$$

$$H_{2z}=\frac{1}{Z_{c2}}[A_{20}I_0(jk_2r)+2\sum_{p=1}^{\infty}A_{2p}I_p(jk_2r)\cos p\varphi]; \qquad (10.9а)$$

$$E_{2\varphi}=A_{20}I_0'(jk_2r)+2\sum_{p=1}^{\infty}A_{2p}I_p'(jk_2r)\cos p\varphi;$$

при воздействии волн с горизонтальной поляризацией

$$H_{2r}=-j\frac{2}{\omega\mu_2r}\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}pI_p(jk_2r)\sin p\varphi;$$

$$E_{2z}=B_{20}I_0(jk_2r)+2\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}I_p(jk_2r)\cos p\varphi; \qquad (10.9б)$$

$$H_{2\varphi}=\frac{1}{Z_{c2}}[B_{20}I_0'(jk_2r)+2\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}I_p'(jk_2r)\cos p\varphi],$$

где $A_{2p}=j\frac{2a}{k_0r_1C}e^{-jk_1(r_1-r_2)}$; $B_{2p}=-j\frac{2a}{k_0r_1D}e^{-jk_1(r_1-r_2)}$;

$$C=\left[\frac{Z_{c0}}{Z_{c1}}K_p'(jk_0r_1)-K_p(jk_0r_1)\right]\left[\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}I_p(jk_2r_2)+I_p'(jk_2r_2)\right]-$$

$$-e^{-jk_1(r_1-r_2)}\left[\frac{Z_{c0}}{Z_{c1}}K_p'(jk_0r_1)+K_p(jk_0r_1)\right]\left[I_p'(jk_2r_2)-\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}I_p(jk_2r_2)\right];$$

$$D=\left[\frac{Z_{c0}}{Z_{c1}}K_p(jk_0r_1)-K_p'(jk_0r_1)\right]\left[\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}I_p'(jk_2r_2)+I_p(jk_2r_2)\right]-$$

$$-e^{-jk_1(r_1-r_2)}\left[\frac{Z_{c0}}{Z_{c1}}K_p(jk_0r_1)+K_p'(jk_0r_1)\right]\left[I_p(jk_2r_2)-\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}I_p'(jk_2r_2)\right].$$

Решения (10.9 *а*, *б*) справедливы для любого бесконечно длинного двухслойного цилиндра при воздействии на него плоских электромагнитных волн с вертикальной и горизонтальной поляризациями.

При вертикальной поляризации волн в оболочке и внутри цилиндра возникает вихревое электрическое поле $E_{2\varphi}$, при горизонтальной поляризации волн — вихревое магнитное поле $H_{2\varphi}$, создающее в этих средах встречное поле.

За счет проявления поверхностного эффекта в стенке металлической оболочки происходит ослабление напряженности поля в $e^{-jk_1(r_1-r_2)}$ раз. При толщине стенки, превышающей глубину проникновения, внешнее электромагнитное поле не проникает внутрь экрана, как и поле источника, размещенного в оболочке, не влияет на внешнее поле.

Постоянные коэффициенты для трехслойной среды «воздух—металл—воздух» при $p = 0$ равны $A_{20} = B_{20} \cong \dfrac{2a}{1 + e^{-jk_1(r_1-r_2)}} e^{-jk_1(r_1-r_2)}$, а при $p \neq 0$ пропорциональны $\dfrac{Z_{c1}}{Z_{c0}}(k_0 r_1)^p$. Это говорит о том, что радиальные составляющие векторов напряженности поля малы по сравнению с круговыми составляющими этих векторов.

В результате внутри цилиндра составляющие векторов напряженности поля приближенно составят:

при воздействии волн с вертикальной поляризацией

$$H_{2z} \cong \frac{1}{Z_{c2}} A_{20} I_0(jk_2 r) = -\frac{1}{Z_{c2}} \frac{2a}{1 + e^{-jk_1(r_1-r_2)}} e^{-jk_1(r_1-r_2)};$$

$$E_{2\varphi} \cong A_{20} I_0'(jk_2 r) = jk_2 r \frac{a}{1 + e^{-jk_1(r_1-r_2)}} e^{-jk_1(r_1-r_2)};$$

при воздействии волн с горизонтальной поляризацией

$$E_{2z} \cong B_{20} I_0(jk_2 r) = \frac{2a}{1 + e^{-jk_1(r_1-r_2)}} e^{-jk_1(r_1-r_2)};$$

$$H_{2\varphi} \cong \frac{1}{Z_{c2}} B_{20} I_0'(jk_2 r) = jk_2 r \frac{1}{Z_{c2}} \frac{a}{1 + e^{-jk_1(r_1-r_2)}} e^{-jk_1(r_1-r_2)}.$$

Внутри цилиндра $E_{2\varphi}$, $H_{2\varphi}$ не зависят от угла φ и пропорциональны радиусу, а продольные составляющие H_{2z}, E_{2z} постоянны по всему сечению полости цилиндра (см. рис. 10.21).

10.6. Электромагнитное поле элементарных осцилляторов в многослойных средах. Боковые и нормальные волны

Рассмотрим электромагнитное поле бесконечно длинного провода и элементарных осцилляторов, расположенных в k-ом слое плоскопараллельной среды, состоящей из $n+1$ однородных изотропных слоев (рис. 10.22).

Начало прямоугольной системы координат поместим на верхней границе раздела сред. Ось z направим вниз перпендикулярно границам. Осцилляторы разместим на расстоянии h от верхней границы. Комплексное волновое число слоя l высотой d_l, удаленного от начала координат на расстояние h_{l-1}, обозна-

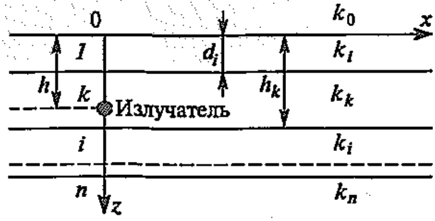


Рис. 10.22. Плоскопараллельная многослойная среда

чим через k_l. Моменты вертикальных диполей направим по оси z, а горизонтальных диполей — по оси x.

При рассмотрении электромагнитных полей в многослойных средах предположим, что слои однородны, электрическая и магнитная проницаемости не зависят от частоты волн, а напряженности электрического и магнитного полей изменяются во времени по гармоническому закону.

Электромагнитное поле определим с помощью векторных потенциалов. В однородном пространстве вне источников векторные потенциалы, как и векторы напряженности электрического и магнитного полей, удовлетворяют векторным волновым уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \bar{\dot{A}}_{эл} + k^2 \bar{\dot{A}}_{эл} = 0;$$
$$\nabla^2 \bar{\dot{A}}^*_{эл} + k^2 \bar{\dot{A}}^*_{эл} = 0.$$

В прямоугольной декартовой системе координат векторное волновое уравнение разделяется на три независимых скалярных уравнения.

Решение скалярного уравнения в любом слое можно найти с помощью интегралов Зоммерфельда [24]:

для бесконечно длинного проводника

$$\int_0^\infty (f_l \mathrm{e}^{-z\mu_l} + f_l' \mathrm{e}^{z\mu_l}) \cos\lambda x \mathrm{d}\lambda;$$

для диполей $\int_0^\infty (f_l \mathrm{e}^{-z\mu_l} + f_l' \mathrm{e}^{z\mu_l}) \cos n\varphi J_n(-\lambda r) \mathrm{d}\lambda,$

где $J_n(-\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода; f_l, f_l' — функции от переменной λ; $\mu_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_l^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторные потенциалы излучателей также можно представить в виде интегралов Зоммерфельда:

для бесконечно длинного проводника

$$K_0(jk_k\sqrt{x^2 + z^2}) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(z+h)\mu_k}}{\mu_k} \cos\lambda x \mathrm{d}\lambda;$$

для диполей $\dfrac{e^{-jkR}}{R}=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{e^{-(z+h)\mu_k}}{\mu_k}\lambda J_0(-\lambda r)d\lambda,$

где $R=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$.

Функции f_0, f_n' для верхнего и нижнего слоев многослойной среды примем равными нулю, так как при $|z|$, стремящейся к бесконечности, произведения $f_0e^{-z\mu_0}$, $f_n'e^{z\mu_n}$ беспредельно возрастают.

В переменной $\mu_l=\pm\sqrt{\lambda^2-k_l^2}=a_l+jв_l$ вещественная часть принимается всюду со знаком «+».

Функции f_l, f_l' находим из системы $2n$ уравнений, обеспечивающих равенства тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей на каждой границе раздела n многослойной среды с помощью главных определителей системы уравнений Δ и Δ^* (табл. 10.3).

В табл. 10.3 коэффициенты отражения Френеля для волн с вертикальной и горизонтальной поляризациями определяются из выражений

$$V_{l-1,l}=\frac{k_{l-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon_{l-1}}\mu_l-k_l^2\dfrac{1}{\varepsilon_l}\mu_{l-1}}{k_{l-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon_{l-1}}\mu_l+k_l^2\dfrac{1}{\varepsilon_l}\mu_{l-1}};\ V_{l-1,1}^*=\frac{\varepsilon_{l-1}\mu_l-\varepsilon_l\mu_{l-1}}{\varepsilon_{l-1}\mu_l+\varepsilon_l\mu_{l-1}}.\quad(10.10)$$

Таблица 10.3

Порядковый номер уравнения	$0'$	1	$1'$	...	$(n-1)'$	n
$0'$	V_{01}	$-(1+V_{01})$	0	...	0	0
1	$1-V_{01}$	V_{01}	$-e^{-d_1\mu_1}$	...	0	0
$1'$	0	$e^{-d_1\mu_1}$	V_{12}	...	0	0
2	0	0	$1-V_{12}$	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	0	0	0	...	$-e^{-d_{n-1}\mu_{n-1}}$	0
$(n-1)'$	0	0	0	...	$V_{n-1,n}$	$-(1+V_{n-1,n})$
n	0	0	0	...	$1-V_{n-1,n}$	$V_{n-1,n}$

На основании теории определителей подынтегральные функции f_l, f_l' могут быть выражены следующими формулами:

$$f_l = -A_{0,l} \frac{1}{\mu_0 \Delta} e^{-h\mu_0 + h_{l-1}\mu_l}; \quad f_l' = -A_{0',l} \frac{1}{\mu_0 \Delta} e^{-h\mu_0 - h_l\mu_l}.$$

Для вычисления интегралов Зоммерфельда функции Бесселя первого рода заменяются модифицированными функциями Бесселя второго рода:

$$J_0(-\lambda r) = j\frac{1}{\pi}[K_0(j\lambda r) - K_0(-j\lambda r)];$$

$$J_1(-\lambda r) = -\frac{1}{\pi}[K_1(j\lambda r) + K_1(-j\lambda r)]$$

и каждый интеграл представляется в виде суммы из двух интегралов.

Исходный путь интегрирования Γ_0 вдоль вещественной оси от нуля до бесконечности (рис. 10.23) [17] в первом интеграле суммы деформируется в комплексной плоскости λ во втором квадранте в путь Г′, а во втором интеграле суммы — в четвертом квадранте в путь Г.

Пути интегрирования начинаются от центра координат, проходят через комплексные волновые числа многослойной среды от их минимальных значений до максимальных значений моду-

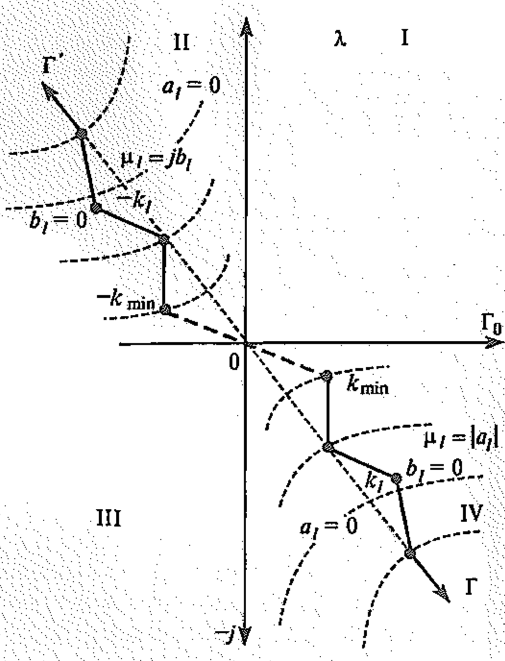


Рис. 10.23. Пути интегрирования в комплексной плоскости

лей и по биссектрисам квадрантов уходят в бесконечность, возвращаясь по бесконечно далеким путям на положительную вещественную координатную ось. При деформации исходного пути интегрирования оказались затронутыми полюсы во втором квадранте и разрезы $a_l = 0$ во втором и $в_l = 0$ в четвертом квадрантах комплексной плоскости. Сумма интегралов вдоль разрезов по верхнему и нижнему листам римановой поверхности обращается в нуль, так как при $в_l = 0$ $\mu_l = |a_l|$ как на верхнем, так и на нижнем листах. При $a_l = 0$ равенство сохраняется, а $\mu_l = j|в_l|$. Поэтому пути интегрирования Γ' и Γ в точках $\mu_l = a_l + jв_l$ просто переходят с одного листа на другой. В результате вычисление исходных интегралов сводится к вычислению интегралов по новым путям интегрирования Γ' во втором и Γ в четвертом квадрантах, определяющих поле двух боковых волн, распространяющихся в верхней (k_0) и в нижней (k_n) средах, и к сумме вычетов в затронутых полюсах подынтегрального выражения, определяющих поле нормальных волн, распространяющихся в каждом из внутренних слоев многослойной среды.

Пути интегрирования Γ' и Γ начинаются в центре комплексной плоскости λ, проходят через все комплексные волновые числа k_l многослойной среды от $k_{\min}$ до $k_{\max}$, поднимаясь после каждого k_l с нижнего листа римановой поверхности k_l на ее верхний лист. На начальных участках — от 0 до $k_{\min}$ по пути Γ и от 0 до $-k_{\min}$ по пути Γ'.

Полюсы λ_{tsp} находятся из равенства нулю главных определителей многослойной среды.

В результате общее решение скалярных волновых уравнений Гельмгольца может быть записано в таком виде:

$$A = \sum_{1}^{t}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{CP(\mu)}{\mu_k \dfrac{\partial a}{\partial \lambda}}B(\lambda_{tsp}) - \tag{10.11}$$
$$-\frac{jC}{2\pi}\int\limits_{-k_0(k_n)}^{-(1-j)\infty}\left[\left(\frac{P(\mu)}{\mu_k a}\right)_{\text{II}} - \left(\frac{P(\mu)}{\mu_k a}\right)_{\text{IY}}\right]B(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

где в квадратных скобках показана разность значений отношений функций во втором и четвертом квадрантах комплексной плоскости λ; l — порядковый номер слоя; s — порядковый номер слоя, в котором возбуждаются нормальные волны; p — номер моды нормальной волны.

В общем решении (10.11) первое слагаемое — сумма векторных потенциалов нормальных (дискретных) волн с вертикальной и горизонтальной поляризациями, распространяющихся в промежуточных слоях среды, второе слагаемое — потенциалы боковых (непрерывного спектра) волн, распространяющихся в верхней и нижней средах.

В табл. 10.4 приведены значения многочленов A, C, $B(\lambda)$, $P(\mu)$, В(λ), a, t для вертикальных и горизонтальных электрических и магнитных осцилляторов.

Таблица 10.4

Излучатель	A	C	$B(\lambda)$	$P(\mu)$	a	t
Бесконечный проводник	A_{yl}	$j\frac{\dot{I}\mu_{k\,\text{эл}}}{2}$	$e^{j\lambda x}$	$F(\mu)$	Δ	1
Вертикальный электрический диполь	$\dot{A}_{zl}$	$P_э/4\pi$	$-\lambda_{sp}K_0(-j\lambda r)$	$F^*(\mu)$	Δ^*	1
Горизонтальный электрический диполь	A_{yl} A_{zl}	$P_э/4\pi$ $P_э\cos\varphi/8\pi$	$-\lambda_{sp}K_0(-j\lambda r)$ $-\lambda_{sp}^2K_1(-j\lambda r)$	$F(\mu)\frac{\mu_0}{\mu_1}$ $W(\mu)$	Δ $\Delta\Delta^*$	1 2
Вертикальный магнитный диполь	A_{zl}^*	$P_м/8\pi$	$-\lambda_{sp}K_0(-j\lambda r)$	$F(\mu)$	Δ	1
Горизонтальный-магнитный диполь	A_{yl}^* A_{zl}^*	$P_м\frac{k_0^2}{4\pi k_1^2}$ $P_м\cos\varphi/8\pi$	$-\lambda_{sp}K_0(-j\lambda r)$ $-\lambda_{sp}^2K_1(-j\lambda r)$	$F^*(\mu)$ $W^*(\mu)$	Δ^* $\Delta\Delta^*$	1 2

Здесь A_{kl}, $A_{k,l}^*$ — алгебраические дополнения главных определителей Δ,Δ^*; $F^*(\mu)$ подобно $F(\mu)$, только в них коэффициенты V заменяются на V^*; $W^*(\mu)$ подобно $W(\mu)$, только в них коэффициенты V заменяются на V^*, а V^* на V.

В слое l многочлены $F(\mu)$ и $W(\mu)$ составляют:

$$F_{kl}(\mu) = e^{-(z-h_{l-1})\mu_l}\left(A_{kl}e^{-h\mu_k} - A_{k\bar{l}}e^{-(d_k-h)\mu_k}\right) +$$

$$+e^{(z-h_l)\mu_l}\left(A_{kl'}e^{-h\mu_k} - A_{k\bar{l}'}e^{-(d_k-h)\mu_k}\right);$$

$$F_{kk}(\mu) = \Delta e^{-|z-h_{k-1}-h|\mu_k} + e^{-(z-h_{k-1})\mu_k}\left(A_{kk}e^{-h\mu_k} - A_{k\bar{k}}e^{-(d_k-h)\mu_k}\right) +$$

$$+e^{(z-h_k)\mu_k}\left(A_{kk'}e^{-h\mu_k} - A_{k\bar{k}'}e^{-(d_k-h)\mu_k}\right);$$

$$W(\mu) = \sum_{m=1}^{n} (k_m^2 - k_{m-1}^2)[A_{km} e^{-h\mu_k} - A_{k'm} e^{-(d_k - h)\mu_k} +$$

$$+ e^{-d_m \mu_m} (A_{km'} e^{-h\mu_k} - A_{k'm'} e^{-(d_k - h)\mu_k})][e^{-(z - h_{l-1})\mu_l} (A^*_{ml} - A^*_{(m-1)'l'}) +$$

$$+ e^{(z - h_l)\mu_l} (A^*_{ml'} - A^*_{(m-1)'l'})] \frac{1 - V^*_{m-1,m}}{\mu_{m-1} k_m^2}.$$

Анализ электромагнитных полей в многослойных средах различных излучающих систем показывает:

границы раздела существенно влияют на поле диполей. Так, диаграмма направленности горизонтального электрического диполя в дальней зоне поворачивается на 90° по сравнению с диаграммой направленности диполя в безграничной среде, линейно поляризованное поле становится эллиптически поляризованным;

во внешних слоях распространяются боковые волны непрерывного спектра;

во внутренних слоях распространяются нормальные волны с горизонтальной и вертикальной поляризациями дискретного спектра с волновыми числами, определяемыми, соответственно, из равенства нулю главных определителей ($\Delta = 0$ и $\Delta^* = 0$), волновые числа нормальных волн s-слоя p-моды при $p \neq 0$ определяются как $\lambda_{tsp} = \sqrt{k_s^2 - \left(\frac{\pi p}{d_s}\right)^2}$;

чем выше номер моды, тем быстрее затухает волна;

нормальные волны нулевой моды с вертикальной поляризацией — это поперечные электромагнитные волны типа «Т», нормальных волн нулевой моды с горизонтальной поляризацией вообще не существует;

дальнее распространение волн с вертикальной поляризацией нулевой моды происходит в слоях с наименьшей удельной электрической проводимостью.

В качестве примера решения краевой задачи рассмотрим электромагнитное поле вертикального электрического диполя, расположенного в трехслойной среде.

Предположим, что в безграничной плоскопараллельной трехслойной среде (см. рис. 10.22) во внутреннем слое *1* на расстоянии h от верхней границы находится вертикальный электрический диполь. Верхний слой *0* и нижний слой $n = 2$ среды обладают высокой удельной электрической проводимостью, образуя канал (волновод) для электромагнитных волн.

В этом случае поле боковых волн мало по сравнению с полем нормальных волн и его можно не учитывать. Для определения векторного потенциала в слое *1* воспользуемся общим решением (10.11) для электромагнитного поля нормальных волн вертикального электрического диполя и значениями многочленов A, C, $B(\lambda)$, $P(\mu)$, $B(\lambda)$, a, t из табл. 10.4:

$$\dot{A}_{zl} = \frac{P_э}{4\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{F^*(\mu)}{\mu_1\dfrac{\partial\Delta^*}{\partial\lambda}}[-\lambda_{1p}K_0(-j\lambda r)], \qquad (10.12)$$

где $F_{10}^*(\mu) = e^{z\mu_0}(A_{10'}^* e^{-h\mu_1} - A_{1'0'}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})$;

$F_{11}^*(\mu) = \Delta^* e^{-|z-h|\mu_1} + e^{-z\mu_1}(A_{11}^* e^{-h\mu_1} - A_{1'1}^* e^{-(d_1-h)\mu_1}) +$

$+ e^{(z-d_1)\mu_1}(A_{11'}^* e^{-h\mu_1} - A_{1'1'}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})$;

$F_{12}^*(\mu) = e^{-z\mu_2}(A_{12}^* e^{-h\mu_1} - A_{1'2}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})$.

Распишем подробно многочлены для данной трехслойной среды с размещением диполя во внутреннем слое:

главный определитель $\Delta^* = 1 + V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1}$;

алгебраические дополнения

$$A_{10'}^* = 1 + V_{01}^*,\ A_{1'0'}^* = (1 + V_{01}^*)V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1},\ A_{11}^* = V_{01}^*;$$

$$A_{11'}^* = -V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1},\ A_{1'1}^* = V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1};$$

$$A_{1'1'}^* = V_{12}^*,\ A_{12}^* = (1 - V_{12}^*)V_{01}^* e^{-2d_1\mu_1},\ A_{1'2}^* = -(1 + V_{12}^*);$$

коэффициенты отражения

$$V_{01}^* = \frac{\varepsilon_0\mu_1 - \varepsilon_1\mu_0}{\varepsilon_0\mu_1 + \varepsilon_1\mu_0},\ V_{12}^* = \frac{\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1};$$

многочлены $F_{10}^*(\mu) = e^{z\mu_0}(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})(1 + V_{01}^*)$;

$$F_{11}^*(\mu) = e^{-z\mu_1}V_{01}^*(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(2d_1-h)\mu_1}) - e^{(z-2d_1)\mu_1}V_{12}^*(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1});$$

$$F_{12}^*(\mu) = e^{-(z+d_1)\mu_2}(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})(1 - V_{12}).$$

Значения производных в знаменателях сумм выражения (10.12) определяются для каждой нормальной волны p-моды:

$$\frac{\partial\Delta^*}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}(1 + V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1}) \cong$$

$$\cong V_{01}^* V_{12}^* \frac{\partial}{\partial\lambda} e^{-2d_1\mu_1} = -2d_1 V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda} = 2d_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda} = 2d_1\frac{\lambda}{\mu_1}.$$

После подстановки значений алгебраических дополнений в многочлены из выражения (10.12) находим для векторных потенциалов в слоях:

$$\dot{A}_{z0} = \frac{\dot{P}_э}{8\pi d}\sum_{p=0}^{\infty} e^{z\mu_0}(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})(1 + V_{01}^*)[-K_0(-j\lambda_p r)];$$

$$\dot{A}_{z1} = \frac{\dot{P}_э}{8\pi d}\sum_{p=0}^{\infty}[e^{-z\mu_1}V_{01}^*(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(2d_1-h)\mu_1}) -$$

$$-e^{(z-2d_1)\mu_1}V_{12}^*(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})][-K_0(-j\lambda_p r)];$$

$$\dot{A}_{z2} = \frac{\dot{P}_э}{8\pi d}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-(z+d_1)\mu_2}(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})(1 - V_{12})[-K_0(-j\lambda_p r)].$$

Векторный потенциал $\dot{A}_{z1}$ для слоя *1* необходимо дополнить векторным потенциалом электрического диполя.

Комплексные волновые числа распространения нормальных волн определяются из равенства нулю главного определителя системы уравнений: $\Delta^* = 1 + V_{01}^* V_{12}^* e^{-2d_1\mu_1} = 0$.

Подставляя в Δ^* значения коэффициентов отражения, получаем

$$1 + \frac{\varepsilon_0\mu_1 - \varepsilon_1\mu_0}{\varepsilon_0\mu_1 + \varepsilon_1\mu_0}\frac{\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1} e^{-2d_1\mu_1} = 0$$

или $(\varepsilon_0\mu_1\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_1\mu_0\varepsilon_2\mu_1)\operatorname{ch} d_1\mu_1 + (\mu_0\varepsilon_1^2\mu_2 + \varepsilon_0\varepsilon_2\mu_1^2)\operatorname{sh} d_1\mu_1) = 0$.

Из этого равенства, принимая в нем $\operatorname{sh} d_1\mu_1 \cong d_1\mu_1$, $\operatorname{ch} d_1\mu_1 \cong 1$, определяем комплексное волновое число нормальной волны нулевой моды (волны типа «Т»):

$$(\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_1\mu_0\varepsilon_2) + (\mu_0\varepsilon_1^2\mu_2 + \varepsilon_0\varepsilon_2\mu_1^2)d_1 = 0;$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_1^2 d_1 = -(\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_1\mu_0\varepsilon_2) - \mu_0\varepsilon_1^2\mu_2 d_1;$$

$$\mu_1^2 = \lambda_0^2 - k_1^2 = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_2 d_1}(\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_1\mu_0\varepsilon_2 + \mu_0\varepsilon_1^2\mu_2 d_1);$$

$$\lambda_0 = \left[k_1^2 - \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_2 d_1}(\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_1\mu_0\varepsilon_2 + \mu_0\varepsilon_1^2\mu_2 d_1)\right]^{1/2}.$$

Для нормальных волн $p = 1, 2, 3,\ldots$ (волн типа «Е»), принимая во внимание, что в этом случае произведение коэффициентов отражения $V_{01}^* V_{12}^* \cong -1$, волновые числа можно приближенно получить из равенства главного определителя нулю:

$\Delta^* \equiv 1 - e^{-2d_1\mu_1} = 0$, или $\operatorname{sh} d_1\mu_1 = 0$, т.е. $d_1\mu_1 = jp\pi$, а $\mu_1 = j\dfrac{p\pi}{d_1}$ и

$$\lambda_p = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p\pi}{d_1}\right)^2}.$$

Для определения составляющих векторов электрического и магнитного поля в слоях необходимо выражения для векторных потенциалов подставить в выражение (10.5):

$$\dot{\bar{B}}_{\text{эл}} = \operatorname{rot}\dot{\bar{A}}_{\text{эл}}; \quad \dot{\bar{E}}_{\text{эл}} = -j\omega\left(\dot{\bar{A}}_{\text{эл}} + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\bar{A}}_{\text{эл}}\right),$$

и найти их производные по координатам:

$$\dot{\bar{B}}_{\text{эл}} = \operatorname{rot}\dot{\bar{A}}_{zl} = \frac{\partial\dot{A}_{zl}}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\dot{A}_{zl}}{\partial x}\mathbf{e}_y;$$

$$\dot{\bar{E}}_{\text{эл}} = -j\omega\left[\dot{A}_{zl}\bar{e}_z + \frac{1}{k_l^2}\left(\frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial x\partial z}\bar{e}_x + \frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial y\partial z}\bar{e}_y + \frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial^2 z}\bar{e}_z\right)\right].$$

Так как вторая производная $\dfrac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial^2 z} = \mu_1^2\dot{A}_{zl}$, объединяя в $\dot{\bar{E}}_{\text{эл}}$ составляющие по z, получаем

$$\dot{\bar{E}}_{\text{эл}} = -j\omega\frac{1}{k_l^2}\left(\lambda_p^2\dot{A}_{zl}\bar{e}_z + \frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial x\partial z}\bar{e}_x + \frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial y\partial z}\bar{e}_y\right) =$$

$$= -j\omega\frac{1}{k_l^2}\left(\lambda_p^2\dot{A}_{zl}\bar{e}_z + \frac{\partial^2\dot{A}_{zl}}{\partial r\partial z}\bar{e}_r\right).$$

Приведем решение для составляющих векторов напряженности поля в направлении оси x:

для магнитного поля

$$\dot{B}_{y0} = \frac{\dot{P}_{\text{э}}}{8\pi d_1}\sum_{p=0}^{\infty} e^{z\mu_0}\left(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1}\right)(1 + V_{01}^*)\, j\lambda_p K_0'(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{B}_{y1} = \frac{\dot{P}_{\text{э}}}{8\pi d_1}\sum_{p=0}^{\infty}\left[e^{-z\mu_1}V_{01}^*\left(e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(2d_1-h)\mu_1}\right) - \right.$$
$$\left. - e^{(z-2d_1)\mu_1}V_{12}^*\left(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1}\right)\right] j\lambda_p K_0'(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{B}_{y2} = \frac{\dot{P}_{\text{э}}}{8\pi d_1}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-(z+d_1)\mu_2}\left(V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1}\right)(1 - V_{12})\, j\lambda_p K_0'(-j\lambda_p r);$$

для электрического поля

$$\dot{E}_{z0} = j\omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{z\mu_0} (e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})(1 + V_{01}^*) \lambda_p^2 K_0(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{E}_{z1} = j\omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} [e^{-z\mu_1} V_{01}^* (e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(2d_1-h)\mu_1}) -$$
$$- e^{(z-2d_1)\mu_1} V_{12}^* (V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})] \lambda_p^2 K_0(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{E}_{z2} = j\omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(z+d_1)\mu_2} (V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})(1 - V_{12}) \lambda_p^2 K_0(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{E}_{x0} = \omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{z\mu_0} (e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})(1 + V_{01}^*) \mu_0 \lambda_p K_0'(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{E}_{x1} = -\omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} [e^{-z\mu_1} V_{01}^* (e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(2d_1-h)\mu_1}) +$$
$$+ e^{(z-2d_1)\mu_1} V_{12}^* (V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})] \mu_1 \lambda K_0'(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{E}_{x2} = -\omega \frac{1}{k_l^2} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(z+d_1)\mu_2} (V_{01}^* e^{-h\mu_1} + e^{h\mu_1})(1 - V_{12}) \mu_2 \lambda_p K_0'(-j\lambda_p r).$$

Итак, для вычисления составляющих векторов напряженности электромагнитного поля в слоях следует для каждой волны p-моды найти значения продольной λ_p составляющей комплексного волнового числа k_1 и поперечных $\mu_{0p}, \mu_{1p}, \mu_{2p}$ составляющих комплексного волнового числа k_0, k_1, k_2, затем определить коэффициенты отражения V_{01}^*, V_{12}^* и функции Бесселя.

Полученные решения для электрического и магнитного поля в слоях являются строгими.

Из решений видно, что в канале распространяется дискретный спектр нормальных цилиндрических волн с разными волновыми числами μ_p и λ_p. Результирующее электромагнитное поле определяется геометрической суммой их полей.

Как и в случае направляющих систем, распространение каждой нормальной волны связано с прохождением токов в ограничивающих проводящих слоях.

Для определения токов проводимости проинтегрируем выражения для плотности тока в верхней и нижней среде по оси z от нуля до бесконечности, умножив их на периметр окружности:

$$\dot{I}_{0пр} = j \frac{2\pi r}{\mu_{0эл}} \frac{\dot{P}_э}{8\pi d_1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{z\mu_0} (e^{-h\mu_1} - V_{12}^* e^{-(d_1-h)\mu_1})(1 + V_{01}^*) \lambda_p K_0'(-j\lambda_p r);$$

$$\dot{I}_{2\text{пр}} = j\frac{2\pi r}{\mu_{2\text{эл}}}\frac{\dot{P}_{\text{э}}}{8\pi d_1}\sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(z+d_1)\mu_2}(V_{01}^{*}\mathrm{e}^{-h\mu_1}+\mathrm{e}^{h\mu_1})(1-V_{12})\lambda_p K_0'(-j\lambda_p r).$$

Из этих выражений с учетом $\Delta^{*} = 1 + V_{01}^{*}V_{12}^{*}\mathrm{e}^{-2d_1\mu_1} = 0$ находим, что токи в верхнем и нижнем слоях равны между собой и противоположны по направлению.

Следовательно, можно предложить эквивалентную электрическую схему замещения для каждой волны p-моды в виде длинной линии с эквивалентными параметрами сопротивления, емкости и индуктивности (рис. 10.24). Погонные сопротивления, емкость и индуктивность эквивалентной длинной линии определяются из соотношений [17]:

$$\dot{R}_{0p} = \frac{\dot{E}_{x0p}}{\dot{I}_{0p\text{пр}}};$$

$$\dot{R}_{2p} = \frac{\dot{E}_{x2p}}{\dot{I}_{2p\text{пр}}};\ \dot{C}_p = \frac{\varepsilon_{1\text{эл}}\dot{E}_{z1}}{\int\limits_{-d_1}^{0}\dot{E}_{z1}\mathrm{d}z};\ \dot{L}_p = \frac{\dot{\Phi}_{p\text{внеш}}}{\dot{I}_{0p\text{пр}}} = \frac{\mu_{1\text{эл}}\int\limits_{-d_1}^{0}H_{y1}\mathrm{d}z}{\dot{I}_{0p\text{пр}}}.$$

Сопротивление на единицу длины линии верхнего (нижнего) слоя равно отношению падения напряжения на этом отрезке линии к току, погонная емкость — отношению заряда в промежуточном слое *1* к разности потенциалов между слоями *0* и *2*, а погонная индуктивность — отношению магнитного потока в слое *1* к току.

Дальнейший расчет электромагнитного поля в слоях следует проводить с помощью эквивалентных электрических схем замещения. Но в этом случае конструкция длинной линии [30] должна удовлетворять следующему требованию: при увеличении расстояния от излучателя ширина линии должна так изменяться, чтобы зависимости напряженности электрического и магнитного полей соответствовали строгому решению электродинамической задачи. Для вертикального электрического диполя этому требованию удовлетворяет длинная линия с радиально расходящимися ветвями, т. е. цилиндрическая длинная линия.

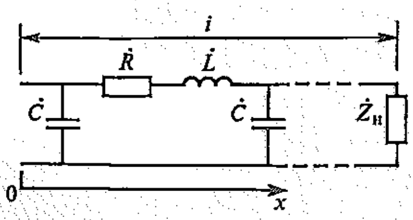


Рис. 10.24. Эквивалентная электрическая схема замещения

Рассмотрим краевую задачу, в которой электромагнитное поле определяется волнами непрерывного спектра на примере поля подводного (подземного) одножильного кабеля.

В геологии для поиска полезных ископаемых на морском шельфе, а также для проводки судов по сложным морским фарватерам по грунту прокладывают изолированный одножильный кабель. В конце трассы кабель заземляют. По кабелю проходит переменный ток. Образуется переменное магнитное поле со сложной поляризацией, позволяющей судить о структуре грунтов и о положении судна относительно кабеля.

Рассмотрим поле кабеля с током $\dot{I}$, расположенного в двухслойной среде морская вода *1* — воздух *0* на глубине h от поверхности воды на расстояниях, превышающих глубину проникновения волн в воде.

В этом случае векторный потенциал поля в слое *1* будет определяться непрерывным спектром по формуле (10.11), т. е. он равен только интегралу:

$$\dot{A}_{y1}=\frac{\dot{I}\mu_{1\text{эл}}}{4\pi}\int\limits_{-k_0}^{-(1-j)\infty}\left[\left(\frac{F_{11}(\mu)}{\mu_1}\right)_{\text{II}}-\left(\frac{F_{11}(\mu)}{\mu_1}\right)_{\text{IY}}\right]B(\lambda)\mathrm{e}^{j\lambda x}\mathrm{d}\lambda,$$

так как промежуточные слои отсутствуют, нормальные волны не возбуждаются.

Многочлен $F_{11}(\mu)=\mathrm{e}^{-|z-h|\mu_1}+\mathrm{e}^{-z\mu_1}A_{11}\mathrm{e}^{-h\mu_1}$ при $A_{11}=V_{01}$ преобразуется сначала как $F_{11}(\mu)=\mathrm{e}^{-|z-h|\mu_1}+\mathrm{e}^{-z\mu_1}V_{01}\mathrm{e}^{-h\mu_1}$, а так как коэффициент отражения для немагнитных сред:

$$V_{01}=\frac{k_0^2\dfrac{1}{\varepsilon_0}\mu_1-k_1^2\dfrac{1}{\varepsilon_1}\mu_0}{k_0^2\dfrac{1}{\varepsilon_0}\mu_1+k_1^2\dfrac{1}{\varepsilon_1}\mu_0}=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_1+\mu_0}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_0}-1,$$

то к виду $F_{11}(\mu)=\mathrm{e}^{-|z-h|\mu_1}-\mathrm{e}^{-z\mu_1}\mathrm{e}^{-h\mu_1}+\dfrac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_0}\mathrm{e}^{-z\mu_1}\mathrm{e}^{-h\mu_1}$.

Во втором и четвертом квадрантах комплексной плоскости λ переменные μ_1 равны по модулю, но противоположны по знаку.

В результате для векторного потенциала в нижнем слое *1* можно записать

$$\dot{A}_{y1}=\frac{\dot{I}\mu_{1\text{эл}}}{2\pi}\left[\int\limits_{-k_0}^{-(1-j)\infty}\frac{1}{\mu_1}\mathrm{e}^{j\lambda x}\cos[j(z-h)\mu_1\right]-\cos[j(z+h)\mu_1]\mathrm{d}\lambda+$$

$$+\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\int\limits_{-k_0}^{-(1-j)\infty}\left[\frac{1}{\mu_1+\mu_0}-\frac{1}{\mu_1-\mu_0}\right]\mathrm{e}^{j\lambda x}\mathrm{d}\lambda].$$

Первый интеграл суммы преобразуется в разность модифицированных функций Бесселя второго рода нулевого порядка:

$$\dot{A}_{y1} = \frac{\dot{I}}{2\pi}[K_0(jk_1\sqrt{x^2+(z-h)^2}) - K_0(jk_1\sqrt{x^2+(z+h)^2})] +$$

$$+\frac{\dot{I}}{\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\int\limits_{-k_0}^{(j+1)\infty}\frac{-\mu_0}{k_0^2-k_1^2}\mathrm{e}^{j\lambda x}\mathrm{d}\lambda.$$

На расстояниях, превышающих глубину проникновения волн в воде, функции Бесселя по величине малы по сравнению с интегралом, приближенно равным

$$\dot{A}_{y1} \cong \frac{\dot{I}\mu_{1\text{эл}}}{2\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\int\limits_{-k_0}^{(j+1)\infty}\frac{-2\lambda}{k_0^2-k_1^2}\mathrm{e}^{j\lambda x}\mathrm{d}\lambda \cong$$

$$\cong \frac{\dot{I}\mu_{1\text{эл}}}{\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\frac{1}{k_1^2}\mathrm{e}^{-jk_0x}\left(\frac{k_0}{jx}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Составляющие векторов электрического и магнитного полей в воде определяются из выражений (10.5):

$$\overline{\dot{E}}_{\text{эл}} = -j\omega\dot{A}_y\overline{\mathrm{e}}_y;\ \overline{\dot{B}}_{1\text{эл}} = \mathrm{rot}\,\overline{\dot{A}}_{y1} = -\frac{\partial\dot{A}_{y1}}{\partial z}\overline{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial\dot{A}_{y1}}{\partial x}\overline{\mathrm{e}}_z,$$

как $$\overline{\dot{E}}_{1\text{эл}} = -j\omega\frac{\dot{I}\mu_{1\text{эл}}}{\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\frac{1}{k_1^2}\mathrm{e}^{-jk_0x}\left(\frac{k_0}{jx}-\frac{1}{x^2}\right)\overline{\mathrm{e}}_y;$$

$$\dot{H}_{x1\text{эл}} = j\frac{\dot{I}}{\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{-jk_0x}\left(\frac{k_0}{jx}-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\dot{H}_{z1\text{эл}} = \frac{\dot{I}}{\pi}\mathrm{e}^{-j(z+h)k_1}\frac{1}{k_1^2}\mathrm{e}^{-jk_0x}\left(j\frac{k_0}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right).$$

Из решений видно, что электромагнитная волна сначала прошла от источника до поверхности воды расстояние h в воде, затем по воздуху вдоль границы — расстояние x и в воде до горизонта — z. Наибольшее расстояние x волна прошла в среде с наименьшей удельной электрической проводимостью, где затраты мощности волны на создание токов проводимости минимальны. Такую волну называют боковой.

10.7. Распространение электромагнитных волн вдоль проводников

Рассмотрим распространение электромагнитной волны вдоль круглого бесконечно длинного проводника, по которому протекает переменный ток. Радиус проводника r_0. Решение проведем в цилиндрической системе координат, предполагая, что в любой точке вектор напряженности магнитного поля направлен по касательной к окружности с центром на оси проводника, проходящей через исследуемую точку пространства, а вектор электрического поля поляризован в плоскости rz.

Предположим, что составляющие векторов поля из-за его осевой симметрии относительно центра проводника не зависят от угла φ, а также изменяются с расстоянием как $\mathrm{e}^{-ik_z z+i\omega t}$, где k_z — продольное комплексное волновое число волны.

В этом случае уравнение Гельмгольца для продольной составляющей вектора электрического поля с учетом вторых производных $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial\varphi^2}=0$ и $\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2}=-k_z^2\dot{E}_z$ преобразуется в уравнение Бесселя $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r}\right)-(k_z^2-k^2)\dot{E}_z=0$, решением которого являются модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента $r\sqrt{k_z^2-k_1^2}$ для проводника и второго рода нулевого порядка от аргумента $r\sqrt{k_z^2-k_2^2}$ для внешней среды:

$$\dot{E}_{z1}=AI_0(r\sqrt{k_z^2-k_1^2})\mathrm{e}^{-ik_z z+i\omega t};$$

$$\dot{E}_{z2}=BK_0(r\sqrt{k_z^2-k_2^2})\mathrm{e}^{-ik_z z+i\omega t}.$$

Из I уравнения Максвелла $-\frac{\partial \dot{H}_{\varphi эл}}{\partial z}=j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}\dot{E}_{rэл}$ после дифференцирования его по z находим $\dot{E}_{rэл}=\frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{эл}}\dot{H}_{\varphi эл}$. Из II уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}}_{эл}=-j\omega\mu\dot{\bar{H}}_{эл}$, приравнивая составляющие по φ $\frac{\partial \dot{E}_{rэл}}{\partial z}-\frac{\partial \dot{E}_{zэл}}{\partial r}=-j\omega\mu_{эл}\dot{H}_{\varphi эл}$, после дифференцирования по z получаем:

$$\frac{\partial \dot{E}_{zэл}}{\partial r}=j\omega\mu_{эл}\dot{H}_{\varphi эл}-jk_z\dot{E}_{zэл}=\left(j\omega\mu-j\frac{k_z^2}{\omega\dot{\varepsilon}}\right)\dot{H}_{\varphi эл};$$

$$\dot{H}_{\varphi эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{эл}}{k_z^2 - k^2}\frac{\partial \dot{E}_{zэл}}{\partial r}.$$

В результате общее решение приводится к виду:

внутри проводника $\dot{E}_{z1} = AI_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})e^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 1эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1э}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} AI_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})e^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r1эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{1э}}\dot{H}_{\varphi 1эл};$$

во внешней среде $\dot{E}_{z2} = BK_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} BK_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{H}_{\varphi 2эл}.$$

На поверхности проводника при $r = r_0$ на основании граничных условий должны быть равными тангенциальные составляющие векторов электрического и магнитного полей:

$$AI_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = BK_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2});$$

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1э}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} AI_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} BK_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2}).$$

Разделим одно равенство на другое, предварительно умножив второе равенство на внешний периметр проводника. Левая часть полученного равенства равна погонному сопротивлению провода:

$$\dot{R} = \frac{\dot{E}_{z1эл}}{\dot{I}} = \frac{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})\sqrt{k_z^2 - k_1^2}}{j2\pi\dot{\varepsilon}_{1эл}\omega r_0 I_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})},$$

так как на основании закона полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна току, проходящему через контур.

Правую часть равенства определим через погонную емкость линии:

$$\dot{C} = \frac{\oint\limits_{2\pi r_0} \dot{\varepsilon}_{2эл}\dot{E}_{r2эл}\mathrm{d}l}{\int\limits_{r_0}^{\infty} \dot{E}_{r2эл}\mathrm{d}r} = \frac{2\pi r_0\dot{\varepsilon}_{2э}K_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}{-K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} \text{ в виде}$$

$$-\frac{k_z^2 - k_2^2}{j\omega\dot{C}}.$$

Из полученного равенства $\dot{R} = -\dfrac{k_z^2 - k_2^2}{j\omega\dot{C}}$ находим продольное волновое число электромагнитной волны $k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega\dot{R}\dot{C}}$.

Значение продольного комплексного волнового числа k_z определяется не только параметрами внешней среды, но и параметрами самого проводника, его внутренним сопротивлением, емкостью и частотой переменного тока.

Постоянные коэффициенты A и B определим из закона полного тока:

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1э}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} A I_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) =$$

$$= \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} B K_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) = \frac{I_m}{2\pi r_0};$$

$$A = \frac{\dot{R}I_m}{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})};\ B = \frac{\dot{R}I_m}{K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})},$$

где I_m — амплитудное значение тока в проводнике.

В результате получаем следующие решения для электромагнитного поля:

внутри проводника $\dot{E}_{z1} = \dot{R}\dfrac{I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 1эл} = \frac{1}{2\pi r_0}\frac{I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r1эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{1ээ}}\dot{H}_{\varphi 1эл};$$

во внешней среде $\dot{E}_{z2эл} = \dot{R}\dfrac{K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{1}{2\pi r_0}\frac{K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{H}_{\varphi 2эл}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Низкие частоты $\omega \to 0$, длинные волны $\lambda \to \infty$.

Аргументы цилиндрических функций при частоте, стремящейся к нулю ($\omega \to 0$), по величине много меньше единицы, поэтому сами функции могут быть приняты равными первым двум слагаемым их разложений в ряд:

$$I_0(r\sqrt{k_z^2-k_1^2}) \cong 1+\frac{1}{2}r^2(k_z^2-k_1^2);$$

$$I_0'(r\sqrt{k_z^2-k_1^2}) \cong \frac{1}{2}r\sqrt{k_z^2-k_1^2}\left[1+\frac{1}{8}r^2(k_z^2-k_1^2)\right];$$

$$K_0(r\sqrt{k_z^2-k_2^2}) \cong -\ln(r\sqrt{k_z^2-k_2^2});$$
$$K_0'(r\sqrt{k_z^2-k_2^2}) \cong -(r\sqrt{k_z^2-k_2^2})^{-1}.$$

Погонные сопротивление, емкость и индуктивность эквивалентной длинной линии подобны параметрам длинной линии квазистационарного тока:

$$\dot{R}=\frac{\dot{E}_{z1\text{эл}}}{\dot{I}}=\frac{I_0(r_0\sqrt{k_z^2-k_1^2})\sqrt{k_z^2-k_1^2}}{j2\pi\dot{\varepsilon}_{1\text{эл}}\omega r_0 I_0'(r_0\sqrt{k_z^2-k_1^2})}=\frac{1}{\gamma_{1\text{эл}}\pi r_0^2}+j\frac{\omega\mu}{8\pi},$$
$$\dot{R}=R_{=}+j\omega L_{\text{внут}};$$

$$\dot{C}=\frac{2\pi r_0\varepsilon_{2\text{э}}K_0'(r_0\sqrt{k_z^2-k_2^2})\sqrt{k_z^2-k_2^2}}{-K_0(r_0\sqrt{k_z^2-k_2^2})}=-\frac{2\pi\dot{\varepsilon}_2}{\ln(r_0\sqrt{k_z^2-k_2^2})}=C,$$

$$\dot{L}=\frac{\dot{\Phi}_{\text{внеш}}}{\dot{I}}=\frac{\mu_2\int\limits_{r_0}^{\infty}H_{\varphi2\text{э}}\mathrm{d}r}{\dot{I}}=\frac{\mu_2}{2\pi r_0}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{K_0'(r\sqrt{k_z^2-k_2^2})}{K_0'(r_0\sqrt{k_z^2-k_2^2})}\mathrm{d}r;$$
$$\dot{L}\cong-\frac{\mu_2}{2\pi}\ln(r_0\sqrt{k_z^2-k_2^2}),$$

$$\dot{L}=-\frac{\mu_2}{2\pi}\ln(r_0\sqrt{-j\omega\dot{C}\dot{R}})=-\frac{\mu_{2\text{э}}}{2\pi}\ln(r_0\sqrt{\omega CR})-j\frac{3}{8}\mu_{2\text{эл}}.$$

Внутри проводника продольная составляющая вектора напряженности электрического поля $\dot{E}_{z1\text{эл}} \cong R_{=}I_m\mathrm{e}^{-ik_z z+i\omega t}$ постоянна по всему сечению проводника, напряженность магнитного поля $\dot{H}_{\varphi1\text{эл}}=\dfrac{r}{2\pi r_0^2}I_m\mathrm{e}^{-ik_z z+i\omega t}$ и радиальная составляющая вектора напряженности электрического поля $\dot{E}_{r1\text{эл}}=\dfrac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{1\text{э}}}\dot{H}_{\varphi1\text{эл}}=j\dfrac{k_z}{\gamma_{1\text{пр}}}\dot{H}_{\varphi1\text{эл}}$ прямо пропорциональны радиусу r, $\left|\dot{E}_{z1\text{эл}}\right| \gg \left|\dot{E}_{r1\text{э}}\right|$. Внутренняя индуктивность самого проводника $L_{\text{внут}}=\dfrac{\mu}{8\pi}$ не зависит от его радиуса.

Мнимая часть внешней индуктивности определяет погонное сопротивление излучения проводника $R_{изл} = j\omega \operatorname{Im} \dot{L} = \dfrac{3\omega\mu_{2эл}}{8}$.

Вектор Умова—Пойтинга

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2}[\dot{\overline{E}}_{эл} \times \overline{\ddot{H}}_{эл}] \cong \frac{1}{2}[\dot{E}_{z1эл}\overline{e}_z \times \ddot{H}_{\varphi 1э}\overline{e}_\varphi] = -\frac{1}{2}\dot{E}_{z1эл}\ddot{H}_{\varphi 1э}\overline{e}_r$$

направлен по радиусу внутрь проводника. Поток электромагнитной энергии входит в проводник с поверхности из внешней среды для того, чтобы скомпенсировать тепловые потери и реактивную мощность в нем, возникающие при протекании тока.

Весь входящий поток мощности на единицу длины проводника на его поверхности равен сумме активной (тепловой) и реактивной индуктивного характера мощностей:

$$\Pi_{r1} \cdot 2\pi r_0 = \frac{1}{2} R I_m^2 e^{-\operatorname{Re} j2k_z z} = \frac{1}{2}(R + j\omega L_{внут}) I_m^2 e^{-\operatorname{Re} j2k_z z}.$$

Во внешней среде напряженности поля определяются из выражений:

$$\dot{E}_{z2эл} = \dot{R}\frac{\ln(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{\ln(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t}; \ \dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{H}_{\varphi 2эл};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{1}{2\pi r} I_m e^{-ik_z z + i\omega t}.$$

Радиальная составляющая вектора напряженности электрического поля $\left|\dot{E}_{r2эл}\right| >> \left|\dot{E}_{z2эл}\right|$, $\dot{H}_{\varphi 2эл}$ и $\dot{E}_{r2эл}$ обратно пропорциональны радиусу r.

На границе раздела сред, т. е. на поверхности проводника радиальная составляющая вектора напряженности электрического поля испытывает скачок, равный отношению их комплексных диэлектрических проницаемостей $\dot{E}_{r2эл} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{E}_{r1эл} = -j\dfrac{\gamma_{пр1}}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}E_{r1эл}$.

Основной поток мощности электромагнитного поля во внешней среде распространяется вдоль проводника у его поверхности:

$$\tilde{\Pi}_{z2} = \frac{1}{2}\dot{E}_{r2эл}\ddot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{k_z}{2\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{H}_{\varphi 2эл}\ddot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\frac{1}{8\pi^2 r^2} I_m^2 e^{-\operatorname{Re} i2k_z z},$$

а радиальная часть потока

$$\tilde{\Pi}_r = \frac{1}{2}[\dot{E}_{z2эл}\overline{e}_z \times \ddot{H}_{\varphi 2эл}\overline{e}_\varphi] = -\frac{1}{2}\dot{E}_{z2эл}\ddot{H}_{\varphi 2эл}\overline{e}_r$$

идет внутрь проводника для компенсации тепловых потерь и реактивной мощности, необходимой для изменения направления вектора магнитного поля во времени.

2. Высокие частоты $\omega \to \infty$, короткие волны $\lambda \to 0$.

Аргументы функций Бесселя в этом случае много больше единицы, что позволяет воспользоваться асимптотическим разложением Ганкеля [24] и определить отношения функций Бесселя в виде:

$$\frac{I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} \cong \mathrm{e}^{(r-r_0)\sqrt{k_z^2-k_1^2}}; \quad \frac{I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} \cong \mathrm{e}^{(r-r_0)\sqrt{k_z^2-k_1^2}};$$

$$\frac{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0'(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} \cong 1.$$

В результате получаем следующие решения:

для поля внутри проводника $\dot{E}_{z1} = \dot{R} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t} \mathrm{e}^{(r-r_0)\sqrt{k_z^2-k_1^2}}$;

$$\dot{H}_{\varphi 1\text{эл}} = \frac{1}{2\pi r_0} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t} \mathrm{e}^{(r-r_0)\sqrt{k_z^2-k_1^2}}; \quad \dot{E}_{r1\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega \dot{\varepsilon}_{1\text{ээ}}} \dot{H}_{\varphi 1\text{эл}};$$

для сопротивления $\dot{R} \cong \dfrac{\sqrt{k_z^2 - k_1^2}}{j2\pi \dot{\varepsilon}_{1\text{эл}} \omega r_0} = \dfrac{1}{\gamma_{1\text{эл}} 2\pi r_0 \Delta}(1 + j)$,

где Δ — глубина проникновения, $\Delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\gamma_{1\text{ээ}}}}$.

Внутри проводника проявляется поверхностный эффект, при этом собственная индуктивность проводника уменьшается, вещественная часть сопротивления увеличивается за счет неравномерного распределения электрического поля в проводнике, что эквивалентно уменьшению сечения проводника.

Выражение для продольного волнового числа можно упростить:

$$k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega \dot{R}\dot{C}} \cong \sqrt{k_2^2 - j\omega \frac{\dot{\varepsilon}_2 \sqrt{k_z^2 - k_2^2}}{\gamma_{1\text{ээ}} \Delta}(1 + j)} = k_2,$$

так как второе слагаемое под корнем по величине много меньше единицы, например для медного провода. Поэтому электромагнитные волны распространяются вдоль провода с волновым числом, близким волновому числу внешней среды.

Внешняя индуктивность и погонное сопротивление излучения проводника в этом случае составят

$$\dot{L}=-\frac{\mu_2}{2\pi}\ln(r_0\sqrt{-j\omega\dot{C}\dot{R}})=-\frac{\mu_{2э}}{2\pi}\ln\left(r_0\sqrt{\omega C\frac{1}{\sqrt{2}\gamma_{1эл}\pi r_0\Delta}}\right)-j\frac{7}{16}\mu_{2эл},$$

$$R_{изл}=j\omega\,\mathrm{Im}\,\dot{L}=\frac{3\omega\mu_{2эл}}{8}.$$

Квадрат волнового числа внешней среды выразим через емкость и внешнюю индуктивность проводника $k_2^2=\omega^2\dot{C}\dot{L}$, так как $\dot{C}\dot{L}=\dot{\varepsilon}_2\mu_2$, и подставим его в выражение для продольного волнового числа:

$$k_z=\sqrt{k_2^2-j\omega\dot{R}\dot{C}}=\sqrt{-(\dot{R}+j\omega\dot{L})j\omega\dot{C}}.$$

Продольное волновое число k_z подобно коэффициенту распространения электромагнитных волн типа «Т» в линии с распределенными параметрами. Следовательно, вдоль проводника распространяется поперечная электромагнитная волна типа «Т», или нормальная волна ($p=0$) нулевой моды.

В длинной линии при распространении одной прямой электромагнитной волны с продольным волновым числом $k_z=\sqrt{-(\dot{R}+j\omega\dot{L})j\omega\dot{C}}$ сопротивление в любом ее сечении равно волновому сопротивлению $Z_c=\sqrt{\dfrac{\dot{R}+j\omega\dot{L}}{j\omega\dot{C}}}$.

Одиночный проводник имеет большую погонную индуктивность и малую емкость, а следовательно, высокие характеристическое и входное сопротивления, поэтому направляющие системы (двухпроводная линия, коаксиальный кабель, полосковая линия и др.) состоят из двух проводников, при этом уменьшается внешняя индуктивность линии и возрастает емкость за счет концентрации поля между проводниками. Основной поток активной мощности распространяется вдоль проводника во внешней диэлектрической среде и только часть ее идет внутрь проводника для компенсации тепловых потерь в нем.

В линии конечной длины (рис. 10.25) при выходном сопротивлении, не равном характеристическому сопротивлению, за счет отраженной волны

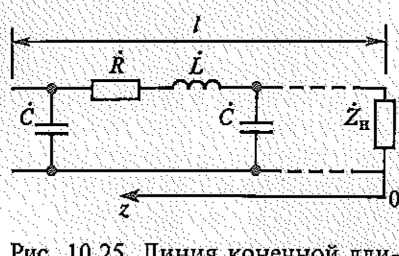


Рис. 10.25. Линия конечной длины

возникает режим стоячих волн с образованием пучностей и узлов напряжения и тока.

Ток на расстоянии z от конца линии длиной l равен сумме токов прямой и отраженной волн:

$$\dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l-z)} + \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l+z)},$$

а напряжение — неопределенному интегралу из произведения полного сопротивления бесконечно малого элемента линии на ток:

$$\dot{U} = \int(\dot{R} + j\omega\dot{L})\dot{I}\mathrm{d}z = \frac{\dot{R} + j\omega\dot{L}}{jk_z}(\dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l-z)} - \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l+z)}) =$$

$$= Z_c(\dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l-z)} - \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z(l+z)}).$$

Токи прямой и отраженной волн определим через значения тока и напряжения на конце линии при $z = 0$:

$$\dot{I}_{\text{вых}} = \dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z l} + \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z l}; \; \dot{U}_{\text{вых}} = Z_c(\dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z l} - \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z l});$$

$$\dot{I}_{\text{пр}} \mathrm{e}^{-jk_z l} = \frac{\dot{U}_{\text{вых}} + Z_c \dot{I}_{\text{вых}}}{2Z_c}; \; \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{-jk_z l} = -\frac{\dot{U}_{\text{вых}} - Z_c \dot{I}_{\text{вых}}}{2Z_c}.$$

После подстановки их в выражения для тока и напряжения на расстоянии z от конца линии получаем

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c}\dot{U}_{\text{вых}} \operatorname{sh} jk_z z + \dot{I}_{\text{вых}} \operatorname{ch} jk_z z; \; \dot{U} = \dot{U}_{\text{вых}} \operatorname{ch} jk_z z + Z_c \dot{I}_{\text{вых}} \operatorname{sh} jk_z z.$$

Сопротивление в любом сечении z линии определим, разделив напряжение на ток:

$$Z = \frac{Z_{\text{вых}} + Z_c \operatorname{th} jkz}{Z_c + Z_{\text{вых}} \operatorname{th} jkz} Z_c.$$

Сопротивление зависит от расстояния до конца линии и сопротивления нагрузки. В случае короткого замыкания линии, т. е. при нулевом сопротивлении нагрузки, оно составит $Z = Z_c \operatorname{th} jkz$, а разомкнутой линии — $Z = Z_c \operatorname{cth} jkz$. Эта зависимость входного сопротивления короткозамкнутых и разомкнутых линий от длины позволяет использовать их для настройки резонансных СВЧ контуров электрических цепей.

В общем случае анализ электромагнитного поля направляющей системы, как следует из проведенного исследования, сводится к расчету электрической цепи.

10.8. Распространение электромагнитных волн вдоль направляющих систем

Общие сведения. Передача электромагнитной энергии по воздуху особенно на низких частотах 1...100 Гц даже на небольшие расстояния неэкономична и технически трудно осуществима. Поэтому существуют направляющие системы, позволяющие передавать электромагнитную энергию в желаемом направлении.

Направляющие системы различаются по конструкции, типу волн и диапазону частот.

По конструкции направляющие системы подразделяются на системы открытого типа, к которым относятся двухпроводные (см. рис. 9.11) и однопроводные линии, диэлектрические волноводы; системы закрытого типа, к которым относятся коаксиальные линии (см. рис. 9.12), полосковые линии (см. рис. 9.13), металлические волноводы и световоды.

Открытые линии используются на низких частотах (в электросетях, линиях телеграфной связи), когда расстояние между проводами много меньше длины электромагнитной волны. В этом случае потери энергии на излучение незначительны, так как в стороне от линии происходит взаимное ослабление поля одного проводника полем другого проводника. Если же указанное требование не выполняется, то в реальных условиях происходит значительное излучение линией энергии в окружающее пространство, что существенно снижает ее коэффициент полезного действия. При переходе на более высокие частоты в системах радиосвязи, телевидения (метровые и дециметровые волны) применяют в качестве фидеров коаксиальный кабель, в печатных платах полосковые линии, в которых электромагнитная энергия передается внутри между проводниками, и вследствие поверхностного эффекта практически не проникает через наружный провод (экран).

С увеличением частоты (длина волны менее 3 см) в коаксиальном кабеле и полосковой линии недопустимо возрастают потери как в диэлектрике, поддерживающем провода, так и в самих проводах из-за поверхностного эффекта, при этом возникает опасность электрического пробоя между проводами. Поэтому на СВЧ вместо открытых линий передачи широко используют закрытые металлические волноводы различного поперечного сечения (прямоугольные, круглые, эллиптические), а также диэлектрические волноводы в виде сплошных диэлектрических стержней.

В металлических волноводах электромагнитные волны распространяются внутри волновода между его стенками, в диэлектрических волноводах как внутри волновода, так и в пространстве, прилегающем к волноводу.

В направляющих системах используются следующие *типы волн*:

поперечные электромагнитные волны типа «Т»;

поперечно-магнитные или электрические волны типа «Е»;

поперечно-электрические или магнитные волны типа «Н»;

поверхностные боковые волны.

Направляющая система — это конкретный вид многослойной ограниченной среды. В ней, как в многослойной среде, электромагнитное поле определяется дискретным спектром нормальных волн и непрерывным спектром боковых волн с вертикальной или горизонтальной поляризацией. При малых расстояниях $d \ll \lambda$ между проводниками в двухпроводной, полосковой и коаксиальной линиях, как и в плоском канале, основной волной является волна нулевой моды с вертикальной поляризацией, или поперечная электромагнитная волна типа «Т».

Заметим, что нормальная волна нулевой моды с горизонтальной поляризацией может распространяться только в магнитной линии, образованной из двух замкнутых на концах, длинных параллельных магнитопроводов. В настоящее время на практике она не используется.

Поле нормальных волн высших мод с вертикальной поляризацией волн типа «Е» и с горизонтальной поляризацией волн типа «Н» при $d \ll \lambda$ мало по сравнению с полем нормальных волн нулевой моды, так как волны высших мод значительно затухают вдоль линии уже на расстояниях, соизмеримых с расстоянием между проводами.

При замыкании проводов в металлических волноводах боковыми стенками нормальная волна нулевой моды исчезает. Поле в них определяется волнами типа «Е» или «Н». Волны высших мод распространяются между нижней и верхней стенками волновода.

В зависимости от источников возбуждения волн и размещения их внутри металлического волновода в нем могут возникать нормальные волны высших мод с вертикальной и горизонтальной поляризацией.

Для примера подробно рассмотрим электромагнитное поле в коаксиальной линии.

Распространение электромагнитных волн в коаксиальной линии. Коаксиальная линия (см. рис. 9.12) состоит из внутреннего проводника, изоляционного слоя и металлического экрана. Кроме этого, имеются дополнительный изоляционный слой, броня и верхнее изоляционное покрытие, предохраняющие внутренние слои от проникновения влаги, механических повреждений и разрыва при натяжении кабеля.

При подключении линии к источнику переменного напряжения между внутренним проводником и экраном в ней возникает поперечная электромагнитная волна типа «Т», распространяющаяся в изоляции *2* вдоль оси z с продольным комплексным волновым числом k_z. Это обеспечивается тем, что при конструировании размеры кабеля выбирают значительно меньше длины волны в изоляционном слое, т. е. таким образом, чтобы нормальные волны высших мод не возникали. В этом случае вне экрана электромагнитное поле отсутствует, так как поле прямого тока, проходящего по внутреннему проводнику, компенсируется полем обратного тока, проходящего в экране.

Исследование поля проведем в цилиндрической системе координат с центром на оси кабеля аналогично рассмотренному распространению электромагнитных волн вдоль проводников (см. подразд. 10.7).

В каждой среде вектор напряженности магнитного поля направлен по касательной к окружностям с центром на оси кабеля, вектор напряженности электрического поля поляризован в плоскости zr. Составляющие $\dot{E}_z$, $\dot{E}_r$ и $\dot{H}_\varphi$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца, которое с учетом осевой симметрии электромагнитного поля (равенства производных по φ нулю) и зависимости всех составляющих векторов поля от координаты z как $\mathbf{e}^{-jk_z z}$ переходит в уравнение Бесселя:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}}{\partial r}\right)-(k_z^2-k^2)\dot{E}_z=0.$$

Решениями уравнения для $\dot{E}_{z1}$ являются модифицированные функции Бесселя $I_0(r\sqrt{k_z^2-k^2})$ первого рода и $K_0(r\sqrt{k_z^2-k^2})$ второго рода нулевого порядка от аргумента $r\sqrt{k_z^2-k_1^2}$ для внутреннего проводника, от аргумента $r\sqrt{k_z^2-k_2^2}$ для изоляционного промежуточного слоя и от аргумента $r\sqrt{k_z^2-k_3^2}$ для экрана:

$$\dot{E}_{z1}=A_1 I_0(r\sqrt{k_z^2-k_1^2})\,\mathbf{e}^{-ik_z z+i\omega t};$$

$$\dot{E}_{z2}=[A_2 I_0(r\sqrt{k_z^2-k_2^2})+B_2 K_0(r\sqrt{k_z^2-k_2^2})]\,\mathbf{e}^{-jk_z z+i\omega t};$$

$$\dot{E}_{z3}=B_3 K_0(r\sqrt{k_z^2-k_3^2})]\,\mathbf{e}^{-ik_z z+i\omega t}.$$

Поле внутри центрального проводника не может быть бесконечно большим, поэтому B_1 принимаем равной нулю, так как при $r=0$ функция $K_0(r\sqrt{k_z^2-k^2})$ стремится к бесконечности.

При $r \to \infty$ функция $I_0(r\sqrt{k_z^2 - k^2})$ возрастает до бесконечно большой величины, поэтому A_3 принимаем равной нулю.

С учетом I и II уравнений Максвелла составляющие $\dot{E}_r$ и $\dot{H}_\varphi$ определяются относительно $\dot{E}_z$ как

$$\dot{E}_{r\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{\text{эл}}}\dot{H}_{\varphi\text{эл}} \text{ и } \dot{H}_{\varphi\text{эл}} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{\text{эл}}}{k_z^2 - k^2}\frac{\partial\dot{E}_{z\text{эл}}}{\partial r}.$$

В результате общее решение приводится к виду:

во внутреннем проводнике

$$\dot{E}_{z1} = A_1 I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 1\text{эл}} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1\text{э}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} A I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r1\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{1\text{э}}}\dot{H}_{\varphi 1\text{эл}};$$

в изоляционном промежуточном слое

$$\dot{E}_{z2} = [A_2 I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})]\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2\text{эл}} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{э}}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}}[A_2 I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})]\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r2\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{э}}}\dot{H}_{\varphi 2\text{эл}};$$

во внешнем экране

$$\dot{E}_{z3} = B_3 K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})]\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 3\text{эл}} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3\text{ээ}}}{(k_z^2 - k_3^2)^{1/2}} B_3 K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})\,\mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r3\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{3\text{э}}}\dot{H}_{\varphi 3\text{эл}}.$$

На поверхности проводника при $r = r_1$ и на внутренней поверхности экрана при $r = r_2$ на основании граничных условий должны быть равными тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей:

при $r = r_1$

$$A_1 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = [A_2 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})];$$

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1\text{э}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} A_1 I_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) =$$

$$= \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}}[A_2 I_0'(r^1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})];$$

при $r = r_2$

$$[A_2 I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] = B_3 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2});$$

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}}[A_2 I_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] =$$

$$= \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3э}}{(k_z^2 - k_3^2)^{1/2}} B_3 K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2}).$$

Разделим одно равенство на другое, предварительно умножив второе равенство на внешний периметр проводника при $r = r_1$ и на внутренний периметр экрана при $r = r_2$. Левая часть полученного равенства при $r = r_1$ равна погонному сопротивлению центрального провода:

$$\dot{R}_1 = \frac{\dot{E}_{z1эл}}{\dot{I}} = \frac{I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2})\sqrt{k_z^2 - k_1^2}}{j2\pi\dot{\varepsilon}_{1эл}\omega r_1 I_0^1(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2})},$$

а правая часть равенства при $r = r_2$ — погонному сопротивлению экрана:

$$\dot{R}_3 = -\frac{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})\sqrt{k_z^2 - k_3^2}}{j2\pi\dot{\varepsilon}_{3эл}\omega r_2 K_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_3^2})}.$$

В результате получаем два равенства:

$$\dot{R}_1 2\pi r_1 \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} = \frac{A_2 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{A_2 I_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}};$$

$$-\dot{R}_3 2\pi r_2 = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} = \frac{A_2 I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{A_2 I_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}.$$

Из них определяем отношение постоянных:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + PK_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{PI_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} =$$

$$= \frac{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + DK_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{DI_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})},$$

где для упрощения выражений введены обозначения:

$$P = \dot{R}_1 2\pi r_1 \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \text{ и } D = -\dot{R}_3 2\pi r_2 \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}.$$

Функции Бесселя при малых аргументах заменяем первыми слагаемыми их разложений в ряд:

$$\frac{-\ln(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - C(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})^{-1}}{C0{,}5r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2} - 1} =$$

$$= \frac{-\ln(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - D(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})^{-1}}{D0{,}5r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2} - 1}.$$

С учетом обозначений P и D приходим к равенству

$$\frac{\ln(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + j2\pi\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}} R_1 (\sqrt{k_z^2 - k_2^2})^{-2}}{-j\pi\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}} r_1^2 R_1 + 1} =$$

$$= \frac{\ln(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - j2\pi\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}} \dot{R}_3 (\sqrt{k_z^2 - k_2^2})^{-2}}{j\pi\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}} r_2^2 R_3 + 1}.$$

Из него находим

$$k_z^2 - k_2^2 \cong \frac{-j2\pi\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}}(\dot{R}_1 + \dot{R}_3)}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = -j\dot{C}(\dot{R}_1 + \dot{R}_3),$$

где погонная емкость кабеля $\dot{C} = \dfrac{2\pi\dot{\varepsilon}_{2\text{эл}}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$.

Из полученного равенства определяем продольное комплексное волновое число $k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega(\dot{R}_1 + \dot{R}_3)\dot{C}}$.

Продольное комплексное волновое число k_z зависит от параметров внутреннего провода, изоляционного слоя и экрана.

Постоянные коэффициенты A и B определим из закона полного тока:

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{1\text{э}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} A_1 I_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2\text{э}}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} [A_2 I_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) +$$

$$+ B_2 K_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] = \frac{I}{2\pi r_1};$$

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}}[A_2 I_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + B_2 K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] =$$

$$= \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}}{(k_z^2 - k_3^2)^{1/2}} B_3 K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2}) = \frac{I}{2\pi r_2};$$

$$A_1 = \frac{\dot{R}_1 I}{I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2})};\ B_3 = -\frac{\dot{R}_3 I}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})};$$

$$A_2 = I\frac{\dot{R}_1 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})};$$

$$B_2 = I\frac{\dot{R}_1 I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}.$$

В результате получаем следующие решения для поля:
в центральном проводнике

$$\dot{E}_{z1} = \dot{R}_1 \frac{I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 1эл} = \frac{1}{2\pi r_0}\frac{I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0'(r_1\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};\ \dot{E}_{r1эл} = \frac{\cdot\, k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{1ээ}}\dot{H}_{\varphi 1эл};$$

в промежуточном изоляционном слое

$$\dot{E}_{z2эл} = \left\{\frac{[\dot{R}_1 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} - \right.$$

$$\left. - \frac{[\dot{R}_1 I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}\right\} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}\left\{\frac{[\dot{R}_1 K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} - \right.$$

$$\left. - \frac{[\dot{R}_1 I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) + \dot{R}_3 I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})] K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_2(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) I_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) - I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) K_0(r_1\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}\right\} I_m \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}}\dot{H}_{\varphi 2эл};$$

в экране

$$\dot{E}_{z3эл} = -\dot{R}_3 \frac{K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 3эл} = -\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_3^2}} \dot{R}_3 \frac{K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t}; \quad (10.13)$$

$$\dot{E}_{r3эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}} \dot{H}_{\varphi 3эл}.$$

В коаксиальной линии за счет тепловых потерь мощности волны в центральном проводе и экране происходит увеличение коэффициентов фазы и затухания ее комплексного волнового числа по сравнению с волновым числом безграничной среды. В результате уменьшаются длина и скорость распространения волны.

Центральный провод убирают. Коаксиальная линия превращается в круглый металлический волновод. Решение для напряженности поля в таком волноводе можно найти из выражений (10.13), принимая во внимание, что модифицированные функции Бесселя второго рода стремятся к бесконечности при $r_1 = 0$:

внутри волновода $\dot{E}_{z2эл} = \dfrac{\dot{R}_3 I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{-I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t};$

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \frac{\dot{R}_3 I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{-I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t}; \quad \dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}} \dot{H}_{\varphi 2эл};$$

в экране $\dot{E}_{z3эл} = -\dot{R}_3 \dfrac{K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t};$

$$\dot{H}_{\varphi 3эл} = -\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_3^2}} \dot{R}_3 \frac{K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} I_m e^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r3эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}} \dot{H}_{\varphi 3эл}.$$

Определяя ток через значение $\dot{E}_{z0эл}$ продольной составляющей напряженности электрического поля в центре волновода, находим для поля:

внутри волновода $\dot{E}_{z2эл} = \dot{E}_{z0эл} I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \dot{E}_{z0эл} I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-ik_z z + i\omega t}; \ \dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{2э}} \dot{H}_{\varphi 2эл};$$

в экране $\dot{E}_{z3эл} = \dfrac{I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} \dot{E}_{z0эл} K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})e^{-ik_z z + i\omega t}$;

$$\dot{H}_{\varphi 3эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_3^2}} \frac{I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} \dot{E}_{z0эл} K_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_3^2})e^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r3эл} = \frac{k_z}{\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}} \dot{H}_{\varphi 3эл}.$$

Из равенства $\dot{H}_{\varphi 2эл} = \dot{H}_{\varphi 3эл}$ при $r = r_2$ на внутренней поверхности волновода

$$\frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} I_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) =$$

$$= \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{3эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_3^2}} \frac{I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2})} K_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_3^2}) = -\frac{I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{2\pi r_2 R_3}$$

получаем, что продольное комплексное волновое число:

$$k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл} 2\pi r_2 R_3 \frac{I_0'(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{I_0(r_2\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}}.$$

Это число при идеально проводящих стенках волновода $\dot{R}_3 = 0$ равно волновому числу внутренней области волновода, а в общем случае сложно зависит от сопротивления металлического цилиндра волновода.

Из приведенного решения следует, что для волн типа «Е» с круговой симметрией поле подобно полю коаксиального кабеля (см. рис. 9.12). Магнитные векторные линии представляют собой окружности, лежащие в поперечных сечениях волновода, а электрические силовые линии расположены в плоскостях, проведенных через радиусы и ось z.

При $k_z \cong k_2$ функции Бесселя $I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})$, $I_0'(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})$ в решении поля внутри волновода можно заменить первыми двумя слагаемыми их разложений в ряд и для составляющих векторов напряженности поля получить

$$\dot{E}_{z2эл} = \dot{E}_{z0эл}\left[1+\frac{1}{2}r^2(k_z^2-k_1^2)\right]e^{-ik_z z+i\omega t} \cong \dot{E}_{z0эл}e^{-ik_z z+i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}r}{2}E_{z0эл}\left[1+\frac{1}{8}r^2(k_z^2-k_1^2)\right]e^{-ik_z z+i\omega t} \cong$$

$$\cong \frac{j\omega\dot{\varepsilon}_{2эл}r}{2}E_{z0эл}e^{-ik_z z+i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r2эл} = \frac{jk_z r}{2}E_{z0эл}\left[1+\frac{1}{8}r^2(k_z^2-k_1^2)\right]e^{-ik_z z+i\omega t} \cong$$

$$\cong \frac{jk_z r}{2}\dot{E}_{z0эл}e^{-ik_z z+i\omega t}.$$

Продольная составляющая вектора напряженности электрического поля $\dot{E}_{z2эл}$ не зависит от радиуса r и постоянна по всему внутреннему сечению волновода.

Составляющие $\dot{H}_{\varphi 2эл}$, $\dot{E}_{r2эл}$ пропорциональны радиусу r и частоте волны ω. Продольный поток вектора Пойнтинга

$$\tilde{\Pi}_{z2эл} = \dot{E}_{r2эл}\ddot{H}_{\varphi 2эл} \cong \frac{k_2^2 r^2}{8}Z_{c2}E^2_{m_{z0эл}}$$

в центре волновода равен нулю и увеличивается пропорционально квадрату радиуса, достигая максимальной величины у внутренней стенки волновода. Этим круглый волновод отличается от коаксиального кабеля, в котором максимальный поток вектора Пойнтинга у внешней поверхности внутреннего провода уменьшается обратно пропорционально квадрату радиуса.

Следовательно, при подобии картин поля в поперечных сечениях круглый волновод отличается от коаксиального кабеля распределением продольного потока мощности.

Круглые металлические волноводы могут быть эффективны на длинах волн, соизмеримых с их поперечными размерами.

На практике [26] собственные значения k_z определяются из условия равенства нулю $\dot{E}_{z2эл}$ при $r = r_2$, т. е. $I_0(r_2\sqrt{k_z^2-k_2^2}) = 0$. Корни модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка — комплексные величины:

$$r_2\sqrt{k_z^2-k_2^2} = -j(2{,}4;\ 5{,}52;\ 8{,}65;\ 11{,}79;\ 14{,}93;\ldots).$$

В результате напряженности электрического и магнитного полей для волн типа «Е» с собственными значениями k_z внутри круглого волновода составят

$$\dot{E}_{z2эл} = \dot{E}_{z0эл} I_0 \left[-j \frac{r}{r_2} (2{,}4;\, 5{,}52;\, 8{,}65;\ldots) \right] \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2эл} = \frac{j\omega \dot{\varepsilon}_{2эл}}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \dot{E}_{z0эл} I_0' \left[-j \frac{r}{r_2} (2{,}4;\, 5{,}52;\, 8{,}65;\ldots) \right] \mathrm{e}^{-ik_z z + i\omega t};$$

$$\dot{E}_{r2эл} = \frac{k_z}{\omega \dot{\varepsilon}_{2э}} H_{\varphi 2эл}.$$

Волны типа «Н», как и волны типа «Е», могут распространяться по круглому металлическому волноводу.

Картина магнитного поля поменяется с картиной электрического поля. Сохранится характер изменения составляющих векторов в зависимости от радиуса, а также распределения продольного потока мощности по поперечному сечению волновода.

Если круглый металлический волновод деформировать в прямоугольный волновод, то в нем, как и в круглом волноводе, могут распространяться волны типа «Е» и волны типа «Н». Векторные линии, представлявшие собой окружности, деформируются в эллипсы, в плоскости сечения сохранится взаимная перпендикулярность между электрическими и магнитными векторными линиями.

Распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе. Рассмотрим в прямоугольной системе координат (см. рис. 10.15) электромагнитное поле в бесконечно длинном прямоугольном волноводе с металлическими идеально проводящими стенками, заполненном идеальным диэлектриком.

Для продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля волны типа «Н» решение уравнения Гельмгольца методом разделения переменных может быть получено в следующем виде:

$$\dot{H}_{zэл} = A\cos(k_x x + \varphi_x)\cos(k_y y + \varphi_y)\mathrm{e}^{-jk_z z},$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Из I и II уравнений Максвелла с учетом $\dot{E}_{zэл} = 0$ определяем

$$\dot{H}_{yэл} = jA\frac{k_z k_y}{k^2 - k_z^2}\cos(k_x x + \varphi_x)\sin(k_y y + \varphi_y)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{xэл} = jA\frac{k_z k_x}{k^2 - k_z^2}\sin(k_x x + \varphi_x)\cos(k_y y + \varphi_y)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{y\,эл} = -jA\frac{\omega\mu_{эл}k_x}{k^2 - k_z^2}\sin(k_x x + \varphi_x)\cos(k_y y + \varphi_x)e^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{x\,эл} = jA\frac{\omega\mu_{эл}k_y}{k^2 - k_z^2}\cos(k_x x + \varphi_x)\sin(k_y y + \varphi_y)e^{-jk_z z}.$$

Из граничных условий, заключающихся в том, что на поверхности идеально проводящих стенок тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля должны равняться нулю, находим

$$\dot{E}_{x\,эл} = 0 \text{ при } y = 0;\ \varphi_y = 0 \text{ при } y = a,\ k_y a = m\pi;$$

$$\dot{E}_{y\,эл} = 0 \text{ при } x = 0;\ \varphi_x = 0 \text{ при } x = b,\ k_x b = n\pi.$$

Таким образом, решение задачи возможно при определенных значениях волновых чисел:

$$\dot{H}_{z\,эл} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)e^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{y\,эл} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{k_z}{k^2 - k_z^2}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)e^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{x\,эл} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{k_z}{k^2 - k_z^2}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)e^{-jk_z z}; \quad (10.14)$$

$$\dot{E}_{y\,эл} = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{\omega\mu_{эл}}{k^2 - k_z^2}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)e^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{x\,эл} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{\omega\mu_{эл}}{k^2 - k_z^2}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)e^{-jk_z z}.$$

Из решения следует, что одной угловой частоте соответствует бесконечное число полей типа «Н». Все они могут возбуждаться и существовать одновременно. Затухание частных полей вдоль оси z определяется мнимой частью продольного волнового числа волны $k_{z\,mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \beta_{z\,mn} - j\alpha_{z\,mn}$ и возникает при условии $k^2 \le \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

При $m = 0$ и $n = 0$ все составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей, как видно из решения

(10.14), равны нулю. Волна является основной при $m=1$ и $n=0$ (или $m=0$ и $n=1$):

$$\dot{H}_{z\text{эл}} = A\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};\ \dot{H}_{y\text{эл}} = jA\frac{k_z}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = jA\frac{\omega\mu_{\text{эл}}}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z}.$$

Для поля волн типа «Е», распространяющихся в прямоугольном металлическом волноводе, можно получить подобное решение:

$$\dot{E}_{z\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{y\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{k_z}{k^2-k_z^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{k_z}{k^2-k_z^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{y\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2-k_z^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2-k_z^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z}.$$

Основной волной в этом случае является волна при значениях $m=1$ и $n=1$:

$$\dot{E}_{z\text{эл}} = A\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{y\text{эл}} = -jA\frac{k_z}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = -jA\frac{k_z}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{y\text{эл}} = -jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z};$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2-k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{e}^{-jk_z z}.$$

При замыкании металлических волноводов проводящими стенками они превращаются в объемные резонаторы. Картина поля в резонаторе подобна картине поля в волноводе, однако в резонаторе колебаниям соответствуют стоячие волны во всех направлениях, в то время как вдоль волновода распространяется бегущая волна.

Для поля волны типа «Н» решение уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в объемном резонаторе может быть получено в следующем виде:

$$\dot{H}_{z\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{H}_{y\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right); \quad (10.15)$$

$$\dot{E}_{y\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{\omega\mu_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{\omega\mu_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right).$$

Для поля волн типа «Е», распространяющихся в объемном резонаторе, можно получить подобное решение:

$$\dot{E}_{z\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{E}_{y\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right); \quad (10.16)$$

$$\dot{H}_{y\text{эл}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right);$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} jA \frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right).$$

В объемном резонаторе может возбуждаться бесконечное число собственных колебаний типа H_{mnp} и E_{mnp}, определяемых значениями индексов m, n и p. При этом индексы соответствуют числу полуволн поля, укладывающихся на сторонах a, b и d резонатора, и удовлетворяют соотношению $k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$.

В резонаторе без потерь собственная частота равна резонансной. От обыкновенного колебательного контура без потерь резонатор отличается тем, что собственных частот у него бесконечное множество.

Наиболее низкая частота в резонаторе соответствует наименьшим значениям индексов m, n и p. Одновременно все индексы не могут равняться нулю, при этом выражения (10.15) и (10.16) обращаются в нуль.

Таким образом, простейшими типами колебаний в прямоугольном объемном резонаторе являются:

для колебаний типа H_{101}

$$\dot{H}_{z\text{эл}} = A\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right);\ \dot{H}_{y\text{эл}} = -jA\frac{k_z}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right);$$

$$\dot{E}_{x\text{эл}} = jA\frac{\omega\mu_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right);$$

для колебаний типа H_{011}

$$\dot{H}_{z\text{эл}} = A\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right);$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = -jA\frac{k_z}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right);$$

$$\dot{E}_{y\text{эл}} = -jA\frac{\omega\mu_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{b}\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right);$$

для колебаний типа E_{110}

$$\dot{E}_{z\text{эл}} = A\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right);\ \dot{H}_{y\text{эл}} = jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right);$$

$$\dot{H}_{x\text{эл}} = -jA\frac{\omega\varepsilon_{\text{эл}}}{k^2 - k_z^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right).$$

Из решений следует, что картина поля E_{110} аналогична картине поля колебаний H_{101} и H_{011}. В обоих случаях вектор напряженности электрического поля параллелен одной из осей, а линии магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных к этой оси. Совпадение картины поля объясняется тем, что в объемном резонаторе все три направления по осям x, y и z являются равноправными и деление волн на типы «Н» и «Е», связанное с осью z, чисто условное.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Градиент скалярной функции

Поле скалярной функции характеризуется математической операцией, называемой градиентом.

Градиент функции U обозначают $\mathrm{grad}\,U$ и записывают в виде общего математического соотношения:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\bar{\mathrm{e}}_n.$$

Градиент является математической операцией, осуществляемой над скалярной функцией, в результате которой возникает векторная функция.

Дивергенция векторной функции

Интенсивность источника или стока принято характеризовать математической операцией, называемой дивергенцией. Формально дивергенцию поля вектора $\overline{A}$ обозначают $\mathrm{div}\overline{A}$ и определяют из выражения

$$\mathrm{div}\overline{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} \overline{A}\mathrm{d}\overline{S}}{\Delta V},$$

где $\oint\limits_{\Delta S} \overline{A}\mathrm{d}\overline{S}$ — поток вектора $\overline{A}$ через замкнутую малую поверхность ΔS, окружающую точку, в которой определяется дивергенция; ΔV — малый объем, охватываемый замкнутой поверхностью ΔS.

Путем предельного перехода замкнутая поверхность стягивается в точку. Положительная дивергенция характеризует интенсивность источника, а отрицательная дивергенция — интенсивность стока поля в точке.

Дивергенция является математической операцией, осуществляемой над векторной функцией, в результате которой возникает скалярная функция.

Ротор векторной функции

Ротор поля вектора $\overline{A}$ обозначают $\mathrm{rot}\,\overline{A}$ и определяют из выражения

$$\mathrm{rot}_n\overline{A} = \lim_{\Delta S} \frac{\oint\limits_{\Delta l} \overline{A}\mathrm{d}\overline{l}}{\Delta S}\bar{\mathrm{e}}_n,$$

где $\mathrm{rot}_n\overline{A}$ — составляющая ротора, ориентированная по направлению единичной нормали $\bar{\mathrm{e}}_n$ к поверхности S; $\oint\limits_{\Delta l} \overline{A}\mathrm{d}\overline{l}$ — интеграл по малому замкнутому контуру Δl, охватывающему малую поверхность ΔS.

Путем предельного перехода эта поверхность стягивается в точку. Ротор (вихрь) представляет собой вектор векторной функции.

Представление операций в декартовой системе координат (x, y, z)

Градиент скаляра: $\operatorname{grad} U = \nabla U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\bar{e}_x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\bar{e}_y + \dfrac{\partial U}{\partial z}\bar{e}_z$,

где ∇ — оператор Гамильтона.

Дивергенция вектора $\bar{A}$: $\operatorname{div}\bar{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.

Ротор (вихрь) вектора $\bar{A}$:

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\bar{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\bar{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z.$$

Оператор Лапласа от скаляра и вектора:

$$\nabla^2 U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} = \nabla^2 A_x \bar{e}_x + \nabla^2 A_y \bar{e}_y + \nabla^2 A_z \bar{e}_z.$$

Представление операций в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{e}_z;$$

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\bar{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\bar{e}_z;$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Представление операций в сферической системе координат (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\bar{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi;$$

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}\right]\bar{e}_r +$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\bar{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right]\bar{e}_\varphi;$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}.$$

Основные тождества

$$\operatorname{grad}(U + \phi) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad}\phi;\quad \operatorname{grad}(\varphi U) = \varphi \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{div}\varphi\overline{A} = \overline{A}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\overline{A};\quad \operatorname{div}[\overline{A}\times\overline{B}] = \overline{B}\operatorname{rot}\overline{A} - \overline{A}\operatorname{rot}\overline{B};$$

$$\operatorname{rot}\varphi\overline{A} = [\operatorname{grad}\varphi\times\overline{A}] + \varphi\operatorname{rot}\overline{A};\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} - \nabla^2\overline{A};$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0;\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{A} = 0.$$

Интегральные соотношения

Теорема Остроградского—Гаусса: $\int\limits_V \operatorname{div}\overline{A}\,\mathrm{d}V = \oint\limits_S \overline{A}\,\mathrm{d}\overline{S}$.

Теорема Стокса: $\int\limits_S \operatorname{rot}\overline{A}\,d\overline{S} = \oint\limits_L \overline{A}\,\mathrm{d}\overline{L}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матханов П. Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высш. шк., 1986.

2. *Данилов Л. В., Матханов П. Н., Филиппов Е. С.* Теория нелинейных электрических цепей. — Л.: Энергоатомиздат, 1990.

3. *Атабеков Г. И.* Линейные электрические цепи. Ч. 1. — М., Л.: Энергия, 1964.

4. *Чуа Л. О., Пен-Мен Лин.* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. — М.: Энергия, 1980.

5. *Бутырин П. А., Демирчян К. С.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей: Учеб. пособие для элект. и энергетич. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1988.

6. *Миронов В. Г., Кузовкин В. А., Казанцев Ю. А.* Моделирование на ЭВМ динамических режимов электронных схем. — М.: МЭИ, 1988.

7. *Новгородцев А. Б.* 30 лекций по теории электрических цепей: Учеб. пособ. — СПб.: Политехника, 1995.

8. *Башарин С. А., Соловьева Е. Б.* Моделирование, анализ и идентификация электрических цепей: Методич. указания. — СПб.: РИО ГЭТУ, 1998.

9. *Башарин С. А., Соловьева Е. Б.* Моделирование и анализ нелинейных электрических цепей: Учеб. пособие. — СПб.: ГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.

10. *Башарин С. А.* Методы матричного моделирования и анализа электрических цепей: Методич. указания. — СПб.: РИО ГЭТУ, 2001.

11. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.

12. *Оре О.* Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.

13. *Шебес М. Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высш. шк., 1990.

14. Сборник задач по теории электрических цепей: Учеб. пособие для вузов / Под ред. П. Н. Матханова и Л. В. Данилова. — М.: Высш. шк., 1980.

15. Сборник задач по расчету электрических цепей / Под ред. С. И. Матханова и М. И. Пинеса. — М.: Высш. шк., 1967.

16. *Федоров В. В.* Единая теория поля. — 5-е изд., доп. — СПб.: Изд.-полиграф. центр ГЭТУ, 2002.

17. *Федоров В. В.* Теоретические основы технической электродинамики. — Л: Изд. ЛЭТИ, 1982.

18. *Максвелл Д. К.* Трактат об электричестве и магнетизме / Пер. Б. М. Болотовского, И. Л. Бурштейна, М. А. Миллера и др. — М.: Наука, 1968.

19. *Максвелл Д. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: ГИТТЛ, 1954.

20. *Маркчев Н. Т.* О теории относительности Альберта Эйнштейна и электромагнитного поля Джеймса Клерка Максвелла. — СПб. , 2002.

21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Изд. техн.-теорет. лит., 1957.

22. *Ленин В.И.* Материализм и эмпириокритицизм // Полн. собр. соч. Т. 18.

23. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. — Гостехиздат, 1948.

24. *Янке У., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

25. *Демирчян К.С., Чечурин В.Л.* Машинные расчеты электромагнитных полей. — М.: Высш. шк., 1986.

26. *Красюк Н.П., Дымович Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высш. шк., 1974.

27. *Федоров В.В.* Краевые задачи электродинамики применительно к системам управления. — Л.: Изд. ЛЭТИ, 1988.

28. *Шередько Е.Ю.* Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства. — М.: Связь, 1976.

29. *Аполлонский С.М.* Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л.: Энергоиздат, 1982.

30. *Федоров В.В.* Схемы замещения при решении уравнений электромагнитного поля в многослойных средах // Науч. тр. Вып. 286. — Л.: Изд. ЛЭТИ, 1981.

ОГЛАВЛЕНИЕ