Г71

В. Т. ГОРЯИНОВ, А. Г. ЖУРАВЛЕВ, В. И. ТИХОНОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Под редакцией
профессора В. И. Тихонова

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов радиотехнических специальностей вузов

1126846
ГРБ ТашПИ

МОСКВА
«СОВЕТСКОЕ РАДИО»
1980

ББК 32.841
Г67

УДК 621.391 : 519.27

Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. И. Тихонова. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Сов. радио, 1980. — 544 с., ил.

Книга содержит примеры и задачи по основным разделам статистической радиотехники (теории вероятностей и математической статистике, теории случайных процессов, помехоустойчивости и теории информации). Материал разбит на 18 глав. В каждой главе приведены справочные теоретические сведения, подробно разобраны типовые примеры и сформулированы задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами. Задачи отличаются друг от друга как по сложности решения, так и по практической значимости.

Предназначается для студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиотехники и автоматического управления. В качестве справочника она полезна также инженерам и научным работникам.

Рис. 229, табл. 77, библ. 120 назв.

Рецензент: кафедра «Основы радиотехники» Московского энергетического института.

Редакция литературы по вопросам космической радиоэлектроники.

Г $\frac{30401\text{-}022}{046(01)\text{-}80}$ 002-80 2402020000

© Издательство «Советское радио», 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга написана как учебное пособие по статистической радиотехнике. По сравнению с первым изданием в книгу включены по существу три новые главы (по математической статистике, марковским и точечным случайным процессам), а материал по корреляционным функциям и спектральным плотностям выделен в самостоятельную главу. Кроме того, значительно обновлены примеры и задачи.

Книга содержит 18 глав, охватывающих все основные разделы статистической радиотехники. В начале каждой главы кратко приведены теоретические сведения в объеме, необходимом для решения рассматриваемых задач. Методика применения их для решения конкретных практических задач иллюстрируется на ряде подробно разобранных примеров. Затем сформулированы задачи, снабженные ответами. Для удобства решения задач, в которых требуется получить ответ в численном виде, в приложении помещен ряд справочных таблиц.

При подборе примеров и задач были использованы отечественные и иностранные источники, многие примеры и задачи составлены авторами самостоятельно. Всего в книге содержится 796 примеров и задач.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиотехники и автоматического управления, ее основная цель — способствовать активному усвоению теоретических основ статистической радиотехники и выработке навыков применения теории к решению практических задач. Однако авторы надеются, что она будет полезна в качестве справочника также инженерам и научным работникам. Именно поэтому задачи и ответы помещены вместе.

Работа между авторами была распределена следующим образом: гл. 5, 6, 10, 12, 14 и 15 написаны В. Т. Горяиновым; гл. 1—4, 9, 17, 18 и приложение — А. Г. Журавлевым; гл. 7, 8, 11, 13 и 16 — В. И. Тихоновым, который выполнил также общее редактирование книги.

Авторы выражают благодарность рецензенту канд. техн. наук доц. В. П. Жукову за критические замечания и полезные советы.

Раздел I

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Событие — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

События подразделяются на достоверные (U), невозможные (V) и случайные (A, B, C, ... или A_1, A_2, A_3, ...). Вероятность достоверного события принимается за единицу, а вероятность невозможного — за нуль:

$$P(U) = 1, \quad P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Если всякий раз, когда происходит событие A, происходит также событие B, то говорят, что событие A влечет за собой событие B и обозначают $A \subset B$, где $\subset$ — знак включения. Если $A \subset B$ и в то же время $B \subset A$, то события A и B называются равносильными (эквивалентными) и обозначаются $A = B$. В этом случае $P(A) = P(B)$.

Суммой или объединением множества событий A_1, A_2, A_3, ... называется такое событие A, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно («хотя бы одно») из этих событий. Сумма событий A_1, A_2, A_3, ... обозначается

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \sum_k A_k \text{ или } A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_k A_k,$$

где $\cup$ — символ объединения событий (логическая операция ИЛИ).

Из определения суммы событий непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$A + A = A, \quad A + U = U, \quad A + V = A, \quad A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C). \tag{1.2}$$

Произведением (или пересечением, или совмещением) событий A_1, A_2, A_3, ... называется такое событие A, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят все события вместе («одновременно»). Для обозначения произведения событий применяются следующие записи:

$$A = A_1 A_2 A_3 \ldots = \prod_k A_k \text{ или } A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \prod_k A_k,$$

где $\cap$ — символ пересечения событий (логическая операция И).

Для произведения событий справедливы соотношения:

$$AA = A, \quad AV = V, \quad AU = A, \quad AB = BA, \quad (AB)C = A(BC). \tag{1.3}$$

Для операций умножения и сложения событий, применяемых совместно, справедлив обычный распределительный (дистрибутивный) закон

$$(A + B)C = AC + BC \tag{1.4}$$

и, кроме того, так называемый «второй распределительный закон» [2]

$$AB + C = (A + C)(B + C) \tag{1.5}$$

События A, B, C, ... образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них. Другими словами, сумма событий, образующих полную группу, есть достоверное событие, т. е.

$$A + B + C + \ldots = U.$$

События A и B называются несовместными (или несовместимыми), если их совместное появление невозможно, т. е. если

$$AB = V.$$

Два события называются противоположными (дополнительными), если они несовместны и образуют полную группу. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$. Нахождение противоположного события эквивалентно логической операции НЕ (отрицания), иными словами $\overline{A}$ = не A.

Для противоположных событий справедливы формулы

$$\overline{\overline{A}} = A,\ \overline{U} = V,\ \overline{V} = U,\ A + \overline{A} = U,\ A\overline{A} = V, \tag{1.6}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},\ A + B = A + \overline{A}B,\ A + B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}},\ AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}}.$$

Когда рассматриваемый опыт имеет N равновозможных исходов, которые несовместны и составляют полную группу (схема случаев), вероятность события A

$$P(A) = n/N, \tag{1.7}$$

где n — число исходов, которые приводят к наступлению события A (благоприятствуют событию A).

При решении задач на непосредственный подсчет вероятностей с использованием формулы (1.7) общих способов для нахождения чисел N и n нет. Во многих случаях целесообразно использовать «комбинаторные» способы, т. е. теорию соединений (размещений, перестановок, сочетаний). При этом часто приходится вычислять число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n - k)!}. \tag{1.8}$$

Если значения n и k велики, то используют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \simeq (n/e)^n \sqrt{2\pi n}. \tag{1.9}$$

Эта формула дает хорошую точность приближения и при сравнительно небольших значениях n. Так, например, относительная погрешность не превосходит 0,1 при $n > 1$, 0,01 — при $n > 10$ и 0,001 — при $n > 100$.

В некоторых задачах понятие равновозможности событий применяется к опытам с бесконечным числом исходов, когда числа N и n определить невозможно. Иногда же проще вычислить саму вероятность события (отношение n/N), а не порознь числа исходов n и N. В таких случаях пользуются геометрическими вероятностями, которые определяются формулой

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}, \tag{1.10}$$

где G — геометрическая мера (длина, площадь, объем и т. д.) всей области, g — геометрическая мера части области G, попадание в которую благоприятствует событию A.

Кроме того, условия применимости формулы (1.7) весьма ограничены (формула применима только тогда, когда опыт сводится к схеме случаев). В большинстве практических задач, связанных с реальными явлениями, вероятность непосредственно связывают с эмпирическим понятием частоты.

Частотой или статистической вероятностью $P^*(A)$ события A в данной серии опытов называется отношение числа опытов n, в которых появилось событие A, к общему числу N произведенных опытов:

$$P^*(A) = n/N. \tag{1.11}$$

По теореме Бернулли при большом числе опытов частота сходится по вероятности к вероятности события, т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$P[|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon] = 1.$$

Определение вероятности сложного события A через вероятности более простых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ базируется на использовании основных теорем теории вероятностей (теорем сложения и умножения вероятностей и их следствий).

Согласно теореме сложения вероятностей вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.12}$$

Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.13}$$

Формулы (1.12) и (1.13) обобщаются на сумму любого числа n событий:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} P(A_k A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P(A_k A_j A_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{k} A_k\right), \tag{1.12a}$$

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{1.13a}$$

Сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1. \tag{1.14}$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

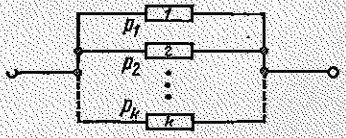
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.15}$$

По теореме умножения вероятностей для двух событий вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что произошло первое:

$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A) = P(B)P(A|B), \tag{1.16}$$

где $P(A|B)$ — условная вероятность события A, т. е. вероятность события A, вычисленная в предположении, что имело место событие B.

Рис. 1.1. Параллельное соединение элементов



Если событие A статистически не зависит от события B, то $P(A|B) = P(A)$, причем события A и B называются независимыми. При независимых событиях A и B выражение (1.16) принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.17}$$

Формулы (1.16) и (1.17) обобщаются на n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \ldots P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \tag{1.16a}$$

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{1.17a}$$

Решение многих практических задач требует совместного использования теорем сложения и умножения вероятностей. В частности, с помощью этих теорем производится расчет вероятности безотказной работы, например, радиотехнических систем.

Вероятностью безотказной работы некоторой системы (или ее элемента) называют вероятность того, что система (элемент) в течение установленного времени будет работать без отказов.

При объединении нескольких элементов в систему различают их параллельное соединение (резервирование) и последовательное (основное). При параллельном соединении (рис. 1.1) отказ системы возможен только при отказе всех элементов, а при последовательном (рис. 1.2) отказ системы происходит при отказе любого элемента [1].

Вероятность безотказной работы $P = P(t)$ системы из k параллельно соединенных элементов

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i), \tag{1.18}$$

где $p_i = p_i(t)$ — вероятность безотказной работы i-го элемента на интервале $(0, t)$. С увеличением числа параллельно включенных элементов вероятность безотказной работы системы возрастает.

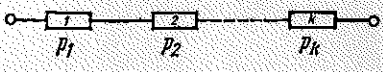
Если система состоит из k последовательно соединенных элементов, то вероятность безотказной работы системы вычисляется по формуле

$$P = \prod_{i=1}^{k} p_i. \tag{1.19}$$

С увеличением числа последовательно включенных элементов вероятность безотказной работы системы убывает.

Во многих реальных ситуациях то или иное событие A может появиться лишь как случайное следствие одного из несовместных событий H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), которые входят в некоторую полную группу событий и называются гипотезами. В таких случаях безусловная вероятность $P(A)$ со-

Рис. 1.2. Последовательное соединение элементов



бытия A при известных вероятностях гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностях $P(A|H_i)$ определяется по формуле полной (или средней) вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \qquad (1.20)$$

При этих же данных, т. е. известных вероятностях $P(H_i)$ и $P(A|H_i)$, можно найти изменение вероятностей гипотез H_i, если предположить, что событие A уже произошло. Задачи подобного типа решаются с помощью теоремы гипотез (или формулы Байеса):

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}. \qquad (1.21)$$

Вероятность $P(H_i)$ называется априорной (доопытной), а $P(H_i|A)$ — апостериорной (послеопытной) или обратной вероятностью.

В теории передачи сообщений, теории стрельбы, при контроле качества продукции и т. д. часто возникают задачи по определению вероятности появления какого-то события A в результате серии опытов, в каждом из которых это событие может произойти или не произойти. Проще всего они решаются тогда, когда опыты являются независимыми, т. е. вероятность того или иного исхода опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Способ решения подобных задач дает теорема о повторении опытов (формула Бернулли).

Вероятность того, что при n независимых опытах (испытаниях) событие A появится ровно k раз, если при каждом опыте вероятность события A одинакова и равна p, определяется формулой

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (1.22)$$

где $q=1-p$.

Формулой (1.22) неудобно пользоваться при больших n. В этом случае для подсчета вероятности $P_n(k)$ применяют приближенные формулы.

Если n велико, p мало, а $np=\lambda$ имеет конечное значение, то пользуются приближенной формулой Пуассона

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (1.23)$$

Приближенное значение относительной погрешности при применении формулы (1.23) вместо (1.22) равно

$$r_n(k)=\frac{k-(k-np)^2}{2n}+\frac{1}{2}kp^2.$$

Когда npq не слишком мало, то применяется локальная формула Муавра — Лапласа:

$$P_n(k)=p_1(x)/\sqrt{npq}, \qquad (1.24)$$

где

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Приближенное значение относительной погрешности при вычислении вероятности $P_n(k)$ по формуле (1.24) равно

$$r_n(k)=\frac{p-q}{2\sqrt{npq}}x\left(1-\frac{x^2}{3}\right).$$

С помощью формулы (1.22) можно вычислить вероятность того, что при n независимых опытах событие A, имеющее вероятность p, появится не менее k раз:

$$P_n(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.25)$$

Вероятность появления события хотя бы один раз при n опытах равна

$$P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n. \qquad (1.26)$$

Вероятность того, что при n независимых опытах событие A, имеющее вероятность p, появится не более k раз, определяется выражением

$$P_n(m \leqslant k) = \sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.27)$$

Если вероятность появления события в каждом опыте равна p, то вероятность того, что в серии из n независимых опытов событие A появится от μ до ν раз включительно, равна

$$P_n(\mu \leqslant k \leqslant \nu) = \sum_{m=\mu}^{\nu} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.28)$$

При больших n, μ и ν этой формулой пользоваться затруднительно. В этом случае используют приближенную интегральную формулу Муавра — Лапласа

$$P_n(\mu \leqslant k \leqslant \nu) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (1.29)$$

где

$$a = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt.$$

Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью, не меньшей P_1, можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geqslant \log(1 - P_1)/\log(1 - p). \qquad (1.30)$$

Наивероятнейшим числом k_0 появлений события A в n независимых опытах называется такое значение $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ наибольшая. Это число определяется по формуле

$$np - q < k_0 < np + p. \qquad (1.31)$$

Если $np - q$ — дробное число, то неравенство (1.31) определяет одно значение наивероятнейшего числа. Если же $np - q$ — целое число, то неравенство (1.31) определяет два значения наивероятнейшего числа.

Формула (1.22) составляет содержание так называемой частной теоремы о повторении опытов. Известно несколько ее обобщений. Одно из них относится к случаю, когда из-за изменяющихся условий при проведении n независимых опытов вероятность p меняется от одного опыта к следующему (общая теорема о повторении опытов). В этом случае вероятность $P_n(k)$ появления события A ровно k раз определяется по производящей функции [3]:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) z^k, \qquad (1.32)$$

где p_i — вероятность появления события в i-м опыте, $q_i = 1 - p_i$.

Искомая вероятность $P_n(k)$ равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции и может быть определена дифференцированием функции $\varphi_n(z)$:

$$P_n(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k \varphi_n(z)}{dz^k}\right]_{z=0}. \quad (1.33)$$

Другое обобщение формулы (1.22) относится к случаю, когда каждый опыт может иметь не два, а большее число исходов. Если, например, при каждом повторении опыта может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ($\sum_1^m p_i = 1$), то вероятность $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ того, что при n независимых опытах событие A_1 появится k_1 раз, событие A_2 появится k_2 раз и т. д., событие A_m появится k_m раз ($\sum_{i=1}^m k_i = n$), определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \quad (1.34)$$

Вероятность $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ является коэффициентом при $z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_m^{k_m}$ в разложении по степеням аргументов z_k полинома

$$\varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_m) = (p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_m z_m)^n, \quad (1.35)$$

представляющего собой производящую функцию для совокупности чисел $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

2. ПРИМЕРЫ

1.1. Доказать справедливость следующего соотношения между событиями: $(A + B)C = AC + BC$.

Решение. Заданный распределительный закон можно доказать путем непосредственного рассмотрения смысла утверждений, выражаемых каждой частью равенства. Левая часть данного равенства означает событие, состоящее в том, что произошли совместно события A или B и событие C. Правая часть означает, что происходят события A вместе с C или B вместе с C (или и то, и другое). Эти два утверждения равносильны.

1.2. Показать, что $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$.

Решение. Доказательство справедливости заданного равенства проведем алгебраическим путем. Используя формулы (1.2)—(1.6), имеем

$$A + AB + BC + \overline{A}C = (AU + AB) + BC + \overline{A}C =$$
$$= A(U + B) + \overline{A}C + BC = AU + \overline{A}C + BC = A + AC + BC =$$
$$= A + AC + \overline{A}C + BC = A + C(A + \overline{A}) + BC =$$
$$= A + C + BC = A + C.$$

1.3. Двум радиостанциям разрешена работа на десяти одинаковых фиксированных частотах.

Определить вероятность $P(A)$ того, что настроенные независимо обе радиостанции окажутся работающими на одинаковых частотах.

Решение. Обозначим (чисто формально) частоты одной радиостанции через f'_i, а частоты другой — через f''_i, $i = 0, 1, \ldots 9$, $f'_i = f''_i$. Расположим все возможные исходы в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc} f'_0 f''_0 & f'_0 f''_1 & \ldots & f'_0 f''_9, \\ f'_1 f''_0 & f'_1 f''_1 & \ldots & f'_1 f''_9, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_9 f''_0 & f'_9 f''_1 & \ldots & f'_9 f''_9. \end{array}$$

Всего равновозможных исходов $N = 10 \cdot 10 = 100$. Эти исходы составляют полную группу несовместных случаев. Исходов, благоприятствующих событию A (обе радиостанции окажутся работающими на одинаковых частотах), будет $n = 10\,(f'_0 f''_0, f'_1 f''_1, \ldots, f'_9 f''_9)$. Следовательно,

$$P(A) = n/N = 10/100 = 0{,}1.$$

1.4. По линии связи в случайном порядке передаются 30 знаков русского алфавита.

Найти вероятность $P(A)$ того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово «радио».

Решение. Число всех равновозможных случаев N (число выборов из 30 букв алфавита по 5) равно числу размещений из 30 по 5 букв, т. е.

$$N = A^5_{30} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один (комбинация, образующая слово «радио»), т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = n/N = 1/A^5_{30} = 1/30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \approx 5{,}88 \cdot 10^{-8}.$$

1.5. Производится прием кодовых комбинаций, содержащих пять цифр от 1 до 5.

Какова вероятность $P(A)$ того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 12345?

Решение. Число всех равновозможных случаев N равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $N = P_5 = 5! = 120$. Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один, т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = n/N = 1/5! = 1/120.$$

1.6. В партии из N запасных радиоламп имеется M нестандартных. Для проверки выбираются наугад k радиоламп из этой партии ($k < N$).

Определить вероятность $P(A)$ того, что среди них окажутся ровно l нестандартных ($l \leqslant M$).

Решение. Общее число возможных выборов из N радиоламп по k равно числу сочетаний из N элементов по k, т. е. C^k_n. Благоприятствующими поставленному условию являются случаи, когда из общего числа M нестандартных радиоламп взято ровно l штук, что

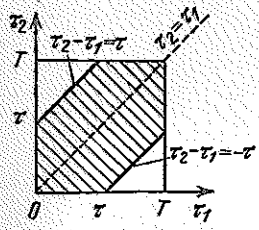


Рис. 1.3. К вычислению вероятности $P(A)$

можно осуществить C_M^l способами. Но каждый из этих случаев в контрольной партии может быть в различной комбинации с остальными $k-l$ стандартными лампами. Число таких комбинаций равно C_{N-M}^{k-l}. Следовательно, общее число благоприятствующих случаев будет равно произведению $C_M^l C_{N-M}^{k-l}$. В соответствии с определением вероятности получим

$$P(A) = C_M^l C_{N-M}^{k-l} / C_N^k.$$

1.7. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ.

Определить вероятность $P(A)$ того, что приемник будет перегружен.

Решение. Изобразим случайные моменты поступления сигналов в радиоприемник τ_1 и τ_2 в виде декартовых координат на плоскости. Областью возможных значений τ_1 и τ_2 является квадрат площадью $S = T^2$ (рис. 1.3). Приемник будет перегружен, если $|\tau_2 - \tau_1| \leqslant \tau$. Данная область лежит между прямыми $\tau_2 - \tau_1 = \tau$ и $\tau_2 - \tau_1 = -\tau$. Площадь этой области $s = T^2 - (T-\tau)^2$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G} = \frac{s}{S} = 1 - \frac{(T-\tau)^2}{T^2}.$$

1.8. По данным ремонтной мастерской в среднем из 100 отказов телевизора 50% обусловлено выходом из строя электронных ламп, 15% — конденсаторов, 12% — резисторов, 5% — кинескопов, а остальные отказы обусловлены другими причинами.

Найти вероятность $P^*(A)$ отказа телевизора по другим причинам.

Решение. По условию вероятности выхода из строя телевизора из-за отказа различных элементов равны:

$$P^*(A_1) = 0{,}5;\ P^*(A_2) = 0{,}15;\ P^*(A_3) = 0{,}12;\ P^*(A_4) = 0{,}05,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — отказы телевизора, обусловленные соответственно выходом из строя электронных ламп, конденсаторов, резисторов и кинескопов. События A, A_1, A_2, A_3, A_4 составляют полную группу. Следовательно,

$$P^*(A) = 1 - \sum_{i=1}^{4} P^*(A_i) = 1 - (0{,}5 + 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}05) = 0{,}18.$$

1.9. В партии из N полупроводниковых триодов имеется M бракованных. Для контроля из партии берется наугад n триодов.

Какова вероятность $P(A)$ того, что среди них будет не более m бракованных?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что среди n взятых для контроля триодов будет не более m бракованных. Событие A произойдет тогда, когда среди n взятых на проверку триодов или не будет ни одного бракованного (событие A_0), или один бракованный (событие A_1), или два бракованных (событие A_2) и т. д., или окажется m бракованных триодов (событие A_m), т. е.

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots + A_m = \sum_{k=0}^{m} A_k.$$

Вероятность $P(A_k)$ события A_k равна

$$P(A_k) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n.$$

Следовательно, по теореме сложения вероятностей событий имеем

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_k) = \frac{\sum_{k=0}^{m} C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

1.10. Обнаружение воздушной цели производится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8.

Определить вероятность $P(C)$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

Решение. По условию события A и B независимы, поэтому вероятность совместного события AB (цель обнаружена обеими станциями)

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Используя формулу (1.12), получаем

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \\ = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Так как события A и B независимы, то пример можно решить путем перехода к противоположным событиям $\overline{A}$ и $\overline{B}$. В этом случае

$$P(C) = P(A + B) = 1 - P(\overline{A})\,P(\overline{B}) = \\ = 1 - [1 - P(A)]\,[1 - P(B)] = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94.$$

1.11. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки.

Какова вероятность $P(A)$ получить слово «тема»?

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — события, состоящие в последовательном извлечении букв «т», «е», «м», «а». Тогда соответствующие вероятности равны:

$$P(A_1)=\frac{2}{10};\quad P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{9};\quad P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{2}{8};$$

$$P(A_4\mid A_1A_2A_3)=\frac{3}{7}.$$

Применяя формулу (1.16а), получаем

$$P(A)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(A_4\mid A_1A_2A_3)=$$
$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{420}.$$

1.12. Два стрелка стреляют по очереди по мишени до первого попадания. Каждый из них имеет право сделать не более двух выстрелов. Зная, что при одном выстреле первый стрелок попадает в мишень с вероятностью p_1, а второй — с вероятностью p_2, найти вероятность того, что: 1) первый стрелок попадет в мишень; 2) второй стрелок попадет в мишень.

Решение. Рассмотрим следующие события: A — первый стрелок попадает в мишень, B — второй стрелок попадает в мишень, A_1 — попадание у первого стрелка при первом выстреле, $\overline{A}_1$ — промах у первого стрелка при первом выстреле, A_2 — попадание у первого стрелка при втором выстреле, $\overline{A}_2$ — промах у первого стрелка при втором выстреле, B_1 — попадание у второго стрелка при первом выстреле, $\overline{B}_1$ — промах у второго стрелка при первом выстреле, B_2 — попадание у второго стрелка при втором выстреле. Тогда

$$A=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2,\qquad B=\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2.$$

Так как

$$P(A_1)=P(A_2)=p_1,\qquad P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=1-p_1,$$
$$P(B_1)=P(B_2)=p_2,\qquad P(\overline{B}_1)=1-p_2,$$

то

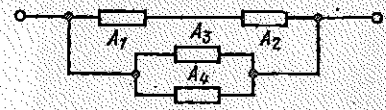
1) $P(A)=p_1+(1-p_1)(1-p_2)p_1=p_1[1+(1-p_1)(1-p_2)]$,

2) $P(B)=(1-p_1)p_2+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_1)p_2=$
$=(1-p_1)p_2[1+(1-p_1)(1-p_2)]$.

1.13. Система управления состоит из четырех узлов A_1, A_2, A_3 и A_4 (рис. 1.4). Вероятности p_i безотказной работы узлов соответственно равны p_1, p_2, p_3, p_4.

Вычислить вероятность безотказной работы P всей системы управления.

Рис. 1.4. Структурная схема системы управления



Решение. Вероятность безотказной работы p_{12} цепи из двух последовательно соединенных элементов A_1 и A_2 согласно формуле (1.19) равна

$$p_{12} = \prod_{i=1}^{2} p_i = p_1 p_2.$$

Вероятность безотказной работы p_{34} цепи, состоящей из двух параллельно соединенных элементов A_3 и A_4, определим по формуле (1.18):

$$p_{34} = 1 - \prod_{i=3}^{4} (1 - p_i) = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4).$$

Применяя формулу (1.18) еще раз, получаем:

$$P = 1 - (1 - p_{12})(1 - p_{34}) = 1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_3)(1 - p_4).$$

Пусть, например, $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0{,}8$, $p_4 = 0{,}9$. Тогда

$$P = 1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}58 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}9884 \approx 0{,}99.$$

1.14. Вероятности того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета самолета из допусков, равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, если двух блоков, то 0,4, если трех, то 0,5.

Найти вероятность $P(A)$ того, что связь не будет установлена.

Решение. К интересующему нас событию A ведут три гипотезы: H_1 — за поле допусков вышли параметры одного блока; H_2 — за поле допусков вышли параметры двух блоков; H_3 — за поле допусков вышли параметры трех блоков.

Согласно теореме сложения и умножения вероятностей имеем

$$P(H_1) = 0{,}1(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}3) + 0{,}2(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}3) + 0{,}3(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}2) = 0{,}398,$$

$$P(H_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2(1 - 0{,}3) + 0{,}1 \cdot 0{,}3(1 - 0{,}2) + 0{,}2 \cdot 0{,}3(1 - 0{,}1) = 0{,}092,$$

$$P(H_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

По условию $P(A \mid H_1) = 0{,}25$, $P(A \mid H_2) = 0{,}4$, $P(A \mid H_3) = 0{,}5$. Следовательно, по формуле полной вероятности (1.20) получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\, P(A \mid H_i) = 0{,}398 \cdot 0{,}25 + 0{,}092 \cdot 0{,}4 + 0{,}006 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}139.$$

1.15. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Определить, какая команда была передана?

Решение: Пусть A — событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 — была передана комбинация 11111; H_2 — была передана комбинация 00000. По условию $P(H_1)=0,7$; $P(H_2)=0,3$. Условная вероятность приема кодовой комбинации 10110 вместо 11111 равна

$$P(A \mid H_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \simeq 0,035.$$

Аналогично

$$P(A \mid H_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \simeq 0,023.$$

По формуле (1.21) находим

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{\sum_{k=1}^{2} P(H_k)P(A \mid H_k)} = \frac{0,7 \cdot 0,035}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,78,$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0,3 \cdot 0,023}{0,0314} = 0,22.$$

Сравнивая найденные условные вероятности, заключаем, что при появлении на выходе комбинации 10110 с вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

1.16. Производится 6 независимых выстрелов по цели. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,75. Вычислить: 1) вероятность ровно пяти попаданий; 2) вероятность не менее пяти попаданий; 3) вероятность более трех промахов.

Решение. 1. По условию вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0,75$. Следовательно, вероятность промаха $q = 1 - p = 0,25$. Вероятность ровно пяти попаданий по формуле (1.22) равна

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 \approx 0,356.$$

2. Требование, чтобы при 6 выстрелах было не менее пяти попаданий, будет удовлетворено, если осуществится 5 или 6 попаданий. Эти события несовместны. Поэтому по формуле (1.25) имеем

$$P_6(m \geqslant 5) = \sum_{m=5}^{6} C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 =$$

$$= 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 + (0,75)^6 \approx 0,534.$$

3. Вероятность того, что при 6 выстрелах будет более трех промахов, равна вероятности того, что при этих 6 выстрелах будет меньше трех попаданий (или ни одного попадания, или одно, или два попадания). Используя формулу (1.27), получим

$$P_6(m \leqslant 2) = \sum_{m=0}^{2} C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 =$$

$$= (0{,}25)^6 + 6 \cdot 0{,}75 \cdot (0{,}25)^5 + 15 \cdot (0{,}75)^2 \cdot (0{,}25)^4 \approx 0{,}0376.$$

1.17. Вероятность p появления события A при каждом испытании равна 0,2. Производится 400 независимых испытаний.

Определить вероятность $P_n(k)$ того, что: 1) событие A наступит ровно 80 раз; 2) событие A наступит от 60 до 96 раз включительно.

Решение. 1. Воспользуемся приближенной локальной формулой Муавра — Лапласа (1.24). По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Следовательно,

$$x = (k - np)/\sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0{,}2)/\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 0.$$

Тогда

$$P_{400}(80) = p_1(0)/\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}.$$

По таблице (см. приложение I) находим $p_1(0) = 0{,}3989$. Окончательно получаем

$$P_{400}(80) = (1/8) \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}0499.$$

Формула (1.22) приводит примерно к такому же результату:

$$P_{400}(80) = 0{,}0498.$$

2. Используем приближенную интегральную формулу Муавра — Лапласа (1.29)

$$P_{400}(60 \leqslant k \leqslant 96) = \Phi\left(\frac{96 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2{,}5)].$$

По таблице (см. приложение II) находим $\Phi(2) = 0{,}977$; $\Phi(2{,}5) = 0{,}994$. Следовательно,

$$P_{400}(60 \leqslant k \leqslant 96) = 0{,}977 - 1 + 0{,}994 = 0{,}991.$$

1.18. Противотанковое орудие ведет стрельбу по танку. Всего производится 6 выстрелов, причем вероятность попадания в танк при каждом выстреле равна 0,3.

Рассчитать: 1) наивероятнейшее число попаданий в танк; 2) число выстрелов, необходимых для того, чтобы с вероятностью 0,9 поразить танк, если для этого достаточно одного попадания.

Решение. 1. Наивероятнейшее число попаданий k_0 находим по формуле (1.31). По условию, $n = 6$, $p = 0{,}3$, $q = 1 - p = 0{,}7$. Следовательно, $6 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \leqslant k_0 < 6 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$, т. е.

$$1{,}1 \leqslant k_0 < 2{,}1.$$

Между числами 1,1 и 2,1 заключено лишь одно целое число — 2. Поэтому наивероятнейшее число $k_0 = 2$.

2) Применив формулу (1.30), получим

$$n \geqslant \log(1 - 0{,}9)/\log(1 - 0{,}3) \approx 6{,}45.$$

Таким образом, для поражения танка с вероятностью 0,9 достаточно произвести 7 выстрелов.

1.19. Система наведения ракеты имеет четыре датчика информации о цели D_1, D_2, D_3, D_4, информация с которых поступает в систему управления ракетой. Каждый датчик независимо от других определяет параметры движения цели. Вероятности правильного определения параметров соответствующими датчиками равны: $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}95$, $p_3 = 0{,}8$, $p_4 = 0{,}85$.

Вычислить вероятности $P_4(k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, того, что правильную информацию не выдаст ни один датчик и выдадут один, два, три, четыре датчика.

Решение. Для определения вероятностей $P_4(k)$ составим производящую функцию. По условию, $n = 4$; $p_1 = 0{,}9$; $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}95$; $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}05$; $p_3 = 0{,}8$; $q_3 = 1 - p_3 = 0{,}2$; $p_4 = 0{,}85$; $q_4 = 1 - p_4 = 0{,}15$

Тогда

$$\varphi_4(z) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i z) = (0{,}1 + 0{,}9\,z)(0{,}05 + 0{,}95z)(0{,}2 + 0{,}8\,z)(0{,}15 +$$

$$+ 0{,}85\,z) = 0{,}0002 + 0{,}0056z + 0{,}0696z^2 + 0{,}3432z^3 + 0{,}5814z^4.$$

Искомые вероятности $P_4(k)$ равны коэффициентам при z^k. Следовательно,

$$P_4(0) = 0{,}0002,\ P_4(1) = 0{,}0056,\ P_4(2) = 0{,}0696,\ P_4(3) = 0{,}3432,$$

$$P_4(4) = 0{,}5814.$$

1.20. На участке обстрела находятся три цели. Вероятности p_i попадания в первую, вторую и третью цели соответственно равны $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}2$. По участку произведено 12 выстрелов.

Какова вероятность того, что в первую цель попадет 5 снарядов, во вторую — 4, в третью — 2 снаряда?

Решение. По условию, $n = 12$, $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}2$, $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$, $k_4 = 12 - 5 - 4 - 2 = 1$. Здесь p_4 — вероятность попадания в область, находящуюся вне целей, k_4 — число попаданий в эту область.

Согласно формуле (1.34) искомая вероятность

$$P_{12}(5, 4, 2, 1) = \frac{12!}{5!\,4!\,2!\,1!}(0{,}4)^5 \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}0276.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

1.1. Разведывательная пеленгаторная система состоит из четырех синхронно вращающихся антенн с неперекрывающимися диаграммами направленности (рис. 1.5), причем каждая антенна соединена со своим приемником. Длительность сигнала такова, что он не может быть обнаружен двумя приемниками.

Найти связь события A (обнаружение сигнала пеленгаторной системой) с событиями A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, которые состоят в обнаружении сигнала первым, вторым, третьим и четвертым приемником.

Ответ: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

1.2. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Пусть события: A_i, $i = 1, 2$, — исправен i-й блок первого типа, B_j, $j = 1, 2, 3$, — исправен j-й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа.

Выразить событие C, означающее работу прибора, через события A_i и B_j.

Ответ: $C = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$.

1.3. Известны события A, B, C, причем $A \subset B$. Определить сложные события AB, $A + B$, ABC и $A + B + C$.

Ответ: $AB = A$, $A + B = B$, $ABC = AC$, $A + B + C = B + C$.

1.4. Доказать следующие равенства:

1) $A + B = A + \bar{A}B$, 2) $\bar{A} + AB = \bar{A} + B$, 3) $\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$, 4) $A + B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$; 5) $AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$.

1.5. Истребитель атакует боевой порядок противника, в составе которого 6 носителей и 3 постановщика помех, внешне друг от друга не различимых.

Найти вероятность того, что атакованный самолет является носителем.

Ответ: 2/3.

1.6. В партии полупроводниковых триодов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k триодов стандартны.

Определить вероятность P того, что следующий триод будет стандартным.

Ответ: $P = (n - k)/(n + m - k)$.

1.7. На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Две из них наугад вынимаются одна за другой.

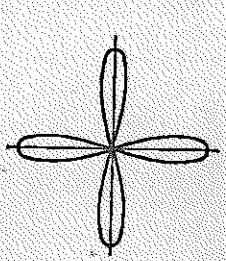


Рис. 1.5. Диаграмма направленности антенн

Найти вероятность того, что: а) сумма цифр на вынутых карточках является нечетным числом; б) вторая цифра меньше первой; в) вторая цифра больше первой ровно на 1.

Ответ: а) 3/5; б) 1/2; в) 1/5.

1.8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад.

Определить вероятность P того, что набраны нужные цифры.

Ответ: $P = 1/A_{10}^2 = 1/90$.

1.9. Принимаются кодовые комбинации, содержащие пять неповторяющихся цифр от 1 до 5.

Какова вероятность P того, что в одной принятой комбинации цифры образуют последовательность 12345?

Ответ: $P = 1/P_n = 1/5! = 1/120$.

1.10. В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия приема блока нарушаются, если обе лампы с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых 3 имеют пониженную крутизну.

Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух электронных ламп.

Ответ: 1/15.

1.11. В мастерской находятся $a + b$ блоков от двух различных радиоприемников, из которых два повреждены.

Какова вероятность P того, что повреждены блоки различных приемников?

Ответ: $P = 2ab/(a + b)(a + b - 1)$.

1.12. Самолет, имеющий радиолокационную станцию с дальностью действия $\mathcal{D}$, осуществляет поиск со скоростью v в достаточно большом районе площадью S, в любой точке которого может всплыть на время t подводная лодка.

Найти вероятность P обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время t невелико и лодка обнаруживается при попадании в зону действия радиолокатора.

Ответ: $P = (\pi\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}vt)/S$.

1.13. Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками самолетов не менее 5 мин. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 10 ч, а другой в 10 ч. 10 мин.

Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах ± 10 мин, а второй — в пределах ± 5 мин, при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?

Ответ: 0,25.

1.14. Искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты.

Полагая падение ИСЗ в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

Ответ: [4] : 0,21.

1.15. При испытаниях 200 случайно отобранных резисторов в течение времени t оказалось, что относительная частота исправных резисторов равна 0,95.

Определить число исправных резисторов.

Ответ: 190.

1.16. Проводится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,01, во второй — 0,008, в третий — 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три.

Определить вероятность того, что склады будут взорваны.

Ответ: 0,043.

1.17. Контролер проверяет взятые случайно изделия из партии, содержащей a изделий 1-го сорта и b изделий 2-го сорта. Проверка первых m изделий ($m < b$) показала, что все они второго сорта.

Вычислить вероятность P того, что из следующих четырех проверяемых изделий по крайней мере два окажутся второсортными.

Ответ: $P = (C_b^2 C_a^2 + aC_b^3 + C_b^4)/C_{a+b}^4$.

1.18. На вход радиоприемного устройства поступают кодовые комбинации, состоящие из двух знаков: 1 (посылка) и 0 (пауза).

Какова вероятность того, что в первой кодовой комбинации будет хотя бы один нуль, если появление нуля и единицы равновозможно?

Ответ: 3/4.

1.19. Партия из 100 радиоламп подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной радиолампы среди пяти проверенных.

Определить вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5% неисправных радиоламп.

Ответ: 0,23.

1.20. Прием радиосигналов производится на два разнесенных приемника. Вероятность правильного приема на первый приемник равна p_1, на второй — p_2. События, состоящие в приеме сигналов каждым приемником, считаются независимыми.

Найти вероятность P правильного приема радиосигналов.

Ответ: $P = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

1.21. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приемника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приемника — 0,2.

Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приемника.

Ответ: 0,72.

1.22. Произведены три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении ошибка превысит заданную точность, равна 0,4.

Определить вероятность того, что только в одном из измерений ошибка превысит заданную точность.

Ответ: 0,432.

1.23. В студии имеются три телевизионных камеры. Вероятность того, что каждая камера включена в данный момент, равна 0,6.

Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Ответ: 0,936.

1.24. При передаче текста 10% букв искажаются и принимаются неверно.

Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

1.25. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех посланный сигнал принимается ошибочно с вероятностью 0,01 и принимается правильно с вероятностью 0,99 (независимо от того, были приняты предшествующие сигналы с ошибкой или правильно).

Зная, что послана комбинация 10110, найти вероятность того, что: а) она принята без искажений; б) принята комбинация 11110; в) в принятой комбинации имеется одна ошибка.

Ответ: а) $0{,}99^5$; б) $0{,}01 \cdot 0{,}99^4$; в) $0{,}05 \cdot 0{,}99^4$.

1.26. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника, передаются два сигнала: единица и нуль. За счет воздействия помех сигналы могут искажаться. На участке передатчик—ретранслятор единица переходит в единицу с вероятностью p_1 и в нуль с вероятностью $1-p_1$; нуль переходит в нуль с вероятностью q_1 и в единицу с вероятностью $1-q_1$. На участке ретранслятор—приемник указанные вероятности соответственно равны p_2, $1-p_2$, q_2 и $1-q_2$.

Определить вероятность P того, что комбинация 10, посланная передатчиком, будет принята приемником без искажений.

Ответ: $P = [p_1 p_2 + (1-p_1)(1-q_2)][q_1 q_2 + (1-q_1)(1-p_2)]$.

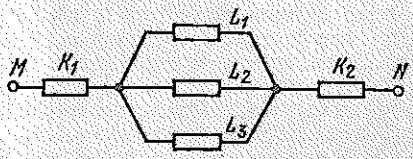
1.27. Радиорелейная линия связи состоит из m ретрансляционных станций. Вероятность безотказной работы каждой станции одинакова. Станции выходят из строя независимо друг от друга, причем отказ любой станции влечет за собой отказ всей системы связи.

Определить вероятность p_1 безотказной работы каждой станции за промежуток времени T, если вероятность безотказной работы всей линии связи за этот промежуток времени должна быть не менее P.

Ответ: $p_1 \geqslant P^{1/m}$.

1.28. Между корреспондентами M и N происходит обмен информацией по схеме, приведенной на рис. 1.6, где K_1 и K_2 — оконечная аппаратура, а L_1, L_2, L_3 — каналы, взаимно резервирующие друг друга. Выходы из строя элементов схемы—независимые события. Вероятности безотказной работы элементов K_1, K_2, L_1, L_2, L_3 за время T соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,9; 0,6; 0,5.

Рис. 1.6. Система передачи информации с тремя параллельными элементами



Какова вероятность того, что за время T не произойдет перерыва связи?

Ответ: 0,549.

1.29. Связная самолетная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и при мощности, составляющей 25% полной мощности. Вероятности работы радиостанции в этих режимах соответственно равны 0,7; 0,1; 0,2.

Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют соответственно 0,3; 0,2; 0,05.

Определить вероятность того, что за T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

Ответ: 0,76.

1.30. Вероятности того, что во время работы ЭЦВМ произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных блоках, относятся как 3 : 2 : 5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных блоках соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9.

Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Ответ: 0,87.

1.31. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица переходит в единицу с вероятностью p и в нуль — с вероятностью $1-p$; нуль переходит в нуль с вероятностью q и в единицу — с вероятностью $1-q$. Наугад отправлен сигнал.

Определить вероятность P того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал 1; б) на приемном конце будет получен сигнал 0.

Ответ: а) $P = 0{,}5(1 + p - q)$; б) $P = 0{,}5(1 - p + q)$.

1.32. Самолет, вылетающий на задание, создает радиопомехи, которые с вероятностью 0,4 «забивают» радиосредства системы ПВО. Если радиосредства «забиты», то самолет проходит к объекту необстрелянным, сбрасывает бомбы и поражает объект с вероятностью 0,8. Если радиосредства системы ПВО «не забиты», то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0,7.

Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

Ответ: 0,464.

1.33. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали.

Вычислить вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

Ответ: 0,298.

1.34. Самолет может выполнять задание на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25% всех полетов, на средних — 10% и на малых — 65%. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,9; 0,65. Самолет вышел на заданный объект.

Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

Ответ: 0,604.

1.35. По двоичному каналу связи с шумами передаются токовая (1) и бестоковая (0) посылки с априорными вероятностями $p(1)=0{,}6$ и $p(0)=0{,}4$. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $p=(1'|1)=0{,}9$; вероятность перехода единицы в нуль $p(0'|1)=0{,}1$; вероятность перехода нуля в нуль $p(0'|0)=0{,}8$ и вероятность перехода нуля в единицу $p(1'|0)=0{,}2$. На выходе радиоприемного устройства зарегистрирована единица.

Какова вероятность того, что: а) в действительности была передана 1; б) на самом деле был передан 0.

Ответ: а) 0,87; б) 0,13.

1.36. Вероятности того, что при одном выстреле из орудия получаются недолет, попадание и перелет, равны 0,1; 0,7; 0.2. Для другого орудия вероятности этих событий равны соответственно 0,2; 0,6 и 0,2. Наугад выбранное орудие стреляет трижды. Отмечены: одно попадание, один недолет и один перелет.

Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

Ответ: 7/19.

1.37. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 и 1 на каждой позиции равновозможно.

Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации появится число нулей, меньшее двух.

Ответ: 7/64.

1.38. При вращении антенны обзорного радиолокатора за время облучения цели успевает отразиться 8 импульсов. Для обнаружения цели необходимо, чтобы через приемник на индикатор прошло не менее 6 отраженных импульсов. Вероятность подавления импульса шумом в приемнике равна 0,1.

Определить вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора.

Ответ: 0,96.

1.39. Радиоэлектронный комплекс самолета-бомбардировщика включает в себя 10 объектов. Вероятность безотказной работы каж-

дого объекта в течение времени T равна 0,9. Объекты выходят из строя независимо один от другого.

Вычислить вероятность того, что за время T: а) откажет хотя бы один объект; б) откажут ровно два объекта; в) откажут не менее двух объектов.

Ответ: а) 0,652; б) 0,194; в) 0,264.

1.40. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом равна 0,25.

Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 видеоимульсов превысит порог; б) наивероятнейшее число видеоимпульсов, превысивших порог.

Ответ: а) 0,00422; б) 2.

1.41. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле равна 0,01. По самолету производится 100 независимых выстрелов.

Определить вероятность двух попаданий в самолет.

Ответ: $P_{100}(2) \approx 0{,}184$.

1.42. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Независимым образом передано 10000 знаков.

Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?

Ответ: 0,494.

1.43. Вероятности разрегулировки датчика опорных частот, передатчика, приемника и антенно-фидерного тракта за время T работы радиостанции соответственно равны 0,4; 0,2; 0,3; 0,3.

Найти вероятность отказа радиостанции за время T, если из-за разрегулировки одного блока радиостанция отказывает с вероятностью 0,3, из-за разрегулировки двух блоков — 0,5, трех блоков — 0,7, четырех — 0,9.

Ответ: 0,316.

1.44. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приема каждого из сигналов не зависят от приема остальных и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Определить вероятность того, что: а) будет принято k сигналов ($k = 0, 1, 2, 3, 4$); б) будет установлена двухсторонняя радиосвязь, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, при приеме двух сигналов — 0,6, а при приеме трех и четырех сигналов — единице.

Ответ: а) 0,168; 0,394; 0,320; 0,106; 0,012; б) 0,389.

1.45. Девяти радиостанциям разрешена работа на трех волнах: λ_1, λ_2 и λ_3. Выбор волны на каждой станции производится случайно.

Найти вероятность того, что на каждой из волн будет работать точно 3 станции.

Ответ: 0,0854.

2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Случайной величиной называется такая переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее неизвестное значение. Различают два основных типа случайных величин: дискретные и непрерывные. Дискретная случайная величина может принимать конечное или бесконечное счетное множество значений x_i (их можно пронумеровать). Возможные значения непрерывных случайных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток или даже всю ось. Часто встречаются случайные величины смешанного типа, которые могут и непрерывно заполнять некоторый промежуток и принимать отдельные дискретные значения.

Полной статистической характеристикой одномерной случайной величины является закон распределения вероятностей. В случае дискретной случайной величины X под ним понимается соотношение, устанавливающее зависимость между возможными значениями x_i дискретной случайной величины и их вероятностями $p_i = p(x_i)$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать в различных формах: табличной (ряд распределения), графической (многоугольник распределения), аналитической (в виде формулы).

Универсальной характеристикой, одинаково пригодной как для дискретных, так и для непрерывных одномерных случайных величин, является функция распределения вероятностей $F_1(x)$, определяющая вероятность P того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого числа x:

$$F_1(x) = P(X<x). \tag{2.1}$$

Функцию распределения $F_1(x)$ иногда называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F_1(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = 0$.

2. $F_1(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = 1$.

3. $F_1(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F_1(x_2) \geqslant F_1(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

4. $P(x_1 < X < x_2) = F_1(x_2) - F_1(x_1)$. (2.2)

Функция распределения дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках x_1, x_2, ... (рис. 2.1, *а*), функция распределения непрерывной случайной величины — непрерывную функцию (рис. 2.1, *б*) и функция распределения смешанной случайной величины — кусочно-непрерывную функцию с не более чем счетным числом скачков (рис. 2.1, *в*).

В прикладных задачах предполагают, что функции распределения непрерывных случайных величин дифференцируемы во всей области возможных значений случайных величин. При таком предположении непрерывная случайная величина X чаще всего описывается плотностью распределения вероятности $p_1(x)$, которая иногда называется дифференциальным законом распределения или дифференциальной функцией распределения. Плотность вероятности определяется как производная функции распределения:

$$p_1(x) = dF_1(x))/dx. \tag{2.3}$$

Плотность вероятности обладает следующими основными свойствами:

1. Плотность вероятности неотрицательна, т. е. $p_1(x) \geqslant 0$.

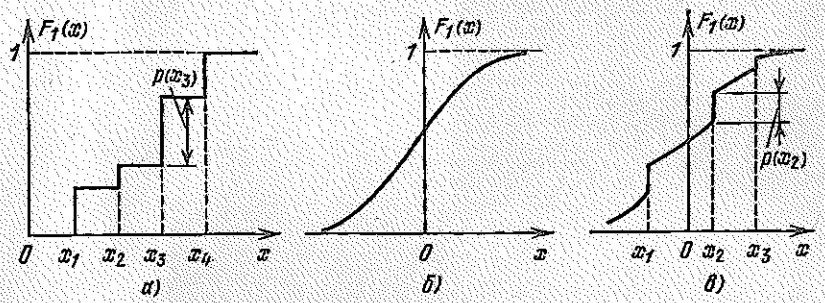


Рис. 2.1. Функция распределения дискретной (*а*), непрерывной (*б*) и смешанной (*в*) случайных величин

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (x_1, x_2) равна интегралу от плотности вероятности в этих пределах:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_1(x)\,dx = F_1(x_2) - F_1(x_1). \qquad (2.4)$$

3. Интеграл в бесконечных пределах от функции $p_1(x)$ равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1. \qquad (2.5)$$

Очень важное практическое значение имеет гауссовская (нормальная) плотность вероятности $p_1(x)$, которая имеет вид

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (2.6)$$

или

$$p_1(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\rho^2(x-m)^2}{E^2}\right], \qquad (2.7)$$

где m — математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X, $\sigma^2 = D(X) = D_x$ — дисперсия, $\sigma = +\sqrt{D_x}$ — среднее квадратическое (стандартное) отклонение, $E = \rho\sigma\sqrt{2}$ — вероятное (срединное) отклонение X; $\rho = 0{,}476936...$

При гауссовском распределении вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \qquad (2.8)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad (2.9)$$

— табулированный интеграл вероятности. Значения $\Phi(z)$ приведены в приложении II.

Для дискретной случайной величины плотность вероятности

$$p_1(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i), \tag{2.10}$$

где x_i — возможные значения случайной величины X, p_i — вероятности возможных значений x_i, $\delta(z - z_0)$ — дельта-функция (импульсная функция, функция Дирака).

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\delta(z - z_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } z = z_0, \\ 0 & \text{при } z \neq z_0, \end{cases}$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \delta(z - z_0) dz = 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0,$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} f(z)\delta(z - z_0)\, dz = f(z_0), \tag{2.11}$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0} \delta(z - z_0)\, dz = \int_{z_0}^{z_0+\varepsilon} \delta(z - z_0)\, dz = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

В табл. 2.1 приведен ряд законов распределения дискретной случайной величины и соответствующие им характеристические функции $\Theta_1(jv)$, а также графики законов распределения при различных значениях параметров распределений. Аналогичные данные по законам распределения непрерывных случайных величин представлены в табл. 2.2 [1,5—15].

Во многих практических задачах трудно или даже невозможно полностью определить функцию распределения случайной величины. Иногда в этом и нет необходимости. В таких случаях полное описание случайной величины при помощи закона распределения может быть заменено указанием отдельных параметров (числовых характеристик) этого распределения.

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины X являются математическое ожидание $M(X) = m_x$ и дисперсия $D(X) = D_x = \sigma_x^2$.

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{2.12}$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $p_1(x)$, то

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x)\, dx. \tag{2.13}$$

Формулы для дисперсии соответственно имеют вид:

$$\sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2] = M(X_0^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i, \tag{2.14}$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_1(x)\, dx, \tag{2.15}$$

где $X_0 = X - m_x$ — центрированная случайная величина, т. е. отклонение случайной величины X от ее математического ожидания.

Математическое ожидание определяет абсциссу центра тяжести кривой распределения, а дисперсия — рассеивание (разброс) случайной величины относительно ее математического ожидания. Рассеивание случайной величины часто характеризуют средним квадратическим отклонением

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \tag{2.16}$$

Кроме математического ожидания, в качестве характеристик положения случайной величины применяются иногда медиана и мода. Медианой M_e (иначе срединным или вероятным значением) называется такое значение случайной величины X, при котором

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = 1/2. \tag{2.17}$$

Для непрерывной случайной величины X медиана находится из условия

$$F_1(M_e) = 1/2$$

или

$$\int_{-\infty}^{M_e} p_1(x)dx = \int_{M_e}^{\infty} p_1(x)dx.$$

Для дискретных случайных величин медиана определяется неоднозначно и практически не употребляется.

Модой M (наивероятнейшим значением) называется такое значение случайной величины X, для которого в случае дискретного распределения вероятность $P(X = M)$, а в случае непрерывного распределения плотность вероятности $p_1(M)$ имеют наибольшее значение. Если максимум один, то распределение называется одномодальным (унимодальным), а если несколько — то многомодальным (полимодальным, мультимодальным).

При описании непрерывного распределения используют иногда квантили. Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности p, называется такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения $F_1(x)$ принимает значение, равное p:

$$F_1(x_p) = p. \tag{2.18}$$

Общими числовыми характеристиками случайной величины являются моменты и энтропия (см. гл. 17 и 18), которые представляют собой неслучайные величины (числа). Характерно, что моменты более низкого порядка несут в себе больше сведений о случайной величине, чем моменты более высокого порядка. Моментом k-го порядка случайной величины X относительно произвольной точки a называется математическое ожидание величины $(X - a)^k$:

$$m_k(a) = M(X - a)^k. \tag{2.19}$$

Момент, рассматриваемый относительно начала координат ($a = 0$), называется начальным, а относительно математического ожидания ($a = m_x$) — центральным.

В некоторых случаях используются абсолютные и факториальные моменты, которые соответственно определяются формулами:

$$\beta_k(a) = M(|X - a|^k), \tag{2.20}$$

$$m_{[k]}(a) = M([X - a]^{[k]}), \tag{2.21}$$

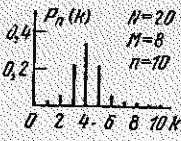
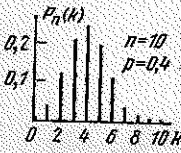
где $z^{[k]} = z(z - 1)(z - 2) \ldots (z - k + 1)$.

С помощью факториальных моментов можно в более компактном виде записать моменты некоторых дискретных распределений (типа биномиального) и, кроме того, в задачах определенного класса, включающих дискретные случайные величины, часто удобно находить начальные моменты m_k, предварительно вычислив факториальные.

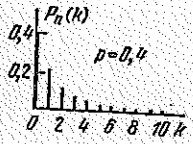
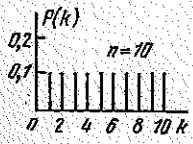
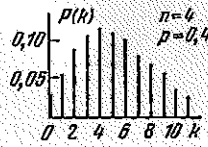
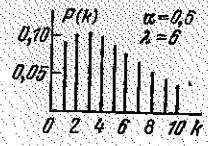
Закон распределения	Область изменения значений случайной величины	Аналитическое выражение закона распределения
1. Гипергеометрический	$k=0,1,2,\ldots,$ $\min(M, n)$	$P_n(k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
2. Биномиальный (Бернулли)	$k=0, 1, 2,\ldots, n$	$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
3. Полиномиальный	$k_1=0, 1, 2,\ldots, n,$ $k_2=0, 1, 2,\ldots, n,$ $\ldots\ldots\ldots$ $k_m=0, 1, 2,\ldots, n,$ $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i=n$	$P_n(k_1, k_2,\ldots, k_m)=$ $=\dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1}\ldots p_m^{k_m},$ $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$
4. Пуассона	$k=0, 1, 2,\ldots$	$P_n(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Таблица 2.1

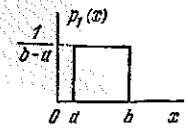
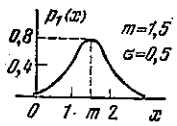
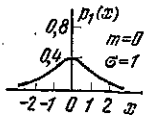
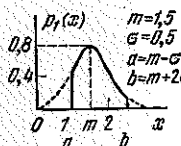
ретной случайной величины

Определяющие параметры	График закона распределения	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
N, M, n		$\sum_{k=0}^{\min(M,n)} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} e^{jkv}$
n, p		$[1+p(e^{jv}-1)]^n$
n и любые $m-1$ величин из $p_1, p_2, \ldots, p_m$		
λ		$e^{\lambda(e^{jv}-1)}$

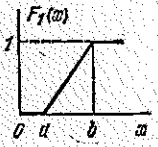
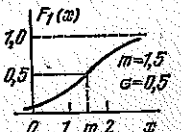
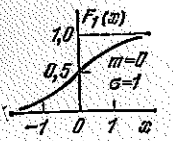
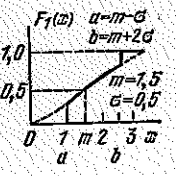
Закон распределения	Область изменения значений случайной величины	Аналитическое выражение закона распределения
5. Геометрический (Фарри)	$k=0,\ 1,\ 2,\ldots$	$P_n(k)=p(1-p)^k$
6. Равномерный	$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$	$P(k)=\dfrac{1}{n}$
7. Отрицательный биномиальный	$k=n,\quad n+1,\ldots$ или $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$	$P(k)=C_{k-1}^{n-1}\,p^n(1-p)^{k-n}$, или $P(k)=C_{k+n-1}^{n-1}p^n(1-p)^k$
8. Полна	$k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ при $\alpha=0$; $k=1,\ 2,\ldots$ при $\alpha>0$	$P(k)=P_0\left(\dfrac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\times$ $\times\dfrac{1\,(1+\alpha)\ldots[1+(k-1)\,\alpha]}{k!}$, $\alpha\geqslant 0,\ \lambda>0,$ $P_0=P(0)=(1+\alpha\lambda)^{-1/\alpha}$

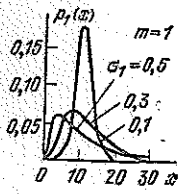
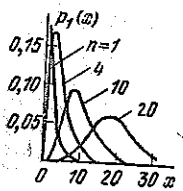
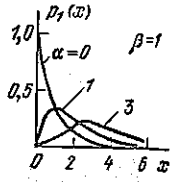
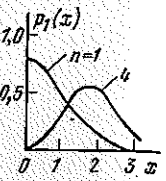
Определяющие параметры	График закона распределения	Характеристическая функция $\Theta_k(jv)$
p		$p[1-(1-p)e^{jv}]^{-1}$
n		$\frac{e^{jv}(1-e^{jvn})}{n(1-e^{jv})}$
n, p		$p^n[1-(1-p)e^{jv}]^{-n}$
α, λ		$[1+\alpha\lambda(1-e^{jv})]^{-1/\alpha}$

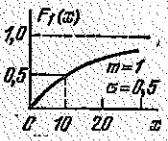
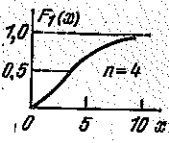
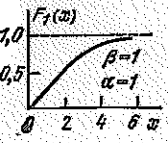
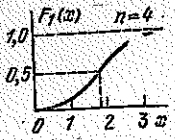
1126846
ФБ ТашПИ

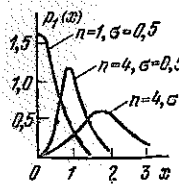
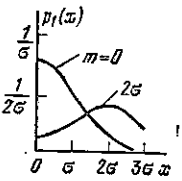
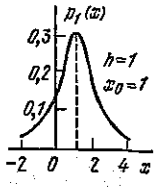
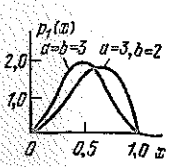
Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
1. Равномерный (прямоугольный)	$a<x<b$	$\frac{1}{b-a}$	a, b	
2. Гауссовский (нормальный)	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$	m, σ	
3. Гауссовский стандартный	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	$m=0$, $\sigma=1$	
4. Усеченный гауссовский	$a<x<b$	$\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $c=\frac{1}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}$	m, σ a, b	

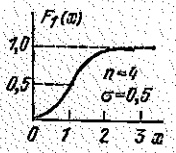
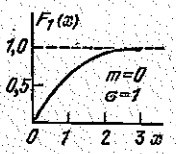
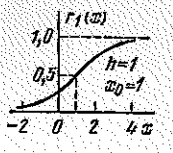
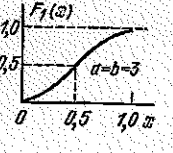
случайной величины

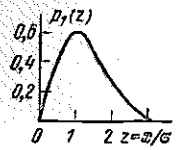
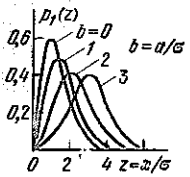
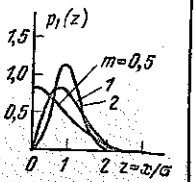
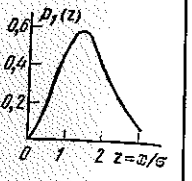
Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b, \\ 1, & x>b \end{cases}$		$\dfrac{e^{jbv}-e^{jav}}{jv(b-a)}$
$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt=$ $=\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$		$\exp\left(jmv-\dfrac{\sigma^2v^2}{2}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt=\Phi(x)$		$e^{-v^2/2}$
$\begin{cases} 0, & x<a, \\ c\left[\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)-\right. \\ \left.-\Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)\right], & a<x<b, \\ 1, & x>b \end{cases}$		$c\exp\left(jvm-\dfrac{v^2\sigma^2}{2}\right)\times$ $\times\left[\Phi\left(\dfrac{b-m-jv\sigma^2}{\sigma}\right)-\right.$ $\left.-\Phi\left(\dfrac{a-m-jv\sigma^2}{\sigma}\right)\right]$

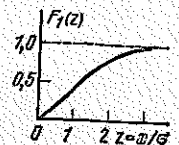
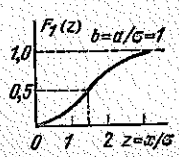
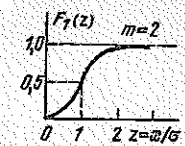
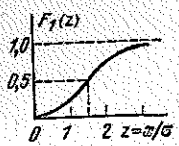
Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
5. Логарифмически-гауссовский	$0<x<\infty$	$\frac{\log e}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left[-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $m = M(\log X)$, $\sigma^2 = D(\log X)$	m, σ	
6. χ^2-распределение	$0<x<\infty$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	n	
7. Гамма-распределение	$0<x<\infty$	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}$	α, β $\alpha>-1$, $\beta>0$	
8. χ-распределение	$0<x<\infty$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$	n	

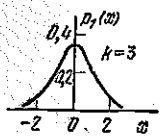
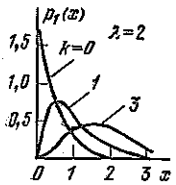
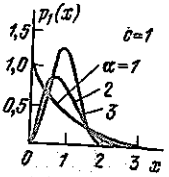
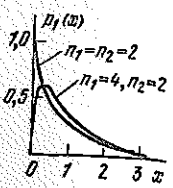
Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \Phi\left(\dfrac{\log x - m}{\sigma}\right), & x>0 \end{cases}$		
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}; \dfrac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, & x>0 \end{cases}$		$(1-2jv)^{-\frac{n}{2}}$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\alpha+1; \dfrac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, & x>0 \end{cases}$		$(1-jv\beta)^{-(\alpha+1)}$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}; \dfrac{x^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, & x>0 \end{cases}$		$\dfrac{\Gamma(n)}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \times$ $\times e^{-\frac{v^2}{4}} D_{-n}(-jv)$, где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра

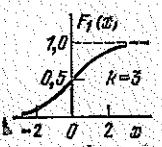
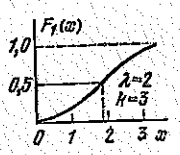
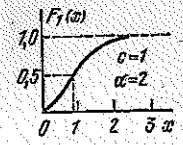
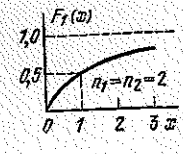
Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
9. Распределение модуля многомерного вектора	$0<x<\infty$	$\frac{2x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$	n, σ	
10. Распределение модуля гауссовской случайной величины	$0<x<\infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\left\{\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]+\right.$ $\left.+\exp\left[-\frac{(x+m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}$	m, σ	
11. Коши	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\pi}\frac{h}{h^2+(x-x_0)^2}$	h, x_0	
12. Бета-распределение	$0<x<1$	$\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$	a, b $a>0$, $b>0$	

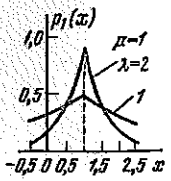
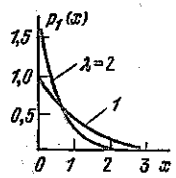
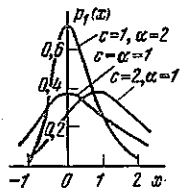
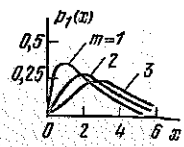
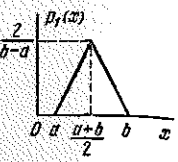
Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2};\ \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x>0 \end{cases}$		$\dfrac{\Gamma(n)}{2^{n/2-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times$ $\times\exp\left(-\dfrac{v^2\sigma^2}{4}\right)D_{-n}(jv\sigma)$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)+ & \\ +\Phi\left(\dfrac{x+m}{\sigma}\right)-1, & x>0 \end{cases}$		$e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}}\left[e^{jvm}\times\right.$ $\times\Phi\left(\dfrac{m}{\sigma}+jv\sigma\right)+$ $\left.+e^{-jvm}\,\Phi\left(-\dfrac{m}{\sigma}+jv\sigma\right)\right]$
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x-x_0}{h}$		$\exp(jx_0v-h\lvert v\rvert)$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{B_x(a,b)}{B(a,b)}, & 0<x<1, \\ 1, & x>1, \end{cases}$ где $B_x(a,b)$ — неполная бета-функция		$\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}\times$ $\times\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(jv)^m}{m!}\dfrac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a+b+m)}$

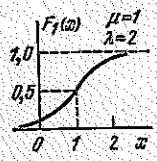
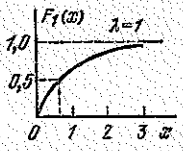
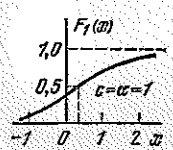
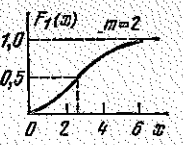
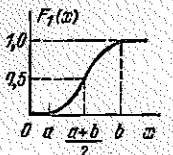
Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
13. Релея	$0<x<\infty$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$	σ	
14. Обобщенный закон Релея (Райса)	$0<x<\infty$	$\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2\sigma^2}\right) \times I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right)$	a, σ	
15. m-распределение (Накагами)	$0<x<\infty$	$\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m x^{2m-1} \times \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2} x^2\right),$ $m \geqslant \frac{1}{2}$	m, σ	
16. Максвелла	$0<x<\infty$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^3} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2}$	σ	

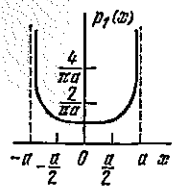
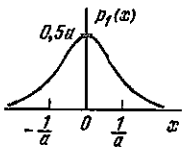
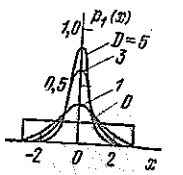
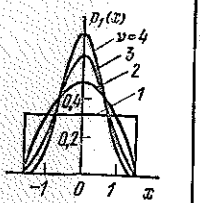
Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0 \end{cases}$		$1+jav\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,W\left(\frac{av}{\sqrt{2}}\right)$, $W(z)=e^{-z^2}\times$ $\times\left(1+\frac{2j}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}\,dt\right)$ —табулированный интеграл вероятности от комплексного аргумента
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x}{(k!)^2}\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)^k\times & \\ \times\Gamma\left(k+1;\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x>0 \end{cases}$		
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{\Gamma\left(m;\frac{mx^2}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(m)} & x>0 \end{cases}$		$\frac{\Gamma(2m)}{2^{m-1}\Gamma(m)}e^{\frac{v^2\sigma^2}{8m}}\times$ $\times D_{-2m}\left(-\frac{jv\sigma}{\sqrt{2m}}\right)$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2};\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x>0 \end{cases}$		$(1-\sigma^2v^2)\,W\left(\frac{\sigma v}{\sqrt{2}}\right)+$ $+j\sigma v\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
17. Стьюдента (t-распределение)	$-\infty<x<\infty$	$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\times$ $\times\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$	k	
18. Эрланга k-го порядка	$0<x<\infty$	$\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)}x^k e^{-\lambda x}$	λ, k (k—целое)	
19. Вейбулла	$0<x<\infty$	$c\alpha x^{\alpha-1}e^{-cx^\alpha}$	$c>0$, $\alpha>0$	
20. Фишера—Снедекора (F-распределение)	$0<x<\infty$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\times$ $\times\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\times$ $\times\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$	n_1, n_2	

Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$ $\times \int_{-\infty}^{x} \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$		$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$ $\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} e^{jvt}\,dt$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{\Gamma(k+1;\,\lambda x)}{\Gamma(k+1)}, & x>0 \end{cases}$		$\left(1-\frac{jv}{\lambda}\right)^{-(k+1)}$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-cx^\alpha}, & x>0 \end{cases}$		$1+jv\int_0^{\infty} e^{jvx-cx^\alpha}\,dx$
		

Закон распределения	Областн. значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
21. Лапласа (двухсторонний экспоненциальный)	$-\infty<x<\infty$	$\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda\lvert x-\mu\rvert}$	λ, μ	
22. Экспоненциальный односторонний (показательный)	$0<x<\infty$	$\lambda e^{-\lambda x}$	λ	
23. Двойное показательное распределение	$-\infty<x<\infty$	$c\alpha e^{-\alpha x}-ce^{-\alpha x}$	$c>0$, $\alpha>0$	
24. Показательно-степенной	$0<x<\infty$	$\frac{x^m}{m!}e^{-x}$	m	
25. Симпсона (треугольный)	$a<x<b$	$\begin{cases}0, & -\infty<x<a,\\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x<\frac{b+a}{2},\\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2}<x<b,\\ 0, & b<x<\infty\end{cases}$	a, b	

Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda(x-\mu)}, & -\infty<x<\mu, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda(x-\mu)}, & \mu<x<\infty \end{cases}$		$\frac{\lambda^2 e^{jv\mu}}{\lambda^2+v^2}$
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \end{cases}$		$\frac{\lambda}{\lambda-jv}$
$e^{-ce^{-\alpha x}}$		
$\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{\Gamma(m+1;\ x)}{\Gamma(m+1)}, & x>0 \end{cases}$		$(1-jv)^{-(m+1)}$
$\begin{cases} 0, & -\infty<x<a, \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a<x<\frac{a+b}{2} \\ 1-\frac{2(b-x)^3}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2}<x<b \\ 1, & b<x<\infty \end{cases}$		$-\frac{4}{v^2(b-a)^2}\times$ $\times\left(e^{jv\frac{b}{2}}-e^{jv\frac{a}{2}}\right)^2$

Закон распределения	Область значений случайной величины	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	Определяющие параметры	График плотности вероятности $p_1(x)$
26. Арксинуса	$-a<x<a$	$\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$	a	
27. $\operatorname{sch}^2 x$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{a}{2\operatorname{ch}^2 ax}$	a	
28. Тихонова	$-\pi<x<\pi$	$\frac{1}{2\pi I_0(D)}e^{D\cos x}$	D	
29.	$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$	$B(\cos x)^{\nu-1}$, $B=\frac{\Gamma(\nu)}{2^{\nu-1}\Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right)}$	$\nu>0$	

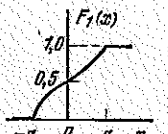
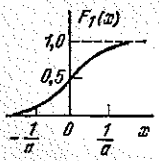
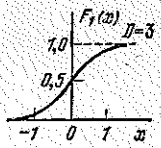
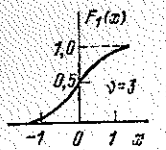
Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$	График функции распределения $F_1(x)$	Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$
$\begin{cases} 0, & x<-a, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & -a<x<a, \\ 1, & x>a \end{cases}$		$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{jvx}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = J_0(av)$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{th} ax$		$\frac{v\pi}{2a\operatorname{sh}\frac{v\pi}{2a}}$
$\frac{1}{2\pi I_0(D)}\int_{-\pi}^{x} e^{D\cos t}\,dt$		
$B\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}(\cos t)^{\nu-1}\,dt$		

Таблица 2.3

Формулы для определения моментов одномерных случайных величин

Наименование момента	Аналитическое выражение момента	
	дискретной случайной величины	непрерывной случайной величины
Начальный момент m_k k-го порядка	$m_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$	$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_1(x)\,dx$
Центральный момент m_k^0 k-го порядка	$m_k^0 = M(X_0^k) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$	$m_k^0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k p_1(x)\,dx$
Абсолютный начальный момент β_k k-го порядка	$\beta_k = M(\lvert X \rvert^k) = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^k p_i$	$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x \rvert^k p_1(x)\,dx$
Абсолютный центральный момент β_k^0 k-го порядка	$\beta_k^0 = M(\lvert X_0 \rvert^k) = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - m_x \rvert^k p_i$	$\beta_k^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x - m_x \rvert^k p_1(x)\,dx$
Факториальный начальный момент $m_{[k]}$ k-го порядка	$m_{[k]} = M(X^{[k]}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{[k]} p_i$	$m_{[k]} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{[k]} p_1(x)\,dx$
Факториальный центральный момент $m_{[k]}^0$ k-го порядка	$m_{[k]}^0 = M(X_0^{[k]}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^{[k]} p_i$	$m_{[k]}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{[k]} p_1(x)\,dx$

В табл. 2.3 приведены аналитические выражения различных моментов для дискретной и непрерывной случайных величин. Из приведенных данных видно, что математическое ожидание, определяемое формулами (2.12) и (2.13), представляет собой начальный момент первого порядка. Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, а центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию. Абсолютные моменты четных порядков совпадают с обычными моментами.

При решении практических задач наиболее часто используются начальный момент первого порядка m_1 (математическое ожидание), начальный момент второго порядка m_2 (средний квадрат случайной величины), центральный момент второго порядка m_2^0 (дисперсия), центральные моменты третьего и четвертого порядков, а также абсолютный центральный момент β_1^0 первого порядка, называемый средним арифметическим отклонением.

С центральным моментом третьего порядка m_3^0 связан коэффициент асимметрии γ_1, характеризующий «скошенность» распределения, а с центральным моментом четвертого порядка m_4^0 — коэффициент эксцесса γ_2, показывающий «крутость» распределения вероятностей. Для симметричных относительно математического ожидания распределений все моменты нечетного порядка (если они существуют) равны нулю и асимметрия отсутствует. Эксцесс нормального распределения равен нулю. Если кривая плотности вероятности $p_1(x)$ имеет более острую и высокую вершину по сравнению с нормальным распределением, то эксцесс положителен; если более низкую и пологую, — то отрицателен. Коэффициенты асимметрии и эксцесса определяются соответственно формулами:

$$\gamma_1 = m_3^0/\sigma^3, \tag{2.22}$$

$$\gamma_2 = m_4^0/\sigma^4 - 3. \tag{2.23}$$

Моменты — не единственные постоянные, характеризующие распределение случайной величины. Для теории более полезна другая совокупность постоянных, называемых семиинвариантами (или кумулянтами) $\varkappa_k$. Отличие их от моментов относительно произвольной точки состоит в том, что все семиинварианты (за исключением первого) инвариантны относительно изменения начала отсчета. Название «семиинварианты» как раз и обусловлено их инвариантными свойствами.

Различные моменты и семиинварианты связаны между собой следующими соотношениями [1, 10, 11]:

$$m_k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, m_{k-l}^0\, m_1^l, \tag{2.24}$$

$$m_k^0 = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, m_{k-l}\, (-m_1)^l, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} &m_2 = m_2^0 + m_1^2,\ m_3 = m_3^0 + 3m_1 m_2^0 + m_1^3, \\ &m_4 = m_4^0 + 4m_1 m_3^0 + 6m_1^2 m_2^0 + m_1^4, \ldots \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} &m_2^0 = m_2 - m_1^2,\ m_3^0 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \\ &m_4^0 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4, \ldots \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} &m_{[1]} = m_1,\ m_{[2]} = m_2 - m_1, \\ &m_{[3]} = m_3 - 3m_2 + 2m_1,\ m_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1, \ldots \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} &m_1 = m_{[1]},\ m_2 = m_{[2]} + m_{[1]}, \\ &m_3 = m_{[3]} + 3m_{[2]} + m_{[1]},\ m_4 = m_{[4]} + 6m_{[3]} + 7m_{[2]} + m_{[1]}, \ldots \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$m_2^0 = \varkappa_2,\ m_3^0 = \varkappa_3,\ m_4^0 = \varkappa_4 + 3\varkappa_2^2,\ \ldots \tag{2.30}$$

$$\varkappa_2 = m_2^0,\ \varkappa_3 = m_3^0,\ \varkappa_4 = m_4^0 - 3m_2^{0\,2},\ \ldots \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered} m_1 = \varkappa_1,\ m_2 = \varkappa_2 + \varkappa_1^2,\ m_3 = \varkappa_3 + 3\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1^3, \\ m_4 = \varkappa_4 + 4\varkappa_1\varkappa_3 + 3\varkappa_2^2 + 6\varkappa_1^2\varkappa_2 + \varkappa_1^4,\ \ldots \end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\begin{gathered} \varkappa_1 = m_1,\ \varkappa_2 = m_2 - m_1^2,\ \varkappa_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \\ \varkappa_4 = m_4 - 4m_1 m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4,\ \ldots \end{gathered} \tag{2.33}$$

В формулах (2.28) и (2.29) предполагается, что возможные значения случайной величины отличаются на единицу.

В случае аналитического задания закона распределения (в виде формулы) определение моментов сводится к вычислению соответствующих сумм и интегралов (см. табл. 2.3). Расчет моментов упрощается, если воспользоваться аппаратом характеристических функций.

Характеристическая функция $\Theta_1(jv)$ определяется как математическое ожидание случайной величины e^{jvx}, т. е.

$$\Theta_1(jv) = M(e^{jvx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx}\, p_1(x)dx\ , \tag{2.34}$$

где v — вещественная величина, $j = \sqrt{-1}$.

Используя представление плотности вероятности $p_1(x)$ в виде суммы дельта-функций, формулу (2.34) можно распространить на дискретные случайные величины:

$$\Theta_1(jv) = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{jvx_i}\ , \tag{2.35}$$

где x_i — возможные значения случайной величины X, $p_i = P(X = x_i)$ — соответствующие им вероятности.

Плотность вероятности $p_1(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию:

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(jv) e^{-jvx}\, dv. \tag{2.36}$$

Из (2.34) видно, что при изменении знака у показателя экспоненты определение характеристической функции совпадает с определением спектральной функции. Поэтому для нахождения $\Theta_1(jv)$ по известной плотности $p_1(x)$ или $p_1(x)$ по $\Theta_1(jv)$ можно пользоваться таблицами преобразований по Фурье (или по Лапласу с учетом пределов интегрирования).

Для определения моментов m_k случайной величины X нужно вычислить k-ю производную от характеристической функции по параметру v и положить $v = 0$:

$$m_k = \frac{1}{j^k} \frac{d^k \Theta_1(jv)}{dv^k}\bigg|_{v=0}. \tag{2.37}$$

Семиинварианты $\varkappa_k$ определяются из соотношения

$$\ln \Theta_1(jv) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{k!} (jv)^k. \tag{2.38}$$

Вместо характеристических функций $\Theta_1(jv)$ часто используются так называемые производящие функции [10—12]:

$$\varphi_1(v) = M(e^{vx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, p_1(x)dx\ . \tag{2.39}$$

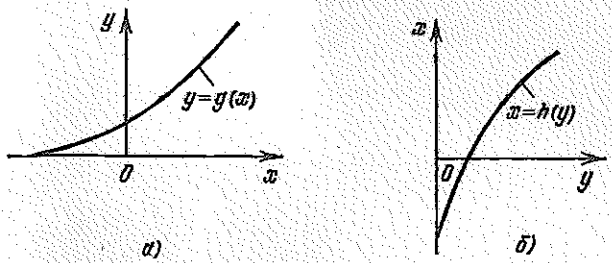


Рис. 2.2. Взаимно-однозначное функциональное преобразование:
а — прямая функция, *б* — обратная функция

Существенное различие между ними состоит в том, что характеристическая функция существует всегда, а производящая функция — только в случае существования всех моментов.

В табл. 2.4 приведены формулы для основных числовых характеристик дискретных законов распределения, а в табл. 2.5 — для наиболее распространенных непрерывных законов распределения [1, 4—16].

Во многих инженерных вероятностных расчетах, например при изучении прохождения случайных сигналов через линейные и нелинейные системы (см. гл. 10—12), часто требуется определить плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины Y по известной плотности вероятности $p_1(x)$ случайной величины X и известной функциональной связи $Y=g(X)$ случайных величин Y и X.

Если обратная функция $X=h(Y)$ однозначна (рис. 2.2), то правило преобразования плотностей вероятностей случайных величин определяется формулой

$$p_1(y) = p_1(x)|dx/dy| = p_1[h(y)]\,|\,dh(y)/dy|. \qquad (2.40)$$

Если обратная функция $X = h(Y)$ неоднозначна, например имеются две ветви обратной функции $h_1(y)$ и $h_2(y)$ (рис. 2.3), то плотность вероятности $p_1(y)$ находится по формуле

$$p_1(y) = p_1[h_1(y)]\,|\,h_1'(y)\,| + p_1[h_2(y)]\,|\,h_2'(y)\,|. \qquad (2.41)$$

Если число ветвей обратной функции больше двух, то в правой части формулы (2.41) следует брать сумму по всем ветвям

$$p_1(y) = \sum_{i=1}^{n} p_1[h_i(y)]\,|\,h_i'(y)\,|,$$

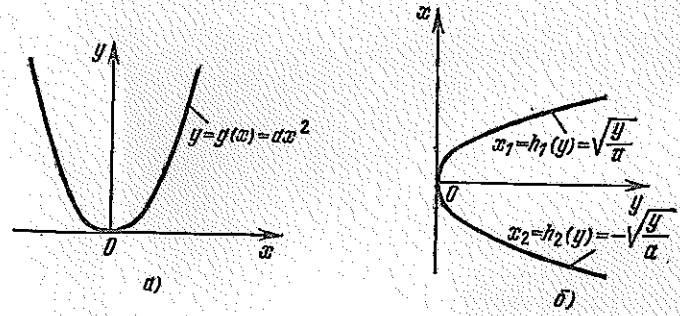


Рис. 2.3. Квадратичное (двухзначное) преобразование:
а — прямая функция, *б* — обратная функция

Наименование закона	m	σ^2	Центральный момент m_3^0, коэффициент асимметрии γ_1
Гипергеометрический	$n\frac{M}{N}$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$	$m_3^0=\frac{M(N-M)(N-2M)}{N^3(N-1)(N-2)}\times$ $\times n(N-n)(N-2n)$, $\gamma_1=\frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{N-1}}{(N-2)\sqrt{M(N-M)n(N-n)}}$
Биномиальный	np	npq, $q=1-p$	$m_3^0=npq(q-p)$, $\gamma_1=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$
Пуассона	λ	λ	$m_3^0=\lambda$, $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Равномерный	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$m_3^0=0$, $\gamma_1=0$
Полиа	λ	$\lambda(1+\alpha\lambda)$	$m_3^0=\lambda(1+\alpha\lambda)(1+2\alpha\lambda)$, $\gamma_1=\frac{1+2\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda(1+\alpha\lambda)}}$

Таблица 2.4

дискретных законов распределения

Центральный момент m_4^{ν}, коэффициент эксцесса γ_2	Другие соотношения для моментов
$m_4^0 = \frac{M(N-M)n(N-n)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)} \times$ $\times \{N^3(N+1) - 6N^2 n(N-n) +$ $+ 3M(N-M)[N^2(n-2) - Nn^2 +$ $+ 6n(N-n)]\}$	
$m_4^0 = 3n^2 p^2 q^2 + npq(1-6pq),$ $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$	$m_{k+1}^0 = pq\left(nkm_{k-1}^0 + \frac{dm_k^1}{dp}\right)$
$m_4^0 = 3\lambda^2 + \lambda,$ $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$	$\varkappa_k = \lambda,$ $m_{k+1}^0 = \lambda k m_{k-1}^0 + \lambda \frac{dm_k^0}{d\lambda},$ $m_{k+1} = m_k + \lambda \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-1} m_{n-i}$
$m_4^1 = \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240},$ $\gamma_2 = -1{,}2 + \frac{4}{n^2-1}$	
$m_4^0 = 3\alpha^3(2\alpha+1)\lambda^4 +$ $+ 6\alpha(2\alpha+1)\lambda^3 + (7\alpha+3)\lambda^2 + \lambda,$ $\gamma_2 = 6\alpha + \frac{1}{\lambda(1+\alpha\lambda)}$	

Наименование закона	m	σ^2	Центральный момент m_3^0, коэффициент асимметрии γ_1
Равномерный	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$m_3^0=0$, $\gamma_1=0$
Нормальный	m	σ^2	$m_3^0=0$, $\gamma_1=0$
Нормальный стандартный	0	1	$m_3^0=0$, $\gamma_1=0$
Бета-распределение	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	
Релея	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$	$m_3^0=\sigma^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\gamma_1=(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Вейбулла	$c^{-\frac{1}{\alpha}}\times$ $\times\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$	$c^{-\frac{2}{\alpha}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\right.$ $\left.-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]$	$\gamma_1=\frac{m_3^0}{\sigma^3}$
Лапласа	μ	$\frac{2}{\lambda^2}$	$m_3^0=\frac{6}{\lambda^3}$ $\gamma_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
Экспоненциальный односторонний	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$m_3^0=\frac{2}{\lambda^3}$, $\gamma_1=2$
Гамма-распределение	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$m_3^0=2(\alpha+1)\beta^3$, $\gamma_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}$

Таблица 2.5

непрерывных законов распределения

Центральный момент m_4^0, коэффициент эксцесса γ_2	Другие соотношения для моментов
$m_4^0 = \frac{(b-a)^4}{80}$, $\gamma_2 = -1{,}2$	$m_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$, $m_{k+1} = \frac{b^{k+2} - a^{k+2}}{b^{k+1} - a^{k+1}} \frac{k+1}{k+2} m_k$
$m_4^0 = 3\sigma^4$, $\gamma_2 = 0$	$m_{2k}^0 = \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^k$, $m_{2k+1}^0 = 0$, $m_k = k! \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{m^{k-2i}}{(k-2i)!} \frac{(\sigma^2/2)^i}{i!}$, $[k/2]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $k/2$
$m_4^0 = 3$, $\gamma_2 = 0$	$m_{2k} = m_{2k}^0 = \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $m_{2k+1} = m_{2k+1}^0 = 0$
	$m_k = \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a+b+k)}$
$m_4^0 = \sigma^4 \left(8 - \frac{3}{4}\pi^3\right)$, $\gamma^2 = 5 - \frac{3}{4}\pi^2$	$m_k = (\sigma\sqrt{2})^k\, \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)$, $m_k^0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i m^i m_{k-i}$
$\gamma_2 = \frac{m_4^0}{\sigma^4} - 3$	$m_k = c^{-\frac{k}{\alpha}}\, \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$, $m_k^0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i m^i m_{k-i}$
$m_4^0 = \frac{24}{\lambda^4}$, $\gamma_2 = 3$	$m_k = k! \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(m^0)^{k-2i}}{(k-2i)!} \lambda^{-2i}$, $m_{2k}^0 = (2k)!\, \lambda^{-2k}$, $m_{2k+1}^0 = 0$
$m_4^0 = \frac{9}{\lambda^3}$, $\gamma_2 = 6$	$m_k = k!\, \lambda^{-k}$, $m_{k+1} = \frac{k+1}{\lambda} m_k$
$m_4^0 = 3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$, $\gamma_2 = \frac{6}{\alpha+1}$	$m_{k+1} = (\alpha+k+1)\beta m_k$, $\varkappa_k = (k-1)!\,(\alpha+1)\beta^k$, $\varkappa_{k+1} = k\beta\varkappa_k$

где n — число ветвей (число неоднозначностей). Задача преобразования плотностей вероятностей рассматривается только для непрерывных случайных величин. Функциональное преобразование дискретной случайной величины не изменяет распределения вероятностей; оно изменяет только ее возможные значения.

Определение числовых характеристик случайной величины $Y = g(X)$ является частным случаем рассмотренной задачи. При этом их можно вычислить двумя способами: с помощью найденной по формулам (2.40), (2.41) плотности вероятности $p_1(y)$ или путем усреднения $g(X)$. Второй путь экономичнее, так как не требует определения плотности вероятности функции $p_1(y)$. Например, формулы для математического ожидания и дисперсии случайной величины $Y = g(X)$ при этих способах соответственно имеют вид:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_1(y)\, dy, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p_1(y)\, dy, \tag{2.42}$$

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, p_1(x)\, dx, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - m_y]^2 p_1(x)\, dx. \tag{2.43}$$

Для дискретной случайной величины числовые характеристики находятся по формулам:

$$m_y = M[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i, \tag{2.44}$$

$$\sigma_y^2 = D[g(X)] = \sum_i [g(x_i) - m_y]^2 p_i. \tag{2.45}$$

2. ПРИМЕРЫ

2.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность p попадания в цель при каждом пуске равна 0,8.

Построить: 1) ряд распределения числа попаданий; 2) многоугольник распределения; 3) функцию распределения $F_1(x)$ числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принять следующие значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Эти значения случайная величина X принимает с вероятностями p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, которые в соответствии с формулой (1.22) равны:

$$p_0 = (1 - p)^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032,$$
$$p_1 = C_5^1 p(1 - p)^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064,$$
$$p_2 = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = 10 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512,$$
$$p_3 = C_5^3 p^3 (1 - p)^2 = 10 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048,$$
$$p_4 = C_5^4 p^4 (1 - p) = 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096,$$
$$p_5 = p^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768.$$

Из вычисленных значений p_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, видно, что наиболее вероятно попадание в цель четырьмя ракетами, в то время как промах всеми ракетами маловероятен.

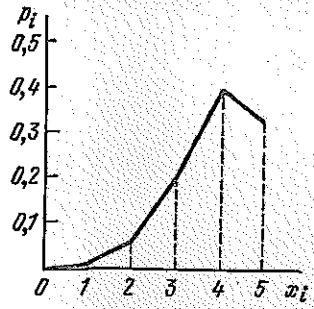


Рис. 2.4. Многоугольник распределения

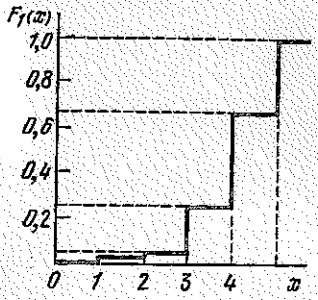


Рис. 2.5. График функции распределения случайной величины

1. Ряд распределения имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,00640	0,05120	0,20480	0,40960	0,32768

2. В соответствии с рядом распределения вероятностей числа попаданий в цель построен многоугольник распределения, представленный на рис. 2.4.

3. По определению, функция распределения

$$F_1(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

При $x \leqslant 0$ $F_1(x) = P(X < x) = 0$,
при $0 < x \leqslant 1$ $F_1(x) = P(X = x_0 = 0) = 0{,}00032$,
при $1 < x \leqslant 2$ $F_1(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}00032 + 0{,}00640 = 0{,}00672$,

при $2 < x \leqslant 3$ $F_1(x) = \sum_{i=0}^{2} P(X = x_i) = 0{,}05792$,

при $3 < x \leqslant 4$ $F_1(x) = \sum_{i=0}^{3} P(X = x_i) = 0{,}26272$,

при $4 < x \leqslant 5$ $F_1(x) = \sum_{i=0}^{4} P(X = x_i) = 0{,}67232$,

при $x > 5$ $F_1(x) = \sum_{i=0}^{5} P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{5} p_i = 1$.

График функции распределения представлен на рис. 2.5.

2.2. Плотность вероятности $p_1(x)$ случайной величины X имеет вид

$$p_1(x) = \alpha \exp(-\beta |x|), \quad -\infty < x < \infty,$$

где α и β — постоянные величины.

Требуется: 1) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные α и β; 2) вычислить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X; 3) построить графики плотности вероятности $p_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ при $\beta = 2$.

Решение. 1. Чтобы найти соотношение между постоянными α и β, воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности. При этом учтем, что плотность вероятности имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x|}dx = \alpha\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\beta x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\beta x}dx\right] = \frac{2\alpha}{\beta} = 1.$$

Следовательно,

$$\beta = 2\alpha.$$

2. Функция распределения $F_1(x)$, по определению, равна:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(z)\,dz.$$

При $x < 0$

$$F_1(x) = \alpha \int_{-\infty}^{x} e^{\beta z}dz = \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} = \frac{1}{2} e^{\beta x}.$$

При $x > 0$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \alpha \int_{0}^{x} e^{-\beta z}\,dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\beta x} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta x}.$$

3. При $\beta = 2$ $p_1(x) = e^{-2|x|}$,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{2x} & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - 0{,}5e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Графики $p_1(x)$ и $F_1(x)$ при $\beta = 2$ изображены на рис. 2.6.

2.3. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.7).

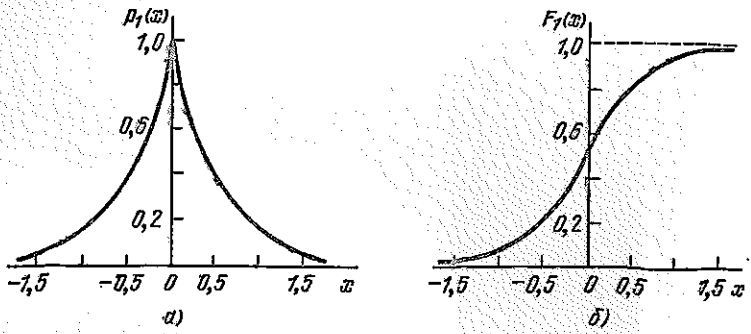


Рис. 2.6. Плотность вероятности (*а*) и функция распределения (*б*) непрерывной случайной величины

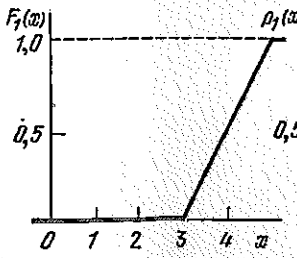


Рис. 2.7. Функция распределения

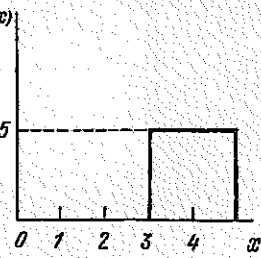


Рис. 2.8. Плотность вероятности

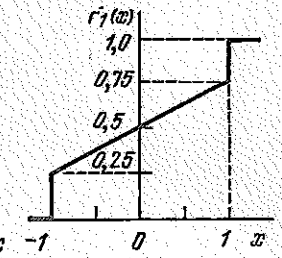


Рис. 2.9. Функция распределения

Требуется: 1) найти аналитическое выражение для функции распределения; 2) построить график плотности вероятности $p_1(x)$; 3) определить вероятность P того, что величина X примет значение от 3,5 до 4,5.

Решение. 1. Когда значения величины X заключены в пределах от 3 до 5, функция распределения $F_1(x)$ представляет собой отрезок прямой, проходящей через две точки с координатами (3, 0) и (5, 1). Используя уравнение прямой в виде $(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)$, получаем $(x-3)/(5-3)=F_1(x)/1$, т. е. $F_1(x)=(x-3)/2$. Следовательно,

$$F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ (x-3)/2 & \text{при } 3<x\leqslant 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

2. По определению, $p_1(x)=dF_1(x)/dx$. Поэтому

$$p_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ 1/2 & \text{при } 3<x\leqslant 5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

График плотности вероятности $p_1(x)$ представлен на рис. 2.8.

3. $P=P(3{,}5\leqslant X<4{,}5)=F_1(4{,}5)-F_1(3{,}5)=(4{,}5-3)/2-(3{,}5-3)/2=0{,}5$.

2.4. Случайная величина X удовлетворяет неравенству $-1\leqslant X\leqslant 1$, причем в интервале от -1 до $+1$ она распределена равномерно, а каждое из значений -1 и $+1$ принимает с вероятностью 1/4.

Необходимо: 1) найти и построить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X; 2) вычислить вероятность P того, что случайная величина X попадет в интервал от $-1/2$ до $+1/2$.

Решение. По условию, X — случайная величина смешанного типа.

1. При $x\leqslant -1$

$$F_1(x)=P(X<x)=0.$$

При $-1<x\leqslant 1$

$$F_1(x)=P(X=-1)+\int_{-1}^{x}p_1(x)\,dx=\frac{1}{4}+\int_{-1}^{x}\frac{dx}{4}=\frac{1}{4}+\frac{x+1}{4}=\frac{x+2}{4}.$$

При $x > 1$

$$F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{4} + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

График функции распределения $F_1(x)$ приведен на рис. 2.9.

2. $P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2+0,5}{4} - \frac{2-0,5}{4} = \frac{1}{4}$.

2.5. Случайные ошибки измерения дальности до неподвижной цели подчинены гауссовскому закону с математическим ожиданием $m = 5$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ м.

Определить вероятность того, что: а) измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м; б) при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превзойдет по абсолютной величине 15 м.

Решение. а) Определение вероятности того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м, сводится к вычислению вероятности попадания случайной величины X (ошибки измерения) с $m = 5$ м и $\sigma = 10$ м на интервал от -15 до 15 м.

Используя формулу (2.8) и значения $\Phi(z)$ из приложения II, получаем:

$$\text{а) } P_1 = P(|X| < 15) = P(-15 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{-15-5}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] =$$

$$= 0,8413 - 1 + 0,97725 \approx 0,82.$$

б) Вероятность P_2 того, что при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превзойдет по абсолютной величине 15 м, определится по формуле

$$P_2 = 1 - (1 - P_1)^3 = 1 - (1 - 0,82)^3 \approx 0,994.$$

2.6. Производится стрельба по подвижной цели до первого попадания. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,4. На стрельбу отпущено 4 снаряда.

Вычислить: 1) математическое ожидание m_x случайной величины X — числа израсходованных снарядов; 2) дисперсию σ_x^2 и среднее квадратическое значение σ_x величины X.

Решение. Случайная величина X может принять следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Вероятности принятия величиной этих значений соответственно равны:

$$P(X = 1) = p_1 = p = 0,4, \qquad P(X = 2) = p_2 = (1 - p)\, p =$$

$$= 0,6 \cdot 0,4 = 0,24,$$

$$P(X = 3) = p_3 = (1-p)^2\, p = 0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144,$$

$$P(X = 4) = p_4 = (1 - p)^3\, p + (1 - p)^4 = 0,6^3 \cdot 0,4 + 0,6^4 = 0,216.$$

1. По определению математического ожидания, имеем

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}144 + 4 \cdot 0{,}216 \simeq 2{,}2.$$

2. Для дисперсии получим

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{4} (x_i - m_x)^2 p_i = (1-2{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (2-2{,}2)^2 \cdot 0.24 +$$

$$+ (3-2{,}2)^2 \cdot 0{,}144 + (4-2{,}2)^2 \cdot 0{,}216 \simeq 1{,}38;$$

$$\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1{,}38} \simeq 1{,}17.$$

2.7. Случайная величина X имеет распределение Лапласа, плотность вероятности $p_1(x)$ которого

$$p_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}, \quad \lambda > 0.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение: Математическое ожидание определяем по формуле (2.13):

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda |x|} dx.$$

Так как плотность вероятности $p_1(x)$ имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$, то

$$m_x = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} x e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Сделав в первом интеграле замену переменных $x = -y$, получим

$$m_x = \frac{\lambda}{2} \int_{\infty}^{0} y e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} y e^{-\lambda y} dy +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Следовательно, $m_x = 0$. Тогда

$$\sigma_x^2 = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} y^2 e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Известно [17], что

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}. \qquad (2.46)$$

Следовательно,

$$\sigma_x^2 = \lambda\Gamma(3)/\lambda^3 = 2/\lambda^2.$$

2.8. По каналу связи с помехами передается кодовая комбинация, состоящая из двух импульсов. В результате независимого воздействия помехи на эти импульсы каждый из них может быть подавлен с вероятностью p.

Определить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ случайной величины X — числа подавленных помехами импульсов.

Решение. Возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности p_i этих значений соответственно равны: $p_1 = (1-p)^2$, $p_2 = 2p(1-p)$, $p_3 = p^2$.

Согласно формуле (2.35) имеем

$$\Theta_1(jv) = \sum_{i=1}^{3} p_i e^{jvx_i} = (1-p)^2 + 2p(1-p)\,e^{jv} + p^2 e^{2jv} =$$
$$= 1 - 2p + p^2 + 2pe^{jv} - 2p^2 e^{jv} + p^2 e^{2jv} =$$
$$= 1 + 2p(e^{jv} - 1) + p^2(e^{jv} - 1)^2 = |1 + p(e^{jv} - 1)|^2.$$

2.9. Случайная величина X имеет равномерную плотность вероятности в интервале от $-\beta/2$ до $\beta/2$.

Определить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ случайной величины X и нарисовать ее график.

Решение. По условию нормировки, $p_1(x)(\beta/2 + \beta/2) = 1$. Следовательно, $p_1(x) = 1/\beta$. Тогда

$$\Theta_1(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p_1(x)\,dx = \frac{1}{\beta}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} e^{jvx}\,dx = \frac{1}{jv\beta}\left(e^{jv\beta/2} - e^{-jv\beta/2}\right) =$$
$$= \frac{\sin(v\beta/2)}{v\beta/2}.$$

Графики плотности вероятности $p_1(x)$ и соответствующей ей характеристической функции $\Theta_1(jv)$ приведены на рис. 2.10.

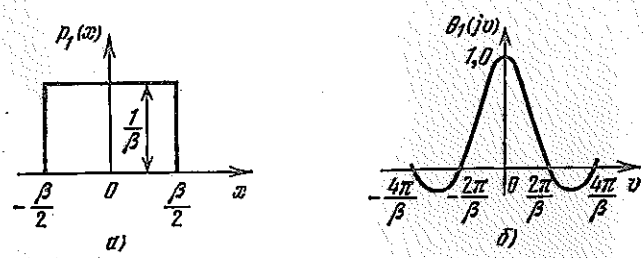


Рис. 2.10. Равномерная плотность вероятности (*а*) и соответствующая ей характеристическая функция (*б*)

2.10. Найти плотность вероятности $p_1(x)$ случайной величины X, характеристическая функция которой имеет вид

$$\Theta_1(jv) = 1/(1 + v^2).$$

Решение. Согласно формуле (2.36) имеем

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_1(jv)\,e^{-jvx}\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jvx}}{1+v^2}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos vx - j\sin vx}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos vx}{1+v^2}\,dv -$$

$$-\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin vx}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos vx}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}e^{-|x|},$$

так как

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}.$$

2.11. Случайная величина X подчинена χ^2-распределению, плотность вероятности которого имеет вид

$$p_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,x^{n/2-1}\,e^{-x/2} & \text{при } x > 0,\ n > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Вычислить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ и начальные моменты m_k величины X.

Решение. Так как плотность вероятности отлична от нуля только при $x > 0$, то

$$\Theta_1(jv) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{jvx}\,p_1(x)\,dx = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_{0}^{\infty}e^{jvx}\,x^{n/2-1}\,e^{-x/2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_{0}^{\infty}x^{n/2-1}\,e^{-(1/2-jv)x}\,dx.$$

Воспользовавшись интегралом (2.46), получим

$$\Theta_1(jv) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,\frac{\Gamma(n/2-1+1)}{(1/2-jv)^{n/2-1+1}} = (1-2jv)^{-n/2}.$$

Начальные моменты m_k связаны с характеристической функцией соотношением (2.37):

$$m_k = \frac{1}{j^k}\,\frac{d^k\,\Theta_1(jv)}{dv^k}\Big|_{v=0}.$$

В нашем случае

$$\frac{d\Theta_1(jv)}{dv} = jn(1-2jv)^{-n/2-1},$$

$$\frac{d^2\Theta_1(jv)}{dv^2} = j^2 n(n+2)(1-2jv)^{-n/2-2},$$

$$\frac{d^3\Theta_1(jv)}{dv^3} = j^3 n(n+2)(n+4)(1-2jv)^{-n/2-3},$$

$$\frac{d^4\Theta_1(jv)}{dv^4} = j^4 n(n+2)(n+4)(n+6)(1-2jv)^{-n/2-4},\ldots,$$

$$\frac{d^k\Theta_1(jv)}{dv^k} = j^k n(n+2)(n+4)\ldots(n+2k-2)(1-2jv)^{-n/2-k}.$$

Таким образом, $m_k = n(n+2)(n+4)\ldots(n+2k-2)$.

2.12. Случайная величина Y является линейной функцией случайной величины X: $Y = g(X) = aX + b$, где a и b — постоянные величины.

Найти плотность вероятности $p_1(y)$ величины Y при известной плотности вероятности $p_1(x)$ случайной величины X.

Решение. Так как обратная функция $x = h(y) = (y-b)/a$ однозначна, то, подставляя ее выражение в (2.40), получаем

$$p_1(y) = \frac{1}{|a|}\, p_1\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Если, например, величина X имеет равномерную плотность вероятности в интервале (x_1, x_2),то величина Y будет распределена равномерно в интервале $(ax_1 + b,\ ax_2 + b)$.

Когда величина X имеет нормальную плотность вероятности

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

то ее линейная функция также распределена по нормальному закону

$$p_1(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right],$$

где $m_y = am + b$, $\quad \sigma_y = |a|\sigma$.

Таким образом, при линейном преобразовании случайной величины ее плотность вероятности смещается на величину b, а масштабы вдоль координатных осей изменяются в a раз.

2.13. Случайная величина X с равномерной плотностью вероятности (рис. 2.11)

$$p_1(x) = 1/(b+a), \quad -a < x \leqslant b, \quad a < b,$$

подвергается квадратичному преобразованию $Y = X^2$.

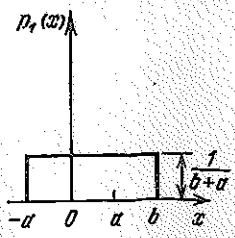


Рис. 2.11. Плотность вероятности случайной величины X

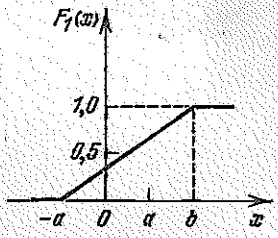


Рис. 2.12. Функция распределения случайной величины X.

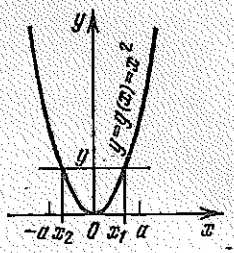


Рис. 2.13. Квадратичное преобразование

Определить и построить: 1) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X; 2) функцию распределения $F_1(y)$ и плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины Y.

Решение. 1. По определению,

$$F_1(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(z)\,dz.$$

При $x \leqslant -a$ $F_1(x) = P(X < -a) = 0$,
при $-a < x \leqslant b$

$$F_1(x) = \int_{-a}^{x} p_1(z)\,dz = \frac{1}{b+a}\,z\Big|_{-a}^{x} = \frac{x+a}{b+a},$$

при $x > b$ $F_1(x) = 1$.
График функции распределения $F_1(x)$ приведен на рис. 2.12.

2. При квадратичном преобразовании $y = x^2$ (рис. 2.13) функция y никогда не принимает отрицательных значений. Поэтому $F_1(y) = P(Y < y) = 0$ при $y \leqslant 0$.

На интервале $(-a, a)$ обратная функция $x = h(y)$ — двузначна (рис. 2.13): $x_1 = h_1(y) = +\sqrt{y}$, $x_2 = h_2(y) = -\sqrt{y}$.

Событие $Y < y$ равносильно попаданию случайной величины X в интервал $(-\sqrt{y}, \sqrt{y})$, т. е.

$$P(Y < y) = P(x_2 < X \leqslant x_1) = P(-\sqrt{y} < X \leqslant \sqrt{y}) = P(X < \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}).$$

Следовательно, при $0 < y \leqslant a^2$

$$F_1(y) = \int_{-a}^{\sqrt{y}} p_1(x)\,dx - \int_{-a}^{-\sqrt{y}} p_1(x)\,dx = \frac{1}{b+a}\,x\Big|_{-a}^{\sqrt{y}} - \frac{1}{b+a}\,x\Big|_{-a}^{-\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}.$$

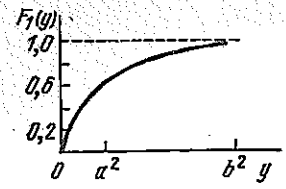


Рис. 2.14. Функция распределения случайной величины $Y=X^2$

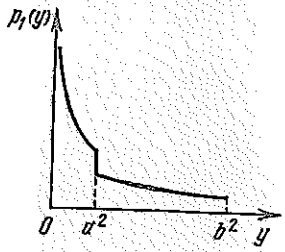


Рис. 2.15. Плотность вероятности величины $Y=X^2$

На интервале (a, b) обратная функция $x_2 = h_2(y) = \sqrt{y}$ однозначна. Поэтому

$$F_1(y) = P(Y < y) = P(-a < X \leqslant a) + P(a < X \leqslant \sqrt{y}) =$$

$$= \frac{2a}{b+a} + \int_a^{\sqrt{y}} p_1(x)\,dx = \frac{2a}{b+a} + \frac{1}{b+a}\,x\Big|_a^{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}.$$

Таким образом,

$$F_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0, \\ 2\sqrt{y}/(b+a) & \text{при } 0 < y \leqslant a^2, \\ (\sqrt{y}+a)/(b+a) & \text{при } a^2 < y \leqslant b^2, \\ 1 & \text{при } y > b^2. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой (2.3), получим

$$p_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0, \\ 1/(b+a)\sqrt{y} & \text{при } 0 < y \leqslant a^2, \\ 1/2(b+a)\sqrt{y} & \text{при } a^2 < y \leqslant b^2, \\ 0 & \text{при } y > b^2. \end{cases}$$

Графики функций $F_1(y)$ и $p_1(y)$ представлены на рис.2.14 и 2.15. Отметим, что такое преобразование имеет место, например, в двухполупериодном квадратичном детекторе.

2.14. Случайная величина X описывается биномиальным законом распределения вероятностей.

Найти математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 случайной величины $Y = e^{aX}$.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, ..., n. Вероятность $P_n(k)$ того, что она примет значение k, определяется выражением (1.22):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Используя формулы (2.44) и (2.45), получаем

$$m_y = \sum_k g(x_k)\, p_k = \sum_{k=0}^{n} y_k P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} e^{ak} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + pe^a)^n,$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=0}^{n} y_k^2 P_n(k) - m_y^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{2a})^k q^{n-k} - m_y^2 = (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}.$$

2.15. Случайная величина X подчинена равномерному закону в интервале от 0 до 2.

Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 6X^2$.

Решение. На основании (2.43) имеем

$$m_y = \int_0^2 g(x)\, p_1(x)\, dx = \int_0^2 6x^2 \frac{1}{2}\, dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8,$$

$$\sigma_y^2 = \int_0^2 [g(x) - m_y]^2\, p_1(x)\, dx = \int_0^2 (6x^2)^3 \frac{1}{2}\, dx - m_y^2 =$$

$$= 18\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 - 64 = 51{,}2.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

2.1. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры: 1 и 0. Априорные вероятности передачи этих цифр равны $p(1) = p(0) = 1/2$. Из-за наличия помех возможны искажения. Вероятности перехода единицы в единицу и нуля в нуль соответственно равны: $p(1/1) = p$, $p(0/0) = q$.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины X — однозначного числа, которое будет получено на приемном конце в некоторый момент времени.

Ответ:

x_i	0	1
p_i	$(1-p+q)/2$	$(1-q+p)/2$

2.2. Из десяти транзисторов, среди которых два бракованных, случайным образом выбраны два транзистора для проверки их параметров.

Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных транзисторов в выборке; б) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X.

Ответ: а)

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

б) $$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1/45 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 17/45 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2.3. Вероятность получения отметки цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p. Цель считается обнаруженной, если получено n отметок.

Найти закон распределения случайной величины X — числа оборотов антенны радиолокатора.

Ответ:

$$P(k) = P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, n+2.$$

2.4. Последовательные ускоренные испытания приборов на надежность производятся до первого отказа, после чего они прекращаются. Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, найти плотность вероятности $p_1(x)$ случайной величины X — числа испытанных приборов, если вероятность отказа для каждого прибора равна 0,5.

Ответ [4]: $$p_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \delta(x - x_i).$$

2.5. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.16, *а*).

Требуется: 1) найти аналитическое выражение для $F_1(x)$;

2) построить график плотности вероятности $p_1(x)$; 3) определить вероятность того, что величина X примет значение, заключенное на интервале от 0,2 до 0,8.

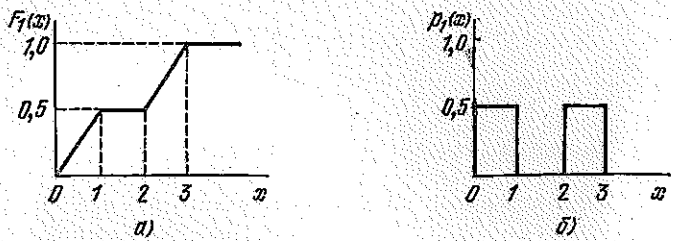


Рис. 2.16. Функция распределения (*а*) и плотность вероятности (*б*)

Ответ:

$$1.\ F_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x/2 & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 1/2 & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ (x-1)/2 & \text{при } 2<x\leqslant 3,\\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

2. График плотности вероятности $p_1(x)$ приведен на рис. 2.16, *б*.
3. 0,3.

2.6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x=3$, $\sigma_x=2$.

Как изменится плотность вероятности $p_1(x)$, если параметры примут значения $m_x=-3$, $\sigma_x=4$?

2.7. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования Δ (Δ — наименьшая разность между двумя импульсами). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p_1(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования, то при передаче сообщения возникает ошибка.

Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

Ответ: $\Delta=3{,}4\,\sigma$.

2.8. Случайная величина X — ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мВ^2. Систематическая ошибка прибора отсутствует.

Вычислить вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка X: а) превзойдет по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5 мВ — 3,5 мВ.

Ответ: а) 0,999; б) 0,776.

2.9. На электронное реле воздействует случайное напряжение с релеевской плотностью вероятности

$$p_1(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2},\ x>0.$$

Какова вероятность P срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 2 В?

Ответ: $P=e^{-2/\sigma^2}$.

2.10. Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа приборов X, имевших отказы за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна q.

Ответ: $m_x=q$, $\sigma_x^2=q(1-q)$.

2.11. Стрельба ведется по наблюдаемой цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5 и от выстрела к выстрелу не меняется.

Вычислить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X — числа попаданий в цель при пяти выстрелах.

Ответ: $m_x = 2{,}5$; $\sigma_x^2 = 1{,}25$.

2.12. На вход ограничителя воздействует видеоимпульс со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна p. Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X, принимающую значения 1 (превышение) и 0 (непревышение), определить среднее значение и дисперсию величины X. Найти среднее значение и дисперсию числа Y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

Ответ: $m_x = p$, $\sigma_x^2 = p(1-p)$, $m_y = np$, $\sigma_y^2 = np(1-p)$.

2.13. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения цели.

Ответ: $m = 1/p$, $\sigma^2 = (1-p)/p^2$.

2.14. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов в час. Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 мин: а) поступит ровно 3 запроса; б) поступит хотя бы один запрос.

Ответ: а) 0,0613; б) 0,632.

2.15. Изменение частоты X генератора из-за самопрогрева подчинено распределению, график которого изображен на рис. 2.17.

Определить: 1) аналитические выражения для плотности вероятности $p_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$; 2) математическое ожидание m_x и среднее квадратическое значение σ_x случайной величины X.

Ответ: 1. $p_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -a/2, \\ (2x+a)/a^2 & \text{при } -a/2 < x \leqslant a/2, \\ 0 & \text{при } x > a/2, \end{cases}$

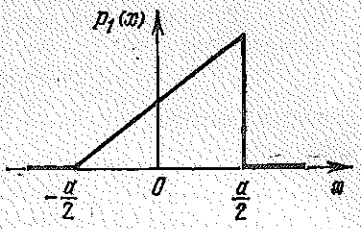
$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -a/2, \\ [(2x+a)/2a]^2 & \text{при } -a/2 < x \leqslant a/2, \\ 1 & \text{при } x > a/2; \end{cases}$$

2. $m_x = a/6$, $\sigma_x = a/3\sqrt{2}$.

2.16. Сообщение передается квантованными импульсами с шагом квантования $\Delta = 1$ В. Предполагая, что ошибка квантования равномерно распределена в пределах интервала квантования и имеет нулевое среднее значение, определить дисперсию σ^2 (мощность) шума квантования.

Ответ: $\sigma^2 = 1/12$ В^2.

Рис. 2.17. Плотность вероятности



2.17. При измерении напряжения гармонического колебания $u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ ламповым вольтметром, проградуированным в эффективных значениях, стрелка вольтметра из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями α_1 и α_2.

Вычислить: 1) среднее значение m_α показаний вольтметра; 2) относительную погрешность $\Delta = \sigma_\alpha/m_\alpha$ измерения амплитуды напряжения $u(t)$, где σ_α — среднеквадратическое значение.

Ответ:

1) $m_\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$; 2) $\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)/\sqrt{3}\,(\alpha_2 + \alpha_1)$.

2.18. Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону.

Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 ч.

Ответ: 0,951.

2.19. Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Релея

$$p_1(x) = \frac{x}{\sigma^2}\,e^{-x^2/2\sigma^2},\ x > 0.$$

Вычислить среднее значение и дисперсию случайной величины X.

Ответ: $m_x = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $\sigma_x^2 = \sigma^2(2 - \pi/2)$.

2.20. Показать, что начальный факториальный момент четвертого порядка $m_{[4]}$ случайной величины X связан с начальными моментами следующим соотношением:

$$m_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1.$$

2.21. Найти центральные m_k^0 и центральные абсолютные β_k^0 моменты случайной величины X, распределенной по гауссовскому закону

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Ответ: При начетном k $m_k^0 = 0$,

$$\beta_k^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma^k\,2^{(k-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^{(k-1)/2}\left(\frac{k-1}{2}\right)!\,\sigma^k.$$

При четном k

$$m_k^0 = \beta_k^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma^k\,2^{(k-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

2.22. Доказать, что если случайная величина X подчинена гамма-распределению

$$p_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\,x^{\alpha}\,e^{-x/\beta},\ x>0,\ \alpha>-1,\ \beta>0,$$

то характеристическая функция величины X

$$\Theta_1(jv) = (1 - j\beta v)^{-(\alpha+1)},$$

а начальные моменты вычисляются по формуле

$$m_k = \beta^k\,\Gamma(k+\alpha+1)/\Gamma(\alpha+1).$$

2.23. Определить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ случайной величины X, принимающей: 1) одно-единственное значение, равное C; 2) с одинаковой вероятностью два значения, равные $\pm C$.

Ответ: 1) $\Theta_1(jv) = e^{jvC}$; 2) $\Theta_1(jv) = \cos vC$.

2.24. Показать, что распределение с характеристической функцией $\Theta_1(jv) = \cos[\pi v/2(1 - v^2)]$ обладает плотностью вероятности

$$p_1(x) = 0{,}5\cos x,\quad -\pi/2 < x \leqslant \pi/2.$$

2.25. Определить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ случайной величины X, плотность вероятности которой

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Ответ: $\Theta_1(jv) = \exp\left[jvm - \frac{v^2\sigma^2}{2}\right]$.

2.26. Дискретная случайная величина X характеризуется рядом распределения

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти законы распределения случайных величин $Y = X^2 + 1$, $Z = |X|$.

Ответ:

y_j	1	2	5
p_j	0,3	0,5	0,2

z_h	0	1	2
p_h	0,3	0,5	0,2

2.27. Случайная величина X с плотностью вероятности

$$p_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \; x > 0,$$

подвергается преобразованию $Y = \sigma/X$.

Определить плотность вероятности для случайной величины Y.

Ответ: $p_1(y) = ye^{-y^2/2}$, $y \geqslant 0$.

2.28. Случайная величина X распределена равномерно в интервале (a, b):

$$p_1(x) = 1/(b-a), \quad 0 < a \leqslant x \leqslant b.$$

Определить плотность вероятности случайной величины $Y = X^2$ и построить ее график.

Ответ: $p_1(y) = \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}}$, $a^2 < y < b^2$.

2.29. Решить задачу 2.28 при условии, что

$$p_1(x) = 1/(b-a), \quad a \leqslant x \leqslant b < 0.$$

Ответ: $p_1(y) = 1/2(a-b)\sqrt{y}$, $b^2 < y < a^2$.

2.30. Случайная величина X с плотностью вероятности $p_1(x)$ подвергается преобразованию $Y = |1 - X|$.

Найти плотность вероятности случайной величины Y.

Ответ: $p_1(y) = p_1(1-y) + p_1(1+y)$, $y > 0$.

2.31. Случайная величина X с нормальной плотностью вероятности

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

подвергается преобразованию $Y = X^2$.

Определить плотность вероятности случайной величины Y.

Ответ: $p_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2\sigma^2}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

2.32. Решить задачу 2.31, если

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Ответ: $p_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left[-\frac{y+m^2}{2\sigma^2}\right] \operatorname{ch}\left(\frac{m\sqrt{y}}{\sigma^2}\right)$, $y > 0$.

2.33. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 1-2X^2$.

Ответ: $m_y = -2{,}4$, $\sigma_y^2 = 9{,}63$.

2.34. Случайная величина Φ равномерно распределена в интервале от 0 до 2π.

Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины $X = A_0 \cos^2(\omega t + \Phi)$, где ω, t — неслучайные величины.

Ответ: $m_x = A_0/2$, $\sigma_x^2 = A_0^2/8$.

3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При исследовании радиотехнических устройств часто приходится иметь дело с совокупностью двух или большего числа случайных величин. Систему n случайных величин можно рассматривать как точку в n-мерном пространстве со случайными координатами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Поэтому такую систему называют n-мерной случайной величиной или n-мерным случайным вектором. При $n=2$ двумерная случайная величина может рассматриваться как случайная точка на плоскости, а при $n = 3$ — как случайная точка в пространстве. Такая трактовка совокупности двух или трех случайных величин дает возможность пользоваться наглядными геометрическими представлениями.

Системы случайных величин могут быть дискретными, непрерывными и смешанными, в зависимости от типа случайных величин, образующих систему.

Как и в случае одномерной случайной величины, полной вероятностной характеристикой многомерной случайной величины является закон распределения — соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений многомерной случайной величины и вероятностями ее появления в этих областях.

Закон распределения может быть задан в различных формах. Например, если X и Y — дискретные случайные величины, то закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) задается в табличной форме

y_j	x_i						$\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$
	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{i1}	$\ldots$	p_{n1}	$p(y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{i2}	$\ldots$	p_{n2}	$p(y_2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{nj}	$p(y_j)$

Продолжение

...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{im}	...	p_{nm}	$p(y_m)$
$\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$	

Здесь

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1,2, \ldots, m.$$

При этом

$$\sum_{i,\,j} p_{ij} = 1, \tag{3.1}$$

$$P(X = x_i) = p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ P(Y = y_j) = p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}. \tag{3.2}$$

Если X и Y независимы, то $p_{ij} = p_i p_j$.

Универсальной характеристикой многомерных случайных величин, пригодной для описания как дискретных, так и непрерывных случайных величин, является функция распределения. В случае двумерной случайной величины функция распределения $F_2(x, y)$ есть вероятность одновременного выполнения двух неравенств $X < x$, $Y < y$, рассматриваемая как функция переменных x, y:

$$F_2(x, y) = P(X < x,\ Y < y). \tag{3.3}$$

В геометрической интерпретации (рис. 3.1) функцию распределения $F_2(x, y)$ можно трактовать как вероятность попадания случайной точки внутрь бесконечного левого нижнего квадранта с вершиной (x, y).

В статистической радиотехнике основное практическое значение имеют системы непрерывных случайных величин, распределение которых обычно характеризуют не функцией распределения, а плотностью вероятности.

Если функция распределения $F_2(x, y)$ непрерывна и обладает непрерывной смешанной производной второго порядка, то двумерная плотность вероятности определяется формулой

$$p_2(x, y) = \partial^2 F_2(x, y)/\partial x \partial y. \tag{3.4}$$

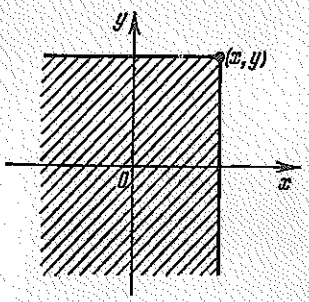


Рис. 3.1. К определению функции распределения

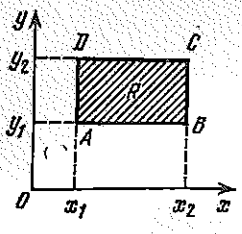


Рис. 3.2. Прямоугольная область

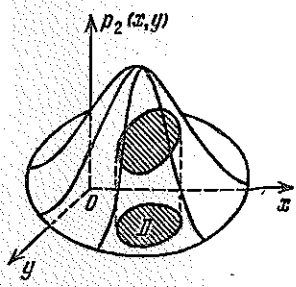


Рис. 3.3. Совместная плотность вероятности двух случайных величин и область D

Вместо плотности вероятности можно использовать двумерную характеристическую функцию

$$\Theta_2(jv_1, jv_2) = M[e^{j(v_1 x + v_2 y)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1 x + v_2 y)} p_2(x, y)\, dxdy. \qquad (3.5)$$

Аппарат характеристических функций особенно эффективен для исследования сумм взаимно независимых случайных величин.

Функции $F_2(x, y)$, $p_2(x, y)$ и $\Theta_2(jv_1, jv_2)$ обладают следующими основными свойствами:

1. $F_2(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов, т. е.

$$F_2(x_2, y) \geqslant F_2(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1,$$

$$F_2(x, y_2) \geqslant F_2(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

2. $F_2(x, -\infty) = F_2(-\infty, y) = F_2(-\infty, -\infty) = 0.$ (3.6)

3. $F_2(\infty, \infty) = 1.$ (3.7)

4. $F_2(x, \infty) = F_1(x),\ F_2(\infty, y) = F_1(y),$ (3.8)

где $F_1(x)$ и $F_1(y)$ — соответственно функции распределения случайных величин X и Y.

5. $$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_2(u, v)\, dudv. \qquad (3.9)$$

6. Вероятность $P(R)$ попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R (рис. 3.2) со сторонами, параллельными осям Ox и Oy и с координатами вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $D(x_1, y_2)$ равна

$$P(R) = P\{x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2\} = F_2(x_2, y_2) - F_2(x_1, y_2) - F_2(x_2, y_1) + F_2(x_1, y_1). \qquad (3.10)$$

7. $p_2(x, y) \geqslant 0.$ (3.11)

8. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\, dxdy = 1 \text{ (условие нормировки).} \qquad (3.12)$$

9. Вероятность $P(D)$ попадания случайной точки в произвольную область (рис. 3.3) определяется формулой

$$P(D) = \iint_{(D)} p_2(x, y)\, dxdy, \qquad (3.13)$$

где $p_2(x, y)\,dxdy$ — элемент вероятности для системы двух случайных величин.

10. $\Theta_2(0, 0) = 1$.

11. Если X и Y — независимые случайные величины с характеристическими функциями соответственно $\Theta_1(jv_1)$ и $\Theta_1(jv_2)$, то

$$\Theta_2(jv_1, jv_2) = \Theta_1(jv_1)\,\Theta_1(jv_2). \tag{3.14}$$

Одномерные функции распределения и плотности вероятности выражаются через двумерные с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dxdy, \\ p_1(x) &= \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dy, \\ F_1(y) &= F_2(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dxdy, \\ p_1(y) &= \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Закон распределения системы двух случайных величин X, Y определяется распределением каждой из величин, входящих в систему, и зависимостью между ними. Степень зависимости случайных величин X и Y характеризуется условным законом распределения, под которым понимается закон распределения одной из случайных величин, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

По теореме умножения законов распределения

$$p_2(x, y) = p_1(x)\,p_1(y|x) = p_1(y)\,p_1(x|y), \tag{3.16}$$

где

$$p_1(y|x) = \partial F_1(y|x)/\partial y,\ p_1(x|y) = \partial F_1(x|y)/\partial x$$

— условные плотности вероятностей.

Для независимых случайных величин X и Y

$$p_2(x, y) = p_1(x)\,p_1(y). \tag{3.17}$$

Условие (3.17) — необходимое и достаточное условие независимости случайных величин.

Выражения (3.15) и (3.16) позволяют получить соотношения, связывающие между собой условные и безусловные плотности вероятностей, а также формулу полной вероятности и формулу Байеса для непрерывных случайных величин:

$$\begin{aligned} p_1(y|x) &= \frac{p_2(x, y)}{p_1(x)} = \frac{p_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dy}, \\ p_1(x|y) &= \frac{p_2(x, y)}{p_1(y)} = \frac{p_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dx}; \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$p_1(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\,dx=\int_{-\infty} p_1(x)\,p_1(y\mid x)\,dx; \tag{3.19}$$

$$p_1(x\mid y)=\frac{p_1(x)\,p_1(y\mid x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,p_1(y\mid x)\,dx}. \tag{3.20}$$

Свойства 1—11 и формулы (3.1)—(3.20) обобщаются на многомерные случайные величины [1, 13, 16].

Законы распределения являются исчерпывающими вероятностными характеристиками многомерных случайных величин. Однако если система включает в себя более двух — трех случайных величин, то экспериментальное определение ее законов распределения весьма затруднено, а проведение расчетов требует громоздких математических вычислений. Поэтому при исследовании систем случайных величин широкое применение нашли их числовые характеристики, которые в определенной степени могут дать представление и о характере закона распределения. В основу получения таких числовых характеристик положено понятие моментов.

Различные моменты соответственно дискретных и непрерывных двумерных случайных величин определяются следующими формулами:

1. Начальный момент $m_{k_1k_2}$ порядка k_1+k_2:

$$m_{k_1k_2}=M\left(X^{k_1}Y^{k_2}\right)=\sum_i\sum_j x_i^{k_1}y_j^{k_2}p_{ij},$$

$$m_{k_1k_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{k_1}y^{k_2}p_2(x, y)\,dxdy. \tag{3.21}$$

2. Центральный момент $m^0_{k_1k_2}$ порядка k_1+k_2:

$$m^0_{k_1k_2}=M\left(X_0^{k_1}Y_0^{k_2}\right)=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)^{k_1}(y_j-m_y)^{k_2}p_{ij},$$

$$m^0_{k_1k_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^{k_1}(y-m_y)^{k_2}p_2(x, y)\,dxdy. \tag{3.22}$$

3. Абсолютный начальный момент $\beta_{k_1k_2}$ порядка k_1+k_2:

$$\beta_{k_1k_2}=M\left(|X|^{k_1}|Y|^{k_2}\right)=\sum_i\sum_j |x_i|^{k_1}|y_j|^{k_2}p_{ij},$$

$$\beta_{k_1k_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{k_1}|y|^{k_2}p_2(x, y)\,dxdy. \tag{3.23}$$

4. Абсолютный центральный момент $\beta^0_{k_1k_2}$ порядка k_1+k_2:

$$\beta^0_{k_1k_2}=M\left(|X_0|^{k_1}|Y_0|^{k_2}\right)=\sum_i\sum_j |x_i-m_x|^{k_1}|y_j-m_y|^{k_2}p_{ij},$$

$$\beta^0_{k_1k_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-m_x|^{k_1}|y-m_y|^{k_2}p_2(x, y)\,dxdy. \tag{3.24}$$

5. Факториальный начальный момент $m_{[k_1][k_2]}$ порядка k_1+k_2:

$$m_{[k_1][k_2]}=M\left(X^{[k_1]}Y^{[k_2]}\right)=\sum_i\sum_j x_i^{[k_1]}y_j^{[k_2]}p_{ij},$$

$$m_{[k_1][k_2]}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^{[k_1]}y^{[k_2]}p_2(x, y)\,dxdy. \tag{3.25}$$

6. Факториальный центральный момент $m^0_{[k_1]\,[k_2]}$ порядка $k_1 + k_2$:

$$m^0_{[k_1]\,[k_2]} = M\left(X_0^{[k_1]}\, Y_0^{[k_2]}\right) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{[k_1]}\,(y_j - m_y)^{[k_2]} p_{ij}, \tag{3.26}$$

$$m^0_{[k_1]\,[k_2]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{[k_1]}\,(y - m_y)^{[k_2]}\, p_2(x, y)\, dxdy.$$

Из начальных моментов на практике наиболее часто используются начальные моменты первого порядка:

$$m_{10} = M\left(X^1 Y^0\right) = M(X) = m_x, \quad m_{01} = M\left(X^0 Y^1\right) = M(Y) = m_y, \tag{3.27}$$

которые являются математическими ожиданиями случайных величин X и Y, входящих в систему, и которые определяют координаты точки, называемой центром рассеивания системы на плоскости.

Из центральных моментов наиболее употребительны моменты второго порядка. Два из них представляют собой дисперсии величин X и Y:

$$D_x = m^0_{20} = M\left[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0\right] = M\left[(X - m_x)^2\right], \tag{3.28}$$

$$D_y = m^0_{02} = M\left[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2\right] = M\left[(Y - m_y)^2\right],$$

характеризующие рассеивание случайной точки в направлении осей Ox и Oy.

Среди смешанных моментов особую роль играет центральный смешанный момент второго порядка $m^0_{11} = K_{xy}$, называемый корреляционным моментом (иногда — моментом связи) случайных величин X, Y:

$$m^0_{11} = K_{xy} = M\left(X^1_0 Y_0\right) = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right]. \tag{3.29}$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y)\, p_{ij}, \tag{3.30а}$$

где

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j),$$

а для непрерывных

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)\, p_2(x, y)\, dxdy. \tag{3.30б}$$

Корреляционный момент K_{xy} описывает, помимо рассеивания величин X и Y, еще и связь между ними. Часто вместо K_{xy} пользуются безразмерной величиной — коэффициентом корреляции R_{xy}:

$$R_{xy} = K_{xy}/\sigma_x \sigma_y, \tag{3.31}$$

где σ_x, σ_y — средние квадратические значения величин X и Y. Коэффициент корреляции R_{xy} удовлетворяет условию: $-1 \leqslant R_{xy} \leqslant 1$ и определяет линейную вероятностную зависимость между случайными величинами.

Если X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$ и $R_{xy} = 0$. Две случайные величины, для которых коэффициент корреляции равен нулю, называются некоррелированными. Независимые величины всегда не коррелированы. Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Для гауссовских случайных величин некоррелированность означает также и независимость.

В некоторых случаях используются условные моменты случайной величины X относительно Y. Для условных математического ожидания и диспер-

сии случайной величины X относительно Y формулы соответственно имеют вид

$$M(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x \mid y)\, dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x p_2(x, y)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\, dx},$$

$$D(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X \mid y)]^2 p_1(x \mid y)\, dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X \mid y)]^2 p_2(x, y)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\, dx}. \quad (3.32)$$

Основными числовыми характеристиками системы n случайных величин являются математические ожидания и дисперсии: $M(X_k)$,

$$D(X_k) = M\{[X_k - M(X_k)]^2\},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

а также корреляционные моменты или коэффициенты корреляции

$$K_{x_i x_j} = \{[X_i - M(X_i)]\,[X_j - M(X_j)]\},\ i \neq j,$$
$$R_{x_i x_j} = K_{x_i x_j} \mid \sigma_{x_i}\, \sigma_{x_j},\ i \neq j. \quad (3.33)$$

Для удобства корреляционные моменты и коэффициенты корреляции часто записываются в виде корреляционной матрицы и нормированной корреляционной матрицы:

$$\begin{Vmatrix} K_{x_1 x_1} & K_{x_1 x_2} & \ldots & K_{x_1 x_n} \\ & K_{x_2 x_2} & \ldots & K_{x_2 x_n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & K_{x_n x_n} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 1 & R_{x_1 x_2} & \ldots & R_{x_1 x_n} \\ & 1 & \ldots & R_{x_2 x_n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Во многих задачах статистической радиотехники требуется определить вероятностные характеристики одной системы случайных величин по заданным вероятностным характеристикам другой системы, связанной с первой функциональной зависимостью.

Пусть две случайные величины Y_1 и Y_2 заданы выражениями

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2),\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \quad (3.34)$$

где g_1 и g_2 — заданные детерминированные функции.

Требуется найти совместную функцию распределения $F_2(y_1, y_2)$ и совместную плотность вероятности $p_2(y_1, y_2)$ случайных величин Y_1 и Y_2 по известной плотности вероятности $p_2(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2.

Так как

$$F_2(y_1, y_2) = P(Y_1 < y_1,\ Y_2 < y_2) =$$
$$= P[g_1(X_1, X_2) < y_1,\ g_2(X_1, X_2) < y_2],$$

то

$$F_2(y_1, y_2) = \iint_D p_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2. \quad (3.35)$$

Область интегрирования D определяется неравенствами $g_1(x_1, x_2) < y_1$, $g_2(x_1, x_2) < y_2$. Плотность вероятности $p_2(y_1, y_2)$ получается путем дифференцирования $F_2(y_1, y_2)$:

$$p_2(y_1, y_2) = \partial^2 F_2(y_1, y_2)/\partial y_1 \partial y_2. \quad (3.36)$$

Если необходимо найти $p_2(y_1, y_2)$ без предварительного определения $F_2(y_1, y_2)$, то при однозначных обратных функциях $X_1 = h_1(Y_1, Y_2)$, $X_2 = h_2(Y_1, Y_2)$ имеем

$$p_2(y_1, y_2) = p_2[h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)]\,|D_2|, \tag{3.37}$$

где

$$D_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2 \\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}} \tag{3.38}$$

— якобиан преобразования от случайных величин X_1, X_2 к величинам Y_1, Y_2.

В тех случаях, когда обратные функции h_i неоднозначны, в правой части (3.37) следует взять сумму по каждой из подобластей.

Результаты (3.34)—(3.38) можно распространить на функциональные преобразования многомерных случайных величин.

Часто требуется найти плотность вероятности функции двух случайных величин X_1 и X_2 по известной совместной плотности вероятности $p_2(x_1, x_2)$: $Y = Y_1 = g_1(X_1, X_2) = g(X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_2$ (или X_1).

При однозначной обратной функции $X_1 = h_1(Y_1, Y_2) = h(Y, Y_2)$ к такому преобразованию можно применить формулу (3.37). В данном случае якобиан преобразования

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} & \dfrac{\partial h(y, y_2)}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y}.$$

Тогда формула (3.37) примет вид

$$p_2(y, y_2) = p_2[h(y, y_2), y_2] \left| \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} \right|. \tag{3.39}$$

Проинтегрировав (3.39) по y_2, получим плотность вероятности для Y:

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2[h(y, y_2), y_2] \left| \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} \right| dy_2. \tag{3.40}$$

Формула (3.40) позволяет найти плотность вероятности суммы, разности, произведения и частного двух случайных величин:

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y - x_2, x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y - x_1, x_1)\,dx_1, \; Y = X_1 + X_2, \tag{3.41}$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y + x_2, x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1 - y, x_1)\,dx_1, \; Y = X_1 - X_2, \tag{3.42}$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{y}{x_2}, x_2\right) \frac{1}{|x_2|}\,dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{y}{x_1}, x_1\right) \frac{1}{|x_1|}\,dx_1, \quad Y = X_1 X_2, \tag{3.43}$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(yx_2, x_2)\,|x_2|\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{x_1}{y}, x_1\right) \left|\frac{x_1}{y^2}\right| dx_1, \; Y = \frac{X_1}{X_2} \tag{3.44}$$

Для независимых случайных величин X_1 и X_2 с плотностями вероятностей $p_1(x_1)$ и $p_1(x_2)$ $p_2(x_1, x_2) = p_1(x_1)\, p_1(x_2)$ и формулы (3.41) — (3.44) принимают вид

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x_2)\, p_1(x_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x_1)\, p_1(x_1)\, dx_1,\ Y = X_1 + X_2, \tag{3.45}$$

$$p_1(y = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y + x_2)\, p_1(x_2)\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1 - y)\, p_1(x_1)\, dx_1,\ Y = X_1 - X_2, \tag{3.46}$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{y}{x_2}\right) p_1(x_2)\, \frac{1}{|x_2|}\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{y}{x_1}\right) p_1(x_1)\, \frac{1}{|x_1|}\, dx_1,\ Y = X_1 X_2, \tag{3.47}$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1\ yx_2)\, p(x_2)|\, x_2|\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{x_1}{y}\right) p_1(x_1) \left|\frac{x_1}{y^2}\right| dx_1,\ Y = \frac{X_1}{X_2}. \tag{3.48}$$

Особое практическое значение имеет задача отыскания плотности вероятности суммы независимых случайных величин по известным плотностям вероятности слагаемых (композиция законов распределения). Эта задача решается с помощью формулы (3.45). Однако если число слагаемых больше двух, то вычисление интегралов свертки значительно усложняется; поэтому при $n > 2$ пользуются аппаратом характеристических функций. Сначала находят характеристическую функцию $\Theta_n(jv)$ суммы независимых случайных величин $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, которая равна произведению характеристических функций отдельных слагаемых:

$$\Theta_n(jv) = M\{e^{jvY}\} = \prod_{i=1}^{n} \Theta_{1i}(jv), \tag{3.49}$$

а затем из обратного преобразования Фурье

$$p_n\ y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvy}\, \Theta_n(jv)\, dv \tag{3.50}$$

находят плотность вероятности величины Y.

Числовые характеристики функций Z_1, Z_2 системы двух случайных величин X, Y : $Z_1 = g_1(X, Y)$, $Z_2 = g_2(X, Y)$ можно найти, не производя предварительного определения плотности вероятности $p_2(z_1, z_2)$, а непосредственно используя совместную плотность вероятности $p_2(x, y)$ случайных величин X и Y. В этом случае математическое ожидание $m_{z_k} = M(Z_k)$, дисперсия

$D(Z_k)$ и корреляционный момент $K_{z_1z_2}$ для дискретных и непрерывных случайных величин определяются соответственно выражениями:

$$m_{z_k} = \sum_i \sum_j g_k(x_i, y_j)\, p_{ij}, \qquad (3.51)$$

$$m_{z_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x, y)\, p_2(x, y)\, dxdy,$$

$$D(Z_k) = \sum_i \sum_j [g_k(x_i, y_j) - m_{z_k}]^2 p_{ij}, \qquad (3.52)$$

$$D(Z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g_k(x, y) - m_{z_k}]^2 p_2(x, y)\, dxdy,$$

$$K_{z_1z_2} = \sum_i \sum_j [g_1(x_i, y_j) - m_{z_1}][g_2(x_i, y_j) - m_{z_2}] p_{ij}, \qquad (3.53)$$

$$K_{z_1z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x, y) - m_{z_1}][g_2(x, y) - m_{z_2}] p_2(x, y)\, dxdy,$$

где $k = 1,2$; x_i, y_j — возможные значения случайных величин X и Y; p_{ij} — вероятности совместного появления этих значений.

Частными случаями формул (3.51)—(3.53) являются следующие соотношения для основных числовых характеристик случайных величин (основные свойства числовых характеристик):

1. Если C — неслучайная величина, то

$$M(C) = C, \quad M(CX) = CM(X). \qquad (3.54)$$

2. Для любых случайных величин X и Y

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \qquad (3.55)$$

3. Математическое ожидание линейной функции

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i M(X_i) + b, \qquad (3.56)$$

где a_i; b — неслучайные коэффициенты.

4. Для любых X и Y

$$M(XY) = M(X)\, M(Y) + K_{xy}. \qquad (3.57)$$

Если X и Y не коррелированы ($K_{xy} = 0$), то

$$M(XY) = M(X)\, M(Y). \qquad (3.58)$$

5. Если C — неслучайная величина, то

$$D(C) = 0. \qquad (3.59)$$

6. Неслучайную величину C можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad \sigma(CX) = |C|\sigma(X). \qquad (3.60)$$

7. Для любых случайных величин X и Y

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}. \qquad (3.61)$$

Дисперсия суммы (разности) некоррелированных случайных величин ($K_{xy} = 0$) равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y). \qquad (3.62)$$

8. Дисперсия линейной функции $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ определяется формулой

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}. \quad (3.63)$$

Если все величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — не коррелированы, то

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i). \quad (3.64)$$

9. Для независимых случайных величин X и Y дисперсия их произведения

$$D(XY) = D(X)\, D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X). \quad (3.65)$$

2. ПРИМЕРЫ

3.1. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) описывается законом распределения вероятностей, заданного таблицей

y_j	x_i	
	x_1	x_2
y_1	0,10	0,15
y_2	0,15	0,25
y_3	0,20	0,15

Определить: 1) законы распределения составляющих X и Y; 2) условный закон распределения случайной величины X при условии, что Y приняла значение y_1, и случайной величины Y при условии, что X приняла значение x_2.

Решение. 1. Для определения безусловных законов распределения случайных величин X и Y воспользуемся формулой (3.2):

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^{3} p(x_1, y_j) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_1, y_3) =$$

$$= 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}45,$$

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^{3} p(x_2, y_j) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) + p(x_2, y_3) =$$

$$= 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}55.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X в табличной форме имеет вид

x_i	x_1	x_2
$p(x_i)$	0,45	0,55

Для величины Y по аналогии получим

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0{,}10+0{,}15 = 0{,}25,$$

$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0{,}15+0{,}25=0{,}40,$$

$$p(y_3) = p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) = 0{,}20+0{,}15=0{,}35.$$

y_j	y_1	y_2	y_3
$p(y_j)$	0,25	0,40	0,35

2. Условный закон распределения случайной величины X при $Y = y_1$ определяется совокупностью условных вероятностей $p(x_1 | y_1)$, $p(x_2 | y_1)$, которые по теореме умножения вероятностей равны:

$$p(x_1 | y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}, \quad p(x_2 | y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, искомый закон в табличной форме имеет вид

x_i	x_1	x_2
$p(x_i \mid y_1)$	2/5	3/5

По аналогии находим условный закон распределения величины Y при $X = x_2$:

$$p(y_1 | x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{3}{11}, \quad p(y_2 | x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{5}{11},$$

$$p(y_3 | x_2) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(x_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{3}{11}.$$

Следовательно, можно записать

y_j	y_1	y_2	y_3
$p(y_j \mid x_2)$	3/11	5/11	3/11

Для контроля воспользуемся условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{2} p(x_i) = 0{,}45 + 0{,}55 = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} p(y_j) = 0{,}25 + 0{,}40 + 0{,}35 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{2} p(x_i \mid y_1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} p(y_j \mid x_2) = \frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{3}{11} = 1.$$

3.2. Вычислить и построить двумерную функцию распределения $F_2(x, y)$ независимых дискретных случайных величин X и Y, если случайная величина X принимает три возможных значения 0, 1, 3 с вероятностями 1/2, 2/8 и 1/8, а Y — два возможных значения 0 и 1 с вероятностями 1/3 и 2/3.

Решение. По определению,

$$F_2(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(X = x_i, Y = y_j),$$

где $i = 0, 1, 3, \quad j = 0, 1.$

Так как по условию случайные величины X и Y независимы, то

$$F_2(x, y) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \sum_{y_j < y} P(Y = y_j).$$

При $x \leqslant 0 \quad P(X < x) = 0$. Следовательно, в этом случае при любом Y из области его возможных значений $F_2(x, y) = 0$. Аналогично при $y \leqslant 0 \quad P(Y < y) = 0$. Поэтому при любом X из области его возможных значений $F_2(x, y) = 0$.

При $0 < x \leqslant 1$ и $0 < y \leqslant 1$

$$F_2(x, y) = P(X = x_0 = 0)\, P(Y = y_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

При $0 < x \leqslant 1$ и $y > 1$

$$F_2(x, y) = P(X = x_0 = 0)\,[P(Y = y_0 = 0) + P(Y = y_1 = 1)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

При $1 < x \leqslant 3$ и $0 < y \leqslant 1$

$$F_2(x, y) = [P(X = x_0 = 0) + P(X = x_1 = 1)] \times P(Y = y_0 = 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)\frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

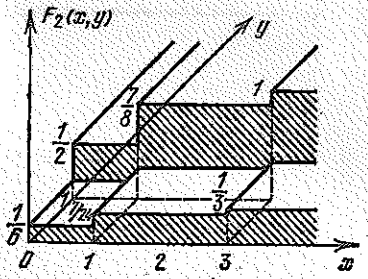
При $1 < x \leqslant 3$ и $y > 1$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) \cdot 1 = \frac{7}{8}.$$

При $x > 3$ и $0 < y \leqslant 1$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Рис. 3.4. Двумерная функция распределения



При $x > 3$ и $y > 1$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 1.$$

График функции распределения $F_2(x, y)$ представлен на рис.3.4.

3.3. Совместная плотность вероятности $p_2(x, y)$ гауссовского распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

где m_x, m_y, σ_x, σ_y, R_{xy} — параметры распределения.

Определить: 1) плотности вероятностей $p_1(x)$ и $p_1(y)$ случайных величин X и Y; 2) условные плотности вероятностей $p_1(y|x)$ и $p_1(x|y)$ величин X и Y.

Решение. 1. Согласно формуле (3.15) имеем

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\, dy.$$

Производя замену переменных $(x - m_x)/\sqrt{2}\,\sigma_x = u$, $(y - m_y)/\sqrt{2}\,\sigma_y = v$, получим

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1-R_{xy}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{1-R_{xy}^2}v^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2R_{xy}\,u}{1-R_{xy}^2}\right) dv.$$

Известно (17), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2x^2 \pm qx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right).$$

Воспользовавшись этим интегралом, найдем

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-u^2}$$

или

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Таким образом, величина X подчинена гауссовскому закону с параметрами m_x и σ_x.

Произведя аналогичные вычисления, получим

$$p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

2. По формулам (3.18) находим условные плотности вероятностей

$$p_1(y \mid x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_y^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[y - m_y - R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2\right\},$$

$$p_1(x \mid y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_x^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[x - m_x - R_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\right]^2\right\}.$$

Из этих выражений следует, что $p_1(y \mid x)$ и $p_1(x \mid y)$ представляют собой гауссовские плотности вероятности с параметрами:

$$m_{y\mid x} = m_y + R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),\ \sigma_{y\mid x} = \sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2},$$

$$m_{x\mid y} = m_x + R_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y),\ \sigma_{x\mid y} = \sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}.$$

3.4. Случайная точка на плоскости распределена по закону, приведенному в таблице.

y_j	x_i	
	$x_1=0$	$x_2=1$
$y_1=-1$	0,10	0,15
$y_2=0$	0,15	0,25
$y_3=1$	0,20	0,15

Найти: 1) математические ожидания случайных величин X и Y; 2) дисперсии величин X и Y; 3) условное математическое ожидание величины X при $Y = y_3$; 4) корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции R_{xy}.

Решение. Предварительно определим необходимые законы распределения. Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений X: $p(x_1 = 0) = 0{,}45$, $p(x_2 = 1) = 0{,}55$. Закон распределения величины X имеет вид:

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$p(x_i)$	0,45	0,55

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем распределение величины Y:

y_j	$y_1 = -1$	$y_2 = 0$	$y_3 = 1$
$p(y_j)$	0,25	0,40	0,35

Вычислим условные вероятности возможных значений X при $Y = y_3 = 1$:

$$p(x_1 \mid y_3) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0{,}20}{0{,}35} = \frac{4}{7}, \quad p(x_2 \mid y_3) = \frac{0{,}15}{0{,}35} = \frac{3}{7}.$$

Следовательно, можем записать в табличной форме

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$p(x_i \mid y_3)$	4/7	3/7

Воспользовавшись соответствующими определениями и найденными законами, получим:

$$1.\ m_x = \sum_i \sum_j x_i\, p(x_i,\ y_j) = \sum_{i=1}^{2} x_i p(x_i) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}55 = 0{,}55,$$

$$m_y = \sum_j \sum_i y_j p(x_i,\ y_j) = \sum_{j=1}^{3} y_j p(y_j) =$$

$$= -1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}40 + 1 \cdot 0{,}35 = 0{,}10;$$

$$2.\ D(X)=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)^2 p(x_i,\ y_j)=\sum_{i=1}^{2}(x_i-m_x)^2\,p(x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2} x_i^2\,p(x_i)-m_x^2=0\cdot 0{,}45+1\cdot 0{,}55-0{,}55^2\approx 0{,}248,$$

$$D(Y)=\sum_i\sum_j (y_j-m_y)^2\,p(x_i,\ y_j)=\sum_{j=1}^{3}(y_j-m_y^2)\,p(y_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{3} y_j^2 p(y_j)-m_y^2=1\cdot 0{,}25+0\cdot 0{,}40+1\cdot 0{,}35-0{,}01=0{,}59;$$

$$3.\ M(X\mid y_3=1)=\sum_{i=1}^{2} x_i\,p(x_i\mid y_3)=0\cdot\frac{4}{7}+1\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{7};$$

$$4.\ K_{xy}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p\ (x_i,\ y_j)=$$

$$=(x_1-m_x)\,[(y_1-m_y)\,p\ (x_1,\ y_1)+(y_2-m_y)p\,(x_1,\ y_2)+$$

$$+(y_3-m_y)\,p\ (x_1,\ y_3)]+(x_2-m_x)[(y_1-m_y)p\ (x_2,\ y_1)+$$

$$+(y_2-m_y)p\,(x_2,\ y_2)+(y_3-m_y)\,p\ (x_2,\ y_3)]=$$

$$=(0-0{,}55)\,[(-1-0{,}10)\cdot 0{,}10+(0-0{,}10)0{,}15+(1-0{,}10)\cdot 0{,}20]+$$

$$+(1-0{,}55)\cdot[(-1-0{,}10)\cdot 0{,}15+(0-0{,}10)\cdot 0{,}25+(1-0{,}10)\cdot 0{,}15]=$$

$$=-0{,}055,$$

$$R_{xy}=K_{xy}/\sigma_x\sigma_y=-0{,}055/\sqrt{0{,}248}\,\sqrt{0{,}59}\approx -0{,}144.$$

3.5. Совместная плотность вероятности $p_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p_2(x, y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & x<0,\ y<0.\end{cases}$$

Определить: 1. Математические ожидания m_x и m_y величин X и Y. 2. Дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ составляющих.

Решение. Предварительно найдем плотности вероятности величин X и Y:

$$p_1(x)=\int_0^\infty p_2(x, y)\,dy=4xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy=2xe^{-x^2},\ x>0.$$

$$p_1(y)=\int_0^\infty p_2(x, y)\,dx=2ye^{-y^2},\ y>0.$$

$$1.\ m_x=\int_0^\infty xp_1(x)\,dx=2\int_0^\infty x^2\,e^{-x^2}dx.$$

Так как $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}}$ при $\alpha > 0$, $n > -1$, то

$$m_x = 2\frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \; m_y = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$2.\; D(X) = \int_0^\infty (x - m_x)^2 p_1(x)\, dx = \int_0^\infty x^2 p_1(x)\, dx - m_x^2 =$$

$$= 2\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx - m_x^2 = 2\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

$$D(Y) = D(X) = 1 - \pi/4.$$

3.6. Известна совместная плотность вероятности $p_2(x, y)$ случайных величин X_1 и X_2.

Найти двумерную плотность вероятности $p_2(y_1, y_2)$ случайных величин Y_1 и Y_2, если $Y_1 = aX_1 + bX_2$, $Y_2 = cX_1 + dX_2$, где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Решение. Если определитель системы, составленный из коэффициентов a, b, c, d, отличен от нуля, то система из двух линейных алгебраических уравнений $y_1 = ax_1 + bx_2$, $y_2 = cx_1 + dx_2$ имеет однозначное решение:

$$x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2, \; x_2 = c_1 y_1 + d_1 y_2,$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 выражаются через a, b, c, d. В данном случае якобиан преобразования (3.38)

$$D_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{1}{ad - bc}.$$

Следовательно, в соответствии с (3.37) получим

$$p_2(y_1, y_2) = \frac{1}{|ad - bc|} p_2(a_1 y_1 + b_1 y_2, c_1 y_1 + d_1 y_2).$$

3.7. Определить совместную плотность вероятности $p_2(y_1, y_2)$ случайных величин Y_1 и Y_2 при заданной совместной плотности вероятности $p_2(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2, если

$$Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \; Y_2 = X_1/X_2.$$

Решение. При $y_1 > 0$ система из двух нелинейных алгебраических уравнений

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = y_1, \; x_1/x_2 = y_2$$

имеет два решения:

$$x_1^{(1)} = y_1 y_2 (1 + y_2^2)^{-1/2},\ x_2^{(1)} = y_1 (1 + y_2^2)^{-1/2};$$
$$x_1^{(2)} = -x_1^{(1)},\ x_2^{(2)} = -x_2^{(1)}.$$

В соответствии с (3.38) якобиан преобразования

$$D_2 = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} & x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} \\ 1/x_2 & -x_1/x_2^2 \end{vmatrix}} = -\frac{y_1}{1 + y^2}.$$

Применяя формулу (3.37) для случая двузначного обратного преобразования, получаем

$$p_2(y_1, y_2) = \frac{y_1}{1+y_2^2}\left[p_2\left(\frac{y_1 y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}, \frac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}}\right) + \right.$$
$$\left. + p_2\left(-\frac{y_1 y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}, -\frac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}}\right)\right],\ y_1 > 0.$$

При $y_1 < 0$ система не имеет вещественных решений и поэтому $p_2(y_1, y_2) = 0$.

3.8. Вычислить функцию распределения $F_1(y)$ и плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины Y, если $Y = \min(X_1, X_2)$ и известна совместная плотность вероятности $p_2(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2.

Решение. $Y = \min(X_1, X_2)$ означает, что

$$Y = \begin{cases} X_1, \text{ если } X_1 \leqslant X_2, \\ X_2, \text{ если } X_1 > X_2. \end{cases}$$

Следовательно, для $F_1(y)$ можем записать

$$F_1(y) = P(Y < y) = P(X_1 < y \mid x_1 \leqslant X_2) + P(X_2 < y \mid x_2 \leqslant X_1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{y}\int_{x_1}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_{-\infty}^{y}\int_{x_2}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{y} dx_1 \int_{x_1}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{y} dx_2 \int_{x_2}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_1 =$$
$$= \int_{-\infty}^{y} dx_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_2 - \int_{-\infty}^{x_1} p_2(x_1, x_2)\, dx_2\right] +$$
$$+ \int_{-\infty}^{y} dx_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2)\, dx_1 - \int_{-\infty}^{x_2} p_2(x_1, x_2)\, dx_1\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{y} p_1(x)\, dx_1 - \int_{-\infty}^{y} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} p_2(x_1, x_2)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{y} p_1(x_2)\, dx_2 -$$
$$- \int_{-\infty}^{y} dx_2 \int_{-\infty}^{x_2} p_2(x_1, x_2)\, dx_1 =$$
$$= F_1(y = x_1) + F_1(y = x_2) - F_2(y = x_1, y = x_2).$$

где

$$F_2(y=x_1,\ y=x_2)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{y}p_2(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{y}dx_1\int\limits_{-\infty}^{x_1}p_2(x_1,\ x_2)\,dx_2+\int\limits_{-\infty}^{y}dx_2\int\limits_{-\infty}^{x_2}p_2(x_1,\ x_2)\,dx_1.$$

Продифференцировав $F_1(y)$ по y, получим плотность вероятности

$$p_1(y)=\frac{\partial F_1(y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int\limits_{-\infty}^{y}dx_1\int\limits_{x_1}^{\infty}p_2(x_1,\ x_2)\,dx_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{y}dx_2\int\limits_{x_2}^{\infty}p_2(x_1,\ x_2)\,dx_1\right]=\int\limits_{y}^{\infty}p_2(y,\ x_2)\,dx_2+\int\limits_{y}^{\infty}p_2(x_1,\ y)\,dx_1.$$

При независимых X_1 и X_2 $p_2(x_1,\ x_2)=p_1(x_1)p_1(x_2)$. Поэтому формулы соответственно примут вид:

$$F_1(y)=F_1(y=x_1)+F_1(y=x_2)-$$
$$-F_1(y=x_1)\,F_1(y=x_2),$$
$$p_1(y)=dF_1(y)/dy=p_1(y=x_1)\,[1-F_1(y=x_2)]+$$
$$+p_1(y=x_2)\,[1-F_1(y=x_1)].$$

3.9. Получить формулу для плотности вероятности $p_1(y)$ случайной величины $Y=|X_1\pm X_2|$ при заданной совместной плотности вероятности $p_2(x_1,\ x_2)$ случайных величин X_1 и X_2.

Решение. Рассмотрим предварительно вспомогательную случайную величину $X=X_1+X_2$. В соответствии с (3.41) и (3.42) плотность вероятности $p_1(x)$ величины X имеет вид

$$p_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_2(x\mp x_2,\ x_2)\,dx_2.$$

Интересующая нас величина Y связана с величиной X равенством $Y=|X|$. Так как для данного случая

$$p_1(y)=\sum_{i=1}^{2}p_1[h_1(y)]\,|h_1'(y)|=p_1(y)+p_1(-y),\ y\geqslant 0,$$

то

$$p_1(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_2(y\mp x_2,\ x_2)\,dx_2+\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_2(-y\mp x_2,\ x_2)\,dx_2,\ y\geqslant 0.$$

При независимых величинах X_1 и X_2 выражение для $p_1(y)$ примет вид

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_2)|p_1(y \mp x_2) + p_1(-y \mp x_2)|\, dx_2.$$

3.10. Найти плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины

$$Y = (1 + \lambda)\, a\, X_1/2 + (1 - \lambda)\, bX_2/2,$$

где X_1 и X_2 — случайные величины с совместной плотностью вероятности $p_2(x_1, x_2)$; a и b — постоянные величины; λ — дискретная случайная величина, принимающая значения $+1$ и -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$.

Решение. Из условия ясно, что

$$Y = \begin{cases} aX_1 \text{ с вероятностью } p, \\ bX_2 \text{ с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Поэтому условная плотность вероятности $p_1(y \mid x_1, x_2)$ определится выражением

$$p_1(y \mid x_1, x_2) = p\delta(y - ax_1) + q\delta(y - bx_2).$$

Безусловная плотность вероятности

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(y|x_1, x_2)\, p_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |p\delta(y - ax_1) + q\delta(y - bx_2)|\, p_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Выполнив интегрирование с дельта-функцией, окончательно получим

$$p_1(y) = p\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(y \mid a, x_2)\, dx_2 + q\,\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1, y \mid b)\, dx_1.$$

Если случайные величины X_1 и X_2 независимы, то формула упрощается:

$$p_1(y) = p\frac{1}{|a|}\, p_1(y \mid a) + q\frac{1}{|b|}\, p_1(y \mid b).$$

3.11. Независимые случайные величины X_1 и X_2 подчинены закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно:

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!}\, e^{-\lambda_1},\ P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!}\, e^{-\lambda_2},\ k = 0, 1, \ldots$$

Определить закон распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

Решение. Решим задачу двумя способами: 1) непосредственно используя законы распределения, 2) с помощью аппарата характеристических функций.

1. Суммируя вероятности всех независимых исходов, благоприятствующих осуществлению события ($Y = n$), можно записать

$$P(Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,P(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= e^{-\lambda_1-\lambda_2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k =$$

$$= e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k.$$

2. Определим характеристические функции случайных величин X_1 и X_2:

$$\Theta_{x_1}(jv) = M(e^{jvk}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{jvk} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 e^{jv})^k}{k!} =$$

$$= \exp(-\lambda_1) \exp(\lambda_1 e^{jv}) = \exp[\lambda_1 (e^{jv}-1)].$$

По аналогии имеем $\Theta_{x_2}(jv) = \exp[\lambda_2 (e^{jv} - 1)]$.
Тогда в соответствии с (3.14) получим

$$\Theta_y(jv) = \Theta_{x_1}(jv)\ \Theta_{x_2}(jv) = \exp[(\lambda_1+\lambda_2)(e^{jv}-1)].$$

Таким образом, случайная величина Y также подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Этот результат можно обобщить на сумму нескольких пуассоновских случайных величин.

3.12. Найти закон распределения случайной величины $Y = X_1 - X_2$, где независимые случайные величины X_1 и X_2 подчинены закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно:

$$P(X_1=k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1},\quad P(X_2=k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

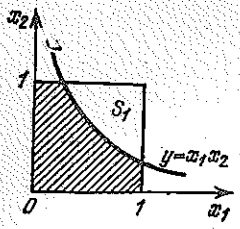


Рис. 3.5. Область интегрирования, определяющая $F_1(y)$

Решение. Суммируя вероятности всех независимых исходов, благоприятствующих появлению события $(Y = n)$, можем записать

$$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{\infty}P(k)\,P(n+k)=P(X_1=n)\,P(X_2=0)+$$

$$+P(X_1=n+1)\,P(X_2=1)+\ldots+P(X_1=n+k)\,P(X_2=k)+\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{n+k}}{(n+k)!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^{2k}}{(n+k)!\,k!},\quad n\geqslant 0.$$

Воспользовавшись представлением функции Бесселя n-го порядка от мнимого аргумента $I_n(x)$ в виде ряда

$$I_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

получим

$$P(Y=n)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2}I_{|n|}\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right),\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Приведенные вычисления справедливы только при $n\geqslant 0$. Однако если повторить их для $n<0$ и учесть равенство $I_{-n}(x)=I_n(x)$, то придем к заключению, что полученное выражение остается справедливым и для отрицательных значений n.

3.13. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и равномерно распределены в интервале (0, 1).

Вычислить функцию распределения $F_1(y)$ и плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины $Y=X_1X_2$.

Решение. Областью интегрирования, которая определяет $F_1(y)$, является заштрихованная область, изображенная на рис. 3.5:

$$F_1(y)=P(Y<y)=1-P(Y>y)=1-\iint_{S_1}dx_1\,dx_2=$$

$$=1-\int_y^1 dx_1\int_{y/x_1}^1 dx_2=1-\int_y^1\left(1-\frac{y}{x_1}\right)dx_1=y(1-\ln y).$$

Следовательно,

$$F_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \leqslant 0, \\ y(1 - \ln y) & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad y > 1. \end{cases}$$

Дифференцируя $F_1(y)$ по y, получаем плотность вероятности

$$p_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \leqslant 0, \\ -\ln y & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad y > 1. \end{cases}$$

3.14. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице

y_j	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить математическое ожидание $M(Z) = m_z$ и дисперсию $D(Z) = \sigma_z^2$ случайной величины $Z = 2X + Y^2$.

Решение. Используя формулу (3.51), имеем:

$$m_z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (2x_i + y_j^2) p_{ij} = (2x_1 + y_1^2) p_{11} + (2x_2 + y_1^2) p_{21} +$$
$$+ (2x_1 + y_2^2) p_{12} + (2x_2 + y_2^2) p_{22} + (2x_1 + y_3^2) p_{13} +$$
$$+ (2x_2 + y_3^2) p_{23} = (2 \cdot 0 + 1)\, 0{,}1 + (2 \cdot 1 + 1)\, 0{,}2 +$$
$$+ (2 \cdot 0 + 0) 0{,}2 + (2 \cdot 1 + 0)\, 0{,}3 + (2 \cdot 0 + 1)\, 0 + (2 \cdot 1 + 1)\, 0{,}2 = 1{,}9.$$

Для определения $D(Z)$ воспользуемся выражением (3.52), при этом учтем, что

$$D(Z) = M(Z^2) - m_z^2,$$

$$M(Z^2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (2x_i + y_j^2) p_{ij} = (2x_1 + y_1^2) p_{11} +$$
$$+ (2x_2 + y_1^2) p_{21} + (2x_1 + y_2^2)^2 p_{12} + (2x_2 + y_2^2) p_{22} +$$
$$+ (2x_1 + y_3^2)^2 p_{13} + (2x_2 + y_3^2) p_{23} = 1^2 \cdot 0{,}1 + (2 \cdot 1 + 1)^2 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ (2 \cdot 1 + 0)^2 \cdot 0{,}3 + (2 \cdot 1 + 1)^2 \cdot 0{,}2 = 4{,}9,$$
$$D(Z) = 4{,}9 - 1{,}9^2 = 1{,}29.$$

Задачу можно решить, используя свойства (3.54) и (3.55). Однако при этом следует предварительно определить по формулам (3.2) законы распределения случайных величин X и Y.

3.15. Найти математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент случайных величин U и V по заданным аналогичным характеристикам случайных величин X и Y, если

$$U = aX + bY,\ V = cX + dY,$$

где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Решение. На основании формул (3.55), (3.61), (3.29) и (3.57) имеем:

$$M(U) = M(aX + bY) = aM(X) + bM(Y),$$
$$M(V) = M(cX + dY) = cM(X) + dM(Y),$$
$$D(U) = D(aX + bY) = a^2D(X) + b^2D(Y) + 2K_{xy} =$$
$$= a^2D(X) + b^2D(Y) + 2ab\,R_{xy}\,\sigma_x\sigma_y,$$
$$D(V) = D(cX + dY) = c^2D(X) + d^2D(Y) + 2K_{xy} =$$
$$= c^2D(X) + d^2D(Y) + 2cdR_{xy}\,\sigma_x\sigma_y,$$
$$K_{uv} = M\{[U - M(U)][V - M(V)]\} = M(UV) -$$
$$- M(U)M(V) = M[(aX + bY)(cX + dY)] - [aM(X) +$$
$$+ bM(Y)][cM(X) + dM(Y)] = acD(X) + bdD(Y) +$$
$$+ (bc + ad)K_{xy} = acD(X) + bdD(Y) + R_{xy}\sigma_x\sigma_y.$$

Если X и Y независимы, то выражения для $D(U)$, $D(V)$ и K_{uv} упрощаются:

$$D(U) = a^2D(X) + b^2D(Y),\ D(V) = c^2D(X) + d^2D(Y),$$
$$K_{uv} = acD(X) + bdD(Y).$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

3.1. Двоичный канал связи с помехами описывается совместными вероятностями $p(x_i, y_j)$, $i = j = 1, 2$, указанными в таблице

y_j	x_i	
	x_1	x_2
y_1	0,45	0,5
y_2	0,05	0,45

Вычислить: 1) априорные вероятности $p(x_i)$ передаваемых сигналов x_i и вероятности $p(y_j)$ принимаемых сигналов y_j; 2) апостериорные вероятности $p(x_i|y_j)$; 3) вероятности перехода $p(y_j|x_i)$ сигналов x_i в y_j.

Ответ: 1) $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$, $p(y_1) = p(y_2) = 0{,}5$; 2) $p(x_1|y_1) = p(x_2|y_2) = 0{,}9$, $p(x_2|y_1) = p(x_1|y_2) = 0{,}1$; 3) $p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = 0{,}9$, $p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = 0{,}1$.

3.2. Закон распределения двумерной случайной величины задан таблицей

y_j	x_i		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Найти: 1) безусловные законы распределения случайных величин X и Y; 2) условный закон распределения величины X при условии $Y = y_1$.

Ответ:

1.

x_i	x_1	x_2	x_3
$p(x_i)$	0,16	0,48	0,36

y_j	y_1	y_2
$p(y_j)$	0,60	0,40

2.

x_i	x_1	x_2	x_3
$p(x_i \mid y_1)$	1/6	1/2	1/3

3.3. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна p_1, при втором — p_2.

Найти функцию распределения $F_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y), где X — число попаданий при первом выстреле, а Y — число попаданий при втором выстреле.

Ответ:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0, \\ (1-p_1)(1-p_2) & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \ 0 < y \leqslant 1, \\ 1-p_1 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \quad y > 1, \\ 1-p_2 & \text{при } x > 1, \ 0 < y \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, \quad y > 1. \end{cases}$$

3.4. По каналу связи передается один раз дискретный сигнал, вероятность правильного приема которого $p = 0{,}8$.

Определить закон распределения в табличной форме и функцию распределения $F_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y), где X — число правильно принятых сигналов, а Y — число неправильно принятых сигналов.

Ответ:

y_j	x_i	
	$x_1=0$	$x_2=1$
$y_1=0$	0	0,8
$y_2=1$	0,2	0

$$F_2(x, y)=\begin{cases}0{,}2 & \text{при } 0<x\leqslant 1, \quad y>1,\\ 0{,}8 & \text{при } x>1, \quad 0<y\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1, \quad y>1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

3.5. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y справедливо равенство $F_2(x, y) = F_1(x) F_1(y)$.

3.6. Система независимых случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ задана плотностями вероятностей $p_1(x_1)$, $p_1(x_2)$, ..., $p_n(x_n)$.

Вычислить функцию распределения $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой системы случайных величин.

Ответ: $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{x_i} p_1(y_i)\,dy_i$.

3.7. Независимые случайные величины X и Y распределены по закону Гаусса с параметрами $m_x = 1$, $m_y = -3$, $\sigma_x^2 = 9$, $\sigma_y^2 = 16$.

Написать выражение для плотности вероятности $p_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y).

Ответ: $p_2(x, y)=\dfrac{1}{24\pi}\exp\left[-\dfrac{(x-1)^2}{18}-\dfrac{(y+3)^2}{32}\right]$.

3.8. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерные распределения соответственно в интервалах от 0 до 1 и от -1 до 1.

Определить функцию распределения $F_2(x,y)$ системы случайных величин (X, Y).

Ответ:

$$F_2(x, y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0, \quad y\leqslant -1,\\ x(y+1)/2 & \text{при } 0<x\leqslant 1, \quad -1<y\leqslant 1,\\ x & \text{при } 0<x\leqslant 1, \quad y>1,\\ (y+1)/2 & \text{при } x>1, \quad -1<y\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1, \quad y>1.\end{cases}$$

3.9. Плотность вероятности $p_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид

$$p_2(x, y) = A/(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2).$$

Найти: 1) коэффициент A; 2) вероятность P попадания величины (X, Y) в квадрат: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 3) функции распределения $F_2(x, y)$, $F_1(x)$, $F_1(y)$; 4) плотности вероятностей $p_1(x)$ и $p_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y.

Ответ: 1) $A = 1/\pi^2$; 2) $P = 0{,}125$;

$$3)\ F_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right),\ F_1(y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right);$$

4) $p_1(x) = 1/\pi(1 + x^2)$, $p_1(y) = 1/\pi(1 + y^2)$.
Случайные величины X и Y независимы.

3.10. Функция распределения $F_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) задана выражением:

$$F_2(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} + e^{-\alpha x - \beta x},\ x > 0,\ y > 0.$$

Определить: 1) плотность вероятности $p_2(x, y)$ системы (X, Y); 2) плотности вероятностей $p_1(x)$ и $p_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y; 3) вероятность попадания величины (X, Y) в квадрат с вершинами: A (1,1) B (0,1); C (0,0) D (1,0).

Ответ: 1) $p_2(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y}$; 2) $p_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $p_1(y) = \beta e^{-\beta y}$, случайные величины X и Y независимы; 3) $P = (1 - e^{-\alpha}) \times (1 - e^{-\beta})$.

3.11. Плотность вероятности $p_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$p_2(x, y) = (A/\pi)\exp(-x^2 + 6x - y^2 - 2y - 12).$$

Определить: 1) коэффициент A; 2) плотности вероятностей $p_1(x)$ и $p_1(y)$ соответственно величин X и Y; 3) являются ли случайные величины X и Y зависимыми.

Ответ: 1) $A = e^2$; 2) $p_1(x) = (1/\sqrt{\pi})e^{-(x-3)^2}$, $p_1(y) = (1/\sqrt{\pi})e^{-(y+1)^2}$; 3) случайные величины X и Y независимы.

3.12. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность вероятности $p_2(x, y) = A \sin(x + y)$, $0 < x \leqslant \pi/2$, $0 < y \leqslant \pi/2$.
Определить: 1) постоянную A, функции распределения $F_2(x, y)$ $F_1(x)$, $F_1(y)$; 2) вероятность P выполнения неравенств $x < \pi/4$, $y < \pi/4$.

Ответ: 1) $A = 0{,}5$, $F_2(x, y) = 0{,}5|\sin x + \sin y - \sin(x + y)|$ $F_1(x) = 0{,}5(1 - \cos x + \sin x)$, $F_1(y) = 0{,}5(1 - \cos y + \sin y)$. 2) $P = 0{,}207$.

3.13. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерную плотность вероятности внутри круга C радиуса R:

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 1/\pi R^2 & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Доказать, что случайные величины X и Y являются зависимыми.

3.14. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \exp\left[-\frac{x^2-2Rxy+y^2}{2(1-R^2)}\right].$$

Вычислить плотность вероятности случайной величины X.

Ответ: $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

3.15. Плотность вероятности $p_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 1/6\pi & \text{внутри эллипса } (x^2/9 + y^2/4 \leqslant 1), \\ 0 & \text{вне этого эллипса.} \end{cases}$$

Доказать, что X и Y — зависимые величины.

3.16. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p_2(x, y) = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2+y^2)}.$$

Требуется: 1) найти значение величины h, если известно, что вероятность попадания в круг $(x^2 + y^2 \leqslant R^2)$ равна p; 2) определить, при каком значении h вероятность попадания в кольцо $(r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2)$ будет наибольшей.

Ответ: 1) $h = \frac{1}{R}\sqrt{\ln\frac{1}{1-p}}$; 2) $h = \sqrt{\frac{2\ln(R/r)}{R^2-r^2}}$.

3.17. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей

y_j	x_i		
	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$
$y_1 = -1$	4/15	1/15	4/15
$y_2 = 0$	1/15	2/15	1/15
$y_3 = 1$	0	2/15	0

Требуется: 1) определить математические ожидания m_x и m_y случайных величин X и Y; 2) установить некоррелированность и зависимость случайных величин X и Y.

Ответ: 1) $m_x = 0$, $m_y = -7/15$; 2) X и Y не коррелированы, так как $K_{xy} = 0$; однако X и Y зависимы, потому что необходимое для независимости условие $p(x_i, y_j) = p(x_i)\,p(y_j)$ не выполняется.

3.18. По одной и той же стартовой позиции противника производится три независимых пуска ракет, причем вероятность попадания в цель одной ракетой равна p. Пусть случайная величина X — число попаданий в цель, а случайная величина Y — число промахов.

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y, а также корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Ответ: $m_x = 3p$, $m_y = 3q$, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3pq$, $K_{xy} = -3pq$, $R_{xy} = -1$, $q = 1 - p$.

3.19. Написать выражение для нормальной плотности вероятности $p_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) если

$$m_x = 0,\ m_y = 6,\ \|K_{x_i x_j}\| = \|K_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{Vmatrix}.$$

Ответ:

$$p_2(x, y) = \frac{1}{32\pi} \exp\left\{-\frac{1}{1,28}\left[\frac{x^2}{16} - \frac{1,2x(y-6)}{20} + \frac{(y-6)^2}{25}\right]\right\}.$$

3.20. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) определяется формулой

$$p_2(x, y) = 0,5 \sin(x + y),\quad 0 < x \leqslant \pi/2,\quad 0 < y \leqslant \pi/2.$$

Определить: 1) математические ожидания m_x и m_y, дисперсии $D(X)$, $D(Y)$ случайных величин X и Y; 2) корреляционную и нормированную корреляционную матрицы.

Ответ: 1) $m_x = m_y = 0,785$, $D(X) = D(Y) = 0,188$; 2) $\|K_{ij}\| =$

$$= \begin{Vmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{Vmatrix};\ \|R_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -0,245 \\ -0,245 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3.21. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $R_{xy} = 0$.

Вычислить вероятности событий: а) $|Y| < X$; б) $Y < X$; в) $Y < |X|$.

Ответ [18]: а) 0,25; б) 0,5; в) 0,75.

3.22. Определить совместную плотность вероятности $p_2(x, y)$ случайных величин $X = \sin\Phi$ и $Y = \cos\Phi$ при известной плотности вероятности $p_1(\varphi)$ случайной величины Φ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [19]: $p_2(x, y) = \dfrac{p_1(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\delta\left(y \mp \sqrt{1-x^2}\right)$

3.23. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет нормальную совместную плотность вероятности

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Вычислить совместную плотность вероятности $p_2(r, \varphi)$ величины (R, Φ), если $X = R\cos\Phi$, $Y = R\sin\Phi$.

Ответ: $p_2(r, \varphi) = (r/2\pi\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2)$, $r > 0$.

Случайные величины R и Φ — независимы, так как $p_2(r, \varphi) = p_1(r)\, p_1(\varphi)$, где величина R распределена по закону Релея $(r/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2)$, а величина Φ — по равномерному закону $p_1(\varphi) = 1/2\pi$.

3.24. Совместная плотность вероятности $p_2(x_1, x_2)$ системы (X_1, X_2) имеет вид

$$p_2(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1 - x_2} & \text{при } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $p_2, (y_1, y_2)$ двумерной случайной величины (Y_1, Y_2), если $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2/X_1$.

Ответ [7]:

$$p_2(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1} \dfrac{y_1}{(1+y_2)^3} & \text{при } y_1 > 0,\ y_2 > 0, \\ 0 & \text{при других } y_1 \text{ и } y_2. \end{cases}$$

3.25. Доказать, что целочисленная случайная величина $Y = |X_1 - X_2|$, где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, имеет закон распределения вида

$$P(Y = n) = \begin{cases} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} I_0\left(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\right), & n = 0, \\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \left[\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} + \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n/2}\right] I_n\left(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\right), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Указание. Следует воспользоваться методикой и результатами примера 3.12.

3.26. Получить функцию распределения $F_1(y)$ и плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины $Y = \max(X_1, X_2)$ при заданной совместной плотности вероятности $p_2(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2.

Ответ:

$$F_1(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{y} p_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = F_2(y, y),$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{y} p_2(y, x_2)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{y} p_2(x_1, y)\, dx_1.$$

Указание. Следует воспользоваться методикой решения примера 3.8.

3.27. Определить плотность вероятности $p_1(y)$ случайной величины $Y = \min(X, X^2)$ по известной плотности вероятности $p_0(x)$ случайной величины X.

Ответ [18]:

$$p_1(y) = \begin{cases} p_0(y)/2\sqrt{y} & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ p_0(y) & \text{при } y \leqslant 0 \text{ и } y > 1. \end{cases}$$

3.28. Производится однократное измерение частоты колебаний автогенератора, распределенной по равномерному закону в интервале от $f_{\min}$ до $f_{\max}$.

Найти плотность вероятности $p_1(y)$ результата измерения $Y = F + X$, где погрешность измерения X не зависит от F и распределена по закону Гаусса

$$p_1(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2\sigma^2).$$

Ответ: $p_1(y) = \dfrac{1}{f_{\max} - f_{\min}}\left[\Phi\left(\dfrac{y - f_{\min}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{y - f_{\max}}{\sigma}\right)\right]$.

3.29. Доказать с помощью аппарата характеристических функций, что сумма двух независимых случайных величины $Z = X + Y$ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 распределена по закону Гаусса с характеристической функцией вида

$$\Theta_z(jv) = \exp\left(-\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} v^2\right).$$

3.30. На вычитающее устройство воздействуют независимые сигналы $X(t)$ и $Y(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями, дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно и гауссовскими одномерными плотностями вероятности.

Определить плотность вероятности $p_1(z)$ величины $Z = X - Y$ на выходе вычитающего устройства.

Ответ: $p_1(z) = (1/\sigma_z\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma_z^2)$, где $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

3.31. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = AX$, где A и X — взаимно независимые случайные величины с плотностями вероятности

$$p_1(A) = (A/\sigma_1^2)\exp(-A^2/2\sigma_1^2), \quad A \geqslant 0,$$

$$p_1(x) = (1/\sigma_x\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2\sigma_x^2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Ответ $p_1(y) = \dfrac{1}{2\sigma_1\sigma_x} e^{-|y|/\sigma_1\sigma_x}$.

3.32. Вычислить плотность вероятности случайной величины $Z = X/Y$, если X и Y — независимые случайные величины, распределенные по закону Релея:

$$p_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad p_1(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}, \quad x > 0, \ y > 0.$$

Ответ: $p_1(z) = 2z/(1 + z^2)^2$.

3.33. Случайная величина $Y = aX_1 + bX_2$, где a и b — постоянные коэффициенты, а X_1 и X_2 — независимые случайные величины с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Показать, что распределение Y не подчиняется закону Пуассона.

3.34. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$, если $M(X) = 0$, $M(Y) = 2$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 1$, $R_{xy} = -1/\sqrt{2}$.

Ответ: $M(Z) = -6$, $D(Z) = 29$.

3.35. В системе радиосвязи с разнесенным приемом (рис. 3.6) приемники находятся на таком расстоянии друг от друга, что сигналы X, Y, и Z статистически независимы.

Определить коэффициент корреляции R_{uv} для напряжений U и V, если X, Y и Z распределены по закону Гаусса, причем их средние значения равны нулю, а дисперсии $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3$, $\sigma_z^2 = 12$.

Ответ: $R_{uv} = 0{,}8$.

3.36. Производится n независимых измерений некоторой физической величины.

Рассматривая результат каждого измерения случайной величиной X_i с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, вычислить: 1) математическое ожидание m_n и дисперсию σ_n^2 среднего арифметического n измерений; 2) относительную ошибку $\Delta = \sigma_n/m_n$ в определении среднего арифметического.

Ответ: 1) $m_n = m$, $\sigma_n^2 = \sigma^2/n$, 2) $\Delta = \sigma/m\sqrt{n}$.

3.37. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$, если независимые величины X и Y имеют равномерные распределения соответственно на интервалах (a, b) и (c, d).

Ответ: $m_z = (a + b)(c + d)/4$, $\sigma_z^2 = (a^2 + ab + b^2) \times (c^2 + cd + d^2)/9 - (a + b)^2 (c + d)^2/16$.

3.38. Для определения площади квадрата измеряют две его стороны с помощью одного инструмента и результаты измерения перемножают.

С какой относительной средней квадратической ошибкой $\Delta = \sigma/m$ нужно измерять стороны квадрата для того, чтобы средняя квадратическая ошибка определения площади была не более 1%?

Ответ: $\Delta = 0{,}71\%$.

3.39. В индикаторе кругового обзора радиолокационной станции применена электронно-лучевая трубка, экран которой представляет собой круг радиуса a. Из-за наличия помех на экране может появиться пятно с центром в любой точке экрана.

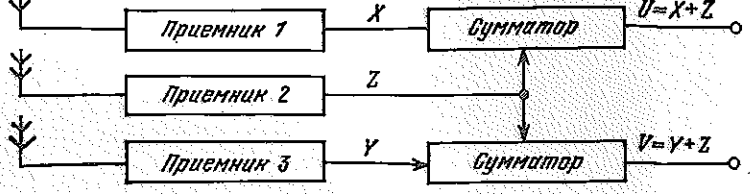


Рис. 3.6. Система радиосвязи с разнесенным приемом

Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния центра пятна от центра круга.

Ответ: $m_r = 2a/3$, $\sigma_r^2 = a^2/18$.

3.40. Случайные величины X, Y, Z имеют равные математические ожидания $M(X) = M(Y) = M(Z) = 10$, дисперсии $D(X) = 1$, $D(Y) = 4$, $D(Z) = 9$ и коэффициенты корреляции $R_{xy} = 0$, $R_{xz} = 1/4$, $R_{yz} = 1/2$.

Вычислить: а) $M(X + Y)$; б) $D(X + Y)$; в) $M(X + Z)$; г) $D(X + Z)$; д) $M(X - Z)$; е) $D(X - Z)$; ж) $M(X + Y - 2Z)$; з) $D(X + Y - 2Z)$; и) $M[M(X)]$; к) $D[M(X)]$; л) $M[D(X)]$; м) $D[D(X)]$.

Ответ: а) 20; б) 5; в) 20; г) 11,5; д) 0; е) 8,5; ж) 0; з) 26; и) 10; к) 0; л) 1; м) 0.

4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Математическая статистика — раздел математики, посвященный установлению закономерностей случайных явлений или процессов на основании обработки статистических данных — результатов наблюдений или измерений.

Наиболее важными в прикладном плане являются три задачи математической статистики [6, 7, 13, 20—25].

1. Оценка неизвестной функции распределения или плотности вероятностей, когда по конкретным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученным в результате независимых измерений случайной величины X, требуется оценить неизвестную функцию распределения $F_1(x)$ величины X или ее плотность вероятности $p_1(x)$, если X — непрерывная случайная величина.

2. Оценка неизвестных параметров. В этой задаче предполагается, что на основании физических или общетеоретических соображений можно заключить, что случайная величина X имеет функцию распределения определенного вида, зависящую от нескольких параметров, значения которых неизвестны. По результатам наблюдения величины X нужно оценить значения этих параметров. Задачу можно ставить вне связи с функцией распределения. Например, требуется оценить: математическое ожидание, дисперсию или моменты случайной величины X; амплитуду, частоту или фазу радиоимпульса, наблюдаемого на фоне шума; корреляционную функцию или спектральную плотность стационарного случайного процесса и т. д.

3. Статистическая проверка гипотез. Обычно эта задача формулируется так. Пусть на основании некоторых соображений можно считать, что функция распределения исследуемой случайной величины X есть $F_1(x)$. Необходимо выяснить, совместимы ли опытные данные с гипотезой, что случайная величина X действительно имеет распределение $F_1(x)$. Задачу можно сформулировать иначе. Предположим, наблюдаемые значения случайной величины X обусловлены двумя или несколькими различными причинами (гипотезами). В результате наблюдения величины X нужно решить, с какой из гипотез следует связывать полученные значения величины X. Например, пусть на вход радиоприемного устройства поступает случайное колебание $X(t)$, которое в каждый момент времени является либо суммой сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$ (гипотеза H_1), либо одной помехи (гипотеза H_0). В некоторый фиксированный момент времени произведено измерение величины X. По полученному числовому значению x нужно решить наилучшим образом, присутствовал ли на входе сигнал $s(t)$, т. е. выбрать одну из двух гипотез:

$$H_1 (x = s + n) \text{ или } H_0 (x = n).$$

Исходными данными, подлежащими обработке, служат результаты наблюдений над случайной величиной X.

Множество всех возможных значений случайной величины X называется генеральной совокупностью, а множество опытных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборочными значениями, число n — объемом выборки.

Если известны функция распределения $F_1(x)$ или плотность вероятности $p_1(x)$ случайной величины X, то говорят, что выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежит распределению $F_1(x)$ или $p_1(x)$. Расположив числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в возрастающем порядке, так что $x_i \geqslant x_j$ при $i > j$, получим упорядоченную выборку, называемую вариационным или статистическим рядом.

По выборке объема n определяются ее статистические характеристики*) — приближенные значения соответствующих вероятностных характеристик совокупности. Приближение тем лучше, чем больше n.

Аналогом функции распределения $F_1(x)$ случайной величины X служит статистическая (эмпирическая) функция распределения $F_1^*(x)$ выборки, которая представляет собой частоту события $X < x$:

$$F_1^*(x) = P^*(X < x) = \nu/n. \tag{4.1}$$

где ν — число членов выборки, меньших x.

Когда выбор осуществляется из непрерывного распределения и число выборочных значений велико (порядка сотен), целесообразно строить гистограмму, которая является статистической аппроксимацией плотности вероятности $p_1(x)$. Для этого область экспериментальных значений случайной величины разбивают на r обычно одинаковых интервалов h и вычисляют относительную плотность точек в каждом интеервале:

$$p_i^*/h = \nu_i/nh, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{4.2}$$

где ν_i — число экспериментальных точек в i-м интервале; $p_i^* = \nu_i/n$ — относительная частота. Подсчитанные таким образом значения изображают графически в виде ступенчатой кривой: по оси абсцисс откладывают соответствующие интервалы и на каждом из них как на основании строят прямоугольник высотой p_i^*/h. Полученная ступенчатая кривая называется гистограммой.

На практике часто возникает необходимость аппроксимации гистограммы подходящим аналитическим выражением какой-либо теоретической плотности вероятности (выравнивание статистических данных). При этом аппроксимация должна быть в определенном смысле наилучшей.

Подбор аппроксимации обычно начинается с качественного сопоставления гистограммы с графиками различных теоретических плотностей вероятностей и с выбора наиболее близкой к гистограмме. Большой набор плотностей вероятностей $p_1(x)$ дает система кривых Пирсона, задаваемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = \frac{x+a}{bx^2+cx+d}\,p_1(x).$$

Параметры a, b, c, d определяются из условия сохранения первых четырех моментов статистического распределения.

По методу моментов параметры $a, b, c, \ldots$, подбирают так, чтобы первые (низшие) моменты распределения $p_1(x)$ равнялись бы соответствующим статистическим моментам. Число приравниваемых низших моментов определяется количеством неизвестных параметров $a, b, c, \ldots$

Чтобы оценить, насколько хорошо выбранный теоретический закон распределения согласуется с результатами наблюдений, используют критерии согласия, среди которых наиболее часто применяется критерий χ^2. По этому

*) Статистические характеристики всюду отмечены индексом *.

критерию за меру расхождения результатов наблюдений и теоретического распределения принимают величину

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{v_i^2}{np_i} - n, \qquad (4.3)$$

где n — объем выборки; r — число интервалов разбиения экспериментальных данных; v_i — число значений в i-м интервале; p_i^* — относительная частота; p_i — вероятность попадания случайной величины X в i-й интервал.

Случайная величина χ^2, независимо от распределения величины X, при $n \to \infty$ асимптотически распределена по закону χ^2 с $k = r - s - 1$ степенями свободы, где s — число параметров теоретического распределения, оцениваемых по результатам наблюдений.

Можно рекомендовать следующую методику применения критерия χ^2 для оценки расхождения теоретического и статистического распределений.

1. По формуле (4.3) подсчитать значение χ^2.
2. Определить число степеней свободы $k = r - s - 1$.
3. Исходя из характера задачи, выбрать достаточно малую (обычно равную 0,05 или 0,01) вероятность α, называемую уровнем значимости.
4. С помощью таблицы приложения III по известным k и α найти значение величины $\chi^2_{k;\alpha}$, определяемой равенством

$$P(\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}) = \int_{\chi^2_{k;\alpha}}^{\infty} p_1(\chi^2)\, d\chi^2 = 1 - F_1(\chi^2_{k;\alpha}). \qquad (4.4)$$

5. Если значение χ^2, вычисленное по формуле (4.3), больше $\chi^2_{k;\alpha}$, то теоретическое распределение считают плохо согласующимся с результатами наблюдений при уровне значимости α; если $\chi^2 < \chi^2_{k;\alpha}$, то полагают, что выбранное теоретическое распределение согласуется с экспериментальными данными.

Свойства выборки описываются также более простыми характеристиками — выборочными (статистическими) моментами: выборочным средним m_x^*, выборочной дисперсией D_x^* и т. д.

Выборочные среднее, дисперсия, начальный и центральный моменты k-го порядка определяются соответственно формулами:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (4.5)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (m_x^*)^2, \qquad (4.6)$$

$$M^*(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad (4.7)$$

$$M^*[(X - m_x^*)^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^k. \qquad (4.8)$$

Если отдельные значения в ряде распределения повторяются по несколько раз, то следует учесть частоту каждого повторения. Тогда, например, формулы (4.5) и (4.6) примут вид:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_i x_i \nu_i, \tag{4.5a}$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - m_x^*)^2 \nu_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 \nu_i - (m_x^*)^2, \tag{4.6a}$$

где x_i — значение величины X в i-м опыте; ν_i — частота значения x_i.

При вычислении выборочных среднего и дисперсии по сгруппированным данным пользуются формулами

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \nu_i a_i = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i^*, \tag{4.9}$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \nu_i a_i^2 - (m_x^*)^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 p_i^* - (m_x^*)^2, \tag{4.10}$$

где r — число интервалов группировки; a_i — середины интервалов. Такой подсчет вносит ошибку, особенно заметную при малом числе интервалов. Для ее уменьшения прибегают к поправкам Шеппарда. При равных интервалах h формулы для первых двух выборочных моментов с учетом поправок Шеппарда имеют вид:

$$\overline{m}_1^* = m_1^*, \quad \overline{m}_2^* = m_2^* - h^2/12.$$

Для выборочного начального момента порядка k [16]:

$$\overline{m}_k^* = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (2^{1-i} - 1) B_i m_{(k-i)}^* h^i, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где B_i — числа Бернулли.

Двумерное статистическое распределение случайной величины (X, Y) задается парами значений (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), причем основной интерес в данном случае представляют форма связи между X и Y и степень этой связи. Информацию об этом дает статистический корреляционный момент K_{xy}^* и статистический коэффициент корреляции R_{xy}^*:

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*), \quad R_{xy}^* = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x^* \sigma_y^*},$$

где m_x^*, m_y^*, σ_x^*, σ_y^* — выборочные средние и средние квадратические отклонения величин X и Y.

Выборочные значения и их функции интересны не сами по себе; они служат средством для получения статистических выводов.

При оценке параметров распределения совокупности по выборочным характеристикам предполагается, что теоретическое распределение известно, а неизвестны лишь его параметры — числовые характеристики. Оценка может быть точечной, когда она определяется одним числом, или интервальной, когда определяется двумя числами — концами интервала. В качестве точечных оценок может существовать много выборочных статистик — функций наблюдаемых значений. Чтобы оценка $\hat{\lambda}$ параметра λ имела практическую ценность, она должна обладать тремя главными свойствами: несмещенностью, состоятельностью и эффективностью.

Оценка называется несмещенной, если при любом объеме выборки

$$M[\hat{\lambda}] = \lambda, \tag{4.11}$$

где λ — истинное значение оцениваемого параметра. В противном случае она обладает смещением Δ_λ (систематической ошибкой), величина которого

$$\Delta_\lambda = M[\hat{\lambda}] - \lambda.$$

Оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при увеличении объема выборки:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\lambda - \lambda| < \varepsilon\} = 1, \tag{4.12}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Несмещенная состоятельная оценка называется эффективной, если при заданном объеме выборки n она имеет наименьшую дисперсию:

$$D_{\hat{\lambda}} = M[(\hat{\lambda} - \lambda)^2] = D_{\min} \leqslant M[(\lambda_i - \lambda)^2], \tag{4.13}$$

где $\hat{\lambda}$ — рассматриваемая оценка, λ_i — любая другая оценка.

При оценке одного параметра дисперсия оценки по выборке объема n не может быть меньше нижней границы (границы Рао — Крамера):

$$D_{\min} = \frac{1}{n}\left\{M\left[\left(\frac{\partial \ln p_1(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right]\right\}^{-1}, \tag{4.14}$$

где $p_1(X;\lambda)$ — плотность вероятности или в случае дискретной случайной величины X вероятность $P(X = x_i;\lambda)$.

Оценками математического ожидания m_x, дисперсии D_x, начальных и центральных моментов случайной величины X могут служить соответствующие выборочные характеристики (4.5)—(4.8). При увеличении числа наблюдений они сходятся по вероятности к соответствующим характеристикам величины X, причем оценки начальных моментов несмещенные и состоятельные, а оценки центральных моментов состоятельные, но смещенные. Поэтому за оценку дисперсии D_x предпочтительнее брать не статистическую дисперсию $D_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2$, а «исправленную» выборочную дисперсию

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2 = \frac{n}{n-1}D_x^*, \tag{4.15}$$

которая является несмещенной оценкой.

Для получения точечных оценок неизвестных параметров распределения практически используются четыре метода*): метод моментов, метод минимальной дисперсии оценки, метод максимальной апостериорной вероятности и метод максимального правдоподобия [22]. Из них наиболее часто применяются метод моментов и метод максимального правдоподобия.

При методе моментов выборочные моменты приравниваются к соответствующим моментам теоретического распределения, которые являются функциями от неизвестных оцениваемых параметров. В случае оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра.

Пусть, например, задан вид плотности вероятности $p_1(x;\lambda)$, определяемый одним параметром λ, и требуется найти оценку $\hat{\lambda}$ этого параметра. Следуя ме-

*) Оценки $\hat{\lambda}$, полученные разными методами, здесь обозначены одинаково, хотя они различны и совпадают лишь в частных или асимптотических случаях.

тоду моментов, приравняем первый теоретический момент $m_1(\lambda) = m_x(\lambda)$ первому выборочному моменту $m_1^* = m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$:

$$m_x(\lambda) = m_x^*. \qquad (4.16)$$

Решив это уравнение относительно λ, найдем оценку $\hat{\lambda}$, которая является функцией от выборочной средней и, следовательно, функцией выборочных значений:

$$\hat{\lambda} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При оценке k неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ следует найти первый, второй, .., k-й моменты распределения $p_1(x; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$:

$$m_j(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j p_1(x; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)\, dx, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

а затем соответствующие выборочные моменты:

$$m_j^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j$$

и приравнять их. Тогда получим систему k уравнений с k неизвестными:

$$m_j(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = m_j^*(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (4.17)$$

Решив систему (4.17), определим оценки неизвестных параметров.

Достоинством метода является его простота. Однако он содержит элемент произвола, так как, кроме моментов, можно рассматривать и другие характеристики (моду, медиану и т. д.). Оценки по методу моментов в смысле эффективности не являются «наилучшими» — в больших выборках они имеют не наименьшую дисперсию.

Метод максимального правдоподобия, как и два других метода, базируется на рассмотрении апостериорной (послеопытной) плотности вероятности:

$$p_{ps}(\lambda) = p(\lambda \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = k p_{pr}(\lambda) L(\lambda), \qquad (4.18)$$

где $k = p^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — коэффициент, зависящий от результатов выборки, но не зависящий от параметра λ; $p_{pr}(\lambda)$ — априорная (доопытная) плотность вероятности параметра λ; $L(\lambda) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n|\lambda)$ — функция правдоподобия.

Если плотность вероятности $p_1(x; \lambda)$ случайной величины X содержит один, подлежащий оценке параметр λ, то функция правдоподобия для этого параметра при независимой выборке объема n имеет вид

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p_1(x_i; \lambda). \qquad (4.19)$$

За оценку максимального правдоподобия параметра λ принимается такое его значение $\hat{\lambda}$, при котором $L(\lambda)$ достигает максимума, т. е. такая оценка является решением уравнения правдоподобия:

$$\left.\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = \frac{\partial \ln L(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} = 0. \qquad (4.20)$$

При оценке k неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ распределения $p_1(x; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ оценки определяются как решения системы уравнений

$$\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)/\partial \lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (4.21)$$

Оценки, полученные по этому методу, при довольно общих условиях являются состоятельными, асимптотически несмещенными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными. На практике этот метод иногда приводит к сложным системам уравнений.

Точечные оценки применяются прежде всего тогда, когда с их помощью нужно провести еще и другие расчеты. Такие оценки не несут информации о точности конкретной оценки. При малых выборках они случайны, а поэтому малонадежны. Точность и надежность оценки позволяют определить интервальные оценки.

Пусть из опыта получена несмещенная оценка $\hat{\lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра λ. Для разумного использования этой оценки на практике нужно знать вероятность того, что при данном объеме выборки n отклонение оценки $\hat{\lambda}$ от оцениваемого параметра λ не превысит границы $\delta > 0$:

$$P\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \delta\} = P\{-\delta < \hat{\lambda} - \lambda < \delta\} = P\{\hat{\lambda} - \delta < \lambda < \hat{\lambda} + \delta\} = \beta. \tag{4.22}$$

где δ — точность оценки; β — доверительная вероятность (надежность) того, что при данном n оценка $\hat{\lambda}$ будет иметь точность δ; $(\hat{\lambda} - \delta; \hat{\lambda} + \delta)$ — доверительный интервал. Величина β определяется конкретными условиями задачи и обычно выбирается равной 0,95, 0,99, 0,999. Задаваясь любыми двумя из величин δ, β, n, связанных соотношением (4.22), можно найти третью. Для этого нужно знать закон распределения оценки $\hat{\lambda}$, который в общем случае зависит от самих неизвестных параметров. Однако иногда удается перейти в (4.22) от $\hat{\lambda}$ к таким функциям выборочных значений, законы распределения которых зависят только от объема выборки n и закона распределения случайной величины X и не зависят от неизвестных параметров.

Если выборка объема n произведена из гауссовской генеральной совокупности с параметрами m_x и σ_x^2, то доверительные интервалы для оценок параметров с вероятностью β рассчитываются по следующим формулам.

1. Доверительный интервал для математического ожидания m_x при известной дисперсии σ_x^2 строится на основе выборочной функции $Z = (m_x^* - m_x)/\sigma_x$, имеющей стандартное нормальное распределение с параметрами $M(Z) = 0$, $D_z = 1$. В этом случае от формулы (4.22) приходим к выражению

$$m_x^* - z_\beta \sigma_x/\sqrt{n} < m_x < m_x^* + z_\beta \sigma_x/\sqrt{n}, \tag{4.23}$$

где $z_\beta = \delta_\beta \sqrt{n}/\sigma_x$ определяется из равенства $\Phi(z_\beta) = (1 + \beta)/2$ по таблице приложения II.

2. Доверительный интервал для математического ожидания m_x при неизвестной дисперсии σ_x^2 строится с использованием выборочной функции $T = (m_x^* - m_x)\sqrt{n}/s$, имеющей t-распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. В этом случае формула (4.22) приводит к выражению

$$m_x^* - t_{k,\,\alpha/2}\, s/\sqrt{n} < m_x < m_x^* + t_{k,\,\alpha/2}\, s/\sqrt{n}, \quad k = n-1, \tag{4.24}$$

где

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2,$$

$t_{k;\,\alpha} = \alpha$ — процентная точка t-распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы, определяемая по таблицам приложения IV из условия

$$P(t > t_{k;\,\alpha}) = \int_{t_{k;\,\alpha}}^{\infty} p_1(t)\, dt = \alpha = 1 - \beta; \quad t_{k,\,1-\alpha/2} = -t_{k;\,\alpha/2}.$$

3. Доверительный интервал для дисперсии σ_x^2 строится с использованием выборочной функции $\chi^2 = (n-1)\,s^2/\sigma_x^2$, имеющей χ^2-распределение Пирсона с $k = n-1$ степенями свободы, в соответствии с формулой

$$ks^2/\chi^2_{k;\,\alpha/2} < \sigma_x^2 < ks^2/\chi^2_{k;\,1-\alpha/2}, \tag{4.25}$$

где $\chi^2_{k;\,\alpha}$ — α — процентная точка χ^2-распределения Пирсона с $k = n-1$ степенями свободы, определяемая равенством

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{k;\,\alpha}\} = \int\limits_{\chi^2_{k;\,\alpha}}^{\infty} p_1(\chi^2)\,d\chi^2 = \alpha = 1-\beta.$$

Процентные точки χ^2-распределения приведены в приложении III. χ^2-распределение асимметрично, $\chi^2 \geqslant 0$. На практике обычно выбирают χ^2_1 и χ^2_2 так, чтобы $P\{\chi^2 > \chi^2_1\} = P\{\chi^2 < \chi^2_2\} = \alpha/2$.

Статистические гипотезы могут формулироваться или относительно неизвестных параметров известного распределения (параметрические гипотезы), или относительно неизвестного закона распределения (непараметрические гипотезы). Возможны и другие варианты гипотез.

При двухальтернативной ситуации, когда происходит одно из двух событий, рассматривают две гипотезы: исходную (нулевую или основную) H_0 и конкурирующую (альтернативную) H_1, которая противоречит H_0. Задача состоит в том, чтобы по результатам наблюдений принять одну из них. Из-за случайного характера явлений любое решение (выбор одной из гипотез) сопровождается ошибками двух видов. Ошибка первого рода возникает тогда, когда отвергается правильная гипотеза, а ошибка второго рода — когда принимается неправильная гипотеза.

Пусть наблюдаемое событие обусловлено одной из двух причин: Λ_0 (гипотеза H_0) или Λ_1 (гипотеза H_1); Γ — пространство всех возможных значений наблюдаемой величины X; Γ_0 — область принятия гипотезы H_0; Γ_1 — область отклонения гипотезы H_0 (критическая область); $p_0(x) = p(x|\Lambda_0)$, $p_1(x) = p(x|\Lambda_1)$ — условные плотности вероятности точки x пространства Γ; $P_{pr}(\Lambda_0) = p$, $P_{pr}(\Lambda_1) = q = 1-p$ — априорные вероятности Λ_0 и Λ_1; α — условная вероятность ошибки первого рода (уровень значимости критерия); β — условная вероятность ошибки второго рода; $(1-\beta)$ — мощность критерия; p_α и p_β — безусловные вероятности ошибок первого и второго рода; P_e — суммарная вероятность ошибки.

Тогда справедливы следующие сотношения:

$$\alpha = \int\limits_{\Gamma_1} p_0(x)\,dx, \qquad \beta = \int\limits_{\Gamma_0} p_1(x)\,dx, \tag{4.26}$$

$$p_\alpha = p\int\limits_{\Gamma_1} p_0(x)\,dx, \qquad p_\beta = q\int\limits_{\Gamma_1} p_1(x)\,dx, \tag{4.27}$$

$$P_e = p_\alpha + p_\beta = p\int\limits_{\Gamma_1} p_0(x)\,dx + q\int\limits_{\Gamma_0} p_1(x)\,dx, \quad q = 1-p. \tag{4.28}$$

В радиотехнических приложениях наиболее часто применяются два оптимальных правила решения: критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова — Зигерта) и критерий Неймана — Пирсона.

Критерий идеального наблюдателя применяется тогда, когда нет различия в значимости ошибок первого и второго рода и когда известны априорные вероятности каждой из гипотез, что характерно для радиосвязи. При этом критерии правило решения состоит в следующем:

$$\begin{aligned} &\text{если } l(x) \geqslant h, \quad \text{то принимается } H_1, \\ &\text{если } l(x) < h, \quad \text{то принимается } H_0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

где

$$l(x) = p_1(x)/p_0(x), \tag{4.30}$$

— отношение правдоподобия; $h = p/q$ — постоянный порог, который является решением уравнения

$$p_1(h)/p_0(h) = p/q. \tag{4.31}$$

Критерий идеального наблюдателя минимизирует вероятность полной ошибки

$$P_e = p\int_h^\infty p_0(x)\,dx + q\int_{-\infty}^h p_1(x)\,dx. \tag{4.32}$$

Критерий Неймана — Пирсона применяется в случаях, когда значимость ошибок α и β различна, а априорные вероятности гипотез неизвестны (характерно для задач радиолокации). При этом критерии оптимальным считается такое решение, когда при заданной ошибке первого рода минимизируется ошибка второго рода. Решение выносится на основании сравнения отношения правдоподобия $l(x)$ с порогом h:

$$l(x) = p_1(x)/p_0(x) \geqslant h. \tag{4.33}$$

Порог h определяется по наперед заданной ошибке первого рода

$$\alpha = \int_h^\infty p_0(x)\,dx. \tag{4.34}$$

Для проверки гипотезы H_0 о законе распределения генеральной совокупности обычно используют критерий согласия χ^2, при котором за меру расхождения теоретического и статистического распределений принимается величина (4.3), которая при $n \to \infty$ асимптотически распределена по закону χ^2 с $k = r - 1$ степенями свободы, независимо от распределения случайной величины X.

Критерий χ^2 для гипотезы H_0 с уровнем значимости α отвергает H_0, если вычисленное по выборке значение $\chi^2 > \chi^2_{k;\,\alpha}$, и принимает H_0, если $\chi^2 < \chi^2_{k;\,\alpha}$. Величина $\chi^2_{k;\,\alpha}$ определяется из условия

$$\int_{\chi^2_{k;\,\alpha}}^\infty p_1(\chi^2)\,d(\chi^2) = \alpha$$

по таблицам приложения III, при заданных k и α. Уровень значимости α наиболее часто выбирается равным 0,05 или 0,01.

При применении критерия χ^2 необходимо, чтобы величины n и ν_i были достаточно велики (рекомендуется $n > 5$, $\nu_i \geqslant 5$—8). Если число наблюдений в отдельных интервалах очень мало (одно-два наблюдения), то следует объединить некоторые интервалы.

2. ПРИМЕРЫ

4.1. Ошибки 15 измерений дальности до цели с помощью радиодальномера представлены таблицей

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ошибка x_i, м	18	—15	—5	6	—15	6	12	—5	—10	6	—5	—10	12	—10	—5

Требуется: 1) построить распределение выборки и статистическую функцию распределения $F_1^*(x)$; 2) определить выборочную среднюю m_x^* и выборочную дисперсию D_x^* ошибки измерения.

Решение. Вариационный ряд имеет вид: —15, —15, —10, —10, —10, —5, —5, —5, —5, 6, 6, 6, 12, 12,18. Он содержит шесть различных значений: —15, —10, —5, 6, 12, 18. Частоты ν_i этих значений равны соответственно: 2, 3, 4, 3, 2, 1.

1. Распределение выборки представим таблицей

x_i, м	—15	—10	—5	6	12	18
ν_i	2	3	4	3	2	1
$p_i^* = \nu_i/n$	2/15	3/15	4/15	3/15	2/15	1/15

Наименьшее значение ошибки измерения X равно —15. Следовательно, $F_1^*(x) = 0$ при $x \leqslant -15$. Значение $X < -10$, а именно $x_1 = -15$, наблюдалось два раза; поэтому $F_1^*(x) = 2/15$ при $-15 < x \leqslant -10$; при $-10 < x \leqslant -5$ $F_1^*(x) = 2/15 + 3/15 = 5/15$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим результаты, приведенные в таблице

x	$x \leqslant -15$	$-15 < x \leqslant -10$	$-10 < x \leqslant -5$	$-5 < x < 6$	$6 < x \leqslant 12$	$12 < x \leqslant 18$	$x > 18$
$F_1^*(x)$	0	2/15	5/15	9/15	12/15	14/15	1

График функции $F_1^*(x)$ показан на рис. 4.1.

2. Используя формулы (4.5а) и (4.6а), получаем:

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i \nu_i = \frac{-15\cdot 2 - 10\cdot 3 - 5\cdot 4 + \cdot 3 + 12\cdot 2 + 18\cdot 1}{15} = -\frac{4}{3} \text{ м},$$

$$D_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \nu_i - (m_x^*)^2 =$$

$$= \frac{225\cdot 2 + 100\cdot 3 + 25\cdot 4 + 36\cdot 3 + 144\cdot 2 + 324\cdot 1}{15} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \simeq 103 \text{ м}^2.$$

4.2. В течение 24 ч регистрирующее устройство контроля каждый час фиксирует напряжение сети. После первичной обработки данных получено распределение выборки в интервальной форме, приведенное в таблице

Интервалы, В	213—215	215—217	217—219	219—221	221—223
ν_i	1	3	6	10	4

Построить гистограмму выборки.

Решение. Из таблицы видно, что частичные интервалы одинаковы $h_i = h = 2$ В. Поэтому в соответствии с (4.2) получим:

$$p_1^*/h = 1/24 \cdot 2 = 0{,}0208, \quad p_2^*/h = 3/24 \cdot 2 = 0{,}0624,$$
$$p_3^*/h = 0{,}125, \quad p_4^*/h = 0{,}208, \quad p_5^*/h = 0{,}0834.$$

Для построения гистограммы отложим по оси абсцисс указанные в таблице частичные интервалы и на каждом из них построим прямоугольник высотой $p_i^*/h = p_i^*(u)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Например, над интервалом 219—221 прямоугольник имеет высоту 0,208. Гистограмма выборки изображена на рис. 4.2.

4.3. Генеральная совокупность распределена по нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ:

$$p_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(x-m)^2/2\sigma^2].$$

Вычислить по независимой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценки неизвестных параметров m и σ: 1) методом моментов; 2) методом максимального правдоподобия.

Решение. Одномерная нормальная плотность вероятности определяется двумя параметрами m и σ^2.

1. Параметры m и σ^2 представляют собой соответственно начальный момент первого порядка m_1 и центральный момент второго порядка m_2^0 : $m_1 = m$, $m_2^0 = D_x = \sigma^2$. Начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней $m_1^* = m_x^*$, а центральный момент второго порядка — выборочной дисперсии $m_2^{0*} = D_x^*$. Приравняв в соответствии с методом моментов соот-

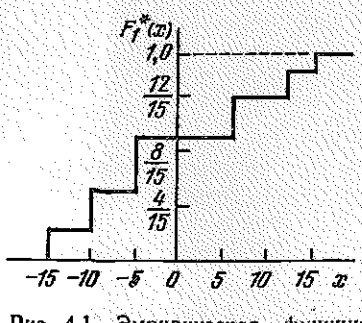


Рис. 4.1. Эмпирическая функция распределения

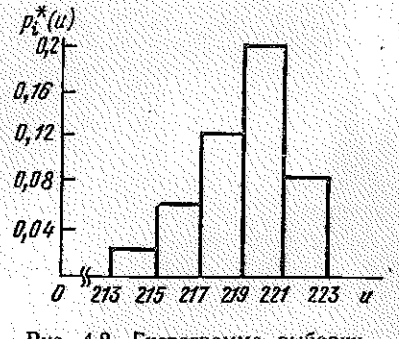


Рис. 4.2. Гистограмма выборки

ветствующие теоретические и выборочные моменты, получим оценки параметров нормального распределения:

$$\hat{m} = m_x^*, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{D_x^*}.$$

2. В соответствии с (4.19) функция правдоподобия имеет вид

$$L(m, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} p_1(x_i;\ m, \sigma) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \prod_{i=1}^{n} \exp[-(x_i - m)^2/2\sigma^2] =$$

$$= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2/2\sigma^2\right],$$

а логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln L(m, \sigma) = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2.$$

Используя формулу (4.21), получаем систему двух уравнений относительно m и σ^2:

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (x_i - m)^2}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nm \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = m_x^*,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2 = D_x^*.$$

В данном случае оценки, найденные по методу моментов и по методу максимального правдоподобия, совпадают. Они являются состоятельными, причем первая из них несмещенная, а вторая смещенная.

4.4. Произведено 16 независимых измерений случайной величины X, распределенной по нормальному закону. По выборке найдена выборочная средняя $m_x^* = 4{,}1$.

Оценить неизвестное математическое ожидание m_x случайной величины X по выборочной средней при помощи доверительного интервала с надежностью $\beta = 0{,}95$, если: 1) среднее квадратическое отклонение величины X известно и равно единице; 2) среднее квадратическое отклонение σ_x неизвестно, а выборочное среднее квадратическое отклонение величины X $s = 1$.

Решение. 1. По условию, $\beta = 0{,}95$. Следовательно, $\Phi(z_\beta) = (1 + \beta)/2 = (1 + 0{,}95)/2 = 0{,}975$. Из таблицы приложения II

находим значение $z_\beta = 1{,}96$, которому соответствует $\Phi(z_\beta) = 0{,}975$. Определим точность оценки $\delta_\beta = z_\beta \sigma_x / \sqrt{n} = 1{,}96/\sqrt{16} = 0{,}49$. В соответствии с формулой (4.23) при $m_x^* = 4{,}1$ доверительный интервал имеет доверительные границы:

$$m_x^* - 0{,}49 = 4{,}1 - 0{,}49 = 3{,}61, \quad m_x^* + 0{,}49 = 4{,}1 + 0{,}49 = 4{,}59.$$

Таким образом, значения неизвестного параметра m_x, согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству:

$$3{,}61 < m_x < 4{,}59.$$

2. Случайная величина $T = (m_x^* - m_x)\sqrt{n}/s$ подчиняется t-распределению Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Поэтому доверительный интервал строится по формуле (4.24).

По условию, $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$, $\alpha = 1 - \beta$, $\alpha/2 = (1 - \beta)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$.

Используя таблицы приложения IV, получаем: $t_{k;\,\alpha/2} = t_{15;\,0{,}025} = 2{,}131$.

Тогда доверительные границы равны

$$m_x^* - t_{k;\,\alpha/2} s/\sqrt{n} = 4{,}1 - 2{,}131 \cdot 1/4 \simeq 3{,}57,$$

$$m_x^* + t_{k;\,\alpha/2} s/\sqrt{n} = 4{,}1 + 2{,}131 \cdot 1/4 \simeq 4{,}63.$$

В данном случае с надежностью $\beta = 0{,}95$ неизвестный параметр заключен в доверительном интервале:

$$3{,}57 < m_x < 4{,}63.$$

4.5. Произведено четыре измерения дальности до неподвижной цели с помощью радиолокатора, в результате получены следующие данные: 2470, 2490, 2580, 2520 м.

Оценить точность радиолокатора при надежности оценки $\beta = 0{,}95$.

Решение. Определим выборочные характеристики m_x^* и s^2. По формулам (4.5) и (4.15) имеем:

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{2470 + 2490 + 2580 + 2520}{4} = 2515 \text{ м},$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2 = \frac{45^2 + 25^2 + 65^2 + 5^2}{3} = 2300 \text{ м}^2.$$

По таблице приложения III для $k = 3$, $\alpha/2 = (1 - \beta)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$ и $1 - \alpha/2 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$ находим

$$\chi^2_{k;\,\alpha/2} = \chi^2_{3;\,0{,}025} = 9{,}35, \quad \chi^2_{k;\,1-\alpha/2} = \chi^2_{3;\,0{,}975} = 0{,}216.$$

Границами доверительного интервала для дисперсии σ_x^2 являются:

$$\frac{ks^2}{\chi^2_{k;\,\alpha/2}} = \frac{3 \cdot 2300}{9{,}35} = 736, \quad \frac{ks^2}{\chi^2_{k;\,1-\alpha/2}} = \frac{3 \cdot 2300}{0{,}216} \approx 31\,900.$$

Тогда $736 \text{ м}^2 < \sigma_x^2 < 31900 \text{ м}^2$.

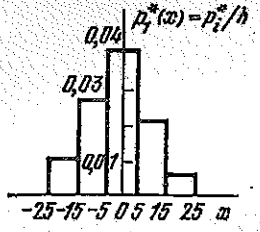


Рис. 4.3. Гистограмма выборки

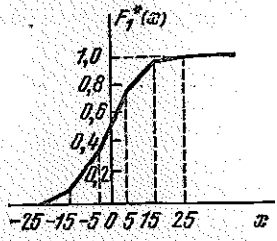


Рис. 4.4. Эмпирическая функция распределения

Оценка среднего квадратического отклонения

$$\sqrt{736} < \sigma_x < \sqrt{31900} \text{ или } 27{,}2 \text{ м} < \sigma_x < 178 \text{ м}.$$

Результат показывает, что для определения точности радиолокатора четырех измерений мало.

4.6. Ошибки 500 результатов измерений дальности до цели радиодальномером приведены в таблице

Интервал (h_i), м	—25; —15	—15; —5	—5; 5	5; 15	15; 25
Число ошибок в интервале v_i	50	130	200	100	20
Относительная частота p_i^*	0,10	0,26	0,40	0,20	0,04

Требуется: 1) построить гистограмму $p_1^*(x)$ и эмпирическую функцию распределения $F_1^*(x)$ ошибок измерения дальности; 2) аппроксимировать выборочное распределение с помощью нормального закона; 3) пользуясь критерием согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, проверить согласованность теоретического и эмпирического распределений.

Решение. 1. По условию, число интервалов $r = 5$, а длина интервалов $h = 10$ м. Используя формулы (4.2), (4.1), данные таблицы и методику, изложенную в примерах 4.2 и 4.1, строим гистограмму и функцию распределения $F_1^*(x)$, графики которых соответственно изображены на рис. 4.3 и 4.4.

2. По методу моментов заменим теоретические параметры m_x и σ_x^2 их выборочными характеристиками m_x^* и D_x^*. Последние определим по формулам (4.9) и (4.10):

$$m_x^* = \sum_{i=1}^{5} a_i p_i^* = -20 \cdot 0{,}1 - 10 \cdot 0{,}26 - 0 \cdot 0{,}40 + 10 \cdot 0{,}20 + 20 \cdot 0{,}04 = -1{,}8 \text{ м},$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{5} a_i^2 p_i^* - (m_x^*)^2 = 400 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}26 + 100 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 400 \cdot 0{,}04 - 3{,}24 = 98{,}76 \text{ м}^2, \quad \sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{98{,}76} \approx 9{,}93 \text{ м},$$

где a_i — середины интервалов: —20, —10, 0, 10, 20.

Тогда выражения оценок плотности вероятности и функции распределения будут иметь вид:

$$\hat{p}_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right] =$$

$$= (2\pi \cdot 98{,}76)^{-1/2} \exp\left[-(x+1{,}8)^2/2 \cdot 98{,}76\right],$$

$$\hat{F}_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \hat{p}_1(x)\,dx = \Phi\left(\frac{x+1{,}8}{9{,}93}\right).$$

3. Для определения меры расхождения (4.3) необходимо вычислить вероятности

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right),$$

где x_i, x_{i+1} — границы i-го интервала, а $\Phi(x)$ находится из таблицы приложения II. Так, например, для четвертого интервала (5; 15) имеем: $p_4 = \Phi\left(\frac{15+1{,}8}{9{,}93}\right) - \Phi\left(\frac{5+1{,}8}{9{,}93}\right) = 0{,}2012$. Результаты вычислений остальных вероятностей сведены в таблицу

h_i, м	—25; —15	—15; —5	—5; 5	5; 15	15; 25
p_i	0,0821	0,2818	0,3794	0,2012	0,0417

Подставив соответствующие значения в формулу (4.3), получим расхождение:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = 3{,}427.$$

Оценочными значениями заменены два параметра нормального распределения. Поэтому число степеней свободы $k = 5-1-2=2$. Из таблицы приложения III при $k = 2$, $\alpha = 0{,}01$ находим

$$\chi^2_{k;\,\alpha} = \chi^2_{2;\,0{,}01} = 9{,}21.$$

Так как $\chi^2 = 3{,}427 < \chi^2_{k;\,\alpha} = 9{,}21$, то гипотезу о том, что ошибка измерения распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

4.7. На вход радиоприемного устройства в некоторый фиксированный момент времени t воздействует случайное напряжение $X(t)$,

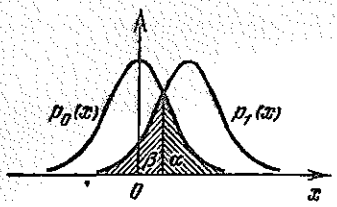


Рис. 4.5. Нормальные плотности вероятности и ошибки первого и второго рода

которое является либо суммой известного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$ (гипотеза H_1), либо одной помехой $n(t)$ (гипотеза H_0). Помеха $n(t)$— гауссовский стационарный шум с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией D. Априорные вероятности гипотез одинаковы: $p = q = 1/2$. В момент $t = t_1$ производится измерение величины $X(t)$.

Требуется: 1) построить правило решения; 2) вычислить условные вероятности ошибок первого и второго рода, а также полную вероятность ошибки.

Решение. При отсутствии сигнала $X = n$, поэтому

$$p_0(x) = (2\pi D)^{-1/2} \exp(-x^2/2D).$$

При наличии сигнала $X = s + n$. Следовательно,

$$p_1(x) = p_0(x - s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp[-(x - s)^2/2D].$$

1. В соответствии с (4.29) правило решения принимает вид

$$l(x) = p_1(x)/p_0(x) = \exp[-(s^2 - 2xs)/2D] \geqslant 1,$$

что эквивалентно (после логарифмирования) неравенству $x \geqslant s/2$.

Таким образом, принимается решение о наличии сигнала (H_1), если измеренное значение $x \geqslant s/2$ (область Γ_1); при $x < s/2$ (область Γ_0) констатируется отсутствие сигнала (H_0).

2. По формулам (4.26) и (4.28) находим вероятности ошибок:

$$\alpha = \int_{s/2}^{\infty} p_0(x)\,dx = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D}),$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{s/2} p_1(x)\,dx = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D}),$$

$$P_e = \alpha p + \beta q = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D}),$$

где $\Phi(x)$ определяется по таблице приложения II.

Графики плотностей вероятностей, а также ошибки α и β показаны на рис. 4.5.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

4.1. В результате пяти измерений физической величины X одним прибором, который не имеет систематической ошибки, получены следующие результаты: 92; 94; 103; 105; 106.

Определить: а) выборочную среднюю m_x^* измеряемой величины; б) выборочную D_x^* и исправленную s^2 дисперсии ошибок прибора

Ответ: а) $m_x^* = 100$; б) $D_x^* = 34$, $s^2 = 42{,}5$.

4.2. Из 100 транзисторов в среднем бывает два бракованных. Проверено десять партий по 100 транзисторов в каждой. Отклонения числа бракованных транзисторов от среднего приведены в таблице

Номер партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение от среднего	—1	0	1	1	—1	1	0	—2	2	1

Построить распределение выборки, эмпирическую функцию распределения $F_1^*(x)$ и гистограмму выборки.

Ответ:

x_i	—2	—1	0	1	2
ν_i	1	2	2	4	1
p_i^*	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ 0{,}1, & -2 < x \leqslant -1, \\ 0{,}3, & -1 < x \leqslant 0, \\ 0{,}5, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}9, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.3. Построить гистограмму по распределению выборки, представленную таблицей

Интервалы	0—2	2—4	4—6
ν_i	20	30	50

Ответ: $p_1^*/h = 0{,}2/2 = 0{,}1$, $p_2^*/h = 0{,}15$, $p_3^*/h = 0{,}25$.

4.4. Отобраны случайно 200 однотипных радиостанций. Время их работы до первого отказа характеризуется таблицей

Срок службы радиостанции до первого отказа, ч	900—1100	1100—1300	1300—1500
Количество радиостанций	10	120	70

Вычислить выборочные средние m_t^*, дисперсию D_t^* и среднее квадратическое отклонение σ_t^* срока службы радиостанций до первого отказа.

Ответ: $m_t^* = 1260$ ч, $D_t^* = 12\,400$ ч^2, $\sigma_t^* = 111{,}4$ ч.

4.5. Измерительным прибором, практически не имеющим систематической ошибки, было произведено пять независимых измерений, результаты которых представлены в таблице

Номер измерения	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Определить: а) выборочную дисперсию ошибки измерения, если измеряемая величина точно известна и равна 2800; б) выборочное среднее, выборочную дисперсию и ее несмещенную оценку, если точное значение измеряемой величины неизвестно.

Ответ: а) $D_x^* = 1287{,}8$; б) $m_x^* = 2809$; $D_x^* = 1206{,}8$; $s^2 = 1508{,}5$.

4.6. Показать, что оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, рассчитанные по методу моментов для параметров α и β гамма-распределения

$$p_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\, x^{\alpha} e^{-x/\beta}, \quad x > 0,$$

определяются выражениями:

$$\hat{\alpha} = (m_x^*/s)^2 - 1, \quad \hat{\beta} = s^2/m_x^*,$$

где

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2;$$

x_i — выборочное значение; n — объем выборки.

4.7. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид: $p_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0 < x < 1$ (бета-распределение).

Вычислить по методу моментов оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров распределения a и b.

Ответ. $\hat{a} = \frac{m_x^* \hat{b}}{1 - m_x^*}$, $\hat{b} = \frac{1 - m_x^*}{s^2}\,[m_x^*(1 - m_x^*) - s^2]$.

4.8. Определить методом максимального правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

если в n_1 независимых испытаниях событие A появилось m_1 раз и в n_2 независимых испытаниях — m_2 раз.

Ответ: $\hat{p} = (m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$.

4.9. Выборка объемом n извлечена из совокупности с показательным распределением $p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Найти оценку $\hat{\lambda}$ максимального правдоподобия для параметра λ.

Ответ: $\hat{\lambda} = 1/m_x^*$.

4.10. Произведена выборка объемом $n = 100$ из большой партии однотипных радиоламп. Средний срок службы радиолампы выборки оказался равным 5000 ч.

Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего срока службы радиолампы во всей партии, если среднее квадратическое отклонение срока службы составляет 40 ч.

Ответ: $4992{,}16 \text{ ч} < m_t < 5007{,}84 \text{ ч}$

4.11. Каков должен быть минимальный объем выборки n, чтобы с надежностью 0,98 точность оценки математического ожидания m генеральной совокупности с помощью выборочного среднего была равна 0,2, если среднее квадратическое значение совокупности $\sigma = 1{,}5$?

Ответ: $n = 306$.

4.12. Средняя квадратическая ошибка радиовысотомера $\sigma = 15$ м.

Сколько потребуется таких высотомеров, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты m_x^* была больше — 30 м, если ошибки радиовысотомеров имеют нормальное распределение, а систематические ошибки отсутствуют?

Ответ: не менее двух.

4.13. Случайный радиосигнал распределен по нормальному закону, причем его среднее значение неизвестно, а дисперсия $\sigma^2 = 1 \text{ В}^2$. Произведено 100 измерений сигнала, по которым определено значение выборочного среднего $m_x^* = 1{,}5$ В.

Определить величину доверительной вероятности β, с которой может быть гарантирована предельная погрешность измерения среднего значения сигнала $\delta = 0{,}2$.

Ответ: $\beta = 0{,}954$.

4.14. Распределение выборки объемом $n = 10$ задано таблицей

x_i	—	1	·	3	4	5
v_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание m_x случайной величины X, распределенной по нормальному закону, по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Ответ: $0{,}3 < m_x < 3{,}7$.

4.15. Произведено десять независимых измерений случайной величины X, подчиненной нормальному закону с неизвестными параметрами m_x и σ_x. Результаты измерений представлены в таблице:

Номер измерения, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат измерения	2,5	2	—2,3	1,9	—2,1	2,4	2,3	—2,5	1,5	—1,7

Найти оценку m_x^* для математического ожидания и построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$.

Ответ: $m_x^* = 0{,}4$; $-1{,}18 < m < 1{,}98$.

4.16. Произведено 12 измерений напряжения радиосигнала одним и тем же прибором, не имеющим систематической ошибки, причем выборочное среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок оказалось равным 0,6 В.

Найти точность прибора с надежностью 0,99.

Ответ: 0,39 В $< \sigma <$ 1,24 В.

4.17. На контрольных испытаниях 16 радиоламп были определены выборочные характеристики их срока службы, которые оказались равными $m_x^* = 3000$ ч и $s = 20$ ч.

Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить: а) доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности 0,9; б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения m_x не превзойдет 10 ч, а ошибка в определении σ_x будет меньше 2 ч?

Ответ: а) 2991,235 ч $< m_x <$ 3008,765 ч, 15,50 ч $< \sigma_x <$ $<$ 28,74 ч; б) 0,93; 0,41.

4.18. На телефонной станции производилась регистрация числа неправильных соединений x_i в минуту. Результаты наблюдений приведены в таблице

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
ν_i	8	17	16	10	6		0	1

Требуется: а) определить выборочные характеристики m_x^* и s^2 и проверить выполнение основного условия для распределения Пуассона; б) найти теоретическое распределение Пуассона и проверить степень соответствия теоретического и эмпирического распределений по критерию χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Ответ: а) $m_x^* \simeq s^2 = 2$, т. е. условие для закона Пуассона практически выполняется; б) $\chi^2 = 0{,}2 < \chi^2_{4;\ 0.05} = 9{,}5$.

4.19. Произведены испытания 500 радиоприемников на их чувствительность. Данные отклонений чувствительности от номинала указаны в таблице

Интервалы чувствительности, мкВ	$-4; -3$	$-3; -2$	$-2; -1$	$-1; 0$	$0; 1$	$1; 2$	$2; 3$	$3, 4$
ν_i	6	25	72	133	120	88	46	10

Проверить по критерию χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу H_0 о том, что результаты испытаний подчиняются нормальному распределению.

Ответ: $\chi^2 = 3{,}94 < \chi^2_{5;\ 0{,}01} = 15{,}1$.

4.20. Испытания 200 радиоламп на их срок службы дали результаты, приведенные в таблице

Срок службы, ч	300—400	400—500	500—600	600—700	700—800	800—900	900—1000	1000—1100	1100—1200
ν_i	6	12	18	33	40	52	29	14	4

Требуется: 1) установить теоретический закон распределения срока службы радиоламп и найти его параметры; 2) написать выражения для плотности вероятности $\hat{p}_1(x)$ и функции распределения $\hat{F}_1(x)$; 3) пользуясь критерием χ^2, установить, согласуются ли данные испытаний с гипотезой о распределении случайной величины по избранному теоретическому закону.

Ответ: 1) закон распределения нормальный с параметрами $m = m_x^* = 784$ ч, $\sigma^2 = 26\,844$ ч^2, $\sigma = 163{,}8$ ч;

2) $\hat{p}_1(x) = \dfrac{1}{163{,}8\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-784)^2}{53688}\right]$, $\hat{F}_1(x) = \Phi\left(\dfrac{x-784}{163{,}8}\right)$;

3) согласуются.

Раздел II

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Случайный процесс $\xi(t)$, зависящий от одного действительного параметра t (времени), считается определенным на интервале времени $(0, T)$, если при произвольном числе n и для любых моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ на этом интервале известна n-мерная плотность распределения вероятностей $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ или n-мерная характеристическая функция

$$\Theta_n(jv_1, jv_2, \ldots, jv_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\left\{\prod_{i=1}^{n} \exp(jv_i\xi_i)\right\} =$$

$$= \int\ldots\int p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \exp(jv_1\xi_1 + jv_2\xi_2 + \ldots + jv_n\xi_n) \times$$

$$\times d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{5.1}$$

где $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$, ..., $\xi_n = \xi(t_n)$.

Плотность распределения вероятностей должна удовлетворять следующим условиям [1, 14, 27]:

1) условию положительной определенности:

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \geqslant 0; \tag{5.2}$$

2) условию нормировки:

$$\int\ldots\int p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = 1; \tag{5.3}$$

3) условию симметрии: функция $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ должна быть симметричной относительно своих аргументов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т. е. не должна изменяться при любой перестановке этих аргументов;

4) условию согласованности: при любом $m < n$

$$p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t_1, t_2, \ldots, t_m) = \int\ldots\int p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n;$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)\, d\xi_{m+1} \ldots d\xi_n. \tag{5.4}$$

Поскольку характеристическая функция (5.1) является преобразованием Фурье от соответствующей плотности распределения вероятностей, то для нее также справедливо условие симметрии, а условия нормировки (5.3) и согласованности (5.4) принимают вид

$$\Theta_n(0, 0, \ldots, 0) = 1, \tag{5.5}$$

$$\Theta_m(jv_1, jv_2, \ldots, jv_m; t_1, t_2, \ldots, t_m) =$$

$$= \Theta_n(jv_1, jv_2, \ldots, jv_m, 0, \ldots, 0; t_1, t_2, \ldots, t_m). \tag{5.6}$$

Многомерные плотности распределения вероятностей являются наиболее полными характеристиками случайных процессов. Однако в ряде случаев для решения практически важных задач оказывается достаточным рассмотрение более простых характеристик, в частности моментных функций [28. 29].

Под моментными функциями случайного процесса $\xi(t)$, заданного на некотором интервале, понимаются функции $m_{\nu_1}(t)$, $m_{\nu_1, \nu_2}(t_1, t_2)$, ..., $m_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, симметричные относительно всех своих аргументов, определяемые соотношениями

$$m_{\nu_1}(t) = M\{\xi^{\nu_1}(t)\} = \int \xi^{\nu_1} p_1(\xi; t)\, d\xi, \tag{5.7}$$

$$m_{\nu_1, \nu_2}(t_1, t_2) = M\{\xi^{\nu_1}(t_1)\, \xi^{\nu_2}(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{5.8}$$

. . . . . .

$$m_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\{\xi^{\nu_1}(t_1)\, \xi^{\nu_2}(t_2) \ldots \xi^{\nu_n}(t_n)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} \ldots \xi_n^{\nu_n} p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{5.9}$$

Моментная функция $m_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, зависящая от n несовпадающих аргументов $t_1, t_2, \ldots, t_n$, называется n-мерной начальной моментной функцией ν-го ($\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$) порядка.

Одномерная начальная моментная функция первого порядка

$$m_1(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_1(\xi; t)\, d\xi = m_\xi(t) \tag{5.10}$$

называется математическим ожиданием случайного процесса $\xi(t)$. Помимо этой характеристики, широко используется также двумерная начальная моментная функция второго порядка

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 \times$$

$$\times\, p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = K_\xi(t_1, t_2), \tag{5.11}$$

называемая ковариационной функцией случайного процесса $\xi(t)$.

Вместо моментных функций $m_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ можно рассматривать n-мерные центральные моментные функции ν-го порядка, которые определяются соотношением

$$m^0_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)]^{\nu_1} [\xi(t_2) -$$

$$- m_\xi(t_2)]^{\nu_2} \ldots [\xi(t_n) - m_\xi(t_n)]^{\nu_n}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - m_\xi(t_1)]^{\nu_1} \times$$

$$\times [\xi_2 - m_\xi(t_2)]^{\nu_2} \ldots [\xi_n - m_\xi(t_n)]^{\nu_n} p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{5.12}$$

Двумерная центральная моментная функция второго порядка

$$m^0_{1,1}(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - m_\xi(t_1)] \times$$

$$\times [\xi_2 - m_\xi(t_2)]\, p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = R_\xi(t_1, t_2) \qquad (5.13)$$

называется корреляционной функцией случайного процесса $\xi(t)$.

Полагая в (5.13) $t_1 = t_2 = t$, получаем следующее значение одномерной центральной моментной функции второго порядка:

$$m^0_{1,1}(t) = M\{[\xi(t) - m_\xi(t)]^2\} = M\{[\xi_0(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - m_\xi(t)]^2 \times$$

$$\times p_1(\xi; t)\, d\xi = m_2(t) - m_\xi^2(t) = K_\xi(t, t) - m_\xi^2(t) = R_\xi(t, t) = D_\xi(t). \qquad (5.14)$$

Здесь через $\xi_0(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ обозначен центрированный случайный процесс. Таким образом, выражение (5.14) определяет дисперсию случайного процесса $\xi(t)$. Корень квадратный из дисперсии $D_\xi(t)$ называется средним квадратическим отклонением $\sigma_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t)$:

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)} = \sqrt{M\{[\xi(t) - m_\xi(t)]^2\}}. \qquad (5.15)$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ задан n-мерной характеристической функцией, моментные функции удобно вычислять путем ее дифференцирования. Используя определение характеристической функции (5.1) и раскладывая экспоненциальную функцию $\exp(z)$ в ряд Тейлора, можно показать, что для n-мерной начальной моментной функции справедливо соотношение [1,14]

$$m_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = j^{-(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n}}{\partial v_1^{\nu_1}\, \partial v_2^{\nu_2} \ldots \partial v_n^{\nu_n}} \Theta_n(jv_1, jv_2, \ldots, jv_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \right]_{v_i = 0}. \qquad (5.16)$$

Корреляционные функции $R_1(t_1)$, $R_2(t_1, t_2)$, ..., $R_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ определяются разложением в ряд Маклорена логарифма многомерных характеристических функций. Можно показать [1,28], что для первых трех корреляционных функций справедливы соотношения:

$$R_1(t) = m_1(t) = M\{\xi(t)\},$$

$$R_2(t_1, t_2) = m^0_{1,1}(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_1(t_1)] \times$$

$$\times [\xi(t_2) - m_1(t_2)]\} = m_{1,1}(t_1, t_2) - m_1(t_1)\, m_1(t_2) =$$

$$= K(t_1, t_2) - m_1(t_1)\, m_1(t_2),$$

$$R_3(t_1, t_2, t_3) = m_{1,1,1}(t_1, t_2, t_3) - m_1(t_1) \times$$

$$\times R_2(t_2, t_3) - m_1(t_2)\, R_2(t_1, t_3) - m_1(t_3)\, R_2(t_1, t_2) + \qquad (5.17)$$

$$+ 2m_1(t_1)\, m_1(t_2)\, m_1(t_3)$$

По моментным и корреляционным функциям можно восстановить характеристическую функцию и, следовательно, плотность распределения вероятностей [26]:

$$\Theta_n(jv_1, jv_2, \ldots, jv_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$

$$= 1 + j\sum_{\mu=1}^{n} m_1(t_\mu)\, v_\mu + \frac{1}{2!}\, j^2 \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} m_{1,1}(t_\mu, t_\nu)\, v_\mu v_\nu +$$

$$+ \frac{1}{3!}\, j^3 \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} m_{1,1,1}(t_\mu, t_\nu, t_\lambda)\, v_\mu v_\nu v_\lambda + \ldots,$$

$$\Theta_n(j v_1,\ j v_2,\ \ldots,\ j v_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) = \exp\left[j \sum_{\mu=1}^{n} R_1(t_\mu)\, v_\mu + \right.$$

$$+ \frac{1}{2!} j^2 \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} R_2(t_\mu,\ t_\nu)\, v_\mu\, v_\nu + \frac{1}{3!} j^3 \times$$

$$\left. \times \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} R_3(t_\mu,\ t_\nu,\ t_\lambda)\, v_\mu\, v_\nu\, v_\lambda + \ldots \right]. \qquad (5.18)$$

Для гауссовского случайного процесса, часто встречающегося в различных радиофизических задачах, плотность распределения вероятностей и характеристическая функция определяются формулами [26]:

$$p_n(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n;\ t_1, t_2,\ \ldots,\ t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Delta_{\mu\nu} [\xi_\mu - m_\xi(t_\mu)]\, [\xi_\nu - m_\xi(t_\nu)] \right\}, \qquad (5.19)$$

$$\Theta_n(j v_1,\ j v_2,\ \ldots,\ j v_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) =$$

$$= \exp\left[j \sum_{\mu=1}^{n} m_\xi(t_\mu)\, v_\mu + \frac{1}{2} j^2 \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} R_\xi(t_\mu,\ t_\nu)\, v_\mu\, v_\nu \right]. \qquad (5.20)$$

Здесь $m_\xi(t_\mu)$ — математическое ожидание случайной величины $\xi_\mu = \xi(t_\mu)$, $\Delta = \| R_\xi(t_\mu,\ t_\nu) \|$ — определитель n-го порядка, составленный из значений $R_\xi(t_\mu,\ t_\nu)$ корреляционных функций $R_\xi(t_1,\ t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\}$ при $t_1 = t_\mu$ и $t_2 = t_\nu$, $\Delta_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $R_\xi(t_\mu,\ t_\nu)$ этого определителя.

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле, если все его плотности распределения вероятностей $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ произвольного порядка n не меняются при одновременном сдвиге всех точек $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ вдоль оси времени на любое τ. Стационарным в широком смысле называется случайный процесс $\xi(t)$, математическое ожидание $M\{\xi(t)\}$ которого не зависит от времени, т. е. $M\{\xi(t)\} = m_\xi(t) = m_\xi$, а корреляционная функция $R_\xi(t_\mu,\ t_\nu)$ зависит лишь от разности $\tau_{\mu\nu} = |t_\mu - t_\nu|$ между двумя рассматриваемыми моментами времени. Для гауссовского процесса оба эти понятия стационарности совпадают, поскольку стационарный гауссовский процесс полностью определяется математическим ожиданием и корреляционной функцией и для его плотности распределения вероятностей и характеристической функции справедливы соотношения

$$p_n(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 D} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} D_{\mu\nu} (\xi_\mu - m)(\xi_\nu - m) \right], \qquad (5.21)$$

$$\Theta_n(j v_1,\ j v_2,\ \ldots,\ j v_n) =$$

$$= \exp\left[j m \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu + \frac{1}{2} j^2 \sigma^2 \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} r(\tau_{\mu\nu})\, v_\mu\, v_\nu \right]. \qquad (5.22)$$

где m — математическое ожидание; $\sigma^2 = D = R(0)$ — дисперсия процесса $\xi(t)$; $D = \|r(\tau_{\mu\nu})\|$ — определитель n-го порядка, составленный из коэффициентов корреляции

$$r(\tau_{\mu\nu}) = r(|t_\mu - t_\nu|) = \sigma^{-2} R(|t_\mu - t_\nu|) = \sigma^{-2} M\{[\xi(t_\mu) - m][\xi(t_\nu) - m]\}.$$

Применительно к двумерному случаю формулы (5.21) и (5.22) принимают вид

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2|1-r^2(\tau)|}\times\right.$$

$$\left.\times|(\xi_1-m)^2 - 2r(\tau)(\xi_1-m)(\xi_2-m) + (\xi_2-m)^2|\right\}, \qquad (5.23)$$

$$\Theta_2(jv_1, jv_2) = \exp\left\{jm(v_1+v_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sigma^2[v_1^2 + 2r(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\}, \quad \tau = t_2 - t_1. \qquad (5.24)$$

Среди различных задач статистической радиотехники весьма часто встречаются задачи, связанные с линейным или нелинейным преобразованием случайных процессов. В ряде случаев успешное их решение связано с возможностью представления плотностей распределения вероятностей случайных процессов в виде быстро сходящегося ряда, члены которого выражаются через табулированные функции. Некоторые из таких разложений, базирующихся на представлении соответствующих плотностей распределения в виде ряда по ортогональным полиномам, рассмотрены в работах [6, 26, 30, 32, 34].

2. ПРИМЕРЫ

5.1. Найти одномерную $p_1(\xi; t)$ и двумерную $p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ плотности распределения вероятностей процесса

$$\xi(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t,$$

где ω — постоянная угловая частота; α и β — взаимно независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_\alpha = m_\beta = 0$ и дисперсиями $D_\alpha = D_\beta = \sigma^2$.

Решение [35]. Случайная величина $\xi = \xi(t)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин и в силу этого также является гауссовской. Таким образом, для определения плотностей распределения вероятностей $p_1(\xi; t)$ и $p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ процесса $\xi(t)$ необходимо определить его математическое ожидание $m_\xi(t)$ и корреляционную функцию $R_\xi(t_1, t_2)$.

В соответствии с (5.10)

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = M\{\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t\} =$$
$$= M\{\alpha\}\cos\omega t + M\{\beta\}\sin\omega t.$$

Поскольку по условию $M\{\alpha\} = m_\alpha = 0$, $M\{\beta\} = m_\beta = 0$, то

$$m_\xi(t) = 0.$$

При этом для корреляционной функции (5.13) получаем

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{[\alpha\cos\omega t_1 + \beta\sin\omega t_1] \times$$
$$\times [\alpha\cos\omega t_2 + \beta\sin\omega t_2]\}.$$

Учитывая, что по условию $M\{\alpha\beta\} = M\{\beta\alpha\} = 0$, окончательно получаем

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + \sigma^2 \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 = \\ = \sigma^2 \cos\omega(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau),\ \tau = t_2 - t_1$$

Таким образом, искомые плотности распределения вероятностей имеют вид

$$p_1(\xi; t) = p_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = p_2(\xi_1, \xi_2) = \\ = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}} \exp\left[-\frac{\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2\cos\omega\tau + \xi_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}\right].$$

5.2. Стационарный случайный процесс

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = m_\xi = 0$ задан одномерной плотностью распределения вероятностей $p_1(\xi) = p_\xi(\xi)$. Предполагается, что ω_0 есть априори известная постоянная частота, стационарный случайный процесс $A(t)$ может принимать только положительные значения, а $\varphi(t)$ представляет собой случайную фазу, равномерно распределенную на интервале $(-\pi, \pi)$. При этом функция $p_\xi(\xi)$ связана с одномерной плотностью распределения вероятностей $p_A(A)$ процесса $A(t)$ соотношением (см. задачу 5.4)

$$p_\xi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty} \frac{p_A(A)}{\sqrt{A^2 - \xi^2}}\, dA. \qquad (5.25)$$

Определить обратную зависимость, т. е. найти выражение для $p_A(A)$, при котором одномерная плотность распределения вероятностей $p_\xi(\xi) = p_1(\xi)$ будет иметь заданный вид.

Решение [40]. Производя в (5.25) замену переменных: $\xi^2 = x^{-2}$ и $A^2 = \lambda^{-2}$, получаем уравнение

$$\frac{\pi}{x} p_\xi\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^x \frac{p_A(1/\lambda)}{\lambda\sqrt{x^2 - \lambda^2}}\, d\lambda. \qquad (5.26)$$

Это соотношение относится к классу приводимых к уравнению Абеля, и для него существуют следующие формулы обращения:

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}},\quad u(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{xf(x)\,dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}. \qquad (5.27)$$

Используя (5.27), уравнение (5.26) можно привести к виду

$$\frac{1}{\lambda} p_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 2 \frac{d}{d\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{p_\xi\left(\frac{1}{x}\right) dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}. \tag{5.28}$$

Переходя в (5.28) к старым переменным, получаем выражение, определяющее искомую плотность распределения вероятностей:

$$p_A(A) = 2A \frac{d}{dA} \left[A \int_{\infty}^{A} \frac{p_\xi(\xi)\, d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - A^2}} \right]. \tag{5.29}$$

Выражение (5.29) можно упростить, предварительно вычислив путем интегрирования по частям входящий в него интеграл:

$$\int_a^A \frac{p_\xi(\xi)\, d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - A^2}} = -\frac{1}{A} \left[\left(\arccos \frac{A}{a} \right) p_\xi(a) + \int_a^A \left(\arccos \frac{A}{\xi} \right) p'_\xi(\xi)\, d\xi \right]. \tag{5.30}$$

Подставляя (5.30) в (5.29), окончательно находим

$$p_A(A) = 2A \int_{\infty}^{A} \frac{p'_\xi(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - A^2}}\, d\xi, \tag{5.31}$$

где $p'_\xi(\xi) = dp_\xi(\xi)/d\xi$.

Соотношение (5.31) определяет одномерную плотность распределения вероятностей $p_A(A)$ функции $A(t)$ в стационарном случайном процессе $\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ с постоянной априори известной частотой ω_0 и случайной фазой $\varphi(t)$, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, при которой мгновенные значения процесса $\xi(t)$ характеризуются заданной одномерной плотностью распределения вероятностей $p_\xi(\xi)$.

Подобного рода задачи часто встречаются на практике при моделировании случайных колебаний вида $\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ с помощью средств вычислительной техники в процессе исследования статистической динамики различных радиотехнических систем и устройств [40].

5.3. Найти двумерную плотность распределения вероятностей $p_2(\xi_1, \xi_2)$ стационарного случайного процесса

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m и ω_0 — постоянные амплитуда и угловая частота; φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$. Двумерная характеристическая функция $\Theta_2(jv_1, jv_2)$ процесса $\xi(t)$ имеет вид [36]

$$\Theta_2(jv_1, jv_2) = M\{\exp(jv_1\xi_1 + jv_2\xi_2)\} = J_0(A_m\sqrt{v_1^2 + 2v_1v_2\cos\omega_0\tau + v_2^2}),$$

где $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$, $\tau = t_2 - t_1$, $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение [37]. В соответствии с (5.1) можем написать

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_2(jv_1, jv_2) \exp(-jv_1\xi_1 - jv_2\xi_2)\, dv_1\, dv_2.$$

Подставляя сюда $\Theta_2(jv_1, jv_2)$ и используя теорему сложения для бесселевых функций [38]:

$$J_0(A\sqrt{\Omega_1^2 + 2\Omega_1\Omega_2\cos\omega\tau + \Omega_2^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_k J_k(A\Omega_1) \times$$

$$\times J_k(A\Omega_2)\cos k\omega\tau,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 2 & \text{при } k \geqslant 1 \end{cases}$$

— множитель Неймана, находим

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_k \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_k(A_m v_1) e^{-jv_1\xi_1}\, dv_1\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_k(A_m v_2) e^{-jv_2\xi_2}\, dv_2\right] \cos k\omega_0\tau.$$

Производя замену переменных $\lambda_1 = A_m v_1$, $\lambda_2 = A_m v_2$ и пользуясь интегральным представлением функций

$$\Psi_k^{(k)}(z) = \frac{1}{2}(j)^k \int_{-\infty}^{\infty} J_k(\lambda) e^{-j\lambda z}\, d\lambda,$$

получаем

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pi A_m)^{-2} \Psi_k^{(k)}\left(\frac{\xi_1}{A_m}\right) \Psi_k^{(k)}\left(\frac{\xi_2}{A_m}\right) \cos k\omega_0\tau.$$

Функции $\Psi_k^{(k)}(z)$ могут быть выражены через полиномы Чебышева $T_k(z)$:

$$\Psi_k^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{-1/2} T_k(z),$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2}\left[(z + j\sqrt{1 - z^2})^k + (z - j\sqrt{1 - k^2})^k\right].$$

При этом имеем

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = p_1(\xi_1) p_1(\xi_2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k T_k\left(\frac{\xi_1}{A_m}\right) T_k\left(\frac{\xi_2}{A_m}\right) \cos k\omega_0\tau,$$

где

$$p_1(\xi) = 1/\pi\sqrt{A_m^2 - \xi^2}, \quad \xi < A_m.$$

Таким образом, полученное выражение для $p_2(\xi_1, \xi_2)$ дает разложение двумерной плотности распределения вероятностей гармонического колебания со случайной начальной фазой в ряд по ортогональным полиномам Чебышева.

3 ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

5.1. Найти одномерную плотность распределения вероятностей процесса $\xi(t) = \alpha + \beta t$, где α и β — взаимно независимые случайные величины с плотностями распределения вероятностей $p_\alpha(\alpha)$ и $p_\beta(\beta)$.

Ответ [35]: $p_1(\xi; t) = \dfrac{1}{|t|} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\xi - \beta)\, p_\beta\left(\frac{\beta}{t}\right) d\beta.$

5.2. Случайный процесс $\xi(t)$ задан в виде $\xi(t) = b + Vt$, где b — известная постоянная; V — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием m_v и дисперсией $D_v = \sigma_v^2$.

Найти плотность распределения вероятностей $p_1(\xi)$ случайного процесса $\xi(t)$, его математическое ожидание m_ξ и дисперсию D_ξ.

Ответ $p_1(\xi) = p_1(\xi; t) = \dfrac{1}{|t|\sigma_v\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{|\xi - (m_v t + b)|^2}{t^2 \sigma_v^2}\right\},$

$$m_\xi = m_\xi(t) = m_v t + b, \quad D_\xi = D_\xi(t) = \sigma_v^2 t^2.$$

5.3. Найти одномерную характеристическую функцию гауссовского процесса $\xi(t)$, имеющего плотность распределения вероятностей

$$p_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Ответ: $\Theta_\xi(jv) = \exp\left(jmv - \dfrac{1}{2}\sigma^2 v^2\right).$

5.4. Найти одномерную плотность распределения вероятностей случайного сигнала

$$\xi(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

у которого случайные функции $A(t) > 0$ и $\varphi(t)$ предполагаются независимыми в один и тот же момент времени, причем случайная фаза $\varphi(t)$ считается распределенной равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, а огибающая $A(t)$ имеет плотность распределения вероятностей $p_A(A)$.

Ответ: $p_1(\xi) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{|\xi|}^{\infty} \frac{p_A(A)}{\sqrt{A^2 - \xi^2}}\, dA = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p_A(|\xi| \operatorname{ch} x)\, dx.$

5.5. Найти плотность распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$, указанного в предыдущей задаче, для следующих частных случаев:

1) $p_A(A) = (A/\sigma^2)\exp(-A^2/2\sigma^2)$, $A \geqslant 0$;

2) $p_A(A) = \begin{cases} \frac{1}{A_0}, & 0 \leqslant A \leqslant A_0, \\ 0 & \text{при других } A; \end{cases}$

3) $p_A(A) = \alpha \exp(-\alpha A)$, $A \geqslant 0$;

4) $p_A(A) = \begin{cases} \frac{A}{A_0\sqrt{A_0^2 - A^2}}, & 0 \leqslant A \leqslant A_0, \\ 0 & \text{при других } A. \end{cases}$

Ответ [19, 40]:

1) $p_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$, $-\infty < \xi < \infty$;

2) $p_1(\xi) = \frac{1}{2\pi A_0}\ln\frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - \xi^2}}{A_0 - \sqrt{A_0^2 - \xi^2}}$, $|\xi| \leqslant A_0$;

3) $p_1(\xi) = \frac{\alpha}{\pi} K_0(\alpha\xi)$, где

$$K_0(z) = \int_0^\infty e^{-|z|\operatorname{ch} x}\, dx$$

— нулевая функция Макдональда [39];

4) $p_1(\xi) = \begin{cases} 1/2A_0, & -A_0 \leqslant \xi \leqslant A_0, \\ 0 & \text{при других } \xi. \end{cases}$

5.6. Найти одномерную $p_1(\xi)$ и двумерную $p_2(\xi_1, \xi_2)$ плотности распределения вероятностей для гармонического колебания

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

имеющего постоянную амплитуду A_m и угловую частоту ω_0, но случайную начальную фазу φ, равномерно распределенную на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$p_1(\xi) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{A_m^2 - \xi^2}, & |\xi| \leqslant A_m, \\ 0, & |\xi| > A_m; \end{cases}$$

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{A_m^2 - \xi_1^2}}\left\{\delta\left[\xi_2 - A_m\cos\left(\omega_0\tau + \arccos\frac{\xi_1}{A_m}\right)\right] + \right. \\ \left. + \delta\left[\xi_2 - A_m\cos\left(\omega_0\tau - \arccos\frac{\xi_1}{A_m}\right)\right]\right\}, & |\xi_1| \leqslant A_m,\ |\xi_2| \leqslant A_m; \\ 0, & |\xi_1| > A_m,\ |\xi_2| > A_m. \end{cases}$$

Здесь $\xi = \xi(t)$, $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$, $\tau = t_2 - t_1$.

5.7. Показать, что одномерная характеристическая функция $\Theta_1(jv)$ квазидетерминированного стационарного процесса

$$\xi(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где ω_0 — постоянная частота; φ — начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$; a — случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p_1(a)$, имеет вид [14]

$$\Theta_1(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(av)\, p_1(a)\, da.$$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Определить одномерные начальные моментные функции четного порядка процесса $\xi(t)$.

Ответ [14]: $M\{\xi^{2n}(t)\} = m_{2n\xi}(t) = m_{2n\xi} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} m_{2na}$,

где $m_{2na} = M\{a^{2n}\}$.

5.8. Найти плотность распределения вероятностей суммы (разности) $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$ двух некоррелированных гауссовских стационарных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, имеющих математические ожидания и дисперсии, равные соответственно m_ξ и m_η, $D_\xi = \sigma_\xi^2$ и $D_\eta = \sigma_\eta^2$.

Ответ: $p_1(\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}} \exp\left\{-\dfrac{[\zeta - (m_\xi \pm m_\eta)]^2}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}\right\}$.

5.9. Вычислить плотность распределения вероятностей суммы

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$$

двух независимых случайных процессов: гармонического колебания $\eta(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с равномерно распределенной случайной фазой φ на интервале $(-\pi, \pi)$ и гауссовского стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_\xi = \sigma^2$.

Ответ: $p_1(\zeta) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\dfrac{(\zeta - A_m\cos\psi)^2}{2\sigma^2}\right] d\psi$.

5.10. Два гауссовских некоррелированных случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют математические ожидания и дисперсии, равные соответственно m_ξ и m_η, $D_\xi = \sigma_\xi^2$ и $D_\eta = \sigma_\eta^2$. Записать совместную плотность распределения вероятностей $p_2(\xi, \eta)$.

Ответ: $p_2(\xi, \eta) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} \exp\left[-\dfrac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} - \dfrac{(\eta - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right]$.

5.11. Имеется два случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t) = \alpha\xi(t)$, где α — постоянный коэффициент. Считая процесс $\xi(t)$ гауссовским с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_\xi = \sigma^2$, записать совместную плотность распределения вероятностей $p_2(\xi, \eta)$

Ответ: $p_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2} \delta(\eta - \alpha\xi)$,

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

5.12. Записать совместную плотность распределения вероятностей для гармонического колебания

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

со случайной начальной фазой φ, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, и его производной $\dot{\xi}(t)$ в тот же момент времени.

Ответ: $p_2(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{A_m^2 - \xi^2}} \left[\delta\left(\dot{\xi} - \omega_0\sqrt{A_m^2 - \xi^2}\right) + \right.$

$$\left. + \delta\left(\dot{\xi} + \omega_0\sqrt{A_m^2 - \xi^2}\right)\right], \quad |\xi| \leqslant A_m.$$

5.13. Требуется записать совместную плотность распределения вероятностей для стационарного процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t)$ в один и тот же момент времени. Предполагается, что процесс $\xi(t)$ является гауссовским, имеет нулевое математическое ожидание и дифференцируемую корреляционную функцию $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$, где σ^2 — дисперсия.

Ответ: $p_2(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{-r''(0)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\xi^2 - \frac{\dot{\xi}^2}{r''(0)}\right]\right\}$,

$$r''(0) = \left.\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

5.14. Вычислить n-мерную центральную моментную функцию n-го порядка

$$m^0_{1, 1, \ldots, 1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\{\xi_0(t_1)\xi_0(t_2) \ldots \xi_0(t_n)\}$$

для центрированного гауссовского случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ [19]:

$$M\{\xi_0(t_1)\xi_0(t_2)\ldots\xi_0(t_n)\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при нечетных } n, \\ \sum_{i=1}^{(n-1)!!} \underbrace{R_\xi(t_1, t_{\pi_2(i)}) R_\xi(t_{\pi_3(i)}, t_{\pi_4(i)}) \ldots R_\xi(t_{\pi_{n-1}(i)}, t_{\pi_n(i)})}_{n/2 \text{ сомножителей}} & \text{при четных } n. \end{cases}$$

Здесь символами $\pi_k(i)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, обозначены значения индексов $\pi_k(i) = 2, 3, \ldots, n$, полученные в результате i-й перестановки неповторяющихся исходных индексов $j = 2, 3, \ldots, n$ и их по-

Таблица 5.1

Значения символов $\pi_h(i)$

$n=4$	$n=6$	$\pi_1(i)$	$\pi_2(i)$	$\pi_3(i)$	$\pi_4(i)$	$\pi_5(i)$	$\pi_6(i)$
1	1	1	2	3	4	5	6
—	2	1	2	3	5	4	6
—	3	1	2	3	6	4	5
2	4	1	3	2	4	5	6
—	5	1	3	2	5	4	6
—	6	1	3	2	6	4	5
3	7	1	4	2	3	5	6
—	8	1	4	2	5	3	6
—	9	1	4	2	6	3	5
—	10	1	5	2	3	4	6
—	11	1	5	2	4	3	6
—	12	1	5	2	6	3	4
—	13	1	6	2	3	4	5
—	14	1	6	2	4	3	5
—	15	1	6	2	5	3	4

парной группировки (начиная с $\pi_1(i) \equiv 1$) и последующего упорядочивания каждой пары по возрастающим значениям входящих в нее индексов.

Для примера в табл. 5.1 приведены значения символов $\pi_h(i)$ для $n = 4$ (выделены жирными линиями) и $n = 6$ соответственно.

5.15. Используя результат задачи 5.14, определить четырехмерную центральную моментную функцию четвертого порядка

$$m^0_{1,1,1,1}(t_1, t_2, t_3, t_4) = M\{\xi_0(t_1)\xi_0(t_2)\xi_0(t_3)\xi_0(t_4)\}$$

для гауссовского случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ: $M\{\xi_0(t_1)\xi_0(t_2)\xi_0(t_3)\xi_0(t_4)\} = R_\xi(t_1, t_2)R_\xi(t_3, t_4) + R_\xi(t_1, t_3)R_\xi(t_2, t_4) + R_\xi(t_1, t_4)R_\xi(t_2, t_3)$.

5.16. Найти общую формулу для одномерных начальных моментных функций гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_\xi = \sigma^2_\xi$.

Ответ: $M\{\xi^\nu(t)\} = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (\nu-1)\,\sigma^\nu_\xi & \text{при четном } \nu, \\ 0 & \text{при нечетном } \nu. \end{cases}$

5.17. Используя результат задачи 5.15, определить трехмерную центральную моментную функцию четвертого порядка

$$m^0_{2,1,1}(t_1, t_2, t_3) = M\{\xi^2_0(t_1)\xi_0(t_2)\xi_0(t_3)\}$$

для стационарного гауссовского случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = D_\xi r_\xi(t_1 - t_2).$$

Ответ: $M\{\xi_0^2(t_1)\,\xi_0(t_2)\xi_0(t_3)\} = D_\xi R_\xi(t_2, t_3) + 2R_\xi(t_1, t_2)R_\xi(t_1, t_3)$.

5.18. Написать двумерную центральную моментную функцию четвертого порядка $m^0_{2,2}(t_1, t_2) = M\{\xi_0^2(t_1)\,\xi_0^2(t_2)\}$ для гауссовского стационарного случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = D_\xi r_\xi(t_1 - t_2).$$

Ответ: $M\{\xi_0^2(t_1)\xi_0^2(t_2)\} = D_\xi^2[1 + 2\,r_\xi^2(t_1 - t_2)]$.

5.19. Используя результат задачи 5.17, определить двумерную центральную моментную функцию четвертого порядка

$$m^0_{3,1}(t_1, t_2) = M\{\xi_0^3(t_1)\xi_0(t_2)\}$$

для стационарного гауссовского случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = D_\xi r_\xi(t_1 - t_2).$$

Ответ: $M\{\xi_0^3(t_1)\xi_0(t_2)\} = 3D_\xi^2 r_\xi(t_1 - t_2)$.

5.20. Вычислить трехмерную начальную моментную функцию

$$m_{1,1,1,1}(t_1, t_2, t_3) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\}$$

для стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ: $M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\} = K_\xi(t_1, t_2)\,m_\xi(t_3) + K_\xi(t_1, t_3)m_\xi(t_2) + K_\xi(t_2, t_3)\,m_\xi(t_1) - 2\,m_\xi(t_1)\,m_\xi(t_2)\,m_\xi(t_3)$.

5.21. Определить четырехмерную начальную моментную функцию четвертого порядка

$$m_{1,1,1,1}(t_1, t_2, t_3, t_4) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4)\}$$

гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ [14]: $M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4)\} = K_\xi(t_1, t_2)\,K_\xi(t_3, t_4) + K_\xi(t_1, t_3)\,K_\xi(t_2, t_4) + K_\xi(t_1, t_4)\,K_\xi(t_2, t_3) - 2\,m_\xi(t_1)\,m_\xi(t_2) \times m_\xi(t_3)\,m_\xi(t_4)$.

5.22. Найти общую формулу для двумерных центральных моментных функций гауссовского стационарного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ [26]:

$$m^0_{\mu,\nu} = M\{\xi_0^\mu(t)\,\xi_0^\nu(t+\tau)\} = \sigma^{\mu+\nu}\sum_{k=0}^{\infty} N_{\mu,k}\,N_{\nu,k}\,\frac{r^k(\tau)}{k!},$$

где

$$N_{l,\,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^l\, \Phi^{(k+1)}(x)\, dx.$$

Значения коэффициентов $N_{l,\,k}$ приведены в табл. 5.2.

5.23. Вычислить трехмерную моментную функцию

$$m^0_{\mu,\,\nu,\,\lambda}(\tau_1,\ \tau_2) = M\{\xi^{\mu}_0(t)\xi^{\nu}_0(t+\tau_1)\xi^{\lambda}_0(t+\tau_2)\}$$

для стационарного гауссовского случайного процесса $\xi_0(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ [26]: $M\{\xi^{\mu}_0(t)\,\xi^{\nu}_0(t+\tau_1)\,\xi^{\lambda}_0(t+\tau_2)\} =$

$$= \sigma^{\mu+\nu+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{\mu,\,k+l}\, N_{\nu,\,k+m}\, N_{\lambda,\,l+m}\, \frac{r^k(\tau_1)\, r^l(\tau_2)\, r^m(\tau_2-\tau_1)}{k!\, l!\, m!}.$$

5.24. Определить, при каких условиях случайный процесс

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m, ω_0 — неслучайные, стационарен и нестационарен.

Ответ: Процесс $\xi(t)$ стационарен, если случайная фаза φ равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$. В противном случае процесс $\xi(t)$ нестационарен.

5.25. Случайные величины A и Φ независимы. Математическое ожидание и дисперсия первой из них равны соответственно $m_A = 0$ и $D_A = \sigma^2$, вторая подчиняется закону равномерного распределения на интервале $(-\pi, \pi)$.

Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$ стационарен (ω_0 — неслучайная величина).

Ответ: Процесс $\xi(t)$ стационарен в широком смысле, так как его математическое ожидание постоянно ($m_\xi = 0$), а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_\xi(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\,\sigma^2 \cos\omega_0 (t_2 - t_1) = R_\xi(\tau).$$

Таблица 5.2

Значения коэффициентов $N_{l,\,k}$

l \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	−1	0	0	0	0	0
2	1	0	2·1	0	0	0	0
3	0	−3·1	0	−3·2·1	0	0	0
4	3·1	0	4·3·1	0	4·3·2·1	0	0
5	0	−5·3·1	0	−5·4·3·1	0	−5·4·3·2·1	0
6	5·3·1	0	6·5·3·1	0	6·5·4·3·1	0	6·5·4·3·2·1

5.26. Показать, что случайный процесс

$$\xi(t) = X \cos \omega_0 t + Y \sin \omega_0 t$$

является стационарным в широком смысле только в том случае, когда случайные величины X и Y взаимно не коррелированы и имеют нулевые математические ожидания $m_X = m_Y = 0$ и равные дисперсии $D_X = D_Y = D$.

5.27. Определить, при каких условиях случайный процесс

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + n(t),$$

где A_m, ω_0 — постоянные, $n(t)$ — шум, стационарен в узком смысле.

Ответ: Процесс $\xi(t)$ стационарен, если стационарен шум $n(t)$ и случайная начальная фаза φ распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Особо важную роль в теории случайных процессов $\xi(t)$ играют математическое ожидание (одномерная моментная функция первого порядка) [1, 6, 14, 26, 27, 34—36, 41, 42]

$$m_\xi(t) = m_1(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_1(\xi; t) d\xi \tag{6.1}$$

и корреляционная функция (двумерная центральная моментная функция второго порядка)

$$R_\xi(t_1, t_2) = m^0_{\ 1\ 1}(t_1, t_2) = M\{\xi_0(t_1)\, \xi_0(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\, p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= K_\xi(t_1, t_2) - m_\xi(t_1)\, m_\xi(t_2). \tag{6.2}$$

Здесь $K_\xi(t_1, t_2)$ — ковариационная функция, представляющая собой двумерную начальную моментную функцию:

$$K_\xi(t_1, t_2) = m_{1,1}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\, \xi(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t_1)\, \xi(t_2)\, p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= R_\xi(t_1, t_2) + m_\xi(t_1)\, m_\xi(t_2). \tag{6.3}$$

Для стационарных случайных процессов формулы (6.1)—(6.3) принимают вид:

$$m_{\xi}(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_1(\xi)\, d\xi = m_{\xi}; \tag{6.4}$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = M\{\xi_0(t_1)\, \xi_0(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t_1) - m_{\xi}][\xi(t_2) - m_{\xi}]\, p_2(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= K_{\xi}(t_2 - t_1) - m_{\xi}^2 = R_{\xi}(t_2 - t_1); \tag{6.5}$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\, \xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t_1)\, \xi(t_2) \times$$

$$\times p_2(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = R_{\xi}(t_2 - t_1) + m_{\xi}^2 = K_{\xi}(t_2 - t_1). \tag{6.6}$$

Формулы (6.1)—(6.6) справедливы для действительных случайных процессов $\xi(t)$. При представлении случайного процесса в виде комплексной функции [14] $\tilde{\xi}(t) = \eta(t) + j\nu(t)$, где $\eta(t)$ и $\nu(t)$ — действительные случайные процессы, отображающие реальную и мнимую составляющие процесса $\tilde{\xi}(t)$, формулы (6.1) — (6.3) принимают следующий вид:

$$\tilde{m}_{\tilde{\xi}}(t) = M\{\tilde{\xi}(t)\} = M\{\eta(t)\} + jM\{\nu(t)\} = m_{\eta}(t) + jm_{\nu}(t); \tag{6.1a}$$

$$\tilde{R}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) = M\{[\tilde{\xi}(t_1) - \tilde{m}_{\tilde{\xi}}(t_1)][\tilde{\xi}^*(t_2) - \tilde{m}^*_{\tilde{\xi}}(t_2)]\} =$$

$$= \tilde{K}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) - \tilde{m}_{\tilde{\xi}}(t_1)\, \tilde{m}^*_{\tilde{\xi}}(t_2); \tag{6.2a}$$

$$\tilde{K}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) = M\{\tilde{\xi}(t_1)\, \tilde{\xi}^*(t_2)\} =$$

$$= \tilde{R}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) + \tilde{m}_{\tilde{\xi}}(t_1)\, \tilde{m}^*_{\tilde{\xi}}(t_2). \tag{6.3a}$$

Здесь звездочкой отмечены комплексно-сопряженные функции. Для стационарных комплексных случайных процессов $\tilde{\xi}(t)$ имеем

$$\tilde{m}_{\tilde{\xi}}(t) = m_{\eta} + jm_{\nu} = \tilde{m}_{\tilde{\xi}}; \tag{6.4a}$$

$$\tilde{R}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) = \tilde{K}_{\tilde{\xi}}(t_2 - t_1) - |\tilde{m}_{\tilde{\xi}}|^2 = \tilde{R}_{\tilde{\xi}}(\tau); \tag{6.5a}$$

$$\tilde{K}_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) = \tilde{R}_{\tilde{\xi}}(t_2 - t_1) + |\tilde{m}_{\tilde{\xi}}|^2 = \tilde{K}_{\tilde{\xi}}(\tau), \tag{6.6a}$$

$$\tau = t_2 - t_1.$$

Корреляционные функции $R_{\xi}(\tau)$ стационарных случайных процессов $\xi(t)$ обладают следующими свойствами:

1. Функции $R_{\xi}(\tau)$ являются четными: $R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau)$.

2. Абсолютные значения корреляционной функции $R_{\xi}(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ при любом τ не могут превышать ее значения при $\tau = 0$:

$$|R_{\xi}(\tau)| \leqslant R_{\xi}(0) = D_{\xi}.$$

3. При неограниченном увеличении τ функции $R_{\xi}(\tau)$, как правило, стремятся к нулю, т. е. $\lim\limits_{\tau \to \infty} R_{\xi}(\tau) = 0$.

Помимо корреляционных, весьма часто используются взаимные корреляционные функции, характеризующие статистическую зависимость между значениями двух случайных процессов в два совпадающих или различных момента времени. Так, к примеру, для двух стационарных случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ с математическими ожиданиями m_ξ и m_η взаимные корреляционные функции имеют вид

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi][\eta(t_2) - m_\eta]\},$$

$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = m\{[\eta(t_1) - m_\eta][\xi(t_2) - m_\xi]\}. \tag{6.7}$$

Если взаимные корреляционные функции (6.7) зависят лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются стационарно связанными и для них справедливо соотношение

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau). \tag{6.8}$$

Для количественной характеристики степени линейной зависимости случайных процессов часто используют нормированные корреляционные и взаимные корреляционные функции, которые определяются соответственно формулами

$$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{R_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)\, D_\xi(t_2)}}$$

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)\, D_\eta(t_2)}}. \tag{6.9}$$

Здесь $D_\xi(t) = R_\xi(t, t)$ — дисперсия случайного процесса $\xi(t)$, $D_\eta(t)$ — дисперсия процесса $\eta(t)$. Если эти процессы стационарны и стационарно связаны, то

$$D_\xi(t) = R_\xi(0) = D_\xi = \sigma_\xi^2, \quad D_\eta(t) = R_\eta(0) = D_\eta = \sigma_\eta^2$$

и формулы (6.9) принимают вид

$$r_\xi(\tau) = \frac{R_\xi(\tau)}{D_\xi} = \frac{R_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2},$$

$$r_{\xi\eta}(\tau) = \frac{R_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}} = \frac{R_{\xi\eta}(\tau)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{6.10}$$

В большинстве радиотехнических задач нормированные корреляционные функции имеют вид либо монотонно убывающих функций $r(\tau) = \rho(\tau)$ (рис. 6.1, а), либо затухающих осциллирующих функций, например типа $r(\tau) = \rho(\tau)\cos\omega_0\tau$ (рис. 6.1, б). При этом степень коррелированности случайного процесса можно характеризовать так называемым интервалом корреляции

$$\tau_к = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)|\, d\tau = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)|\, d\tau. \tag{6.11}$$

Геометрически интервал корреляции равен основанию прямоугольника с высотой $\rho(0) = 1$, площадь которого равна площади, заключенной между кривой $|\rho(\tau)|$ при $\tau > 0$ и осью абсцисс (рис. 6.1). Величина $\tau_к$ дает ориентировоч-

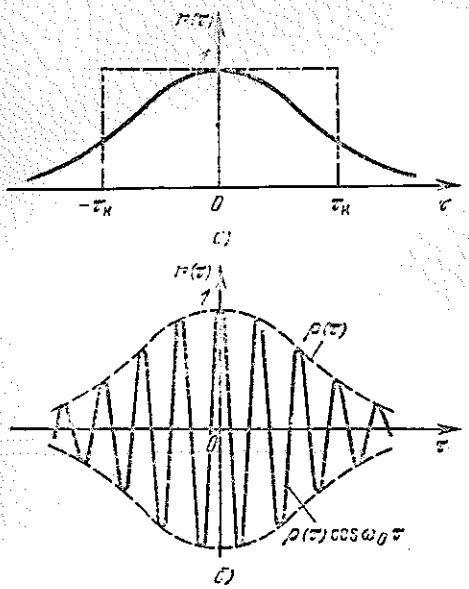


Рис. 6.1. Нормированные корреляционные функции

ное представление о том, на каком интервале времени в среднем имеет место коррелированность между значениями случайного процесса.

Весьма распространенной характеристикой стационарного случайного процесса является его спектральная плотность $S_\xi(\omega)$, связанная с ковариационной функцией (6.6) преобразованием Фурье:

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \tag{6.12}$$

$$K_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \tag{6.13}$$

Аналогично связаны между собой корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ и спектральная плотность $S_{\xi_0}(\omega)$ центрированного стационарного случайного процесса $\xi_0(t) = \xi(t) - m_\xi$:

$$S_{\xi_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = S_\xi(\omega) - 2\pi m_\xi^2\, \delta(\omega), \tag{6.14}$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_0}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \tag{6.15}$$

Используя свойство четности ковариационной $K_\xi(\tau)$ и корреляционной $R_\xi(\tau)$ функций, соотношения (6.12)—(6.15) можно привести к виду

$$S_\xi(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_\xi(\tau) \cos\omega\tau d\tau, \tag{6.16}$$

$$K_{\xi}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_{\xi}(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \tag{6.17}$$

$$S_{\xi_0}(\omega)=2\int_0^{\infty}R_{\xi}(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \tag{6.18}$$

$$R_{\xi}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_{\xi_0}(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \tag{6.19}$$

Соотношения (6.12)—(6.19) называются формулами Винера—Хинчина.

Как следует из (6.14), спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием m_{ξ} и ковариационной функцией $K_{\xi}(\tau)$, определяемая соотношением (6.12), отличается от спектральной плотности $S_{\xi_0}(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_{\xi}=0$ и корреляционной функцией $R_{\xi}(\tau)$, вычисляемой по формуле (6.14), лишь наличием дополнительного члена $2\pi m_{\xi}^2\delta(\omega)$. При $m_{\xi}=0$ оба представления спектральной плотности совпадают, поэтому в дальнейшем различие в этих характеристиках будем отмечать лишь в случае необходимости.

Отметим основные свойства спектральной плотности стационарного случайного процесса.

1. Спектральная плотность не может иметь отрицательных значений, т. е. $S(\omega)\geqslant 0$ при любых ω.

2. Для вещественных случайных процессов спектральная плотность является четной функцией, т. е. $S(\omega)=S(-\omega)$.

В формулах (6.12)—(6.19) спектральная плотность $S(\omega)$ определена для положительных и отрицательных значений круговой частоты, причем $S(\omega)=S(-\omega)$. Если же вместо такого спектра, называемого двухсторонним, ввести одностороннюю «физическую» спектральную плотность

$$S(f)=[S(\omega)+S(-\omega)]=2\,S(\omega), \tag{6.20}$$

отличную от нуля лишь при $f\geqslant 0$, то формулы (6.12)—(6.19) можно записать в виде

$$S_{\xi}(f)=4\int_0^{\infty}K_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau, \tag{6.21}$$

$$K_{\xi}(\tau)=\int_0^{\infty}S_{\xi}(f)\cos 2\pi f\tau df, \tag{6.22}$$

$$S_{\xi_0}(f)=4\int_0^{\infty}R_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau, \tag{6.23}$$

$$R_{\xi}(\tau)=\int_0^{\infty}S_{\xi_0}(f)\cos 2\pi f\tau df. \tag{6.24}$$

Соотношения, аналогичные (6.21)—(6.24), справедливы и для взаимных корреляционных и спектральных функций.

Иногда в качестве характеристик случайных процессов используют различные параметры их спектральных плотностей. Наиболее употребительным из

таких параметров является эффективная ширина спектра $\Delta\omega_э$, определяемая соотношением

$$\Delta\omega_э = \frac{1}{S(0)} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega\, d\omega . \tag{6.25}$$

Помимо этого, находят применение такие параметры, как средняя частота $m_\omega = M\{\omega\}$ спектральной плотности, средний квадрат частоты $m_{2\omega} = M\{\omega^2\}$ и средняя квадратическая ширина σ_ω спектральной плотности, соответственно равные

$$m_\omega = M\{\omega\} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty \omega S(\omega)\, d\omega, \tag{6.26}$$

$$m_{2\omega} = M\{\omega^2\} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty \omega^2 S(\omega)\, d\omega, \tag{6.27}$$

$$\sigma_\omega^2 = M\{\omega^2\} - M^2\{\omega\} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty (\omega - m_\omega)^2\, S(\omega)\, d\omega. \tag{6.28}$$

При решении задач статистической радиотехники иногда возникает необходимость установления непрерывности и дифференцируемости случайных процессов. Необходимым и достаточным условием непрерывности случайного процесса $\xi(t)$ в момент t является непрерывность его корреляционной функции $R_\xi(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$. Для стационарного в широком смысле случайного процесса $\xi(t)$ необходимым и достаточным условием непрерывности является непрерывность его корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ при $\tau = 0$.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется дифференцируемым в момент времени t в среднеквадратическом, если существует такая случайная функция $\dot{\xi}(t) = d\xi(t)/dt$, называемая производной в среднеквадратическом процесса $\xi(t)$, для которой

$$\lim_{T \to 0} M\left\{\left[\frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} - \dot{\xi}(t)\right]^2\right\} = 0.$$

Математическое ожидание $m_{\dot{\xi}}(t)$, ковариационная $K_{\dot{\xi}}(t_1, t_2)$ и корреляционная $R_{\dot{\xi}}(t_1, t_2)$ функции производной $\dot{\xi}(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяются соотношениями

$$m_{\dot{\xi}}(t) = M\{\dot{\xi}(t)\} = \frac{dm_\xi(t)}{dt}, \tag{6.29}$$

$$K_{\dot{\xi}}(t_1, t_2) = M\{\dot{\xi}^0(t_1)\, \dot{\xi}^0(t_2)\} = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2}, \tag{6.30}$$

$$R_{\dot{\xi}}(t_1, t_2) = M\{\dot{\xi}_0(t_1)\, \dot{\xi}_0(t_2)\} = \frac{\partial^2 R_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2}. \tag{6.31}$$

Здесь $m_\xi(t)$, $K_\xi(t_1, t_2)$ и $R_\xi(t_1, t_2)$ — математическое ожидание, ковариационная и корреляционная функции случайного процесса $\xi(t)$. Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ соотношения (6.29)—(6.31) приводятся к виду

$$m_{\dot\xi}(t)=0,\quad K_{\dot\xi}(\tau)=R_{\dot\xi}(\tau)=-\frac{d^2K_\xi(\tau)}{d\tau^2}=-\frac{d^2R_\xi(\tau}{d\tau^2}, \tag{6.32}$$

а спектральная плотность $S_{\dot\xi}(\omega)$ производной $\dot\xi(t)$ определяется формулой

$$S_{\dot\xi}(\omega)=\omega^2 S_{\xi_0}(\omega), \tag{6.33}$$

где $S_{\xi_0}(\omega)$ — спектральная плотность стационарного случайного процесса $\xi_0(t)$.

Взаимные ковариационная $K_{\xi\dot\xi}(t_1, t_2)$ и корреляционная $R_{\xi\dot\xi}(t_1, t_2)$ функции дифференцируемого в среднеквадратическом случайного процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot\xi(t)$ равны

$$K_{\xi\dot\xi}(t_1, t_2)=M\{\xi(t_1)\,\dot\xi(t_2)\}=\frac{\partial K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \tag{6.34}$$

$$R_{\xi\dot\xi}(t_1, t_2)=M\{\xi_0(t_1)\,\dot\xi_0(t_2)\}=\frac{\partial R_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \tag{6.35}$$

Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ соотношения (6.34) и (6.35) принимают вид

$$K_{\xi\dot\xi}(\tau)=R_{\xi\dot\xi}(\tau)=-K_{\dot\xi\xi}(\tau)=-R_{\dot\xi\xi}(\tau)=dK_\xi(\tau)/d\tau=dR_\xi(\tau)/d\tau, \tag{6.36}$$

а взаимная спектральная плотность

$$S_{\xi\dot\xi}(\omega)=j\omega S_{\xi_0}(\omega). \tag{6.37}$$

Из (6.36) и (6.37) следует, что значение взаимной корреляционной функции $R_{\xi\dot\xi}(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot\xi(t)$ в совпадающие моменты времени (т. е. при $\tau=0$) равно нулю (это означает, что любая дифференцируемая стационарная случайная функция $\xi(t)$ и ее производная $\dot\xi(t)$ в совпадающие моменты времени не коррелированы), а их взаимная спектральная плотность является чисто мнимой функцией.

Для производных $\xi^{(n)}(t)$ n-го порядка случайного процесса $\xi(t)$ справедливы соотношения:

$$K_{\xi(n)}(t_1, t_2)=\frac{\partial^{2n}K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1^n\,\partial t_2^n}, \tag{6.38}$$

$$R_{\xi(n)}(t_1, t_2)=\frac{\partial^{2n}R_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1^n\,\partial t_2^n}. \tag{6.39}$$

Если $\xi(t)$ является стационарным случайным процессом, то (6.38) и (6.39) приводятся к виду

$$K_{\xi(n)}(\tau)=R_{\xi(n)}(\tau)=(-1)^n\frac{d^{2n}K_\xi(\tau)}{d\tau^{2n}}=(-1)^n\frac{d^{2n}R_\xi(\tau)}{d\tau^{2n}}, \tag{6.40}$$

а спектральная плотность n-й производной $\xi^{(n)}(t)$ равна

$$S_{\xi(n)}(\omega)=\omega^{2n}S_{\xi_0}(\omega). \tag{6.41}$$

Взаимные ковариационные и корреляционные функции k-й и l-й производных $\xi^{(k)}(t)$ и $\xi^{(l)}(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяются смешанными производными вида

$$K_{\xi^{(k)}\,\xi^{(l)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{k+l} K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1^k\, \partial t_2^l}, \tag{6.42}$$

$$R_{\xi^{(k)}\,\xi^{(l)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{k+l} R_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1^k\, \partial t_2^l}. \tag{6.43}$$

Для стационарных случайных процессов формулы (6.42) и (6.43) приводятся к виду

$$K_{\xi^{(k)}\,\xi^{(l)}}(\tau) = R_{\xi^{(k)}\,\xi^{(l)}}(\tau) = (-1)^k \frac{d^{k+l} K_\xi(\tau)}{d\tau^{k+l}} =$$

$$= -1)^k \frac{d^{k+l} R_\xi(\tau)}{d\tau^{k+l}}. \tag{6.44}$$

2. ПРИМЕРЫ

6.1. Определить, обладает ли функция

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sh}\omega_0|\tau|\right),\ \alpha > 0,\ \omega_0 > 0,$$

свойствами корреляционной функции.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос необходимо проверить выполнение следующих условий:

1) $R(0) > 0$; 2) $R(\tau) = R(-\tau)$; 3) $|R(\tau)| \leqslant R(0)$;

4) $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \geqslant 0.$

Положительный ответ относительно выполнения условий 1) и 2) следует непосредственно из анализа выражения для $R(\tau)$. Для проверки выполнения условия 3) представим функцию $R(\tau)$ в виде

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\left[e^{-(\alpha-\omega_0)\tau}\left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1\right) - e^{-(\alpha+\omega_0)\tau}\left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1\right)\right],\ \tau \geqslant 0.$$

Так как $R(0) = D = \sigma^2$, для выполнения условия 3) необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках по модулю не было больше 2. Можно показать, что при $\alpha < \omega_0$ это условие не выполняется, так как при $\tau \to \infty$ и $\alpha < \omega_0$ значение $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ неограниченно возрастает. В случае $\alpha = \omega_0$ функция $R(\tau) \equiv 1$ и только при $\alpha > \omega_0$ условие 3) выполняется. К такому же выводу приводит анализ выражения $R(\tau)$ при $\tau < 0$.

В соответствии с формулой Винера — Хинчина (6.14) имеем

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{4\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{[(\alpha-\omega_0)^2 + \omega^2][(\alpha+\omega_0)^2 + \omega^2]}.$$

Отсюда следует, что условие 4) выполняется также при $\alpha > \omega_0$. Следовательно, анализируемая функция $R(\tau)$ обладает всеми свойствами корреляционных функций при $\alpha > \omega_0$.

6.2. Найти корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ и спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ для стационарного случайного сигнала

$$\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m и ω_0 — постоянные амплитуда и угловая частота; φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. По определению корреляционной функции (6.5), имеем

$$R_\xi(\tau) = M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} - m_\xi^2.$$

Поскольку

$$m_\xi = M\{\xi(t)\}_\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)\, p_1(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

то

$$R_\xi(\tau) = M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\}_\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)\, p_1(\varphi) \times$$

$$\times \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \times$$

$$\times \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)\, d\varphi.$$

Учитывая, что [17]

$$\sin\alpha \sin\beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2,$$

находим

$$R_\xi(\tau) = (A_m^2/2)\cos\omega_0\tau.$$

Спектральная плотность вычисляется по формуле Винера—Хинчина:

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cos\omega_0\tau d\tau =$$

$$= \frac{A_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0-\omega)\tau} + e^{-j(\omega_0+\omega)\tau}]\, d\tau.$$

Учитывая, что [17] $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\tau = \delta(\omega)$, окончательно получаем

$$S_\xi(\omega) = (\pi A_m^2/2)[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

6.3. Определить корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ и спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6.45}$$

где A, ω и φ — независимые случайные амплитуда, частота и начальная фаза. Случайные величины A и ω заданы одномерными плотностями распределения вероятностей $p_A(A)$ и $p_\omega(\omega)$, а начальная фаза φ предполагается равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$, т.е. $p_\varphi(\varphi) = 1/2\pi$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Решение [43]. В соответствии с определением (6.2) искомая корреляционная функция представляет собой двумерную центральную моментную функцию второго порядка и равна

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\}. \tag{6.46}$$

Поскольку в нашем случае $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = 0$, то (6.46) приводится к виду

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}. \tag{6.47}$$

По условию задачи стационарный случайный процесс $\xi(t)$ зависит от трех независимых случайных параметров A, ω и φ, в соответствии с чем в (6.47) необходимо выполнить усреднение по каждому из этих параметров. Таким образом

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t_1)\xi(t_2) p_A(A)\, p_\omega(\omega)\, p_\varphi(\varphi) dA d\omega d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)\, p_A(A) \times$$

$$\times p_\omega(\omega)\, dA d\omega d\varphi. \tag{6.48}$$

После несложных преобразований находим следующее выражение для корреляционной функции стационарного случайного процесса (6.45):

$$R_\xi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} M\{A^2\} \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(\omega)\cos\omega\tau d\omega = R_\xi(\tau),\ \tau = t_2 - t_1. \tag{6.49}$$

Полагая в (6.49) $\tau = 0$, находим дисперсию случайного процесса $\xi(t)$:

$$D_\xi = \frac{1}{2} M\{A^2\} \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(\omega)\, d\omega. \tag{6.50}$$

Для определения спектральной плотности $S_{\xi_0}(\omega)$ воспользуемся соотношением (6.19) и запишем корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ в виде

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_0}(\omega) \cos \omega\tau d\tau. \qquad (6.51)$$

Сравнивая (6.51) с (6.49), видим, что

$$S_\xi(\omega) = S_{\xi_0}(\omega) = \pi M\{A^2\} p_\omega(\omega), \qquad (6.52)$$

т. е. спектральная плотность колебания (6.45) с точностью до постоянного множителя совпадает с одномерной плотностью распределения вероятностей случайной частоты этого колебания. Для частного случая $A = A_m = \text{const}$, т. е. для случая стационарного квазигармонического колебания с постоянной амплитудой, случайной частотой и статистически независимой от нее случайной начальной фазой, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, соотношения (6.49) и (6.52) принимают следующий вид:

$$R_\xi(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \qquad (6.53)$$

$$S_\xi(\omega) = (\pi A_m^2/2) p_\omega(\omega). \qquad (6.54)$$

6.4. Выяснить разницу между спектральными плотностями стационарных случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$R_{\xi_1}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad R_{\xi_2}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau.$$

Решение. Корреляционная функция $R_{\xi_1}(\tau)$ является частным случаем корреляционной функции $R_{\xi_2}(\tau)$. Поэтому вначале найдем спектральную плотность $S_{\xi_2}(\omega)$, соответствующую $R_{\xi_2}(\tau)$, а затем из $S_{\xi_2}(\omega)$ получим $S_{\xi_1}(\omega)$.

Согласно формулам Винера—Хинчина имеем

$$S_{\xi_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} \cos \omega_0\tau d\tau =$$

$$= \sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau - j\omega\tau} \cos \omega_0\tau d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau - j\omega\tau} \cos \omega_0\tau d\tau \right].$$

Учитывая, что [17]

$$\cos \omega_0\tau = (e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau})/2,$$

получаем

$$S_{\xi_2}(\omega) = \alpha\sigma^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

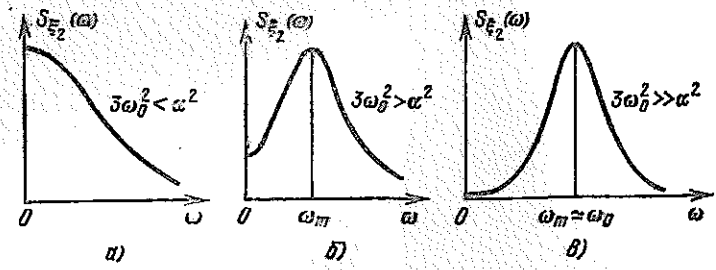


Рис. 6.2 Спектральные плотности при различных соотношениях между α и ω_0

Рассмотрим поведение функции $S_{\xi_2}(\omega)$.

1. $S_{\xi_2}(\omega) \to 0$ при $|\omega| \to \infty$.

2. При $3\omega_0^2 < \alpha^2$ у функции $S_{\xi_2}(\omega)$ нет максимума, она монотонно убывает с ростом $|\omega|$ (рис. 6.2, *а*).

3. Если $3\omega_0^2 > \alpha^2$, функция $S_{\xi_2}(\omega)$ имеет максимум (рис.6.2, *б*) в точке

$$|\omega_m| = (\alpha^2 + \omega_0^2)^{1/4} \sqrt{2\omega_0 - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}.$$

4. При $3\omega_0^2 \gg \alpha^2$ спектральная плотность $S_{\xi_2}(\omega)$ также имеет максимум в точке $|\omega_m| \simeq \omega_0$ (рис. 6.2, *в*).

Суммирование спектральных плотностей $S_{\xi_2}(\omega)$ с различными весами при соответствующим образом выбранных α и ω_0 позволяет аппроксимировать сложные спектральные плотности. Так, к примеру, путем сложения изображенных на рис. 6.2 функций $S_{\xi_2}(\omega)$ можно получить спектральные плотности $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ (рис. 6.3), хорошо совпадающие с экспериментально определенными спектральными плотностями случайных изменений во времени скоростей в атмосферном турбулентном потоке.

Полагая в $S_{\xi_2}(\omega)$ частоту $\omega_0 = 0$, находим спектральную плотность $S_{\xi_1}(\omega)$, соответствующую корреляционной функции $R_{\xi_1}(\tau)$:

$$S_{\xi_1}(\omega) = \sigma^2 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2).$$

Графики функций $R_{\xi_1}(\tau)$ и $R_{\xi_2}(\tau)$ и соответствующих им спектральных плотностей $S_{\xi_1}(\omega)$ и $S_{\xi_2}(\omega)$ приведены на рис. 6.4.

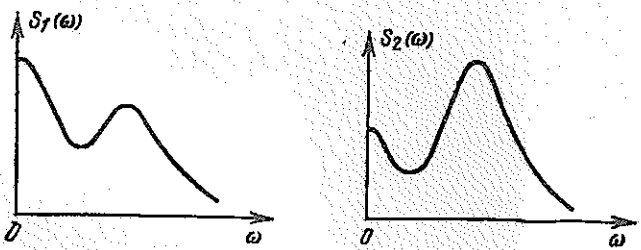


Рис. 6.3. Сложные спектральные плотности

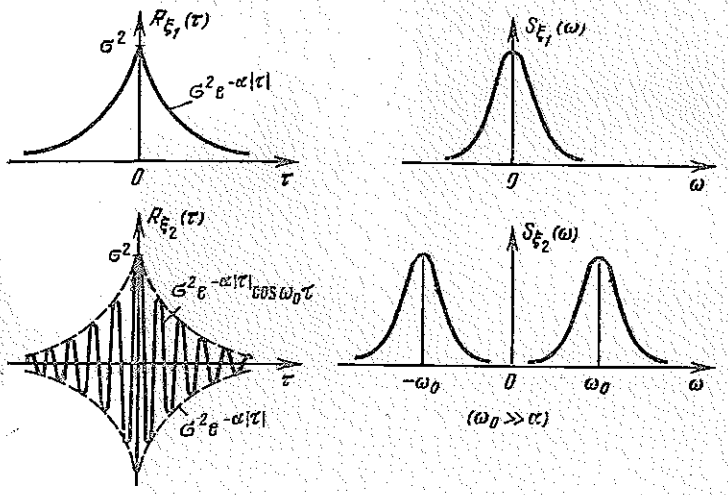


Рис. 6.4. Корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности

6.5. Найти корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью (рис. 6.5)

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0/2, & -\omega_2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_1, \\ N_0/2, & \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Для частного случая $\omega_1 = 0$ определить величину интервала $\Delta = t_{k+1} - t_k$, при котором значения $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ и $\xi_k = \xi(t_k)$ не коррелированы.

Решение. По формуле Винера—Хинчина находим

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{N_0}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{N_0}{2\pi\tau}(\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau).$$

Так как [17]

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

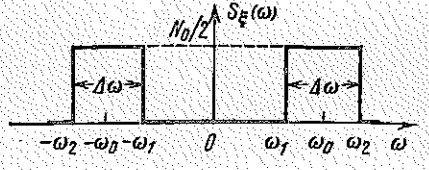


Рис. 6.5. Равномерная в полосе частот спектральная плотность

корреляционную функцию можно представить в виде (рис. 6.6, *а*)

$$R_\xi(\tau) = \sigma_1^2 \rho_1(\tau) \cos\omega_0\tau,$$

где

$$\sigma_1^2 = \frac{\Delta\omega N_0}{2\pi}, \quad \rho_1(\tau) = \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2},$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Для частного случая $\omega_1 = 0$ функция корреляции имеет вид (рис. 6.6, *б*)

$$R_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2\pi\tau}\sin\omega_2\tau = \frac{N_0\omega_2}{2\pi}\frac{\sin\omega_2\tau}{\omega_2\tau} = \sigma_2^2\rho_2(\tau),$$

где

$$\sigma_2^2 = N_0\omega_2/2\pi, \quad \rho_2(\tau) = (\sin\omega_2\tau)/\omega_2\tau.$$

Интервал $\Delta = t_{k+1} - t_k$, при котором значения (отсчеты) $\xi_k = \xi(t_k)$ и $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будут не коррелированы, можно определить, приравняв нулю значение нормированной корреляционной функции $\rho_2(\Delta)$. В результате находим

$$(\sin\omega_2\Delta)/\omega_2\Delta = 0, \quad \Delta = \pi/\omega_2 = 1/2F_2,$$

где $F_2 = \omega_2/2\pi$ — верхняя граничная частота спектральной плотности $S_\xi(\omega)$. Таким образом, в реализации $\xi(t)$ длительностью T содержится $N = T/\Delta = 2F_2T$ некоррелированных отсчетов.

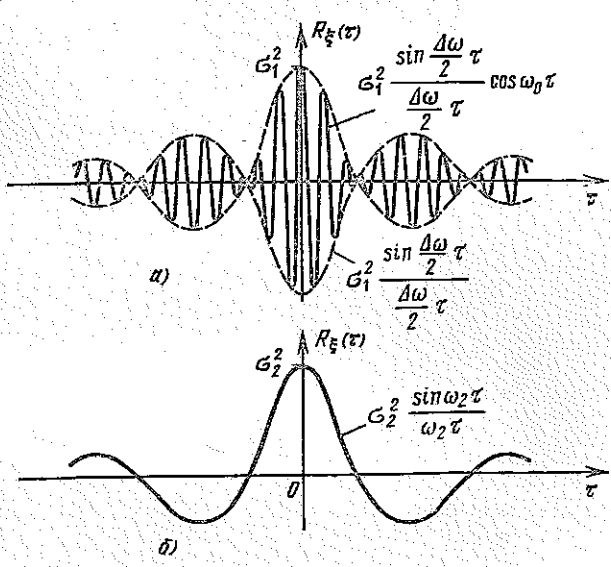


Рис. 6.6. Корреляционные функции узкополосного (*а*) и широкополосного (*б*) случайных процессов со спектральными плотностями, равномерными в полосе частот

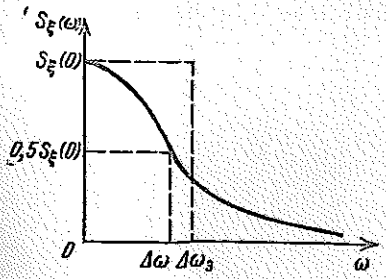


Рис. 6.7. Определение эффективной ширины спектра случайного процесса

6.6. Спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид (рис. 6.7)

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} 4\alpha/(\alpha^2+\omega^2), & \omega \geqslant 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Определить соотношение между эффективной шириной спектра $\Delta\omega_э$ процесса $\xi(t)$ и шириной его спектральной плотности $\Delta\omega$ на уровне $0{,}5S_\xi(0)$.

Решение. Эффективная ширина спектра $\Delta\omega_э$ процесса $\xi(t)$ определяется соотношением

$$\Delta\omega_э = \frac{1}{S_\xi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\, d\omega.$$

После подстановки $S_\xi(\omega)$ находим

$$\Delta\omega_э = \frac{\alpha}{4} \int_0^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\, d\omega = \alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Ширина спектральной плотности $\Delta\omega$ на уровне $0{,}5S_\xi(0)$ находится из формулы

$$S_\xi(\Delta\omega) = \frac{4\alpha}{\alpha^2+(\Delta\omega)^2} = 0{,}5S_\xi(0) = 0{,}5\frac{4\alpha}{\alpha^2},$$

откуда $\Delta\omega = \alpha$. Следовательно,

$$\Delta\omega_э/\Delta\omega = \Delta f_э/\Delta f = \pi/2.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

6.1. Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданы своими математическими ожиданиями $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$, корреляционными $R_\xi(t_1, t_2)$ и $R_\eta(t_1, t_2)$ и взаимными корреляционными функциями

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\eta(t_2) - m_\eta(t_2)]\},$$
$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = M\{[\eta(t_1) - m_\eta(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\}.$$

Определить математическое ожидание $m_\zeta(t)$ и корреляционную функцию $R_\zeta(t_1, t_2)$ суммарного (разностного) случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$.

Ответ: $m_\zeta(t) = m_\xi(t) \pm m_\eta(t)$; $R_\zeta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) + R_\eta(t_1, t_2) \pm R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \pm R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$.

6.2. Определить корреляционную функцию $R_\eta(t_1, t_2)$ случайного процесса

$$\eta(t) = \xi(t + T) \pm \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ: $R_\eta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1 + T, t_2 + T) \pm R_\xi(t_1 + T, t_2) \pm R_\xi(t_1, t_2 + T) + R_\xi(t_1, t_2)$.

6.3. Доказать, что для корреляционных и взаимных корреляционных функций случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ справедливы соотношения:

$$|R_\xi(t_1, t_2)| \leqslant \sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2),$$
$$|R_\xi(t_1, t_2)| \leqslant [\sigma_\xi^2(t_1) + \sigma_\xi^2(t_2)]/2,$$
$$|R_{\xi\eta}(t_1, t_2)| \leqslant \sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2).$$

Здесь $\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)}$, $\sigma_\eta(t) = \sqrt{D_\eta(t)}$ — средние квадратические отклонения процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно.

6.4. Найти корреляционную функцию сигнала

$$s(t) = A_m \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$; A_m и ω_0 — постоянные величины, а φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$ и не зависящая от $\xi(t)$.

Ответ: $R_s(\tau) = (A_m^2/2)R_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau$.

6.5. Определить корреляционную функцию комплексного случайного процесса

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{j\omega_i t},$$

где ω_i — постоянная угловая частота; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — взаимно не коррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_i = 0$ и дисперсиями D_i.

Ответ: $\tilde{R}_{\tilde{\xi}}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i e^{j\omega_i \tau}$, $\tau = t_{i+1} - t_i$.

6.6. Решить задачу 6.5 для случая, когда

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cos\omega_i t + j\,\beta_i \sin\omega_i t),$$

где α_i и β_i — взаимно не коррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_{\alpha_i} = m_{\beta_i} = 0$ и дисперсиями $D_{\alpha_i} = D_{\beta_i} = D_i$.

Ответ: $\tilde{R}_\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos \omega_i \tau$.

6.7. Определить математическое ожидание $m_\eta(t) = M\{\eta(t)\}$ и корреляционную функцию $R_\eta(t, \tau) = M\{\eta(t)\eta(t+\tau)\} - m_\eta^2(t)$ периодически нестационарного случайного процесса

$$\eta(t) = F(t)\xi(t),$$

где $F(t)$ — непериодическая детерминированная функция; $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Ответ:

$$m_\eta(t) = m_\xi F(t), \quad R_\eta(t, \tau) = F(t)F(t+\tau)R_\xi(\tau).$$

6.8. Заданы два взаимно не коррелированных случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $R_\xi(t_1, t_2)$ и $R_\eta(t_1, t_2)$. Доказать, что корреляционная функция произведения этих процессов $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$ равна произведению корреляционных функций сомножителей:

$$R_\zeta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2)R_\eta(t_1, t_2).$$

6.9. Доказать, что корреляционная функция произведения n взаимно независимых случайных процессов

$$\eta(t) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(t)$$

с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $R_{\xi_i}(t_1, t_2)$ равна произведению корреляционных функций сомножителей:

$$R_\eta(t_1, t_2) = \prod_{i=1}^{n} R_{\xi_i}(t_1, t_2).$$

6.10. Пусть из стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = m_\xi$ и ковариационной функцией $K_\xi(\tau) = M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\}$ выделен отрезок продолжительностью T, который затем периодически повторяется (рис. 6.8).

Определить математическое ожидание $m_\eta(t) = M\{\eta(t)\}$ и ковариационную функцию $K_\eta(t, \tau) = M\{\eta(t)\eta(t+\tau)\}$ получающегося периодически-нестационарного процесса $\eta(t)$.

Ответ [19]: $m_\eta(t) = m_\xi$, $K_\eta(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(\tau) e^{j2n\pi t/T}$,

где

$$M_n(\tau)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\tau}{T}\right)K_\xi(\tau)+\dfrac{\tau}{T}K_\xi(T-\tau), & n=0;\\ (-1)^n\dfrac{1}{jnT}(1-e^{jn\tau})[K_\xi(\tau)-K_\xi(T-\tau)], & n\neq 0.\end{cases}$$

6.11. Доказать, что не существует стационарного случайного процесса $\xi(t)$, корреляционная функция которого $R(\tau)$ постоянна на каком-то временном интервале $(-\tau_1, \tau_1)$ и равна нулю вне его:

$$R(\tau)=\begin{cases}\sigma^2, & |\tau|<\tau_1,\\ 0 & \text{при других } \tau.\end{cases}$$

Ответ: В соответствии с теоремой Винера—Хинчина $S(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\sigma^2\tau_1\dfrac{\sin\omega\tau_1}{\omega\tau_1}$. Отсюда следует, что для процесса $\xi(t)$ функция $S(\omega)$ для некоторых значений ω отрицательна, что противоречит физическому смыслу спектральной плотности.

6.12. Определить корреляционную функцию $R(\tau)$ и спектральную плотность $S(\omega)$ случайного сигнала

$$s(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{mi}\sin(\omega_i t+\varphi_i),\quad -\infty<t<\infty,$$

где A_{mi} и ω_i — постоянные амплитуда и угловая частота; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — взаимно независимые случайные начальные фазы, равномерно распределенные на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ: $R(\tau)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2}A_{mi}^2\cos\omega_i\tau,$

$$S(\omega)=\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}A_{mi}^2[\delta(\omega+\omega_i)+\delta(\omega-\omega_i)].$$

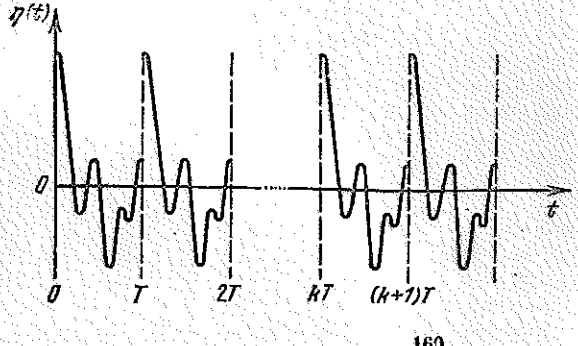


Рис. 6.8. Периодически - нестационарный случайный процесс

6.13. Определить корреляционную функцию $R(\tau)$ и спектральную плотность $S(\omega)$ случайного сигнала

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad -\infty < t < \infty,$$

где ω_i — постоянная угловая частота; $A_{m1}, \ldots, A_{mn}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — взаимно независимые случайные амплитуды и начальные фазы. Предполагается, что средние квадраты $M\{A_{mi}^2\}$ случайных амплитуд A_{mi} известны, а начальные фазы φ_i распределены равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$

Ответ: $R(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M\{A_{mi}^2\} \cos \omega_i \tau.$

$$S(\omega) = \pi \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M\{A_{mi}^2\} [\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)].$$

6.14. Найти спектральную плотность $S_{\xi_0}(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$, корреляционная функция которого равна

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp(-\alpha^2 \tau^2).$$

Ответ: $S_{\xi_0}(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2 \sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right).$

6.15. Определить спектральную плотность стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \begin{cases} \sigma_\xi^2 (1 - |\tau|/T), & |\tau| \leqslant T; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Ответ: $S_{\xi_0}(\omega) = \sigma_\xi^2 \left[\frac{\sin \omega T/2)}{\omega T/2}\right]^2.$

6.16. Решить задачу 6.15 для процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \cos \omega_i \tau.$$

Ответ: $S_{\xi_0}(\omega) = \pi \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 [\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)].$

6.17. Показать, что физическая спектральная плотность $S(f)$ сигнала

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

у которого случайны лишь фазы φ_i, причем φ_i и φ_k при $i \neq k$ независимы и равномерно распределены на интервале $(-\pi, \pi)$, равна

$$S(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} A_{mi}^2 \delta(f - f_i).$$

6.18. Найти физическую спектральную плотность случайного процесса

$$\xi(t) = A_m n(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $n(t)$ — стационарный белый шум с корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau);$$

A_m — постоянная амплитуда; φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ: $S_\xi(f) = N_0 A_m^2/2$.

6.19. Пусть стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ имеет равномерную спектральную плотность в полосе шириной F:

$$S_\xi(f) = \begin{cases} N \text{ при } 0 \leqslant f \leqslant F, \\ 0 \text{ при } f < 0, f > F. \end{cases}$$

Доказать, что значения шума $\xi(t)$ в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину $\Delta t_n = n/2F$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, статистически независимы.

Ответ: Корреляционная функция шума $\xi(t)$ равна $R_\xi(\tau) = NF (\sin 2\pi F\tau)/2\pi F\tau$ и обращается в нуль в точках $\tau = \Delta t_n = n/2F$.

6.20. Показать, что для гауссовского стационарного шума $\xi(t)$ с ограниченным, но неравномерным спектром вида

$$S_\xi(f) = \begin{cases} C \cos 2\pi f C \text{ при } 0 \leqslant f \leqslant F = 1/4C, \\ 0 \qquad\qquad \text{при } f < 0, f > F, \end{cases}$$

значения $\xi(t)$ в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину $\Delta t_n = 2nC$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, зависимы.

Ответ: Из выражения для корреляционной функции $R_\xi(\tau) = \int_0^F S_\xi(f) \cos 2\pi f\tau df = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\pi\tau/2C)}{1-(\tau/C)^2}$ следует, что $R_\xi(\Delta t_n) \neq 0$.

6.21. Случайный процесс $\eta(t)$ представляет собой последовательность случайно чередующихся отрезков «элементарных» сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, т.е. имеет вид

$$\eta(t) = (1/2)[1 + \xi(t)]\xi_1(t) + (1/2)[1 - \xi(t)]\xi_2(t)$$

Здесь $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные процессы, не зависящие от $\xi(t)$; $\xi(t)$ — случайный двоичный сигнал, который в любой момент времени t может принимать одно из двух значений $\xi = 1$ или $\xi = -1$ с одинаковыми вероятностями $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = 1/2$, причем моменты скач-

ков (перемен знака) распределены по закону Пуассона, т. е. вероятность получения n скачков на временном интервале длительностью τ определяется формулой

$$p_\tau(n) = (\nu\tau)^n \frac{e^{-\nu\tau}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислить корреляционную функцию процесса $\eta(t)$ при условии, что математические ожидания процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ равны нулю, а их корреляционные и взаимные корреляционные функции известны и имеют вид

$$R_{\xi_1}(\tau) = M\{\xi_1(t)\ \xi_1(t+\tau)\},$$
$$R_{\xi_2}(\tau) = M\{\xi_2(t)\ \xi_2(t+\tau)\},$$
$$R_{\xi_1\xi_2}(\tau) = M\{\xi_1(t)\ \xi_2(t+\tau)\}.$$

Ответ: $R_\eta(\tau) = \left(\frac{1}{4}\right)[1 + R_\xi(\tau)][R_{\xi_1}(\tau) + R_{\xi_2}(\tau)] +$
$+ (1/2)[1 - R_\xi(\tau)]R_{\xi_1\xi_2}(\tau),$

где $R_\xi(\tau) = e^{-2\nu|\tau|}$.

6.22. Определить корреляционную функцию $R(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S(f)$ случайного сигнала $s(t)$, отраженного от объекта, движущегося с относительной скоростью V. Сигнал имеет вид

$$s(t) = A_m \cos[2\pi(f_0 + 2V/\lambda_0)t + \varphi],$$

где A_m, f_0 и λ_0 — постоянные амплитуда, несущая частота и соответствующая этой частоте длина волны электромагнитных колебаний; φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$. Относительно скорости V делается предположение, что она представляет собой случайную величину, равномерно распределенную на интервале $(-V_0, V_0)$, в соответствии с чем ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p_1(V) = 1/2V_0, \quad |V| < V_0.$$

Ответ: $R(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \frac{\sin(4\pi V_0\tau/\lambda_0)}{4\pi V_0\tau/\lambda_0} \cos 2\pi f_0\tau;$

$$S(f) = \frac{A_m^2}{2} \frac{\lambda_0}{4V_0}, \quad |f - f_0| < \frac{2V_0}{\lambda_0}.$$

6.23. Решить задачу 6.22 для случая, когда

$$p_1(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_V} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right).$$

Ответ:

$$R(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi\sigma_V \tau}{\lambda_0}\right)^2\right] \cos 2\pi f_0 \tau;$$

$$S(f) = \frac{A_m^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{[2\pi (f - f_0)]^2}{4\alpha}\right\}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi\sigma_V}{\lambda_0}\right)^2.$$

6.24. Найти корреляционную функцию $R(t, \tau)$ колебания

$$s(t) = A_m E(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0],$$

где A_m и ω_0 — постоянные амплитуда и частота; φ_0 — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$; $E(t)$ и $\psi(t)$ — стационарные гауссовские случайные функции, медленно меняющиеся по сравнению с колебанием частоты ω_0 и отображающие законы амплитудной и угловой модуляции процесса $\xi(t)$.

Ответ [14]:

$$R(t, \tau) = \frac{A_m^2}{2} \operatorname{Re}[M\{E(t) E(t+\tau) e^{-j[\psi(t+\tau) - \psi(t)]}\} e^{-j\omega_0 \tau}].$$

6.25. Решить задачу 6.24 для случая амплитудной модуляции, т. е. при условии, что $\psi(t) \equiv 0$ и

$$E(t) \quad \begin{cases} 1 + m_{AM} \lambda(t), & \lambda(t) > -1/m_{AM}, \\ 0, & \lambda(t) < -1/m_{AM}. \end{cases}$$

Здесь m_{AM} — постоянный коэффициент амплитудной модуляции, $\lambda(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$.

Ответ [14]:

$$R_{AM}(\tau) = \frac{A_m^2}{2} m_{AM}^2 \sigma_\lambda^2 \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f^{(k-2)}\left(\frac{1}{m_{AM}\sigma_\lambda}\right)\right]^2 r_\lambda^k(\tau)\right\} \cos\omega_0 \tau,$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right), \quad f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x).$$

При $m_{AM}\sigma_\lambda \ll 1$ (отсутствие амплитудной перемодуляции)

$$R_{AM}(\tau) = (A_m^2/2)\cos\omega_0\tau + (A_m^2/2) m_{AM}^2 \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau) \cos\omega_0\tau.$$

При $m_{AM}\sigma_\lambda \gg 1$ (сильная перемодуляция)

$$R_{AM}(\tau) = \frac{A_m^2}{2} m_{AM}^2 \sigma_\lambda^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!\,\Gamma^2\left(1 - \frac{k-1}{2}\right)} r_\lambda^k(\tau)\right] \cos\omega_0 \tau.$$

6.26. Решить задачу 6.24 для случая фазовой модуляции, т.е. при условии, что $E(t) \equiv 1$ и $\psi(t) = M_{\Phi M}\lambda(t)$, где $M_{\Phi M}$ — постоянный коэффициент фазовой модуляции, $\lambda(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$.

Ответ [14]: $R_{\Phi M}(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp\{-M_{\Phi M}^2 \sigma_\lambda^2 [1 - r_\lambda(\tau)]\} \cos\omega_0 \tau$.

6.27. Решить задачу 6.26 при условии, что

$$\psi(t) = M_1\lambda(t) + M_2\lambda^2(t).$$

Ответ [14]: $R_{\Phi M}(\tau) = (A_m^2/2)(1 + 4M_2^2\sigma_\lambda^4[1 - r_\lambda^2(\tau)])^{-1/2} \times$ $\times \exp\{-M_1^2\sigma_\lambda^2[1 - r_\lambda(\tau)](1 + 4M_2^2\sigma_\lambda^4[1 - r_\lambda^2(\tau)])\}\cos\omega_0\tau$.

6.28. Показать, что корреляционная функция $R(\tau)$ случайного сигнала

$$s(t) = A_m \cos[\omega_0 t + M_{\Phi M}\sin\Omega t + \Phi(t)],$$

где A_m, ω_0, $M_{\Phi M}$ и Ω — постоянные величины; $\Phi(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\Phi(\tau) = \sigma_\Phi^2 r_\Phi(\tau)$, имеет вид

$$R(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 J_0\left(2M_{\Phi M}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\{-\sigma_\Phi^2[r_\Phi(0) - r_\Phi(\tau)]\}\cos\omega_0\tau.$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

6.29. Решить задачу 6.24 для случая частотной модуляции, т.е. при условии, что $E(t) \equiv 1$ и

$$\psi(t) = M_{\text{ЧМ}} \int_0^t \lambda(t)\, dt.$$

Здесь $M_{\text{ЧМ}}$ — постоянная величина; $\lambda(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$.

Ответ [14]:

$$R_{\text{ЧМ}}(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp\left[-\frac{1}{2} M_{\text{ЧМ}}^2 \sigma_\lambda^2 \int_0^\tau \int_0^u r_\lambda(u - v)\, dv du\right] \cos\omega_0\tau.$$

6.30. Решить задачу 6.29 для случая, когда корреляционная функция $R_\lambda(\tau)$ модулирующего стационарного гауссовского шума равна:

1) $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}$, 2) $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$.

Ответ:

$$1)\ R_{\text{ЧМ}}(\tau) = \frac{A_m^2}{2}\exp\left[-\frac{M_{\text{ЧМ}}^2\sigma_\lambda^2}{\alpha^2}(\alpha|\tau| + e^{-\alpha|\tau|} - 1)\right]\cos\omega_0\tau;$$

$$2)\ R_{\text{ЧМ}}(\tau) = \frac{A_m^2}{2}\exp\left\{-\frac{M_{\text{ЧМ}}^2\sigma_\lambda^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2}[e^{-\alpha^2\tau^2} - 1] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha|\tau|\sqrt{\pi}\left[\Phi\left(\sqrt{2}\,\alpha|\tau|\right) - \frac{1}{2}\right]\right)\right\}\cos\omega_0\tau.$$

6.31. Предположим, что задан узкополосный стационарный случайный процесс

$$\xi(t) = E_\xi(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_\xi(t)],$$

где $E_\xi(t)$ и $\varphi_\xi(t)$ — функции, медленно изменяющиеся по сравнению с колебанием частоты ω_0, представляющие собой огибающую и мгновенную случайную фазу колебания $\xi(t)$. Корреляционная функция процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2\rho_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

Этот процесс подвергается смешанной амплитудно-угловой модуляции, в результате чего формируется колебание

$$s(t) = E_\xi(t)E(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_\xi(t)].$$

Здесь $E(t)$ и $\psi(t)$ — медленно изменяющиеся функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции, статистически независимые от $\xi(t)$.

Определить корреляционную функцию $R(t, \tau)$ колебания $s(t)$.

Ответ [14]: $R(t, \tau) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\,[M\{E_\xi(t)E_\xi(t+\tau)e^{-j[\varphi_\xi(t+\tau)-\varphi_\xi(t)]}\}\times$

$$\times M\{E(t)E(t+\tau)e^{-j[\psi(t+\tau)-\psi(t)]}\}e^{-j\omega_0\tau}].$$

6.32. Решить задачу 6.31 для случая амплитудной модуляции, т.е. при условии, что $\psi(t) \equiv 0$, а колебание $E(t)$, отображающее закон амплитудной модуляции, имеет вид

$$E(t) = \begin{cases} 1 + m_{\text{АМ}}\lambda(t), & \lambda(t) > -1/m_{\text{АМ}}, \\ 0, & \lambda(t) < -1/m_{\text{АМ}}. \end{cases}$$

Здесь $\lambda(t)$—стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$. Предполагается, что начальная фаза $\varphi_0 = \varphi_\xi(0)$ колебания $\xi(t)$ случайна и равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [14]: $R_{\text{АМ}}(\tau) = R_\xi(\tau)M\{E(t)E(t+\tau)\}$

При $m_{\text{АМ}}\sigma_\lambda \ll 1$ (отсутствие перемодуляции)

$$R_{\text{АМ}}(\tau) = [\sigma_\xi^2\rho_\xi(\tau) + m_{\text{АМ}}^2\sigma_\xi^2\sigma_\lambda^2\rho_\xi(\tau)r_\lambda(\tau)]\cos\omega_0\tau.$$

При $m_{AM}\sigma_\lambda \gg 1$ (сильная перемодуляция)

$$R_{AM}(\tau) = \frac{1}{4} m_{AM}^2 \sigma_\xi^2 \sigma_\lambda^2 \rho_\xi(\tau) \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin r_\lambda(\tau) \right] \times \right.$$

$$\left. \times r_\lambda(\tau) + \sqrt{1 - r_\lambda^2(\tau)} \right\} \cos \omega_0 \tau.$$

6.33. Решить задачу 6.31 для случая фазовой модуляции, т. е. при условии, что $E(t) \equiv 1$, а колебание $\psi(t)$, отображающее закон фазовой модуляции, имеет вид

$$\psi(t) = M_{ФМ}\lambda(t),$$

где $M_{ФМ}$ — детерминированный коэффициент фазовой модуляции; $\lambda(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$. Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi_\xi(0)$, как и в задаче 6.32, предполагается случайной и равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [14]: $R_{ФМ}(\tau) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau) \exp\{-M_{ФМ}^2 \sigma_\lambda^2 [1 - r_\lambda(\tau)]\} \cos \omega_0 \tau$.

6.34. Решить задачу 6.31 для случая частотной модуляции, т.е. при условии, что $E(t) \equiv 1$, а колебание $\psi(t)$, отображающее закон частотной модуляции, имеет вид

$$\psi(t) = M_{ЧМ} \int_0^t \lambda(t)\, dt.$$

Здесь $M_{ЧМ}$ — постоянная величина, $\lambda(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 r_\lambda(\tau)$. Предполагается, как и ранее, что начальная фаза $\varphi_0 = \varphi_\xi(0)$ колебания $\xi(t)$ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [14]:

$$R_{ЧМ}(\tau) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau) \exp\left\{ -\frac{1}{2} M_{ЧМ}^2 \sigma_\lambda^2 \int_0^\tau \int_0^u r_\lambda(u - v)\, dv\, du \right\} \cos \omega_0 \tau.$$

6.35. Определить корреляционную функцию $R_{AM}(\tau)$ и одностороннюю ($\omega > 0$) спектральную плотность $S_{AM}(\omega)$ амплитудно-модулированного сигнала

$$s(t) = [A_m + M_{AM}\lambda(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где A_m, M_{AM} и ω_0 — постоянные величины. Предполагается, что $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями:

$$d\lambda(t)/dt + \alpha\lambda(t) = n_\lambda(t), \quad d\varphi(t)/dt = n_\varphi(t). \qquad (6.55)$$

Здесь $n_\lambda(t)$ и $n_\varphi(t)$ — независимые стационарные гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$R_{n_\lambda}(t_1, t_2) = \frac{N_\lambda}{2}\delta(t_2 - t_1). \quad R_{n_\varphi}(t_1, t_2) = \frac{N_\varphi}{2}\delta(t_2 - t_1). \quad (6.56)$$

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ считается случайной и равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$R_{AM}(\tau) = \frac{A_m^2}{2}(1 + m^2 e^{-\alpha|\tau|}) e^{-N_\varphi|\tau|/4} \cos\omega_0\tau,$$

$$m = \sigma_A/A_m, \quad \sigma_A^2 = M_{AM}^2 \sigma_\lambda^2 = N_\lambda M_{AM}^2/4\alpha,$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha}\left[\frac{D_\varphi}{D_\varphi^2 + \Omega^2} + \frac{m^2(1 + D_\varphi)}{(1 + D_\varphi)^2 + \Omega^2}\right], \quad D_\varphi = N_\alpha/4\alpha,$$

$$\Omega = (\omega - \omega_0)/\alpha, \quad \omega > 0.$$

Графики функции $S_{AM}(\omega)$ приведены на рис. 6.9.

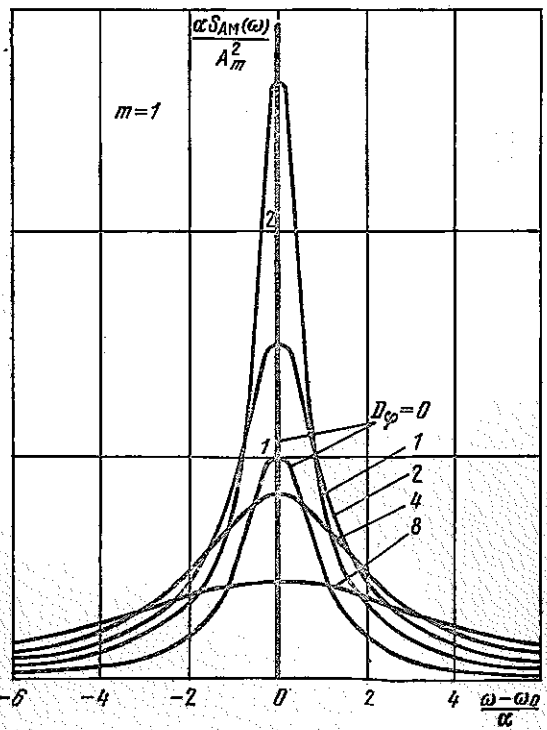


Рис. 6.9. Спектральная плотность амплитудно - модулированного сигнала

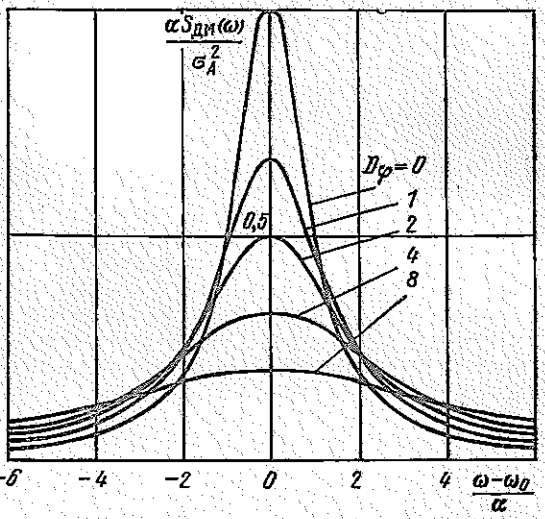


Рис. 6.10. Спектральная плотность амплитудно - модулированного сигнала с подавленной несущей

6.36. Решить задачу 6.35 для частного случая отсутствия в сигнале $s(t)$ фазовых флуктуаций ($N_\varphi = 0$).

Ответ:

$$R_{\text{АМ}}(\tau) = \frac{A_m^2}{2}(1 + m^2 e^{-\alpha|\tau|})\cos\omega_0\tau,$$

$$S_{\text{АМ}}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha}\left[\pi\delta(\Omega) + \frac{m^2}{1+\Omega^2}\right], \quad \Omega = \frac{\omega-\omega_0}{\alpha}, \quad \omega > 0.$$

6.37. Найти корреляционную функцию $R_{\text{ДМ}}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{\text{ДМ}}(\omega)$ двухполосного амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей

$$s(t) = M_{\text{АМ}}\lambda(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $M_{\text{АМ}}$ и ω_0 — постоянные величины; $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (6.55) и (6.56). Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ считается случайной и равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$R_{\text{ДМ}}(\tau) = (\sigma_A^2/2)\, e^{-(\alpha + N_\varphi/4)|\tau|}\cos\omega_0\tau,$$

$$S_{\text{ДМ}}(\omega) = \frac{\sigma_A^2}{\alpha}\,\frac{1+D_\varphi}{(1+D_\varphi)^2+\Omega^2}, \quad \Omega = \frac{\omega-\omega_0}{\alpha}, \quad \omega > 0.$$

Графики функции $S_{\text{ДМ}}(\omega)$ представлены на рис. 6.10.

6.38. Вычислить корреляционную функцию $R_{\Phi\text{М}}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{\Phi\text{М}}(\omega)$ фазомодулированного сигнала

$$s(t) = A_m\cos[\omega_0 t + M_{\Phi\text{М}}\lambda(t) + \varphi(t)],$$

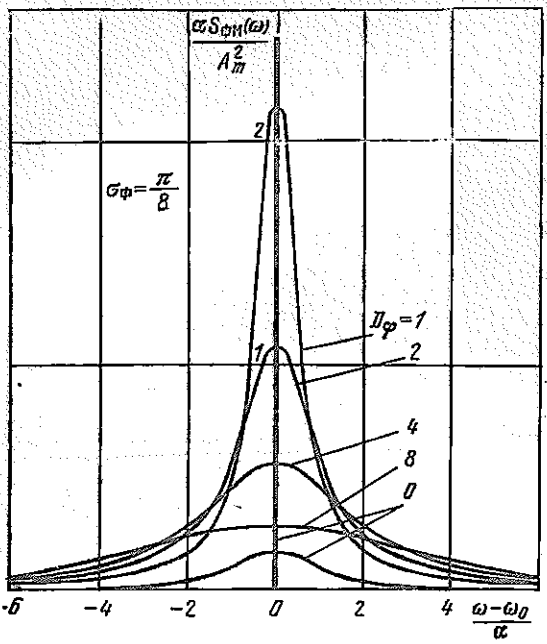


Рис. 6.11. Спектральная плотность фазомодулированного сигнала

где A_m, ω_0 и $M_{\Phi M}$ — постоянные величины; $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (6.55) и (6.56). Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ случайна и равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$R_{\Phi M}(\tau) = \frac{A_m^2}{2} e^{-(\sigma_\Phi^2 + D_\varphi \alpha |\tau|)} \exp(\sigma_\Phi^2 e^{-\alpha|\tau|}) \cos\omega_0\tau =$$

$$= \frac{A_m^2}{2} e^{-\sigma_\Phi^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sigma_\Phi^2)^n e^{-(n+D_\varphi)\alpha|\tau|} \right] \cos\omega_0\tau,$$

$$\sigma_\Phi^2 = \sigma_\lambda^2 M_{\Phi M}^2 = \frac{1}{4} N_\lambda M_{\Phi M}^2, \quad D_\varphi = \frac{1}{4\alpha} N_\varphi,$$

$$S_{\Phi M}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} e^{-\sigma_\Phi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_\Phi^2)^n (n + D_\varphi)}{n! [(n+D_\varphi)^2 + \Omega^2]}, \quad \Omega = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}, \omega > 0.$$

Графики функции $S_{\Phi M}(\omega)$ приведены на рис. 6.11.

6.39. Решить задачу 6.38 для частного случая отсутствия в сигнале $s(t)$ фазовых флуктуаций ($N_\varphi = 0$).

Ответ:

$$R_{\Phi M}(\tau)=\frac{A_m^2}{2}e^{-\sigma_\Phi^2}\exp(\sigma_\Phi^2 e^{-\alpha|\tau|})\cos\omega_0\tau=$$

$$=\frac{A_m^2}{2}e^{-\sigma_\Phi^2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sigma_\Phi^2)^n e^{-n\alpha|\tau|}\right]\cos\omega_0\tau;$$

$$S_{\Phi M}(\omega)=\frac{A_m^2}{\alpha}e^{-\sigma_\Phi^2}\left[\pi\delta(\Omega)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma_\Phi^2)^n}{(n-1)!\,(n^2+\Omega^2)}\right],$$

$$\Omega=(\omega-\omega_0)/\alpha,\quad \omega>0.$$

6.40. Определить корреляционную функцию $R_{ЧМ}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{ЧМ}(\omega)$ частотно-модулированного сигнала

$$s(t)=A_m\cos\left[\omega_0 t+M_{ЧМ}\int_0^t\lambda(t)\,dt+\varphi(t)\right],$$

где A_m, ω_0 и $M_{ЧМ}$ — постоянные величины; $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (6.55) и (6.56). Начальная фаза $\varphi_0=\varphi(0)$ случайна и равномерно распределена на интервале $(-\pi,\ \pi)$

Ответ:

$$R_{ЧМ}(\tau)=\frac{A_m^2}{2}e^{[\beta_{ЧМ}^2-(\beta_{ЧМ}^2+D_\varphi)\alpha|\tau|]}\exp(-\beta_{ЧМ}^2 e^{-\alpha|\tau|})\cos\omega_0\tau=$$

$$=\frac{A_m^2}{2}e^{\beta_{ЧМ}^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta_{ЧМ}^2)^n}{n!}e^{-(n+\beta_{ЧМ}^2+D_\varphi)\alpha|\tau|}\right]\cos\omega_0\tau;$$

$$S_{ЧМ}(\omega)=\frac{A_m^2}{\alpha}e^{\beta_{ЧМ}^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta_{ЧМ}^2)^n(n+\beta_{ЧМ}^2+D_\varphi)}{n!\,[(n+\beta_{ЧМ}^2+D_\varphi)^2+\Omega^2]},$$

$$\beta_{ЧМ}^2=\frac{\sigma_\lambda^2}{\alpha^2}M_{ЧМ}^2,\quad D_\varphi=\frac{1}{4\alpha}N_\varphi,\quad \Omega=\frac{\omega-\omega_0}{\alpha},\quad \omega>0.$$

Графики функции $S_{ЧМ}(\omega)$ даны на рис. 6.12.

6.41. Определить корреляционную функцию $R_{АФМ}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{АФМ}(\omega)$ амплитудно-фазомодулированного сигнала

$$s(t)=M_{АМ}\lambda(t)\cos[\omega_0 t+M_{ФМ}\lambda(t)+\varphi(t)],$$

где $M_{АМ}$, $M_{ФМ}$ и ω_0 — постоянные величины; $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (6.55) и (6.56).

Ответ:

$$R_{\text{АФМ}}(\tau)=\frac{\sigma_{\text{А}}^2}{2}\,e^{-\sigma_{\Phi}^2}\left[\sigma_{\Phi}^2\,e^{-D_{\varphi}\alpha|\tau|}+(1-2\sigma_{\Phi}^2)\,e^{-(1+D_{\varphi})\alpha|\tau|}+\right.$$

$$\left.+\,\sigma_{\Phi}^2\,e^{-(2+D\varphi)\alpha|\tau|}\right]\exp\left(\sigma_{\Phi}^2\,e^{-\alpha|\tau|}\right)\cos\omega_0\tau;$$

$$S_{\text{АФМ}}(\omega)=\frac{\sigma_{\text{А}}^2}{\alpha}\,e^{-\sigma_{\Phi}^2}\left\{\sigma_{\Phi}^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_{\Phi}^2)^n\,(n+D_{\varphi})}{n!\left[(n+D_{\varphi})^2+\Omega^2\right]}+(1-2\sigma_{\Phi}^2)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_{\Phi}^2)^n\,(n+1+D_{\varphi})}{\left[(n+1+D_{\varphi})^2+\Omega^2\right]}+\sigma_{\Phi}^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_{\Phi}^2)^n\,(n+2+D_{\varphi})}{n!\left[(n+2+D_{\varphi})^2+\Omega^2\right]}\right\},$$

$$\sigma_{\text{А}}^2=\sigma_{\lambda}^2\,M_{\text{АМ}}^2,\quad \sigma_{\Phi}^2=\sigma_{\lambda}^2\,M_{\Phi\text{М}}^2,\quad D_{\varphi}=\frac{1}{4\alpha}\,N_{\varphi},$$

$$\Omega=\frac{\omega-\omega_0}{\alpha},\quad \omega>0.$$

Графики функции $S_{\text{АФМ}}(\omega)$ приведены на рис. 6.13.

6.42. Вычислить корреляционную функцию $R_{\text{АЧМ}}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{\text{АЧМ}}(\omega)$ амплитудно-частотно-модулированного сигнала

$$s(t)=M_{\text{АМ}}\,\lambda(t)\cos\left[\omega_0 t+M_{\text{ЧМ}}\int_0^t\lambda(t)\,dt+\varphi(t)\right],$$

где $M_{\text{АМ}}$, $M_{\text{ЧМ}}$ и ω_0 — постоянные величины; $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (6.55) и (6.56). Начальная фаза $\varphi_0=\varphi(0)$, как и в предыдущих задачах, предполагается случайной и равномерно распределенной на интервале $(-\pi,\ \pi)$.

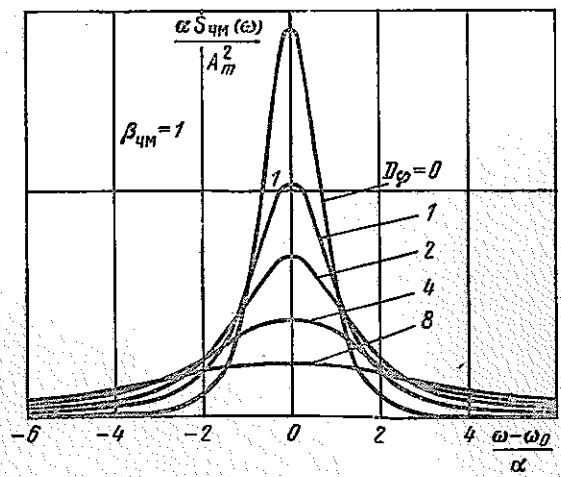


Рис. 6.12. Спектральная плотность частотно - модулированного сигнала

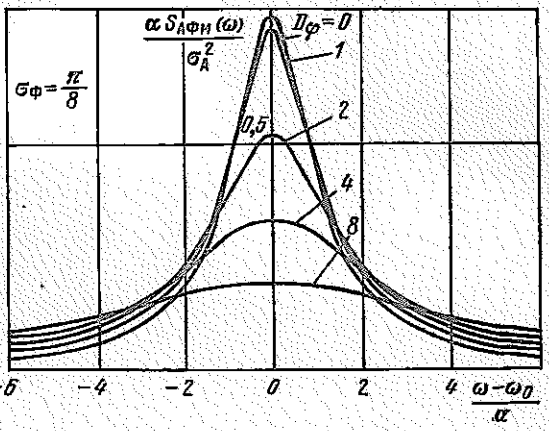


Рис. 6.13. Спектральная плотность амплитудно-фазомодулированного сигнала

Ответ:

$$R_{A\text{чм}}(\tau)=\frac{\sigma_A^2}{2}e^{\beta^2_{\text{чм}}}\left[-\beta^2_{\text{чм}}e^{-D_\varphi\alpha|\tau|}+(1+2\beta^2_{\text{чм}})e^{-(1+D_\varphi)\alpha|\tau|}-\right.$$

$$\left.-\beta^2_{\text{чм}}e^{-(2+D_\varphi)\alpha|\tau|}\right]e^{-\beta^2_{\text{чм}}\alpha|\tau|}\exp\left(-\beta^2_{\text{чм}}e^{-\alpha|\tau|}\right)\cos\omega_0\tau;$$

$$S_{A\text{чм}}(\omega)=\frac{\sigma_A^2}{\alpha}e^{\beta^2_{\text{чм}}}\left\{-\beta^2_{\text{чм}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta^2_{\text{чм}})^n(n+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)}{n!\,[(n+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)^2+\Omega^2]}+\right.$$

$$+(1+2\beta^2_{\text{чм}})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta^2_{\text{чм}})^n(n+1+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)}{n!\,[(n+1+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)^2+\Omega^2]}-$$

$$\left.-\beta^2_{\text{чм}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta^2_{\text{чм}})^n(n+2+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)}{n!\,[(n+2+\beta^2_{\text{чм}}+D_\varphi)^2+\Omega^2]}\right\},$$

$$\beta^2_{\text{чм}}=\frac{\sigma_\lambda^2}{\alpha^2}M^2_{\text{чм}},\quad \sigma_A^2=\sigma_\lambda^2M^2_{A\text{м}},\quad D_\varphi=\frac{1}{4\alpha}N_\varphi,\quad \Omega=\frac{\omega-\omega_c}{\alpha},\quad \omega>0.$$

Графики функции $S_{A\text{чм}}(\omega)$ представлены на рис. 6.14.

6.43. Найти интервал корреляции $\tau_к$ для стационарных случайных процессов $\xi(t)$ с корреляционными функциями:

1) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2e^{-\alpha|\tau|}$; 2) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2e^{-\alpha^2\tau^2}$; 3) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2(1-\alpha|\tau|)$, $|\tau|\leqslant 1/\alpha$.

Ответ: 1) $\tau_к=1/\alpha$; 2) $\tau_к=\sqrt{\pi}/2\alpha$; 3) $\tau_к=1/2\alpha$.

6.44. Определить эффективную ширину $\Delta\omega_э$ спектра $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционными функциями

1) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2(1-\alpha|\tau|)$, $|\tau|\leqslant 1/\alpha$; 2) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2e^{-\alpha|\tau|}$; 3) $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2e^{-\alpha^2\tau^2}$.

Ответ: 1) $\Delta\omega_э=\pi\alpha$; 2) $\Delta\omega_э=\pi\alpha/2$; 3) $\Delta\omega_э=2\sqrt{\pi}\alpha$.

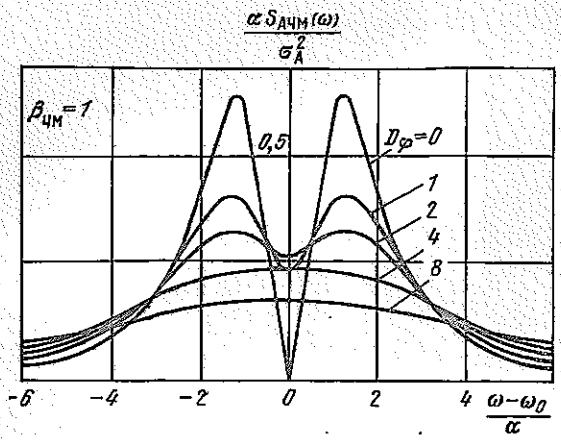


Рис. 6.14. Спектральная плотность амплитудно-частотно - модулированного сигнала

6.45. Показать, что для любого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(\tau)$, принимающей только положительные значения, произведение времени корреляции $\tau_к$ на эффективную ширину спектра $\Delta\omega_э$ равно $\Delta\omega_э\tau_к = \pi/2$.

6.46. Определить эффективную ширину спектра $\Delta\omega_э$, среднюю частоту спектральной плотности m_ω, средний квадрат частоты $M\{\omega^2\}$ и среднюю квадратическую ширину σ_ω спектральной плотности стационарных случайных процессов с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями:

1) $R(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2}\cos\omega_0\tau$;

2) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}\cos\omega_0\tau$;

3) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$.

Ответ:

1) $\Delta\omega_э = \Delta\omega$, $m_\omega = \omega_0$, $M\{\omega^2\} = \omega_0^2 + \Delta\omega^2/12$, $\sigma_\omega^2 = \Delta\omega^2/12$;

2) $\Delta\omega_э = 2\sqrt{\pi}\,\alpha$, $m_\omega \simeq \omega_0$, $M\{\omega^2\} \simeq \omega_0^2 + \alpha^2$, $\sigma_\omega^2 \simeq \alpha^2$;

3) $\Delta\omega_э = \pi\alpha$, $m_\omega = \frac{\omega_1^2}{\omega_0}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega_1}\right] \simeq \omega_1 - 2\alpha/\pi$,

$\sigma_\omega^2 \simeq 4\alpha\omega_1/\pi$, $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \alpha^2$.

6.47. Доказать, что необходимым и достаточным условием непрерывности в среднеквадратическом стационарного случайного процесса $\xi(t)$ является непрерывность его корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ при $\tau = 0$.

6.48. Определить, удовлетворяют ли условиям непрерывности и дифференцируемости стационарные случайные процессы $\xi(t)$ с корреляционными функциями вида

1) $R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$; 2) $R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$;

3) $R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$.

Ответ: Процессы $\xi(t)$ с корреляционными функциями вида 1) и 2) непрерывны, но не дифференцируемы; процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией 3) непрерывен и дифференцируем.

6.49. Случайный процесс $\xi(t)$ задан корреляционной функцией

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sh}\omega_0|\tau|\right), \quad \alpha > \omega_0 > 0.$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса

$$\eta(t) = d\xi(t)/dt.$$

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = (\alpha^2 - \omega_0^2)\, e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sh}\omega_0|\tau|\right);$$

$$S_\eta(\omega) = \frac{4\alpha\omega^2(\alpha^2-\omega_0^2)}{|(\alpha-\omega_0)^2+\omega^2|\,|(\alpha+\omega_0)^2+\omega^2|}.$$

6.50. Случайный процесс $\eta(t)$ получается посредством дифференцирования стационарного случайного колебания $\xi(t)$:

$$\eta(t) = d\xi(t)/dt.$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ в тех частных случаях, когда функция $R_\xi(\tau)$ колебания $\xi(t)$ задана выражениями:

1) $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

2) $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$;

3) $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$.

Ответ:

1) $R_\eta(\tau) = \alpha^2\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left[1 - \frac{2}{\alpha}\delta(\tau)e^{\alpha|\tau|}\right]$;

2) $R_\eta(\tau) = \alpha^2\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$;

3) $R_\eta(\tau) = (\alpha^2+\omega_0^2)\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$.

6.51. Найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ стационарного случайного процесса $\eta(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\eta(\tau) = \alpha\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left[1 - \frac{2}{\alpha}\delta(\tau)e^{\alpha|\tau|}\right]$$

(см. задачу 6.50).

Ответ: $S_\eta(\omega) = 2\alpha\sigma^2\omega^2/(\alpha^2 + \omega^2)$.

График функции $S_\eta(\omega)/2\alpha\sigma^2$ приведен на рис. 6.15.

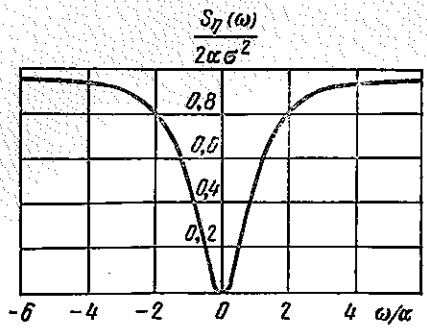


Рис. 6.15. Спектральная плотность производной от стационарного случайного процесса

6.52. Показать, что взаимная корреляционная функция $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и его производной $\eta(t) = d\xi(t)/dt$ удовлетворяет условию

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = -R_{\xi\eta}(t_2, t_1),$$

т.е. при перемене местами аргументов меняет знак на обратный.

6.53. Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса

$$\eta(t) = a\xi(t) + bd\xi(t)/dt,$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Ответ: $S_\eta(\omega) = \dfrac{4\sigma^2\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}(a^2 + b^2\omega^2)$.

6.54. Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ случайного процесса

$$\eta(t) = a\xi(t) + b\frac{d\xi(t)}{dt} + c\frac{d^2\xi(t)}{dt^2},$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Ответ [19]: $R_\eta(\tau) = a^2 R_\xi(\tau) + (2ac - b^2)\dfrac{d^2 R_\xi(\tau)}{d\tau^2} + c^2\dfrac{d^4 R_\xi(\tau)}{d\tau^4}$.

7. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимают случайная величина $\xi(t)$ и ее параметр t в области задания процесса $[0, T]$, различают четыре основных вида марковских случайных процессов: марковские цепи (дискретный процесс с дискретным временем), марковские последовательности (непрерывный процесс с дискретным временем),

дискретный марковский процесс (дискретный процесс с непрерывным временем) и непрерывнозначный марковский процесс (непрерывный процесс с непрерывным временем). Характер временных реализаций перечисленных процессов показан в табл. 7.1. Помимо четырех основных видов, возможны другие, более сложные процессы марковского типа (дискретно-непрерывные, различного характера смешанные и т. д.) [45].

Определяющее свойство всех видов марковских процессов состоит в следующем. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любых n моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из отрезка $[0, T]$ условная функция распределения «последнего» значения $\xi(t_n)$ при фиксированных значениях $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_{n-1})$ зависит только от $\xi(t_{n-1})$, т. е. при заданных значениях ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n справедливо соотношение

$$P\{\xi(t_n) \leqslant \xi_n \mid \xi(t_1)=\xi_1, \ldots, \xi(t_{n-1})=\xi_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) \leqslant \xi_n \mid \xi(t_{n-1})=\xi_{n-1}\}. \quad (7.1)$$

Для трех моментов времени $t_i > t_j > t_k$ формула (7.1) принимает вид

$$P\{\xi(t_i) \leqslant \xi_i \mid \xi(t_k)=\xi_k, \xi(t_j)=\xi_j\} = P\{\xi(t_i) \leqslant \xi_i \mid \xi(t_j)=\xi_j\}. \quad (7.2)$$

Поэтому часто говорят, что характерное свойство марковских процессов состоит в следующем: если точно известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени (t_j), то будущее состояние (при t_i) не зависит от прошлого состояния (при t_k).

В качестве определения марковского процесса можно также принять следующее соотношение, симметричное относительно времени:

$$P\{\xi(t_i) \leqslant \xi_i, \xi(t_k) \leqslant \xi_k \mid \xi(t_j)=\xi_j\} = P\{\xi(t_i) \leqslant \xi_i \mid \xi(t_j)=\xi_j\} P\{\xi(t_k) \leqslant \xi_k \mid \xi(t_j)=\xi_j\}. \quad (7.3)$$

Такая запись означает, что при фиксированном состоянии процесса в настоящий момент времени t_j будущее (при t_i) и прошлое (при t_k) состояния марковского процесса независимы.

Укажем еще одно общее и важное свойство марковских процессов: для них эволюция вероятности перехода $P\{\xi(t) < \xi \mid \xi(t_0) = \xi_0\}$ описывается уравнением вида

$$dP/dt = \mathscr{A}P, \quad (7.4)$$

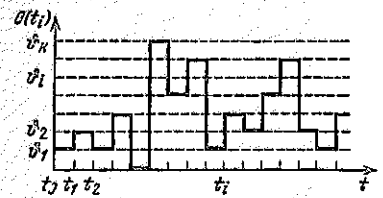
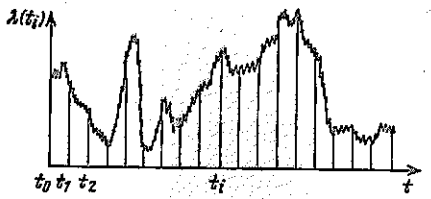
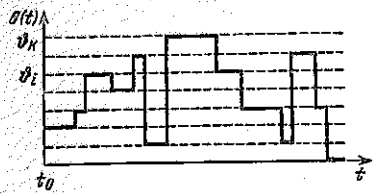
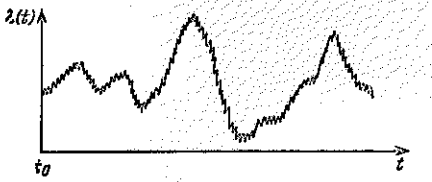
где $\mathscr{A}$ — некоторый линейный оператор (матрица, дифференциальный оператор и др.). Это позволяет исследовать поведение марковских процессов при помощи хорошо разработанных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. При этом характер решаемых физических задач может быть различным, в зависимости от заданных начальных и граничных условий для уравнения (7.4).

Пусть, например, поведение рассматриваемой системы описывается некоторым уравнением, удовлетворяющим условию (7.2), и заданы начальные условия (состояние системы в начальный момент времени t_0). Тогда в отсутствие каких-либо ограничений нужно сначала записать уравнение вида (7.4) и затем при заданных начальных условиях найти его решение. Если же на поведение системы наложены некоторые ограничения, то для полученного уравнения вида (7.4), кроме начальных условий, нужно дополнительно задать граничные условия, отражающие эти ограничения.

Характер граничных условий может быть разным. Например, точка, отображающая поведение системы, начиная движение из начального состояния $\xi(t_0) = \xi_0$, при достижении границы $\xi(t) = c$ «поглощается» ею и работа системы прекращается (нарушается) (траектория *1* на рис. 7.1); точка «отражается» от границы c (траектория *2*) и т. д. Если граница c поглощающая, то, помимо отыскания вероятности перехода P для $\xi < c$, можно интересоваться вероятностью «поглощения» за некоторое время T или же математическим ожиданием, дисперсией и другими характеристиками времени T, по истечении которого траектория в первый раз достигнет границы c.

Таблица 7.1

Классификация марковских процессов

Значения аргумента	Значения процесса: Дискретные	Значения процесса: Непрерывные
Дискретные	 Цепь Маркова	 Марковская последовательность
Непрерывные	 Дискретный марковский процесс	 Непрерывнозначный марковский процесс

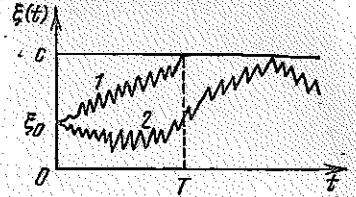


Рис. 7.1. Влияние поглощающей и отражающей границы на траекторию процесса

Задачи указанного характера имеют математически строгое решение только для марковских процессов.

Конкретизируем уравнение (7.4) для четырех основных видов марковских процессов [45].

1. Простая цепь Маркова. Пусть случайный процесс $\theta(t)$ может принимать конечное число K различных дискретных значений $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_K$. В некоторые дискретные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ эти значения могут мгновенно изменяться, т. е. имеют место переходы $\vartheta_i \to \vartheta_j$, $i, j = \overline{1, K}$.

Характеристическое свойство простой цепи Маркова состоит в том, что вероятность $P(\theta_n)$ значения процесса θ_n в момент времени t_n зависит лишь от того, какое значение имел процесс в непосредственно предшествующий ему момент времени t_{n-1}, и не зависит от значений процесса в более ранние моменты времени, т. е.

$$P(\theta_n \mid \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = P(\theta_n \mid \theta_{n-1}) = \pi(\theta_n \mid \theta_{n-1}).$$

Поэтому для простой цепи Маркова совместные конечномерные плотности вероятности определяются формулой

$$P(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = P_1(\theta_0) \prod_{\mu=1}^{n} \pi_\mu(\theta_\mu \mid \theta_{\mu-1}). \qquad (7.5)$$

Условные вероятности $\pi_\mu(\theta_\mu \mid \theta_{\mu-1})$ принято называть вероятностями перехода из состояния $\theta_{\mu-1}$ в состояние θ_μ за промежуток времени $(t_\mu - t_{\mu-1})$.

Одна из основных задач в теории простых цепей Маркова следующая. Пусть задано начальное значение процесса при t_0 и указан вероятностный закон смены соседних значений процесса (т. е. заданы соответствующие вероятности перехода). Каким образом можно найти вероятности различных значений процесса в момент времени $t_n > t_0$ и, в частности, при $n \to \infty$?

Введем следующие обозначения для безусловных и условных вероятностей:

$$p_k(n) = P\{\theta_n = \vartheta_k\}, \quad \pi_{jk}(\mu, n) = P\{\theta_n = \vartheta_k \mid \theta_\mu = \vartheta_j\}, \qquad (7.6)$$

$$j, k = \overline{1, K}, \ 0 \leqslant \mu \leqslant n, \ n = \overline{0, N}.$$

Величина $p_k(n)$ есть безусловная вероятность значения ϑ_k на n-м шаге (т. е. в момент времени $t = t_n$), а $p_k(t_0) = p_k^0$ — начальная вероятность значения ϑ_k. Условная вероятность $\pi_{jk}(\mu, n)$ определяет вероятность значения ϑ_k при t_n, если в более ранний момент времени $t_\mu < t_n$ значение процесса было равно ϑ_j.

Очевидно, что введенные вероятности неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{k=1}^{K} p_k(n) = 1, \quad p_k(n) \geqslant 0, \quad n = \overline{0, N}; \tag{7.7}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \pi_{jk}(\mu, n) = 1, \quad \pi_{jk}(\mu, n) \geqslant 0, \quad j = \overline{1, K}. \tag{7.8}$$

На основании правила полной вероятности для введенных вероятностей можем написать уравнения Маркова:

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{K} p_j(\mu)\, \pi_{jk}(\mu, n), \quad k = \overline{1, K}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant n; \tag{7.9}$$

$$\pi_{jk}(\mu, n) = \sum_{i=1}^{K} \pi_{ji}(\mu, m)\, \pi_{ik}(m, n), \quad j, k = \overline{1, K}, \quad 0 \leqslant \mu < m < n. \tag{7.10}$$

Среди простых цепей Маркова выделяют однородные цепи. Они характеризуются тем, что вероятности перехода $\pi_{jk}(\mu, n)$ зависят только от разности аргументов, т. е.

$$\pi_{jk}(\mu, n) = \pi_{jk}(n-\mu), \quad n > \mu \geqslant 0. \tag{7.11}$$

Обозначим одношаговые вероятности перехода через $\pi_{jk} = \pi_{jk}(1)$. Полное вероятностное описание простой однородной цепи Маркова достигается заданием начальных вероятностей $\{p_k^0\}$ и матрицы одношаговых вероятностей перехода

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{K1} & \pi_{K2} & \cdots & \pi_{KK} \end{bmatrix}. \tag{7.12}$$

Можно убедиться, что для простой однородной цепи Маркова матрица вероятностей перехода за n шагов равна n-й степени матрицы одношаговых вероятностей

$$\pi(n) = \pi^n, \tag{7.13}$$

а матрица вероятностей различных значений процесса определяется уравнением

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(n) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(0)\, \pi^n. \tag{7.14}$$

Здесь $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(n)$ — матрица-строка безусловных вероятностей различных значений процесса на n-м шаге, $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(0) = [p_1^0, p_2^0, \ldots, p_K^0]$ — матрица-строка начальных вероятностей (при t_0).

Однородная цепь Маркова, для которой вероятности $\{p_k(n)\} = \{p_k\}$ не зависят от n, называется стационарной, в противном случае цепь называется нестационарной. В общем случае вероятности p_k, если они существуют, находятся в результате предельного перехода

$$p_k = \lim_{n \to \infty} p_k(n), \quad k = \overline{1, K}, \tag{7.15}$$

и называются финальными вероятностями. Однако, если начальные вероятности $\{p_k^0\}$ совпадают с соответствующими финальными вероятностями $\{p_k\}$, то цепь Маркова будет стационарной начиная с t_0.

Финальные вероятности должны удовлетворять системе K линейных алгебраических уравнений

$$p_k = \sum_{j=1}^{K} p_j \pi_{jk}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{7.16}$$

и дополнительному условию

$$\sum_{k=1}^{K} p_k = 1, \quad p_k \geqslant 0. \tag{7.17}$$

Суммируя обе части всех равенств (7.16) по k и учитывая соотношение (7.8), приходим к тождеству. Поэтому K уравнений (7.16) являются линейно зависимыми, и K финальных вероятностей следует определять из $(K-1)$ уравнений (7.16) и уравнения (7.17).

2. Дискретный марковский процесс. Пусть по-прежнему случайный процесс $\theta(t)$ может принимать только дискретные значения $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_K$, но смена этих значений происходит не в фиксированные, а в любые случайные моменты времени. Вероятности перехода

$$\pi_{ij}(t_0, t) = P\{\theta(t) = \vartheta_j \mid \theta(t_0) = \vartheta_i\}, \quad t > t_0, \tag{7.18}$$

удовлетворяют следующим соотношениям

$$\sum_{j=1}^{K} \pi_{ij}(t_0, t) = 1, \quad \pi_{ij}(t_0, t) \geqslant 0, \quad i, j = \overline{1, K}, \tag{7.19}$$

$$\pi_{ij}(t_0, t_0) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{7.20}$$

Кроме этого, для них справедливо уравнение Колмогорова—Чэпмена

$$\pi_{ij}(t_0, t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{K} \pi_{ik}(t_0, t)\, \pi_{kj}(t, t+\Delta t), \quad t > t_0, \ \Delta t > 0. \tag{7.21}$$

Характерное свойство рассматриваемых процессов состоит в том, что для малых временных интервалов Δt вероятность π_{kk} того, что значение не изменится, превышает вероятность изменения значения:

$$\begin{aligned} \pi_{kk}(t, t+\Delta t) &= 1 + a_{kk}(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ \pi_{kj}(t, t+\Delta t) &= a_{kj}(t)\,\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{7.22}$$

где символом $o(\Delta t)$ обозначены члены выше первого порядка малости относительно Δt, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [o(\Delta t)/\Delta t] = 0$ [45].

Так как вероятности перехода из одного значения в другое неотрицательны ($a_{kj}(t) \geqslant 0$) и для них должно выполняться условие нормировки (7.19), то из (7.22) получаем

$$a_{kk}(t) = -\sum_{j\ (j \neq k)} a_{kj}(t) \leqslant 0, \quad a_{kj}(t) \geqslant 0. \tag{7.23}$$

Подставив (7.22) в правую часть уравнения (7.21) и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_{ij}(t_0, t) = \sum_{k=1}^{K} a_{kj}(t)\,\pi_{ik}(t_0, t), \quad i, j = \overline{1, K}, \tag{7.24}$$

где $a_{kj}(t)$ удовлетворяют соотношению (7.23). Решение этой системы при начальных условиях (7.20) дает зависимость вероятностей перехода от времени

Дискретный марковский процесс остается марковским и в обратном направлении, т. е. наряду с уравнениями (7.24), часто называемыми «прямыми», справедливы также «обратные» уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\pi_{ij}(t_0, t) = -\sum_{k=1}^{K} a_{ik}(t_0)\,\pi_{kj}(t_0, t),\ t > t_0\,. \tag{7.25}$$

Уравнениям (7.24) удовлетворяют не только вероятности перехода, но и безусловные вероятности значений $p_j(t)$:

$$\frac{d}{dt}p_j(t) = \sum_k a_{kj}(t)\,p_k(t). \tag{7.26}$$

Эти дифференциальные уравнения нужно интегрировать при начальных условиях

$$p_j(t) = p_j(t_0) = p_j^0 \ \text{ при } \ t = t_0. \tag{7.27}$$

Дискретный марковский процесс называется однородным, если вероятности перехода $\pi_{ij}(t_0,\ t)$ зависят только от разности $\tau = t - t_0$:

$$\pi_{ij}(t_0,\ t) = \pi_{ij}(\tau), \qquad \tau = t - t_0. \tag{7.28}$$

Из (7.22) следует, что для однородного процесса $a_{kj}(t) = a_{kj}$ постоянные величины и дифференциальные уравнения (7.24) упрощаются:

$$\frac{d}{d\tau}\pi_{ij}(\tau) = \sum_k a_{kj}\,\pi_{ik}\ \tau)\,. \tag{7.29}$$

Если при $\tau \to \infty$ существуют предельные значения вероятностей перехода $p_j = \lim\limits_{\tau\to\infty}\pi_{ij}(\tau)$, которые не зависят от начального состояния, то марковский процесс можно назвать стационарным. Вероятности стационарных значений определяются системой алгебраических уравнений

$$\sum_k a_{kj}\,p_k = 0,\ \sum_k p_k = 1\,. \tag{7.30}$$

3. **Марковские последовательности.** Пусть случайные величины $\lambda_n = \lambda(t_n)$ в некоторые дискретные моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < t_N$ принимают непрерывное множество возможных значений (см. табл. 7.1). Определяющее свойство марковской последовательности $\{\lambda_n,\ n = \overline{1,\ N}\}$ состоит в том, что совместная плотность вероятности рассматриваемых случайных величин выражается через плотность вероятности начального состояния $p_1(\lambda_1)$ и плотности вероятности перехода $\pi_n(\lambda_n|\lambda_{n-1}),\ n = \overline{2,\ N}$:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = p_1(\lambda_1)\prod_{\mu=2}^{n}\pi_\mu(\lambda_\mu|\lambda_{\mu-1}). \tag{7.31}$$

Укажем некоторые свойства марковских последовательностей: 1) если точно известно значение марковской последовательности в настоящий момент времени, то ее будущее значение не зависит от предыдущего значения; 2) любая последовательность, взятая из марковской, является также марковской; 3) марковская последовательность остается марковской и в обратном направлении; 4) плотность вероятности перехода удовлетворяет уравнению

$$\pi(\lambda_n|\lambda_\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\pi(\lambda_n|\lambda_m)\,\pi(\lambda_m|\lambda_\mu)\,d\lambda_m,\ n > m > \mu \tag{7.32}$$

Марковская последовательность называется однородной, если плотности вероятности перехода $\pi_n(\lambda_n \mid \lambda_{n-1})$ не зависят от n. Марковская последовательность называется стационарной, если она однородна и все случайные величины $\lambda(n)$ имеют одну и ту же плотность вероятности: $p(\lambda_n) = \text{const}(n)$.

4. **Непрерывнозначный марковский процесс.** Область значений непрерывнозначного процесса $\lambda(t)$ и область его определения $[0, T]$ есть непрерывные множества. Для непрерывнозначного марковского процесса диффузионного типа плотность вероятности перехода $\pi(\lambda, t \mid \lambda_0, t_0) = P(\lambda(t) \mid \lambda(t_0))$ и безусловная плотность вероятности $p(\lambda, t)$ удовлетворяют уравнению в частных производных Фоккера—Планка—Колмогорова, которое применительно к плотности вероятности $p(\lambda, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\lambda, t) = -\frac{\partial}{\partial \lambda}[a(\lambda, t)\, p(\lambda, t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}[b(\lambda, t)\, p(\lambda, t)] \quad (7.33)$$

или, иначе,

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\lambda, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda} G(\lambda, t) = 0, \quad (7.34)$$

где

$$G(\lambda, t) = a(\lambda, t)\, p(\lambda, t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \lambda}[b(\lambda, t)\, p(\lambda, t)]. \quad (7.35)$$

«Коэффициенты» сноса $a(\lambda, t)$ и диффузии $b(\lambda, t)$ определяются по исходному стохастическому дифференциальному уравнению, описывающему поведение рассматриваемой системы, формулами

$$a(\lambda, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)] \mid \lambda(t)\}, \quad (7.36)$$

$$b(\lambda, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)]^2 \mid \lambda(t)\} \geqslant 0. \quad (7.37)$$

Если стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$d\lambda/dt = f(\lambda, t) + g(\lambda, t)\, n(t), \qquad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad (7.38)$$

где $f(\lambda, t)$ и $g(\lambda, t)$ — детерминированные функции своих аргументов, $n(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$M\{n(t_1)\, n(t_2)\} = (1/2) N_0 \delta(t_2 - t_1), \quad (7.39)$$

то коэффициенты сноса и диффузии равны

$$a(\lambda, t) = f(\lambda, t) + \frac{1}{4}\frac{\partial b(\lambda, t)}{\partial \lambda}, \quad b(\lambda, t) = \frac{1}{2} N_0 g^2(\lambda, t). \quad (7.40)$$

Коэффициент сноса $a(\lambda, t)$ характеризует среднее значение локальной скорости марковского процесса $\lambda(t)$, а коэффициент диффузии $b(\lambda, t)$ — локальную скорость изменения дисперсии приращения. Если плотность вероятности перехода зависит лишь от разности временных аргументов $\tau = t - t_0$, а коэффициенты a и b не зависят от t и t_0, то рассматриваемый процесс $\lambda(t)$ называется однородным во времени.

При начальном условии $p(\lambda, t_0) = p_0(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ безусловная плотность вероятности $p(\lambda, t)$ совпадает с плотностью вероятности перехода $\pi(\lambda, t \mid \lambda_0, t_0)$. При этом решение уравнения (7.33) называется фундаментальным решением.

Для отыскания решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (7.33) необходимо задать начальное условие

$$p(\lambda, t_0) = p_0(\lambda) \quad (7.41)$$

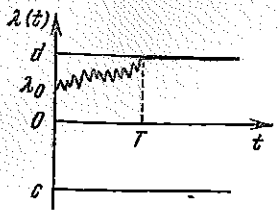


Рис. 7.2. Поглощающие границы

и указать граничные условия. Граничные условия могут быть весьма разнообразными и определяются существом физической задачи. Приведем здесь три вида граничных условий.

Если случайный процесс $\lambda(t)$ может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то обычно выполняются нулевые граничные условия

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t) = 0, \qquad p(-\infty, t) = p(\infty, t) = 0. \tag{7.42}$$

Пусть случайный процесс $\lambda(t)$ может принимать значения лишь в ограниченном интервале (c, d), причем в точках c и d помещены отражающие границы (экраны): траектория процесса, достигшая этих экранов, зеркально отражается от них. В этом случае должны выполняться условия отражающих границ:

$$G(c, t) = G(d, t) = 0. \tag{7.43}$$

Предположим теперь, что в граничных точках c, d расположены поглощающие экраны: траектория, достигшая границы, поглощается ею и исключается из дальнейшего рассмотрения. Условие поглощающих границ (экранов) имеет вид

$$p(c, t) = p(d, t) = 0. \tag{7.44}$$

При наличии поглощающих границ можно интересоваться вероятностью поглощения на одной или обеих границах за некоторое время t. Поскольку аналитическое решение такой задачи оказывается сложным, то при отражающих или поглощающих границах часто ограничиваются вычислением характеристик (моментов) случайного времени T, по истечении которого траектория процесса, исходящая при $t = 0$ из некоторой точки λ_0, заключенной внутри границ ($c < \lambda_0 < d$), впервые достигнет границ c, d (рис. 7.2).

Для однородного во времени диффузионного процесса математическое ожидание $T_1 = \mathrm{M}\{T\}$ и дисперсия $D = \mathrm{D}\{T\}$ случайного времени T первого достижения границ определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями Понтрягина

$$\frac{1}{2} b(\lambda_0) \frac{d^2 T_1}{d\lambda_0^2} + a(\lambda_0) \frac{dT_1}{d\lambda_0} + 1 = 0, \tag{7.45}$$

$$\frac{1}{2} b(\lambda_0) \frac{d^2 D}{d\lambda_0^2} + a(\lambda_0) \frac{dD}{d\lambda_0} + b(\lambda_0) \left(\frac{dT_1}{d\lambda_0}\right)^2 = 0. \tag{7.46}$$

Решения этих уравнений должны быть неотрицательными: $T_1(c, \lambda_0, d) \geqslant 0$, $D(c, \lambda_0, d) \geqslant 0$ и при поглощающих границах c, d должны удовлетворять условиям

$$T_1(c, c, d) = T_1(c, d, d) = 0, \qquad D(c, c, d) = D(c, d, d) = 0. \tag{7.47}$$

При таких граничных условиях решения уравнений (7.45) и (7.46) даются выражениями

$$T_1(c, \lambda_0, d) = 2\left[\int_{\lambda}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \int_{0}^{x} \frac{1}{b(z)} e^{\varphi(z)}\,dz \int_{c}^{\lambda_0} e^{-\varphi(x)}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\lambda_0}^{c} e^{-\varphi(x)}\,dx \int_{c}^{x} \frac{1}{b(z)} e^{\varphi(z)}\,dz \int_{\lambda_0}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \right] \left(\int_{c}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \right)^{-1}, \quad (7.48)$$

$$D(c, \lambda_0, d) = 2\left[\int_{\lambda}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \int_{c}^{x} \left(\frac{dT_1(z)}{dz}\right)^2 e^{\varphi(z)}\,dz \int_{c}^{\lambda_0} e^{-\varphi(x)}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\lambda_0}^{c} e^{-\varphi(x)}\,dx \int_{c}^{x} \left(\frac{dT_1(z)}{dz}\right)^2 e^{\varphi(z)}\,dz \int_{\lambda_0}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \right] \left(\int_{c}^{d} e^{-\varphi(x)}\,dx \right)^{-1}, \quad (7.49)$$

где

$$\varphi(x) = 2\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx, \quad (7.50)$$

$$\frac{dT_1(z)}{dz} = 2e^{-\varphi(z)} \left[\left(\int_{c}^{a} e^{-\varphi(x)}\,dx \right)^{-1} \int_{c}^{a} e^{-\varphi(x)}\,dx \int_{c}^{x} \frac{1}{b(y)} e^{\varphi(y)}\,dy - \right.$$

$$\left. - \int_{c}^{z} \frac{1}{b(y)} e^{\varphi(y)}\,dy \right]. \quad (7.51)$$

В заключение укажем, что для одномерного марковского процесса во многих случаях просто находится стационарная плотность вероятности $p_{st}(\lambda) = \lim_{t\to\infty} p(\lambda, t)$, если она существует. Поскольку она не зависит от времени, то из (7.34) следует, что

$$\frac{d[b(\lambda)\, p_{st}(\lambda)]}{d\lambda} - 2a(\lambda)\, p_{st}(\lambda) = -2G.$$

Общее решение этого уравнения известно [45]. При нулевых граничных условиях ($G = 0$) оно дается выражением

$$p_{st}(\lambda) = \frac{C}{b(\lambda)} \exp\left[2\int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{a(x)}{b(x)}\,dx \right], \quad (7.52)$$

где C — произвольная постоянная, определяемая из условия нормировки плотности вероятности, λ' — произвольная точка интервала, в котором определен процесс $\lambda(t)$.

Применительно к стохастическому дифференциальному уравнению (7.38), для которого коэффициенты сноса и диффузии определены формулой (7.40), решение принимает вид

$$p_{st}(\lambda) = \frac{c}{g(\lambda)} \exp\left[\frac{4}{N_0} \int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{f(x)}{g^2(x)}\,dx \right]. \quad (7.53)$$

7.1. Однородная цепь Маркова с двумя состояниями. Пусть цепь Маркова $\{0_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ имеет два состояния ϑ_1 и ϑ_2 (рис. 7.3) с вероятностями начального состояния $p_1(0) = p_1^0$, $p_2(0) = p_2^0$, где $p_1^0 + p_2^0 = 1$. Одношаговые вероятности перехода не зависят от времени и заданы: $\pi_{11} = 1 - \alpha$, $\pi_{12} = \alpha$, $\pi_{21} = \beta$, $\pi_{22} = 1 - \beta$. Исключим из рассмотрения два тривиальных случая: 1) $\alpha + \beta = 0$, т.е. $\alpha = \beta = 0$, 2) $\alpha + \beta = 2$, т. е. $\alpha = 1$, $\beta = 1$. В первом случае не происходит смены состояний (оба состояния являются поглощающими) и система остается в заданном начальном состоянии. Во втором случае смена состояний происходит детерминированно, и если начальное состояние задано, то поведение системы будет неслучайным.

Требуется найти вероятности перехода $\pi_{jk}(n)$ за n шагов, безусловные вероятности $p_k(n)$, финальные вероятности p_k и относительную долю времени, проведенного системой в одном из состояний в течение большого интервала времени.

Решение. Применительно к данному примеру в уравнениях (7.16) и (7.17) нужно положить $k = 1, 2$:

$$p_1 = p_1(1 - \alpha) + p_2\beta, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

Отсюда находим финальные вероятности

$$p_1 = \beta/(\alpha + \beta), \quad p_2 = \alpha/(\alpha + \beta). \tag{7.54}$$

На основании (7.13) получим следующее выражение для матрицы вероятностей перехода за n шагов

$$\pi^n = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}[1-(1-\alpha-\beta)^n] \\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}[1-(1-\alpha-\beta)^n] & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n \end{bmatrix} \tag{7.55}$$

Так как $|1 - \alpha - \beta| < 1$ при $\alpha + \beta \neq 0$ и $\alpha + \beta \neq 2$, то $(1 - \alpha - \beta)^n \to 0$ и

$$\pi^n = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix},$$

где p_k — финальные вероятности.

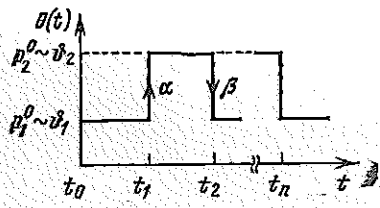


Рис. 7.3. Цепь Маркова с двумя состояниями

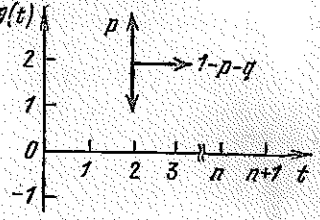


Рис. 7.4. Одномерные дискретные случайные блуждания

По формуле (7.14) находим безусловные вероятности состояний через n шагов

$$P^{\tau}(n) = |p_1^0\ p_2^0|\,\pi^n = \frac{1}{\alpha+\beta}|\beta + (\alpha p_1^0 - \beta p_2^0)(1-\alpha-\beta)^n + \alpha + \\ + (\beta p_2^0 - \alpha p_1^0)(1-\alpha-\beta)^n|. \qquad (7.56)$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем прежние значения финальных вероятностей (7.54).

Вычислим относительную долю времени нахождения системы в каждом из состояний. Для этого формально отождествим состояние ϑ_1 с нулем и состояние ϑ_2 с единицей. Пусть случайная величина $X_n = \{0, 1\}$ означает состояние системы в момент времени t_n, причем интервалы времени между соседними скачками одинаковы, т. е. $t_{n+1} - t_n = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда сумма $X_1 + X_2 + \\ + \ldots + X_n$ определяет, сколько раз из общего числа n проведены системой в состоянии 1. Обозначим начальное состояние через j и $\pi_{j2}(n) = P\{X_n = 1 \mid X_0 = j\}$.

Известно, что математическое ожидание случайной величины X, принимающей лишь два значения 0 и 1, совпадает с вероятностью $P\{X = 1\}$. Поэтому

$$M\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n | X_0 = j\} = \pi_{j2}(1) + \pi_{j2}(2) + \ldots + \pi_{j2}(n).$$

Среднее значение относительного времени, проведенного системой в состоянии 1, очевидно, равно $\{\pi_{j2}(1) + \pi_{j2}(2) + \ldots + \\ + \pi_{j2}(n)\}/n$. Если предел последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$ равен a, то предел последовательности $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ также равен a. Поскольку $\pi_{j2}(n) \to p_2$ при $n \to \infty$, то среднее значение относительного времени, проведенного в состоянии 1, стремится к финальной вероятности p_2 при $n \to \infty$. Аналогично предел среднего значения относительного времени пребывания в состоянии 0 равен p_1. Финальные вероятности p_1 и p_2 даются формулой (7.54).

7.2. Неограниченные случайные блуждания. Частица совершает случайные блуждания вдоль оси θ, представляющие собой однородную цепь Маркова со счетным числом состояний: из любого состояния j через некоторую единицу времени возможны переходы лишь в три ближайших состояния $j+1$, j, $j-1$ с вероятностями $\pi_{j,\,j+1}(1) = p$, $\pi_{j,\,j}(1) = 1 - p - q$, $\pi_{j,\,j-1}(1) = q$ (рис. 7.4). Пусть начальная координата частицы $\vartheta = 0$ при $t = 0$. Нужно найти вероятность того, что в момент времени $t = n$ коорди-

ната частицы $\theta_n = k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины θ_n.

Решение. Обозначим через Z_t изменение координаты частицы в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Случайная величина Z_t может принимать три значения: 1, 0, —1 с вероятностями

$$P\{Z_t = 1\} = p, \quad P\{Z_t = 0\} = 1 - p - q, \quad P\{Z_t = -1\} = q.$$

Через n шагов координата частицы будет равна $\theta_n = \sum_{t=1}^{n} Z_t$. Случайная величина θ_n может принимать различные значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Чтобы попасть в точку k, частица должна сделать n_1 положительных шагов, n_2 отрицательных шагов и n_0 «нулевых», где n_1, n_2 и n_0 — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие равенствам

$$n_1 - n_2 = k, \quad n_0 = n - (n_1 + n_2). \tag{7.57}$$

Вероятность того, что $\theta_n = k$, определяется обобщенным биномиальным законом

$$P\{\theta_n = k\} = \Sigma \frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2!} p^{n_1} (1 - p - q)^{n_0} q^{n_2}, \tag{7.58}$$

где суммирование производится по всем значениям n_0, n_1, n_2, удовлетворяющим равенствам (7.57).

Обозначим через m_1 и D_1 математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z_i (за один шаг): $m_1 = p - q$, $D_1 = p + q - (p - q)^2$. Тогда математическое ожидание m_n и дисперсия D_n случайной величины θ_n будут определяться формулами

$$m_n = M\{\theta_n\} = nm_1, \quad D_n = M\{(\theta_n - nm_1)^2\} = nD_1. \tag{7.59}$$

В том частном случае, когда $p + q = 1$ (сохранение предыдущего состояния не допускается), формула (7.58) примет вид

$$P\{\theta_n = k\} = C_n^{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}.$$

7.3. Дискретный марковский процесс с двумя состояниями (случайный двоичный сигнал). Пусть процесс $\theta(t)$ в любой момент времени может иметь лишь одно из значений $\vartheta_1 = 1$ или $\vartheta_2 = -1$ (рис. 7.5), причем вероятность перехода $\vartheta_1 \to \vartheta_2$ за малое время Δt равна $\lambda \Delta t$, а вероятность перехода $\vartheta_2 \to \vartheta_1$ равна $\mu \Delta t$. Известны вероятности начального состояния $p_1^0 = P\{\theta(t_0) = 1\}$ и $p_2^0 = P\{\theta(t_0) = -1\} = 1 - p_1^0$.

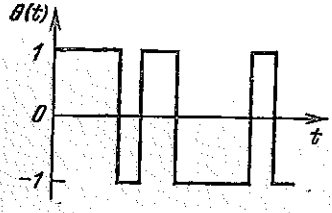


Рис. 7.5. Случайный двоичный сигнал

Нужно вычислить вероятности перехода $\pi_{ij}(t_0, t) = P\{\theta(t) = \vartheta_j | \theta(t_0) = \vartheta_i\}$, где $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = -1$; $i, j = 1, 2$, вероятности стационарного состояния p_1 и p_2, а также математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $\theta(t)$.

Решение. Для данного примера $a_{12} = \lambda$, $a_{21} = \mu$. Из (7.23) находим $a_{11} = -\lambda$, $a_{22} = -\mu$. Так как все четыре коэффициента a_{ij} — постоянные величины, не зависящие от времени, то процесс $\theta(t)$ является однородным.

Дифференциальные уравнения (7.24) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_{i1}(t_0, t) = -\lambda\pi_{i1}(t_0, t) + \mu\pi_{i2}(t_0, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_{i2}(t_0, t) = -\mu\pi_{i2}(t_0, t) + \lambda\pi_{i1}(t_0, t), \quad i = 1, 2. \qquad (7.60)$$

Из условия нормировки (7.18) имеем $\pi_{12}(t_0, t) = 1 - \pi_{11}(t_0, t)$. Поэтому первое из уравнений (7.60) можно записать иначе

$$\frac{\partial\pi_{11}(t_0, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)\pi_{11}(t_0, t) + \mu, \quad t > t_0.$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $\pi_{11}(t_0, t_0) = 1$, которое следует из (7.20), известно:

$$\pi_{11}(t_0, t) = \mu\int_{t_0}^{t} e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}\,ds + e^{-(\lambda+\mu)(t-t_0)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} +$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)\tau}, \quad \tau = t - t_0 > 0.$$

В результате решения системы уравнений (7.60) для любых $\tau > 0$ получим

$$\pi_{11}(\tau) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)\tau}, \quad \pi_{12}(\tau) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)[1 - e^{-(\lambda+\mu)\tau}],$$

$$\pi_{22}(\tau) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)\tau}, \quad \pi_{21}(\tau) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)[1 - e^{-(\lambda+\mu)\tau}]. \qquad (7.61)$$

Отсюда при $\tau \to \infty$ находим вероятности стационарных значений

$$p_1 = \mu/(\lambda + \mu), \quad p_2 = \lambda/(\lambda + \mu). \qquad (7.62)$$

Эти вероятности можно было легко найти из уравнений (7.30).

Зная вероятности начальных значений и вероятности перехода, записываем выражения для безусловных вероятностей значений процесса

$$p_1(t_0+s)=p_1^0\,\pi_{11}(s)+(1-p_1^0)\,\pi_{21}(s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\left(p_1^0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)s}, \tag{7.63}$$

$$p_2(t_0+s)=(1-p_1^0)\,\pi_{22}(s)+p_1^0\,\pi_{12}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\left(p_1^0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\times$$

$$\times e^{-(\lambda+\mu)s}, \quad s>0.$$

На основании определения находим математическое ожидание процесса

$$m_\theta(t)=M\{\theta(t)\}=1\cdot p_1(t)-1\cdot p_2(t)=$$

$$=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}+2\left(p_1^0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)\tau}, \quad \tau=t-t_0. \tag{7.64}$$

Аналогично вычисляем корреляционную функцию

$$R_\theta(s,\tau)=M\{\theta(t_0+s)\,\theta(t_0+s+\tau)\}-M\{\theta(t_0+s)\}\,M\{\theta(t_0+s+$$

$$+\tau)\}=\left\{\frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}-\left[\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}+\left(p_1^0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)s}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(p_1^0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)s}\right\}e^{-(\lambda+\mu)\tau}, \quad s,\ \tau>0. \tag{7.65}$$

Нетрудно убедиться, что в стационарном состоянии

$$m_\theta=(\mu-\lambda)/(\lambda+\mu),\ R_\theta(\tau)=4\lambda\mu(\lambda+\mu)^{-2}\exp[-(\lambda+\mu)|\tau|]$$

Укажем, что если дискретный марковский процесс $\Phi(t)$ имеет два произвольных значения φ_1 и φ_2, то его можно выразить через случайный процесс $\theta(t)$ с двумя значениями ± 1 при помощи следующего линейного преобразования

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}[(\varphi_1+\varphi_2)+(\varphi_1-\varphi_2)\,\theta(t)]. \tag{7.66}$$

7.4. Линейный процесс рождения и гибели [46]. Рассмотрим дискретный процесс $\theta(t)$, в котором допускаются как положительные, так и отрицательные скачки. Этот процесс называется процессом рождения и гибели и определяется следующими постулатами: 1) если в момент времени t система находится в состоянии j ($j=1, 2,\ldots$), то вероятность перехода $j\to j+1$ в малом интервале времени $(t, t+\Delta t)$ равна $\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)$; 2) если в момент времени t система находится в состоянии j ($j=1, 2, \ldots$), то вероятность перехода $j\to j-1$ в интервале времени $(t, t+\Delta t)$ равна $\mu_j\Delta t+o(\Delta t)$; 3) вероятность перехода в состояние, отличное от двух соседних, есть $o(\Delta t)$; 4) вероятность сохранения прежнего состояния равна $1-(\lambda_j+\mu_j)\Delta t+o(\Delta t)$; 5) состояние $j=0$ является поглощаю-

щим; если изображающая точка попала в это состояние, то процесс прекращается.

Решение. На основании постулатов 1—5 записываем уравнение (7.26):

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots \quad (7.67)$$

В рассматриваемом конкретном случае, когда состояние $j = 0$ является поглощающим, нужно полагать $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \mu_0 = 0$. Поэтому

$$dp_0(t)/dt = \mu_1 p_1(t). \quad (7.68)$$

Предполагается, что в начальный (нулевой) момент времени система находится в некотором состоянии j_0, $0 < j_0 < \infty$, и, следовательно, начальные условия имеют вид

$$p_j(0) = \delta_{jj_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_0, \\ 0 & \text{при } j \neq j_0. \end{cases} \quad (7.69)$$

В общем случае, при произвольных функциях λ_j и μ_j, решение уравнений (7.67) и (7.68) оказывается затруднительным [46]. В том частном случае, когда процесс рождения и гибели является линейным: $\lambda_j = \lambda j$, $\mu_j = \mu j$, $\lambda = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$, решения при начальном условии $\theta(0) = j_0 = 1$ даются выражениями

$$p_0(t) = \alpha(t), \quad p_j(t) = [1 - \alpha(t)][1 - \beta(t)]\beta^{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (7.70)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}. \quad (7.71)$$

Математическое ожидание и дисперсия такого линейного процесса рождения и гибели равны

$$m_\theta(t) = \exp[(\lambda - \mu)t] \qquad D_\theta(t) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]. \quad (7.72)$$

Из (7.70) и (7.71) находим вероятность того, что ко времени t система будет находиться в состоянии $j = 0$ («коллектив» вымирает):

$$p_0(t) = \mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)/(\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu).$$

Вероятность того, что «коллектив» когда-нибудь выродится, получаем отсюда предельным переходом при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda < \mu, \\ \mu/\lambda & \text{при } \lambda > \mu. \end{cases} \quad (7.73)$$

Этот результат говорит о том, что «коллектив» вымирает с вероятностью, равной единице, если интенсивность гибели больше интенсивности рождения. Если же интенсивность рождения больше интенсивности гибели, то вероятность вырождения равна отношению их интенсивностей.

При начальном условии $0(0) = j_0 > 1$ формулы для математического ожидания и дисперсии получаются умножением правых частей выражений (7.72) на j_0. Вероятность вырождения (7.73) по-прежнему равна единице при $\lambda < \mu$ и равна $(\mu/\lambda)^{j_0}$ при $\lambda > \mu$

7.5. При различных граничных условиях нужно найти основные характеристики непрерывнозначного марковского процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\lambda/dt = -\alpha\lambda + n(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \tag{7.74}$$

где α — постоянная величина, $n(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией (7.39).

Решение. По формулам (7.36) и (7.37) найдем сначала коэффициенты сноса и диффузии для процесса $\lambda(t)$. Отметим, что решение уравнения (7.74) при начальном условии $\lambda(0) = \lambda_0$ можно записать в виде

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} n(x)\, dx. \tag{7.75}$$

Согласно (7.74) приращение процесса за малое время Δt равно

$$\lambda(t+\Delta t) - \lambda(t) = \int_t^{t+\Delta t} [-\alpha\lambda(x) + n(x)]\, dx. \tag{7.76}$$

Отсюда находим математическое ожидание условного приращения

$$M\{[\lambda(t+\Delta t) - \lambda(t)] \mid \lambda(t)\} = -\alpha \int_t^{t+\Delta t} \lambda(x)\, dx,$$

а также выражение для коэффициента сноса $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = -\alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \lambda(x)\, dx = -\alpha\lambda(t).$$

На основании (7.76) для среднего квадрата условного приращения можем написать

$$M\{[\lambda(t+\Delta t) - \lambda(t)]^2 \mid \lambda(t)\} = \int_t^{t+\Delta t}\int M\{[-\alpha\lambda(x) + n(x)] \times$$

$$\times [-\alpha\lambda(y) + n(y)]\}\, dxdy = \alpha^2 \left(\int_t^{t+\Delta t} \lambda(x)\, dx \right)^2 + \frac{N_0 \Delta t}{2}.$$

Поэтому

$$b(\lambda) = \alpha^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\lambda(t)\, \Delta t]^2 + \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2}.$$

Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\lambda, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda p) + \frac{N_0}{4} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} p. \qquad (7.77)$$

Можно убедиться (например, непосредственной проверкой), что плотность вероятности перехода $\pi(\lambda, t \mid \lambda_0, 0)$, являющаяся фундаментальным решением уравнения (7.77) при заданном начальном условии $p_0(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$, дается выражением

$$\pi(\lambda, t \mid \lambda_0, 0) = [2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\alpha t})]^{-1/2} \exp\left[- \frac{(\lambda - \lambda_0 e^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2 (1 - e^{-2\alpha t})} \right].$$

Это есть нормальная нестационарная плотность вероятности с математическим ожиданием $\lambda_0 \exp(-\alpha t)$ и дисперсией $\sigma^2[1 - \exp(-2\alpha t)]$. Полагая $t \to \infty$, получаем стационарную плотность вероятности

$$p_{st}(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{4\alpha}.$$

Если плотность вероятности начальной координаты λ_0 совпадает со стационарной плотностью вероятности, т. е $p_0(\lambda) = p_{st}(\lambda)$, то нетрудно проверить, что переходный процесс отсутствует и стационарное состояние имеет место, начиная с начального момента времени $t = 0$.

Пусть в симметричных точках $-c = d = h$ помещены поглощающие границы и $\lambda_0 = 0$. Согласно формуле (7.48) среднее время первого достижения таких границ рассматриваемым процессом (7.74) равно

$$T_1(-h, 0, h) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{h/\sigma} [2\Phi(x) - 1] e^{x^2/2} dx.$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности (2.9). Выражение для дисперсии времени первого достижения границ (7.49) оказывается более сложным [45] и поэтому не приводится.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

7.1. Частица совершает случайные блуждания вдоль прямой 0, представляющие собой однородную цепь Маркова. Координата частицы в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ меняется на случайную величину Z_i, принимающую лишь два значения $+s$ и $-s$ с одинаковыми вероятностями, равными 1/2. При $\theta = \pm 2s$ расположены отражающие экраны (частица, достигшая этих экранов, в следующий момент времени отражается от них внутрь области $(-2s, 2s)$, изменяя координату соответственно на величину $\pm s$ с вероятностью 1) (рис. 7.6). Обозначим через θ_n координату частицы через n шагов. Возможные значения θ_n есть $\theta_1 = -2s$, $\theta_2 = -s$, $\theta_3 = 0$,

$\vartheta_1 = s$, $\vartheta_5 = 2s$. Записать матрицу одношаговых вероятностей перехода и определить начальные вероятности, при которых процесс будет стационарным, начиная с $t = 0$.

Ответ:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad p_1 = p_5 = 1/8, \quad p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$$

Указание. Цепь Маркова будет стационарной, если начальные вероятности совпадают с финальными; последние определяются в результате решения системы алгебраических уравнений (7.16), (7.17). Для составления матрицы вероятностей перехода целесообразно воспользоваться представлением цепи Маркова в виде графа.

7.2. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, и при $\theta = -2s$ помещен отражающий экран, а при $\theta = 2s$ поглощающий.

Требуется: 1) записать матрицу одношаговых вероятностей перехода; 2) определить вероятность поглощения за четыре шага, если в начале частица находилась в состоянии ϑ_3 ($\theta = 0$); 3) вычислить среднее значение времени T_{ϑ_i}, по истечении которого частица в первый раз «прилипнет» к поглощающему экрану, если в начальный момент она находилась в состоянии ϑ_i ($i = \overline{1,5}$).

Ответ:

1) $\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $p_{\vartheta_3}^{(2)} = 1/8$; 3) $T_{\vartheta_1} = 16$, $T_{\vartheta_2} = 15$, $T_{\vartheta_3} = 12$, $T_{\vartheta_4} = 7$, $T_{\vartheta_5} = 0$.

Указание. Для вычисления вероятности поглощения можно рассмотреть возможные траектории движения частицы из состояния ϑ_3, которые приводят к поглощению за четыре шага. Среднее время до первого достижения поглощающей границы можно определить, решая разностное уравнение $T_{\vartheta_k} = (1/2)(T_{\vartheta_{k-1}} + T_{\vartheta_{k+1}}) + 1$ ($k = 2, 3, 4$) с граничными условиями $T_{\vartheta_1} = T_{\vartheta_2} + 1$, $T_{\vartheta_5} = 0$.

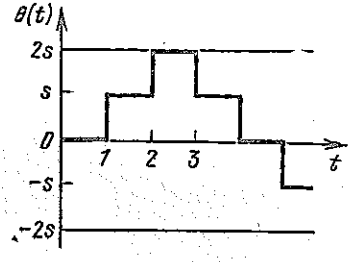


Рис. 7.6. Случайные блуждания между двумя отражающими границами

7.3. Имеется однородная цепь Маркова с двумя состояниями ϑ_1 и ϑ_2; одношаговые вероятности перехода равны $\pi_{11} = p$, $\pi_{22} = q$. Пусть в реализации этой цепи сохраняются только состояния, соответствующие нечетным моментам времени $t = 1, 3, 5, \ldots$, а остальные исключаются. В результате получается новая цепь Маркова с состояниями ϑ_1 и ϑ_2. Требуется определить вероятности перехода π°_{11} и π°_{22} за один шаг для полученной цепи.

Ответ: $\pi^{\circ}_{11} = p^2 + (1-p)(1-q)$, $\pi^{\circ}_{22} = q^2 + (1-p)(1-q)$.

7.4. По системе связи передаются двоичные символы, которые обозначим ϑ_1 и ϑ_2. Каждый переданный символ последовательно проходит через несколько устройств (каскадов), в каждом из которых выходной символ из-за наличия шумов лишь с вероятностью p воспроизводится верно и с вероятностью $q = 1 - p$ переходит в другой. Пусть $\theta_n = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ — символы на выходе n-го устройства. Последовательность символов $\theta_0, \theta_1, \ldots$ есть однородная цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода

$$\pi = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}.$$

Начальные вероятности на входе системы заданы: $p^0_1 = P\{\theta_0 = \vartheta_1\}$, $p^0_2 = P\{\theta_0 = \vartheta_2\}$. Вычислить вероятность $P\{\theta_0 = \vartheta_1 \mid \theta_n = \vartheta_1\}$ того, что если на выходе n-го устройства принят символ ϑ_1, то был передан этот же символ.

Ответ: $P\{\theta_0 = \vartheta_1 \mid \theta_n = \vartheta_1\} = \dfrac{p^0_1 + p^0_1 (p-q)^n}{1 + (p^0_1 - p^0_2)(p-q)^n}$.

7.5. Найти матрицы переходных вероятностей для марковской цепи, описывающей следующий процесс. Каждая единица выпускаемой на производственной линии продукции с вероятностью p идет в брак. Качество каждого отдельного изделия (годно или дефектно) предполагается не зависящим от качества других изделий. Контроль качества изделий состоит в следующем. Пока не появится i небракованных изделий подряд, проверяется каждое выпускаемое изделие (первое правило). Затем из каждых r последующих изделий для проверки равновероятно выбирается лишь одно (второе правило). Если будет обнаружено бракованное изделие, то контроль производится по первому правилу: проверяется каждое изделие вплоть до появления r небракованных изделий подряд и т. д. Предполагается, что моменты времени n отсчитываются при проверке каждого изделия по первому правилу и серии из r изделий — по второму.

Пусть состояние ϑ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) означает, что при контроле по первому правилу последовательно появились k небракованных изделий. Состояние же ϑ_{i+1} означает, что проверка осуществляется согласно второй части процедуры (проверяется одно из r изделий) и появилось одно или более небракованных изделий.

Ответ [47]: при всех значениях n!

$$\pi_{jk} = P\left\{\begin{array}{l}\text{пребывание в состоянии } \vartheta_k \text{ после } n+1 \\ \text{проверок | пребывание в состоянии } \vartheta_j \\ \text{после } n \text{ проверок}\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{при } k=0, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ i,\ \ i+1, \\ 1-p & \text{при } k=j+1, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ i \quad \text{или } k=j=i+1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

7.6. Частица совершает блуждания между точками, расположенными на одинаковых расстояниях друг от друга на окружности (общее число точек равно n). При этом в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ с вероятностью p частица переходит в соседнюю точку в направлении по часовой стрелке и с вероятностью q — против часовой стрелки ($p + q = 1$). Если частица в начальный момент $t = 0$ находится в некотором состоянии ϑ_i ($i = \overline{1, n}$) и на первом шаге попадает в состояние ϑ_{i+1} (или ϑ_{i-1}), то говорят, что она совершает полный цикл блужданий, если в состояние ϑ_i она впервые вернется из состояния ϑ_{i-1} (или ϑ_{i+1}). Очевидно, что за полный цикл блужданий частица побывает во всех промежуточных состояниях. Требуется определить вероятность P_0 совершения полного цикла блужданий.

Ответ [48]: $P_0 = (p - q)(p^n + q^n)/(p^n - q^n)$.

У к а з а н и е. Можно воспользоваться известными результатами решения задачи о случайных блужданиях между поглощающими экранами [45].

7.7. Вычислить корреляционную функцию и спектральную плотность квазислучайного телеграфного сигнала $\theta(t)$, принимающего два значения $\vartheta_1 = \vartheta_0$ и $\vartheta_2 = -\vartheta_0$ с одинаковыми вероятностями $p_1 = p_2 = 1/2$, причем смена значений с вероятностями перехода $\pi_{12} = \pi_{21} = q$ возможна только в фиксированные моменты времени $t_n = \Delta \pm nT_0$, где $T_0 = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, Δ — случайная величина, не зависящая от $\theta(t)$ и равномерно распределенная на отрезке $[0, T_0]$ (рис. 7.7). Рассмотреть частный случай $q = 0{,}5$.

Ответ [45]:

$$R_\theta(\tau) = \vartheta_0^2\left(n - \frac{|\tau|}{T_0}\right)(p-q)^{n-1} + \vartheta_0^2\left[\frac{|\tau|}{T_0} - (n-1)\right](p-q)^n,$$

$$p = 1-q, \quad (n-1)T_0 \leqslant |\tau| < nT_0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

$$S_\theta(\omega) = 2\int_0^\infty R_\theta(\tau)\cos\omega\tau d\tau =$$

$$= \frac{\vartheta_0^2 T_0[1-(p-q)^2]}{1-2(p-q)\cos\omega T_0 + (p-q)^2}\left(\frac{\sin\omega T_0/2}{\omega T_0/2}\right)^2.$$

При $p=q=0{,}5$

$$R_\theta(\tau)=\begin{cases}\vartheta_0^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T_0}\right), & |\tau|\leqslant T_0,\\ S_\theta(\omega)=\vartheta_0^2 T_0\left(\dfrac{\sin\omega T_0/2}{\omega T_0/2}\right)^2. & \\ 0, & |\tau|>T_0,\end{cases}$$

7.8. Вычислить корреляционную функцию и спектральную плотность радиосигнала со случайной начальной фазой при наличии дополнительной фазовой манипуляции квазислучайным телеграфным сигналом $\theta(t)$: $s(t)=A_0\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\varphi_0]$. Здесь $\theta(t)$ — квазислучайный телеграфный сигнал, описанный в задаче 7.7, φ_0 — случайная начальная фаза, не зависящая от $\theta(t)$ и равномерно распределенная на отрезке $[-\pi, \pi]$. Выяснить отличие в характере спектров при $\vartheta_0=\pi/2$ и $\vartheta_0=\pi$.

Ответ [45]: $R_s(\tau)=(A_0^2/2)[\cos^2\vartheta_0+f_m(|\tau|)\sin^2\vartheta_0]\cos\omega_0\tau$, где

$$f_m(|\tau|)=(p-q)^m\left[1+2q\left(m-\frac{\tau}{T_0}\right)\right],\quad mT_0\leqslant\tau<(m+1)T_0,$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$S_s(\omega)=(\pi/2)A_0^2\vartheta_0[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+(A_0^2/4)T_0\sin^2\vartheta_0\times$$
$$\times\left[\frac{1-(p-q)^2}{1-2(p-q)\cos(\omega-\omega_0)T_0+(p-q)^2}\left(\frac{\sin\gamma_-}{\gamma_-}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1-(p-q)^2}{1-2(p-q)\cos(\omega+\omega_0)T_0+(p-q)^2}\left(\frac{\sin\gamma_+}{\gamma_+}\right)^2\right],$$
$$\gamma_\pm=(\omega\pm\omega_0)T_0/2.$$

При $\vartheta_0=\pi/2$ спектр является сплошным, а при $\vartheta_0=\pi$ — чисто дискретным.

7.9. Найти безусловную вероятность $p_j(\tau)$, $\tau=t-t_0$, числа появлений j некоторого случайного события в полуинтервале $[t_0, t)$. Случайный процесс $\theta(t)$ является дискретным, однородным, принимает только целочисленные значения 0, 1, 2, ..., j, ... и может лишь

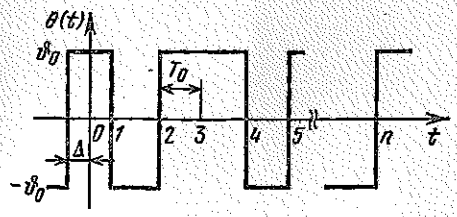


Рис. 7.7. Квазислучайный телеграфный сигнал

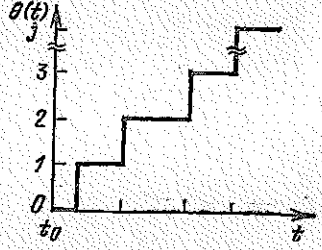


Рис. 7.8. Пуассоновский процесс

возрастать (рис. 7.8). Начальная вероятность и вероятности перехода заданы:

$$p_j^0 = p_j(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } j=0, \\ 0 & \text{при } j=1,\ 2,\ \ldots, \end{cases}$$

$$\pi_{ij}(t,\ t+\Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{при } i>j, \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } i=j-1, \end{cases}$$

$$\pi_{jj}(t,\ t+\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t).$$

Рассмотреть также случай неоднородного процесса, когда интенсивность перехода из состояния $j-1$ в j зависит от времени, т.е. $\pi_{j-1,\ j}(t,\ t+\Delta t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

Ответ [46]: вероятности p_j определяются законом Пуассона:

$$p_j(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^j}{j!}\,e^{-\lambda\tau}, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \tau = t - t_0,$$

$$p_j(t_0,\ t) = \frac{1}{j!}\left(\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds\right)^j \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds\right), \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

7.10. Вычислить вероятность $p_j(t)$, а также математическое ожидание и дисперсию для линейного процесса рождения $\theta(t)$, заданного следующими условиями: $\theta(0) = 1$, $\pi_{j,\ j+1}(t,\ t+\Delta t) = \lambda j\Delta t + o(\Delta t)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, $t > 0$, где $\lambda = \text{const}$.

Ответ: $p_j(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-1}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, $m_0(t) = e^{\lambda t}$, $D_\theta = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$.

Указание: Такой ответ можно получить из результатов (7.70)—(7.72) примера 7.4, положив $\mu = 0$.

7.11. Вычислить вероятность $p_n(t)$, если начальное значение процесса рождения $\theta(t)$, заданного в задаче 7.10, равно $\theta(0) = m < n$.

Ответ [35]: $p_n(t) = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}\,e^{-m\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-m}$.

7.12. Пусть $\theta(t)$ — марковский процесс рождения, для которого справедливы следующие соотношения:
$P\{\text{событие наступит в } (t,\ t+\Delta t) \mid \theta(t) \text{ нечетно}\} = \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$,
$P\{\text{событие наступит в } (t,\ t+\Delta t) \mid \theta(t) \text{ четно}\} = \lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$.
Найти следующие вероятности:

$p_1(t) = P\{\theta(t) \text{ нечетно}\}$, $p_2(t) = P\{\theta(t) \text{ четно}\}$.

Ответ [47]: $p_1(t) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})$,

$$p_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

Указание: Вывести и решить дифференциальные уравнения

$$dp_1(t)/dt = -\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t),$$
$$dp_2(t)/dt = \lambda_1 p_1(t) - \lambda_2 p_2(t).$$

7.13. При тех же условиях, что и в задаче 7.12, найти математическое ожидание процесса $\theta(t)$.

Ответ:

$$M\{\theta(t)\} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,t + \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\{\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]-1\}.$$

7.14. Найти вероятность $p_n(t)$, а также математическое ожидание и дисперсию для линейного процесса гибели, заданного следующими условиями: $p_N^0 = P\{\theta(0) = N\} = 1$, $p_j^0 = 0$ при $j < N$,

$$\pi_{j,\,j-1}(t,\ t+\Delta t) = \mu j \Delta t + o(\Delta t), \quad j = N,\ N-1,\ \ldots,\ 0.$$

Ответ: $p_n(t) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}e^{-n\mu t}(1-e^{-\mu t})^{N-n}$,

$$m_\theta(t) = Ne^{-\mu t}, \quad D_\theta(t) = Ne^{-\mu t}(1-e^{\mu t}).$$

7.15. Используя тот факт, что марковский процесс остается марковским и в обратном направлении, показать, что вероятностные характеристики процесса гибели можно получить из соответствующих свойств процесса рождения.

Указание. Следует воспользоваться равенством

$$P\{\theta(t+\tau) = i \mid \theta(t) = j\}P\{\theta(t) = j\} =$$
$$= P\{\theta(t) = j \mid \theta(t+\tau) = i\}P\{\theta(t+\tau) = i\}.$$

7.16. Требуется вычислить корреляционную функцию и спектральную плотность радиосигнала со случайной начальной фазой при наличии дополнительной фазовой манипуляции случайным телеграфным сигналом:

$$s(t) = A_0\cos[\omega_0 t + \theta(t) + \varphi_0].$$

Здесь φ_0 — случайная начальная фаза, равномерно распределенная в интервале $(-\pi, \pi)$, $\theta(t)$ — не зависящий от φ_0 стационарный симметричный телеграфный сигнал (см. рис. 7.5), принимающий лишь два значения $\pm\vartheta_0$, $0 \leqslant \vartheta_0 \leqslant \pi$ с вероятностями $p_1 = p_2 = 1/2$; вероятности перехода заданы выражениями

$$\pi_{11}(\tau) = \pi_{22}(\tau) = (1+e^{-2\lambda\tau})/2, \quad \pi_{12}(\tau) = \pi_{21}(\tau) = (1-e^{-2\lambda\tau})/2.$$

Ответ:

$$R_s(\tau) = (A_0^2/2)[\cos^2\vartheta_0 + \exp(-2\lambda|\tau|)\sin^2\vartheta_0]\cos\omega_0\tau,$$

$$S_s(\omega) = (\pi A_0^2/2)[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\cos^2\vartheta_0 + A_0^2\lambda\sin^2\vartheta_0 \times$$
$$\times\left[\frac{1}{4\lambda^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{1}{4\lambda^2+(\omega+\omega_0)^2}\right].$$

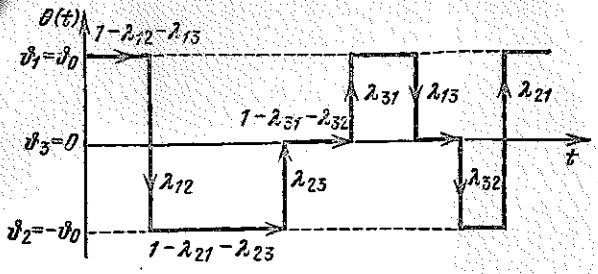


Рис. 7.9. Импульсный случайный процесс с тремя значениями

В общем случае спектр является дискретно-сплошным. В частном случае $\vartheta_0 = \pi/2$ спектр будет сплошным, а при $\vartheta_0 = \pi$ — дискретным.

7.17. Импульсный случайный процесс $\theta(t)$ принимает три значения: $\vartheta_1 = \vartheta_0$, $\vartheta_2 = -\vartheta_0$ и $\vartheta_3 = 0$ (рис. 7.9). Заданы одношаговые вероятности перехода за малое время Δt:

$$\lambda_{12}\Delta t(\vartheta_1 \to \vartheta_2),\ \lambda_{13}\Delta t(\vartheta_1 \to \vartheta_3),\ \lambda_{23}\Delta t(\vartheta_2 \to \vartheta_3),$$
$$\lambda_{21}\Delta t(\vartheta_2 \to \vartheta_1),\ \lambda_{31}\Delta t\ (\vartheta_3 \to \vartheta_1),\ \lambda_{32}\Delta t\ (\vartheta_3 \to \vartheta_2).$$

Нужно найти: 1) вероятности стационарных значений, 2) корреляционную функцию процесса $\theta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ [49]:

1) $p_1 = \alpha_1/k_1k_2$, $p_2 = \alpha_2/k_1k_2$, $p_3 = \alpha_3/k_1k_2$, где

$$\alpha_1 = \lambda_{31}\lambda_{21} + \lambda_{31}\lambda_{32} + \lambda_{21}\lambda_{32},$$
$$\alpha_2 = \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{31},$$
$$\alpha_3 = \lambda_{23}\lambda_{12} + \lambda_{23}\lambda_{13} + \lambda_{21}\lambda_{13},$$

$$k_{1,2} = (1/2)(\lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{32}) \mp$$
$$\mp [(1/4)(\lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{32})^2 -$$
$$- (\lambda_{31}\lambda_{21} + \lambda_{31}\lambda_{23} + \lambda_{21}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{23} + \lambda_{12}\lambda_{31} + \lambda_{23}\lambda_{12} +$$
$$+ \lambda_{23}\lambda_{13} + \lambda_{13}\lambda_{21})]^{1/2};$$

$$k_1k_2 = \lambda_{31}\lambda_{21} + \lambda_{31}\lambda_{23} + \lambda_{21}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{23} + \lambda_{12}\lambda_{31} + \lambda_{23}\lambda_{12} +$$
$$+ \lambda_{23}\lambda_{13} + \lambda_{13}\lambda_{21};$$

2) $$R(\tau) = \vartheta_0^2 \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2 - k_1k_2(\alpha_1+\alpha_2) + k_2[\alpha_1(2\lambda_{12}+\lambda_{13}) + \alpha_2(2\lambda_{21}+\lambda_{23})]}{k_1k_2^2(k_2-k_1)} \times$$
$$\times e^{-k_2|\tau|} \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2 - k_1k_2(\alpha_1+\alpha_2) + k_1[\alpha_1(2\lambda_{12}+\lambda_{13}) + \alpha_2(2\lambda_{21}+\lambda_{23})]}{(\alpha_1-\alpha_2)^2 - k_1k_2(\alpha_1+\alpha_2) + k_2[\alpha_1(2\lambda_{12}+\lambda_{13}) + \alpha_2(2\lambda_{21}+\lambda_{23})]} \times \right.$$
$$\left. \times e^{-(k_1-k_2)|\tau|} \right\}.$$

7.18. Из ответа к задаче 7.17 получить результаты примера 7.3. *Ответ*: нужно положить $p_3^0 = P\{\theta(t_0) = \vartheta_3\} = 0$, $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$, $\lambda_{31} + \lambda_{32} = 1$, $\vartheta_1 = -\vartheta_2 = 1$. При этом $k_1 = 1$, $k_2 = \lambda_{12} + \lambda_{21}$, $\alpha_1 = \lambda_{12}$, $\alpha_2 = \lambda_{21}$, $\alpha_3 = 0$ и $R(\tau) = \frac{4\lambda_{12}\lambda_{21}}{(\lambda_{12}+\lambda_{21})^2} \exp[-(\lambda_{12}+\lambda_{21})|\tau|]$.

7.19. Рассмотреть следующие три частных случая задачи 7.17:

1) $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda$, $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \mu$, $\lambda_{23} = \lambda_{13} = \rho$;
2) $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda$, $\lambda_{23} = \lambda_{32} = \mu$, $\lambda_{31} = \lambda_{13} = \rho$;
3) $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$, $\lambda_{23} = \lambda_{13} = \rho$, $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \mu$.

Ответ:

1) $p_1 = p_2 = \mu/(2\mu+\rho)$, $p_3 = \rho/(2\mu+\rho)$,

$$R(\tau) = \vartheta_0^2 \frac{2\mu}{2\mu+\rho} \exp[-(2\lambda+\rho)|\tau|];$$

2) $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, $R(\tau) = \vartheta_0^2 \frac{1}{3(k_2-k_1)}[(2\lambda+\rho-k_1)e^{-k_2|\tau|} - (2\lambda+\rho-k_2)e^{-k_1|\tau|}]$;

3) $p_1 = p_2 = \frac{2\mu}{2\mu+\rho}$, $p_3 = \frac{\rho}{2\mu+\rho}$, $R(\tau) = \vartheta_0^2 \frac{2\mu}{2\mu+\rho} e^{-\rho|\tau|}$.

7.20. Получить выражения плотности вероятности и ковариационной функции стационарного импульсного случайного процесса $\theta(t)$, заданного следующим образом. Процесс $\theta(t)$ представляет собой стационарную последовательность прямоугольных импульсов, амплитуды которых взаимно независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(\vartheta)$ (рис. 7.10). «Интенсивность» перехода из нулевого состояния в любое отличное от нуля состояние равна μ, а интенсивность обратного перехода равна λ.

Ответ: $p_0(\vartheta) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\delta(\vartheta) + \frac{\mu}{\mu+\lambda}p(\vartheta)$,

где $\delta(x)$ — дельта-функция;

$$k_0(\tau) = D_\theta \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda|\tau|} + m_\theta \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda+\mu)|\tau|}\right],$$

где

$$m_\theta = \int \vartheta p(\vartheta) d\vartheta, \quad D_\theta = \int (\vartheta - m_\theta)^2 p(\vartheta) d\vartheta.$$

У к а з а н и е: Следует учесть, что вероятности переходов процесса $\theta(t)$ совпадают с вероятностями переходов дискретного мар-

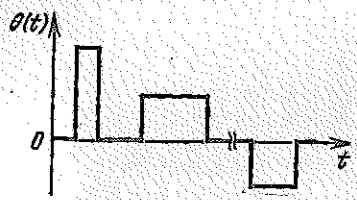


Рис. 7.10. Импульсный случайный процесс

ковского процесса с двумя состояниями, а длительности импульсов и интервалов между ними распределены по экспоненциальному закону с параметрами λ и μ соответственно.

7.21. Пусть последовательность случайных величин $\{\lambda_n\}$ представляет собой временные отсчеты гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с экспоненциальной ковариационной функцией $k(\tau) = D\exp(-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$, т. е. $\lambda_n = \xi(t_0 + t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где t_0 — произвольно взятый начальный момент времени. Убедиться, что полученная последовательность $\{\lambda_n\}$ является марковской.

Ответ дает следующая теорема [5]: гауссовский случайный процесс будет одновременно и марковским тогда и только тогда, когда при $s < t < \tau$ коэффициент корреляции процесса $r(t_1, t_2)$ удовлетворяет функциональному соотношению $r(s, t)r(t, \tau) = r(s, \tau)$. Для гауссовского стационарного процесса с экспоненциальной ковариационной функцией это соотношение выполняется.

7.22. Независимые случайные величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ имеют соответственно плотности вероятности $p(\lambda_n) = p_n(\lambda)$. Доказать, что случайные величины $X_1 = \lambda_1$, $X_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\ldots$, $X_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, ... образуют марковскую последовательность.

Ответ:

$$\pi_n(x_n | x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} = p(x_n - x_{n-1}).$$

7.23. Из независимых случайных величин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ образованы новые случайные величины $X_1 = \lambda_1$, $X_n + cX_{n-1} = \lambda_n$, $n > 2$, $c = \text{const}$. Показать, что последовательность $\{X_n\}$ является марковской.

Ответ: $\pi_n(x_n | x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = p(x_n - cx_{n-1})$.

7.24. Вычислить корреляционную функцию и спектральную плотность радиосигнала с разрывной фазой вида $s(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \varphi_0]$. В отличие от задачи 7.8 здесь значения ϑ_i есть непрерывные случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем ϑ_i и ϑ_j при $i \neq j$ независимы. Разрывы (скачки) фазы допускаются только через фиксированный временной интервал $T_0 = \text{const}$, а в пределах каждого интервала длительностью T_0 фаза остается постоянной.

Ответ [45]:

$$R_s(\tau) = (A_0^2/2)(1 - |\tau|/T_0)\cos\omega_0\tau, \quad |\tau| < T_0,$$

$$S_s(\omega) = (A_0^2/4)T_0\left[\left(\frac{\sin(\omega - \omega_0)T_0/2}{(\omega - \omega_0)T_0/2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\omega + \omega_0)T_0/2}{(\omega + \omega_0)T_0/2}\right)^2\right].$$

7.25. Решить предыдущую задачу 7.24, приняв, что скачки фазы могут происходить не через фиксированный интервал времени T_0, а в случайные моменты времени, описываемые законом Пуассона,

$$p_\tau(k) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ответ [45]:

$$R_s(\tau) = (A_0^2/2)e^{-\nu|\tau|}\cos\omega_0\tau,$$

$$S_s(\omega) = \frac{A_0^2}{2}\left[\frac{\nu}{\nu^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{\nu}{\nu^2+(\omega+\omega_0)^2}\right].$$

7.26. Чисто диффузионный случайный процесс $v(t)$ задан стохастическим дифференциальным уравнением $dv/dt = n(t)$, $v(0) = v_0$, где $n(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией (7.39). Записать для процесса $v(t)$ уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова и получить его фундаментальное решение.

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(v, t) = \frac{1}{4}N_0\frac{\partial^2}{\partial v^2}p(v, t),$$

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}}\exp\left[-\frac{(v-v_0)^2}{N_0 t}\right].$$

7.27. Для чисто диффузионного процесса $v(t)$, описанного в задаче 7.26, получить выражения плотностей вероятностей для двух случаев: 1) в точке $v = c > v_0$ расположен отражающий экран; 2) в точке $v = c > v_0$ расположен поглощающий экран.

Ответ:

1) $$p_0(v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}}\left\{\exp\left[-\frac{(v-v_0)^2}{N_0 t}\right] + \exp\left[-\frac{(2c-v-v_0)^2}{N_0 t}\right]\right\}, \quad -\infty < v \leqslant c;$$

2) $$p_n(v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}}\left\{\exp\left[-\frac{(v-v_0)^2}{N_0 t}\right] - \exp\left[-\frac{(2c-v-v_0)^2}{N_0 t}\right]\right\}, \quad -\infty < v \leqslant c.$$

7.28. Записать уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова и получить его фундаментальное решение для случайного процесса $\lambda(t)$, заданного уравнением $d\lambda/dt + \mu = n(t)$, $\lambda(0) = \lambda_0$, где μ — постоянная величина; $n(t)$ — гауссовский белый шум с ковариационной функцией (7.39).

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\lambda, t) = \mu\frac{\partial}{\partial\lambda}p(\lambda, t) + \frac{1}{4}N_0\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}p(\lambda, t),$$

$$p(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}}\exp\left[-\frac{(\lambda-\lambda_0+\mu t)^2}{N_0 t}\right].$$

7.29. Получить выражение стационарной плотности вероятности марковского случайного процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\lambda/dt = -\gamma\lambda + N_0/4\lambda + n(t), \quad \lambda > 0,$$

де $\gamma > 0$ — постоянная величина; $n(t)$ — гауссовский белый шум с ковариационной функцией (7.39).

Ответ: $p_{st}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$, $\sigma^2 = \frac{N_0}{4\gamma}$, $\lambda > 0$.

7.30. Получить выражение стационарной плотности вероятности случайного процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\lambda/dt = -\alpha\lambda \ln(\lambda/m) + \alpha\lambda n(t), \quad \lambda > 0,$$

где $\alpha > 0$, $m > 0$ — постоянные величины; $n(t)$ — гауссовский белый шум с ковариационной функцией (7.39).

Ответ: $p_{st}(\lambda) = \frac{1}{\sigma\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln\lambda - \ln m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $\sigma^2 = \alpha N_0/4$, $\lambda > 0$.

7.31. Марковский случайный процесс $\lambda(t)$ задан нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(-\frac{mN_0}{\Omega}\right)\lambda^{3-4m} + \sqrt{2}\,\lambda^{1-2m} n(t), \quad \lambda \geqslant 0, \; m \geqslant \frac{1}{2},$$

где m и Ω — постоянные параметры; $n(t)$ — гауссовский белый шум с ковариационной функцией (7.39). Получить выражение стационарной плотности вероятности процесса $\lambda(t)$.

Ответ: $p_{st}(\lambda) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \lambda^{2m-1} e^{-m\lambda^2/\Omega}$, $\lambda \geqslant 0$, $m \geqslant \frac{1}{2}$.

7.32. Вычислить среднее время T_1 и дисперсию времени D первого достижения поглощающих границ c, d чисто диффузионным процессом $v(t)$, описанным в задаче 7.26, предполагая, что начальное значение процесса v_0 находится внутри границ ($c < v_0 < d$).

Ответ: $T_1(c, v_0, d) = (2/N_0)(d - v_0)(v_0 - c)$, $D(c, v_0, d) = (1/6N_0^2)|(d - c)^4 - (d + c - 2v_0)^4|$.

7.33. Определить среднее время T_1 первого достижения одной поглощающей границы, расположенной в точке $\lambda = d$, случайным процессом $\lambda(t)$, описанным в задаче 7.28, считая $\mu \geqslant 0$ и $\lambda_0 < d$.

Ответ: $T_1(-\infty, \lambda_0, d) = (d - \lambda_0)/\mu$, $\mu \geqslant 0$.

7.34. Для случайного процесса $\lambda(t)$ такого же, как и в задаче 7.29, вычислить среднее время T_1 первого достижения поглощающей границы d, если граница $c = 0$ является отражающей. Начальное значение процесса λ_0 находится внутри границ ($0 \leqslant \lambda_0 \leqslant d$).

Ответ: $T_1\left(0, \frac{\lambda_0}{\sigma}, \frac{d}{\sigma}\right) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_{\lambda_0/\sigma}^{d/\sigma} \frac{1}{x}\left(e^{x^2/2} - 1\right) dx.$

8. ТОЧЕЧНЫЕ И ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. **Пуассоновский процесс.** Последовательность случайных событий (требований, заявок, отказов и др.), происходящих во времени, можно характеризовать случайными моментами времени их появления t_1, t_2, t_3, ... на временной оси (рис. 8.1). Такую последовательность событий называют случайным точечным процессом или случайным потоком. Если точки неразличимы, то вместо них можно рассматривать целочисленный случайный процесс $N(t)$ — число событий (точек), появляющихся в полуинтервале $(0, t]$, причем в дальнейшем принято $N(0) = 0$ (рис. 8.1). На рис. 8.1, *б* и *в* изображены также соответственно производная $\xi(t) = dN(t)/dt$, представляющая собой последовательность дельта-функций в точках t_1, t_2, t_3, ..., и приращение $n(t)$ процесса $N(t)$ за некоторое время ε : $n(t) = [N(t+\varepsilon) - N(t)]/\varepsilon$.

Имеется два тесно связанных между собой метода описания случайных точечных процессов. Первый из них базируется на рассмотрении случайной последовательности точек во времени, а второй — на анализе целочисленного случайного процесса $N(t)$ [45].

Введем интервалы между соседними точками

$$\tau_i = t_i - t_{i-1} > 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8.1}$$

где под t_0 понимается начало отсчета времени, принимаемое за нуль. Тогда последовательность точек можно характеризовать n-мерной плотностью вероятности $p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ интервалов между точками или же плотностью вероятности $P_n(t_1, \ldots, t_n)$ координат самих точек. Между этими плотностями вероятности имеются очевидные соотношения:

$$P_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = p_n(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}), \tag{8.2}$$

$$p_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = P_n(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \ldots, \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n). \tag{8.3}$$

Выражения для плотностей вероятностей p_n и P_n даже в случае стационарного точечного процесса, вообще говоря, будут различными, когда начало отсчета времени выбрано произвольно и когда за начало отсчета взята какая-либо из выпавших точек.

Вместо этих плотностей вероятностей можно рассматривать целочисленный случайный процесс $N(t)$. Если t_i — координата i-й из выпавших точек $(t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots)$, то $N(t) = 0$ тогда и только тогда,

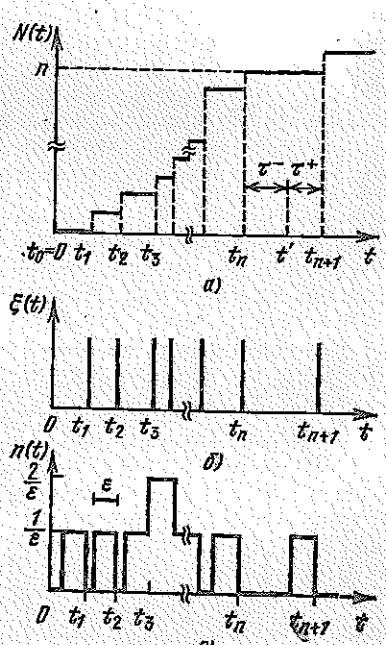


Рис. 8.1. Целочисленный случайный процесс (*а*), его производная (*б*) и приращение процесса (*в*)

гда $\tau_1 > t$, и $N(t) < n$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n > t$, т. е.

$$P\{N(t) = 0\} = P\{\tau_1 > t\},$$
$$P\{N(t) < n\} = P\{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n > t\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.4}$$

Следовательно, если известно распределение целочисленного случайного процесса $N(t)$, то можно найти одномерные и многомерные плотности вероятности случайных величин τ_1, τ_2, τ_3, ..., и наоборот.

Основой для формирования различных точечных процессов является простейший пуассоновский поток. Целочисленный простейший пуассоновский точечный процесс $\{N(t),\ 0 \leqslant t < +\infty\}$ определяется тремя свойствами.

1. Он ординарен, т. е. вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt:

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = P\{N(\Delta t) = 1\} = \nu \Delta t + o(\Delta t), \tag{8.5}$$
$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) > 1\} = P\{N(\Delta t) > 1\} = o(\Delta t), \tag{8.6}$$

где ν — некоторая положительная величина, имеющая размерность, обратную времени [см. (8.13)]. Следствием этих двух соотношений является равенство

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} = P\{N(\Delta t) = 0\} = 1 - \nu \Delta t + o(\Delta t). \tag{8.7}$$

2. Процесс стационарен, т. е. его вероятностные характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную, но одну и ту же величину Δ.

3. Он имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени (отсутствие последействия).

На основании этих свойств можно показать [45], что вероятность $P_k(t)$ наличия k точек в полуинтервале $(0\ \ t]$ определяется законом Пуассона:

$$P_k(t) = (\nu t)^k e^{-\nu t}/k!, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \geqslant 0. \tag{8.8}$$

Из этой формулы следует, что вероятность отсутствия точек ($k = 0$) на каком-либо полуинтервале τ

$$P_0(\tau) = \exp(-\nu\tau), \tag{8.9}$$

а вероятность наличия одной точки ($k = 1$)

$$P_1(\tau) = \nu\tau \exp(-\nu\tau) \tag{8.10}$$

Если в (8.9) и (8.10) положить $\tau = \Delta t$, где Δt — малая величина, удовлетворяющая условию $\nu \Delta t \ll 1$, то получим

$$P_0(\Delta t) \simeq 1 - \nu \Delta t + (1/2)\nu^2(\Delta t)^2, \qquad P_1(\Delta t) \simeq \nu \Delta t - \nu^2(\Delta t)^2.$$

Эти равенства согласуются со свойствами (8.7) и (8.5) пуассоновского закона. Кроме того, из второго равенства имеем

$$\nu = \lim_{\Delta t \to 0} P_1(\Delta t)/\Delta t. \tag{8.11}$$

Математическое ожидание m и дисперсия D закона Пуассона равны друг другу:

$$m = D = \nu t. \tag{8.12}$$

Поскольку m определяет среднее число точек, выпавших в полуинтервале $(0, t]$, то параметр

$$\nu = m/t \tag{8.13}$$

можно трактовать как среднее число точек, приходящихся на единичный интервал времени. Поэтому ν часто называют параметром интенсивности пуассоновского потока.

Плотность вероятности времени t_k появления k-й точки определяется гамма-распределением (с параметрами k и ν):

$$p_{t_k}(t) = \nu e^{-\nu t} (\nu t)^{k-1}/(k-1)!, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad t > 0. \tag{8.14}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайного времени t_k

$$m_{t_k} = k/\nu, \quad D_{t_k} = k/\nu^2. \tag{8.15}$$

Последовательность τ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, временных интервалов между соседними точками пуассоновского потока является последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин с экспоненциальной плотностью вероятности

$$p(\tau) = \nu e^{-\nu\tau}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{8.16}$$

Математическое ожидание и дисперсия интервалов между соседними точками соответственно равны $m_\tau = 1/\nu$, $D_\tau = 1/\nu^2$.

Справедливо обратное утверждение: если имеется последовательность независимых случайных величин τ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, имеющих одну и ту же экспоненциальную плотность вероятности (8.16), то соответствующий ей точечный процесс оказывается пуассоновским.

Пуассоновский поток точек можно получить следующим образом. Пусть случайным и независимым образом во временном полуинтервале $(0, T]$ размещено n точек, причем вероятность попадания какой-либо точки на малый интервал $\Delta t \in (0, T)$ равна $P = \Delta t/T \ll 1$. Тогда при $T \to \infty$, $n \to \infty$, $n/T \to \nu$ вероятность наличия k точек на полуинтервале длиной $t \in (0, T]$ будет определяться законом Пуассона (8.8).

Известно несколько различных обобщений процесса Пуассона. Укажем здесь два таких обобщения: неоднородный пуассоновский процесс и профильтрованный пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс называется неоднородным, если его параметр интенсивности зависит от времени $\nu(t)$. Для такого процесса вероятность наличия k точек в полуинтервале $(0, t]$ дается неоднородным законом Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)^k \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right), \quad k \geqslant 1. \tag{8.17}$$

При $\nu = \text{const}$ (однородный процесс) этот закон переходит в обычный закон Пуассона (8.8). Математическое ожидание и дисперсия неоднородного процесса Пуассона равны друг другу:

$$m(t) = D(t) = \int_0^t \nu(\tau)d\tau. \tag{8.18}$$

Профильтрованный пуассоновский процесс $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$, часто называемый дробовым шумом, можно представить в виде

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(t, t_i, a_i). \tag{8.19}$$

Здесь $\{N(t), t \geqslant 0\}$ — в общем случае неоднородный пуассоновский поток с интенсивностью $\nu(t)$, $\{a_i\}$ — последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин, не зависящая от $\{N(t), t \geqslant 0\}$, $h(t, \tau, a)$ — детерминированная функция трех вещественных переменных.

Во многих практических задачах отдельные величины в записи (8.19) допускают следующую интерпретацию: t_i — время появления случайного события, a_i — «амплитуда» элементарного сигнала, связанного с этим событием, $h(t, t_i, a_i)$ — обусловленное этим событием значение элементарного

сигнала в момент времени t и $\xi(t)$ — значение при t суммы элементарных сигналов, обусловленных событиями, осуществившимися во временном полуинтервале $(0, t]$.

Для задания профильтрованного пуассоновского процесса необходимо указать: 1) интенсивность $\nu(t)$ порождающего пуассоновского потока, 2) общее для всех случайных величин $\{a_i\}$ вероятностное распределение и 3) конкретный вид функции $h(t, \tau, a)$.

Если выполняется условие

$$M\{h^2(t, \tau, a)\} < \infty \text{ для всех } \tau, \tag{8.20}$$

то математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция профильтрованного пуассоновского процесса определяются формулами:

$$m_\xi(t) = \int_0^t \nu(\tau) M\{h(t, \tau, a)\} d\tau, \tag{8.21}$$

$$D_\xi(t) = \int_0^t \nu(\tau) M\{h^2(t, \tau, a)\} d\tau, \tag{8.22}$$

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) M\{h(t_1, \tau, a) h(t_2, \tau_2 a)\} d\tau. \tag{8.23}$$

При вычислении этих и других характеристик точечных и импульсных случайных процессов вида (8.19), представляющих собой сумму случайного числа взаимно независимых случайных величин, используется тождество Вальда.

Пусть $\{X_i\}$ — произвольные случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями $M\{X_i\} = m_x$ и N — случайная величина, принимающая неотрицательные целочисленные значения 1, 2, ... и не зависящая от X_i при $i \geqslant N$. Тогда для суммы

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{8.24}$$

справедливо равенство Вальда:

$$m_y = M\{Y\} = m_x M\{N\}. \tag{8.25}$$

Кроме того, если случайные величины X_i не коррелированы и имеют одинаковые дисперсии $M\{(X_i - m_x)^2\} = D_x$, то

$$M\{Y^2\} = m_x^2 M\{N^2\} + D_x M\{N\}. \tag{8.26}$$

В частном случае, когда $N(t)$ есть простой пуассоновский поток (8.8), в этих формулах нужно положить

$$M\{N(t)\} = \nu t, \quad M\{N^2(t)\} = \nu t(1 + \nu t). \tag{8.27}$$

Частный вид процесса (8.19), часто применяемый в качестве модели стационарного дробового шума, описывается выражением

$$\xi(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i h(t - t_i, \tau_i), \quad -\infty < t < \infty. \tag{8.28}$$

Здесь $\{A_i\}$ и $\{\tau_i\}$ — взаимно независимые случайные амплитуды и длительности импульсов, имеющие одинаковые для всех i плотности вероятности $p(A)$ и $p(\tau)$ соответственно, t_i — случайное время появления каждого из элементарных импульсов, не зависящее от $\{A_i\}$ и $\{\tau_i\}$ и описываемое простым пуассоновским потоком с параметром интенсивности ν.

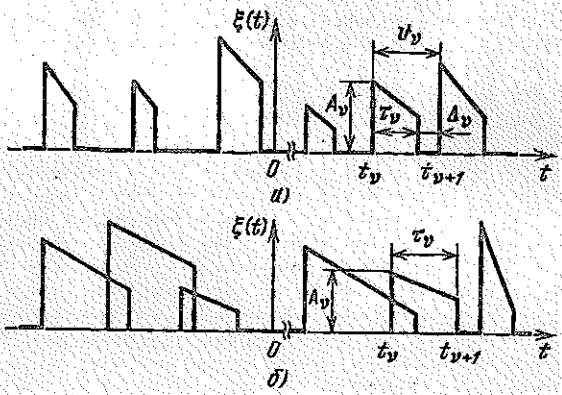


Рис. 8.2. Случайная последовательность неперекрывающихся (*а*) и перекрывающихся (*б*) импульсов

Если $M\{A_i^2 h^2(t - t_i, \tau_i)\} < \infty$ для всех i, то математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция определяются формулами Кемпбелла (см. пример 8.6):

$$m_\xi = \nu M\left\{A_i \int_{-\infty}^{\infty} h(u, \tau_i)\, du\right\}, \tag{8.29}$$

$$D_\xi = \nu M\left\{A_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(u, \tau_i)\, du\right\}; \tag{8.30}$$

$$R_\xi(\tau) = \nu M\left\{A_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(u, \tau_i)\, h(u + |\tau|, \tau_i)\, du\right\}. \tag{8.31}$$

Были указаны импульсные процессы, базирующиеся на пуассоновском потоке. Приведем справочные сведения для импульсных процессов более общего характера.

2. **Спектральная плотность случайного импульсного процесса** [15]. Случайный импульсный процесс $\xi(t)$ представляет собой последовательность импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через некоторые промежутки времени. Если форма импульсов известна, то случайными могут быть отдельные параметры импульсов: высота или «амплитуда» A_ν, длительность τ_ν, время появления t_ν и др. (рис. 8.2).

Случайные импульсы могут быть неперекрывающимися и перекрывающимися. Под перекрыванием импульсов понимается возможность полного или частичного наложения разных импульсов друг на друга. Если в случайной импульсной последовательности никакие два импульса не налагаются друг на друга, то это последовательность неперекрывающихся импульсов. В последовательности неперекрывающихся импульсов отдельные импульсы должны иметь конечную длительность τ_ν. Условие отсутствия перекрывания импульсов можно определить неравенством

$$t_\nu + \tau_{\nu+1} < t_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.32}$$

Очевидно, что если неперекрывающиеся импульсы воздействуют на какую-либо инерционную систему, то на выходе системы, как правило, получаются перекрывающиеся импульсы. В случайной последовательности перекрывающихся импульсов условие (8.32) не выполняется для всех или части импульсов, т. е.

$$t_{\nu-\mu} + \tau_{\nu-\mu} > t_\nu, \quad \mu < \nu.$$

При рассмотрении случайных импульсных процессов форму отдельных импульсов часто предполагают известной. При этом исследование неперекрывающихся импульсов обычно сводится к решению двух задач: нахождению плотностей вероятностей для отдельных параметров импульсов («амплитуд», длительностей, времени появления) и вычислению спектральной плотности (ковариационной функции).

При исследовании перекрывающихся импульсов, кроме того, часто рассматривают еще третью задачу — вычисление плотностей вероятностей для мгновенных значений результирующего процесса, представляющего сумму налагающихся импульсов. Однако эта задача в дальнейшем не рассматривается, так как имеется очень мало простых решений ее.

Решение первой задачи обычно связано с физическим анализом конкретного устройства или механизма, генерирующего случайную последовательность импульсов. В дальнейшем эта задача также не рассматривается. Предполагается, что необходимые вероятностные характеристики заранее известны.

Спектральную плотность стационарной последовательности взаимно независимых неперекрывающихся импульсов следует вычислять по формуле

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left\{ |F_T(j\omega)|^2 \right\}, \tag{8.33}$$

где

$$F_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{8.34}$$

— спектральная функция усеченной реализации импульсного случайного процесса $\xi(t)$, т. е. реализации на конечном временном интервале $(-T/2, T/2)$ относительно произвольно взятого начала отсчета времени.

Пусть усеченная реализация $\xi(t)$ содержит n импульсов. Пронумеруем отдельные импульсы в порядке их следования на оси времени. Если t_ν — момент времени начала ν-го импульса, то $-T/2 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leqslant T/2$. Отметим тот существенный факт, что длительность интервала T зависит от n, т. е. $T = T_n$. Если через $\vartheta_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$ обозначить длительность временного интервала между двумя соседними импульсами, то $T_n \simeq \sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu$.

Произвольный одиночный импульс последовательности обозначим через $A_\nu s(t - t_\nu, \tau_\nu)$, где

$$s(t - t_\nu, \tau_\nu) = \begin{cases} s_0(t, \tau_\nu), & t_\nu \leqslant t \leqslant t_\nu + \tau_\nu, \\ 0, & t < t_\nu,\ t > t_\nu + \tau_\nu. \end{cases} \tag{8.35}$$

Предполагается, что функция $s_0(t, \tau_\nu)$ является детерминированной. Чтобы понятие «амплитуды» A_ν имело смысл, принимаем, что максимальное значение $s_0(t, \tau_\nu)$ равно единице. Следовательно, случайный характер рассматриваемого одиночного импульса заключается в том, что его «амплитуда» A_ν, длительность τ_ν и момент появления t_ν являются случайными величинами.

Сравнительно просто и математически корректно можно выполнить вычисления по формуле (8.33), при следующих предположениях относительно параметров импульсов и всей импульсной последовательности.

1. «Амплитуда» A_ν и длительность импульса τ_ν не зависят от интервала ϑ_ν между соседними импульсами. Совместная плотность вероятности случайных величин A_ν и τ_ν, а также плотность вероятности ϑ_ν не зависят от времени и одинаковы для всех импульсов последовательности, т. е. $p_2(A_\nu, \tau_\nu) = p_2(A, \tau)$, $p(\vartheta_\nu) = p(\vartheta)$ при разных ν.

2. Параметры разных импульсов A_ν и τ_ν, а также ϑ_ν взаимно независимы, т. е. случайные величины A_ν, τ_ν, ϑ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, и A_μ, τ_μ, ϑ_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, при $\mu \neq \nu$ независимы.

Представим рассматриваемую реализацию $\xi(t)$ случайных неперекрывающихся импульсов в виде суммы $\xi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu s(t - t_\nu, \tau_\nu)$. Подставив это выражение в (8.34), получим

$$F_T(j\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu F_1(\omega, \tau_\nu) e^{-j\omega t_\nu},$$

где

$$F_1(\omega, \tau_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t, \tau_\nu) e^{-j\omega t} dt \qquad (8.36)$$

— спектр типового импульса последовательности (см. табл. 8.1).

Очевидно, что квадрат модуля спектральной функции

$$|F_T(j\omega)|^2 = F_T(j\omega) F_T^*(j\omega) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu A_\mu F_1(\omega, \tau_\nu) F_1^*(\omega, \tau_\mu) e^{j\omega(t_\mu - t_\nu)},$$

где через F^* обозначена комплексно-сопряженная функция.

Если вычислить математическое ожидание этого выражения, учтя при этом принятые предположения относительно параметров импульсов, а также равенство Вальда (8.25), подставить полученный результат в исходную формулу (8.33) и затем перейти к пределу при $T \to \infty$, получим следующую окончательную формулу:

$$S(\omega) = \frac{1}{m_\vartheta}\left[M\{A^2 |F_1(\omega, \tau)|^2\} + 2M\{AF_1(\omega, \tau)\} \times \right.$$

$$\left. \times M\{AF_1^*(\omega, \tau)\} \operatorname{Re} \frac{\Theta_\vartheta(\omega)}{1 - \Theta_\vartheta(\omega)}\right] + 2\pi m_\xi^2 \delta(\omega). \qquad (8.37)$$

Здесь

$$m_\vartheta = M\{\vartheta\} = \int_0^\infty \vartheta p(\vartheta) d\vartheta \qquad (8.38)$$

— математическое ожидание интервала между импульсами;

$$m_\xi = M\{\xi(t)\} = \frac{1}{m_\vartheta} M\{AF_1(0, \tau)\} \qquad (8.39)$$

— математическое ожидание (постоянная составляющая) случайного импульсного процесса;

$$\Theta_\vartheta(\omega) = M\{e^{j\omega\vartheta}\} = \int_0^\infty e^{j\omega\vartheta} p(\vartheta) d\vartheta \qquad (8.40)$$

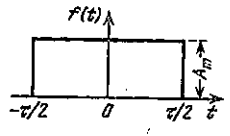
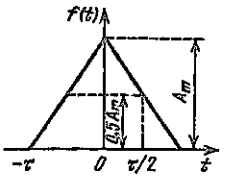
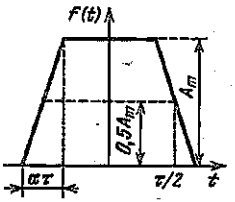
— характеристическая функция интервала между импульсами.

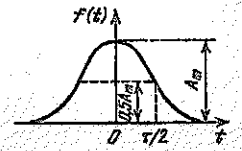
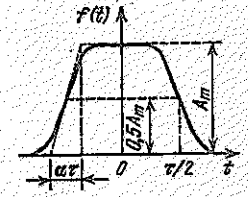
Спектральная плотность в общем случае является непрерывно-дискретной, т. е. состоит из двух составляющих: непрерывной части $S_c(\omega)$ и дискретной линии на нулевой частоте $S_d(\omega)$:

$$S(\omega) = S_c(\omega) + S_d(\omega). \qquad (8.41)$$

Таблица 8.

Различные типы импульсов $f(t)$ и их спектры $F_1(\omega, \tau)$*)

Тип импульса	Аналитическое выражение $f(t)$	График $f(t)$	Аналитическое выражение $F_1(\omega, \tau)$
Прямоугольный	A_m, $\lvert t\rvert \leqslant \tau/2$, 0, $\lvert t\rvert > \tau/2$		$A_m \tau \dfrac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$
Треугольный	$\dfrac{A_m}{\tau}(t+\tau)$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, $-\dfrac{A_m}{\tau}(t-\tau)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, 0, $\lvert t\rvert > \tau$		$A_m \tau \left(\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right)$
Трапецеидальный	$\dfrac{A_m}{\alpha\tau}\left[t+(1+\alpha)\dfrac{\tau}{2}\right]$, $-(1+\alpha)\dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant -(1-\alpha)\dfrac{\tau}{2}$, A_m, $\lvert t\rvert \leqslant (1-\alpha)\dfrac{\tau}{2}$, $-\dfrac{A_m}{\alpha\tau}\left[t-(1+\alpha)\dfrac{\tau}{2}\right]$, $(1-\alpha)\dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant (1+\alpha)\dfrac{\tau}{2}$, 0, $\lvert t\rvert > (1+\alpha)\dfrac{\tau}{2}$		$A_m \dfrac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \times$ $\times \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha\omega\tau}{2}\right)}$

Гауссовский	$A_m \exp\left[-4 \ln 2 \frac{t^2}{\tau^2}\right], \quad -\infty < t < \infty$		$A_m \tau \sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}} \times \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{16 \ln 2}\right)$
Функция ошибок	$\frac{A_m}{2}\left[\operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\right)-\operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\left(\frac{t}{\tau}-\frac{1}{2}\right)\right]$, $-\infty < t < \infty$, $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$, $f(0) = A_m \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \simeq A_m$, $f\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2} A_m \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \simeq \frac{1}{2} A_m$,		$A_m \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \times \exp\left(-\frac{\alpha^2 \omega^2 \tau^2}{4\pi}\right)$

*) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega, \quad F_1(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

Дискретная линия обусловлена отличным от нуля математическим ожиданием случайного импульсного процесса.

Формула (8.37) справедлива для многих практически важных импульсных случайных процессов. В частности, если дополнительно к ранее сделанным предположениям принять, что «амплитуда» A_ν и длительность τ_ν одного и того же импульса есть также независимые случайные величины, т. е. $p_2(A, \tau) = p(A)p(\tau)$, то формула (8.37) упрощается и принимает вид

$$S(\omega) = \frac{1}{m_\vartheta}\left[M\{A^2\} + 2M^2\{A\}\operatorname{Re}\frac{\Theta_\vartheta(\omega)}{1-\Theta_\vartheta(\omega)}\right]\times$$

$$\times M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} + \frac{2\pi}{m_\vartheta^2}|M\{A\}M\{F_1(0, \tau)\}|^2\delta(\omega). \qquad (8.42)$$

Рассмотрим прямоугольные импульсы и вместо интервала ϑ_ν введем интервал между импульсами

$$\Delta_\nu = \vartheta_\nu - \tau_\nu. \qquad (8.43)$$

В этом случае формула (8.42) примет вид

$$S(\omega) = \frac{2}{\omega^2(m_\tau + m_\Delta)}\left\{M\{A^2\}\operatorname{Re}[1-\Theta_\tau(\omega)] + \right.$$

$$\left. + m_A^2\operatorname{Re}\frac{\Theta_\Delta(\omega)[1-\Theta_\tau(\omega)][\Theta_\tau(\omega)-1]}{1-\Theta_\tau(\omega)\Theta_\Delta(\omega)}\right\} + m_A^2\left(\frac{m_\tau}{m_\tau+m_\Delta}\right)^2 2\pi\delta(\omega). \qquad (8.44)$$

Здесь m_τ, m_Δ и m_A — соответственно математические ожидания длительности импульса, промежутка между импульсами и амплитуды импульса, $\Theta_\tau(\omega) = M\{\exp(j\omega\tau)\}$ — характеристическая функция длительности прямоугольных импульсов и $\Theta_\Delta(\omega) = M\{\exp(j\omega\Delta)\}$ — характеристическая функция промежутков между двумя соседними импульсами.

В том частном случае, когда независимые прямоугольные импульсы имеют одинаковую амплитуду ($A_\nu = A_0 = \text{const}$), справедливы равенства $M\{A^2\} = m_A^2 = A_0^2$. При этом формула (8.44) упрощается и оказывается симметричной относительно характеристических функций $\Theta_\tau(\omega)$ и $\Theta_\Delta(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2(m_\tau+m_\Delta)}\operatorname{Re}\frac{[1-\Theta_\tau(\omega)][1-\Theta_\Delta(\omega)]}{1-\Theta_\tau(\omega)\Theta_\Delta(\omega)} + A_0^2\left(\frac{m_\tau}{m_\tau+m_\Delta}\right)^2 2\pi\delta(\omega). \qquad (8.45)$$

Приведем окончательные формулы для спектральной плотности периодических и квазипериодических импульсных процессов, встречающихся в радиотехнических системах [27, 50].

Рассмотрим случай, когда импульсы заданной формы $f(t, \tau_0)$ имеют постоянный период повторения $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, постоянную длительность $\tau = \tau_0 = \text{const}$ ($\tau_0 < \vartheta_0$), но случайные и коррелированные амплитуды A_ν (рис. 8.4, *а*). Такое задание параметров импульсов характерно для амплитудно-импульсной модуляции (АИМ). При амплитудно-импульсной модуляции периодически, через тактовый интервал ϑ_0, берутся выборки $\zeta(k\vartheta_0 + \chi)$ случайного процесса $\zeta(t)$, которые затем превращаются в периодическую последовательность импульсов $A_k f(t - k\vartheta_0 - \chi, \tau_0)$ со случайными амплитудами $A_k = \zeta(k\vartheta_0 + \chi)$ (рис. 8.3). Считаем, что точная «привязка» моментов отсчета к исходному процессу отсутствует (несинхронные периодические импульсы) и случайная величина χ равномерно распределена в интервале $0 \leqslant \chi \leqslant \vartheta_0$, а $f_{\max}(t, \tau_0) = 1$.

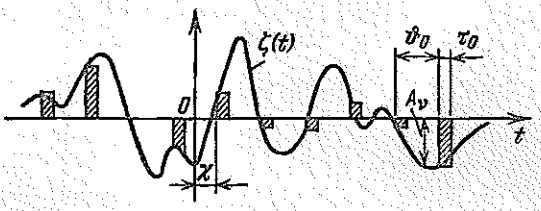


Рис. 8.3. Модулирующие случайные импульсы при амплитудно-импульсной модуляции

Предположим, что случайный процесс $\zeta(t)$ является стационарным, имеет математическое ожидание $m_\zeta = M\{\zeta(t)\} = \text{const}$ и корреляционную функцию $R_\zeta(\tau) = D_\zeta r_\zeta(\tau)$, где $r_\zeta(\tau)$ — нормированная корреляционная функция.

Спектральная плотность полученного таким образом случайного импульсного процесса определяется формулой

$$S(\omega) = 2\pi m_\zeta^2 \vartheta_0^{-2} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) + \frac{D_\zeta}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_\zeta(k\vartheta_0) e^{j\omega k\vartheta_0} \qquad (8.46)$$

или

$$S(\omega) = \vartheta_0^{-2} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{2\pi m_\zeta^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_\zeta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right\}. \qquad (8.47)$$

Из этих формул видно, что спектр состоит из непрерывной части и дискретных спектральных линий при частотах $f = k/\vartheta_0$. Эти дискретные линии имеются только в том случае, когда $m_\zeta \neq 0$. Они обусловлены периодическим стробированием постоянной составляющей процесса. При $m_\zeta = 0$ спектр является сплошным.

Если период ϑ_0 велик по сравнению с временем корреляции τ_h процесса $\zeta(t)$, то в последней сумме в правой части (8.46) будет отличным от нуля лишь слагаемое при $k = 0$, и формула (8.46) упрощается:

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega), \quad \vartheta_0 \gg \tau_h, \qquad (8.48)$$

где

$$S_d(\omega) = 2\pi m_\zeta^2 \vartheta_0^{-2} |F_1(\omega, \tau)|^2, \quad S_c(\omega) = (D_\zeta/\vartheta_0) |F_1(\omega, \tau)|^2. \qquad (8.49)$$

Здесь $S_d(\omega)$ — интенсивность («высота») дискретных спектральных линий, $S_c(\omega)$ — непрерывная часть спектральной плотности.

В табл. 8.2 приведены результаты вычислений спектральной плотности импульсов при АИМ по формулам (8.49) для разных распределений амплитуд импульсов, представленных в табл. 8.3 [51]. Спектры одиночных видеоимпульсов разной формы были указаны в табл. 8.1.

Последовательности квазипериодических случайных импульсов встречаются при различных видах импульсно-временной модуляции. Различают четыре основных вида такой модуляции. На рис. 8.4, *б—д* показаны «низ-

Спектральная плотность импульсов при АИМ

Плотность вероятности амплитуды импульсов $p(x)$	$S_d(\omega)\delta(\omega-n\omega_0)$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$	$S_c(\omega)$
Синусоидальная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 \lvert F_1(\omega, \tau_c)\rvert^2 \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{x_0^2}{2\vartheta_0} \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2$
Нормальная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{\sigma^2}{\vartheta_0} \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2$
Равномерная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{x_0^2}{3\vartheta_0} \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2$
Сумма двух дельта-функций	$\frac{2\pi}{\vartheta_0}[p_1(x_1-x_2)+x_2]^2 \times \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{p_1(1-p_1)(x_1-x_2)^2}{\vartheta_0} \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2$.

кочастотные» импульсы, соответствующие разным видам модуляции, до того, как они воздействуют на колебание несущей частоты. Для простоты изображены прямоугольные импульсы одинаковой амплитуды.

1. При импульсно-фазовой модуляции (ИФМ) импульсы имеют постоянные амплитуду и длительность, а их положение от периода к периоду меняется в соответствии с передаваемым сообщением (рис. 8.4, *б*).

2. При односторонней модуляции длительности импульсов (ОДИМ) все импульсы начинаются в моменты времени, отстоящие на постоянный период ϑ_0, а длительность их изменяется в пределах некоторого интервала $(0, \tau_m)$, меньшего ϑ_0 (рис. 8.4, *в*).

3. При двухсторонней модуляции длительности импульсов (ДДИМ-1) интервал времени между серединами любых двух соседних импульсов одинаков ($\vartheta_0 = \text{const}$), а длительности импульсов случайно изменяются (рис. 8.4, *г*).

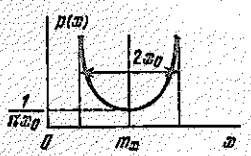
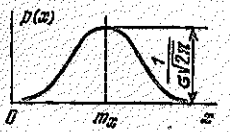
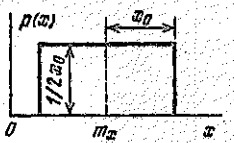
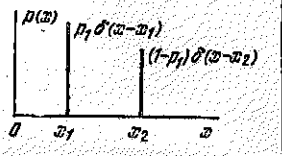
4. При двухсторонней модуляции длительности импульсов (ДДИМ-2) изменяется как длительность, так и положение фронта импульсов, но каждый импульс не выходит за пределы своего тактового интервала (рис. 8.4, *д*).

При всех четырех видах модуляции не допускается перекрывание импульсов, а их положение ограничивается половиной тактового интервала $\vartheta_0/2$.

Приведем выражение спектральной плотности для несколько обобщенного варианта импульсно-фазовой модуляции. Пусть длительность каждого типового импульса $f(t, \tau_0)$, где $f_{\max}(t, \tau_0) = 1$, постоянная $\tau_i = \tau_0 = \text{const}$, а амплитуды A_ν и смещения фронта ε_k случайны, стационарны и независимы как для одного импульса (т. е. при $\nu = k$), так и для импульсов в разных тактовых интервалах (при $\nu \neq k$). Для устранения перекрывания импульсов считаем, что сумма длительности импульса τ_0 и максимального смещения $\varepsilon_{\max}$ не превышает $\vartheta_0/2$.

Таблица 8.3

Плотности вероятности $p(x)$

Плотность вероятности	Аналитическое выражение	График	m_x	σ^2
Синусоидальная	$[\pi\sqrt{x_0^2-(x-m_x)^2}]^{-1}$, $\lvert x-m_x\rvert < x_0$; 0, $\lvert x-m_x\rvert > x_0$		m_x	$\frac{1}{2}x_0^2$
Нормальная	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty<x<\infty$		m_x	σ^2
Равномерная	$1/2x_0$, $\lvert x-m_x\rvert < x_0$; 0, $\lvert x-m_x\rvert > x_0$		m_x	$\frac{1}{3}x_0^2$
Сумма двух дельта-функций	$p_1\delta(x-x_1)+(1-p_1)\delta(x-x_1)$		$p_1(x_1-x_2)+x_2$	$p_1(1-p_1)(x_1-x_2)^2$

Спектральная плотность такой случайной импульсной последовательности определяется формулой

$$S(\omega)=\frac{1}{\vartheta_0}\,|F_1(\omega,\tau_0)|^2\left|M\{A^2\}-m_A^2\,|\Theta_\varepsilon(\omega)|^2+\right.$$

$$\left.+\,2\pi\frac{m_A^2}{\vartheta_0}\,|\Theta_\varepsilon(\omega)|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right]. \qquad (8.50)$$

где $\Theta_\varepsilon(\omega)=M\{\exp(j\omega\varepsilon)\}$ — характеристическая функция смещения ε. При $\varepsilon_k=\varepsilon_0=\text{const}$ рассматриваемая последовательность импульсов периодическая, $|\Theta_\varepsilon(\omega)|=1$, и формула (8.50) переходит в (8.48).

Из формулы (8.50) видно, что при $m_A\neq 0$ спектр является дискретно-сплошным. Дискретные спектральные линии отсутствуют при $m_A=0$.

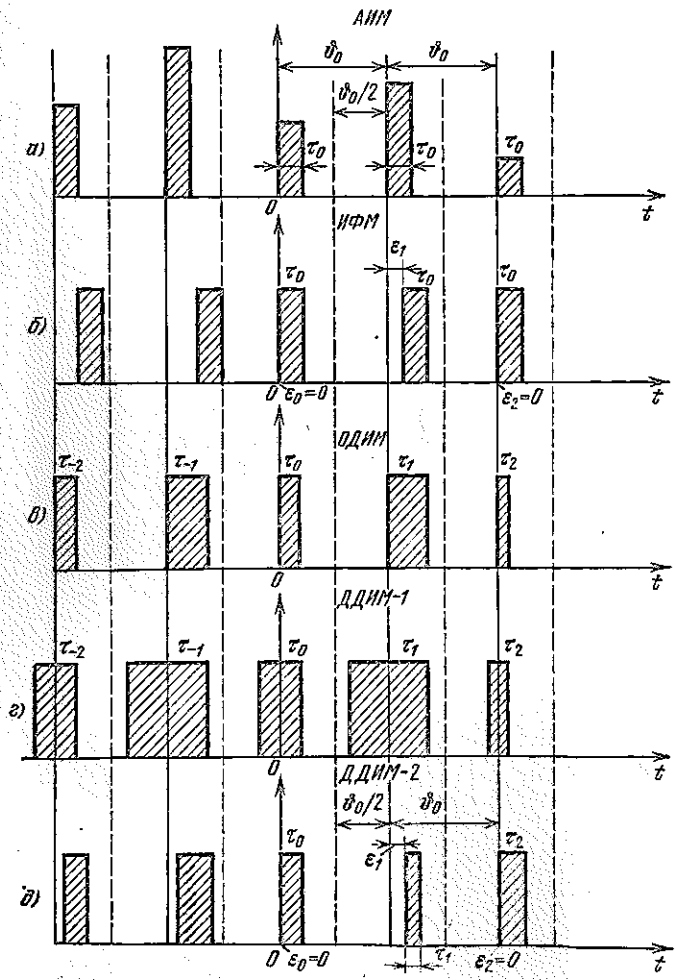


Рис. 8.4. Различные виды импульсной модуляции

Для импульсно-фазовой модуляции с постоянной амплитудой импульсов $A_k = A_0 = \text{const}$ (рис. 8.4, *б*) формула (8.50) принимает вид

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega). \qquad (8.51)$$

где

$$S_d(\omega) = 2\pi A_0^2 \vartheta_0^{-2} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2,$$

$$S_c(\omega) = A_0^2 \vartheta_0^{-1} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 [1 - |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2]. \qquad (8.52)$$

В табл. 8.4 приведены результаты расчетов по формуле (8.52) для разных плотностей вероятностей $p(\varepsilon)$ смещений моментов появления импульсов $\varepsilon = x$ (см. табл. 8.3). Амплитуды импульсов считаются одинаковыми, равными A_0.

Спектральная плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов постоянной амплитуды A_0 при односторонней модуляции их по длительности (рис. 8.4, *в*), когда импульсы следуют периодически через интервал ϑ_0, а длительности импульсов случайны и независимы с плотностью вероятности $p(\tau) = p(x)$, определяется формулой (8.51), в которой нужно полагать

$$S_d(\omega) = 2\pi A_0^2 \vartheta_0^{-2} |M\{F_1(\omega, \tau)\}|^2,$$

$$S_c(\omega) = A_0^2 \vartheta_0^{-1} [M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} - |M\{F_1(\omega, \tau)\}|^2]. \qquad (8.53)$$

Результаты вычислений по этим формулам для импульсов прямоугольной формы при различных распределениях длительностей импульсов приведены в табл. 8.5 ($J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка).

Спектральная плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов постоянной амплитуды $A_0 = \text{const}$ при двухсторонней модуляции их длительности (рис. 8.4, *г*), когда интервал времени между срединами любых двух соседних импульсов постоянен и равен ϑ_0, а длительности импульсов случайны и независимы определяется формулой (8.51), в которой

$$S_d(\omega) = 2\pi A_0^2 \vartheta_0^{-2} |M\{F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}\}|^2,$$

$$S_c(\omega) = A_0^2 \vartheta_0^{-1} [M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} - |M\{F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}\}|^2]. \qquad (8.54)$$

Результаты вычислений для двух форм импульсов при разных распределениях их длительности приведены в табл. 8.6.

В заключение укажем формулу, которая часто используется в данной главе при решении примеров и задач. Она получается в результате представления периодической последовательности дельта-функций рядом Фурье и имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega\vartheta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\omega\vartheta_0 = \frac{2\pi}{\vartheta_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right), \qquad (8.55)$$

где

$$\varepsilon_0 = 2 \quad \varepsilon_n = 1, \quad n \geqslant 1.$$

Таблица

Спектральная плотность импульсов при ИФМ

Плотность вероятности смещения $p(\varepsilon)$	$S_d(\omega)\delta(\omega - n\omega_0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$S_c(\omega)$
Синусоидальная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 J_0^2(\omega x_0) \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{A_0^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2}{\vartheta_0} [1 - J_0^2(\omega x_0)]$
Нормальная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 \exp(-\sigma^2 \omega_0^2) \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{A_0^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2}{\vartheta_0} [1 - \exp(-\sigma^2 \omega^2)]$
Равномерная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 \left[\frac{\sin \omega x_0}{\omega x_0}\right]^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{A_0^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2}{\vartheta_0} \left[1 - \left(\frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0}\right)^2\right]$
Сумма двух дельта-функций	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} \left[1 - 4p_1(1-p_1) \sin^2\left(\frac{\omega x_1 - \omega x_2}{2}\right)\right] \times$ $\times A_0^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2 \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{A_0^2 \lvert F_1(\omega, \tau_0)\rvert^2}{\vartheta_0} 4p_1(1-p_1) \sin^2\left(\frac{\omega x_1 - \omega x_2}{2}\right)$

Таблица 8.5

Спектральная плотность при ОДИМ 1

Плотность вероятности длительности импульсов $p(\tau)$	$S_d(\omega)\,\delta(\omega-n\omega_0)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$S_c(\omega)$
Синусоидальная	$\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2}\left[1+J_0^2(\omega x_0)-2J_0(\omega x_0)\cos\omega\tau\right]\delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1-J_0^2(\omega x_0)\right]$
Нормальная	$\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2}\left[1+\exp(-\sigma^2\omega^2)-2\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)\cos\omega\tau\right]\times \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1-\exp(-\sigma^2\omega^2)\right]$
Равномерная	$\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2}\left[1+\frac{\sin^2(\omega x_0)}{(\omega x_0)^2}-2\frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0}\cos\omega\tau\right]\times \delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1-\frac{\sin^2(\omega x_0)}{(\omega x_0)^2}\right]$
Сумма двух дельта-функций	$\frac{4\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2}\{1-p_1+p_1^2-p_1\cos(\omega x_1)-(1-p_1)\cos(\omega x_2)+ + p_1(1-p_1)\cos[\omega(x_1-x_2)]\}\,\delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}p_1(1-p_1)\{1-\cos[\omega(x_1-x_2)]\}$

Таблица

Спектральная плотность импульсов при ДДИМ-1

Плотность вероятности длительности импульсов $p(\tau)$	$S_d(\omega)\,\delta(\omega - n\omega_0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$S_n(\omega$
	Прямоугольный импульс	
Синусоидальная	$2\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1 - J_0(\omega x_0)\cos(\omega\tau) - 2J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$
Нормальная	$2\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma^2\omega^2\right) \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)\cos(\omega\tau) - 2\exp\left(-\frac{1}{4}\sigma^2\omega^2\right)\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$
Равномерная	$\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)^2} \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0}\left[1 - \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0}\cos(\omega\tau) - 2\frac{\sin^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$
Сумма двух дельта-функций	$\frac{8\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2}\left[p_1 \sin\left(\frac{\omega x_1}{2}\right) + (1 - p_1)\sin\left(\frac{\omega x_2}{2}\right)\right]^2 \times \times \delta(\omega - n\omega_0)$	$\frac{4A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} p_1 (1 - p_1)\left[\sin\left(\frac{\omega x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega x_2}{2}\right)\right]^2$

Гауссовский импульс

Нормальная	$\frac{\pi A_0^2 \tau^2}{2\vartheta_0^2 \ln 2}\left(\frac{8\ln 2}{\sigma^2\omega^2+8\ln 2}\right)^3 \times$ $\times\exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{\sigma^2\omega^2+8\ln 2}\right)\delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{\pi A_0^2\tau^2}{4\vartheta_0\ln 2}\left\{\frac{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}\left(1+\frac{\sigma^2\omega^2}{4\ln 2}\right)}{\left(1+\frac{\sigma^2\omega^2}{4\ln 2}\right)^{5/2}}\times\right.$ $\times\exp\left(\frac{-\omega^2\tau^2}{8\ln 2+2\sigma^2\omega^2}\right)-\frac{1}{\left(1+\frac{\sigma^2\omega^2}{8\ln 2}\right)^3}\times$ $\left.\times\exp\left(\frac{-\omega^2\tau^2}{8\ln 2+\sigma^2\omega^2}\right)\right\}$
Равномерная	$\frac{2\pi}{\vartheta_0}\left[\frac{A_0^2\,\pi 16\ln 2}{\omega^4 x_0^2}\exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2+\omega^2 x_0^2}{8\ln 2}\right)\times\right.$ $\left.\times\mathrm{sh}^2\left(\frac{\omega^2\tau x_0}{8\ln 2}\right)\right]\delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{\pi A_0^2}{2\omega^2\vartheta_0 x_0}\left\{2\exp\left[-b^2(\tau^2+x_0^2)\right]\left[\tau\,\mathrm{sh}\,(2b^2\tau x_0)-\right.\right.$ $-x_0\,\mathrm{ch}\,(2b^2\tau x_0)\left]+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\tau+x_0}{b}\right)-\right.\right.$ $\left.-\mathrm{erf}\left(\frac{\tau-x_0}{b}\right)\right]-\frac{4}{b^2 x_0}\exp\left[-b^2(\tau^2+x_0^2)\right]\times$ $\left.\times\mathrm{sh}^2\,(b^2\tau x_0)\right\},\quad b^2=\omega^2/8\ln 2$
Сумма двух дельта-функций	$\frac{2\pi}{\vartheta_0^2}\,\frac{\pi A_0^2}{4\ln 2}\left[p_1 x_1\exp\left(\frac{-\omega^2 x_1^2}{16\ln 2}\right)+\right.$ $\left.+(1-p_1)x_2\exp\left(\frac{-\omega^2 x_2^2}{16\ln 2}\right)\right]\delta(\omega-n\omega_0)$	$\frac{A_0^2}{\vartheta_0}\,\frac{\pi}{4\ln 2}\,p_1(1-p_1)\left[x_1\exp\left(\frac{-\omega^2 x_1^2}{16\ln 2}\right)-\right.$ $\left.-x_2\exp\left(\frac{-\omega^2 x_2^2}{16\ln 2}\right)\right]^2$

8.1. Вычислить плотность вероятности времени t_n появления n-го события в неоднородном пуассоновском потоке с интенсивностью $\nu(t)$.

Решение. Два события $\{t_n < t\}$ и $\{N(t) > n-1\}$ являются эквивалентными в вероятностном смысле, так как осуществление одного из них достоверно влечет осуществление другого, т.е.

$$P\{t_n < t\} = P\{N(t) > n-1\} = 1 - P\{N(t) \leqslant n-1\}.$$

На основании этого равенства и формулы (8.17) записываем выражение для функции распределения времени t_n

$$F_{t_n}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right)^k, \quad t \geqslant 0.$$

Плотность вероятности времени t_n появления n-й точки определяется формулой

$$p_{t_n}(t) = \frac{d}{dt} F_{t_n}(t) = \nu(t) \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right) \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t (\tau)\,d\tau\right)^k - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right)^k\right] =$$

$$= \nu(t) \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right) \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right)^{n-1}. \qquad (8.56)$$

8.2. Пусть $\tau^+(t')$ — отрезок времени от некоторого фиксированного момента t' до момента появления первого события после t' (расстояние от t' до первой точки справа — рис. 8.1, *а*) в неоднородном пуассоновском потоке с интенсивностью $\nu(t)$. Найти плотность вероятности случайной величины τ^+.

Решение. Для произвольного $\tau > 0$ события $\{\tau^+ > \tau\}$ и $\{N(t' + \tau) - N(t') = 0\}$ вероятностно эквивалентны, т. е.

$$P\{\tau^+ > \tau\} = P\{N(t'+\tau) - N(t') = 0\} = \exp\left(-\int_{t'}^{t'+\tau} \nu(s)\,ds\right).$$

На основании этого равенства записываем функцию распределения величины τ^+ при фиксированном t':

$$F_{\tau^+}(\tau \mid t') = P\{\tau^+ < \tau\} = 1 - \exp\left(-\int_{t'}^{t'+\tau} \nu(s)\,ds\right).$$

Отсюда находим плотность вероятности

$$p_{\tau^+}(\tau \mid t') = \frac{d}{d\tau} F_{\tau^+}(\tau \mid t') = \nu(t' + \tau) \exp\left(-\int_{t'}^{t'+\tau} \nu(s)\,ds\right). \qquad (8.57)$$

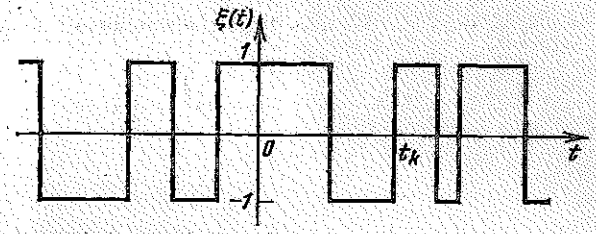


Рис. 8.5. Случайный двоичный сигнал

8.3. Вычислить ковариационную функцию квазислучайного двоичного сигнала $\xi(t)$, сформированного на основе простого пуассоновского потока упорядоченных временных точек $\{t_k, k=0, 1, 2, \dots\}$ следующим образом: $\xi(t) = 1$, если число точек в интервале $(0, t)$ четное, и $\xi(t) = -1$, если число точек в интервале $(0, t)$ нечетное (рис. 8.5).

Решение. Так как события $\{k$ точек в интервале $(0, t)\}$ при различных $k = 0, 1, 2, \dots$ несовместны, то вероятность наличия четного числа точек в интервале $(0, t)$ в соответствии с (8.8) равна

$$P_0(t) + P_2(t) + \dots = e^{-\nu t}\left[1 + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \dots\right] = e^{-\nu t} \operatorname{ch} \nu t.$$

Аналогично вероятность получения нечетного числа точек в интервале $(0, t)$ равна

$$P_1(t) + P_3(t) + \dots = e^{-\nu t}\left[\nu t + \frac{(\nu t)^3}{3!} + \dots\right] = e^{-\nu t} \operatorname{sh} \nu t.$$

Следовательно,

$$P\{\xi(t) = 1\} = e^{-\nu t} \operatorname{ch} \nu t, \quad P\{\xi(t) = -1\} = e^{-\nu t} \operatorname{sh} \nu t.$$

По этим вероятностям находим математическое ожидание

$$M\{\xi(t)\} = 1 \cdot P\{\xi(t) = 1\} - 1 \cdot P\{\xi(t) = -1\} = e^{-\nu t}(\operatorname{ch} \nu t - \operatorname{sh} \nu t) = e^{-2\nu t}. \quad (8.5\ell)$$

Для вычисления ковариационной функции $K_\xi(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1) \times \xi(t_2)\}$ нужно знать совместные вероятности случайных величин $\xi(t_1)$ и $\xi(t)_2$. Пусть $t_1 - t_2 = \tau > 0$. При заданном значении $\xi(t_2) = 1$ случайная величина $\xi(t_1) = 1$, если в интервале (t_2, t_1) имеется четное число точек. Поэтому

$$P\{\xi(t_1) = 1 \mid \xi(t_2) = 1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{ch} \nu\tau.$$

Умножив это выражение на $P\{\xi(t_2) = 1\}$, получим

$$P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{ch} \nu\tau\, e^{-\nu t_2} \operatorname{ch} \nu t_2.$$

Аналогично находим

$$P\{\xi(t_1) = -1, \xi(t_2) = -1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{ch} \nu\tau\, e^{-\nu t_2} \operatorname{sh} \nu t_2,$$
$$P\{\xi(t_1) = 1 \mid \xi(t_2) = -1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{sh} \nu\tau,$$
$$P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = -1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{sh} \nu\tau\, e^{-\nu t_2} \operatorname{sh} \nu t_2,$$
$$P\{\xi(t_1) = -1, \xi(t_2) = 1\} = e^{-\nu\tau} \operatorname{sh} \nu\tau\, e^{-\nu t_2} \operatorname{ch} \nu t_2.$$

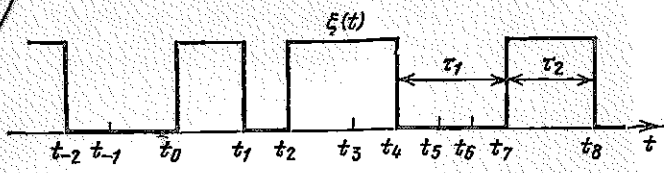


Рис. 8.6. Случайный фототелеграфный сигнал

Записав развернутое выражение для ковариационной функции и подставив в него найденные вероятности, получим $K_\xi(t_1, t_2) = \exp[-2\nu(t_1 - t_2)]$. Поменяв местами t_1 и t_2 (т. е. положив $t_1 < t_2$), придем к окончательной формуле

$$K_\xi(t_1, t_2) = \exp(-2\nu|t_1 - t_2|). \tag{8.59}$$

Из формулы (8.58) видно, что процесс $\xi(t)$ нестационарен. Это объясняется тем, что начало отсчета времени было выбрано вполне определенным образом (на положительном импульсе). Чтобы «начальное условие» было случайно выбранным, рассмотрим случайный двоичный сигнал

$$\eta(t) = A\xi(t), \tag{8.60}$$

где A — независимая от $\xi(t)$ случайная величина, принимающая лишь два значения: $+1$ и -1 с одинаковыми вероятностями: $P\{A = 1\} = P\{A = -1\} = 1/2$. При этом

$$M\{A\} = 0, \quad M\{A^2\} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что процесс $\eta(t)$ стационарен, так как

$$M\{\eta(t)\} = M\{A\}M\{\xi(t)\} = 0,$$
$$K_\eta(t_1, t_2) = M\{A^2\}M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \exp(-2\nu|t_1 - t_2|). \tag{8.61}$$

Процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ асимптотически (при $t \to \infty$) имеют одинаковые вероятностные характеристики.

8.4. Вычислить ковариационную функцию и спектральную плотность случайного фототелеграфного сигнала $\xi(t)$, сформированного на базе пуассоновского потока упорядоченных временных точек $\{t_k;\ k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots\}$ следующим образом [50]. В интервалах между соседними точками $\xi(t)$ — постоянная величина, равная 1 или 0 с вероятностями p и $1 - p$ соответственно. Значения $\xi(t)$ в разных интервалах независимы. Типичная реализация процесса показана на рис. 8.6.

Решение. Для произвольно выбранного момента времени t математическое ожидание процесса

$$M\{\xi(t)\} = 1 \cdot P\{\xi(t) = 1\} + 0 \cdot P\{\xi(t) = 0\} = p. \tag{8.62}$$

Запишем выражение для ковариационной функции:

$$K_\xi(t, t + \tau) = M\{\xi(t)\xi(t + \tau)\} = P\{\xi(t) = 1, \xi(t + \tau) = 1\}.$$

Фигурирующая здесь совместная плотность вероятности зависит от того, находятся ли моменты времени t и $t+\tau$ в одном и том же интервале или в разных:

$$P\{\xi(t)=1, \xi(t+\tau)=1\} = \begin{cases} p, & \text{если } t \text{ и } t+\tau \text{ в одном интервале,} \\ p^2, & \text{если } t \text{ и } t+\tau \text{ в разных интервалах.} \end{cases}$$

Вероятность того, что t и $t+\tau$ находятся в одном интервале, определяется формулой (8.9) и равна $P_0(|\tau|)$ независимо от t, а вероятность того, что t и $t+\tau$ находятся в разных интервалах, равна $1-P_0(|\tau|)$. Следовательно,

$$K_\xi(\tau) = pe^{-\nu|\tau|} + p^2[1-e^{-\nu|\tau|}] = p(1-p)e^{-\nu|\tau|} + p^2. \tag{8.63}$$

По ковариационной функции находим спектральную плотность случайного фототелеграфного сигнала

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{2\nu p(1-p)}{\omega^2+\nu^2} + p^2 \cdot 2\pi\delta(\omega). \tag{8.64}$$

Спектральная плотность состоит из непрерывной части и дискретной спектральной линии на нулевой частоте.

8.5. Для случайного фототелеграфного сигнала $\xi(t)$, описанного в предыдущем примере, вычислить математические ожидания времени между переходами $1 \to 0$ и $0 \to 1$ и между обратными переходами (рис. 8.6), а также среднюю частоту переходов.

Решение [50]. Пусть случайная величина τ_1 есть время между соседними переходами $1 \to 0$ и $0 \to 1$. Принимая во внимание основные свойства случайного телеграфного сигнала, можем записать

$$P\{\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \tau+\Delta\tau\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\text{наличия } k-1 \text{ точек в } \tau\} \times$$

$$\times P\{\text{отсутствия переходов в этих } k-1 \text{ точках}\}\, P\{\text{наличия } k\text{-й точки в интервале } (\tau,\ \tau+\Delta\tau)\}\, P\{\text{наличия перехода в } k\text{-й точке}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\tau)(1-p)^{k-1}(\nu\Delta\tau)p = p\nu\Delta\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\tau}(1-p)^{k-1} =$$

$$= p\nu\Delta\tau e^{-p\nu\tau}.$$

Математическое ожидание времени между указанными переходами

$$M\{\tau_1\} = \int_0^{\infty} p\nu\tau e^{-p\nu\tau}\, d\tau = \frac{1}{\nu p}.$$

В силу симметрии среднее время между обратными переходами $0 \to 1$ и $1 \to 0$ определяется выражением $M\{\tau_2\} = 1/\nu(1-p)$.

Следовательно, среднее время между любыми двумя переходами равно

$$\frac{1}{2}[M\{\tau_1\} + M\{\tau_2\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\nu p} + \frac{1}{\nu(1-p)}\right] = \frac{1}{2\nu p(1-p)},$$

что соответствует средней частоте переходов $2\nu p(1-p)$.

8.6. Вычислить ковариационную функцию случайного процесса

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, h(t-t_k),\quad k\neq 0, \tag{8.65}$$

где $\{A_k\}$ — стационарная последовательность случайных величин с одинаковой плотностью вероятности $p(A)$, не зависящая от последовательности значений $\{t_k\}$, которые упорядочены и описываются потоком Пуассона с параметром ν.

Решение [50]. Примем произвольную точку $t=t_0$ за начало отсчета времени и затем пронумеруем $\{t_k\}$ в реализации $\xi(t)$ так, что t_1 — первая точка справа от t_0, t_{-1} — первая точка слева от t_0 и т. д. (см. рис. 8.2, *а*). Тогда все случайные величины t_k-t_0 при $k>0$ и t_0-t_k при $k<0$ имеют плотность вероятности (8.14).

По определению, математическое ожидание процесса

$$m_\xi=M\{\xi(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} M\{A_k\}\,M\{h(t-t_k)\}=$$

$$=M\{A\}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} h(t)\,p_{t_k}(t)\,dt+\sum_{k=-\infty}^{1}\int_0^{\infty} h(-t)\,p_{t_{-k}}(t)\,dt\right]=$$

$$=\nu M\{A\}\left[\int_0^{\infty} h(t)\,e^{-\nu t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt+\int_{-\infty}^{0} h(t)\,e^{\nu t}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-\nu t)^{i-1}}{(i-1)!}\,dt\right]=\nu M\{A\}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt. \tag{8.66}$$

При вычислении ковариационной функции предположим, что случайные величины последовательности $\{A_k\}$ взаимно независимы, так что

$$M\{A_k A_i\}=\begin{cases} M\{A^2\} & \text{при } k=i\neq 0,\\ M^2\{A\} & \text{при } k\neq i,\\ 0 & \text{при } k \text{ или } i=0.\end{cases}$$

Тогда имеем

$$K_\xi(t+\tau,t)=M\{\xi(t+\tau)\,\xi(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} M\{A_k A_i\}\times$$

$$\times M\{h(t-t_k+\tau)\,h(t-t_i)\}.$$

Двойную сумму можно вычислить путем раздельного рассмотрения восьми членов, для которых $k>i>1$, $k=i<-1$, $k=i>1$, $i>k>1$, $i<k<-1$, $k<i<1$, $k>1$, $i<-1$, $i>1$,

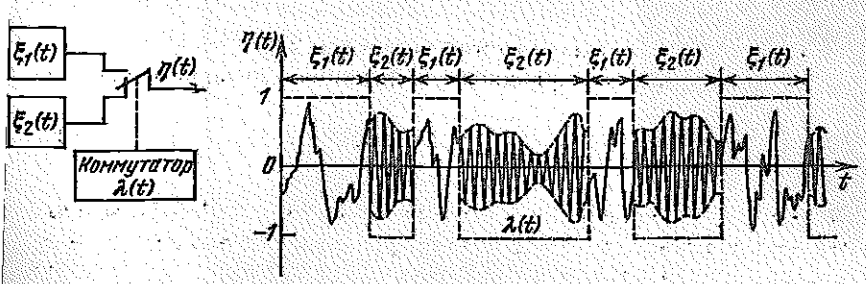


Рис. 8.7. Способ получения составного сигнала $\eta_1(t)$

$k < -1$. Эти вычисления весьма громоздки и здесь не приводятся. Окончательный результат имеет простой вид:

$$K_\xi(\tau) = \nu M\{A^2\}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,h(t+\tau)\,dt + \left[\nu M\{A\}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt\right]^2. \quad (8.67)$$

8.7. Вычислить математические ожидания и ковариационные функции трех видов составного (манипулированного) сигнала (рис. 8.7)

$$\eta_1(t) = (1/2)[1+\lambda(t)]\xi_1(t) + (1/2)[1-\lambda(t)]\xi_2(t), \quad (8.68а)$$

$$\eta_2(t) = \lambda(t)\xi_1(t) + [1-\lambda(t)]\xi_2(t), \quad (8.68б)$$

$$\eta_3(t) = \lambda(t-\Delta)\xi_1(t-\Delta) + [1-\lambda(t-\Delta)]\xi_2(t-\Delta) \quad (8.68в)$$

или

$$\eta_3(t) = \lambda(t-\Delta)\xi_1(t) + [1-\lambda(t-\Delta)]\xi_2(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — не зависящие от $\lambda(t)$ стационарные, не коррелированные между собой случайные процессы с ковариационными функциями $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$.

В составном сигнале (8.68а) $\lambda(t)$ — «переключающий» стационарный случайный двоичный сигнал (например вида, указанного в примере 8.3) с ковариационной функцией $K_\lambda(\tau)$, принимающий лишь два значения: $+1$ и -1. При этом сигнал $\eta_1(t) = \xi_1(t)$ при $\lambda(t) = 1$ и $\eta_1(t) = \xi_2(t)$ при $\lambda = -1$, т. е. случайный процесс $\eta_1(t)$ представляет собой случайный манипулированный двоичный сигнал, состоящий из последовательности случайно чередующихся двух «элементарных» сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

В сигнале (8.68б) $\lambda(t)$ есть периодическая (с периодом T) (синхронная) последовательность детерминированных прямоугольных импульсов длительностью T_1 (рис. 8.8):

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } kT \leqslant t < kT + T_1,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (8.69)$$

В сигнале (8.68в) $\lambda(t-\Delta)$ — периодическая (несинхронная) последовательность тех же прямоугольных импульсов со случайным смещением Δ относительно начала отсчета времени. Случайная величина Δ считается равномерно распределенной в интервале $(0, T)$.

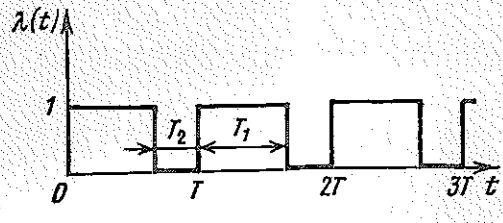


Рис. 8.8 Периодическая переключающая функция $\lambda(t)$

Решение. Используя независимость $\lambda(t)$ от $\xi_1(t_1)$ и $\xi_2(t_2)$ при различных t_1, t_2 и t, для математического ожидания и ковариационной функции сигнала $\eta_1(t)$ получим

$$M\{\eta_1(t)\} = (1/2)[1 + M\{\lambda(t)\}]M\{\xi_1(t)\} + (1/2)[1 - M\{\lambda(t)\}] \times \times M\{\xi_2(t)\},$$

$$K_{\eta_1}(\tau) = M\{\eta_1(t)\eta_1(t+\tau)\} = (1/4)[1 + K_\lambda(\tau)][K_1(\tau) + K_2(\tau)] + + (1/2)[1 - K_\lambda(\tau)]K_{12}(\tau).$$

Когда элементарные сигналы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ не коррелированы между собой ($K_{12}(\tau) \equiv 0$), из последней формулы получаем

$$K_{\eta_1}(\tau) = (1/4)[1 + K_\lambda(\tau)][K_1(\tau) + K_2(\tau)]. \qquad (8.70а)$$

Для сигнала $\eta_2(t)$ находим

$$M\{\eta_2(t)\} = M\{\lambda(t)\}M\{\xi_1(t)\} + [1 - M\{\lambda(t)\}]M\{\xi_2(t)\},$$

$$K_{\eta_2}(t, t+\tau) = M\{\eta_2(t)\eta_2(t+\tau)\} = \lambda(t)\lambda(t+\tau)K_1(\tau) + + [1 - \lambda(t)][1 - \lambda(t+\tau)]K_2(\tau) + \{\lambda(t)[1 - \lambda(t+\tau)] + + \lambda(t+\tau)[1 - \lambda(t)]\}M\{\xi_1(t)\}M\{\xi_2(t)\}. \qquad (8.70б)$$

В силу периодичности $\lambda(t)$ сигнал $\eta_2(t)$ является периодически стационарным, так как

$$M\{\eta_2(t+T)\} = M\{\eta_2(t)\}, \quad K_{\eta_2}(t+T, \; t+\tau+T) = = K_{\eta_2}(t, \; t+\tau).$$

Наконец, математическое ожидание и ковариационная функция сигнала $\eta_3(t)$ равны

$$M\{\eta_3(t)\} = M\{\xi_1(t)\}\frac{1}{T}\int_0^T \lambda(t-\Delta)\,d\Delta + M\{\xi_2(t)\}\frac{1}{T}\int_0^T [1 - \lambda(t-\Delta)]\,d\Delta = \frac{T_1}{T}M\{\xi_1(t)\} + \frac{T_2}{T}M\{\xi_2(t)\},$$

$$K_{\eta_3}(\tau) = \frac{T_1}{T}q(\tau)K_1(\tau) + \left\{\frac{T_2}{T} - \frac{T_1}{T}[1 - q(\tau)]\right\}K_2(\tau) + + 2M\{\xi_1(t)\}M\{\xi_2(t)\}\frac{T_1}{T}[1 - q(\tau)], \qquad (8.70в)$$

где $q(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_0^T \lambda(t)\lambda(t+\tau)dt$. Периодическая функция $q(\tau)$ показана на рис. 8.9. Сигнал $\eta_3(t)$ является стационарным в широком смысле.

8.8. Получить выражение спектральной плотности стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов постоянной амплитуды $A = A_0$ и постоянной длительности $\tau = \tau_0$, если временной интервал между началами соседних импульсов $\vartheta > \tau_0$ изменяется случайно и независимо от импульса к импульсу. Рассмотреть частный случай прямоугольных импульсов.

Решение. Применительно к данному примеру формула (8.42) принимает вид

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{m_\vartheta}|F_1(\omega, \tau_0)|^2 \frac{1-|\Theta_\vartheta(\omega)|^2}{|1-\Theta_\vartheta(\omega)|^2} + \frac{A_0^2}{m_\vartheta^2} F_1^2(0, \tau_0)\, 2\pi\delta(\omega). \quad (8.71)$$

Для прямоугольного импульса здесь нужно положить

$$F_1(\omega, \tau_0) = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau_0}),$$

$$|F_1(\omega, \tau_0)|^2 = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right), \quad F_1(0, \tau_0) = \tau_0 .$$

Тогда получим

$$S(\omega) = \frac{4A_0^2}{\omega^2 m_\vartheta}\sin^2\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\frac{1-|\Theta(\omega)|^2}{|1-\Theta(\omega)|^2} + \left(\frac{A_0\tau_0}{m_\vartheta}\right)^2 2\pi\delta(\omega). \quad (8.72)$$

8.9. Из нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $D_\xi r_\xi(\tau)$ берутся периодически (с периодом ϑ_0) отсчеты $\xi(t - i\vartheta_0)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Эти отсчеты при помощи нелинейной ступенчатой функции $\zeta(t) = g[\xi(t)]$ подвергаются квантованию на четыре уровня $\zeta_m = 1, 2, 3, 4$, причем пороги квантования равны $\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3$ (рис. 8.10). Функция $g(\xi)$ предполагается нечетной, т. е. $g(\xi) = -g(-\xi)$. Получающаяся случайная последовательность значений ζ_m превращается (кодируется) в последовательность прямоугольных импульсов фиксированной длительности $\tau_0 < \vartheta_0$ со случайными амплитудами ζ_m. Вычислить спектральную плотность импульсной последовательности $\eta(t)$, полученной из случайного процесса $\xi(t)$ при помощи квантования по времени и по уровням.

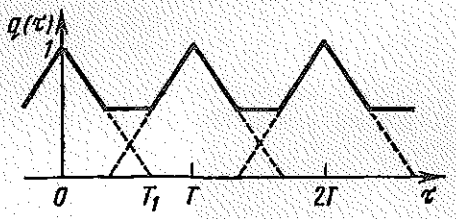


Рис. 8.9. Периодическая функция

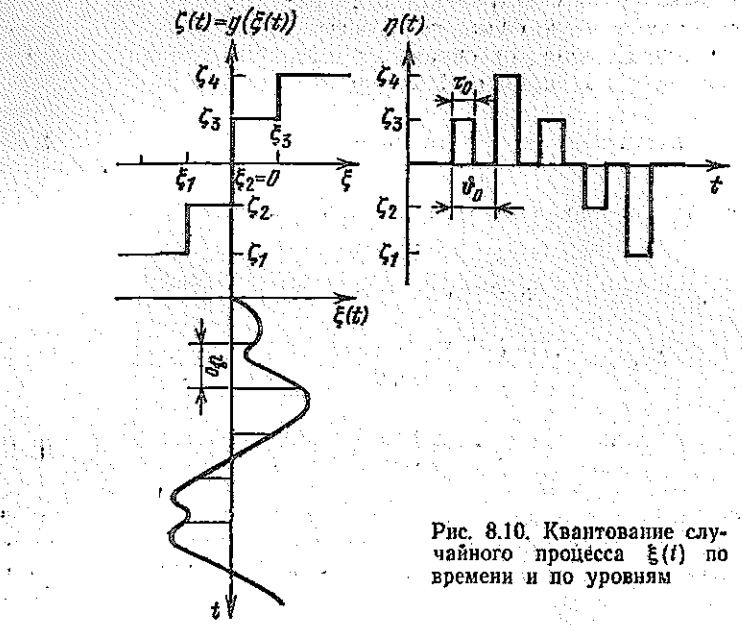


Рис. 8.10. Квантование случайного процесса $\xi(t)$ по времени и по уровням

Решение [1]. К данному примеру применима формула (8.46). При этом получение импульсного процесса $\eta(t)$ целесообразно рассматривать в обратном порядке, а именно, как периодическое (с периодом ϑ_0) временное стробирование прямоугольными импульсами длительностью τ_0 процесса $\zeta(t)$, полученного из исходного процесса $\xi(t)$ при помощи нелинейного преобразования $g(\xi(t))$.

Так как среднее значение процесса $\xi(t)$ равно нулю и функция $g(\xi)$ нечетная, то среднее значение процесса $\zeta(t)$, очевидно, тоже равно нулю, т. е. $m_\zeta = 0$. Поэтому формула (8.46) упрощается:

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 D_\zeta \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_\zeta(n\vartheta_0) e^{j\omega n\vartheta_0} =$$

$$= \frac{\tau_0^2}{\vartheta_0} \left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\zeta(n\vartheta_0) e^{j\omega n\vartheta_0}, \qquad (8.73)$$

где $R_\zeta(\tau)$ — корреляционная функция процесса $\zeta(t)$. Здесь учтено, что для прямоугольного импульса единичной высоты и длительности τ_0

$$|F_1(\omega, \tau_0)|^2 = \tau_0^2 \left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right]^2.$$

Для определения спектральной плотности $S_\eta(\omega)$ остается вычислить корреляционную функцию процесса $\zeta(t)$. Анализируя нелинейное безынерционное преобразование $g(\xi)$ известными методами, можно показать (см. пример 12.6), что

$$R_\zeta(\tau)=\frac{1}{D_\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{3}\Delta_m\,\Phi^{(m)}\left(\frac{\xi_m}{\sigma_\xi}\right)\right]^2\frac{r_\xi^k(\tau)}{k!}, \tag{8.74}$$

где $\Phi^{(m)}(x)$ — производные от интеграла вероятности;

$$\Delta_m=\xi_{m+1}-\xi_m,\quad m=1,\ 2,\ 3.$$

Подставив (8.74) в (8.37), получим окончательно

$$S_\eta(\omega)=D_\xi\frac{\tau_0^2}{\vartheta_0}\left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right]^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\omega n\vartheta_0}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{3}\Delta_m\,\Phi^{(m)}\left(\frac{\xi_m}{\sigma_\xi}\right)\right]^2\frac{r_\xi^k(n\vartheta_0)}{k!}. \tag{8.75}$$

8.10. Вычислить спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при односторонней модуляции их по длительности (рис. 8.4, *в*). Амплитуда импульсов фиксирована ($A_i=A_0=\text{const}$), импульсы следуют периодически через интервал ϑ_0, а длительности импульсов случайны и независимы. Рассмотреть случай прямоугольных импульсов с равномерным распределением длительностей

$$p_1(\tau)=\begin{cases}1/2\tau_0, & |\tau-\tau_0|\leqslant\tau_0<\vartheta_0,\\ 0 & |\tau-\tau_0|>\tau_0.\end{cases} \tag{8.76}$$

Решение. Следует воспользоваться формулой (8.53). Для прямоугольного импульса с учетом (8.76) можем написать

$$F_1(\omega,\tau)=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau}),$$

$$M\{F_1(\omega,\tau)\}=\frac{1}{2\tau_0}\int_0^{2\tau_0}F_1(\omega,\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\omega^2\tau_0}(1-2j\omega\tau_0-e^{-2j\omega\tau_0}),$$

$$|M\{F_1(\omega,\tau)\}|^2=\frac{1}{\omega^2}\left[1+\frac{\sin^2\omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^2}-2\frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0}\cos\omega\tau_0\right],$$

$$M\{|F_1(\omega,\tau)|\}=\frac{2}{\omega^2}\left[1-\frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0}\cos\omega\tau_0\right].$$

Подставив эти выражения в (8.53), получим

$$S_d(\omega)=\frac{2\pi A_0^2}{(\omega\vartheta_0)^2}\left[1+\frac{\sin^2\omega\tau}{(\omega\tau_0)^2}-2\frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0}\cos\omega\tau_0\right],$$

$$S_c(\omega)=\frac{A_0^2}{\omega^2\vartheta_0}\left[1-\frac{\sin^2\omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^2}\right].$$

8.11. Найти спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности (рис. 8.4, *г*). Будем считать, что амплитуда импульсов постоянна ($A_i = A_0 = \text{const}$), интервал времени между срединами любых двух соседних импульсов постоянен и равен ϑ_0, а длительности импульсов случайны и независимы. Выполнить вычисления для импульсов прямоугольной формы, когда их длительности распределены по нормальному закону:

$$p_1(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma \ll \frac{\vartheta_0}{2} \tag{8.77}$$

Решение. В данном случае нужно воспользоваться формулами (8.54). Для прямоугольного импульса находим

$$F_1(\omega, \tau) = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau}), \quad F_1(\omega, \tau)\, e^{j\omega\tau/2} = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

$$|F_1(\omega, \tau)|^2 = \frac{2}{\omega^2}(1 - \cos\omega\tau).$$

Воспользовавшись при статистическом осреднении с плотностью вероятности (8.77) известным интегралом

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0,$$

получим

$$M\{F_1(\omega, \tau)\, e^{j\omega\tau/2}\} = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau_0}{2}\exp\left(-\frac{1}{8}\sigma^2\omega^2\right),$$

$$M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} = \frac{2}{\omega^2}\left[1 - \cos\omega\tau_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)\right].$$

Подстановка этих соотношений в формулы (8.54) дает выражение для спектральной плотности независимых прямоугольных импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности

$$S_d(\omega) = 2\pi A_0^2\left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2\left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right]^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma^2\omega^2\right),$$

$$S_c(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2\vartheta_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right) - 2\exp\left(-\frac{1}{4}\sigma^2\omega^2\right)\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}\right].$$

Результаты вычислений для прямоугольных и гауссовских импульсов при разных распределениях длительностей приведены в табл. 8.6 [51].

8.12. Найти спектральную плотность стационарной последовательности модулирующих импульсов постоянной амплитуды ($A_i = A_0 = \text{const}$) при двусторонней модуляции длительности импульсов (рис. 8.4, *д*). Предполагается, что длительности импульсов τ_i и смещения ε_i моментов их появления относительно тактового интервала ϑ_0 независимы для любых пар импульсов, причем $0 \leqslant \tau_i + \varepsilon_i \leqslant \vartheta_0$ (отсутствие перекрывания). Рассмотреть частный случай

прямоугольных импульсов, у которых смещения и длительности независимы и распределены равномерно в интервале $(0, \vartheta_0/2)$, т.е.

$$p_1(\tau) = 1/\tau_0, \quad p_1(\varepsilon) = 1/\varepsilon_0, \quad \tau_0 = \varepsilon_0 = \vartheta_0/2 \tag{8.78}$$

Решение. Применительно к сформулированному примеру спектральная плотность определяется формулой

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0}\left[M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} - |M\{F_1^*(\omega, \tau)\, e^{j\omega\varepsilon}\}|^2 + \right.$$

$$\left. + |M\{F_1^*(\omega, \tau)\, e^{j\omega\varepsilon}\}|^2 \frac{2\pi}{\vartheta_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right], \tag{8.79}$$

где $F^*(x)$ — функция, комплексно-сопряженная $F(x)$.

Если длительности τ_i и смещения ε_k независимы не только для любых разных $(i \neq k)$ импульсов, но и для одного и того же импульса (т. е. при $i = k$), то формула (8.79) упрощается:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0}\left[M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} - |M\{F_1^*(\omega, \tau)\}\, \Theta_\varepsilon(\omega)|^2 + \right.$$

$$\left. + |M\{F_1^*(\omega, \tau)\}\, \Theta_\varepsilon(\omega)|^2 \frac{2\pi}{\vartheta_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right], \tag{8.80}$$

где $\Theta_\varepsilon(\omega) = M\{\exp(j\omega\varepsilon)\}$ — характеристическая функция смещения ε.

Для прямоугольного импульса с учетом (8.78) можем написать

$$F_1^*(\omega, \tau) = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\tau} - 1),$$

$$M\{F_1^*(\omega, \tau)\} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} F_1^*(\omega, \tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega^2 \tau_0}(1 + j\omega\tau_0 - e^{j\omega\tau_0}),$$

$$|M\{F_1(\omega,\tau)\}|^2 = \frac{2}{\omega^4\tau_0^2}\left[1 + \frac{1}{2}(\omega\tau_0)^2 - \cos\omega\tau_0 - \omega\tau_0 \sin\omega\tau_0\right],$$

$$M\{|F_1(\omega, \tau)|^2\} = \frac{2}{\omega^3\tau_0}(\omega\tau_0 - \sin\omega\tau_0).$$

Зная плотность вероятности (8.78) для смещения, находим характеристическую функцию

$$\Theta_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0} e^{j\omega\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(e^{j\omega\varepsilon_0} - 1), \quad |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2 = \frac{2}{(\omega\varepsilon_0)^2}(1 - \cos\omega\varepsilon_0).$$

Известно, что квадрат модуля произведения двух комплексных величин равен произведению квадратов модулей сомножителей. Если учесть, что $\tau_0 = \varepsilon_0 = \vartheta_0/2$, и подставить записанные соотношения в

(8.80), то получим выражение для спектральной плотности случайной последовательности независимых прямоугольных импульсов

$$S(\omega)=\frac{A_0^2\vartheta_0}{2x^6}\left[x^3(x-\sin x)-(x^2+2-2\cos x-2x\sin x)\times\right.$$

$$\times(1-\cos x)+(x^2+4-4\cos x-x^2\cos x-2x\sin x)\times$$

$$\left.\times\frac{2\pi}{\vartheta_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta}\right)\right],\quad x=\omega\vartheta_0/2.$$

Укажем, что при записи сомножителя перед суммой дельта-функций было учтено, что дельта-функции отличны от нуля лишь в точках $\omega=2\pi k/\vartheta_0$ ($\omega\vartheta_0=2\pi k$), в которых

$$2\cos^2 x+2x\sin x\cos x=(1+\cos 2x)-x\sin 2x=2.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

8.1. Исходя из того, что приращения простого пуассоновского потока $N(t_2)-N(t_1)$, $t_2>t_1$ на неперекрывающихся временных интервалах независимы и распределены по закону Пуассона с математическим ожиданием $\nu(t_2-t_1)$, найти математическое ожидание произведения приращений на двух интервалах, когда эти интервалы не перекрываются и перекрываются (рис. 8.11).

Ответ:

$$M\{|N(t_a)-N(t_b)|\,|N(t_c)-N(t_d)|\}=\nu^2(t_a-t_b)(t_c-t_d)$$

при $t_a>t_b>t_c>t_d$;

$$M\{|N(t_a)-N(t_b)|\,|N(t_c)-N(t_d)|\}=M\{\{|N(t_a)-N(t_c)|+$$

$$+|N(t_c)-N(t_b)|\}\{|N(t_c)-N(t_b)|+|N(t_b)-N(t_d)|\}\}=$$

$$=\nu^2(t_a-t_b)(t_c-t_d)+\nu(t_c-t_b)\quad\text{при}\quad t_a>t_c>t_b>t_d,$$

где (t_c-t_b) — длина перекрывающихся частей двух интервалов (t_b, t_a) и (t_d, t_c).

8.2. Получить выражение для ковариационной функции целочисленного пуассоновского процесса $N(t)$.

Ответ:

$$K_N(t_1, t_2)=M\{N(t_1)N(t_2)\}=\begin{cases}\nu t_2+\nu^2 t_1 t_2 & \text{при } t_1\geqslant t_2,\\ \nu t_1+\nu^2 t_1 t_2 & \text{при } t_1\leqslant t_2.\end{cases}$$

8.3. Найти выражение для ковариационной функции неоднородного пуассоновского процесса $N(t)$.

Ответ: $K_N(t_1t_2)=\int_0^{t_2}\nu(t)\,dt\left[1+\int_0^{t_1}\nu(t)\,dt\right]$ при $t_1>t_2$.

При $t_1<t_2$ в этом выражении нужно поменять местами t_1 и t_2.

Рис. 8.11. Перекрывающиеся интервалы времени

8.4. Вычислить математическое ожидание и ковариационную функцию следующего приращения $n(t)$ простого пуассоновского процесса (см. рис. 8.1, *в*) $n(t) = [N(t+\varepsilon) - N(t)]/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная величина. Изобразить график ковариационной функции и рассмотреть предельный случай при $\varepsilon \to 0$.

Ответ:

$$M\{n(t)\} = (1/\varepsilon)M\{N(t+\varepsilon)\} - (1/\varepsilon)M\{N(t)\} = \nu,$$

$$K_n(t_1, t_2) = \begin{cases} \nu^2 & \text{при } |t_1 - t_2| > \varepsilon, \\ \nu^2 + \nu\varepsilon^{-1} - \nu\varepsilon^{-2}|t_1 - t_2| & \text{при } |t_1 - t_2| < \varepsilon. \end{cases}$$

График ковариационной функции изображен на рис. 8.12. Ковариационная функция состоит из суммы постоянной составляющей ν^2 и равнобедренного треугольного импульса, который при $\varepsilon \to 0$ переходит в дельта-импульс $\nu\delta(t_2 - t_1)$.

8.5. Вычислить математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = dN(t)/dt = \lim_{\varepsilon \to 0} n(t) = \sum_i \delta(t - t_i),$$

представляющего собой последовательность дельта-функций (см. рис. 8.1, *б*).

Ответ: $M\{\xi(t)\} = \nu$, $K_\xi(t_1, t_2) = \nu^2 + \nu\delta(t_2 - t_1)$.

У к а з а н и е. При получении ковариационной функции следует воспользоваться формулой (6.30) и выражением ковариационной функции процесса $N(t)$, полученным в задаче 8.2.

8.6. Для простого пуассоновского процесса $N(t)$ получить выражение одномерной характеристической функции.

Ответ: $\Theta(jv) = M\{e^{jvN(t)}\} = e^{\nu t(e^{jv} - 1)}$.

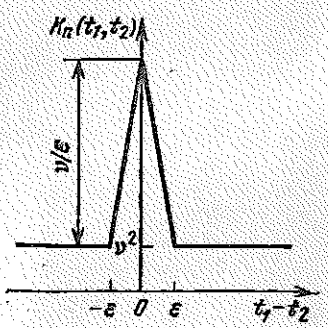


Рис. 8.12. Ковариационная функция приращения пуассоновского процесса

8.7. Для простого пуассоновского процесса $N(t)$ при $t_1 > t_2$ и целых положительных числах k и n получить выражение для вероятности $P\{N(t_1) = k + n,\ N(t_2) = k\}$.

Ответ: $P\{N(t_1) = k+n,\ N(t_2) = k\} = e^{-\nu t_1} \nu^{k+n} \frac{(t_1-t_2)^n t_2^k}{n!\, k!}$.

8.8. Доказать, что математическое ожидание m_{t_k} и дисперсия D_{t_k} времени t_k появления k-го события в простом пуассоновском потоке выражаются через математическое ожидание m_τ и дисперсию D_τ интервалов τ_k между соседними событиями формулами $m_{t_k} = km_\tau$, $D_{t_k} = kD_\tau$.

Ответ: $t_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$, где $\{\tau_i\}$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями m_τ и дисперсиями D_τ.

8.9. Вычислить вероятность наличия λ событий в полуинтервале $(t,\ t+\tau]$ для неоднородного пуассоновского потока с интенсивностью $\nu(t) = \nu_0(1 + \alpha \sin \omega t)$.

Ответ: $P_\lambda(\tau) = (\nu_0 T)^\lambda e^{-\nu_0 T}/\lambda!$,
где

$$T = \int_t^{t+\tau} (1 + \alpha \sin \omega t)\, dt = \tau + \frac{2\alpha}{\omega} \sin \omega \left(t + \frac{1}{2}\tau\right) \sin \frac{1}{2} \omega\tau.$$

В частности,

$$P_0(\tau) = \exp\left[-\nu_0 \tau - \frac{2\alpha\nu_0}{\omega} \sin \omega \left(t + \frac{1}{2}\tau\right) \sin \frac{1}{2} \omega\tau\right].$$

8.10. Вычислить плотность вероятности временного интервала $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ между k-й и $(k-1)$-й точками неоднородного пуассоновского потока с интенсивностью $\nu(t)$, считая момент времени t_{k-1} известным и фиксированным.

Ответ: $p_{\tau_k}(\tau \mid t_{k-1}) = \nu(t_{k-1} + \tau) \exp\left(-\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} \nu(s)\, ds\right)$.

8.11. Вычислить плотности вероятности случайных величин τ^+ и τ^- для простого пуассоновского потока с интенсивностью ν, где τ^+ — длина временного интервала от произвольно выбранного момента времени t' до ближайшей точки справа, а τ^- — до ближайшей точки слева.

Ответ: $p_{\tau+}(\tau) = p_{\tau-}(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau)$.

8.12. Найти плотность вероятности промежутка времени $T_k = t_{i+k} - t_i$ между i-м и $(i+k)$-м событиями в простом пуассоновском потоке с интенсивностью ν.

Ответ: $p_{T_k}(t) = \nu e^{-\nu t} (\nu t)^{k-1}/(k-1)!$

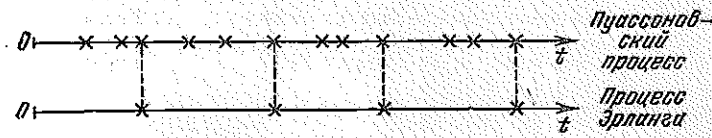


Рис. 8.13. Иллюстрация формирования потока Эрланга из пуассоновского при $k=3$

8.13. В простейшем пуассоновском потоке с интенсивностью ν производится операция «разрежения». Пусть все точки, начиная с некоторого начального момента времени, перенумерованы в порядке их появления. Исключим все точки, кроме тех, номера которых кратны некоторому целому числу k (на рис. 8.13 приведен пример для $k = 3$). В результате такого разрежения получим новый точечный процесс — поток Эрланга. Найти плотность вероятности временных интервалов между соседними событиями в потоке Эрланга.

Ответ: $p_{\tau_k}(\tau) = \nu e^{-\nu\tau} (\nu\tau)^{k-1}/(k-1)!$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

8.14. В законе Пуассона (8.8) длительность временного интервала t является случайной величиной с экспоненциальной плотностью вероятности $p(t) = \alpha \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$, $t \geqslant 0$. Найти вероятность P_n ровно n событий.

Ответ $P_n = \alpha \int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+\nu)t} \frac{(\nu t)^n}{n!} dt = \frac{\alpha}{\alpha+\nu} \left(\frac{\nu}{\alpha+\nu}\right)^n$.

8.15. Телефонные вызовы отдельных абонентов являются пуассоновскими потоками вида (8.8), но с разными математическими ожиданиями. Найти вероятность поступления ровно n вызовов на телефонную станцию за время t, если параметры интенсивности разных абонентов можно аппроксимировать гамма-плотностью вероятности

$$p(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \alpha^{\mu+1} \nu^\mu e^{-\alpha\nu}$$

Ответ: $P_n(t) = \int\limits_0^\infty p_n(t)\, p(\nu)\, d\nu = C_n^{n+\mu} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\mu+1} \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n$.

8.16. Пусть $\{N_1(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ и $\{N_2(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ есть два независимых пуассоновских процесса с интенсивностями ν_1 и ν_2 соответственно. Вычислить вероятность P_n того, что во временном промежутке между двумя любыми соседними событиями процесса $N_1(t)$ появится ровно n событий процесса $N_2(t)$.

Ответ

$$P_n = \int\limits_0^\infty \frac{(\nu_2\tau)^n}{n!} e^{-\nu_2\tau} \nu_1 e^{-\nu_1\tau} d\tau = \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu_2} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

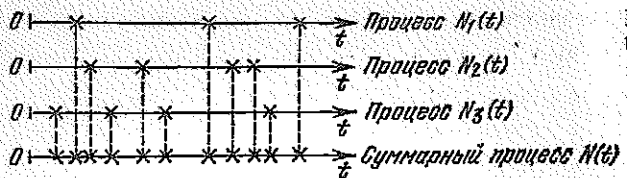


Рис. 8.14. Наложение трех точечных процессов

8.17. В законе Пуассона $p_k = \lambda^k \exp(-\lambda)/k!$ сам параметр λ распределен также по закону Пуассона: $P_\lambda = \alpha^\lambda \exp(-\alpha)/\lambda!$. Найти безусловную вероятность появления ровно n событий.

Ответ:

$$P_n = \sum_\lambda \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\alpha^{-\lambda} e^{-\alpha}}{\lambda!} = \frac{1}{k!} \exp\left[-\alpha\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right] \times$$

$$\times \sum_\lambda \lambda^k \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\lambda \exp\left(-\frac{\alpha}{e}\right) \frac{1}{\lambda!} = \frac{1}{k!} \exp\left[-\alpha\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right] M_k(\alpha/e),$$

где M_k — k-й начальный момент распределения Пуассона.

8.18. Имеется конечное число r взаимно независимых пуассоновских потоков $N_1(t)$, ..., $N_r(t)$ с интенсивностями ν_1, ..., ν_r соответственно. Показать, что суммарный поток (рис. 8.14) $N(t) = N_1(t) + \ldots + N_r(t)$ является также пуассоновским с интенсивностью $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$.

Ответ: Нужно убедиться, что для суммарного потока $N(t)$ выполняются три определяющих свойства пуассоновости потока: ординарности, стационарности и независимости приращений на непересекающихся интервалах времени. Из условия ординарности (8.5) для потока $N(t)$ определяется параметр интенсивности $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$.

8.19. Имеется два независимых целочисленных пуассоновских процесса $N_1(t)$ и $N_2(t)$ с законами распределения

$$p_1(n) = \frac{(\nu_1 t)^n}{n!} e^{-\nu_1 t}, \quad p_2(m) = \frac{(\nu_2 t)^m}{m!} e^{-\nu_2 t}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти закон распределения $p(k)$ для разности $N(t) = N_1(t) - N_2(t)$.

Ответ:

$$p(k) = e^{-(\nu_1 + \nu_2)t} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{k/2} I_{|k|}(2t\sqrt{\nu_1 \nu_2}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $I_k(x)$ — функция Бесселя k-го порядка от мнимого аргумента.

8.20. Вычислить математическое ожидание и корреляционную функцию случайного двоичного сигнала $\eta(t)$, который отличается от квазислучайного двоичного сигнала $\xi(t)$, описанного в примере 8.3, лишь тем, что принимает значения A_1 и A_2, а не $+1$ и -1.

Ответ:

$$M\{\eta(t)\} = (1/2)(A_1 + A_2) + (1/2)(A_1 - A_2)e^{-2\nu t},$$

$$R(t_1, t_2) = (1/4)(A_1 - A_2)^2 [e^{-2\nu|t_1 - t_2|} - e^{-2\nu(t_1 + t_2)}].$$

Указание. Нужно воспользоваться соотношением

$$\eta(t) = (1/2)(A_1 + A_2) + (1/2)(A_1 - A_2)\xi(t),$$

а также формулами (8.58) и (8.59).

8.21. Вычислить математическое ожидание и ковариационную функцию случайного двоичного сигнала $\eta(t)$, который отличается от случайного фототелеграфного сигнала $\xi(t)$, описанного в примере 8.4, только тем, что принимает значения A_1 и A_2, а не 1 и 0.

Ответ: $M\{\eta(t)\} = A_1 p + A_2(1-p)$,

$$K_\eta(\tau) = [A_1 p + A_2(1-p)]^2 + (A_1 - A_2)^2 p\,(1-p)e^{-\nu|\tau|}.$$

Указание. Нужно воспользоваться соотношением $\eta(t) = A_2 + (A_1 - A_2)\,\xi(t)$, а также формулами (8.62) и (8.63).

8.22. Найти спектральную плотность стационарной пуассоновской последовательности дельта-импульсов $\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(t - t_k)$, где $\{A_k\}$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с одинаковой плотностью вероятности $p(A)$, $\{t_k\}$ — независимая от $\{A_n\}$ пуассоновская последовательность точек на оси времени с интенсивностью потока ν (рис. 8.15).

Ответ: $S(\omega) = \nu M\{A^2\} + (\nu M\{A\})^2 2\pi\delta(\omega)$.

Указание. Целесообразно сначала по формуле (8.67) найти ковариационную функцию $K(\tau) = \nu M\{A^2\}\delta(\tau) + (\nu M\{A\})^2$, а затем по ней вычислить спектральную плотность.

8.23. Получить спектральную плотность суммы двух взаимно независимых стационарных последовательностей дельта-импульсов «высотой» A_k и B_i:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\,\delta(t - t_k) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i\,\delta(t - t_i).$$

Здесь первая последовательность описана в задаче 8.22, а вторая последовательность аналогична первой: $\{B_i\}$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с одинаковой плотностью вероятности $p_1(B)$, $\{t_i\}$ — не зависящая от $\{B_i\}$ пуассоновская последовательность точек на временной оси с интенсивностью потока μ.

Ответ:

$$S(\omega) = \nu M\{A^2\} + \mu M\{B^2\} + |\nu M\{A\} + \mu M\{B\}|^2\, 2\pi\delta(\omega).$$

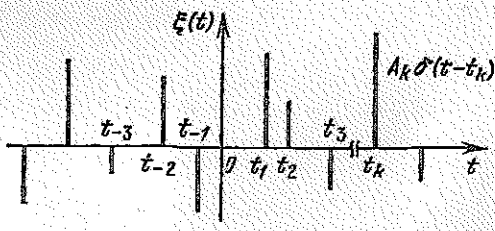


Рис. 8.15. Стационарная пуассоновская последовательность дельта-функций

8.24. Рассмотреть два частных случая задачи 8.22:
1) $p(A) = \delta(A - A_0)$; 2) $p(A) = [\delta(A - A_0) + \delta(A + A_0)]/2$.
Ответ: 1) $S(\omega) = \nu A_0^2[1 + 2\pi\nu\delta(\omega)]$, 2) $S(\omega) = \nu A_0^2$.

8.25. Получить выражение ковариационной функции бесконечной последовательности чередующихся биполярных дельта-импульсов $A_0\delta(t - t_k)$ и $-A_0\delta(t - t_{k+1})$ (рис. 8.16), где $\{t_k\}$ — стационарная пуассоновская последовательность точек на оси времени с интенсивностью ν.

Ответ: $K(\tau) = \nu A_0^2\delta(\tau) - \nu^2 A_0^2 e^{-2\nu|\tau|}$.

У к а з а н и е. Рассматриваемую последовательность чередующихся биполярных дельта-импульсов можно получить путем дифференцирования стационарного случайного двоичного сигнала, приведенного в примере 8.3, принимающего два значения: $A_0/2$ и $-A_0/2$ (рис. 8.5). Ковариационная функция такого сигнала $\xi(t)$ согласно формуле (8.61) равна

$$K_\xi(\tau) = (A_0^2/4)\exp(-2\nu|\tau|).$$

Поэтому $K(\tau) = -d^2K_\xi(\tau)/d\tau^2$. При вычислении второй производной полезно воспользоваться представлением (см. рис. 8.17)

$$\frac{dK_\xi(\tau)}{d\tau} = f_1(\tau) + f_2(\tau) = \begin{cases} (\nu A_0^2/2)\, e^{2\nu\tau} & \text{при } \tau < 0, \\ -(\nu A_0^2/2)\, e^{-2\nu\tau} & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

где

$$f_1(\tau) = \begin{cases} \nu A_0^2/2 \text{ при } \tau < 0, \\ -\nu A_0^2/2 \text{ при } \tau > 0, \end{cases} \quad f_2(\tau) = \begin{cases} -(\nu A_0^2/2)(1 - e^{2\nu\tau}) & \text{при } \tau < 0, \\ (\nu A_0^2/2)(1 - e^{-2\nu\tau}) & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

8.26. На основе простого пуассоновского потока временных точек с интенсивностью ν сформирован случайный процесс $\xi(t) = A_k$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\{A_k\}$ — независимая от $\{t_k\}$ последовательность взаимно независимых случайных величин с общей плотностью вероятности $p(A)$. Вычислить математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $\xi(t)$.

Ответ:

$$M\{\xi(t)\} = M\{A_k\} = \int Ap(A)dA = m_A,$$

$$R(\tau) = M\{A^2\}P_0(\tau) + m_A^2[1 - P_0(\tau)] - m_A^2 = D_A e^{-\nu|\tau|},$$

где $D_A = M\{A^2\} - m_A^2$ — дисперсия случайной величины A_k.

8.27. Вычислить корреляционную функцию и спектральную плотность стационарного случайного сигнала

$$s(t) = A\cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0],$$

у которого A_0 и ω_0 — постоянные амплитуда и частота, φ_0 — случайная начальная фаза, равномерно распределенная в интервале $(-\pi, \pi)$, $\varphi(t)$ — модулирующее случайное сообщение вида $\varphi(t) = \varphi_k$, $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

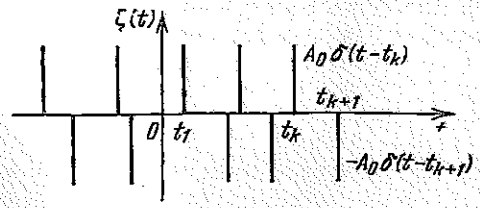


Рис. 8.16. Стационарная пуассоновская последовательность чередующихся биполярных дельта-функций

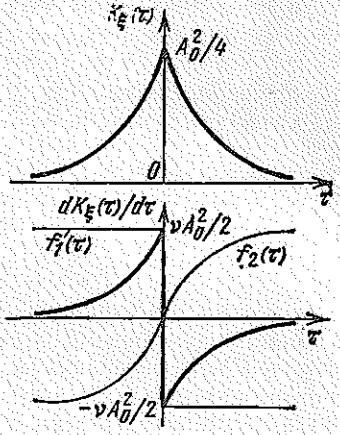


Рис. 8.17. К вычислению производных ковариационной функции

Здесь $\{\varphi_k\}$ — случайная последовательность взаимно независимых случайных величин, равномерно распределенных в интервале $(-\pi, \pi)$, $\{t_k\}$ — не зависящая от $\{\varphi_k\}$ стационарная последовательность пуассоновских временных точек с интенсивностью ν.

Ответ [45]:

$$R(\tau) = \frac{1}{2} A_m \, e^{-\nu|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} A_m^2 \left[\frac{\nu}{\nu^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right].$$

8.28. Случайная функция $\xi(t)$ образована последовательностью примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов, амплитуды и длительности которых случайны и независимы (рис. 8.18). Плотности вероятности для амплитуд и длительностей заданы

$$p(A) = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(A - m_A)^2}{2\sigma_A^2} \right]; \quad p(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad \alpha > 0, \ \tau > 0.$$

Вычислить спектральную плотность и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

Ответ: $S(\omega) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \sigma_A^2 + m_A^2 \, 2\pi\delta(\omega), \ R(\tau) = \sigma_A^2 e^{-\alpha|\tau|}.$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулой (8.44), положив $\Delta = 0$.

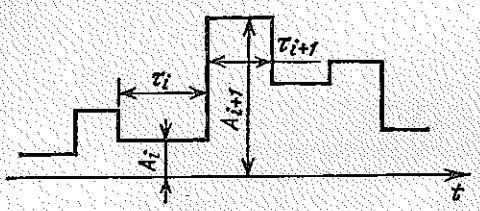


Рис. 8.18. Случайная последовательность примыкающих прямоугольных импульсов

8.29. Найти спектральную плотность стационарной последовательности прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой $A = A_0$, когда импульсы и промежутки между ними имеют одинаковый закон распределения.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\omega^2 m_\tau} \operatorname{Re} \frac{1-\Theta_\tau(\omega)}{1+\Theta_\tau(\omega)} + \frac{1}{2} A_0^2 \pi\delta(\omega) =$$

$$= \frac{A_0^2}{\omega^2 m_\tau} \frac{1-|\Theta_\tau(\omega)|^2}{|1+\Theta_\tau(\omega)|^2} + \frac{1}{2} A_0^2 \pi\delta(\omega).$$

Указание. Воспользоваться формулой (8.45).

8.30. Вычислить спектральную плотность стационарной последовательности независимых прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой A_0 и постоянной длительностью τ_0, если длительность временных интервалов между соседними импульсами Δ имеет показательный закон распределения: $p(\Delta) = \beta e^{-\beta\Delta}$, $\beta > 0$, $\Delta > 0$.

Ответ: $S(\omega) = \dfrac{2A_0^2 \beta (1-\cos\omega\tau_0)}{\omega^2(1+\beta\tau_0)[(\beta/\omega)^2(1-\cos\omega\tau_0)^2+(1+\beta\omega^{-1}\sin\omega\tau_0)^2]} +$

$$+\left(\frac{A_0 \beta\tau_0}{1+\beta\tau_0}\right)^2 2\pi\delta(\omega).$$

8.31. Найти спектральную плотность стационарной последовательности независимых прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой A_0 и постоянной длительностью промежутков между импульсами Δ_0, когда длительности импульсов распределены по показательному закону $p(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}$, $\alpha > 0$, $\tau > 0$.

Ответ: $S(\omega) = \dfrac{2\alpha A_0^2 (1-\cos\omega\Delta_0)}{\omega^2(1+\alpha\Delta_0)} \left[\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 (1-\cos\omega\Delta_0)^2 + \right.$

$$\left. + \left(1+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\Delta_0\right)^2\right]^{-1} + \left(\frac{\alpha A_0 \Delta_0}{1+\alpha\Delta_0}\right)^2 2\pi\delta(\omega).$$

8.32. Вычислить спектральную плотность и корреляционную функцию стационарной последовательности независимых импульсов прямоугольной формы с постоянной амплитудой A_0, когда длительности импульсов τ и длительности интервалов между соседними импульсами Δ имеют показательные законы распределения

$$p(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0; \quad p(\Delta) = \beta e^{-\beta\Delta}, \quad \Delta > 0.$$

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\beta A_0^2}{\alpha+\beta} \frac{1}{\omega^2+(\alpha+\beta)^2} + \left(\frac{\beta A_0}{\alpha+\beta}\right)^2 2\pi\delta(\omega),$$

$$R(\tau) = \frac{\alpha\beta A_0^2}{(\alpha+\beta)^2} e^{-(\alpha+\beta)|\tau|}.$$

8.33. Периодические выборки (с периодом ϑ_0) стационарного случайного процесса $\zeta(t)$, имеющего среднее значение m_ζ и корреляционную функцию $R_\zeta(\tau) = \sigma_\zeta^2 e^{-\alpha|\tau|}$, превращаются в прямоуголь-

ные импульсы постоянной длительности $\tau = \text{const}$ (см. рис.8.3). Определить спектральную плотность получающейся периодической последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами $A_i = \zeta(t - i\vartheta_0)$.

Ответ: $$S(\omega) = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left[\sigma_\xi^2 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\vartheta_0} \cos \omega n \vartheta_0 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_\xi^2}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right] = \frac{4}{\omega^2 \vartheta_0} \sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} \vartheta_0}{\operatorname{ch} \vartheta_0 - \cos \omega\vartheta_0} \sigma_\xi^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi m_\xi^2}{\vartheta_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) \right].$$

8.34. Независимые одинаковые импульсы треугольной формы (см. табл. 8.1)

$$f(t - i\vartheta_0, \tau_0) = \begin{cases} (t + \tau_0)/\tau_0, & i\vartheta_0 - \tau_0 \leqslant t \leqslant i\vartheta_0, \\ (\tau_0 - t)/\tau_0, & i\vartheta_0 \leqslant t \leqslant i\vartheta_0 + \tau_0, \ \tau_0 \leqslant \vartheta_0/2, \\ 0, & \text{при других } t \end{cases}$$

имеют постоянный период следования ϑ_0. Плотность вероятности амплитуд импульсов имеет вид

$$p(A) = \begin{cases} [\pi \sqrt{x_0^2 - (A - m_A)^2}]^{-1}, & |A - m_A| < x_0, \\ 0, & |A - m_A| > x_0. \end{cases}$$

Найти спектральную плотность такой случайной импульсной последовательности.

Ответ: (см. табл. 8.2)

$$S(\omega) = \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2 \left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2} \right]^4 \left[\frac{1}{2} x_0^2 \vartheta_0 + 2\pi m_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) \right].$$

8.35. По каналу связи передается двоичная информация: независимые посылки и паузы равновероятны и передаются периодически с тактовым интервалом ϑ_0. Посылке соответствует прямоугольный импульс постоянной амплитуды A_0 и постоянной длительности τ_0, а паузе — отсутствие импульса. Найти спектральную плотность последовательности импульсов.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{1}{4} A_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2 \left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)} \right] \left[1 + \frac{2\pi}{\vartheta_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right) \right].$$

8.36. Независимые и равновероятные посылки и паузы представляют собой прямоугольные импульсы постоянной длительности $\tau = \vartheta_0$ и постоянной амплитуды A_0, но противоположной поляр-

ности (посылке соответствует $+A_0$, паузе соответствует $-A_0$). Посылки и паузы следуют через постоянный интервал времени ϑ_0. Вычислить спектральную плотность и корреляционную функцию такого случайного телеграфного сигнала.

Ответ:

$$S(\omega)=A_0^2\,\vartheta_0\left[\frac{\sin(\omega\vartheta_0/2)}{\omega\vartheta_0/2}\right]^2,\quad R(\tau)=A_0^2\left(1-\frac{|\tau|}{\vartheta_0}\right),\quad |\tau|<\frac{\vartheta_0}{2}.$$

8.37. На линейное устройство (рис. 8.19), состоящее из линии задержки на время ϑ_0, вычитающей схемы и идеального низкочастотного усилителя с коэффициентом усиления K_0, воздействует случайная последовательность двоичных сигналов, указанная в задаче 8.35. Определить спектральную плотность случайной последовательности импульсов на выходе устройства.

Ответ: $S(\omega)=A_0^2\,K_0^2\,\vartheta_0\left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2\left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)\sin(\omega\vartheta_0/2)}{(\omega\tau_0/2)}\right]^2$.

Указание. Частотная характеристика рассматриваемого устройства $K(j\omega)=K_0(1-e^{-j\omega\vartheta_0})$.

8.38. Двоичная информация передается при помощи детерминированных сигналов с фазовой манипуляцией. Независимые и равновероятные посылки и паузы передаются периодически в течение всего тактового интервала $\vartheta_0=\text{const}$. Посылке соответствует прямоугольный радиоимпульс $A\sin\omega_0 t$ длительностью ϑ_0, а паузе — радиоимпульс $-A\sin\omega_0 t$ той же длительности. Амплитуда A и частота ω_0 — постоянные величины. Считая $\omega_0\vartheta_0=2\pi n$, где n — любое целое положительное число, найти спектральную плотность случайной последовательности прямоугольных радиоимпульсов.

Ответ: $S(\omega)=A^2\,\vartheta_0\left[\frac{2\pi n\sin(\omega\vartheta_0/2)}{(\omega\vartheta_0)^2-(2\pi n)^2}\right]^2$.

8.39. Передача двоичной информации осуществляется при помощи импульсно-фазовой манипуляции. Посылка передается прямоугольным видеоимпульсом с амплитудой $A_0=\text{const}$, длительностью $\tau_0=\text{const}$ и временным положением относительно тактового интервала $\varepsilon=\varepsilon_1=\text{const}$. Пауза передается тем же прямоугольным импульсом, но его положение относительно тактового интервала равно $\varepsilon=\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\text{const}$. Каждый из импульсов не выходит за пределы своего тактового интервала, т. е. $0\leqslant\varepsilon_1\leqslant\vartheta_0-\tau_0$, $0\leqslant\varepsilon_2\leqslant\vartheta_0-\tau_0$. Посылки и паузы независимы и равновероятны.

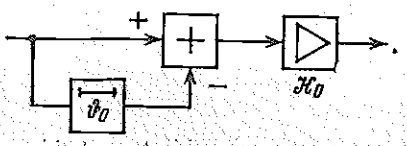


Рис. 8.19. Схема линейного устройства

Найти спектральную плотность такой случайной последовательности прямоугольных импульсов.

Ответ: $$S(\omega)=A_0^2\vartheta_0\left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2\left[\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)}\right]^2\left[1-\cos^2\frac{\omega\varepsilon_0}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi}{\vartheta_0}\cos\frac{\omega\varepsilon_0}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right].$$

Указание. Следует воспользоваться формулой (8.52). В данном случае плотность вероятности для смещения ε равна $p(\varepsilon)=(1/2)\delta(\varepsilon-\varepsilon_1)+(1/2)\delta(\varepsilon-\varepsilon_2)$.

8.40. В квазипериодической стационарной последовательности независимых импульсов, имеющих одинаковую форму, но случайные амплитуды A_i, смещения ε моментов появления импульсов относительно тактового интервала, равного ϑ_0, распределены по нормальному закону

$$p(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right),$$

где $\sigma_\varepsilon\ll\vartheta_0$ (отсутствие наложения импульсов).

Вычислить спектральную плотность импульсного случайного процесса. Рассмотреть частный случай, когда амплитуды импульсов постоянны ($A_i=A_0=\text{const}$).

Ответ [52]:

$$S(\omega)=\frac{1}{\vartheta_0}|F_1(\omega,\tau_0)|^2\left\{M\{A^2\}-m_A^2\exp(-\sigma_\varepsilon^2\omega^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi m_A^2}{\vartheta_0}\exp(-\sigma_\varepsilon^2\omega^2)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right\},$$

$$S(\omega)=\frac{A_0^2}{\vartheta_0}|F_1(\omega,\tau_0)|^2\left\{1-\exp(-\sigma_\varepsilon^2\omega^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi}{\vartheta_0}\exp(-\sigma_\varepsilon^2\omega^2)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)\right\}.$$

8.41. Независимые периодически повторяющиеся (с периодом ϑ_0) прямоугольные импульсы с постоянной амплитудой A_0 имеют плотность вероятности длительности импульсов

$$p(\tau)=p_1\delta(\tau-\tau_1)+(1-p_1)\delta(\tau-\tau_2).$$

Найти спектральную плотность импульсного случайного процесса.

Ответ: $$S(\omega)=\frac{2A_0^2}{\omega^2\vartheta_0^2}[1-p_1+p_1^2-p_1\cos\omega\tau_1-(1-p_1)\cos\omega\tau_2+$$

$$+2\pi p_1(1-p_1)\cos\omega(\tau_2-\tau_1)]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\vartheta_0}\right)+$$

$$+\frac{2A_0^2}{\omega^2\vartheta_0}p_1(1-p_1)[1-\cos\omega(\tau_2-\tau_1)].$$

8.42. Найти спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при двусторонней модуляции их по длительности (рис. 8.4, *г*). Амплитуда импульсов постоянная $A_0=\text{const}$, интервал времени между срединами любых двух соседних импульсов также постоянен и равен ϑ_0, а длительности импульсов случайны, независимы и имеют плотность вероятности

$$p_1(\tau)=\begin{cases}\left[\pi\sqrt{x_0^2-(\tau-\tau_0)^2}\right]^{-1}, & |\tau-\tau_0|<x_0,\\ 0, & |\tau-\tau_0|\geq x_0.\end{cases}$$

Ответ: $$S(\omega)=2\pi A_0^2\left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2\frac{\sin^2(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)^2}J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi m}{\vartheta_0}\right)+\frac{2A_0^2}{\omega^2\vartheta_0}\left|1-J_0(\omega x_0)\cos(\omega\tau_0)-\right.$$

$$\left.-2J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\right],$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

8.43. В плоскопараллельном диоде, работающем в режиме насыщения, моменты вылета электронов с катода независимы и описываются законом Пуассона. Пренебрегая начальными скоростями вылета электронов из катода, можно считать, что пролет каждого

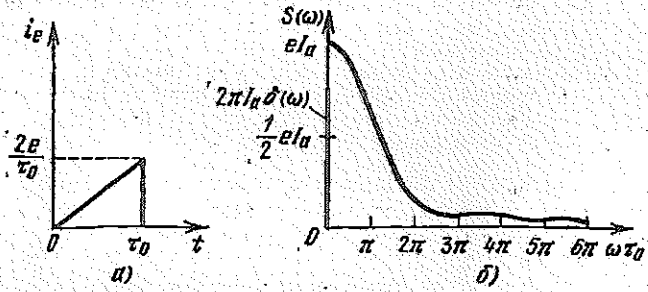


Рис. 8.20. Элементарный импульс анодного тока (*а*) и спектральная плотность дробового шума (*б*)

электрона от катода до анода наводит в анодной цепи треугольный импульс тока (рис. 8.20, *а*)

$$i_e(t) = \begin{cases} 2et/\tau_0^2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_0 \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

где e — заряд электрона; τ_0 — время пролета электрона от катода до анода. Среднее значение анодного тока $I_a = ev$, где ν — среднее число электронов, попадающих на анод в единицу времени.

Вычислить и построить график спектральной плотности дробового шума. Определить значение непрерывной части спектра $S_c(\omega)$ при нулевой частоте.

Ответ [42]: $S(\omega) = 2\pi I_a^2 \delta(\omega) + eI_a \frac{4}{(\omega\tau_0)^4}[(\omega\tau_0)^2 + 2(1 - \cos\omega\tau_0 - \omega\tau_0 \sin\omega\tau_0)]$, $S_c(0) = eI_a$.

График спектральной плотности изображен на рис. 8.20, *б*.

9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. **Надежность** — свойство системы (объекта, изделия, устройства, элемента и т. д.) выполнять возложенные на нее функции с сохранением эксплуатационных показателей в заданных пределах при определенных режимах и условиях эксплуатации.

Надежность — сложное свойство, включающее в свою очередь безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость. В зависимости от конкретных систем и условий их эксплуатации эти свойства могут иметь различную относительную значимость.

Для расчета надежности, формулирования требований на надежность разрабатываемых систем, сравнения систем по надежности и т. д. служат количественные характеристики — показатели надежности, которые определяются или по экспериментальным данным об отказах системы, или по известному аналитическому выражению какой-либо характеристики. В первом случае используются статистические определения показателей надежности, которые получают при испытаниях и эксплуатации систем (такие показатели в дальнейшем отмечены звездочкой); во втором — вероятностные определения и аналитические зависимости между ними. Вероятностные расчеты производятся на стадии проектирования.

Для невосстанавливаемых (неремонтируемых) систем чаще всего используются четыре показателя надежности: вероятность безотказной работы $P(t)$, плотность вероятности отказов (частота отказов) $p_1(t)$, интенсивность отказов $\lambda(t)$, среднее время безотказной работы (средняя наработка до отказа) m_t [22, 53—57].

Вероятность безотказной работы (функция надежности) $P(t)$ есть вероятность того, что система проработает безотказно в течение времени t, начав работать в момент времени $t = 0$, или вероятность того, что время работы системы до отказа окажется больше заданного времени t:

$$P(t) = P(T > t) = 1 - F_1(t), \tag{9.1}$$

где T — случайное время работы (наработка) системы до отказа; $F_1(t) = P(T < t)$ — функция распределения случайной величины T.

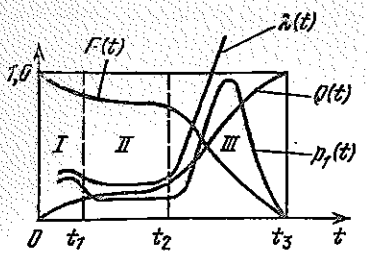


Рис. 9.1. Типичный вид функции $P(t)$, $Q(t)$, $p_1(t)$, $\lambda(t)$

Иногда пользуются понятием вероятности отказа $Q(t)$ за время t, которая определяется как вероятность того, что случайное время работы системы до отказа окажется меньше заданного времени t:

$$Q(t) = P(T < t) = 1 - P(t) = F_1(t). \tag{9.2}$$

Плотность вероятности отказов $p_1(t)$ — плотность вероятности того что время работы системы до отказа окажется меньше t, или плотность вероятности отказа к моменту времени t:

$$p_1(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -\frac{dP(t)}{dt} = \frac{dF_1(t)}{dt}. \tag{9.3}$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ системы в момент времени t есть плотность вероятности отказа системы к моменту времени t при условии, что до этого момента отказ системы не произошел:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 - F_1(t)} \frac{dF_1(t)}{dt} = \frac{p_1(t)}{P(t)}. \tag{9.4}$$

Среднее время безотказной работы m_t системы — математическое ожидание времени работы системы до отказа:

$$m_t = \int_0^\infty t\, p_1(t)\, dt = \int_0^\infty P(t)\, dt. \tag{9.5}$$

Показатели надежности (9.1)—(9.4) функционально связаны между собой: зная одну из функций $P(t)$, $Q(t)$, $p_1(t)$, $\lambda(t)$, можно определить три остальные (табл. 9.1).

Типичный вид функций $P(t)$, $Q(t)$, $p_1(t)$ и $\lambda(t)$ изображен на рис. 9.1.

Пусть N_0 — число исправных систем в начальный момент времени $t = 0$; $N(t)$ — число исправных систем в момент времени t; $n(t)$ — число систем, отказавших за время t; $\Delta n(t, \Delta t)$ — число систем, отказавших именно в интервале от t до $t + \Delta t$; t_i — время наработки i-й системы до отказа. Тогда статистические показатели надежности для невосстанавливаемых систем определяются выражениями:

$$P^*(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N_0 - n(t)}{N_0} = 1 - \frac{n(t)}{N_0} = 1 - F_1^*(t), \tag{9.6}$$

$$Q^*(t) = n(t)/N_0, \tag{9.7}$$

$$p_1^*(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N_0 \Delta t} = -\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N_0 \Delta t} = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N_0 \Delta t}, \tag{9.8}$$

$$\lambda^*(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(t)\Delta t} = -\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)\,\Delta t} = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t}, \tag{9.9}$$

$$m_t^* = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} t_i. \tag{9.10}$$

Таблица 9.1

Функциональная связь между показателями надежности

Известная функция	$P(t)$	$Q(t)$	$p_1(t)$	$\lambda(t)$
$P(t)$	—	$1-P(t)$	$-\frac{dP(t)}{dt}$	$-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}$
$Q(t)$	$1-Q(t)$	—	$\frac{dQ(t)}{dt}$	$\frac{1}{1-Q(t)}\frac{dQ(t)}{dt}$
$p_1(t)$	$\int_t^\infty p_1(\tau)d\tau$	$\int_0^t p_1(\tau)d\tau$	—	$\frac{p_1(\tau)}{\int_t^\infty p_1(\tau)d\tau}$
$\lambda(t)$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$	$\lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$	—

Для восстанавливаемых систем характерно чередование времени исправной работы и времени восстановления (ремонтов). Рассмотренные показатели описывают период работы системы до первого отказа или после ликвидации отказа до появления очередного. Поэтому для восстанавливаемых систем вводятся дополнительные показатели, главными из которых являются: параметр потока отказов $\Lambda(t)$, наработка на отказ m_0, среднее время восстановления $m_в$ и коэффициент готовности $K_г$. Иногда используются и другие характеристики: частота восстановления, интенсивность восстановления, вероятность восстановления и т. д.

Параметром потока отказов $\Lambda(t)$ называется предел отношения вероятности $P(t, \Delta t)$ появления хотя бы одного отказа за интервал времени Δt к длине этого интервала:

$$\Lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} [P(t, \Delta t)/\Delta t]. \qquad (9.11)$$

Наработка на отказ m_0 есть среднее значение времени между соседними отказами.

Среднее время восстановления системы $m_в$ — математическое ожидание продолжительности восстановления системы после отказа, т. е. это среднее время вынужденного, нерегламентированного простоя, вызванного отысканием и устранением отказа:

$$m_в = \int_0^\infty t p_в(t) dt = \int_0^\infty t dF_в(t) = \int_0^\infty [1 - F_в(t)] dt, \qquad (9.12)$$

где $p_в(t)$ — плотность вероятности времени восстановления; $F_в(t)$ — функция распределения времени восстановления.

Коэффициент готовности $K_г$ для установившегося режима эксплуатации определяется как вероятность того, что система будет исправна в произвольно выбранный момент времени в промежутках между плановыми техническими обслуживаниями:

$$K_г = m_0/(m_0 + m_в), \qquad (9.13)$$

где m_0 — средняя наработка на отказ; $m_в$ — среднее время восстановления системы.

Статистическая оценка параметра потока отказов определяется как относительное число отказавших систем в единицу времени

$$\Lambda^*(t) = \Delta n_1(t, \Delta t)/N_0 \Delta t, \qquad (9.14)$$

причем в число $\Delta n_1(t, \Delta t)$ входят как первоначальные отказы, так и отказы, появившиеся после восстановления или замены отказавших систем. В общем случае $\Delta n_1(t, \Delta t)$ больше величины $\Delta n(t, \Delta t)$ в формуле (9.8). Параметр потока отказов восстанавливаемых систем равен интенсивности отказов соответствующих невосстанавливаемых систем, если потоки отказов в обоих случаях являются простейшими (см. гл. 8): $\Lambda(t) = \lambda(t) = \text{const}$.

Наработка на отказ по данным испытания одного образца системы вычисляется по формуле

$$m_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i, \qquad (9.15)$$

где n — общее число отказов системы за период наблюдения; t_i — время исправной работы системы между $(i-1)$-м и i-м отказами.

Если на испытании или эксплуатации находится N_0 одинаковых систем в течение времени t, то наработка на отказ определяется выражением

$$m_0^* = \left(\sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij} \right) \Big/ \sum_{j=1}^{N_0} n_j, \qquad (9.16)$$

где n_j — число отказов j-го экземпляра за время t; t_{ij} — время исправной работы j-го экземпляра между $(i-1)$-м и i-м отказами.

Формулы для статистических оценок времени восстановления $m_в^*$ и коэффициента готовности $K_г^*$ соответственно имеют вид

$$m_в^* = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} t_{вi}, \tag{9.17}$$

$$K_г^* = \sum_{i=1}^{n} t_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} t_{вi} \right). \tag{9.18}$$

Здесь N_0 — общее число систем (или число восстановлений одной и той же системы), $t_{в\,i}$ — реализация времени восстановления для i-й системы (или i-я реализация одной и той же системы), n — число отказов системы за время испытаний или эксплуатации, $t_{в\,i}$ — время восстановления системы после i-го отказа.

Через известный коэффициент готовности выражается коэффициент простоя, определяющий вероятность нахождения системы в неисправном состоянии:

$$K_п = 1 - K_г. \tag{9.19}$$

При определении показателей надежности по экспериментальным данным обычно находят некоторую исходную характеристику, например закон распределения времени безотказной работы, а остальные показатели определяют расчетным путем. Выбранная модель закона распределения должна согласовываться с экспериментальными данными. Проверка соответствия производится по правилам математической статистики (см. гл. 4). Кроме того, если это не противоречит существу дела, то всегда следует выбирать такие распределения, которые определяются небольшим числом параметров. Тогда проведение статистических оценок и расчет надежности значительно упрощаются.

Наиболее часто используются следующие плотности вероятности времени безотказной работы: экспоненциальная (показательная), Вейбулла, гамма-распределение, логарифмически-нормальная, усеченная нормальная и Релея. Особая роль принадлежит экспоненциальной плотности вероятности, которая порождается простейшим потоком отказов (см. гл. 8).

Экспоненциальное распределение достаточно хорошо описывает поведение элементов и систем в период их нормальной эксплуатации (область II на рис. 9.1), когда происходят внезапные отказы и когда интенсивность отказов примерно постоянна: $\lambda(t) = \Lambda(t) = \text{const}$.

Зависимости основных показателей надежности от времени для некоторых плотностей вероятностей приведены в табл. 9.2.

Решение задачи определения надежности системы по характеристикам надежности входящих в нее элементов зависит от способа соединения последних. При последовательном, или основном, соединении (рис. 1.2) отказ хотя бы одного из элементов приводит к отказу всей системы (система не имеет структурной избыточности). При параллельном, или резервном, соединении (см. рис. 1.1), отказ системы наступает лишь при отказе всех ее элементов (в систему вводятся избыточные элементы). Сочетание основного и резервного

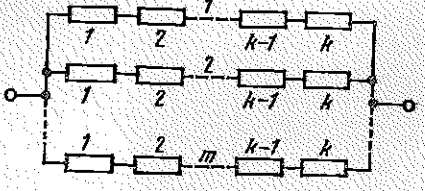


Рис. 9.2. Один из вариантов смешанного соединения элементов

Таблица 9.2

Зависимости показателей надежности от времени для наиболее распространенных распределений

Плотность вероятности		Вероятность безотказной работы	Интенсивность отказов	Средняя наработка до отказа
Наименование	Аналитическое выражение			
Экспоненциальная (показательная)	$p_1(t)=\lambda \exp(-\lambda t)$	$P(t)=\exp(-\lambda t)$	$\lambda(t)=\lambda=\text{const}$	$m_t=1/\lambda$
Вейбулла	$p_1(t)=c\alpha t^{\alpha-1}\times$ $\times\exp(-ct^{\alpha})$	$P(t)=\exp(-ct^{\alpha})$	$\lambda(t)=c\alpha t^{\alpha-1}$	$m_t=c^{-1/\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$
Гамма-распределение	$p_1(t)=$ $=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}e^{-\frac{t}{\beta}}$	$P(t)=e^{-\frac{t}{\beta}}\times$ $\times\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^n$ при α — целом	$\lambda(t)=p_1(t)/P(t)=$ $=t^{\alpha}e^{-t/\beta}\Big/\int_t^{\infty}\tau^{\alpha}e^{-t/\beta}d\tau$	$m_t=\beta(\alpha+1)$
Логарифмически-нормальная	$p_1(t)=\frac{\lg e}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\lg t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$P(t)=1-\Phi\left(\frac{\lg t-m}{\sigma}\right)$	$\lambda(t)=\frac{p_1(t)}{P(t)}$	$m_t=\frac{\lg e}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\int_0^{\infty}e^{-\frac{(\lg t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$
Усеченная нормальная	$p_1(t)=$ $=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ $t\geqslant 0$	$P(t)=\frac{1-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)}$	$\lambda(t)$ $=\frac{\exp\left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}\left[1-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\right]}$	$m_t=m+\frac{\sigma}{\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)$
Релея	$p_1(t)=\frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$	$P(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$	$\lambda(t)=\frac{t}{\sigma^2}$	$m_t=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

видов соединений образует смешанное (последовательно-параллельное) соединение, один из вариантов которого приведен на рис. 9.2.

Пусть система состоит из k последовательно соединенных элементов (рис. 1.2), отказы которых независимы, а вероятность безотказной работы i-го элемента в течение времени t равна $P_i(t)$. Тогда вероятность безотказной работы $P_0(t)$ и вероятность отказа $Q_0(t)$ системы рассчитываются по формулам:

$$P_0(t) = \prod_{i=1}^{k} P_i(t), \tag{9.20}$$

$$Q_0(t) = 1 - P_0(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k} P_i(t). \tag{9.21}$$

В соответствии с формулами табл. 9.1 вероятности $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ можно выразить через интенсивности отказов элементов $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$P_0(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_0(\tau)\, d\tau\right] = \exp\left[-\sum_{i=1}^{k}\int_0^t \lambda_i(\tau)\, d\tau\right], \tag{9.22}$$

$$Q_0(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda_0(\tau)\, d\tau\right], \tag{9.23}$$

где

$$\lambda_0(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \tag{9.24}$$

— интенсивность отказов системы.

Если отказы элементов описываются однородными пуассоновскими потоками, то $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$ и формулы (9.22) и (9.24) принимают вид:

$$P_0(t) = \exp(-\lambda_0 t), \quad \lambda_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i. \tag{9.25}$$

Когда система состоит из m групп элементов, в каждой из которых имеется n_j элементов с примерно одинаковой надежностью, то вместо (9.24) и (9.25) пользуются соотношениями:

$$\lambda_0(t) = \sum_{j=1}^{m} n_j \lambda_j(t), \quad \lambda_0 = \sum_{j=1}^{m} n_j \lambda_j. \tag{9.26}$$

Данные по интенсивностям отказов отдельных элементов радиоэлектронных систем берутся из соответствующих справочников.

Пусть система состоит из k параллельно соединенных элементов (рис. 1.1) и отказы элементов взаимонезависимы. Тогда вероятность отказа $Q_p(t)$ и вероятность безотказной работы $P_p(t)$ системы в течение времени t соответственно равны:

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^{k} Q_i(t) = \prod_{i=1}^{k} [1 - P_i(t)], \tag{9.27}$$

$$P_p(t) = 1 - Q_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - P_i(t)], \tag{9.28}$$

где $Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ — вероятность отказа i-го элемента в течение времени t.

Связь вероятностей $Q_p(t)$ и $P_p(t)$ с интенсивностью отказов определяется соотношениями

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^{k} \left\{ 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(\tau)\, d\tau \right] \right\}. \quad (9.29)$$

$$P_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k} \left\{ 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(\tau)\, d\tau \right] \right\}. \quad (9.30)$$

Если интенсивности отказов не зависят от времени, то формулы (9.29), (9.30) принимают вид:

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^{k} [1 - \exp(-\lambda_i t)], \quad (9.31)$$

$$P_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - \exp(-\lambda_i t)]. \quad (9.32)$$

Когда система состоит из m групп, в каждой из которых имеется n_j элементов с примерно одинаковой надежностью, то

$$Q_p(t) = \prod_{j=1}^{m} [1 - \exp(-\lambda_j t)]^{n_j}. \quad (9.33)$$

$$P_p(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} [1 - \exp(-\lambda_j t)]^{n_j}. \quad (9.34)$$

При смешанном соединении (рис. 9.2) сначала по соответствующим формулам находится надежность цепи из k последовательно соединенных элементов, а затем надежность системы из m параллельных ветвей.

В зависимости от этапа разработки радиоэлектронной системы применяются различные методы расчета надежности [22, 55, 56, 58]. На начальном этапе проектирования системы (предэскизный проект) проводится прикидочный расчет, при котором определяются целесообразные нормы надежности для отдельных частей системы (блоков, каскадов) с целью проверки принципиальной возможности выполнения требований по надежности, выдвинутых заказчиком в техническом задании.

На этапе эскизного проектирования, после разработки принципиальных электрических схем, выполняется ориентировочный расчет надежности (дипломное проектирование можно отнести к эскизному проектированию, а расчет надежности — к ориентировочному расчету).

Ориентировочный расчет производится обычно при следующих допущениях: система рассматривается как группа последовательно соединенных элементов, интенсивности отказов которых не зависят от времени (поток отказов — простейший); все элементы одного и того же типа имеют одинаковую надежность независимо от их места расположения в системе; все элементы работают в номинальном режиме, причем отказы элементов считаются независимыми событиями; влияние условий работы учитывается приближенно с помощью поправочного коэффициента.

Полный расчет надежности производится после испытания макета в лабораторных условиях, когда становятся известными реальные режимы работы элементов, позволяющие уточнить значения интенсивностей их отказов. При этом учитываются влияние схемной зависимости элементов, режимы их работы и другие факторы.

2. **Теория массового обслуживания** (теория очередей) исследует количественную сторону процессов, протекающих в системах массового обслуживания (СМО). Она устанавливает зависимость между характером потока

заявок (требований), производительностью отдельного канала (обслуживающего аппарата), числом каналов и эффективностью обслуживания.

Система массового обслуживания включает в себя три элемента: входной поток, обслуживающую систему с одним или несколькими обслуживающими аппаратами и выходной поток.

Системы массового обслуживания делятся на системы с отказами (СМО с потерями), системы с ожиданием и системы смешанного типа. В системе первого типа заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (происходит потеря заявки). В СМО с ожиданием заявка, поступившая в систему, когда все каналы заняты, ставится на очередь и ожидает, когда все поступившие ранее заявки будут обслужены. В системах смешанного типа накладываются ограничения на время ожидания заявки в очереди, общее время пребывания заявки в системе, число заявок в очереди и т. д. Наиболее хорошо разработаны системы первых двух типов.

В зависимости от условий задачи и целей исследования количественными оценками качества работы СМО могут быть: средний процент заявок, получивших отказ и покидающих систему необслуженными; среднее время ожидания обслуживания; средняя длина очереди и ее распределение и др.

Входной поток (поток заявок) — основной элемент, определяющий процессы в СМО. Часто его считают простейшим или стационарным пуассоновским потоком, при этом в большинстве случаев удается получить удовлетворительные по точности решения.

Для простейшего потока число заявок k промежутке времени τ распределено по закону Пуассона

$$P(k,\ \tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{9.35}$$

где λ — плотность (интенсивность) потока — среднее число событий в потоке за единицу времени; $\nu=\lambda\tau$ — среднее число событий в потоке, приходящееся на интервал τ.

Пусть случайная величина T — промежуток времени между двумя произвольными соседними заявками в простейшем потоке. Тогда функция распределения $F_1(t)$, плотность вероятности $p_1(t)$, математическое ожидание m_t и дисперсия σ_t^2 величины T определяются формулами:

$$F_1(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},\qquad p_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \tag{9.36}$$

$$m_t=1/\lambda,\qquad \sigma_t^2=1/\lambda^2. \tag{9.37}$$

В случае нестационарного пуассоновского потока выражения (9.35) и (9.36) соответственно принимают вид:

$$P(k,\ \tau,\ t_0)=\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}, \tag{9.38}$$

$$F_1(t,\ t_0)=1-\exp\left[-\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)\,dt\right],$$

$$p_1(t,\ t_0)=\lambda(t_0+t)\exp\left[-\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)\,dt\right],\quad t>0. \tag{9.39}$$

Здесь

$$\nu=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)\,dt \tag{9.40}$$

— математическое ожидание числа заявок на участке от t_0 до $t_0+\tau$, где $\lambda(t)$ — мгновенная плотность потока.

Выходные потоки СМО часто представляют собой потоки с ограниченным последействием (потоки Пальма). Ординарный поток однородных событий является потоком с ограниченным последействием, если промежутки времени между последовательными событиями $T_1, T_2, \ldots$, есть независимые случайные величины. Простейший поток, в котором независимые величины $T_1, T_2, \ldots$ распределены по показательному закону, — частный случай потока Пальма. Если все функции распределения $F_1(t_i)$, за исключением, быть может, $F_1(t_1)$, совпадают, то поток Пальма образует поток восстановления [59—61].

Примером потоков с ограниченным последействием являются потоки Эрланга, образуемые «просеиванием» простейшего потока [3]. Плотность вероятности закона Эрланга k-го порядка имеет вид

$$p_1(t) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \tag{9.41}$$

где $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$ — интервал времени между соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка; $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ — независимые случайные величины с одинаковыми плотностями вероятностей $p_1(t_i) = \lambda e^{-\lambda t_i}$, $t_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Математическое ожидание и дисперсия величины T с плотностью вероятности (9.41) равны

$$m_t = (k+1)/\lambda, \quad \sigma_t^2 = (k+1)/\lambda^2, \tag{9.42}$$

где λ — плотность простейшего потока.

Для упрощения иногда удобно заменить реальный поток заявок с последействием так называемым нормированным потоком Эрланга k-го порядка с примерно теми же математическим ожиданием и дисперсией промежутка между заявками [3]. Плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсия нормированной случайной величины $\widetilde{T} = T/(k+1)$ имеют вид

$$\widetilde{p}_1(t) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} (k+1)^{k+1} t^k e^{-\lambda(k+1)t}, \quad t > 0, \tag{9.43}$$

$$\widetilde{m}_t = 1/\lambda, \quad \widetilde{\sigma}_t^2 = 1/\lambda^2 (k+1), \tag{9.44}$$

где λ — плотность потока, совпадающая при любом k с плотностью исходного простейшего потока заявок.

Функционирование СМО во многом определяется временем обслуживания одной заявки $T_{об}$, которое характеризует пропускную способность системы. В общем случае $T_{об}$ — случайная величина. При теоретических исследованиях и практических расчетах чаще всего предполагается, что величина $T_{об}$ распределена по показательному закону, когда функция распределения и плотность вероятности определяются соответственно выражениями

$$F_1(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad p_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \tag{9.45}$$

где параметр μ — величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки:

$$\mu = 1/m_{t\text{об}}, \quad m_{t\text{об}} = M(T_{об}). \tag{9.46}$$

При показательном распределении времени обслуживания задача допускает простое решение, которое с удовлетворительной для практики точностью описывает ход процесса в СМО.

Пусть имеется СМО с n обслуживающими аппаратами (n-канальная система), на вход которой поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обслуживания одной заявки одним аппаратом подчинено показательному закону с параметром μ.

В этом случае основные характеристики эффективности функционирования СМО с отказами (потерями) определяются следующими выражениями.

1. Вероятность того, что в системе занято k обслуживающих аппаратов (в обслуживающей системе находится точно k заявок):

$$P_k = P_n(k) = \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{P_0}{k!}\alpha^k, \tag{9.47}$$

где

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1} \tag{9.48}$$

— вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны;

$$\alpha = \lambda/\mu = \lambda m_{t\ об} \tag{9.49}$$

— среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки (приведенная плотность потока заявок [3]).

Подставив (9.48) в (9.47), получим формулу Эрланга:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\right]^{-1}. \tag{9.50}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании очередной заявки

$$P_{отк} = P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \frac{\alpha^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\right]^{-1}. \tag{9.51}$$

3. Среднее число занятых обслуживающих аппаратов

$$m_k = M(K) = \sum_{k=1}^{n} kP_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}P_0. \tag{9.52}$$

Система массового обслуживания с ожиданием при ограниченном времени ожидания $T_{ож}$, распределенном по показательному закону с параметром γ, в установившемся режиме обслуживания описывается следующими характеристиками [3].

1. Вероятность того, что занято точно k обслуживающих аппаратов (очереди нет):

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}P_0, \quad 0 < k \leqslant n. \tag{9.53}$$

2. Вероятность того, что все n аппаратов заняты, s заявок стоят в очереди:

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+}}{n!}P_0\left[\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)\right]^{-1}, \quad s \geqslant 1. \tag{9.54}$$

3. Вероятность того, что все аппараты свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}\right]^{-1}. \tag{9.55}$$

4. Средняя длина очереди

$$m_s = \sum_{s=1}^{\infty} sP_{n+s} = \left[\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}\right]^{-1}. \qquad (9.55)$$

5. Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной:

$$P_{\text{п}} = \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}\right]^{-1}. \qquad (9.57)$$

В формулах (9.53)—(9.57) n — число обслуживающих аппаратов в системе,

$$\alpha = \lambda/\mu = \lambda m_{t\ \text{об}}, \qquad \beta = \gamma/\mu = \gamma m_{t\ \text{об}}, \qquad (9.58)$$

где λ — плотность простейшего потока заявок; μ — параметр показательного времени обслуживания; $\gamma = 1/m_{t\ \text{ож}}$ — параметр показательного времени ожидания (величина, обратная среднему сроку ожидания).

При $\beta \to \infty$ система переходит в СМО с отказами, а при $\beta \to 0$ — в «чистую» систему с ожиданием, когда заявки вообще не уходят из очереди (каждая из заявок рано или поздно будет обслужена). В последней системе предельный стационарный режим существует только при $\alpha < n$. При $\alpha \geqslant n$ число заявок в очереди с течением времени неограниченно возрастает.

Для СМО с неограниченным временем ожидания (чистая система с ожиданием) при $\alpha < n$ справедливы формулы:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}\right]^{-1}, \qquad (9.59)$$

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}\right]^{-1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad (9.60)$$

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!\,n^s}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}\right]^{-1}, \qquad (9.61)$$

$$m_s = \frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}\right]^{-1}. \qquad (9.62)$$

Если имеется СМО с ожиданием и число заявок в очереди ограничено, то при простейшем потоке заявок и показательном распределении времени обслуживания формулы для P_k и P_{n+s} соответственно имеют вид:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\right]^{-1}, \qquad (9.63)$$

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\right]^{-1}, \qquad (9.64)$$

где m — число заявок, которыми ограничена очередь.

2. ПРИМЕРЫ

9.1. Семь невосстанавливаемых радиоэлектронных систем поставлены на испытания. Реализации времени работы этих систем представлены на рис. 9.3.

Вычислить статистические показатели надежности $P^*(t)$, $Q^*(t)$, $p_i^*(t)$, $\lambda^*(t)$, m_i^* при $t = 30$ ч и $\Delta t = 10$ ч.

Решение. В соответствии с определением по формулам (9.6)—(9.10) имеем:

$P^*(t=30) = \frac{N(t=30)}{N_0} = \frac{5}{7} = 0{,}714$ (не отказали системы с номерами 2, 5, 1, 4, 7),

$Q^*(t=30) = \frac{n(t=30)}{N_0} = \frac{2}{7} = 0{,}286$ (отказали системы с номерами 6, 3),

$$p_i^*(t=30) = \frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N_0\,\Delta t} = \frac{n(t=40)-n(t=30)}{7\cdot 10} =$$

$$= \frac{4-2}{70} = 0{,}0286\ \text{ч}^{-1},$$

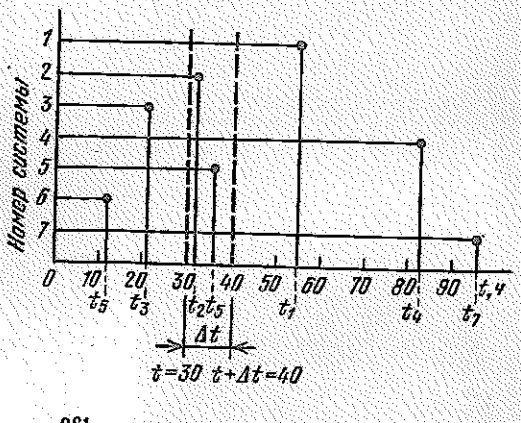


Рис. 9.3. Распределение времени работы до отказа невосстанавливаемых экземпляров радиоэлектронных систем

$$\lambda^*(t=30) = \frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N(t)\,\Delta t} = \frac{n(t=40)-n(t=30)}{N(t=30)\cdot 10} = \frac{4-2}{5\cdot 10} = 0{,}04\ \text{ч}^{-1},$$

$$m_t^* = (1/N_0)\sum_{i=1}^{N_0} t_i = \frac{t_1+t_2+\ldots+t_7}{7} = \frac{55+32+21+83+36+12+96}{7} =$$

$$= 48\ \text{ч}.$$

Точность результатов невелика. Она увеличивается с увеличением числа N_0. Для определения точности и надежности оценок следует воспользоваться методами математической статистики (см. гл.4).

9.2. Интенсивность отказов элемента определяется выражением

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1/(100-t), & 0 < t \leqslant 100\ \text{ч}, \\ 0, & t < 0,\ t > 100\ \text{ч}. \end{cases}$$

Определить: 1) вероятность безотказной работы элемента в интервале времени 0—10 ч; 2) среднее время безотказной работы элемента; 3) плотность вероятности отказов.

Решение. Для вычисления требуемых показателей надежности воспользуемся формулами, приведенными в табл. 9.1, и выражением (9.5).

$$1)\ P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right] = \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{100-\tau}\,d\tau\right) =$$

$$= \exp\left(\ln\frac{100-t}{100}\right) = \frac{100-t}{100}.$$

При $t = 10$ ч имеем

$$P(t=10) = (100-10)/100 = 0{,}9.$$

$$2)\ m_t = \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^{100} \frac{100-t}{100}\,dt = |\,100-t=y\,| =$$

$$= \frac{1}{100}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{100} = 50\ \text{ч}.$$

$$3)\ p_1(t) = \lambda(t)\,P(t) = \frac{1}{100-t}\,\frac{100-t}{100} = \frac{1}{100}\ \text{ч}^{-1}.$$

9.3. Три системы, состоящие из двух элементов, образованы тремя способами соединения элементов (рис. 9.4). Отказы элементов независимы и описываются простыми пуассоновскими потоками с интенсивностями λ_1 и λ_2. Выключатель абсолютно надежен.

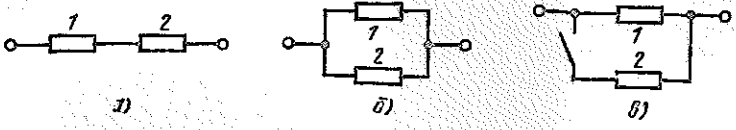


Рис. 9.4. Три системы, состоящие из двух элементов

Требуется: 1) определить вероятности безотказной работы, средние наработки и плотности вероятности отказов для каждой из систем; 2) нарисовать зависимости вероятностей безотказной работы систем от времени при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; 3) сравнить системы по надежности при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Решение. 1. Вероятность безотказной работы для системы из последовательно соединенных элементов (рис. 9.4, *а*) определяется формулой (9.25):

$$P_0(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i t\right) = \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t].$$

Используя (9.5), получаем выражение для среднего времени безотказной работы

$$m_{t_0} = \int_0^\infty P_0(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,dt = (\lambda_1+\lambda_2)^{-1}.$$

По формуле из табл. 9.1 находим плотность вероятности отказов

$$p_{10}(t) = -dP_0(t)/dt = (\lambda_1+\lambda_2)\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t].$$

Для системы с параллельным соединением элементов (рис. 9.4, *б*) соответствующие характеристики равны

$$P_{\text{п}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2}[1 - P_i(t)] = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) =$$

$$= \exp(-\lambda_1 t) + \exp(-\lambda_2 t) - \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t],\quad m_{t_{\text{п}}} = \int_0^\infty P_{\text{п}}(t)dt =$$

$$= (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)/\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2),\quad p_{1\text{п}}(t) = -dP_{\text{п}}(t)/dt =$$

$$= \lambda_1\exp(-\lambda_1 t) + \lambda_2\exp(-\lambda_2 t) - (\lambda_1+\lambda_2)\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t].$$

Третья система (рис. 9.4, *в*) работает так. Если первый элемент, начав работать в момент $t = 0$, откажет через интервал времени $T_1 = t_1$, то мгновенно автоматически включается второй элемент. Если отказ второго элемента наступает в момент $T_2 = t_2$ после его подключения, то время безотказной работы системы $T_3 = T_1 + T_2$. Поэтому плотность вероятности отказов третьей системы есть плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин:

$$p_{1x}(t) = \int_0^t p_1(t_1)\,p_2(t-t_1)\,dt_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

где $p_1(t) = \lambda_1\exp(-\lambda_1 t)$, $p_2(t) = \lambda_2\exp(-\lambda_2 t)$ — плотности вероятности случайных величин T_1 и T_2 (плотности вероятности потока отказов первого и второго элементов). По плотности вероятности $p_{1x}(t)$ найдем вероятность безотказной работы $P_x(t)$ и среднее время безотказной работы m_{tx}

$$P_x(t) = (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t})/(\lambda_2 - \lambda_1),\quad m_{tx} = (\lambda_1+\lambda_2)/\lambda_1\lambda_2.$$

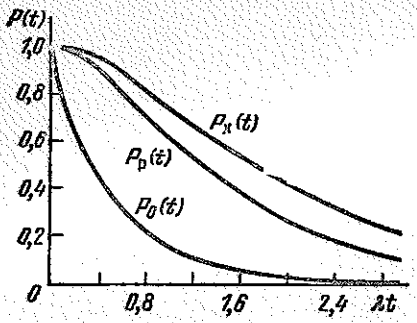


Рис. 9.5. Вероятности безотказной работы систем, приведенных на рис. 9.4

2. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ характеристики систем определяются следующими выражениями: для первой системы

$$P_0(t) = \exp(-2\lambda t), \quad m_{t_0} = 1/2\lambda,$$

для второй системы

$$P_p(t) = [2 - \exp(-\lambda t)]\exp(-\lambda t), \quad m_{t_p} = 3/2\lambda,$$

для третьей системы

$$P_x(t) = (1 + \lambda t)\exp(-\lambda t), \quad m_{tx} = 2/\lambda.$$

На рис. 9.5 изображены зависимости вероятностей безотказной работы систем $P_0(t)$, $P_p(t)$, $P_x(t)$ от времени при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

3. Из графиков видно, что наименее надежной является первая система и наиболее надежной — третья. По среднему времени безотказной работы третья система лучше первой в 4 раза, а вторая — в 3 раза. Результат справедлив при абсолютной надежности выключателя. В противном случае, при известной надежности выключателя надежность третьей системы следует вычислять по формулам для смешанного соединения.

9.4. Определить вероятность безотказной работы аварийной радиостанции за время $t_з = 100$ ч при заданном среднем времени безотказной работы $m_{t_з} = 250$ ч.

Решение. Задача типична для поверочного ориентировочного расчета надежности, когда требуется определить один или несколько показателей надежности радиостанции (системы) по известным показателям ее элементов.

Для расчета нужно воспользоваться техническим описанием и принципиальной схемой радиостанции, а также справочными данными по интенсивностям отказов элементов. Удобно составить таблицу:

Наименование элементов	Число элементов n_j (штук)	$\lambda_j \cdot 10^6$ ч$^{-1}$	$n_j \lambda_j \cdot 10^6$ ч$^{-1}$
1. Лампы приемно-усилительные	4	2	8
2. Полупроводниковые приборы	5	0,5	2,5
3. Резисторы	45	0,25	11,25
4. Конденсаторы	42	0,15	6,30
5. Трансформаторы	3	0,5	1,50
6. Дроссели	3	0,025	0,075
7. Катушки индуктивные	5	0,63	3,15
8. Батареи заряженные	1	7,2	7,2
9. Резонаторы кварцевые	1	0,3	0,3
10. Переключатели	3	0,6	1,8
11. Разъемы штепсельные	7	0,2	1,4
Итого	119		43,5

1. Определяем суммарную интенсивность отказов

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{m} n_j \lambda_j = \sum_{j=1}^{11} n_j \lambda_j = 43{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}.$$

2. Среднее время безотказной работы $m_t = 1/\lambda_0 = 1/43{,}5 \cdot 10^{-5} = 2{,}3 \cdot 10^3$ ч. Расчетное значение больше заданного: $m_t > m_{t_3} = 250$ ч.

3. Вероятность безотказной работы радиостанции за время $t_з = 100$ ч

$$P(t = 100) = e^{-\lambda_0 t_з} = e^{-43{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} \simeq 0{,}96.$$

Целесообразно для 5—8 моментов времени в пределах от $t = 0$ до $t > m_t$ определить значение функции $P(t) = \exp(-\lambda_0 t)$ и построить график зависимости $P(t)$, по которому можно определить вероятность безотказной работы за любое время t.

При использовании данных по интенсивностям отказов элементов следует соблюдать определенную осторожность. Более точные результаты будут тогда, когда используются данные, полученные по опыту эксплуатации образцов, близких по конструкции и назначению к рассчитываемой системе.

9.5. В контрольно-поверочную лабораторию поступает пуассоновский поток приборов с плотностью 4 прибора в час.

Определить: 1) вероятность того, что за час в лабораторию поступит k приборов, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; 2) вероятность того, что за время проверки прибора, на которую затрачивается в среднем 30 мин, в лабораторию поступит не менее трех приборов.

Решение. По условию задачи входной поток — пуассоновский. Поэтому вероятность того, что за время τ в лабораторию поступит ровно k приборов, определяется формулой (9.35):

$$P(k,\ \tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\,e^{-\lambda\tau}.$$

1. В данном случае $\lambda = 4$, $\tau = 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Поэтому

$$P(0,1) = \frac{1}{1}\,e^{-4} \simeq 0{,}0183, \quad P(1,1) = \frac{4}{1!}\,e^{-4} \simeq 0{,}0733,$$

$$P(2,1) \simeq 0{,}147, \quad P(3,1) \simeq 0{,}195, \quad P(4,1) \simeq 0{,}195,$$
$$P(5,1) \simeq 0{,}156, \quad P(6,1) \simeq 0{,}104, \quad P(7,1) \simeq 0{,}0595.$$

2. $$P\left(k \geqslant 3,\ \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=3}^{\infty}\left(k,\ \frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\left(k,\ \frac{1}{2}\right).$$

Найдя значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\nu^k}{k!}\,e^{-\nu}$, получим

$$\sum_{k=0}^{2} P\left(k,\ \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\nu^k}{k!}\,e^{-\nu} = 0{,}677,$$

где $\nu = \lambda\tau = 4(1/2) = 2$. Следовательно, $P(k \geqslant 3, 1/2) = 0{,}323$.

9.6. На вход системы обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 4$ заявки в час. Время обслуживания распределено по показательному закону, причем среднее время обслуживания одной заявки $m_{t\ об} = 15$ мин.

Вычислить: 1) количество необходимых обслуживающих аппаратов, чтобы вероятность отказа в обслуживании заявки не превышала 0,01; 2) среднее число занятых аппаратов; 3) вероятность $P(k \geqslant 3)$ того, что будет занято не менее трех аппаратов.

Решение. Имеем $\mu = 1/m_{t\ об} = 1/0{,}25 = 4$, $\alpha = \lambda/\mu = 1$.

1. По формуле (9.51) вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = \frac{\alpha^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\right]^{-1} = \left[n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right]^{-1}.$$

Необходимо найти такое число n, чтобы вероятность $P_{отк}$ не превосходила 0,01.

При $n = 4$ имеем

$$P_{отк} = \left[4!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)\right]^{-1} \simeq 0{,}0154,$$

при $n = 5$ получим

$$P_{отк} = \left[5!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{5!}\right)\right]^{-1} \simeq 0{,}00306.$$

Таким образом, чтобы выполнить условие $P_{\text{отк}} \leqslant 0{,}01$, необходимо иметь 5 обслуживающих аппаратов.

2. Согласно (9.52):

$$m_k = P_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = 0{,}368 \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(k-1)!} =$$

$$= 0{,}368\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \simeq 0{,}996.$$

3. $P(k \geqslant 3) = P_3 + P_4 + P_5$,

$$P_3 = \frac{\alpha^3}{3!} P_0 = \frac{1}{3!} 0{,}368 = 0{,}0614, \quad P_4 = 0{,}0153, \quad P_5 = 0{,}00306.$$

Следовательно, $P(k \geqslant 3) = 0{,}0798$.

9.7. Для уничтожения вновь обнаруживаемых воздушной разведкой наземных целей выделен наряд из пяти батарей. Число обслуживаемых целей представляет собой простейший поток с плотностью $\lambda = 8$. Время обслуживания подчинено показательному закону. Среднее время обработки одной батареей одной цели $m_{t\,\text{об}} = 30$ мин.

Определить: 1) наличие установившегося режима работы СМО; 2) вероятность того, что при поступлении очередной заявки на обстрел все пять батарей будут свободными; 3) среднюю длину очереди.

Решение. 1. По условию, $m_{t_{\text{об}}} = 30$ мин. Следовательно, $\mu = 1/m_{t_{\text{об}}} = 2$, $\alpha = \lambda/\mu = 4$. Так как $\alpha < n$, то установившийся режим существует.

2. По формуле (9.59) находим

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{5} \frac{4^k}{k!} + \frac{4^5}{5!\,(5-4)}\right]^{-1} = \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!}\right]^{-1} =$$

$$= 0{,}0129.$$

3. Согласно (9.62) получим

$$m_s = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!\,(1-\alpha/n)^2} P_0 = \frac{4^6}{5 \cdot 5!\,(1-4/5)^2} 0{,}0129 = 2{,}2.$$

9.8 [3]. На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 0{,}5$ машины в час. Имеется помещение для ремонта одной машины. Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая очереди, не более трех машин. Среднее время ремонта одной машины $m_{t\,\text{об}} = 2$ ч.

Найти: 1) пропускную способность системы; 2) среднее время простоя станции; 3) насколько изменятся эти характеристики, если оборудовать второе помещение для ремонта.

Решение. Имеем $\lambda = 0{,}5$, $\mu = 0{,}5$, $\alpha = 1$, $m = 3$.

1. По формуле (9.64), полагая $n = 1$, находим вероятность того, что пришедшая заявка покинет систему необслуженной:

$$P_{\text{н}} = P_{1+3} = 1/(1 + 1 + 3) = 0{,}2.$$

Относительная пропускная способность системы $q = 1 - P_{\text{н}} = 0{,}8$. Абсолютная пропускная способность $Q = \lambda q = 0{,}4$ машины в час.

2. Среднюю долю времени, которое система будет простаивать, найдем по формуле (9.63): $P_0 = 1/5 = 0{,}2$.

3. Полагая $n = 2$, находим

$$P_{\text{н}} = P_{2+3} = \frac{1}{16}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)^{-1} = 0{,}021;$$

$$q = 1 - P_{\text{н}} = 0{,}979,$$

т. е. удовлетворяться будет около 98% всех заявок; $Q = \lambda q = 0{,}49$ машины в час. Относительное время простоя $P_0 = 16/47 = 0{,}34$, т. е. оборудование будет простаивать полностью около 34% всего времени.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

9.1. Наработка T системы до отказа подчинена экспоненциальному закону с постоянной интенсивностью λ.

Показать, что вероятность безотказной работы $P(t)$, функция распределения $F_1(t)$, плотность вероятности $p_1(t)$, математическое ожидание m_t, и дисперсия σ_t^2 величины T определяются формулами

$$P(t) = e^{-\lambda t},\ F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

$$m_t = 1/\lambda,\ \sigma_t^2 = 1/\lambda^2$$

9.2. Наработка системы до отказа описывается экспоненциальным законом с параметром $\lambda = 10^{-3}$ ч$^{-1}$.

Определить: 1) среднюю наработку до отказа; 2) вероятность безотказной работы в течение $t = 200$ ч.

Ответ: 1) $m_t = 1000$ ч; 2) $P(t = 200) = 0{,}82$.

9.3. Интенсивность отказов самолетных генераторов в течение периода нормальной эксплуатации практически является постоянной величиной и равна $0{,}021 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$.

Вычислить для времени наработки генератора $t = 500$ ч вероятность безотказной работы, вероятность отказа, плотность вероятности отказов и среднее время безотказной работы.

Ответ: $P(500) \simeq 0{,}99$, $Q(500) = 0{,}01$, $p_1(500) \simeq 0{,}021 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$, $m_t = 476 \cdot 10^2$ ч.

9.4. Время работы элемента до отказа описывается экспоненциальным законом с параметром $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$.

Вычислить показатели надежности элемента $P(t)$, $p_1(t)$, m_t при $t_1 = 500$ ч и $t_2 = 1000$ ч.

Ответ: $P(500) \simeq 0{,}986$, $P(1000) = 0{,}975$, $p_1(500) = 2{,}47 \times 10^{-5}$ ч$^{-1}$, $p_1(1000) = 2{,}44 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, $m_t = 4 \cdot 10^4$ ч.

9.5. Интенсивность отказов элемента $\lambda(t) = at$, где a — постоянная величина.

Определить: 1) плотность вероятности отказов; 2) вероятность безотказной работы элемента в течение средней наработки до отказа.

Ответ: 1) $p_1(t) = at\exp(-at^2/2)$; 2) $P(m_t) = 0{,}46$.

9.6. Плотность вероятности отказов радиотехнической системы

$$p_1(t) = \begin{cases} 0{,}002\exp(-0{,}002t), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_1(t)$ и вероятность того, что время безотказной работы системы превысит 500 ч.

Ответ:

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1-\exp(-0{,}002t), & t > 0; \end{cases} \quad P(T \geqslant 500) \simeq 0{,}37.$$

9.7. Время работы изделия подчинено закону Релея с параметром распределения $\sigma = 1000$ ч.

Определить показатели надежности изделия $P(t)$, $p_1(t)$, $\lambda(t)$, m_t для $t = 500$ ч.

Ответ: $P(500) = 0{,}88$, $p_1(500) = 0{,}44\cdot10^{-3}$ ч$^{-1}$, $\lambda(500) = 0{,}5\cdot10^{-3}$ ч$^{-1}$, $m_t = 1253$ ч.

9.8. Суммарный налет самолетов составляет 5000 ч. За это полетное время произошло 14 отказов в бортовых радиоэлектронных комплексах.

Оценить с надежностью $\beta = 0{,}9$ среднее время безотказной работы комплексов.

Ответ: 242 ч $< m_t <$ 614 ч.

9.9. Элемент имеет экспоненциальные законы распределения времени работы и времени восстановления с параметрами соответственно $\lambda = 0{,}04$ ч$^{-1}$ и $\mu = 2$ ч$^{-1}$.

Вычислить: а) вероятность безотказной работы и вероятность отказа за время $t = 2$ ч; б) среднее время безотказной работы и среднее время восстановления.

Ответ: а) $P(2) = 0{,}923$, $Q(2) = 0{,}077$; б) $m_0 = 25$ ч, $m_в = 0{,}5$ ч.

9.10. Аппаратура связи работала по 8 ч ежедневно в течение 30 дней. За это время было два отказа, на устранение которых затрачено 5 ч.

Определить коэффициент готовности аппаратуры.

Ответ: 0,98.

9.11. Восстанавливаемая система с экспоненциальными распределениями времени безотказной работы и времени восстановления имеет коэффициент готовности $K_г = 0{,}95$.

Вычислить вероятность безотказной работы системы в течение $t = 10$ ч, если среднее время восстановления $m_в = 5$ ч.

Ответ: $P(10) \simeq 0{,}9$.

9.12. В результате испытаний двух радиостанций одного и того же же назначения установлено, что у первой из них наработка на отказ в два раза больше, чем у второй, а среднее время восстановления

первой радиостанции в пять раз больше, чем у второй, и составляет одну десятую наработки на отказ.

Вычислить коэффициенты готовности $K^*_{г_1}$ и $K^*_{г_2}$ радиостанций и оценить их эксплуатационную надежность за время $t_э$.

Ответ: $K^*_{г_1} \simeq 0{,}91$, $K^*_{г_2} \simeq 0{,}975$. Эффективность использования первой радиостанции меньше из-за более длительных вынужденных простоев.

9.13. Радиостанция состоит из двух блоков, причем наработка на отказ первого блока равна $m_{01} = 25$ ч, второго — $m_{02} = 100$ ч. Среднее время восстановления первого и второго блоков соответственно равны $m_{в_1} = 1$ ч, $m_{в_2} = 6$ ч. Отказы блоков независимы. Станция отказывает при отказе любого блока и считается неработоспособной до тех пор, пока не будет отремонтирован отказавший блок.

Определить коэффициент готовности $K_г$ радиостанции.

Ответ $K_г = 0{,}91$.

9.14. По статистическим данным, полученным для десяти отказов радиоэлектронной системы, произвести с достоверностью 90% эксплуатационную оценку коэффициента готовности, если известно, что среднестатистическое время между отказами $m^*_0 = 100$ ч, а среднестатистическое время восстановления неисправной системы $m^*_в = 10$ ч.

Ответ: $0{,}864 < K_г < 0{,}966$.

9.15. Проектируемое радиотехническое устройство должно включать три последовательно соединенных блока. Расчеты показали, что интенсивности отказов первого и второго блоков составят $\lambda_1 = 0{,}008$ ч$^{-1}$ и $\lambda_2 = 0{,}032$ ч$^{-1}$. Время безотказной работы каждого из блоков распределено по показательному закону.

Определить интенсивность отказов λ_3 третьего блока, при которой вероятность безотказной работы устройства в течение времени $t = 1$ ч равна 0,95.

Ответ: $\lambda_3 = 0{,}0113$ ч$^{-1}$.

9.16. Система телеизмерений состоит из основного и трех резервных каналов, находящихся в ненагруженном режиме, причем переключающее устройство считается абсолютно надежным. Каждый из каналов имеет показательное распределение наработки до отказа с интенсивностью отказов $\lambda = 10^{-2}$ ч$^{-1}$.

Определить среднюю наработку до отказа и среднее квадратическое отклонение наработки до отказа системы.

Ответ [57]: $m_t = 400$ ч, $\sigma_t = 200$ ч.

9.17. Система образована смешанным соединением элементов (рис. 9.6). Все элементы имеют одинаковую интенсивность отказов $\lambda(t) = \lambda$.

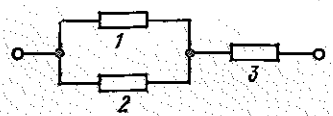


Рис. 9.6. Система со смешанным соединением элементов

Вычислить показатели надежности системы $P(t)$, $Q(t)$, $p_1(t)$, m_t.

Ответ: $P(t) = 2e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}$, $Q(t) = 1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$, $p_1(t) = \lambda(4e^{-2\lambda t} - 3\lambda^{-3\lambda t})$, $m_t = 2/3\lambda$.

9.18. Радиостанция состоит из шести блоков с известными значениями интенсивностей отказов λ_i, $i = 1, \ldots, 6$, интенсивность отказов датчика опорных частот $\lambda_1 = 54{,}34 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, приемовозбудителя $\lambda_2 = 58{,}71 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, усилителя мощности $\lambda_3 = 61{,}16 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, согласующего устройства $\lambda_4 = 42{,}14 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, блока питания $\lambda_5 = 64{,}91 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, пульта управления $\lambda_6 = 4{,}15 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$.

Требуется: а) произвести ориентировочный расчет надежности радиостанции; б) определить коэффициент простоя радиостанции, если среднее время, необходимое для обнаружения и устранения неисправности, равно 2 ч.

Ответ: а) $\lambda_0 = 285{,}41 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$; б) $m_t = 351$ ч,

$$P(t) = \exp(-285{,}41 \cdot 10^{-6}\, t);$$ в) 0,00567.

9.19. На систему массового обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью λ.

Требуется: 1) определить, при каком значении t вероятность поступления в СМО точно k заявок за интервал времени t достигает наибольшего значения; 2) построить зависимость $P(k, t)$ при $\lambda = 1$ и $k = 0, 1, 2, 3$.

Ответ: 1) $t = k/\lambda$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

9.20. Поток отказов радиотехнической системы является простейшим с интенсивностью 0,02 отказа в час. Найти вероятность того, что за 10 ч работы в системе: а) не появится ни одного отказа; б) появится хотя бы один отказ; в) появится один, два, три отказа.

Ответ: а) $P(0,10) = 0{,}819$, б) $P(k \geqslant 1,10) = 0{,}181$, в) $P(1,10) = 0{,}164$, $P(2,\ 10) = 0{,}164$, $P(3,\ 10) = 0{,}00109$.

9.21. Число элементарных частиц, попадающих в аппаратурный отсек космической ракеты за время ее полета t, представляет собой простейший поток с плотностью λ. Условная вероятность для каждой из частиц попасть в уязвимый блок равна p. Определить вероятность попадания в уязвимый блок: 1) ровно k частиц; 2) хотя бы одной частицы.

Ответ:

1) $P(k, t) = \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \exp(-\lambda t p)$, 2) $P(k \geqslant 1, t) = 1 - \exp(-\lambda t p)$.

9.22. Опыт показал, что в ЭВМ происходит в среднем одна ошибка за 10 ч работы, а поток ошибок можно считать простейшим.

Вычислить вероятности неправильного решения задачи на машине, если продолжительность решения составляет: а) 1 ч, б) 10 ч.

Ответ: а) 0,095; б) 0,632.

9.23. Число отказов радиотехнической системы представляет собой простейший поток с интенсивностью 0,005 ч$^{-1}$.

Вычислить: а) вероятность безотказной работы системы за $t = 20$ ч; б) математическое ожидание и дисперсию времени безотказной работы системы.

Ответ: а) $P(0, t) = 0{,}905$, б) $m_t = 200$ ч, $\sigma_t^2 = 4 \cdot 10^4$ ч^2.

9.24. Показать, что поток заявок, у которого интервалы между заявками взаимно независимы и распределены по одному и тому же показательному закону $p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, является пуассоновским.

9.25. Доказать, что для нестационарного пуассоновского потока заявок функция распределения и плотность вероятности случайной величины T (интервал времени между соседними заявками) имеют вид

$$F_1(t, t_0) = 1 - \exp\left[-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)\,dt\right],$$

$$p_1(t, t_0) = \lambda(t_0 + t)\exp\left[-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)\,dt\right],$$

где t_0 — параметр распределения (момент появления первой из двух соседних заявок).

9.26. Мгновенная плотность нестационарного пуассоновского входного потока заявок представляет собой линейную функцию времени: $\lambda(t) = a + bt$.

Определить плотность вероятности случайной величины T — промежутка времени между соседними заявками.

Ответ [3]: $p_1(t, t_0) = [a + b(t_0 + t)]\exp(-at - bt_0 t - bt^2/2)$.

9.27. Нестационарный пуассоновский поток вызовов на телефонную станцию имеет мгновенную плотность вида $\lambda(t) = \lambda(1 - \cos 2at)$.

Найти среднюю плотность потока вызовов за промежуток времени от t_0 до $t_0 + t$.

Ответ [59]: $\lambda(t, t_0) = \lambda\left[1 - \dfrac{\sin a(t - t_0)}{a(t - t_0)}\cos a(t + t_0)\right]$.

9.28. На вход обслуживающей системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ и интервалами между заявками $T_1, T_2, \ldots, T_k, T_{k+1}, \ldots$, которые являются независимыми случайными величинами.

Показать, что плотность вероятности интервала $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$ определяется выражением

$$p_1(t) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

9.29. Доказать, что при показательном законе распределения времени обслуживания распределение длительности оставшейся части работы по обслуживанию не зависит от того, сколько оно уже продолжалось.

9.30. В результате анализа системы массового обслуживания установлено, что функцию распределения $F_1(t)$ времени обслуживания $T_{об}$ можно описать выражением

$$F_1(t) = 1 - 1/(1 + t)^2,$$

где t — время, мин.

Определить: а) вероятность P_1 того, что время обслуживания заявки не превзойдет 5 мин; б) среднее время обслуживания одной заявки; в) вероятность P_2 того, что за это время обслуживание очередной заявки будет закончено.

Ответ: а) $P_1 = 0{,}972$, б) $m_{t_{об}} = 1$ мин, в) $P_2 = 0{,}75$.

9.31. Группа из n самолетов производит поиск малоразмерного объекта. Каждый самолет действует независимо от других. Поиск прекращается, как только объект обнаружен одним из самолетов. Пусть закон распределеления времени поиска каждым самолетом — показательный, причем среднее время поиска для каждого самолета соответственно равно $1/\mu_1$, $1/\mu_2$, ..., $1/\mu_n$. Показать, что: 1) фуикция распределения времени поиска всеми n самолетами имеет вид

$$F_1(t) = 1 - \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)t];$$

2) математическое ожидание и дисперсия времени поиска при $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ соответственно равны

$$m_{t_{об}} = 1/n\mu, \quad \sigma^2_{t_{об}} = 1/(n\mu)^2.$$

9.32. Частица, попавшая в счетчик Гейгера—Мюллера, вызывает разряд, длящийся время τ (τ — постоянно). Попавшие за это время в счетчик новые частицы не регистрируются им. Считая, что распределение числа частиц, попавших в счетчик, подчиняется закону Пуассона, найти вероятность того, что счетчик за время $t > 0$ сосчитает все попавшие в него частицы

Ответ [62]: $P(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k+1}(t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!}\right]$,

где λ — среднее число частиц, попавших в счетчик за единицу времени.

9.33. В автопарк, рассчитанный на n мест, прибывает простейший поток машин с интенсивностью λ до тех пор, пока имеются свободные места. Найти дифференциальные уравнения для вероятностей $P_k(t)$ того, что ровно k мест заняты.

Ответ [5]: $\frac{d}{dt}P_k(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) +$

$+(k+1)\mu P_{k+1}(t)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$; $\frac{d}{dt}P_n(t) = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$.

9.34. Сколько оборонительных комплексов n должна иметь оборонительная система, чтобы вероятность ее прорыва противником не превышала 0,02, если на данном направлении действует простейший поток целей противника с плотностью $\lambda = 4$, время обстрела

одной цели одним оборонительным комплексом распределено по показательному закону с параметром $\mu = 2$, а вероятность поражения цели при одном выстреле (залпе) равна единице.

Ответ: $n = 6$.

9.35. На станции n телефонов-автоматов, обслуживающих в среднем N человек. Вероятности одновременного разговора k человек распределены по закону Пуассона

$$P(k, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}.$$

Найти среднее число абонентов, стоящих в очередях к автоматам.

Ответ: $m = \sum_{k=n+1}^{N} (k-n) \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = P(n, \tau) \left[\frac{\lambda\tau}{n+1} + \right.$

$$\left. + \frac{2(\lambda\tau)^3}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{(N-n)(\lambda\tau)^{N-n}}{(n+1)(n+2)\ldots N}\right],$$

где

$$P(n, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}.$$

9.36. Узел связи обслуживает 1000 абонентов, каждый из которых в среднем занимает линию связи в течение 6 мин за час. Какое число каналов n надо иметь, чтобы исключить длительные ожидания (вероятность того, что максимальное число одновременно поступивших вызовов превысит число каналов, не должна превышать 0,3 %).

Ответ: $n = 128$.

9.37. Для охраны района выделено 10 кораблей, ремонт которых обеспечивают два дока. Каждый док может одновременно принять для ремонта один корабль. В док корабль ставится тогда, когда он не может нести охрану и нуждается в ремонте. Вероятность того, что корабль за время t потребует ремонта $F(t) = 1 - \exp(-0{,}02t)$, где t — время, мес.

Предполагая, что в среднем на ремонт одного корабля затрачивается два месяца, а время ремонта подчиняется показательному закону, определить: а) среднее число кораблей, находящихся в ремонте; б) вероятность того, что для охраны района будет иметься не менее 8 исправных кораблей.

Ответ [63]: а) $m_k = 0{,}395$; б) $P(k \geqslant 8) = 0{,}99$.

9.38. В систему с одним обслуживающим аппаратом поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 9{,}8$ заявки в минуту. Число обслуженных заявок подчиняется закону Пуассона, причем среднее число обслуженных заявок в минуту равно 10.

Определить: а) математическое ожидание длины очереди; б) вероятности того, что в очереди находится 0, 1, 2 заявки; в) вероятность того, что вновь поступившей заявке совсем не придется ждать; г) среднее время ожидания.

Ответ: а) $m_s = 49$, б) $P_0 = 0{,}02$, $P_1 = 0{,}0196$, $P_2 = 0{,}0192$, в) $P_0 = 0{,}02$, г) $m_{t_{\text{ож}}} = 4{,}9$ мин.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛЕМЕНТЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

10. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При рассмотрении преобразований случайных сигналов линейными системами можно пользоваться аппаратом дифференциальных уравнений, импульсными характеристиками и комплексными частотными характеристиками систем.

В общем случае, когда интересуются как нестационарным, так и стационарным режимами работы системы и начальные условия в системе не нулевые, целесообразно использовать аппарат дифференциальных уравнений. При нулевых начальных условиях удобнее пользоваться импульсными характеристиками. С комплексными частотными характеристиками обычно оперируют в том случае, когда интересуются лишь стационарным состоянием линейной системы.

Типовые задачи, связанные с преобразованием случайных процессов линейными системами, можно разбить на две группы:

1. Задачи, требующие определения математических ожиданий, корреляционных функций и спектральных плотностей процессов на выходе линейных систем.

2. Задачи, требующие определения функций распределения выходного случайного процесса.

Очевидно, что из решения задач второй группы может быть получено решение задач первой группы. Однако, за исключением того важного, хоть и частного случая, когда воздействующий на линейную систему процесс $\xi(t)$ является гауссовским, не существует метода, который позволял бы находить непосредственно плотности распределения вероятностей для процесса $\eta(t)$ на выходе системы. В общем случае задачи второй группы приходится решать путем вычисления корреляционных функций выходного процесса $\eta(t)$ с последующим определением характеристических функций и соответствующих им плотностей распределения вероятностей $p_n(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Ниже приводятся формулы, по которым находятся корреляционные (или моментные) функции процесса на выходе линейной системы при известных корреляционных функциях процесса на входе.

Рассмотрим систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением с постоянными или зависящими от времени коэффициентами:

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}\eta(t)+\ldots+a_1(t)\frac{d}{dt}\eta(t)+a_0(t)\eta(t)=$$

$$=b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}\xi(t)+\ldots+b_1(t)\frac{d}{dt}\xi(t)+b_0(t)\xi(t). \qquad (10.1)$$

Здесь $\xi(t)$ — процесс на входе системы, характеризуемый математическим ожиданием $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\}$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\}.$$

Вводя оператор $p = d/dt$ и операторы $A(p, t)$ и $B(p, t)$, определяемые равенствами

$$A(p, t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) p^i, \quad B(p, t) = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) p^i, \tag{10.2}$$

дифференциальное уравнение (10.1) можно привести к следующему операторному соотношению [64]:

$$A(p,t)\,\eta(t) = B(p,t)\,\xi(t). \tag{10.3}$$

Из (10.3) формально следует равенство, определяющее сигнал на выходе системы в явном виде:

$$\eta(t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)}\xi(t = L(p, t)\,\xi(t). \tag{10.4}$$

Оператор

$$L(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} \tag{10.5}$$

называется линейным однородным оператором системы. Динамическая система с оператором (10.5) линейна, так как при решении дифференциального уравнения (10.1) применим принцип суперпозиции. Линейным неоднородным оператором $L_1(p, t)$ называется сумма линейного однородного оператора и некоторой заданной функции $f(t)$

$$[L_1(p, t) = L(p, t) + f(t). \tag{10.6}$$

Путем вычитания из (10.6) функции $f(t)$ любой неоднородный оператор может быть приведен к однородному.

Из (10.4) можно получить следующие соотношения, определяющие математические ожидания и корреляционные функции процессов на выходе линейных систем через их операторы и статистические характеристики входных процессов [64]:

$$m_\eta(t) = L(p, t)\, m_\xi(t), \tag{10.7}$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = L(p, t_1)\, L(p, t_2)\, R_\xi(t_1, t_2). \tag{10.8}$$

Неоднородность оператора системы на значении корреляционной функции не отражается, а при нахождении математического ожидания она должна быть учтена добавочным слагаемым.

При заданном операторе линейной системы принцип суперпозиции позволяет свести исследование реакции системы на произвольное воздействие к исследованию реакции системы на типовое воздействие. В качестве типового обычно используется импульсное воздействие в виде дельта-функции или гармоническое колебание.

Реакция предварительно не возбужденной линейной системы на воздействие в виде дельта-функции называется импульсной характеристикой системы $h(t)$. Если оператор системы определяется формулой (10.5), то эта реакция может быть установлена в результате решения линейного дифференциального уравнения

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}h(t) + \ldots + a_1(t)\frac{d}{dt}h(t) + a_0(t)\,h(t) =$$

$$= b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}\delta(t) + \ldots + b_1(t)\frac{d}{dt}\delta(t) + b_0(t)\,\delta(t) \tag{10.9}$$

при нулевых начальных условиях. При этом процесс на выходе линейной системы определяется интегралом Дюамеля:

$$\eta(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(x)\,\xi(t-x)\,dx. \qquad (10.10)$$

Используя (10.10), получаем следующие формулы для математического ожидания и корреляционной функции на выходе системы [1]:

$$m_\eta(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,m_\xi(\tau)\,d\tau, \qquad (10.11)$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\,R_\xi(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \qquad (10.12)$$

Для высших корреляционных функций (т. е. n-мерных центральных моментных функций n-го порядка) имеем:

$$R_{3\eta}(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\,h(t_3-\tau_3)\times$$
$$\times R_{3\xi}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3, \qquad (10.13)$$

$$R_{n\eta}(t_1, \ldots, t_n) = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\ldots h(t_n-\tau_n)\times$$
$$\times R_{n\xi}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n.$$

Применительно к стационарным входным процессам $\xi(t)$ формулы (10.11)—(10.13) принимают вид

$$m_\eta(t) = m_\xi \int_0^t h(t-\tau)\,d\tau = m_\xi \int_0^t h(x)\,dx, \qquad (10.11а)$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\,R_\xi(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2, \qquad (10.12а)$$

$$R_{3\eta}(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\,h(t_3-\tau_3)\times$$
$$\times R_{3\xi}(\tau_2-\tau_1, \tau_3-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3. \qquad (10.13а)$$

В случае линейных пассивных систем с затуханием по истечении достаточно большого времени от момента $t = 0$ случайный процесс $\eta(t)$ будет приближаться к стационарному. Для стационарного процесса формулы (10.11)—(10.13) преобразуются к виду [1, 14]

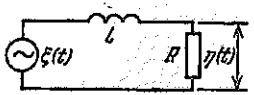
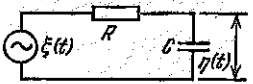
$$m_\eta = m_\xi \int_0^\infty h(x)\,dx, \qquad (10.11б)$$

$$R_\eta(\tau) = \int_0^\infty h(x)\,dx \int_{-\infty}^{\tau+x} h(\tau+x-z)\,R_\xi(z)\,dz \qquad (10.12б)$$

$$R_{3\eta}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^\infty h(x)\,dx \int_{-\infty}^{\tau_1+x}\int_{-\infty}^{\tau_2+x} h(\tau_1+x-y)\,h(\tau_2+x-z)\times$$
$$\times R_{3\xi}(y, z)\,dy\,dz. \qquad (10.13б)$$

Таблица 10.1

Комплексные частотные и импульсные характеристики простейших линейных систем

Схема	$\mathcal{K}(j\omega)=\int_0^\infty h(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$	$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$
	$\frac{R}{R+j\omega L}$	$\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$
	$\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$	$\delta(t)-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$
	$\frac{1}{1+j\omega RC}$	$\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

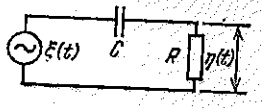
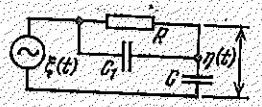
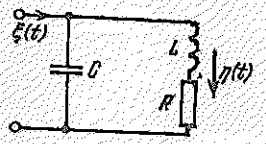
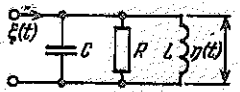
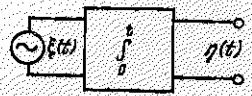
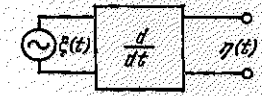
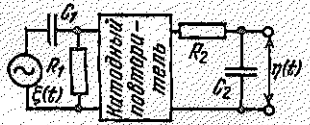
	$\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$	$\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$
	$\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T}$, $T=(R+R_1)C,\ T_1=R_1C$	$\frac{T_1}{T}\delta(t)-\frac{RC}{T^2}e^{-\frac{1}{T}t}$
	$\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T}$, $T=R(C+C_1),\ T_1=RC_1$	$\frac{T_1}{T}\delta(t)-\frac{RC}{T^2}e^{-\frac{1}{T}t}$
	$\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j2\alpha\omega}$, $\omega_0=1/\sqrt{LC},\ \alpha=R/2L$	$\begin{cases}\omega_0 e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t, & \omega_0 \gg \alpha;\\ \alpha^2 t\, e^{-\alpha t}, & \omega_0=\alpha;\\ \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}, & \omega_0<\alpha\end{cases}$

Схема	$\mathcal{K}(j\omega)=\int_0^\infty h(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$	$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$
	$\frac{j2\alpha\omega R}{(\omega_0^2-\omega^2)+j2\alpha\omega}$, $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, $\alpha=1/2RC$	$\eta(t)=\frac{1}{\omega_0 C}\int_0^t e^{-\alpha(t-x)}\times$ $\times\sin\omega_0(t-x)\,\dot{\xi}(x)\,dx$, $\omega_0\gg\alpha$
Гауссовский фильтр	$e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2-j(\omega-\omega_0)t_0}$ $\Delta\omega\ll\omega_0$	$\frac{\Delta\omega}{\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\pi}(t-t_0)^2+j\omega_0 t}$
Идеальный полосовой фильтр	$\begin{cases} e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}, & \omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\leqslant\omega\leqslant\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, & \omega<\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2},\ \omega>\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$	$\frac{\Delta\omega}{2\pi}\frac{\sin\frac{\Delta\omega(t-t_0)}{2}}{\frac{\Delta\omega(t-t_0)}{2}}e^{j\omega t_0}$

Идеальный интегратор	$\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}}$	$\begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t<0,\ t>T \end{cases}$
 Идеальный интегратор	$\frac{1}{j\omega}$	$\begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \infty, \\ 0, & t<0 \end{cases}$
 Идеальная дифференцирующая цепь	$j\omega$	$\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$
 Интегрально-дифференцирующая цепь	$\frac{j\omega T_1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$ $T_1=R_1C_1,\ T_2=R_2C_2$	$\begin{cases} \frac{1}{T_1-T_2}\left[\frac{T_1}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}-e^{-\frac{t}{T_1}}\right], & T_1\neq T_2 \\ \frac{1}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}, & T_1=T_2=T \end{cases}$

В заключение укажем, что взаимная корреляционная функция для процесса $\xi(t)$ на входе линейной системы и выходного процесса $\eta(t)$ равна

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} h(t_2-\tau) R_{\xi}(t_1, \tau)\, d\tau. \qquad (10.14)$$

Если процесс $\xi(t)$ стационарен, то

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} h(t_2-\tau) R_{\xi}(t_1-\tau)\, d\tau. \qquad (10.14а)$$

Подавая на вход линейной системы гармоническое колебание $x(t, \omega) = \exp(j\omega t)$ и решая уравнение

$$\mathcal{K}_1(t, j\omega) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} e^{j\omega t}, \qquad (10.15)$$

определяющее работу системы, находим, что решение (10.15) представляет собой в общем случае комплексную функцию действительных аргументов t, ω. Выделим из функции $\mathcal{K}_1(t, j\omega)$ множитель $\exp(j\omega t)$, т. е. представим решение в виде

$$\mathcal{K}_1(t, j\omega) = \mathcal{K}(t, j\omega) e^{j\omega t} = |\mathcal{K}(t, j\omega)| e^{j \operatorname{Arg} \mathcal{K}(t, j\omega)} e^{j\omega t}, \qquad (10.16)$$

наглядно показывающем изменение амплитуды и фазы воздействия $x(t, \omega) = \exp(j\omega t)$ при его прохождении через линейную систему. Функцию $\mathcal{K}(t, j\omega)$ называют комплексной частотной характеристикой системы, в общем случае она зависит не только от частоты ω, но и от времени t. При помощи этой функции легко вычисляется спектральная плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе линейной системы:

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) |\mathcal{K}(t, j\omega)|^2 = S_\eta(\omega, t). \qquad (10.17)$$

Здесь $S_\xi(\omega)$ — спектральная плотность воздействующего на систему случайного процесса $\xi(t)$.

Комплексная частотная характеристика системы с постоянными параметрами и ее импульсная характеристика связаны друг с другом преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad (10.18)$$

$$\mathcal{K}(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (10.19)$$

Выражения $\mathcal{K}(j\omega)$ и $h(t)$ для некоторых простейших линейных систем с постоянными параметрами приведены в табл. 10.1.

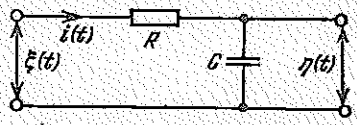
2. ПРИМЕРЫ

10.1. На вход дифференцирующего устройства поступает случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_\xi(t) = \sin\beta t$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = D_\xi e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}.$$

Определить математическое ожидание $m_\eta(t)$ и дисперсию $D_\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ на выходе системы.

Рис. 10.1. Интегрирующая цепочка RC



Решение. Случайный процесс $\eta(t)$ на выходе системы (реакция) связан с воздействием $\xi(t)$ оператором дифференцирования:

$$\eta(t) = L(p, t)\,\xi(t) = d\xi(t)/dt.$$

Применяя формулы (10.7) и (10.8), имеем

$$m_\eta(t) = \frac{d}{dt} m_\xi(t) = \beta \cos \beta t,$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} R_\xi(t_1, t_2) = 2D_\xi \alpha e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}[1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2].$$

Полагая $t_2 = t_1 = t$, находим

$$R_\eta(t, t) = D_\eta(t) = 2\alpha D_\xi = D_\eta.$$

10.2. На цепочку RC (рис. 10.1), начиная с момента $t = 0$, воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный белый шум с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau). \qquad (10.20)$$

Определить математическое ожидание $m_\eta(t)$ и корреляционную функцию $R_\eta(t_1, t_2)$ напряжения $\eta(t)$ на емкости C.

Решение. Дифференциальное уравнение для исследуемой схемы имеет вид

$$d\eta(t)/dt + \alpha\eta(t) = \alpha\xi(t), \qquad \alpha = 1/RC. \qquad (10.21)$$

Будем считать, что в начальный момент времени емкость C разряжена, т. е. $\eta(0) = 0$. В общем случае $\eta(0)$ может быть отличным от нуля и носить как детерминированный, так и случайный характер. При нулевых начальных условиях решение уравнения (10.21) имеет следующий вид:

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x}\, \xi(x)\, dx,$$

в соответствии с чем математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)$ на выходе цепочки RC равно

$$m_\eta(t) = M\{\eta(t)\} = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x}\, M\{\xi(x)\}\, dx =$$

$$= \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x}\, m_\xi\, dx = m_\xi e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - 1).$$

Таким образом,

$$m_\eta(t) = m_\xi(1 - e^{-\alpha t}).$$

График этой зависимости приведен на рис. 10.2.

Корреляционная функция случайного колебания $\eta(t)$ на выходе цепочки RC согласно определению равна:

$$R_\eta(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} R_\xi(y-x)\, dxdy.$$

Учитывая, что по условию задачи $R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau)$, находим

$$R_\eta(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)}\, \delta(y-x)\, dxdy. \qquad (10.22)$$

При вычислении интеграла

$$I = \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)}\, \delta(y-x)\, dxdy \qquad (10.23)$$

необходимо иметь в виду, что формула

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} f(z)\, \delta(z_0 - z)\, dz = f(z_0)$$

справедлива лишь при $\varepsilon > 0$, т. е. когда особая точка $z = z_0$ лежит внутри пределов интегрирования.

Области интегрирования в (10.23) при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ изображены соответственно на рис. 10.3, *а* и *б*.

Дельта-функция $\delta(y - x)$ обращается в бесконечность, как это следует из рис. 10.3, лишь на том участке биссектрисы координатного угла плоскости переменных x и y, который определяется наименьшим из пределов t или t_1. Поэтому при вычислении интеграла (10.23) оба предела нужно полагать одинаковыми и равными наименьшему.

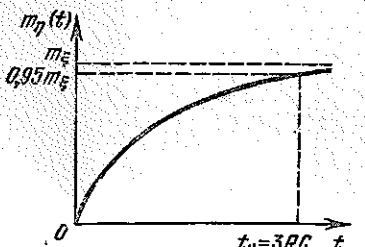


Рис. 10.2. Нарастание математического ожидания

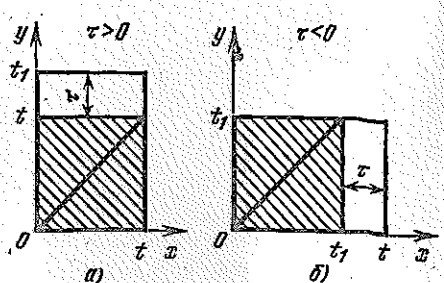
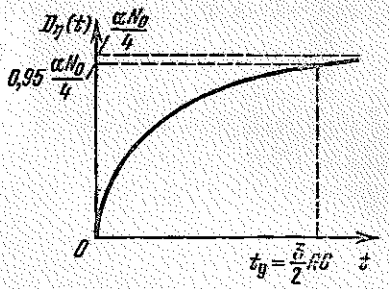


Рис. 10.3. Области интегрирования

Рис. 10.4. Нарастание дисперсии



Так, при $\tau > 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t ($t_1 = t + \tau$ и, следовательно, $t_1 > t$). Поэтому

$$I = \int_0^t \int_0^t e^{\alpha(x+y)}\,\delta(y-x)\,dxdy = \int_0^t e^{\alpha x}\,dx \int_0^t e^{\alpha y}\,\delta(y-x)\,dy =$$

$$= \int_0^t e^{2\alpha x}\,dx = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha t} - 1\right). \qquad (10.24)$$

Подставляя (10.24) в (10.22) и производя замену $t_1 = t + \tau$ ($\tau > 0$), имеем:

$$R_\eta(t, \tau) = (\alpha N_0/4)\, e^{-\alpha\tau}\,(1 - e^{-2\alpha t}),\ \tau > 0. \qquad (10.25)$$

При $\tau < 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t_1 и, следовательно,

$$I = \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)}\,\delta(y-x)\,dxdy = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha t_1} - 1\right). \qquad (10.26)$$

Подставляя (10.26) в (10.22) и заменяя t через $t_1 - \tau$ ($\tau < 0$), имеем

$$R_\eta(t, \tau) = (\alpha N_0/4)\, e^{\alpha\tau}\,(1 - e^{-2\alpha t_1}),\ \tau < 0. \qquad (10.27)$$

Объединяя (10.25) и (10.27), получаем следующее выражение для корреляционной функции $R_\eta(t, \tau)$ случайного напряжения $\eta(t)$ на конденсаторе емкостью C:

$$R_\eta(t,\ \tau) = (\alpha N_0/4)\, e^{-\alpha|\tau|}\,(1 - e^{-2\alpha t}). \qquad (10.28)$$

Полагая в (10.28) $\tau = 0$, найдем дисперсию $D_\eta(t)$ случайного процесса $\eta(t)$

$$D_\eta(t) = (\alpha N_0/4)\,(1 - e^{-2\alpha t}).$$

График этой зависимости приведен на рис. 10.4. Сравнивая функцию $D_\eta(t)$ с графиком $m_\eta(t)$ на рис. 10.2, нетрудно установить, что достижение дисперсией уровня $0{,}95\,D_\eta(\infty)$ происходит за время установления $t_y = 1{,}5\,RC$, т. е. вдвое быстрее, чем достижение уровня $0{,}95\ m_\eta(\infty)$ математическим ожиданием $m_\eta(t)$.

В стационарном режиме

$$m_\eta(t) = m_\xi = m_\eta, \qquad R_\eta(t, \tau) = (\alpha N_0/4)\, e^{-\alpha|\tau|} = R_\eta(\tau),$$
$$D_\eta(t) = \alpha N_0/4 = D_\eta$$

19.3. Работа пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 10.5) описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\eta(t) = \frac{T_1 p + 1}{Tp + 1}\,\xi(t) = L(p)\,\xi(t). \tag{10.29}$$

Для фильтра, изображенного на рис. 10.5, *а*, коэффициенты T и T_1 соответственно равны (см. табл. 10.1):

$$T = C(R + R_1), \qquad T_1 = R_1 C,$$

а для фильтра рис. 10.5, *б*:

$$T = R(C + C_1), \qquad T_1 = RC_1.$$

На вход фильтра поступает случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией (10.20).

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе фильтра.

Решение. В соответствии с (10.29) комплексная частотная характеристика пропорционально-интегрирующего фильтра

$$\mathcal{K}(j\omega) = L(p = j\omega) = (1 + j\omega T_1)/(1 + j\omega T),$$

а квадрат ее модуля определяется выражением

$$|\mathcal{K}(j\omega)|^2 = [1 + (\omega T_1)^2]/[1 + (\omega T)^2]. \tag{10.30}$$

Подставляя в (10.17) соотношение (10.30) и спектральную плотность входного шума $S_\xi(\omega) = N_0/2$, находим спектральную плотность процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра:

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2}. \tag{10.31}$$

График спектральной плотности $S_\eta(\omega)$ на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра представлен на рис. 10.6. Видно, что при $\omega \to \infty$ и $T_1 \neq T$ спектральная плотность $S_\eta(\omega)$ стремится к некоторому постоянному уровню, равному $N_0 T_1^2/2T^2$. Если по-

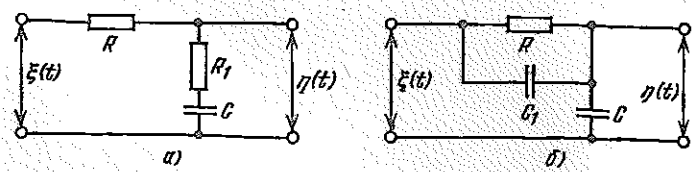
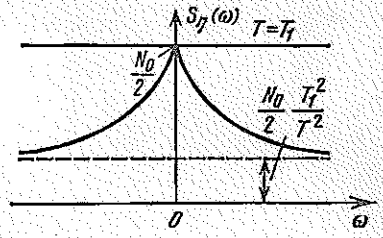


Рис. 10.5. Два варианта схемы пропорционально-интегрирующего фильтра

Рис. 10.6. Спектральная плотность на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра



стоянные времени T_1 и T равны, $S_\eta(\omega) = N_0/2$, т. е. процесс на выходе фильтра в этом случае равен входному белому шуму. При $T_1 = 0$ пропорционально-интегрирующий фильтр ведет себя как обычная интегрирующая цепь RC.

Для вычисления корреляционной функции $R_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой Винера—Хинчина:

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \qquad (10.32)$$

После подстановки (10.31) в (10.32) имеем

$$R_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+(\omega T_1)^2}{1+(\omega T)^2}\, e^{j\omega\tau}\, d\omega.$$

Производя далее замену $e^{j\omega\tau} = \cos\omega\tau + j\sin\omega\tau$, находим:

$$R_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+(\omega T_1)^2}{1+(\omega T)^2}\cos\omega\tau d\omega + \right.$$
$$\left. + j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+(\omega T_1)^2}{1+(\omega T)^2}\sin\omega\tau d\omega\right]. \qquad (10.33)$$

Второй интеграл в (10.33) в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов равен нулю, поэтому (10.33) приводится к виду

$$R_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega\tau}{1+(\omega T)^2}\, d\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{T_1^2}{T^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+(\omega T)^2}\, d\omega\right]\right\}.$$

Учитывая, что [171]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau d\omega=\delta(\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+(\omega T)^2}d\omega=\frac{\pi}{T}e^{-|\tau|/T},$$

окончательно получаем

$$R_\eta(\tau)=\frac{N_0}{2}\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\delta(\tau)+\frac{N_0}{4T}\,\frac{T^2-T_1^2}{T^2}e^{-|\tau|/T}. \qquad (10.34)$$

При $T=T_1$ из (10.34) имеем

$$R_\eta(\tau)=(N_0/2)\,\delta(\tau)=R_\xi(\tau).$$

В случае $T_1=0$

$$R_\eta(\tau)=(N_0/4T)\,e^{-|\tau|/T},$$

что согласуется с результатами примера 10.2. График корреляционной функции (10.34) приведен на рис. 10.7.

10.4. На цепь, составленную из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R (рис. 10.8), воздействует напряжение $\xi(t)$, представляющее собой белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi=0$ и спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega)=N_0/2,\ -\infty<\omega<\infty. \qquad (10.35)$$

Найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на сопротивлении R.

Решение. Комплексная частотная характеристика исследуемой цепи определяется соотношением (см. табл. 10.1)

$$\mathcal{K}(j\omega)=R/(R+j\omega L),$$

а квадрат ее модуля

$$|\mathcal{K}(j\omega)|^2=R^2/[R^2+(\omega L)^2]. \qquad (10.36)$$

Подставляя (10.35) и (10.36) в (10.17), находим спектральную плотность напряжения $\eta(t)$

$$S_\eta(\omega)=S_\xi(\omega)\,|\mathcal{K}(j\omega)|^2=\frac{N_0}{2}\,\frac{R^2}{R^2+(\omega L)^2},\ -\infty<\omega<\infty$$

По спектральной плотности согласно формуле Винера—Хинчина находим корреляционную функцию

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_\eta(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega=\frac{N_0}{2}\,\frac{R}{2L}e^{-|\tau|R/L}.$$

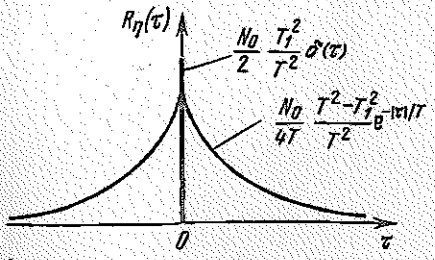
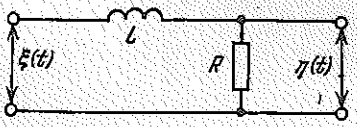


Рис. 10.7. Корреляционная функция на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра

Рис. 10.8. Цепочка RL



Аналогично решаются все задачи, связанные с воздействием на линейные системы белого шума. В табл. 10.2 приводятся результаты решения задач подобного вида для случая воздействия на некоторые простейшие линейные системы стационарного гауссовского белого шума с нулевым математическим ожиданием. В таблице даны нормированные корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности процессов на выходе.

10.5. Определить корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ случайного напряжения $\xi(t)$ на входе линейной цепи RL (рис. 10.8) при условии, что выходное напряжение $\eta(t)$ представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией

$$R_\eta(\tau) = D_\eta e^{-\alpha\tau^2}. \qquad (10.37)$$

Решение. Случайный процесс $\xi(t)$ на входе рассматриваемой линейной системы определяется уравнением

$$\xi(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}\eta(t) + \eta(t) = y(t) + \eta(t),$$

в соответствии с чем

$$R_\xi(\tau) = M\{\xi_0(t)\,\xi_0(t+\tau)\} = M\{[y_0(t) + \eta_0(t)]\,[y_0(t+\tau) + \eta_0(t+\tau)]\} = R_y(\tau) + R_\eta(\tau). \qquad (10.38)$$

Учитывая, что $y(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}\eta(t)$, находим:

$$R_y(\tau) = -\left(\frac{L}{R}\right)^2\frac{d^2}{d\tau^2}R_\eta(\tau) = 2\alpha D_\eta\left(\frac{L}{R}\right)^2(1-2\alpha\tau^2)\,e^{-\alpha\tau^2}. \qquad (10.39)$$

После подстановки (10.37) и (10.39) в (10.38) получаем

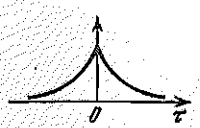
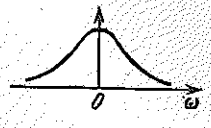
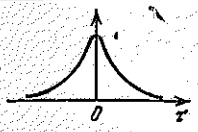
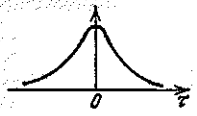
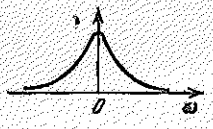
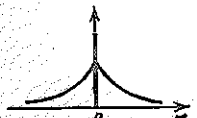
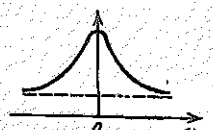
$$R_\xi(\tau) = D_\eta\,e^{-\alpha\tau^2}\left[1 + 2\alpha\left(\frac{L}{R}\right)^2(1-2\alpha\tau^2)\right].$$

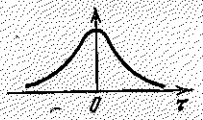
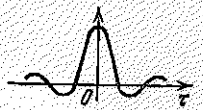
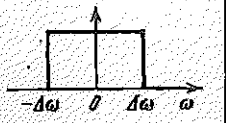
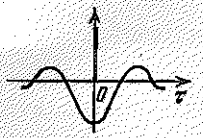
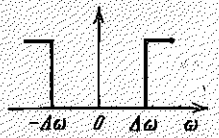
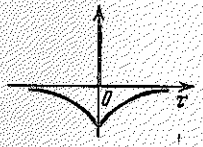
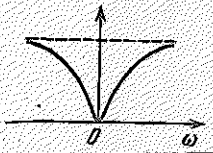
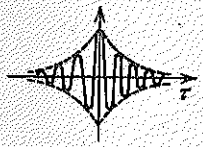
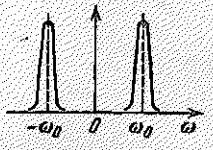
10.6. На цепочку RC (рис. 10.1), начиная с момента $t = 0$, воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\beta|\tau|}.$$

Таблица 10.2

Корреляционные функции и спектральные плотности на выходе простейших линейных систем

Линейная система	$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$		$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$	
	Аналитическое выражение	График	Аналитическое выражение	График
1. Низкочастотный *RC*-фильтр	$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$, $\alpha=\frac{1}{RC}$	
2. Два низкочастотных *RC*-фильтра	$(1+\alpha\lvert\tau\rvert)\, e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$		$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$	
3. Три низкочастотных *RC*-фильтра	$(1+\alpha\lvert\tau\rvert+\alpha^2\tau^2/3)\, e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$		$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2+\omega^2)^3}$	
4. Пропорционально-интегрирующий фильтр	$\frac{T_1^2}{T^2}\delta(\tau)+\frac{1}{2T}\times$ $\times\frac{T^2-T_1^2}{T^2}\, e^{-\lvert\tau\rvert/T}$		$\frac{1+(\omega T_1)^2}{1+(\omega T)^2}$	

5. Гауссов низкочастотный фильтр	$e^{-\alpha\tau^2}$		$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha}$	
6. Идеальный низкочастотный фильтр	$\frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$		$\pi/\Delta\omega$ при $\lvert\omega\rvert < \Delta\omega$, 0 при $\lvert\omega\rvert > \Delta\omega$	
7. Идеальный высокочастотный фильтр	$\frac{\pi}{\Delta\omega}\delta(\tau) - \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$		0 при $\lvert\omega\rvert < \Delta\omega$, $\pi/\Delta\omega$ при $\lvert\omega\rvert > \Delta\omega$	
8. Высокочастотный RL-фильтр	$\delta(\tau) - \frac{1}{2\beta} e^{-\lvert\tau\rvert/\beta}$		$\frac{\beta^2\omega^2}{1+\beta^2\omega^2}$, $\beta = \frac{L}{R}$	
9. Колебательный контур	$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \times \sin\omega_0\lvert\tau\rvert\right)$		$\frac{4\alpha(\alpha^2+\omega_0^2)}{[\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2][\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2]}$	

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на емкости C.

Решение. Процесс $\eta(t)$ на выходе цепочки RC (см. пример 10.2)

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \xi(x)\, dx, \quad \alpha = \frac{1}{RC},$$

в соответствии с чем его математическое ожидание

$$m_\eta(t) = m_\xi (1 - e^{-\alpha t}).$$

Так как по условию задачи $m_\xi = 0$, то $m_\eta(t) = 0$.

Корреляционная функция $R_\eta(t, t_1)$ процесса $\eta(t)$ (см. пример 10.2)

$$R_\eta(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} R_\xi(y-x)\, dxdy.$$

Так как в нашем случае $R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\beta|\tau|}$, то

$$R_\eta(t, t_1) = \alpha^2 D_\xi e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)-\beta|y-x|}\, dxdy. \qquad (10.40)$$

Сделаем в интеграле

$$I = \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)-\beta|y-x|}\, dxdy \qquad (10.41)$$

замену $y = z + x$. При этом (10.41) преобразуется к виду

$$I = \int_0^t e^{2\alpha x}\, dx \int_{-x}^{t_1-x} e^{\alpha z - \beta|z|}\, dz. \qquad (10.42)$$

Так как в подынтегральном выражении аргумент z берется по модулю, необходимо определить области интегрирования так, чтобы в пределах каждой из них аргумент z имел бы только один знак. Области интегрирования для случая, когда $t_1 = t + \tau > t$ (т. е. когда $\tau > 0$), и для случая, когда $t_1 = t + \tau < t$, (т. е. когда $\tau < 0$), показаны на рис. 10.9, *а* и *б*.

Таким образом, при $\tau > 0$ при интегрировании по z в пределах $[-x, 0]$ аргумент $z < 0$, а при интегрировании в пределах $[0, t_1 - x]$ аргумент $z > 0$. В соответствии с этим при $\tau > 0$ интеграл (10.42) можно представить в следующем виде:

$$I = \int_0^t e^{2\alpha x}\, dx \left[\int_{-x}^{0} e^{(\alpha+\beta)z}\, dz + \int_0^{t_1-x} e^{(\alpha-\beta)z}\, dz \right]. \qquad (10.43)$$

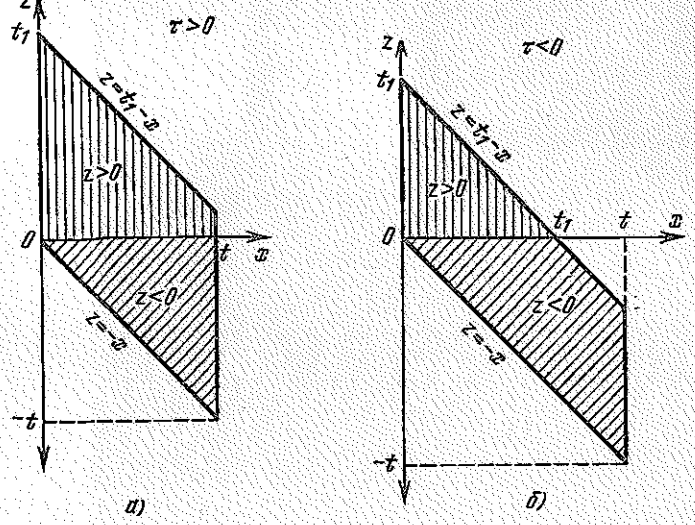


Рис. 10.9. Области интегрирования

Подставляя (10.43) в (10.40) и учитывая, что $t_1 - t = \tau$, получаем следующее выражение для корреляционной функции при $\tau > 0$:

$$R_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha^2 D_\xi}{\beta^2 - \alpha^2}\left\{\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\, e^{-\alpha\tau} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}]\, e^{-\alpha\tau} - \right.$$

$$\left. -[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}]\, e^{-\beta\tau}\right\},\ \tau > 0. \qquad (10.44)$$

Аналогично можно найти, что при $\tau < 0$

$$R_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha^2 D_\xi}{\beta^2 - \alpha^2}\left\{\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\, e^{\alpha\tau} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}]\, e^{\alpha\tau} - \right.$$

$$\left. -[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}]\, e^{\beta\tau}\right\},\ \tau < 0. \qquad (10.45)$$

Объединяя (10.44) и (10.45), получаем следующее выражение для корреляционной функции случайного процесса $\eta(t)$:

$$R_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha^2 D_\xi}{\beta^2 - \alpha^2}\left\{\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\, e^{-\alpha|\tau|} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}]\, e^{-\alpha|\tau|} - \right.$$

$$\left. -[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}]\, e^{-\beta|\tau|}\right\}. \qquad (10.46)$$

Полагая в (10.46) $t \to \infty$, находим корреляционную функцию для стационарного режима:

$$R_\eta(\tau) = \frac{\alpha D_\xi}{\beta^2 - \alpha^2}(\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}).$$

Дисперсия D_η в стационарном режиме равна

$$D_\eta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} D_\xi.$$

10.7. На линейную систему с импульсной характеристикой $h(t)$ воздействует стационарный гауссовский белый шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau)$.

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{\xi\eta}(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе системы и выходного процесса $\eta(t)$ и дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе.

Решение. Подставляя в (10.14) значение корреляционной функции $R_\xi(\tau)$, находим

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \begin{cases} (N_0/2)\,h(t_2 - t_1) & \text{при } 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 < 0,\ t_1 > t_2. \end{cases} \qquad (10.47)$$

Из (10.47) следует, что с точностью до постоянного множителя импульсная характеристика линейной системы совпадает с взаимной корреляционной функцией между входным стационарным белым шумом, воздействующим на систему, и выходным случайным процессом. Этим результатом часто пользуются для экспериментального определения $h(t)$ неизвестной линейной системы при помощи коррелометров.

Значение дисперсии D_η в стационарном режиме можно определить при помощи формулы (10.12, б). Подставляя в нее заданную функцию $R_\xi(\tau)$, имеем:

$$R_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty h(x)\,h(|\tau| + x)\,dx. \qquad (10.48)$$

Полагая в (10.48) $\tau = 0$, находим

$$D_\eta = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty h^2(x)\,dx.$$

10.8. Найти спектральную плотность $S_\xi(f)$ напряжения собственного теплового шума на параллельной цепочке RC (рис. 10.10) и построить график зависимости $S_\xi(f)/4kT$ от величины R для трех частот:

$$f = 100 \text{ Гц},\ 1{,}5 \text{ и } 15 \text{ кГц при } C = 100 \text{ пФ}.$$

Вычислить дисперсию напряжения шума в полосе частот $[f_1, f_2]$ и показать, что при $f_1 = 0$, $f_2 \to \infty$ она равна kT/C.

Решение. Известно, что спектральная плотность напряжения собственного теплового шума любой пассивной линейной электрической цепи определяется формулой Найквиста:

$$S_\xi(f) = 4kTR\,\mathrm{Re}\{\bar{Z}\}, \quad 0 \leqslant f < \infty,$$

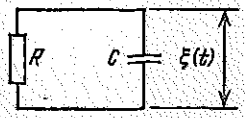


Рис. 10.10. Цепочка RC

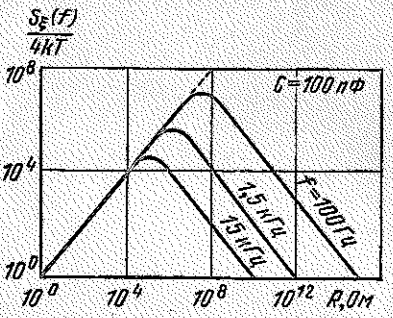


Рис. 10.11. Спектральная плотность теплового шума

где $kT = 4 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц, $\mathrm{Re}\{\widetilde{Z}\}$ — действительная часть комплексного сопротивления цепи $\widetilde{Z}$.

Для параллельной цепочки RC имеем

$$\widetilde{Z} = \frac{R}{1+j\omega RC} = \frac{R}{1+(\omega RC)^2} - j\,\frac{R\omega RC}{1+(\omega RC)^2}.$$

Поэтому

$$S_\xi(f) = 4kT\,\frac{R}{1+(2\pi fRC)^2},\quad 0 \leqslant f < \infty.$$

Графики зависимости $S_\xi(f)/4kT$ от R для трех частот при $C = 100$ пФ представлены на рис. 10.11. Дисперсию шума в полосе частот $[f_1, f_2]$ находим по формуле

$$D_\xi = 4kTR\int_{f_1}^{f_2}\frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}\,df =$$

$$= \frac{2kT}{\pi C}\left[\mathrm{arctg}\,(2\pi f_2 RC) - \mathrm{arctg}\,(2\pi f_1 RC)\right].$$

Полагая здесь $f_1 = 0$, $f_2 \to \infty$, получим

$$D_\xi = kT/C.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

10.1. На вход линейной системы с постоянными параметрами, описываемой дифференциальным уравнением

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}\eta(t) + \ldots + a_1\frac{d}{dt}\eta(t) + a_0\eta(t) =$$

$$= b_m\frac{d^m}{dt^m}\xi(t) + \ldots + b_1\frac{d}{dt}\xi(t) + b_0\xi(t),$$

воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием, равным m_ξ.

Найти математическое ожидание m_η реакции системы $\eta(t)$.

Ответ: $m_\eta = (b_0/a_0)\, m_\xi$.

10.2. На вход идеальной дифференцирующей цепи воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить корреляционную функцию процесса $\eta(t) = d\xi(t)/dt$ на выходе.

Ответ: $R_\eta(\tau) = \alpha^2 D_\xi e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$.

10.3. Решить задачу 10.2 при условии, что

1) $R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$;

2) $R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha^2\tau^2}$.

Ответ:

1) $R_\eta(\tau) = (\alpha^2 + \omega_0^2) D_\xi e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$;

2) $R_\eta(\tau) = 2\alpha^2 D_\xi e^{-\alpha^2\tau^2}(1 - 2\alpha^2\tau^2) = 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2) R_\xi(\tau)$.

10.4. На вход радиотехнического устройства, состоящего из линии задержки на время $t_{зад} = t_0$ и дифференцирующей схемы (рис. 10.12), воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi\, e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{\xi\eta}(\tau)$ процессов $\xi(t - t_0)$ и $\eta(t) = \dot{\xi}(t) = d\xi(t)/dt$.

Ответ [4]: $R_{\xi\eta}(\tau) = -\alpha^2 D_\xi(\tau - t_0) e^{-\alpha|\tau - t_0|}$.

10.5. Корреляционная функция процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$R_\xi(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию процесса

$$\eta(t) = \xi(t) + d\xi(t)/dt.$$

Ответ: $R_\eta(\tau) = [1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2)]\, e^{-\alpha^2\tau^2}$.

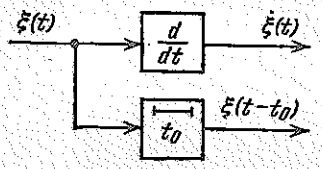


Рис. 10.12. Дифференцирующая схема и линия задержки

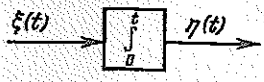


Рис. 10.13. Идеальный интегратор

10.6. Корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

Найти взаимную корреляционную функцию процессов $\xi(t)$ и $\eta(t) = d^2\xi(t)/dt^2$.

Ответ: $R_{\xi\eta}(\tau) = -\frac{1}{3}D_\xi\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|-\alpha^2\tau^2)$.

10.7. На вход интегрирующего устройства (рис. 10.13) воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Определить дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе интегратора и взаимную корреляционную функцию $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ для входного и выходного процессов.

Ответ [4]:

$$D_\eta = 2\int_0^t (t-\tau)R_\xi(\tau)\,d\tau = D_\eta(t),$$

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} R_\xi(t_1-x)\,dx.$$

10.8. Вычислить корреляционную функцию $R_\xi(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса Винера $\xi(t) = \int_0^t n(t)\,dt$, где $n(t)$ — стационарный белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_n = 0$ и корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau).$$

Ответ:

$$R_\xi(t_1, t_2) = \begin{cases}(N_0/2)\,t_1, & t_1 < t_2,\\ (N_0/2)\,t_2, & t_2 < t_1;\end{cases} \qquad D_\xi(t) = (N_0/2)\,t.$$

10.9. На вход интегрирующего устройства воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Определить дисперсию D_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса

$$\eta(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}\xi(x)\,dx$$

на выходе интегратора.

Ответ:

$$D_\eta = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_\xi(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau,$$

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_\xi(t-\tau)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt.$$

10.10. Случайный процесс $\varphi(t)$ задан уравнением

$$d\varphi(t)/dt = n_\varphi(t),$$

где $n_\varphi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_{n_\varphi}(\tau) = (N_\varphi/2)\,\delta(\tau).$$

Определить дисперсию $D_{\Delta\varphi}(t, \tau)$ приращения $\Delta\varphi(t, \tau) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$D_{\Delta\varphi}(t, \tau)|_{t\to\infty} = M\{[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]^2\}|_{t\to\infty} = \frac{N_\varphi}{2}\tau.$$

10.11. Вычислить дисперсию $D_{\Delta\lambda}(t, \tau)$ приращения

$$\Delta\lambda(t, \tau) = \lambda(t+\tau) - \lambda(t),$$

где $\lambda(t)$ — случайный процесс, заданный уравнением

$$d\lambda(t)/dt + \alpha\lambda(t) = n_\lambda(t). \qquad (10.49)$$

Здесь $n_\lambda(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_{n_\lambda}(\tau) = (N_\lambda/2)\,\delta(\tau).$$

Ответ:

$$D_{\Delta\lambda}(t, \tau)|_{t\to\infty} = M\{[\lambda(t+\tau)-\lambda(t)]^2\}|_{t\to\infty} = \frac{N_\lambda}{2\alpha}(1-e^{-\alpha|\tau|}).$$

10.12. Определить дисперсию $D_\eta(t, \tau)$ процесса

$$\eta(t) = \int_t^{t+\tau} \lambda(x)\,dx$$

при $t \to \infty$. Здесь $\lambda(t)$ — случайный процесс, заданный уравнением (10.49).

Ответ: $D_\eta(t, \tau)|_{t\to\infty} = \frac{N_\lambda}{2\alpha^3}[\alpha|\tau| - (1-e^{-\alpha|\tau|})]$.

10.13. Пусть случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на входе и выходе линейной системы с импульсной характеристикой $h(t)$ связаны соотношением

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau,$$

где функция $h(t)$ абсолютно интегрируема на положительной полуоси.

Доказать, что

$$R_{\xi\eta}(t,\ t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-\tau)\,R_{\xi}(t,\ \tau)\,d\tau,$$

где $R_{\xi\eta}(t,\ t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$; $R_{\xi}(t,t_1)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$.

Предполагая, что процесс $\xi(t)$ стационарен, доказать, что функция $R_{\xi\eta}(t,\ t_1)$ зависит только от разности аргументов, и выразить взаимную спектральную плотность $S_{\xi\eta}(\omega)$ процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ через спектральную плотность $S_{\xi}(\omega)$ процесса $\xi(t)$.

Ответ: $S_{\xi\eta}(\omega) = S_{\xi}(\omega)\int_{0}^{\infty} h(\tau)\,e^{j\omega\tau}\,d\tau.$

10.14. Пусть $\xi(t)$ и $\xi_1(t)$ — случайные процессы и

$$\eta(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau, \quad \eta_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h_1(t-\tau)\,\xi_1(\tau)\,d\tau.$$

Доказать, что

$$R_{\eta\eta_1}(t, t_1) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^{t_1} h_1(t_1-\tau_1)\,R_{\xi\xi_1}(\tau, \tau_1)\,d\tau_1,$$

где $R_{\eta\eta_1}(t,\ t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $\eta(t)$ и $\eta_1(t)$; $R_{\xi\xi_1}(t,\ t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $\xi(t)$ и $\xi_1(t)$.

10.15. На конденсатор емкостью C начиная с момента времени $t = 0$ воздействует флуктуационный ток $i(t)$, представляющий собой белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_i = 0$ и корреляционной функцией

$$R_i(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau).$$

Найти дисперсию $D_\eta(t)$ напряжения $\eta(t)$ на конденсаторе (рис. 10.14).

Ответ: $D_\eta(t) = \dfrac{N_0}{2C^2}\,t.$

10.16. Решить задачу 10.15 для случая, когда корреляционная функция тока $i(t)$ имеет вид $R_i(\tau) = D_i e^{-\beta|\tau|}$.

Ответ [44]: $D_\eta(t) = \dfrac{2D_i}{\beta C^2}\left[t - \dfrac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)\right].$

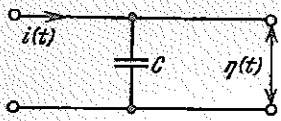


Рис. 10.14. Воздействие случайного тока на емкость

10.17. На вход дифференцирующей цепочки (рис. 10.15) воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой ограниченный по частоте белый шум, спектральная плотность которого

$$S_\xi(\omega)=\begin{cases} N_0, & 0<\omega\leqslant\omega_1,\\ 0, & \omega<0,\ \omega>\omega_1.\end{cases}$$

Найти дисперию D_η напряжения $\eta(t)$ на выходе цепочки.

Ответ: $D_\eta=\dfrac{N_0}{\pi}\left(\omega_1-\dfrac{1}{RC}\operatorname{arctg}\omega_1 RC\right)$.

10.18. На вход схемы RC (рис. 10.16) воздействует ограниченное по полосе случайное напряжение $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega)=\begin{cases} N_0,\ \omega_0-\Delta\omega/2\leqslant\omega\leqslant\omega_0+\Delta\omega/2,\\ 0 \text{ для всех других } \omega.\end{cases}$$

Найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе.

Ответ:

$$S_\eta(\omega)=N_0\frac{R_1^2+(\omega R_1R_2C)^2}{(R_1+R_2)^2+(\omega R_1R_2C)^2},\quad \omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\leqslant\omega\leqslant\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}.$$

10.19. На вход пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 10.5) поступает стационарное случайное напряжения $\xi(t)$ с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau)=D_\xi e^{-\alpha|\tau|}.$$

Определить математическое ожидание m_η, спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ и дисперсию D_η напряжения $\eta(t)$ на выходе фильтра.

Ответ:

$$m_\eta=m_\xi,\ S_\eta(\omega)=D_\xi\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\frac{1+(\omega T_1)^2}{1+(\omega T)^2};\ D_\eta=D_\xi\frac{T+T_1^2\alpha}{T(1+\alpha T)}.$$

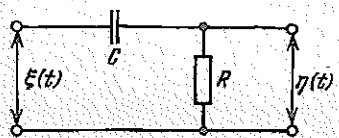


Рис. 10.15. Дифференцирующая цепочка RC

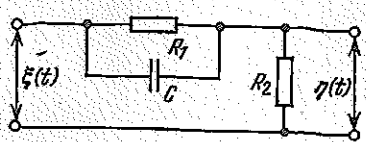


Рис. 10.16. Схема RC

10.20. Напряжение на входе фильтра, изображенного на рис. 10.1, представляет собой случайный стационарный процесс. Определить отношение дисперсии D_η выходного напряжения $\eta(t)$ к дисперсии D_ξ входного напряжения $\xi(t)$, если спектральная плотность входного процесса равна: 1) $S_\xi(\omega) = S_0 e^{-\beta\omega^2}$; 2) $S_\xi(\omega) = S_0 e^{-\beta|\omega|}$. Здесь $S_0 > 0$, $\beta > 0$ — постоянные детерминированные величины.

Ответ:

$$1)\ \frac{D_\eta}{D_\xi} = 2\alpha\sqrt{\pi\beta}\left[1 - \Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{2}}\right)\right],$$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC},\quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx;$$

$$2)\ \frac{D_\eta}{D_\xi} = \alpha\beta\left[\sin\alpha\beta\int_{-\infty}^{\alpha\beta}\frac{\cos x}{x}\,dx - \cos\alpha\beta\int_{-\infty}^{\alpha\beta}\frac{\sin x}{x}\,dx\right].$$

10.21. Напряжение $\xi(t)$ на входе RC-фильтра, изображенного на рис. 10.16, представляет собой случайный стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$, дисперсию D_η и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного напряжения $\eta(t)$. Как следует выбрать параметры R и C, чтобы отношение дисперсии выходного процесса $\eta(t)$ к дисперсии входного процесса $\xi(t)$ было меньше заданного числа δ?

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha D_\xi}{\beta^2-\alpha^2}\left[\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}\right], & \alpha \neq \beta, \\ \dfrac{1}{2} D_\xi e^{-\beta|\tau|}(1+\beta|\tau|), & \alpha = \beta; \end{cases}$$

$$D_\eta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} D_\xi;\quad S_\eta(\omega) = \frac{2\alpha^2\beta D_\xi}{(\alpha^2+\omega^2)(\beta^2+\omega^2)},\quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Для того, чтобы отношение дисперсий было меньше δ, должно выполняться неравенство $RC \leqslant \delta/\beta(1-\delta)$.

10.22. На вход двух параллельных цепочек RC (рис. 10.17) действует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (10.20).

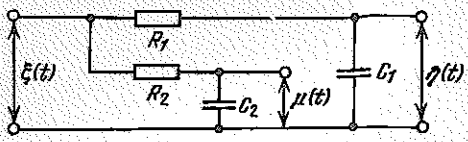


Рис. 10.17. Две параллельные цепочки RC

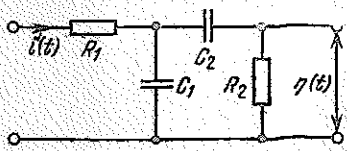


Рис. 10.18. Воздействие случайного тока на интегрально-дифференцирующую схему

Найти взаимную корреляционную функцию для выходных напряжений $\eta(t)$ и $\mu(t)$.

Ответ:

$$R_{\eta\mu}(t_1, t_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 N_0}{2(\alpha_1+\alpha_2)} \left[e^{-\alpha_2 | t_2 - t_1 |} - e^{-\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2}\right];$$

$$\alpha_1 = 1/R_1C_1, \quad \alpha_2 = 1/R_2C_2.$$

10.23. На схему, изображенную на рис. 10.18, действует флуктуационный ток $i(t)$ в виде шума с нулевым математическим ожиданием $m_i = 0$ и корреляционной функцией

$$R_i(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau).$$

Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного напряжения $\eta(t)$ в стационарном режиме.

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \beta^2 \frac{N_0}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \quad S_\eta(\omega) = \beta^2 \frac{N_0}{2} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2},$$

где

$$\beta = 1/R_1C_1, \quad \alpha = (C_1 + C_2)/R_1C_1C_2.$$

10.24. К схеме, изображенной на рис. 10.19, приложено случайное напряжение $\xi(t)$ в виде белого шума с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией (10.20).

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного напряжения $\eta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \frac{\mu^2}{\alpha\lambda} \frac{N_0}{8} \left[(\alpha+\lambda) e^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}|\tau|} - (\alpha-\lambda) e^{-\frac{\alpha-\lambda}{2}|\tau|}\right];$$

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{\mu^2\omega^2}{\omega^4 + (\alpha^2 - 2\gamma)\omega^2 + \gamma^2},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{T_1}\left(\frac{T_1}{T_2} + \beta + 1\right), \quad \beta = \frac{R_1}{R_2}, \quad \gamma = \frac{1}{T_1 T_2},$$

$$\mu = \frac{1}{T_1}, \quad T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad \lambda = \alpha^2 - 4\gamma.$$

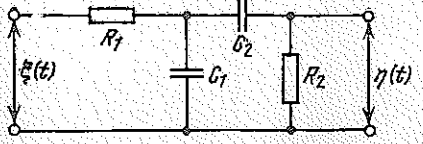


Рис. 10.19. Воздействие случайного напряжения на интегрально-дифференцирующую схему

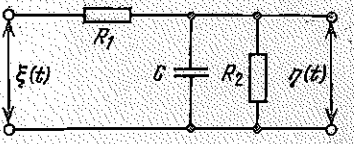


Рис. 10.20. Интегрирующая схема

10.25. На схему, представленную на рис. 10.20, действует флуктуационное напряжение $\xi(t)$ в виде белого шума с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией (10.20).

Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного напряжения $\eta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \frac{\mu^2}{\alpha}\frac{N_0}{4}e^{-\alpha|\tau|};\quad S_\eta(\omega) = \mu^2\frac{N_0}{2}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2},$$

где

$$\mu = \frac{1}{T},\quad T = R_1 C,\quad \alpha = \frac{1}{T}(\beta+1),\quad \beta = \frac{R_1}{R_2}.$$

10.26. Найти дисперсию D_i входного тока $i(t)$ в линейной цепи, изображенной на рис. 10.21, при условии, что напряжение $\eta(t)$ на выходе является случайным процессом, спектральная плотность которого имеет вид

$$S_\eta(\omega) = \begin{cases} N_0 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1, \\ 0 & \text{при } \omega < 0,\ \omega > \omega_1. \end{cases}$$

Ответ: $D_i = \dfrac{\omega_1 N_0}{6\pi R^2}(6\pi + \omega_1^2 R^2 C^2)$.

10.27. На вход цепочки RC (рис. 10.22) воздействует стационарное случайное напряжение $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = 4\alpha/(4\alpha^2 + \omega^2).$$

Определить спектральные плотности $S_\eta(\omega)$ и $S_\mu(\omega)$ выходных напряжений $\eta(t)$ и $\mu(t)$ и их взаимную спектральную плотность $S_{\eta\mu}(\omega)$.

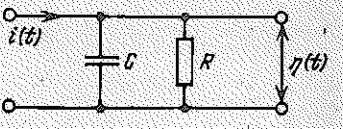


Рис. 10.21. Воздействие случайного тока на параллельную цепочку RC

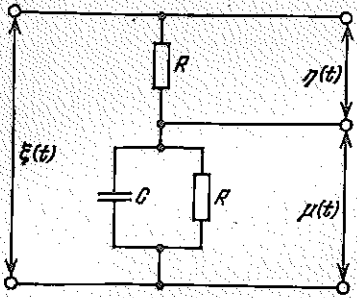
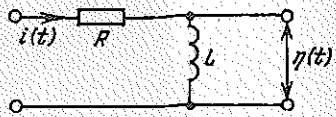


Рис. 10.22. Воздействие случайного напряжения на схему RC

Рис. 10.23. Последовательная цепочка RL



Ответ [35]:

$$S_\eta(\omega) = \frac{4\alpha'(\beta^2+\omega^2)}{(4\alpha^2+\omega^2)(4\beta^2+\omega^2)},\quad S_\mu(\omega) = \frac{4\alpha\beta^2}{(4\alpha^2+\omega^2)(4\beta^2+\omega^2)},$$

$$S_{\eta\mu}(\omega) = \frac{4\alpha\beta(\beta+j\omega)}{(4\alpha^2+\omega^2)(4\beta^2+\omega^2)},\quad \beta = \frac{1}{RC}.$$

10.28. На последовательную цепочку RL (рис. 10.23) действует флуктуационный ток $i(t)$, имеющий равномерную спектральную плотность $S_i(\omega) = N_0/2$ в области частот — $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$.

Найти дисперсию D_η напряжения $\eta(t)$ на индуктивности L.

Ответ: $D_\eta = \dfrac{(\omega_1 L)^2}{3}\dfrac{N_0\omega_1}{2\pi}$.

10.29. На последовательную цепочку RL (рис. 10.24) действует флуктуационный ток $i(t)$ с корреляционной функцией

$$R_i(\tau) = D_i e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти дисперсию D_η напряжения $\eta(t)$ на индуктивности L.

Ответ: $D_\eta = 2\alpha^2 L^2 D_i$.

10.30. Напряжение $\xi(t)$ на входе фильтра, изображенного на рис. 10.8, представляет собой случайный стационарный процесс с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}.$$

Фильтр включают в момент времени $t = 0$.

Определить математическое ожидание $m_\eta(t)$ и дисперсию $D_\eta(t)$ выходного напряжения $\eta(t)$ и найти их значение при $t \to \infty$.

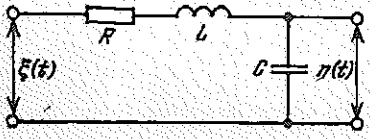


Рис. 10.24. Последовательная цепь RLC

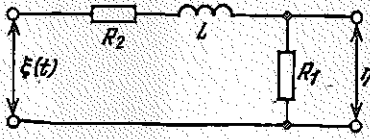


Рис. 10.25. Схема RL

Ответ:

$$m_\eta(t) = m_\xi\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right];$$

$$D_\eta(t) = \begin{cases} D_\xi \dfrac{R}{\alpha L + R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\left(\dfrac{\alpha L + R}{\alpha L - R} e^{-\frac{R}{L}t} - \dfrac{2R}{\alpha L - R} e^{-\alpha t}\right)\right], & \alpha \neq \dfrac{R}{L}, \\ D_\xi \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(1 + 2\dfrac{R}{L}\right) e^{-2\frac{R}{L}t}\right], & \alpha = \dfrac{R}{L}; \end{cases}$$

$$m_\eta(t)|_{t\to\infty} = m_\xi; \quad D_\eta(t)|_{t\to\infty} = \frac{R}{\alpha L + R} D_\xi.$$

10.31. Напряжение $\xi(t)$ на входе фильтра (рис. 10.24) представляет собой белый шум, спектральная плотность которого равна $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе. Как следует выбрать параметры фильтра, чтобы дисперсия D_η выходного напряжения не превышала заданного значения D?

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \begin{cases} \dfrac{N_0\omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \dfrac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right) \\ \qquad \text{при } \omega_0 > \alpha \text{ (т. е. при } R < 2\sqrt{L/C}), \\ \dfrac{N_0\omega_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|) \\ \qquad \text{при } \omega_0 = \alpha \text{ (т. е. при } R = 2\sqrt{L/C}), \\ \dfrac{N_0\omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,\tau + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}\operatorname{sh}\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,|\tau|\right) \\ \qquad \text{при } \omega_0 < \alpha \text{ (т. е. при } R > 2\sqrt{L}\ ). \end{cases}$$

Здесь

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \qquad \alpha = R/2L, \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0.$$

Для того, чтобы дисперсия D_η выходного напряжения не превышала заданного значения D, должно выполняться неравенство $RC \geqslant N_0/2D$.

10.32. На вход цепи, изображенной на рис. 10.25, воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой белый шум со спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Найти спектральную плотность, корреляционную функцию и среднее квадратическое значение $\sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$ выходного напряжения $\eta(t)$.

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = \frac{\alpha^2 N_0}{1+(\omega T)^2}, \quad 0 \leqslant \omega < \infty,$$

$$R_\eta(\tau) = \frac{\alpha^2 N_0}{2T} e^{-\frac{1}{T}|\tau|}, \quad \sigma_\eta = \alpha \sqrt{\frac{N_0}{2T}},$$

$$\alpha = R_1/(R_1 + R_2), \qquad T = L/(R_1 + R_2).$$

10.33. Напряжение $\xi(t)$ на входе фильтра, изображенного на рис. 10.26, представляет собой белый шум, спектральная плотность которого $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе фильтра. Как следует выбрать параметры фильтра, чтобы дисперсия D_η напряжения на выходе не превышала заданного значения D?

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \begin{cases} N_0 \beta e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau - \dfrac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right) & \text{при } \omega_0 > \beta, \\ N_0 \beta e^{-\beta|\tau|}(1-\beta|\tau|) & \text{при } \omega_0 = \beta, \\ N_0 \beta e^{-\beta|\tau|}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,\tau - \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\operatorname{sh}\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,|\tau|\right) & \text{при } \omega_0 < \beta. \end{cases}$$

Здесь

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \beta = 1/2RC, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > 0.$$

Для того, чтобы дисперсия D_η выходного напряжения не превышала заданного значения D, должно выполняться неравенство $RC \geqslant N_0/2D$.

10.34. На высокодобротный колебательный контур, составленный из параллельно соединенных конденсатора емкостью C, резистора сопротивлением R и катушки с индуктивностью L (рис. 10.27),

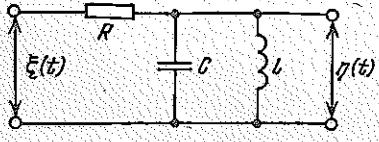


Рис. 10.26. Фильтр *RLC*

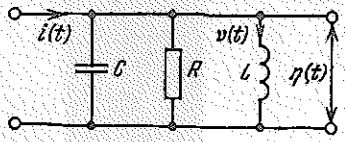
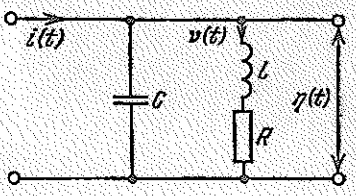


Рис. 10.27. Колебательный контур

Рис. 10.28. Колебательный контур



воздействует случайный ток $i(t)$, представляющий собой белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_i = 0$ и спектральной плотностью $S_i(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Определить корреляционные функции $R_\nu(\tau)$, $R_\eta(\tau)$ и спектральные плотности $S_\nu(\omega)$, $S_\eta(\omega)$ тока $\nu(t)$ в индуктивной ветви и напряжения $\eta(t)$ на контуре.

Ответ [44]:

$$R_\nu(\tau) = N_0 \beta d^2 e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

$$R_\eta(\tau) = N_0 \beta R^2 e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau - \frac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

$$S_\nu(\omega) = \frac{N_0 R^2}{L^2}\,\frac{4\beta^2}{4\beta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

$$S_\eta(\omega) = N_0 R^2\,\frac{4\beta^2\omega^2}{4\beta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad d = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > 0.$$

10.35. Применительно к условиям задачи 10.34 определить взаимную корреляционную функцию $R_{i\nu}(\tau)$ для входного $i(t)$ и выходного $\nu(t)$ токов и взаимную корреляционную функцию $R_{i\eta}(\tau)$ для входного тока и выходного напряжения $\eta(t)$.

Ответ [44]:

$$R_{i\nu}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{N_0\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\beta\tau}\sin\omega_1\tau, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

$$R_{i\eta}(\tau) = \begin{cases} 2N_0\beta R e^{-\beta\tau}\left(\cos\omega_1\tau - \dfrac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

10.36. На высокодобротный колебательный контур, составленный из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и сопротивлением R (рис. 10.28), воз-

действует случайный ток $i(t)$, представляющий собой белый шум со спектральной плотностью $S_i(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Найти корреляционные функции $R_\nu(\tau)$, $R_\eta(\tau)$ и спектральные плотности $S_\nu(\omega)$, $S_\eta(\omega)$ тока $\nu(t)$ в индуктивной ветви контура и выходного напряжения $\eta(t)$.

Ответ:

$$R_\nu(\tau) = N_0 \alpha Q^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

$$R_\eta(\tau) = N_0 \alpha Q^2 \rho^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau - \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

$$S_\nu(\omega) = \frac{N_0}{R^2C^2}\,\frac{4\alpha^2}{4\alpha^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0 L^2}{R^2C^2}\,\frac{4\alpha^2\omega^2}{4\alpha^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Здесь

$$\alpha = R/2L,\ \omega_0 = 1/\sqrt{LC},\quad Q = \omega_0 L/R = \rho/R,\ \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0.$$

10.37. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$ воздействует на линейный фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = (1 - e^{-j\omega T})^n.$$

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ: $S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega)\left(2\sin\frac{\omega T}{2}\right)^{2n}$.

10.38. На колебательный контур с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0\,\frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

воздействует случайный процесс $x(t) = s(t) + n(t)$, где

$$s(t) = [1(t) - 1(t - T)]\,\xi(t)$$

представляет собой полезный сигнал в виде отрезка (импульса) длительностью T стационарного квазигармонического шума

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau;$$

$n(t)$ — стационарный белый шум с корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau).$$

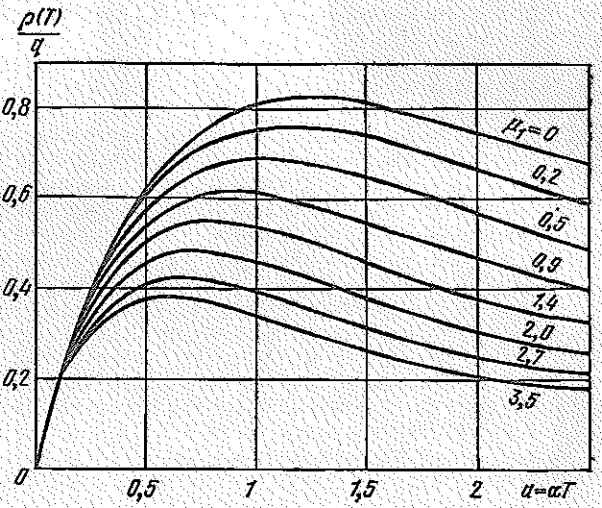


Рис. 10.29. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура при экспоненциальной корреляционной функции входных квазигармонических флуктуаций

Определить корреляционную функцию $R_\eta(t, \tau)$ процесса $\eta(t) = \eta_s(t) + \eta_n(t)$ на выходе контура и отношение сигнал/шум в конце импульса

$$\rho(T) = D_{\eta_s}(T)/D_{\eta_n},$$

где $D_{\eta_s}(t)$ — дисперсия составляющей $\eta_s(t)$ выходного случайного процесса $\eta(t)$, обусловленная воздействием колебания $s(t)$; D_{η_n} — дисперсия выходного шума $\eta_n(t)$.

Ответ [65]:

$$R_\eta(t, \tau) = R_{\eta_s}(t, \tau) + R_{\eta_n}(\tau),$$

$$R_{\eta_s}(t, \tau) = \frac{\alpha D_\xi \mathcal{K}_0^2}{\alpha^2 - \beta^2}[(\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}) +$$

$$+ (\alpha + \beta) e^{-\alpha\tau - 2\alpha t} - \alpha(e^{-\alpha\tau} + e^{-\beta\tau}) e^{-(\alpha+\beta)t}] \cos\omega_0\tau, \quad t \geqslant 0,$$

$$R_{\eta_n}(\tau) = \frac{\alpha N_0 \mathcal{K}_0^2}{2} e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau,$$

$$\rho(T) = 2q \frac{(1-\mu_1) - 2e^{-a(1+\mu_1)} + (1+\mu_1) e^{-2a}}{a(1-\mu_1)},$$

$$q = D_\xi T/N_0, \quad a = \alpha T, \quad \mu_1 = \beta/\alpha.$$

График функции $\rho(T)/q = f(a, \mu_1)$ дан на рис. 10.29.

10.39. Решить задачу 10.38 при условии, что

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\gamma^2\tau^2} \cos\omega_0\tau.$$

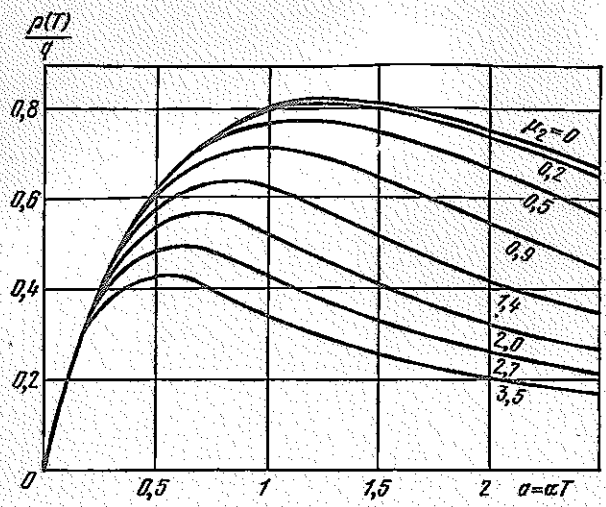


Рис. 10.30. Отношение сигнал/шум на выходе контура при гауссовой корреляционной функции входных квазигармонических флуктуаций

Ответ [65]:

$$R_{\eta_\rho}(t,\tau)=\frac{\alpha D_\xi \mathcal{H}_0^2}{2\gamma}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2/4\gamma^2}\left\{\Phi\left(\frac{\alpha+2\gamma^2 t}{\gamma\sqrt{2}}\right)-\right.$$

$$-\Phi\left(\frac{\alpha-2\gamma^2|\tau|}{\gamma\sqrt{2}}\right)+\left[\Phi\left(\frac{\alpha-2\gamma^2 t}{\gamma\sqrt{2}}\right)+\Phi\left(\frac{\alpha-2\gamma^2 t-2\gamma^2\tau}{\gamma\sqrt{2}}\right)-\right.$$

$$\left.-2\Phi\left(\frac{\alpha}{\gamma\sqrt{2}}\right)\right]e^{-2\alpha t}+\left[\Phi\left(\frac{\alpha+2\gamma^2 t+2\gamma^2\tau}{\gamma\sqrt{2}}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\Phi\left(\frac{\alpha+2\gamma^2|\tau|}{\gamma\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\alpha|\tau|}\right\}e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau,\quad t\geqslant 0,$$

$$\rho(T)=2q\frac{\sqrt{\pi}}{a\mu_2}e^{1/4\mu_2}\left\{\Phi\left(\frac{1+2a\mu_2^2}{\mu_2\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{1}{\mu_2\sqrt{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\Phi\left(\frac{1-2a\mu_2^2}{\mu_2\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{1}{\mu_2\sqrt{2}}\right)\right]e^{-2a}\right\},$$

$$q=D_\xi T/N_0,\qquad a=\alpha T,\qquad \mu_2=\gamma/\alpha.$$

Графики функции $\rho(T)/q$ приведены на рис. 10.30.

10.40. Решить задачу 10.38 при условии, что

$$R_\xi(\tau)=D_\xi\frac{\sin\delta\tau}{\delta\tau}\cos\omega_0\tau.$$

Ответ [65]:

$$R_{\eta_3}(t,\tau)=\frac{\alpha D_\xi \mathcal{K}_0^2}{2}\left\{\int_{-t}^{|\tau|} e^{\alpha x}\frac{\sin\delta x}{\delta x}dx-\right.$$

$$-\left[\int_0^t e^{\alpha x}\frac{\sin\delta x}{\delta x}dx+\int_0^{t+\tau} e^{\alpha x}\frac{\sin\delta x}{\delta x}dx\right]e^{-2\alpha t}+$$

$$\left.+e^{2\alpha|\tau|}\int_{-t-\tau}^{-|\tau|} e^{\alpha x}\frac{\sin\delta x}{\delta x}dx\right\}e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau,\quad t\geqslant 0,$$

$$\rho(T)=\frac{2q}{a}\left[\int_0^a e^{-x}\frac{\sin\mu_3 x}{\mu_3 x}dx-e^{-2a}\int_0^a e^{x}\frac{\sin\mu_3 x}{\mu_3 x}dx\right],$$

$$q=D_\xi T/N_0,\quad a=\alpha T,\quad \mu_3=\delta/\alpha.$$

График функции $\rho(T)/q=f(a,\mu_3)$ приведен на рис. 10.31.

10.41. На вход линейного нешумящего четырехполюсника с комплексной частотной характеристикой $\mathcal{K}(j\omega)$, модуль которой определяется соотношением

$$|\mathcal{K}(j\omega)|=\begin{cases}1 \text{ при } \omega_0-\Delta\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_0+\Delta\omega_2,\\ 0 \text{ при других } \omega,\end{cases}$$

воздействует собственный шум $\xi(t)$ параллельного колебательного контура с резонансной частотой ω_0 (рис. 10.32).

Вычислить дисперсию D_η напряжения $\eta(t)$ на выходе четырехполюсника в зависимости от его полосы пропускания $\Delta\omega=\Delta\omega_1+\Delta\omega_2$.

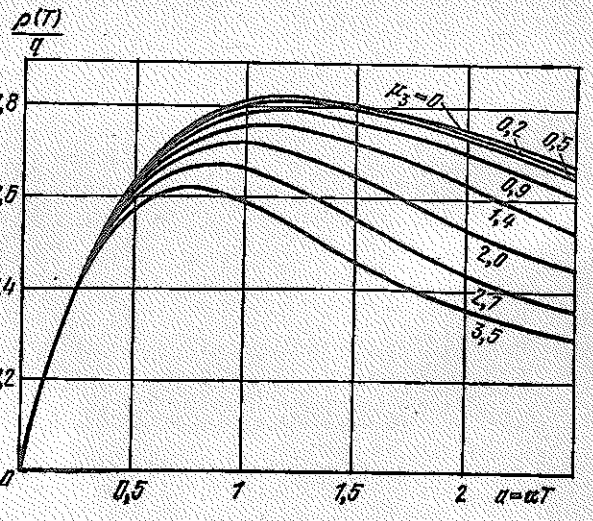


Рис. 10.31. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура при прямоугольной спектральной плотности входных квазигармонических флуктуаций

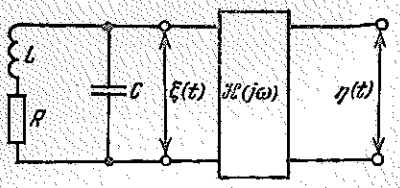


Рис 10.32. Линейный четырехполюсник

Ответ: Для случая апериодических колебаний в контуре ($\omega_0^2 - \alpha^2 < 0$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\alpha = R/2L$, добротность контура $Q = \omega_0 L/R < 1/2$):

$$D_\eta = 4kTR\frac{\omega_0\sqrt{2}\,Q^3}{2\pi\sqrt{1-4Q^2}}\left[\frac{1}{A}\left(\operatorname{arctg}\frac{C}{A} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arctg}\frac{D}{A}\right) - \frac{1}{B}\left(\operatorname{arctg}\frac{C}{B} - \operatorname{arctg}\frac{D}{B}\right)\right],$$

$$A = \sqrt{1-2Q^2-\sqrt{1-4Q^2}},$$

$$B = \sqrt{1-2Q^2+\sqrt{1-4Q^2}},$$

$$C = (1+\delta_2)\,Q\sqrt{2}, \quad D = (1-\delta_1)\,Q\sqrt{2}, \quad \delta_1 = \Delta\omega_1/\omega_0,$$

$$\delta_2 = \Delta\omega_2/\omega_0.$$

Для случая периодических колебаний в контуре ($\omega_0^2 - \alpha^2 > 0$, при этом $Q > 1/2$):

$$D_\eta = \frac{kTR\omega_0 Q}{\pi}\left\{\frac{1}{2\sqrt{4Q^2-1}} \times \right.$$

$$\times\left[\ln\frac{2Q(1+\delta_2)^2+2(1+\delta_2)\sqrt{4Q^2-1}+2Q}{2Q(1+\delta_2)^2-2(1+\delta_2)\sqrt{4Q^2-1}+2Q} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{2Q(1-\delta_1)^2+2(1-\delta_1)\sqrt{4Q^2-1}+2Q}{2Q(1-\delta_1)^2-2(1-\delta_1)\sqrt{4Q^2-1}+2Q}\right] +$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{Q[(1+\delta_2)^2-1]}{1+\delta_2} - \operatorname{arctg}\frac{Q[(1-\delta_1)^2-1]}{1-\delta_1}\right\}.$$

При $Q \gg 1$ последнее выражение приводится к виду

$$D_\eta = \frac{kTR\omega_0 Q}{\pi}\left[\frac{1}{2Q}\ln\frac{\delta_1 b}{\delta_2 a} + \operatorname{arctg}\frac{Q\delta_2 b}{1+\delta_2} - \right.$$

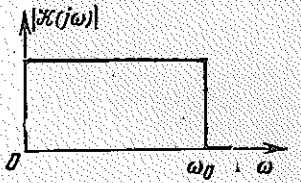
$$\left. - \operatorname{arctg}\frac{-Q\delta_1 a}{1-\delta_1}\right], \quad a = 2-\delta_1, \quad b = 2+\delta_2.$$

Если полоса пропускания четырехполюсника симметрична относительно ω_0 (т. е. если $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega/2$), то при $Q \gg 1$ имеем

$$D_\eta = \frac{D_\xi}{\pi}\left[\frac{1}{2Q}\ln\frac{4+\delta}{4-\delta} + \operatorname{arctg}\frac{Q\delta(4+\delta)}{2(2+\delta)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\frac{-Q\delta(4-\delta)}{2(2-\delta)}\right], \quad \delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Рис. 10.33. Модуль комплексной частотной характеристики фильтра нижних частот



Если к тому же $\delta = \Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, то

$$D_\eta = D_\xi \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} Q\delta.$$

Здесь $D_\xi = kT/C$ — дисперсия собственных шумов контура (см. пример 10.8).

10.42. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}$$

воздействует на фильтр нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого приведена на рис. 10.33.

Найти дисперсию D_η выходного напряжения $\eta(t)$.

Ответ: $D_\eta = D_\xi \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\alpha}$.

10.43. Линейная система имеет амплитудно-частотную характеристику, равную постоянной $\mathcal{K}_0$ в интервале $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ и нулю вне этого интервала. На вход системы подается белый шум $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе. Как следует выбрать $\Delta\omega$, чтобы дисперсия D_η выходного процесса не превышала заданного значения D?

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{\pi} \mathcal{K}_0^2 N_0 \Delta\omega \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} \cos\omega_0\tau, \quad \Delta\omega \leqslant D\pi/4\mathcal{K}_0^2 N_0.$$

10.44. Определить эффективную шумовую полосу пропускания интегрирующей цепочки RC (рис. 10.1).

Ответ: $\Delta f_э = 1/2RC$.

10.45. Фильтр состоит из двух последовательно соединенных однонаправленных линейных систем, частотные характеристики которых соответственно равны $1/(1 + j\omega T_1)$ и $1/(1 + j\omega T_2)$, где T_1 и T_2 — положительные числа.

Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра, если спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на входе фильтра

$$S_\xi(\omega) = S_0/(\alpha^2 + \omega^2).$$

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = S_0 \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{2}\left[\frac{1}{\alpha(\beta_1^2-\alpha^2)(\beta_2^2-\alpha^2)} e^{-\alpha|\tau|} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta_1(\beta_2^2-\beta_1^2)(\alpha^2-\beta_1^2)} e^{-\beta_1|\tau|} + \frac{1}{\beta_2(\alpha^2-\beta_2^2)(\beta_1^2-\beta_2^2)} e^{-\beta_2|\tau|}\right],$$

$$\beta_1 = 1/T_1,\ \beta_2 = 1/T_2,$$

$$D_\eta = S_0 \frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} \frac{\alpha+\beta_1+\beta_2}{(\alpha+\beta_1)(\alpha+\beta_2)(\beta_1+\beta_2)}.$$

10.46. Выразить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе суммирующего устройства с линией задержки (рис. 10.34) через корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ на входе.

Ответ: $R_\eta(\tau) = 2R_\xi(\tau) + R_\xi(\tau - T) + R_\xi(\tau + T)$.

10.47. На вход линии задержки, имеющей N отводов через временные интервалы θ (рис. 10.35), воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе сумматора.

Ответ [66]:

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{N} R_\xi(\tau) + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)R_\xi(\tau+i\theta) +$$

$$+ \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)R_\xi(\tau-i\theta),$$

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega)\frac{1}{N^2}\left(\frac{\sin N\frac{\theta\omega}{2}}{N\frac{\theta\omega}{2}}\right)^2.$$

График функции $S_\eta(\omega)/S_\xi(\omega) = f(\theta\omega)$ приведен на рис. 10.36.

10.48. На линейное устройство, состоящее из линии задержки на время $t_{зад} = T$ и вычитающего устройства (рис. 10.37), воз-

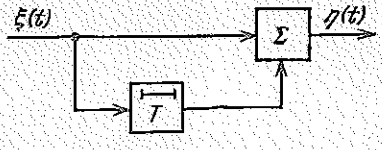


Рис. 10.34. Суммирующее устройство с линией задержки

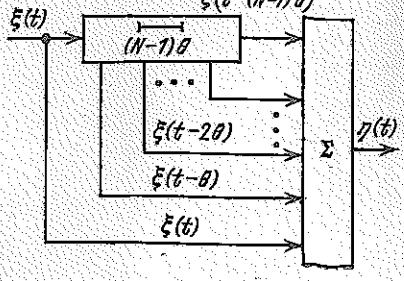


Рис. 10.35. Суммирующее устройство с многоотводной линией задержки

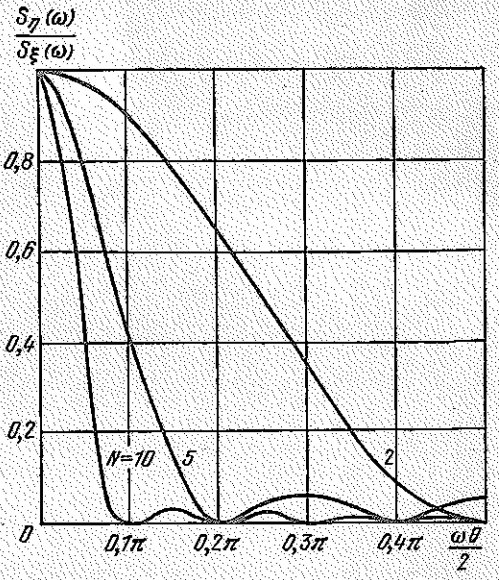


Рис. 10.36. Спектральная плотность процесса на выходе сумматора

действует случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$.

Определить математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1, t_2)$ выходного процесса

$$\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$$

и взаимную ковариационную функцию $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1) \times \eta(t_2)\}$ процессов на входе и выходе.

Ответ:

$$m_\eta(t) = m_\xi(t+T) - m_\xi(t); \quad K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1+T, t_2+T) - K_\xi(t_1, t_2+T) - K_\xi(t_1+T, t_2) + K_\xi(t_1, t_2),$$

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2+T) - K_\xi(t_1, t_2).$$

10.49. Решить задачу 10.48 при условии, что входной процесс $\xi(t)$ является стационарным с математическим ожиданием m_ξ и ковариационной функцией $K_\xi(\tau)$.

Вычислить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного стационарного случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ и взаимную спектральную плотность $S_{\xi\eta}(\omega)$ стационарно связанных случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

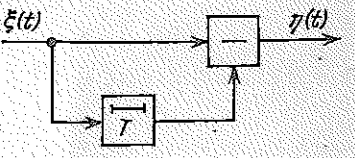


Рис. 10.37. Вычитающее устройство с линией задержки

Ответ [14]:

$$m_\eta(t) = 0, \quad K_\eta(\tau) = 2K_\xi(\tau) - K_\xi(\tau + T) - K_\xi(\tau - T),$$
$$K_{\xi\eta}(\tau) = K_\xi(\tau + T) - K_\xi(\tau),$$

$$S_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\eta(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 4\sin^2\frac{\omega T}{2}\, S_\xi(\omega),$$

$$S_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi\eta}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = (e^{j\omega T} - 1)\, S_\xi(\omega),$$

где

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau.$$

10.50. На вход фильтра, схема которого представлена на рис. 10.38, поступает случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha\tau^2}.$$

Найти дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра.

Ответ: $D_\eta = 2D_\xi(1 - e^{-\alpha T^2})$.

10.51. Найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра (рис. 10.38), если спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на его входе

$$S_\xi(\omega) = Ae^{-\alpha^2\omega^2} + B\delta\left(\omega - \frac{20\pi}{T}\right),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция; T — время задержки в линии.

Ответ: $S_\eta(\omega) = 4Ae^{-\alpha^2\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

10.52. Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра, схема которого представлена на рис. 10.38, выразив ее через корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ на входе.

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = R_\xi(\tau) - 4R_\xi(\tau - T) - 4R_\xi(\tau + T) + R_\xi(\tau - 2T) + R_\xi(\tau + 2T).$$

10.53. На вход радиотехнического устройства, состоящего из последовательно соединенных дифференцирующих устройств и

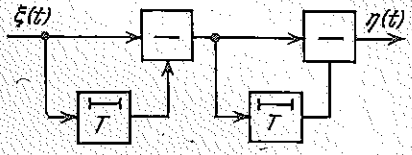
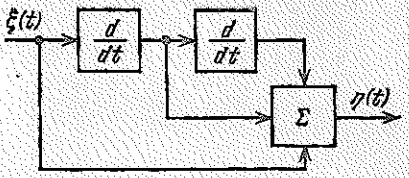


Рис. 10.38. Схема фильтра

Рис. 10.39. Последовательное соединение дифференцирующих устройств и сумматора



сумматора (рис. 10.39), воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе сумматора.

Ответ [4]:

$$R_\eta(\tau) = R_\xi(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} R_\xi(\tau) + \frac{d^4}{d\tau^4} R_\xi(\tau).$$

10.54. Вычислить одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ для напряжения $\eta(t)$ на конденсаторе емкостью C в стационарном состоянии, когда на последовательную цепочку RC (рис. 10.40, *а*) воздействует случайный телеграфный сигнал $\xi(t)$ (рис. 10.40, *б*). Сигнал $\xi(t)$ с одинаковыми вероятностями, равными 1/2, принимает лишь два значения: $+1$ и -1. Моменты перемен знака (нулей) распределены по закону Пуассона, т. е. вероятность получения n нулей в интервале $(t, t+\tau)$ равна

$$p_\tau(n, \tau) = \frac{1}{n!}(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau},$$

где λ — среднее число нулей в единицу времени.

Ответ [68]:

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\lambda T + \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda T)} (1-\eta^2)^{\lambda T - 1}, & |\eta| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при других } \eta. \end{cases} \qquad (10.50)$$

Здесь $T = RC$; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

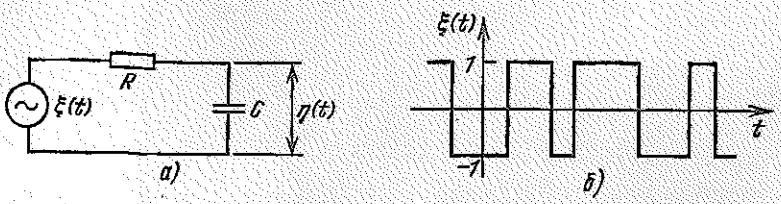
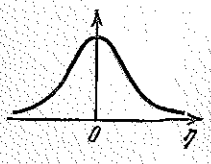
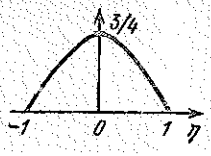
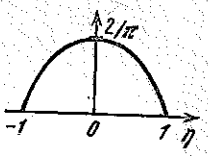
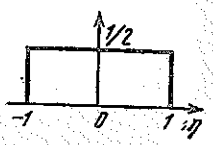
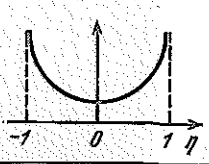


Рис. 10.40. Интегрирующая цепочка RC (*а*) и случайный телеграфный сигнал (*б*)

Таблица 10.3

Плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ при различных значениях λT

Значение параметра λT	Аналитическое выражение	График
$\lambda T \gg 1$	$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)$, $z = \eta \sqrt{2\lambda T + 1}$	
$\lambda T = 2$	$p_1(\eta) = \frac{3}{4}(1-\eta^2)$, $\lvert\eta\rvert \leqslant 1$	
$\lambda T = \frac{3}{2}$	$p_1(\eta) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\eta^2}$, $\lvert\eta\rvert \leqslant 1$	
$\lambda T = 1$	$p_1(\eta) = \frac{1}{2}$, $\lvert\eta\rvert \leqslant 1$	
$\lambda T \ll 1$	$p_1(\eta) = \lambda T (1-\eta^2)^{\lambda T - 1}$, $\lvert\eta\rvert \leqslant 1$	

10.55. Получить из (10.50) асимптотические выражения и построить графики плотностей распределения вероятностей $p_1(\eta)$ для следующих частных случаев: 1) $\lambda T \gg 1$, 2) $\lambda T = 2$, 3) $\lambda T = 3/2$, 4) $\lambda T = 1$, 5) $\lambda T \ll 1$.

Ответ приведен в табл. 10.3 [68].

11. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием называется узкополосным, если ширина полосы Δf той области частот, где спектральная плотность $S_\xi(f)$ практически отлична от нуля, мала по сравнению с некоторой центральной частотой f_0 этой области (рис. 11.1), т. е.

$$S_\xi(f) \neq 0 \quad \text{при } f_0 - \Delta f/2 < f < f_0 + \Delta f/2, \ \Delta f \ll f_0, \tag{11.1}$$

где $S_\xi(f)$ — односторонняя спектральная плотность; Δf — ширина полосы, которая может быть определена по-разному.

Если односторонняя спектральная плотность $S_\xi(f)$ симметрична относительно некоторой частоты f_0, то естественно за f_0 принять это значение частоты. В других случаях f_0 можно выбрать более или менее произвольно. Часто в качестве f_0 берут «математическое ожидание» нормированной спектральной плотности:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \left(\int_0^\infty S_\xi(f)\, df \right)^{-1} \int_0^\infty f S_\xi(f)\, df. \tag{11.2}$$

Корреляционная функция узкополосного случайного процесса всегда может быть представлена в виде [1]

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 [r_c(\tau) \cos \omega_0 \tau + r_s(\tau) \sin \omega_0 \tau] = \sigma_\xi^2 r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \gamma(\tau)], \tag{11.3}$$

где

$$r(\tau) = \sqrt{r_c^2(\tau) + r_s^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg} \gamma(\tau) = -r_s(\tau)/r_c(\tau), \tag{11.4}$$

$$\sigma_\xi^2 r_c(\tau) = \int_{-f_0}^\infty S_\xi(f_0 + \nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu,$$

$$\sigma_\xi^2 r_s(\tau) = \int_{-f_0}^\infty S_\xi(f_0 + \nu) \sin 2\pi\nu\tau d\nu, \tag{11.5}$$

причем

$$r_c(0) = 1, \ r_s(0) = 1, \ \gamma(0) = 1; \tag{11.6}$$

σ_ξ^2 — дисперсия узкополосного процесса $\xi(t)$.

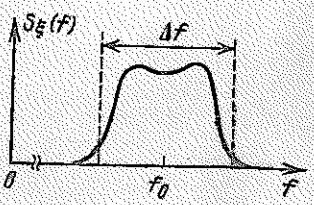


Рис. 11.1. Спектральная плотность узкополосного процесса

В том частном случае, когда спектральная плотность $S_\xi(f)$ симметрична относительно центральной частоты f_0, корреляционная функция узкополосного процесса имеет вид

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau)\cos\omega_0\tau \simeq \tau\cos\omega_0\tau \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f_0+\nu)\cos 2\pi\nu\tau d\nu, \qquad (11.7)$$

так как

$$r_s(\tau) = 0, \quad \gamma(\tau) = 0. \qquad (11.8)$$

Поскольку в правые части формул (11.5) и (11.7) входит спектральная плотность процесса $\xi(t)$, смещенная в область нижних частот (иначе — низкочастотный спектр), то функции $r_c(\tau)$, $r_s(\tau)$, как и $r(\tau)$, $\gamma(\tau)$, являются медленно изменяющимися по сравнению с $\cos\omega_0\tau$.

Реализации узкополосного процесса $\xi(t)$ имеют вид модулированного гармонического колебания. Поэтому часто используют представление узкополосного процесса в следующем виде:

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad A(t) \geqslant 0, \quad -\pi \leqslant \varphi(t) \leqslant \pi, \qquad (11.9)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно изменяющиеся по сравнению с $\cos\omega_0\tau$ функции времени, называемые соответственно огибающей и фазой узкополосного процесса $\xi(t)$.

Можно также ввести понятие мгновенной частоты, определив ее равенством

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(t), \qquad (11.10)$$

где точкой сверху обозначена производная по времени.

Представление узкополосного процесса (11.9) можно записать иначе:

$$\xi(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t, \qquad (11.11)$$

где

$$A_c(t) = A(t)\cos\varphi(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\varphi(t). \qquad (11.12)$$

Отсюда следует, что

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg}[A_s(t)/A_c(t)], \qquad (11.13)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\dot{A}_s(t)A_c(t) - \dot{A}_c(t)A_s(t)}{A_c^2(t) + A_s^2(t)}.$$

Формулы (11.9) и (11.11) позволяют интерпретировать огибающую $A(t)$ как длину вектора, проекции которого на оси прямоугольной системы координат равны $A_s(t)$ и $A_c(t)$. Фазовый угол между осью абсцисс и направлением вектора равен $\varphi(t)$ (рис. 11.2), причем возможные значения $\varphi(t)$ ограничены интервалом $(-\pi, \pi)$. Длина вектора $A(t)$ и его фазовый угол $\varphi(t)$ изменяются во времени случайным образом, так что конец вектора совершает случайные блуждания на плоскости. При такой интерпретации про-

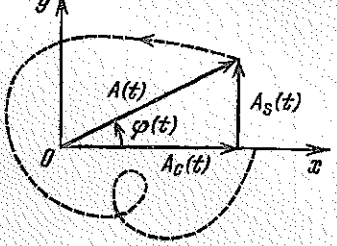


Рис. 11.2. Геометрическое представление узкополосного процесса

екции $A_s(t)$ и $A_c(t)$ естественно назвать квадратурными компонентами процесса $\xi(t)$.

Исходя из различных математических определений огибающей $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$, можно показать, что если исходный процесс $\xi(t)$ гауссовский, то квадратурные компоненты $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются совместно нормальными. Если в дополнение к этому процесс $\xi(t)$ стационарен, имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию (11.3), то процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются стационарными и стационарно связанными. Их математические ожидания равны нулю:

$$M\{A_c(t)\} = M\{A_s(t)\} = 0, \tag{11.14}$$

а корреляционные и взаимные корреляционные функции определяются формулами

$$R_c(\tau) = M\{A_c(t)\,A_c(t+\tau)\} = R_s(\tau) = M\{A_s(t)\,A_s(t+\tau)\} = \sigma_\xi^2 r_c(\tau), \tag{11.15}$$

$$R_{cs}(\tau) = M\{A_c(t)\,A_s(t+\tau)\} = -R_{sc}(\tau) = -M\{A_s(t)\,A_c(t+\tau)\} = \sigma_\xi^2 r_s(\tau).$$

Отметим, что согласно (11.6) значения квадратурных компонент $A_c(t)$ и $A_s(t)$, взятые в один и тот же момент времени, всегда не коррелированы и, следовательно, для гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ независимы. Дисперсии компонент, как следует из первой формулы (11.15), одинаковы и равны дисперсии процесса $\xi(t)$

$$\sigma_c^2 = M\{A_c^2(t)\} = \sigma_s^2 = M\{A_s^2(t)\} = \sigma_\xi^2. \tag{11.16}$$

Если спектральная плотность $S_\xi(f)$ гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ симметрична относительно частоты f_0, то совместно нормальные процессы $A_c(t_1)$ и $A_s(t_2)$ согласно (11.8) независимы не только в совпадающие (при $t_1 = t_2$), но и в разные (при $t_1 \neq t_2$) моменты времени, так как

$$R_{cs}(\tau) = R_{sc}(\tau) = 0. \tag{11.17}$$

В дальнейшем принято, что исходный узкополосный случайный процесс $\xi(t)$ является гауссовским стационарным с нулевым математическим ожиданием. При этих условиях формулы (11.14), (11.17) позволяют сравнительно просто находить различные совместные плотности вероятности огибающей $A(t)$, фазы $\varphi(t)$ и их производных. Для этого нужно предварительно записать соответствующую совместную нормальную плотность вероятности стационарно связанных процессов $A_c(t)$, $A_s(t)$ и их производных, а затем в ней по известным правилам перейти к огибающей, фазе и их производным согласно равенствам, следующим из выражений (11.13) (см. (11.26) и пример 11.1).

Если имеется сумма узкополосного гауссовского стационарного процесса (шума) $\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ с нулевым математическим ожиданием и детерминированного гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos \omega_0 t$, то можно определить огибающую, фазу и случайную частоту такой суммы при помощи соотношений

$$\eta(t) = s(t) + \xi(t) = V(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)], \qquad V(t) > 0, \quad -\pi < \psi(t) < \pi, \tag{11.18}$$

где

$$V(t)\cos\psi(t) = A_m + A_c(t), \qquad V(t)\sin\psi(t) = A_s(t), \tag{11.19}$$

т. е.

$$V(t) = \sqrt{[A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)}, \quad \operatorname{tg}\psi(t) = A_s(t)/[A_m + A_c(t)], \tag{11.20}$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{[A_m + A_c(t)]\,\dot{A}_s(t) - \dot{A}_c(t)\,A_s(t)}{[A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)}.$$

При этом остается в силе геометрическая интерпретация, аналогичная приведенной (см. рис. 11.2).

Выражения (11.20) принимают особенно простой вид при больших значениях отношения сигнал/шум $a = A_m/\sigma \gg 1$

$$V(t) \simeq A_m + A_c(t) - \frac{1}{2}\frac{A_c^2(t)}{A_m}, \quad \psi(t) \simeq \operatorname{arctg}\frac{A_s(t)}{A_m} \simeq \frac{A_s(t)}{A_m}, \tag{11.21}$$

$$\dot{\psi}(t) \simeq \dot{A}_s(t)/A_m, \quad a \gg 1.$$

По аналогии с (11.20) можно определить огибающую и фазу для суммы узкополосного гауссовского стационарного шума и нескольких детерминированных гармонических сигналов.

Различные вероятностные характеристики огибающей $V(t)$, случайной фазы $\psi(t)$ и их производных можно получить тем же путем: сначала нужно записать соответствующую совместную нормальную плотность вероятности для компонент $A_c(t)$, $A_s(t)$ и их производных, а затем перейти в выражении для нее к огибающей, фазе и их производным в соответствии с равенствами (11.19).

Найдем совместную плотность вероятности $p_4(V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi})$ огибающей $V(t)$, фазы $\psi(t)$ и их первых производных $\dot{V}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ в один и тот же момент времени для суммы (11.18) гармонического сигнала и узкополосного нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau)\cos\omega_0\tau, \quad r(0) = 1. \tag{11.22}$$

Согласно (11.7) спектральная плотность рассматриваемого узкополосного процесса $\xi(t)$ симметрична относительно частоты $f_0 = \omega_0/2\pi$. Поэтому вспомогательные нормальные стационарные процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ независимы, причем их корреляционные функции равны:

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau). \tag{11.23}$$

Известно, что производная (скорость) гауссовского стационарного процесса есть также гауссовский стационарный процесс, причем значение производной не зависит от значения самого процесса в тот же момент времени. Поэтому случайные величины $A_c(t)$, $A_s(t)$, $\dot{A}_c(t)$, $\dot{A}_s(t)$ взаимно независимы, причем каждая из них распределена нормально. Дисперсии этих случайных величин равны:

$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_\xi^2,$$

$$M\left\{\dot{A}_c^2(t)\right\} = M\left\{\dot{A}_s^2(t)\right\} = -\sigma_\xi^2 r_0'', \quad r_0'' = \left.\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} < 0. \tag{11.24}$$

На основании известного выражения нормальной плотности вероятности записываем совместную плотность вероятности

$$p(A_c, A_s, \dot{A}_c, \dot{A}_s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^4(-r_0'')}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(-r_0'')}\left[-r_0''(A_c^2+A_s^2)+(\dot{A}_c^2+\dot{A}_s^2)\right]\right\}. \tag{11.25}$$

Перейдем здесь от переменных A_c, A_s, $\dot{A}_c$, $\dot{A}_s$ к новым переменным V, $\dot{V}$, ψ, $\dot{\psi}$ при помощи соотношений, следующих из (11.19),

$$A_c = V\cos\psi - A_m, \quad A_s = V\sin\psi,$$

$$\dot{A}_c = \dot{V}\cos\psi - \dot{\psi}V\sin\psi, \quad \dot{A}_s = \dot{V}\sin\psi + \dot{\psi}V\cos\psi.$$

Нетрудно убедиться, что модуль якобиана преобразования переменных

$$\left|\frac{\partial(A_c,\ A_s,\ \dot{A}_c,\ \dot{A}_s)}{\partial(V,\ \dot{V},\ \psi,\ \dot{\psi})}\right| = V^2.$$

Поэтому получим

$$p_4(V,\ \dot{V},\ \psi,\ \dot{\psi}) = \frac{V^2}{4\pi^2\sigma_\xi^4(-r_0'')} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(-r_0'')}\left[-r_0''\left(V^2+A_m^2-2A_m V\cos\psi\right)+\dot{V}^2+V^2\dot{\psi}^2\right]\right\}. \quad (11.26)$$

Воспользовавшись свойством согласованности плотностей вероятностей путем интегрирования по «лишней» переменной, можно получить различные другие плотности вероятности. В частности, проинтегрировав (11.26) по $\dot{V}$ и $\dot{\psi}$ в пределах $-\infty$ до ∞, получим совместную плотность вероятности для огибающей и фазы в один и тот же момент времени:

$$p_2(V,\ \psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_4(V,\ \dot{V},\ \psi,\ \dot{\psi})\,d\dot{\psi}d\dot{V} =$$

$$= \frac{V}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\left(V^2+A_m^2-2A_m V\cos\psi\right)\right], \quad V\geqslant 0, \quad -\pi\leqslant\psi\leqslant\pi. \quad (11.27)$$

Отсюда находим плотности вероятности для огибающей и фазы:

$$p_V(V) = \int_{-\pi}^{\pi} p_2(V,\ \psi)\,d\psi = \frac{V}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{V^2+A_m^2}{2\sigma_\xi^2}\right) I_0\left(\frac{A_m V}{\sigma_\xi^2}\right), \quad V\geqslant 0, \quad (11.28)$$

$$p_\psi(\psi) = \int_0^{\infty} p_2(V,\ \psi)\,dV = \frac{1}{2\pi}\,e^{-a^2/2}\times$$

$$\times\left[1+\sqrt{2\pi}\,a\cos\psi\,\Phi(a\cos\psi)\,e^{a^2\cos^2\psi/2}\right], \quad -\pi\leqslant\psi\leqslant\pi. \quad (11.29)$$

Здесь $a = A_m/\sigma_\xi$ — отношение сигнал/шум, $I_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Используя формулу (11.28), можно показать, что математическое ожидание и дисперсия огибающей $V(t)$ определяются выражениями

$$m_V = M\{V(t)\} = \sigma_\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{1}{2}a^2\right) =$$

$$= \sigma_\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2}a^2\right)I_0\left(\frac{1}{4}a^2\right)+\frac{1}{2}a^2 I_1\left(\frac{1}{4}a^2\right)\right]e^{-a^2/4}, \quad (11.30)$$

$$\sigma_V^2 = 2\sigma_\xi^2\left(1+\frac{1}{2}a^2\right)-m_V^2, \quad (11.31)$$

где ${}_1F_1(\alpha;\ \beta;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; $I_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка от мнимого аргумента.

Положив в формулах (11.28) и (11.29) $A_m = 0$, получим плотности вероятности огибающей и фазы узкополосного нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с симметричной спектральной плотностью:

$$p_A(A) = (A/\sigma_\xi^2)\exp(-A^2/2\sigma_\xi^2), \quad A \geqslant 0, \tag{11.32}$$

$$p_\varphi(\varphi) = 1/2\pi, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{11.33}$$

Корреляционная функция огибающей $A(t)$ узкополосного процесса $\xi(t)$ и квадрата огибающей $A^2(t)$ соответственно равны

$$R_A(\tau) = \frac{\pi}{2}\sigma_\xi^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2(\tau) + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 r^4(\tau) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 r^6(\tau) + \ldots\right] = \sigma_A^2 r_A(\tau), \tag{11.34}$$

$$\sigma_A^2 = (2-\pi/2)\sigma_\xi^2, \quad r_A(\tau) = 0{,}915r^2(\tau) + 0{,}057r^4(\tau) + \ldots,$$

$$R_{A^2}(\tau) = 4\sigma_\xi^4 r^2(\tau). \tag{11.35}$$

Аналогичные формулы для огибающей $V(t)$ суммы детерминированного гармонического сигнала и узкополосного шума имеют вид

$$R_V(\tau) \simeq \begin{cases} \dfrac{\pi}{8}\sigma_\xi^2\left[r^2(\tau) + \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2 a^2 r(\tau)\right], & a \ll 1, \\ \sigma_\xi^2 r(\tau)\left[1 + \dfrac{1}{2a^2} r(\tau)\right], & a \gg 1, \end{cases} \tag{11.36}$$

$$R_{V^2}(\tau) = 4\sigma_\xi^4\left[r^2(\tau) + a^2 r(\tau)\right]. \tag{11.37}$$

Укажем, что в дальнейшем, при формулировке отдельных задач, предполагается, что огибающие $A(t)$ и $V(t)$ с некоторым коэффициентом пропорциональности воспроизводятся на выходе линейного амплитудного детектора огибающей, квадраты огибающих $A^2(t)$ и $V^2(t)$ — на выходе квадратичного амплитудного детектора огибающей, случайные фазы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — на выходе фазового детектора и случайные частоты $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ — на выходе частотного детектора.

2. ПРИМЕРЫ

11.1. Найти двумерную плотность вероятности огибающей $A(t)$ стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (11.3).

Решение. Значения квадратурных составляющих $A_c = A_c(t)$, $A_s = A_s(t)$, $A_{c\tau} = A_c(t+\tau)$, $A_{s\tau} = A_s(t+\tau)$ в два момента времени t и $t+\tau$ имеют совместную нормальную плотность вероятности, причем квадратурные составляющие есть стационарные и стационарно связанные процессы. Дисперсии компонент согласно (11.16) одинаковы и равны σ_ξ^2, а матрица нормированных корреляционных функций в соответствии с (11.6) и (11.15) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_c(\tau) & r_s(\tau) \\ 0 & 1 & -r_s(\tau) & r_c(\tau) \\ r_c(\tau) & -r_s(\tau) & 1 & 0 \\ r_s(\tau) & r_c(\tau) & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Записываем совместную нормальную плотность вероятности случайных величин A_c, A_s, $A_{c\tau}$, $A_{s\tau}$:

$$p(A_c, A_s, A_{c\tau}, A_{s\tau}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\xi^2)^2(1-r^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-r^2)} \times \right.$$
$$\times [A_c^2 + A_s^2 + A_{c\tau}^2 + A_{s\tau}^2 - 2r_c(A_c A_{c\tau} + A_s A_{s\tau}) -$$
$$\left. -2r_s(A_c A_{s\tau} - A_{c\tau} A_s)]\right\}, \quad (11.38)$$

где $r^2 = r^2(\tau)$ определено формулой (11.4): $r^2(\tau) = r_c^2(\tau) + r_s^2(\tau)$.

Перейдя по известным правилам в этом выражении для плотности вероятности к новым случайным величинам согласно равенствам (11.12), т. е. положив

$$A_c = A\cos\varphi, \qquad A_s = A\sin\varphi,$$
$$A_{c\tau} = A_\tau\cos\varphi_\tau, \qquad A_{s\tau} = A_\tau\sin\varphi_\tau,$$

получим

$$p_4(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{AA_\tau}{(2\pi\sigma_\xi^2)^2(1-r^2)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-r^2)}[A^2 + A_\tau^2 - 2AA_\tau(r_c\cos(\varphi_\tau-\varphi) + \right.$$
$$\left. + r_s\sin(\varphi_\tau-\varphi))]\right\} =$$
$$= \frac{AA_\tau}{(2\pi\sigma_\xi^2)^2(1-r^2)} \exp\left(-\frac{A^2+A_\tau^2}{2\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right) \exp\left[\frac{AA_\tau r\cos(\varphi_\tau-\varphi-\gamma)}{\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right], \quad (11.39)$$

где $\operatorname{tg}\gamma(\tau) = r_s(\tau)/r_c(\tau)$.

На основании свойства согласованности плотностей вероятностей эта формула позволяет получать различные одномерные и двумерные плотности вероятностей огибающей и фазы гауссовского стационарного процесса. В частности, путем интегрирования по φ_τ и φ из (11.39) находим двумерную плотность вероятности для огибающей

$$p_2(A, A_\tau) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_4(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau)\, d\varphi_\tau d\varphi.$$

При выполнении интегрирования следует воспользоваться определением функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\chi}^{\pi-\chi} e^{x\cos\psi}\, d\psi. \quad (11.40)$$

В результате получим интересующую нас плотность вероятности

$$p_2(A, A_\tau) = \frac{AA_\tau}{\sigma_\xi^2(1-r^2)} \exp\left[-\frac{A^2+A_\tau^2}{2\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right] I_0\left(\frac{AA_\tau r}{\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right). \quad (11.41)$$

На основании этой формулы можно придти к выражению (11.34) для корреляционной функции огибающей гауссовского стационарного процесса.

11.2 Вычислить плотность вероятности огибающей суммы двух детерминированных гармонических сигналов $s_1(t) = A_1\cos\omega_0 t$, $s_2(t) = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$ и гауссовского стационарного узкополосного процесса $\xi(t)$, представленного в виде (11.11).

Решение. Введем огибающую $V(t)$ и случайную фазу $\psi(t)$ интересующей нас суммы, воспользовавшись следующей записью суммы заданных детерминированных сигналов и случайного процесса:

$$\eta(t) = s_1(t) + s_2(t) + \xi(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\cos\varphi_2\cos\omega_0 t - A_2\sin\varphi_2\sin\omega_0 t + A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t = [A_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_c(t)]\cos\omega_0 t - [A_s(t) + A_2\sin\varphi_2]\sin\omega_0 t = V(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)], \quad (11.42)$$

где

$$V(t)\cos\psi(t) = A_c(t) + A_1 + A_2\cos\varphi_2, \quad V(t)\sin\psi(t) = A_s(t) + A_2\sin\varphi_2, \quad (11.43)$$

т. е. $V(t) = \{[A_c(t) + A_1 + A_2\cos\varphi_2]^2 + [A_s(t) + A_2\sin\varphi_2]^2\}^{1/2}$,

$$\operatorname{tg}\psi(t) = [A_s(t) + A_2\sin\varphi_2]/[A_c(t) + A_1 + A_2\cos\varphi_2].$$

Из равенств (11.43) следует, что

$$A_c(t) = V(t)\cos\psi(t) - A_1 - A_2\cos\varphi_2, \quad A_s(t) = V(t)\sin\psi(t) - A_2\sin\varphi_2. \quad (11.44)$$

Записав совместную нормальную плотность вероятности независимых квадратурных составляющих $A_c(t)$ и $A_s(t)$

$$p(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{A_c^2+A_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

и перейдя в ней к новым случайным величинам $V(t)$ и $\psi(t)$ согласно равенствам (11.44), получим совместную плотность вероятности для огибающей и фазы:

$$p_2(V, \psi) = \frac{V}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[V^2 + A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_2 - 2VA_1\cos\psi - 2VA_2\cos(\psi+\varphi_2)]\right\}. \quad (11.45)$$

Отсюда находим плотность вероятности для огибающей $V(t)$

$$p_V(V) = \int_{-\pi}^{\pi} p_2(V, \psi)\, d\psi.$$

При интегрировании следует воспользоваться выражением (11.40), предварительно применив очевидное соотношение

$$A_2\cos(\psi + \varphi_2) + A_1\cos\psi = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_2}\,\cos(\psi + \chi).$$

После выполнения интегрирования получим

$$p_V(V) = \frac{V}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{V^2 + A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_2}{2\sigma_\xi^2}\right) \times$$

$$\times I_0\left(\frac{V}{\sigma_\xi^2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_2}\right). \qquad (11.46)$$

Из этой формулы как частные случаи следуют ранее приведенные результаты. Так, полагая в (11.46) $A_2 = 0$, приходим к формуле (11.27), а при $A_1 = A_2 = 0$ — к формуле (11.32).

Отметим, что если бы в рассматриваемом примере детерминированный гармонический сигнал $s_2(t)$ имел вид $s_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2\cos[\omega_0 t + (\omega_2 - \omega_0)\, t + \varphi_2]$, т. е. его частота ω_2 отлична от центральной частоты ω_0 спектральной плотности случайного процесса $\xi(t)$, то все предыдущие выражения остались бы в силе, нужно лишь в них вместо φ_2 подставить $(\omega_2 - \omega_0)\, t + \varphi_2$. При этом огибающая сумма $V(t)$ была бы нестационарным процессом.

Пользуясь записью вида (11.42), понятия огибающей и случайной фазы можно распространить на сумму нескольких детерминированных гармонических сигналов и гауссовского стационарного процесса.

11.3. Пусть на вход радиоприемника, упрощенная функциональная схема которого приведена на рис. 11.3, воздействует сумма детерминированного гармонического сигнала $s(t) = A_m\cos 2\pi f_0 t$ и гауссовского стационарного белого шума $n(t)$ со спектральной

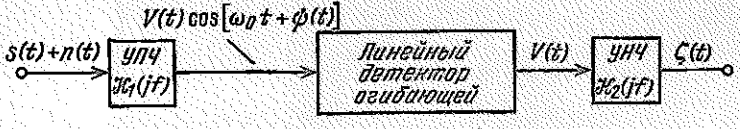


Рис. 11.3. Упрощенная функциональная схема радиоприемника

плотностью $S_n(f) = N_0$. Квадраты модулей частотных характеристик усилителя промежуточной частоты (УПЧ) и усилителя низкой частоты (УНЧ) имеют вид гауссовых кривых

$$|\mathcal{K}_1(jf)|^2 = \mathcal{K}_1^2 \exp\left[-\pi\left(\frac{f-f_0}{\Delta f_1}\right)^2\right], \quad \Delta f_1 \ll f_0,$$

$$|\mathcal{K}_2(jf)|^2 = \mathcal{K}_2^2 \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{f}{\Delta f_2}\right)^2\right],$$

где Δf_1 и Δf_2 — эффективные полосы усилителей.

Вычислить математическое ожидание и корреляционную функцию напряжения $\zeta(t)$ на выходе УНЧ при больших и малых отношениях сигнал/шум.

Решение. Очевидно, что сигнал на выходе УПЧ равен

$$s_1(t) = \mathcal{K}_1 A_m \cos 2\pi f_0 t,$$

а спектральная плотность шума на выходе УПЧ определяется известным соотношением

$$S_1(f) = N_0 |\mathcal{K}_1(jf)|^2 = \mathcal{K}_1^2 N_0 \exp\left[-\pi\left(\frac{f-f_0}{\Delta f_1}\right)^2\right].$$

Такой спектральной плотности соответствует корреляционная функция

$$R_1(\tau) = \int_0^\infty S_1(f) \cos 2\pi f\tau df = \sigma_1^2 \exp\left[-\pi (\Delta f_1 \tau)^2\right] \cos 2\pi f_0 \tau,$$

$$\sigma_1^2 = \mathcal{K}_1^2 N_0 \Delta f_1. \qquad (11.47)$$

Гауссовский стационарный шум на выходе УПЧ при условии $f_0 \gg \Delta f_1$ является узкополосным, причем его спектральная плотность симметрична относительно центральной частоты f_0. Поэтому сумма гармонического сигнала и узкополосного шума на выходе УПЧ может быть записана в виде (11.18).

Введем отношение сигнал/шум на входе линейного детектора огибающей $a = \mathcal{K}_1 A_m/\sigma_1 = A_m/\sqrt{N_0 \Delta f_1}$. Воспользовавшись результатами решения задачи 11.23, а именно, соотношениями (11.56) и (11.57), найдем математическое ожидание напряжения на выходе детектора

$$m_V = A_m \mathcal{K}_1 \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right), \quad a > 3;$$

$$m_V = \sigma_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4} a^2\right), \; a < 1. \qquad (11.48)$$

Для интересующих нас случаев больших и малых отношений сигнал/шум корреляционная функция напряжения на выходе линейного детектора огибающей дается формулой (11.36), которая применительно к рассматриваемому случаю принимает вид

$$R_V(\tau)=\begin{cases}\sigma_1^2\exp[-\pi(\Delta f_1\tau)^2]\left\{1+\dfrac{1}{2a^2}\exp[-\pi(\Delta f_1\tau)^2]\right\}, & a>3,\\ \dfrac{\pi}{8}\sigma_1^2\left\{\exp[-2\pi(\Delta f_1\tau)^2]+\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2 a^2\exp[-\pi(\Delta f_1\tau)^2]\right\}, & a<1.\end{cases} \tag{11.49}$$

Воспользовавшись известным интегралом [17]

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),\ \beta>0, \tag{11.50}$$

найдем спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям (11.49),

$$S_V(f)=4\int_0^\infty R_V(\tau)\cos 2\pi f\tau\,d\tau=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\sigma_1^2}{\Delta f_1}\exp\left[-\pi\left(\dfrac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right]\left\{1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}\,a^2}\exp\left[-\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right]\right\}, & a>3,\\ \dfrac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{2}\,\Delta f_1}\exp\left[-\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right]\left\{1+\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\sqrt{2}\,a^2\exp\left[-\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right]\right\}, & a<1.\end{cases}$$

Так как коэффициент усиления УНЧ при $f=0$ равен $\mathcal{K}_2$, то среднее значение напряжения на выходе УНЧ, очевидно, равно

$$m_\zeta=\begin{cases}\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 A_m\left(1+\dfrac{1}{4a^2}\right), & a>3,\\ \mathcal{K}_2\sigma_1^2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1+\dfrac{1}{4}a^2\right), & a<1.\end{cases} \tag{11.51}$$

Спектральная плотность напряжения $\zeta(t)$ на выходе УНЧ определяется соотношением

$$S_\zeta(f)=S_V(f)\,|\mathcal{K}_2(jf)|^2. \tag{11.52}$$

Согласно известной формуле по спектральной плотности находим корреляционную функцию

$$R_\zeta(\tau)=\int_0^\infty S_\zeta(f)\cos 2\pi f\tau\,df. \tag{11.53}$$

Выполнив вычисления при помощи (11.50), получим

$$R_\zeta(\tau)=\begin{cases}2\sigma_1^2\,\mathcal{K}_2^2\,\nu\left[\sqrt{\frac{1}{1+4\nu^2}}\exp\left(-\pi\frac{(2\Delta f_1\tau)^2}{1+4\nu^2}\right)+\right.\\ \left.+\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^2}\sqrt{\frac{1}{1+2\nu^2}}\exp\left(-\pi\frac{(2\Delta f_2\tau)^2}{1+2\nu^2}\right)\right],\ a>3,\\ \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{2}}\,\nu\left[\sqrt{\frac{1}{1+2\nu^2}}\exp\left(-\pi\frac{(2\Delta f_2\tau)^2}{1+2\nu^2}\right)+\right.\\ \left.+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sqrt{2}\,a^2\sqrt{\frac{1}{1+4\nu^2}}\exp\left(-\pi\frac{(2\Delta f_2\tau)^2}{1+4\nu^2}\right)\right],\ a<1,\end{cases}\qquad(11.54)$$

где $\nu=\Delta f_2/\Delta f_1$.

Можно рассмотреть частные случаи формулы (11.54). Например, можно убедиться, что при $\nu\gg 1$ справедливо соотношение

$$R_\xi(\tau)\simeq\mathcal{K}_2^2 R_\nu(\tau),\ \nu\gg 1.\qquad(11.55)$$

Этому результату можно дать следующее объяснение. Если полоса пропускания усилителя низкой частоты значительно больше полосы пропускания усилителя промежуточной частоты (т. е. $\nu\gg 1$), то низкочастотный спектр напряжения на выходе линейного детектора огибающей воспроизводится усилителем низкой частоты практически без искажений; все спектральные составляющие усиливаются в $\mathcal{K}_2^2$ раз.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

11.1. Случайный стационарный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$ записан в виде (11.11):

$$\xi(t)=A_c(t)\cos\omega_0' t-A_s(t)\sin\omega_0' t.$$

Определить корреляционные функции $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$, а также взаимную корреляционную функцию $R_{cs}(\tau)$ для двух случаев: 1) $\omega_0'\neq\omega_0$ и 2) $\omega_0'=\omega_0$ [44].

Ответ:

1) $R_c(\tau)=R_s(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\Delta\omega\tau$,

$R_{cs}(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\sin\Delta\omega\tau$, $\quad\Delta\omega=\omega_0-\omega_0'$;

2) $R_c(\tau)=R_s(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\quad R_{cs}(\tau)=0$.

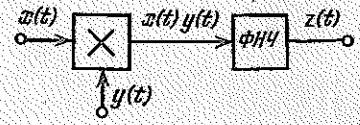
11.2. Случайный стационарный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau+\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$$

записан в виде

$$\xi(t)=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t.$$

Рис. 11.4. Функциональная схема синхронного детектора



Найти корреляционные функции $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$, а также взаимную корреляционную функцию $R_{cs}(\tau)$.

Ответ:

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad R_{cs}(\tau) = -\frac{\alpha}{\omega_0}\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\operatorname{sgn}\tau,$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

11.3. При тех же условиях, что и в задаче 11.2, вычислить спектральные плотности $S_c(\omega)$ и $S_s(\omega)$, а также взаимную спектральную плотность $S_{cs}(\omega)$.

Ответ: $S_c(\omega) = S_s(\omega) = \dfrac{2\sigma_\xi^2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$, $S_{cs}(\omega) = \dfrac{\sigma_\xi^2\alpha}{\omega_0}\dfrac{2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$.

11.4. Случайный стационарный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{при } \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2 \end{cases}$$

записан в виде

$$\xi(t) = A_c(t)\cos\omega_0' t - A_s\sin\omega_0' t.$$

Найти корреляционные функции $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$, а также взаимную корреляционную функцию $R_{cs}(\tau)$ для двух случаев: 1) $\omega_0' = \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$; 2) $\omega_0' = \omega_1$.

Ответ:

1) $R_c(\tau) = R_s(\tau) = \sigma_\xi^2 \sin\beta\tau/\beta\tau$, $R_{cs}(\tau) = 0$,
$\sigma_\xi^2 = S_0(\omega_2 - \omega_1)$, $\beta = (\omega_2 - \omega_1)/2$;

2) $R_c(\tau) = R_s(\tau) = \sigma_\xi^2 \sin(\omega_2 - \omega_1)\tau/(\omega_2 - \omega_1)\tau$,
$R_{cs}(\tau) = (S_0/2)[\cos(\omega_2 - \omega_1)\tau - 1]$.

11.5. На рис. 11.4 приведена схема синхронного детектора, представляющего собой последовательное соединение перемножителя и идеального низкочастотного фильтра, пропускающего практически без искажений низкочастотную часть спектра и не пропускающего высокочастотную часть. На один вход перемножителя подается гармонический сигнал $s(t) = A_1\sin\omega_0 t$, а на другой — узкополосный стационарный шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right), \quad \alpha \ll \omega_0.$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ колебания $\eta(t)$ на выходе фильтра в стационарном состоянии.

Ответ: $R_\eta(\tau) = (1/4) A_1^2 \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

11.6. Найти отношение сигнал/шум на выходе фильтра синхронного детектора (рис. 11.4), когда на один вход перемножителя воздействует сумма сигнала и шума $s(t) + \xi(t)$, а на другой — сигнал $s(t)$. Сигнал $s(t)$ и шум $\xi(t)$ те же, что и в задаче 11.5.

Ответ: $a = A_1/\sigma_\xi$.

11.7. На один вход синхронного детектора (рис. 11.4) подается сумма АМ колебания $A_0(1 + m\cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ и узкополосного стационарного шума $\xi(t)$ с дисперсией σ_ξ^2, а на другой — опорное колебание $A_1 \cos \omega_0 t$. Определить отношение сигнал/шум на выходе детектора (полезным сигналом считать колебание с частотой модуляции Ω).

Ответ: $a = mA_0/\sigma_\xi$.

11.8. На синхронный детектор (рис. 11.4) воздействует сумма сигнала и шума $s(t) + \xi(t)$, а также опорное гармоническое колебание $A_m \cos \omega_0 t$. Сигналом $s(t)$ является модулированное по случайному закону гармоническое колебание $s(t) = \zeta(t) \cos \omega_0 t$, где $\zeta(t)$ — независимый от $\xi(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_\zeta(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } 0 \leqslant f \leqslant F/2, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность

$$S_\xi(f) = \begin{cases} N_0 & \text{при } f_0 - F/2 \leqslant f \leqslant f_0 + F/2, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра низких частот постоянна и отлична от нуля лишь при частотах $0 \leqslant f \leqslant F$. Найти отношение дисперсии сигнала σ_s^2 к дисперсии σ^2 шума на выходе фильтра.

Ответ: $\sigma_s^2/\sigma^2 = (S_0/2N_0)$.

11.9. На два разных входа перемножителя подаются два независимых узкополосных стационарных процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Показать, что мощность (дисперсия) выходного процесса $\xi(t)$ распределена поровну между низкочастотной и высокочастотной областями спектра.

Указание. Для решения задачи можно воспользоваться представлением корреляционной фукции узкополосного стационарного процесса (11.3) и учесть, что $\gamma(0) = 0$.

11.10. На один вход синхронного детектора (рис. 11.4) подается узкополосный гауссовский стационарный шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau) \cos \omega_0 \tau$, а на другой — опорное напряжение $A_1 \cos \omega_0 t$. Получить выражения для одномерной и

двумерной плотностей вероятностей колебания $\eta(t)$ на выходе детектора в стационарном состоянии.

Ответ: Выходной процесс $\eta(t)$ гауссовский с дисперсией $\sigma_\eta^2 = (A_1\sigma_\xi/2)^2$ и нормированной корреляционной функцией $r(\tau)$.

11.11. Вычислить математическое ожидание m_A и дисперсию σ_A^2 огибающей $A(t)$ гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$, имеющего дисперсию σ_ξ^2.

Ответ: $m_A = \sigma_\xi\sqrt{\pi/2}$, $\sigma_A^2 = (2-\pi/2)\,\sigma_\xi^2$.

11.12. Получить плотность вероятности $p(\eta)$ для квадрата огибающей $A^2(t)$ гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$: $\eta(t) = A^2(t)$.

Ответ: $p(\eta) = \dfrac{1}{2\sigma_\xi^2}\exp\left(-\dfrac{\eta}{2\sigma_\xi^2}\right)$, $\eta \geqslant 0$.

11.13. Вычислить математическое ожидание m_{A^2} и дисперсию $\sigma_{A^2}^2$ квардата огибающей гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$.

Ответ: $m_{A^2} = 2\sigma_\xi^2$, $\sigma_{A^2}^2 = 4\sigma_\xi^4$.

11.14. Гауссовский узкополосный стационарный процесс $\xi(t)$ со средним квадратическим значением $\sigma_\xi = 1$ В подается на линейный детектор огибающей с коэффициентом передачи $\mathcal{K} = 1$. Найти вероятность того, что напряжение на выходе детектора превысит 2 В.

Ответ: $P = \exp(-2) = 0{,}135$.

11.15. Корреляционная функция гауссовского узкополосного стационарного процесса $\xi(t)$ равна $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$. Вычислить корреляционную функцию $R_A(\tau)$ огибающей $A(t)$ этого процесса.

Ответ: $R_A(\tau) = \left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\sigma_\xi^2\,(0{,}915\,e^{-2\alpha|\tau|} + 0{,}057\,e^{-4\alpha|\tau|} + \ldots)$.

11.16. Решить задачу 11.15 для случая, когда $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha^2\tau^2/2}\cos\omega_0\tau$.

Ответ: $R_A(\tau) = \left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\sigma_\xi^2\,(0{,}915\,e^{-\alpha^2\tau^2} + 0{,}057\,e^{-2\alpha^2\tau^2} + \ldots)$.

11.17. Корреляционная функция гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ равна

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^4 e^{-\alpha^2\tau^2/2}\cos\omega_0\tau.$$

Вычислить корреляционную функцию $R_{A^2}(\tau)$ квадрата огибающей $A^2(t)$ этого процесса.

Ответ: $R_{A^2}(\tau) = 4\sigma_\xi^4 e^{-\alpha^2\tau^2}$.

11.18. Получить двумерную плотность вероятности для процесса $\eta(t) = A^2(t)$, представляющего собой квадрат огибающей гауссовского узкополосного стационарного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau)\cos\omega_0\tau$.

Ответ:

$$p_2(\eta, \eta_\tau) = \frac{1}{4\sigma_\xi^2 (1-r^2)} \exp\left[-\frac{\eta+\eta_\tau}{2\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right] I_0\left(\frac{r\sqrt{\eta\eta_\tau}}{\sigma_\xi^2(1-r^2)}\right),$$

$$r = r(\tau).$$

11.19. Гауссовский стационарный узкополосный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau)\cos\omega_0\tau$. Получить одномерную плотность вероятности для производной от случайной фазы $\dot{\varphi}(t)$.

Ответ:

$$p(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2\sqrt{-r_0''}}\left(1-\frac{\dot{\varphi}^2}{r_0''}\right)^{-3/2}, \quad r_0'' = \frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=0}.$$

11.20. При тех же условиях, что и в задаче 11.19, получить совместную плотность вероятности для случайной фазы $\varphi(t)$ и ее производной $\dot{\varphi}(t)$ в один и тот же момент времени.

Ответ: $p_2(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{-r_0''}}\left(1-\frac{\dot{\varphi}^2}{r_0''}\right)^{-3/2}$.

11.21. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 11.5, воздействует стационарный белый шум $n(t)$ со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_0/2$. Частотная характеристика усилителя промежуточной частоты (УПЧ) задана выражением

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2-\omega_0^2)}, \quad \alpha \ll \omega_0,$$

а импульсная характеристика $h(t)$ интегрирующего фильтра RC равна $h(t) = \gamma e^{-\gamma t}$.

Определить: 1) плотность вероятности $p(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квадратичного детектора огибающей; 2) математическое ожидание m_η, корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и дисперсию σ_η^2; 3) математическое ожидание m_ζ, корреляционную функцию $R_\zeta(\tau)$ и дисперсию σ_ζ^2 процесса $\zeta(t)$ на выходе фильтра RC в стационарном состоянии.

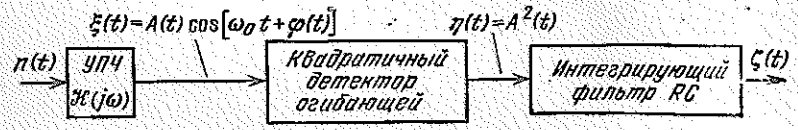


Рис. 11.5. Упрощенная функциональная схема радиоприемника

Ответ:

1) $p(\eta) = \frac{1}{2\sigma_\xi^2} e^{-\eta/2\sigma_\xi^2}$, $\eta \geqslant 0$, $\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2}\alpha N_0 \mathcal{K}_0^2/2$;

2) $m_\eta = 2\sigma_\xi^2$, $R_\eta(\tau) = 4\sigma_\xi^4 \mathcal{K}_0^4 e^{-2\alpha|\tau|}$, $\sigma_\eta^2 = 4\sigma_\xi^4 \mathcal{K}_0^4$, $\omega_0 \gg \alpha$;

3) $m_\xi = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2$, $R_\xi(\tau) = \sigma_\eta^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha^2}(\gamma e^{-2\alpha|\tau|} - 2\alpha e^{-\gamma|\tau|})$,

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 \frac{\gamma}{\gamma + 2\alpha}.$$

11.22. Пусть $\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ — гауссовский стационарный узкополосный процесс. Рассмотрим случайный процесс

$$\eta(t) = \xi(t)\cos\omega_s t = (1/2)A(t)\cos[(\omega_0 - \omega_s)t + \varphi(t)] + (1/2)A(t)\cos[(\omega_0 + \omega_s)t + \varphi(t)],$$

где частота ω_s мала по сравнению с частотой ω_0, но значительно превышает ширину спектра процесса $\xi(t)$.

Спектр процесса $\eta(t)$ расположен в двух практически неперекрывающихся полосах, причем нижней боковой полосе соответствует процесс

$$\eta_1(t) = (1/2)A(t)\cos[(\omega_0 - \omega_s)t + \varphi(t)],$$

а верхней боковой полосе — процесс

$$\eta_2(t) = (1/2)A(t)\cos[(\omega_0 + \omega_s)t + \varphi(t)].$$

Показать, что процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ являются стационарными, хотя их сумма есть нестационарный процесс. Убедиться, что процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ не являются независимыми.

Указание. При доказательствах целесообразно воспользоваться соотношениями (11.15).

11.23. Установить разный характер изменения математического ожидания m_V и дисперсии σ_V^2 огибающей $V(t)$ в зависимости от отношения сигнал/шум $a = A_m/\sigma_\xi$ для малых и больших значений a.

Ответ:

$$m_V = \sigma_\xi \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}a^2\right), \quad \sigma_V = \sigma_\xi \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}a^2\right), \quad a < 1; \tag{11.56}$$

$$m_V = A_m \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}} \simeq A_m\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right), \quad \sigma_V = \sigma_\xi, \quad a > 3. \tag{11.57}$$

Указание. Нужно в формуле (11.30) воспользоваться следующими асимптотическими представлениями функций Бесселя:

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \ldots\right], \quad x < 1; \tag{11.58}$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + \frac{1-4n^2}{8x} + \ldots\right], \quad x \gg 1. \tag{11.59}$$

11.24. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата огибающей $V^2(t)$.

Ответ: $m_{V^2} = 2\sigma_\xi^2(1 + a^2/2)$, $\sigma^2_{V^2} = 4\sigma_\xi^4(1 + a^2)$.

11.25. Найти одномерную плотность вероятности для процесса $\eta(t) = V^2(t)$, представляющего собой квадрат огибающей суммы детерминированного гармонического сигнала и гауссовского стационарного шума $\xi(t)$.

Ответ: $$p(\eta) = \frac{1}{2\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{\eta + A_m^2}{2\sigma_\xi^2}\right) I_0\left(\frac{A_m\sqrt{\eta}}{\sigma_\xi^2}\right).$$

Указание. Нужно в формуле (11.28) перейти от V к η.

11.26. Вычислить одномерные начальные моменты $m_k = M\{V^k(t)\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, огибающей $V(t)$ суммы детерминированного гармонического сигнала $A_m\cos\omega_0 t$ и гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с дисперсией σ_ξ^2.

Ответ: $$m_k = (2\sigma_\xi^2)^{k/2}\,\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) {}_1F_1\left(-\frac{k}{2};\ 1;\ -\frac{A_m^2}{2\sigma_\xi^2}\right),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; ${}_1F_1(\alpha;\ \beta;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Указание. При выполнении интегрирования с плотностью вероятности (11.28) следует воспользоваться известным интегралом [17]

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} I_\nu(\alpha x)\, e^{-\beta^2 x^2}\, dx = \frac{\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{2\beta^\mu\,\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times\, {}_1F_1\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1;\ \nu+1;\ -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right).$$

11.27. Вычислить совместную плотность вероятности $p_2(V, \dot{V})$ для огибающей $V(t)$ и ее производной $\dot{V}(t)$ в один и тот же момент времени t. Считается, что огибающая $V(t)$ определена формулой (11.18).

Ответ: $p_2(V, \dot{V}) = p_V(V)\, p(\dot{V})$, где $p_V(V)$ дается формулой (11.28);

$$p(\dot{V}) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi(-r_0'')}} \exp\left[-\frac{\dot{V}^2}{2\sigma_\xi^2(-r_0'')}\right]$$

— нормальная плотность вероятности.

Указание. Нужно проинтегрировать плотность вероятности (11.26) сначала по ψ в пределах от $-\infty$ до ∞, а затем по ψ в пределах от $-\pi$ до π.

11.28. Найти плотность вероятности процесса $\eta(t) = \cos\psi(t)$, представляющего собой косинус фазы $\psi(t)$ суммы детерминирован-

ного гармонического сигнала $A_m \cos \omega_0 t$ и гауссовского стационарного шума $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ с дисперсией σ_ξ^2.

Ответ:

$$p(\eta) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\eta^2}} e^{-a^2/2} \left[1 + \sqrt{2\pi}\, a\eta \Phi(a\eta)\ e^{a^2\eta^2/2}\right],$$

$$a = \frac{A_m}{\sigma_\xi},\ -1 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

11.29. Решить задачу 11.28, положив $\eta(t) = \sin \psi(t)$.

Ответ:

$$p(\eta) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\eta^2}} e^{-a^2/2} \left\{1 + \sqrt{2\pi(1-\eta^2)}\ a e^{\frac{1}{2}a^2(1-\eta^2)} \times \left[\Phi\left(a\sqrt{1-\eta^2}\right) - \frac{1}{2}\right]\right\},\ |\eta| < 1.$$

11.30. Показать, что при больших отношениях сигнал/шум ($a = A_m/\sigma_\xi \gg 1$) случайную фазу $\psi(t)$ и ее производную можно приближенно считать гауссовским стационарным процессом. Записать для этого случая совместную плотность вероятности для фазы и ее производной в один и тот же момент времени.

Ответ:

$$\psi(t) \simeq \frac{A_s(t)}{A_m},\quad \dot{\psi}(t) = \frac{\dot{A}_s(t)}{A_m},\quad p_2(\psi, \dot{\psi}) = p_\psi(\psi)\, p_{\dot{\psi}}(\dot{\psi}) =$$

$$= \frac{a^2}{2\pi \sqrt{-r_c''(0)}} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\psi^2 - \frac{1}{r_c''(0)}\dot{\psi}^2\right)\right],\quad r_c''(0) = \left.\frac{d^2 r_c(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

11.31. Определить плотность вероятности огибающей $V(t)$ суммы двух гармонических колебаний

$$s_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1),\quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

и гауссовского стационарного узкополосного шума $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_ξ^2:

$$s_1(t) + s_2(t) + \xi(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)].$$

Случайные начальные фазы φ_1 и φ_2 предполагаются равномерно распределенными в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$p(V) = \frac{V}{\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A_1^2 + A_2^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\left[I_0\left(\frac{A_1 V}{\sigma_\xi^2}\right) I_0\left(\frac{A_2 V}{\sigma_\xi^2}\right) \times\right.$$

$$\left. \times I_0\left(\frac{A_1 A_2}{\sigma_\xi^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\frac{A_1 V}{\sigma_\xi^2}\right) I_n\left(\frac{A_2 V}{\sigma_\xi^2}\right) I_n\left(\frac{A_1 A_2}{\sigma_\xi^2}\right)\right].$$

У к а з а н и е. Для решения задачи следует воспользоваться интегральным представлением функций Бесселя [17] $I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta d\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и частным случаем «теоремы сложения» бесселевых функций:

$$I_0\left(m\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right) = I_0(ma) I_0(mb) +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(ma) I_n(mb)\cos n\theta,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $\theta > 0$.

11.32. На линейный детектор огибающей воздействует сумма

$$s(t) + \xi(t) = A_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] =$$

$$= V(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)],$$

где $s(t)$ — детерминированный гармонический сигнал; $\xi(t)$ — гауссовский стационарный узкополосный шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha\tau^2}\cos\omega_0\tau$.

Определить приближенные выражения для математического ожидания m_η и корреляционной функции $R_\eta(\tau)$ напряжения на выходе детектора $\eta(t) = V(t)$ при больших ($a = A_m/\sigma \gg 1$) и малых ($a \ll 1$) отношениях сигнал/шум.

Ответ:

$$m_\eta \simeq A_m\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right),\quad R_\eta(\tau) \simeq \sigma_\xi^2 e^{-\alpha\tau^2}\left(1 + \frac{1}{2a^2}e^{-\alpha\tau^2}\right),\quad a \gg 1,$$

$$m_\eta \simeq \sigma_\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right),$$

$$R_\eta(\tau) \simeq \frac{\pi}{8}\sigma_\xi^2\left[e^{-2\alpha\tau^2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 e^{-\alpha\tau^2}\right],\quad a \ll 1.$$

12. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Среди нелинейных преобразований случайных процессов простейшим является такое преобразование (рис. 12.1), при котором значение выходного процесса $\eta(t)$ в любой момент времени определяется только значением входного процесса $\xi(t)$ в тот же момент времени:

$$\eta(t) = f[\xi(t)], \tag{12.1}$$

где $f[\xi]$ — некоторая нелинейная функция. Такое нелинейное преобразование называют безынерционным или функциональным.

К безынерционному сводятся также нелинейные преобразования, при которых входной и выходной процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ подвергаются дополнительной трансформации линейными системами (рис. 12.2), не оказывающими реакции на нелинейный элемент. Такое преобразование можно записать в форме

$$\xi(t) = L_2 f[L_1 \xi(t)],$$

где L_1 и L_2 — линейные операторы, описывающие поведение линейных систем.

Поскольку правила преобразования характеристик случайных процессов линейными системами известны (см. гл. 10), для изучения указанных нелинейных преобразований достаточно рассмотреть преобразование (12.1).

Общее правило. В общем виде принципиальное решение задачи о нелинейных безынерционных преобразованиях случайных процессов дается известным свойством инвариантности дифференциала вероятности. Пусть известна n-мерная плотность распределения вероятностей $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и нужно найти плотность распределения вероятностей $\breve{p}_n(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ для случайных величин

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= f_1[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n], \\
\eta_2 &= f_2[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_n &= f_n[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n],
\end{aligned} \tag{12.2}$$

где f_i — кусочно-непрерывные функции. Если существуют однозначные обратные функции

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \varphi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\
\xi_2 &= \varphi_2[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n &= \varphi_n[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n],
\end{aligned} \tag{12.3}$$

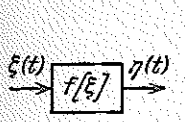


Рис. 12.1. Нелинейный безынерционный преобразователь

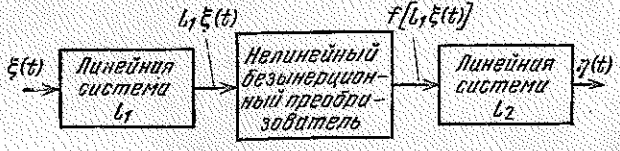


Рис. 12.2. Типовое радиотехническое устройство

то интересующая нас плотность распределения вероятностей определяется формулой

$$\breve{p}_n(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = p_n(\varphi_1[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n],$$

$$\varphi_2[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n], \ldots, \varphi_n[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n])\,|\mathscr{D}_n|, \tag{12.4}$$

где

$$\mathscr{D}_n = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)} \tag{12.5}$$

— якобиан преобразования от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ к переменным $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

В тех случаях, когда обратные функции φ_i неоднозначны, в правой части формулы (12.4) следует взять сумму по каждой из подобластей.

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть

$$\eta_1 = f_1[\xi_1] = \xi_1, \quad \eta_2 = \eta = f_2[\xi_1, \xi_2],$$

причем обратные функции $\xi_1 = \varphi_1[\eta_1] = \eta_1$, $\xi_2 = \varphi_2[\eta_1, \eta_2]$ однозначны. В данном случае якобиан преобразования (12.5)

$$\mathscr{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_2} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta},$$

а совместная плотность распределения вероятностей $\breve{p}_2(\eta_1, \eta)$ случайных величин η_1 и η в соответствии с (12.4) определяется формулой

$$\breve{p}_2(\eta_1, \eta) = p_2(\eta_1, \varphi_2[\eta_1, \eta])\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\right|. \tag{12.6}$$

Интегрируя (12.6) по η_1, получаем одномерную плотность распределения вероятностей для случайной величины η

$$p_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\eta_1, \varphi_2[\eta_1, \eta])\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\right| d\eta_1. \tag{12.7}$$

При применении формулы (12.4) к практически интересным нелинейным преобразованиям могут возникнуть трудности. Так, если функции f_i являются полиномами выше третьей степени, в общем случае затруднительно найти функции φ_i, т. е. аналитически разрешить систему нелинейных уравнений (12.2) относительно ξ_i. Аналогичные трудности возникают и при трансцендентных функциях f_i. При кусочно-линейной аппроксимации функции f_i оказываются разрывными и производные $\partial\varphi_i/\partial f_i$ во многих типовых случаях в некоторых точках могут быть равными бесконечности.

Ввиду сложности непосредственного вычисления плотностей распределения вероятностей часто ограничиваются нахождением более простых, но менее полных статистических характеристик выходного процесса, например математического ожидания и корреляционной функции. Применительно к разным видам нелинейных преобразований для определения этих характеристик можно указать несколько методов.

Полиномиальное преобразование [29]. Пусть характеристика нелинейного элемента $\eta = f[\xi]$ является аналитической функцией в окрестности некоторой точки C. Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$\eta = f[\xi] = a_0 + a_1(\xi - C) + \ldots + a_n(\xi - C)^n,$$

$$a_k = \frac{1}{k!}\left.\frac{d^k f[\xi]}{d\xi^k}\right|_{\xi=C}, \tag{12.8}$$

число членов которого определяется точностью аппроксимации.

Обозначим начальные моментные функции процесса $\xi(t)$ через m, а $\eta(t)$ — через $\breve{m}$. Статистически усреднив левую и правую части равенства (12.8), получим

$$\breve{m}_1(t) = M\{\eta(t)\} = m_\eta(t) = a_0 + a_1 M\{\xi(t) - C\} + \ldots + M\{[\xi(t) - C]^n\}. \tag{12.9}$$

Перемножив левые и правые части равенств (12.8) для двух моментов времени t_1, t_2 и выполнив операцию статистического усреднения, найдем выражение для двумерной моментной функции (ковариационной функции):

$$\breve{m}_{1,1}(t_1, t_2) = M\{\eta(t_1)\,\eta(t_2)\} = K_\eta(t_1, t_2) = a_0^2 + a_0 a_1 [m_1(t_1) + m_1(t_2) - 2C] + a_1^2 [m_{1,1}(t_1, t_2) - C m_1(t_1) - C m_1(t_2) + C^2] + \ldots + a_n^2 M\{[\xi(t_1) - C]^n [\xi(t_2) - C]^n\}. \tag{12.10}$$

Аналогично находятся выражения для высших моментных функций.

Для получения выражения моментных функций процесса $\eta(t)$ в явном виде через моментные функции процесса $\xi(t)$ нужно воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(\xi - C)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\, \xi^{k-i} C^i,$$

раскрыть члены вида

$$[\xi(t_1) - C]^k [\xi(t_2) - C]^l [\xi(t_3) - C]^m \ldots, \quad k,\ l,\ m \leqslant n,$$

и затем выполнить статистическое усреднение. При этом, если процесс $\xi(t)$ задан своими моментными функциями, сразу получаем нужный результат. Если же процесс $\xi(t)$ задан плотностями распределения вероятностей или характеристическими функциями, то по ним необходимо предварительно вычислить его моментные функции.

Моментные функции сравнительно просто находятся для гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$. Пусть математическое ожидание m_ξ такого процесса равно нулю; обозначим его дисперсию через $D_\xi = \sigma_\xi^2$, а нормированную корреляционную функцию — через $r_\xi(\tau)$. Нетрудно убедиться [6], что при этом одномерные моментные функции стационарного гауссовского процесса определяются формулой

$$m_\nu(t) = M\{\xi^\nu(t)\} = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (\nu - 1)\, \sigma_\xi^\nu & \text{при четном } \nu, \\ 0 & \text{при нечетном } \nu, \end{cases}$$

а для двумерных моментных функций справедливо соотношение

$$m_{\mu\nu}(\tau) = M\{\xi^\mu(t)\, \xi^\nu(t+\tau)\} = \sigma_\xi^{\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N_{\mu k} N_{\nu k} r_\xi^k(\tau),$$

где

$$N_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i \Phi^{(k+1)}(\xi)\, d\xi.$$

Здесь $\Phi^{(n)}(z) = d^n\Phi(z)/dz^n$ — n-я производная от интеграла вероятности

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{12.11}$$

Совокупность коэффициентов N_{in} образует матрицу, приведенную в табл. 5.3.

Трехмерные моментные функции гауссовского процесса определяются аналогично [26]. Общее правило вычисления многомерных моментных функций установлено в работе [69].

Из формул (12.9) и (12.10) видно, что моментные функции процесса $\eta(t)$ линейно выражаются через моментные функции процесса $\xi(t)$, однако формулы для моментных функций выходного процесса включают более сложные моментные функции входного процесса. В этом состоит одна из характерных особенностей любого нелинейного преобразования (в том числе и полиномиального) по сравнению с линейным.

Кусочно-разрывные и трансцендентные преобразования. При рассмотрении воздействия достаточно сильных сигналов и помех на нелинейные устройства часто применяют аппроксимацию их характеристик кусочно-разрывными или трансцендентными функциями $f[\xi]$, поскольку они позволяют лучше передать существенные свойства участка нелинейной характеристики. Вычисление моментных функций выходного процесса для нелинейных преобразований (12.1) такого вида можно выполнять двумя тесно связанными методами: прямым и методом характеристических функций [36].

В прямом методе используются сами нелинейные характеристики и статистическое усреднение выполняется при помощи плотностей распределения вероятностей. При этом одномерные моментные функции находятся согласно очевидной формуле

$$\breve{m}_{\nu}(t) = M\{\eta^{\nu}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\nu}[\xi(t)]\, p_1(\xi;\, t)\, d\xi,$$

а для двумерной моментной функции $\breve{m}_{1,1}(t_1, t_2)$ справедливо соотношение

$$\breve{m}_{1,1}(t_1,\, t_2) = M\{\eta(t_1)\,\eta(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f[\xi_1]\, f[\xi_2]\, p_2(\xi_1,\, \xi_2;\, t_1,\, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \qquad (12.12)$$

где $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$.

В методе характеристических функций нелинейная характеристика представляется при помощи преобразования Лапласа:

$$\eta = f[\xi] = \frac{1}{2\pi}\int_{L} F(ju)\, e^{ju\xi}\, du,$$

где L — соответствующим образом выбранный контур интегрирования в комплексной области u. Вид контура интегрирования и выражение функции $F(ju)$, представляющей собой прямое преобразование Лапласа нелинейной функции $f[\xi]$

$$F(ju) = \int_{0}^{\infty} f[\xi]\, e^{-ju\xi}\, d\xi,$$

приведены в табл. 12.1 [34]. Нетрудно убедиться, что в данном случае двумерная моментная функция $\breve{m}_{1,1}(t_1, t_2)$ определяется формулой

$$\breve{m}_{1,1}(t_1,\, t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{L}\int_{L} F(ju_1)\, F(ju_2) \times$$

$$\times\, \Theta_2(ju_1,\, ju_2;\, t_1,\, t_2)\, du_1\, du_2, \qquad (12.13)$$

где $\Theta_2(ju_1, ju_2; t_1, t_2)$ — двумерная характеристическая функция входного воздействия $\xi(t)$.

Из (12.12) и (12.13) следует, что как метод характеристических функций, так и прямой метод требуют одних и тех же априорных сведений о входном случайном процессе $\xi(t)$, ибо характеристические функции и плотности распределения вероятностей, как известно, связаны преобразованием Фурье. При выборе того или иного из рассмотренных методов решающее значение имеют не столько теоретические соображения, сколько вычислительные трудности.

В заключение отметим, что если $\xi(t)$ является гауссовским случайным процессом, то естественным результатом прямого метода является выражение ответа через табулированные производные от интеграла вероятности (12.11), а при использовании метода характеристических функций ответ чаще выражается через гипергеометрические функции [71]. Однако это не имеет существенного значения, так как производные от интеграла вероятности и вырожденная гипергеометрическая функция связаны друг с другом известными соотношениями [70].

Если на вход рассматриваемого нелинейного элемента воздействует гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$, дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$ и нормированной корреляционной функцией $r_\xi(\tau)$, то процедура вычисления интегралов в правых частях формул (12.12) и (12.13) может быть упрощена с помощью специальных приемов. Применительно к формуле (12.12) один из таких приемов, названный методом дельта-функции, был развит в работах [72, 73]. Позже аналогичный метод, называемый методом Прайса [74], был применен к вычислению интегралов вида (12.13).

Метод дельта-функции базируется на представлении двумерной плотности распределения вероятностей гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием, имеющей вид

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2\sqrt{1-r_\xi^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{\xi_1^2 - 2r_\xi(\tau)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma_\xi^2[1-r_\xi^2(\tau)]}\right\}, \qquad (12.14)$$

в форме ряда [6]

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \sigma_\xi^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma_\xi}\right) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma_\xi}\right) r_\xi^n(\tau).$$

На основании этого разложения формулу (12.12) можно представить в виде

$$\breve{m}_{1,1}(\tau) = m_\eta^2 + \sigma_\xi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f[\xi] \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi\right\}^2 r_\xi^n(\tau), \qquad (12.15)$$

где математическое ожидание выходного процесса $\eta(t)$ определяется соотношением

$$m_\eta = M\{\eta(t)\} = \frac{1}{\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f[\xi] \Phi^{(1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi. \qquad (12.16)$$

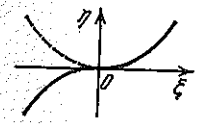
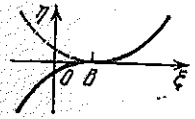
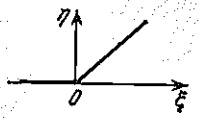
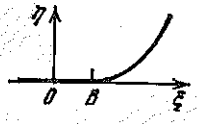
Из (12.16) следует, что корреляционная функция выходного процесса равна

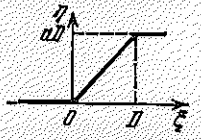
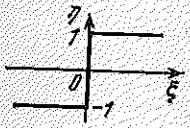
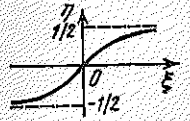
$$R_\eta(\tau) = \breve{m}_{1,1}(\tau) - m_\eta^2 =$$

$$= \sigma_\xi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f[\xi] \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi\right\}^2 r_\xi^n(\tau). \qquad (12.17)$$

Таблица 12.1

Характеристики нелинейных устройств

Тип нелинейного устройства	$\eta = f[\xi]$		$F(ju)$	L
	Аналитическое выражение	График		
1. Устройство с характеристикой ν-й степени	$a\xi^{\nu}$ (ν — целое)		$\frac{a\nu!}{(ju)^{\nu+1}}$	Положительная петля вокруг $u=0$
2. Устройство с характеристикой ν-й степени со смещением	$a(\xi-B)^{\nu}$ (ν — целое)		$\frac{a\nu!}{(ju)^{\nu+1}} e^{-juB}$	То же
3. Однополупериодный линейный выпрямитель	$\begin{cases} a\xi, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$		$\frac{a}{(ju)^2}$	Действительная ось u от ∞ до $-\infty$, вырез вниз при $u=0$
4. Выпрямитель с характеристикой ν-й степени и с ограничением	$\begin{cases} a(\xi-B)^{\nu}, & \xi \geqslant B, \\ 0, & \xi < B \end{cases}$ (ν — положительное)		$\frac{a\Gamma(\nu+1)}{(ju)^{\nu+1}} e^{-juB}$	То же

5. Линейный выпрямитель с ограничением	$\begin{cases} aD, & \xi \geqslant D, \\ a\xi, & 0 \leqslant \xi < D, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$		$\frac{a(1-e^{-juD})}{(ju)^2}$	То же
6. Однополупериодный выпрямитель	$\begin{cases} f[\xi], & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$		$\int_0^\infty f[\xi]\, e^{-ju\xi}\, d\xi$	»
7. Идеальный ограничитель	$\begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ -1, & \xi < 0 \end{cases}$		$\pm \frac{1}{u}$	»
8. Сглаженный ограничитель	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \int_0^\xi e^{-x^2/2\beta^2}\, dx$		$\frac{1}{ju} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 u^2}$	»

Применяя к (12.17) интегрирование по частям ν раз и используя известные свойства функции $\Phi^{(n)}(z)$ [70], получаем

$$R_\eta(\tau)=\sigma_\xi^{2\nu-2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f^{(\nu)}[\xi]\,\Phi^{(n+1-\nu)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right)d\xi\right\}^2\frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}. \quad (12.18)$$

Применительно к различным кусочно-разрывным характеристикам нелинейных элементов следует выполнять интегрирование по частям такое число ν раз, чтобы ν-я производная $f^{(\nu)}[\xi]$ превратилась в дельта-функцию или сумму дельта-функций.

Формула (12.18) устанавливает связь между корреляционной функцией выходного процесса и нормированной корреляционной функцией входного процесса и, следовательно, позволяет найти спектральную плотность выходного процесса по известной спектральной плотности процесса на входе нелинейного элемента. Наличие в (12.18) членов с $n\geqslant 2$ приводит к искажению и расширению спектра выходного процесса по сравнению со спектром входного процесса. В этом, в частности, состоит вторая особенность нелинейных безынерционных преобразований.

При вычислении интегралов (12.13) можно продуктивно использовать тот факт, что для характеристической функции стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$, имеющей вид

$$\Theta_2(ju_1,\ ju_2)=M\{\exp[ju_1\xi_1+ju_2\xi_2]\}=$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2[u_1^2+2r_\xi(\tau)\,u_1u_2+u_2^2]\right\}, \quad (12.19)$$

справедливо соотношение

$$\frac{\partial^k\Theta_2}{\partial r_\xi^k}=(-1)^k(\sigma_\xi^2u_1u_2)^k\Theta_2(ju_1,\ ju_2),$$

в соответствии с чем (12.13) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^k\breve{m}_{1,1}(\tau)}{\partial r_\xi^k(\tau)}=\frac{\sigma_\xi^{2k}}{4\pi^2}\int_L(ju_1)^kF(ju_1)\,du_1\int_L(ju_2)^kF(ju_2)\,\Theta_2(ju_1,\ ju_2)\,du_2.$$

Подставив сюда исходное определение характеристической функции (12.19) и изменив порядок интегрирования и статистического усреднения, получим [74]

$$\frac{\partial^k\breve{m}_{1\,1}}{\partial r_\xi^k}=\sigma_\xi^{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}[\xi_1]\,f^{(k)}[\xi_2]\,p_2(\xi_1,\ \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2. \quad (12.20)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_L(ju)^kF(ju)\,e^{lu\xi}\,du=f^{(k)}[\xi]=\frac{d^kf[\xi]}{d\xi^k}.$$

При вычислении корреляционной функции процесса на выходе нелинейных элементов с кусочно-разрывными характеристиками по формуле (12.20) нужно брать такое значение k, при котором $f^{(k)}[\xi]$ обращается в сумму дельта-функций. Тогда интеграл в правой части (12.20) всегда вычисляется и, следовательно, находится k-я производная функции $\breve{m}_{1,1}(\tau)$. Что касается последующего интегрирования по значениям нормированной корреляционной функции $r_\xi(\tau)$ с целью определения $\breve{m}_{1,1}(\tau)$, то оно особенно легко выполняется в частном случае, когда $f^{(k)}[\xi]=\pm\delta(\xi)$ и воздействующий нормальный стационарный процесс $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание.

2. ПРИМЕРЫ

12.1. На безынерционный двухсторонний квадратичный детектор с характеристикой (рис. 12.3)

$$\eta = f[\xi] = a\xi^2, \quad a > 0,$$

воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с плотностью распределения вероятностей

$$p_1^0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]. \qquad (12.21)$$

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе детектора.

Решение. При $a > 0$ случайная величина $\eta = \eta(t)$ не может быть отрицательной, поэтому при $\eta < 0$ функция $p_1(\eta) = 0$. Для $\eta > 0$ имеем

$$\xi = \varphi[\eta] = \pm\sqrt{\eta/a},$$

в соответствии с чем модуль якобиана преобразования (12.5) равен

$$|d\xi/d\eta| = 1/2\sqrt{a\eta}.$$

Учитывая, что в рассматриваемом примере функция $\xi = \varphi[\eta]$ двухзначна, по формуле (12.4) находим

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a\eta}}\left[p_1^0\left(\sqrt{\dfrac{\eta}{a}}\right) + p_1^0\left(-\sqrt{\dfrac{\eta}{a}}\right)\right], & \eta \geqslant 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases} \qquad (12.22)$$

Если математическое ожидание процесса $\xi(t)$ равно нулю ($m_\xi = 0$), то формула (12.22) приводится к виду (см. задачу 2.31).

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left(-\dfrac{\eta}{2a\sigma_\xi^2}\right), & \eta \geqslant 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

График этой функции приведен в табл. 12.2.

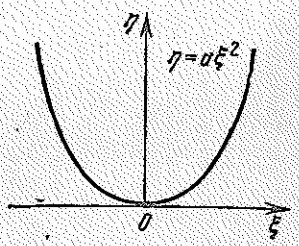
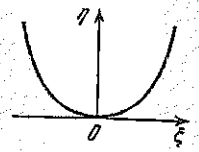
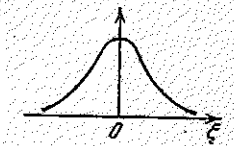
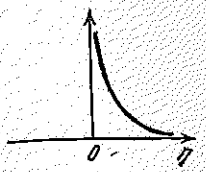
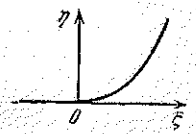
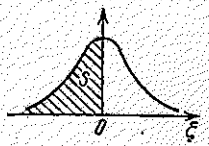
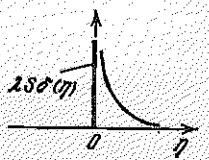
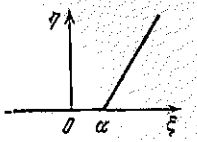
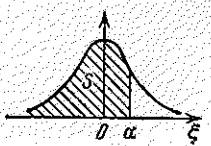
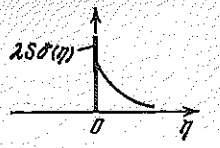
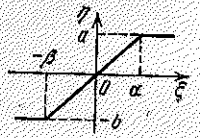
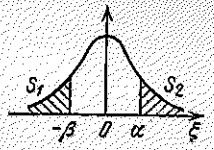
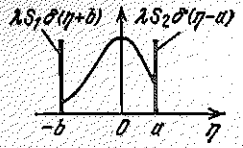
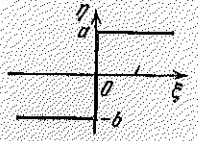
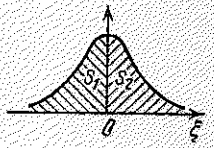
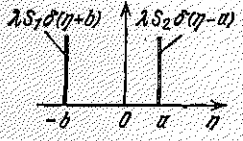
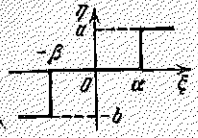
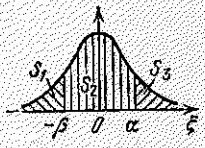
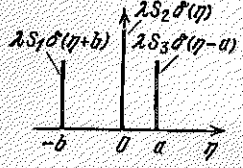
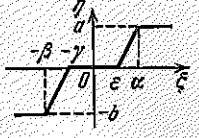
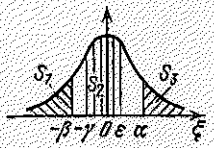
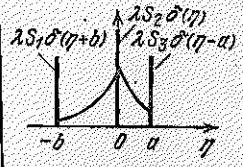


Рис. 12.3. Амплитудная характеристика двухстороннего квадратичного детектора

Таблица 12.2

Плотности распределения вероятностей $p_1(\eta)$ на выходе типовых безынерционных нелинейных устройств

Тип нелинейного устройства	$\eta = f[\xi]$		$p_1(\xi)$	$p_1(\eta)$
	Аналитическое выражение	График		
1. Двухсторонний квадратичный детектор	$a\xi^2,\ a>0$			
2. Односторонний квадратичный детектор	$\begin{cases} a\xi^2, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$			
3. Односторонний ограничитель	$\begin{cases} s\xi, & \xi \geqslant \alpha, \\ 0, & \xi < \alpha \end{cases}$			

4. Двухсторонний ограничитель	$\begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta \leqslant \xi < \alpha, \\ a, & \xi \geqslant \alpha \end{cases}$			
5. Квантователь на два уровня	$\begin{cases} -b, & \xi < 0. \\ a, & \xi \geqslant 0 \end{cases}$			
6. Квантователь на три уровня	$\begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ 0, & -\beta \leqslant \xi < \alpha, \\ a, & \xi \geqslant \alpha \end{cases}$			
7. Ограничитель	$\begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta < \xi < -\gamma, \\ 0, & -\gamma < \xi < \varepsilon, \\ s\xi, & \varepsilon < \xi < \alpha, \\ a, & \xi > \alpha \end{cases}$			

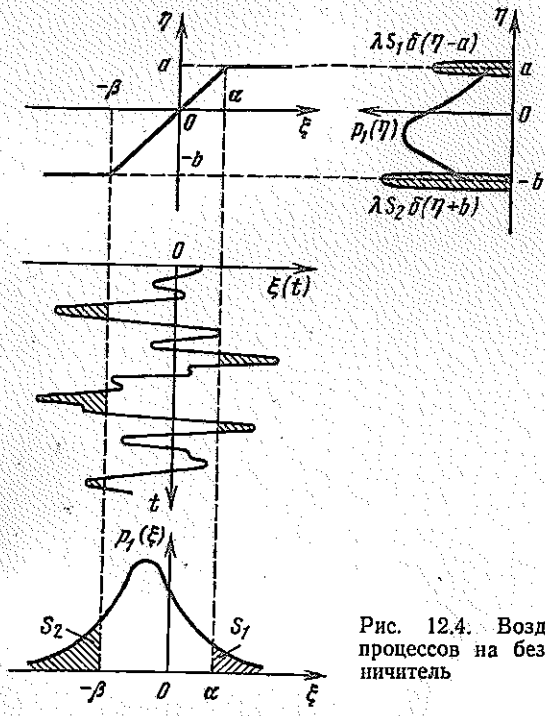


Рис. 12.4. Воздействие случайных процессов на безынерционный ограничитель

12.2. На вход безынерционного ограничителя с характеристикой (рис. 12.4)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} -b & \text{при } \xi < -\beta, \\ s\xi & \text{при } -\beta \leqslant \xi < \alpha, \\ a & \text{при } \xi \geqslant \alpha \end{cases} \tag{12.23}$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с плотностью распределения вероятностей (12.21).

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя при $s > 0$.

Решение. На интервале $(-b, a)$ преобразование $\eta = f[\xi]$ в данном примере является линейным: $\eta = s\xi$. Поэтому внутри этого интервала

$$p_1(\eta) = p_1^0\left(\frac{\eta}{s}\right)\frac{1}{s}, \quad -b < \eta < a.$$

Вероятность того, что $\eta < -b$ или $\eta > a$, равна нулю, а вероятность того, что η заключено в интервале $(-b, a)$,

$$P(-b < \eta < a) = \int_{-b}^{a} p_1(\eta)\, d\eta = \frac{1}{s}\int_{-b}^{a} p_1^0\left(\frac{\eta}{s}\right) d\eta.$$

Все значения ξ, для которых $\xi \geqslant \alpha$, преобразуются ограничителем в одно значение $\eta = a$ (рис. 12.4). Аналогично, все значения $\xi \leqslant -\beta$ преобразуются в значение $\eta = -b$. Следовательно, вероятность

$$P(\xi \geqslant \alpha) = S_1 = \int_{\alpha}^{\infty} p_1^0(\xi)\, d\xi,$$

преобразуется для η в дельта-функцию, расположенную в точке $\eta = a$. Множитель при этой дельта-функции $\delta(\eta - a)$ пропорционален S_1. Вероятность

$$P(\xi < -\beta) = S_2 = \int_{-\infty}^{-\beta} p_1^0(\xi)\, d\xi$$

преобразуется для η в дельта-функцию, расположенную в точке $\eta = -b$, множитель при этой дельта-функции $\delta(\eta + b)$ пропорционален S_2. Таким образом, искомая плотность распределения вероятностей равна

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{s}\, p_1^0\left(\dfrac{\eta}{s}\right) + \lambda S_1 \delta(\eta - a) + \lambda S_2 \delta(\eta + b), & -b \leqslant \eta \leqslant a, \\ 0, & \eta < -b,\ \eta > a. \end{cases}$$

Здесь λ — коэффициент пропорциональности, определяемый из условия нормировки плотности распределения вероятностей $p_1(\eta)$:

$$\lambda(S_1 + S_2) + \frac{1}{s} \int_{-b}^{a} p_1^0\left(\frac{\eta}{s}\right) d\eta = 1.$$

Очевидно при $s = 1$ коэффициент $\lambda = 1$.

График плотности распределения вероятностей $p_1(\eta)$ приведен в табл. 12.2. Там же представлены плотности распределения вероятностей $p_1(\eta)$ на выходе некоторых безынерционных нелинейных устройств при воздействии на их вход стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$.

12.3. На нелинейный элемент с параболической характеристикой

$$\eta = f[\xi] = a_1\xi + a_2\xi^2$$

воздействует стационарный случайный процесс

$$\xi(t) = s(t) + n(t),$$

где

$$s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

— гармонический сигнал с постоянными амплитудой и частотой и случайной начальной фазой φ, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, а $n(t)$ — гауссовский стационарный шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = M\{n(t)\, n(t + \tau)\} = \sigma_n^2 r_n(\tau).$$

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе элемента при условии статистической независимости сигнала и шума.

Для частного случая $r_n(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ определить физическую спектральную плотность $S_{\eta_0}(f)$ центрированного выходного процесса $\eta_0(t) = \eta(t) - m_\eta$.

Решение. По условию

$$\eta(t) = a_1[s(t) + n(t)] + a_2[s(t) + n(t)]^2 = \\ = a_1 s(t) + a_1 n(t) + a_2 s^2(t) + 2a_2 s(t)\, n(t) + a_2 n^2(t). \quad (12.24)$$

Производя статистическое усреднение соотношения (12.24) и учитывая, что в рассматриваемом примере

$$M\{s(t)\} = 0, \quad M\{n(t)\} = 0, \; M\{s(t)\, n(t)\} = 0,$$

получаем следующее выражение для математического ожидания процесса $\eta(t)$:

$$m_\eta = M\{\eta(t)\} = a_2\left(\frac{A_m^2}{2} + \sigma_n^2\right).$$

Перемножив равенства (12.24) для моментов времени t и $t+\tau$, выполнив статистическое усреднение результата перемножения, вычислим двумерную моментную (ковариационную) функцию процесса $\eta(t)$

$$\breve{m}_{1,1}(\tau) = M\{\eta(t)\,\eta(t+\tau)\} = \\ = K_\eta(\tau) = a_1^2[(A_m^2/2)\cos\omega_0\tau + \sigma_n^2 r_n(\tau)] + \\ + a_2^2[(A_m^4/4)(1 + 0{,}5\cos 2\omega_0\tau) + 2A_m^2\sigma_n^2 r_n(\tau)\cos\omega_0\tau + A_m^2\sigma_n^2 + \\ + \sigma_n^4 + 2\sigma_n^4\, r_n^2(\tau)].$$

Отсюда находим корреляционную функцию

$$R_\eta(\tau) = \breve{m}_{1,1}(\tau) - m_\eta^2 = a_1^2(A_m^2/2)\cos\omega_0\tau + \\ + a_2^2(A_m^4/8)\cos 2\omega_0\tau + a_1^2\sigma_n^2 r_n(\tau) + 2a_2^2\sigma_n^4 r_n^2(\tau) + \\ + 2a_2^2 A_m^2\sigma_n^2\, r_n(\tau)\cos\omega_0\tau. \quad (12.25)$$

Для вычисления спектральной плотности $S_{\eta_0}(f)$ следует воспользоваться формулой (6.21):

$$S_{\eta_0}(f) = 4\int_0^\infty R_\eta(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau. \quad (12.26)$$

После подстановки в (12.26) корреляционной функции (12.25) при $r_n(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ находим

$$S_{\eta_0}(f) = a_1^2\frac{A_m^2}{2}\delta(f - f_0) + a_2^2\frac{A_m^4}{8}\delta(f - 2f_0) + 4\sigma_n^2(a_1^2 + a_2^2\sigma_n^2) \times \\ \times \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + \frac{4a_2^2 A_m^2\sigma_n^2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(f - f_0)^2}. \quad (12.27)$$

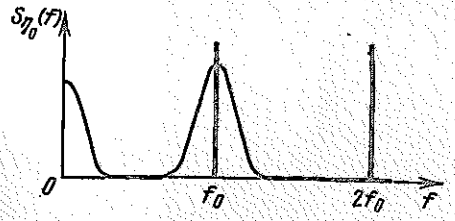


Рис. 12.5. Дискретно-сплошная спектральная плотность

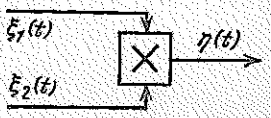


Рис. 12.6. Перемножитель

Из (12.27) следует, что спектральная плотность $S_{\eta_0}(f)$ является дискретно-сплошной (рис. 12.5). Она состоит из двух дискретных спектральных линий при $f = f_0$ и $f = 2f_0$, обусловленных наличием на входе параболического элемента гармонического сигнала $s(t)$; низкочастотного сплошного спектра, обусловленного только шумом, и сплошного спектра, расположенного в окрестности частоты $f = f_0$. Последний обусловлен взаимодействием сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ в результате нелинейного преобразования.

12.4. На входы перемножителя (рис. 12.6) воздействуют стационарные некоррелированные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ со спектральными плотностями $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$, соответственно равными

$$S_1(\omega) = \begin{cases} N_1, & -\omega_1 - \Delta/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_1 + \Delta/2, \\ N_1, & \omega_1 - \Delta/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 + \Delta/2, \\ 0 & \text{при других } \omega; \end{cases} \tag{12.28}$$

$$S_2(\omega) = \begin{cases} N_2, & -\omega_2 - \Delta/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_2 + \Delta/2, \\ N_2, & \omega_2 - \Delta/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_2 + \Delta/2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \tag{12.29}$$

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса $\eta(t) = \xi_1(t)\,\xi_2(t)$ на выходе перемножителя.

Решение. Спектральная плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса $\eta(t) = \xi_1(t)\,\xi_2(t)$ в данном случае определяется формулой [1]

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\nu)\, S_2(\omega - \nu)\, d\nu, \tag{12.30}$$

где $S_1(\nu)$ — спектральная плотность процесса $\xi_1(t)$; $S_2(\omega - \nu)$ — функция, сдвинутая на частоту ω относительно спектральной плотности $S_2(-\nu)$ процесса $\xi_2(t)$. Графическое изображение функций $S_1(\nu)$ и $S_2(\nu)$ дано на рис. 12.7. Там же показана спектральная плотность $S_2(\omega - \nu)$.

Интеграл (12.30) отличен от нуля только в том случае, когда отлична от нуля подынтегральная функция, т. е. когда спектральные плотности $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega - \nu)$ перекрываются. Как следует из рис. 12.8, при изменении ω от $-\infty$ до ∞, т. е. при перемещении спектральной

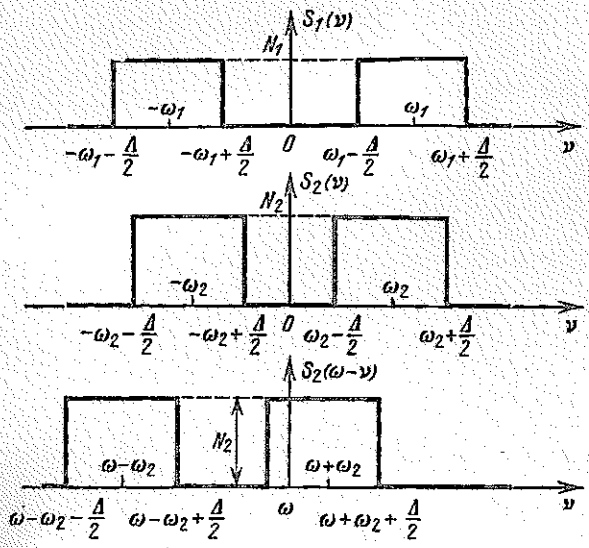


Рис. 12.7. Спектральные плотности процессов на входах перемножителя

плотности $S_2(\omega-\nu)$ слева направо относительно $S_1(\nu)$, такое перекрытие имеет место в четырех случаях, первый из которых соответствует перекрытию составляющей спектральной плотности $S_1(\nu)$ в области $\nu<0$ с составляющей спектральной плотности $S_2(\omega-\nu)$ в области $\omega-\nu>0$. Этот случай перекрытия $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega-\nu)$ имеет место при значениях частоты ω, удовлетворяющих неравенствам (рис. 12.8)

$$\omega+\omega_2+\frac{\Delta}{2}\geqslant-\omega_1-\frac{\Delta}{2},\quad \omega+\omega_2-\frac{\Delta}{2}\leqslant-\omega_1+\frac{\Delta}{2}. \qquad (12.31)$$

Объединяя неравенства (12.31), находим следующую область значений ω, соответствующую первому случаю перекрытия функций $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega-\nu)$:

$$-\omega_c-\Delta\leqslant\omega\leqslant-\omega_c+\Delta,$$

где $\omega_c=\omega_1+\omega_2$ — суммарная частота.

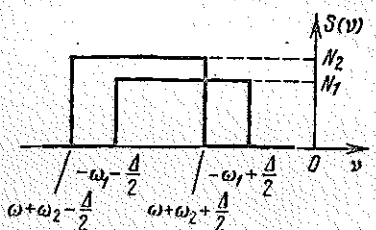


Рис. 12.8. Области интегрирования

При дальнейшем увеличении ω и выполнении неравенств

$$\omega+\omega_2+\frac{\Delta}{2}\geqslant\omega_1-\frac{\Delta}{2},\quad \omega+\omega_2-\frac{\Delta}{2}\leqslant\omega_1+\frac{\Delta}{2}$$

наступает перекрытие составляющей спектральной плотности $S_1(\nu)$ в области $\nu>0$ с составляющей спектральной плотности $S_2(\omega-\nu)$ при $\omega-\nu>0$. Соответствующая этому случаю область значений ω определяется соотношением

$$\omega_p-\Delta\leqslant\omega\leqslant\omega_p+\Delta,$$

где $\omega_p=\omega_1-\omega_2$ — разностная частота.

Аналогично для третьего случая (перекрытие составляющих $S_1(\nu)$ в области $\nu<0$ и $S_2(\omega-\nu)$ в области $\omega-\nu<0$) находим

$$-\omega_p-\Delta\leqslant\omega\leqslant-\omega_p+\Delta,$$

а для четвертого (перекрытие составляющих $S_1(\nu)$ в области $\nu>0$ и $S_2(\omega-\nu)$ в области $\omega-\nu<0$) имеем

$$\omega_c-\Delta\leqslant\omega\leqslant\omega_c+\Delta.$$

Подставляя теперь в (12.30) значения $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega-\nu)$, определяемые соотношениями (12.28) и (12.29), и производя интегрирование в указанных выше областях, получаем

$$S_\eta(\omega)=\begin{cases}S_0(\omega_c+\Delta+\omega), & -\omega_c-\Delta\leqslant\omega<-\omega_c,\\ S_0(-\omega_c+\Delta-\omega), & -\omega_c\leqslant\omega\leqslant-\omega_c+\Delta,\\ S_0(\omega_p+\Delta+\omega), & -\omega_p-\Delta\leqslant\omega<-\omega_p,\\ S_0(-\omega_p+\Delta-\omega), & -\omega_p\leqslant\omega\leqslant-\omega_p+\Delta,\\ S_0(-\omega_p+\Delta+\omega), & \omega_p-\Delta\leqslant\omega<\omega_p,\\ S_0(\omega_p+\Delta-\omega), & \omega_p\leqslant\omega\leqslant\omega_p+\Delta,\\ S_0(-\omega_c+\Delta+\omega), & \omega_c-\Delta\leqslant\omega<\omega_c,\\ S_0(\omega_c+\Delta-\omega), & \omega_c\leqslant\omega\leqslant\omega_c+\Delta,\\ 0 & \text{при других }\omega,\end{cases}$$

где $S_0=N_1N_2/2\pi$. График функции $S_\eta(\omega)$ представлен на рис. 12.9.

12.5. На безынерционный ограничитель с характеристикой (12.23) воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi=0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Вычислить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

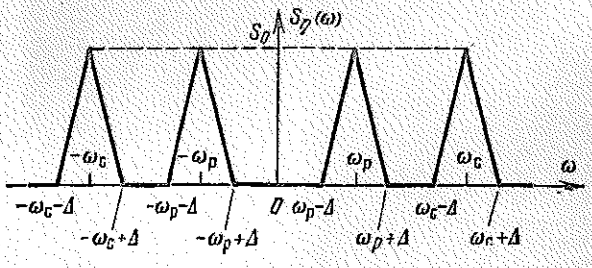


Рис. 12.9. Спектральная плотность на выходе перемножителя

Решение [26]. В соответствии с определением математическое ожидание на выходе ограничителя

$$m_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f[\xi]\, p_1(\xi)\, d\xi = -b \int_{-\infty}^{-\beta} p_1(\xi)\, d\xi + s \int_{-\beta}^{\alpha} \xi p_1(\xi)\, d\xi + a \int_{\alpha}^{\infty} p_1(\xi)\, d\xi,$$

где $p_1(\xi)$ — нормальная плотность распределения вероятностей (12.21) при $m_\xi = 0$. После подстановки $p_1(\xi)$ в выражение для m_η и несложных вычислений получим

$$m_\eta = s\sigma_\xi \left\{ \frac{\alpha}{\sigma_\xi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) \right] - \Phi'\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \frac{\beta}{\sigma_\xi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right] + \Phi'\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right\}.$$

Для вычисления корреляционной функции $R_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой (12.18). После двукратного дифференцирования нелинейной характеристики $f[\xi]$ ограничителя имеем

$$f''[\xi] = s[\delta(\xi + \beta) - \delta(\xi - \alpha)],$$

в соответствии с чем из (12.18) находим [26]

$$R_\eta(\tau) = (s\sigma_\xi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!} = \sigma_\eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_\xi^n(\tau), \qquad (12.32)$$

где

$$a_n = \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \frac{(s\sigma_\xi)^2}{n!\,\sigma_\eta^2}.$$

Значения коэффициентов a_n для различных случаев ограничения даны в табл. 12.3, откуда, в частности, следует, что определяющую роль в формуле (12.32) играет первый член с коэффициентом a_1. Сумма всех остальных коэффициентов даже при сильном ограничении (например, симметричное ограничение $\alpha/\sigma_\xi = 0{,}1$) составляет примерно 35% от суммы всех коэффициентов. Поэтому иногда при расчетах в (12.32) учитывают только первый член, что по существу соответствует линейному преобразованию процесса $\xi(t)$.

12.6. На вход квантующего устройства с характеристикой

$$\eta = f[\xi] = a_i, \qquad \alpha_i \leqslant \xi \leqslant \alpha_{i+1},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, N-1$, (рис. 12.10) воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Таблица 12.3

Значения коэффициентов a_n

a_n	ν/σ_ξ				
	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0
	Симметричное ограничение: $\alpha/\sigma_\xi=\beta/\sigma_\xi=\nu/\sigma_\xi$				
a_1	0,646	0,735	0,789	0,837	0,901
a_2	0	0	0	0	0
a_3	0,114	0,114	0,112	0,103	0,072
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0,050	0,048	0,042	0,033	0,015
a_6	0	0	0	0	0
a_7	0,030	0,027	0,021	0,013	0,003
a_8	0	0	0	0	0

a_n	α/σ_ξ					
	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	∞
	Несимметричное ограничение: $\beta/\sigma_\xi=0$					
a_1	0,681	0,704	0,736	0,739	0,740	0,733
a_2	0,007	0,021	0,078	0,142	0,193	0,233
a_3	0,107	0,099	0,062	0,025	0,007	0
a_4	0,007	0,015	0,042	0,052	0,043	0,020
a_5	0,045	0,037	0,012	0,001	0	0
a_6	0,004	0,011	0,025	0,020	0,010	0,006
a_7	0,026	0,019	0,003	0	0	0
a_8	0,004	0,009	0,015	0,008	0,002	0,003

a_n	α/σ_ξ											
	1,0	1,5	3,0	1,0	1,5	3,0	1,0	1,5	3,0	1,0	1,5	3,0
	$\beta/\sigma_\xi=0,3$			$\beta/\sigma_\xi=0,5$			$\beta/\sigma_\xi=0,7$			$\beta/\sigma_\xi=0,1$		
	Несимметричное ограничение: $\beta/\sigma_\xi>0$											
a_1	0,809	0,819	0,821	0,840	0,859	0,864	0,871	0,893	0,902	0,930	0,939	0,944
a_2	0,036	0,085	0,154	0,018	0,054	0,110	0,006	0,031	0,075	0,010	0,025	0,038
a_3	0,081	0,043	0,006	0,087	0,050	0,011	0,086	0,053	0,014	0,049	0,029	0,015
a_4	0,019	0,029	0,013	0,009	0,014	0,007	0,003	0 008	0,003	0,002	0,002	0
a_5	0,021	0,005	0,001	0,023	0,007	0,002	0,021	0,008	0,003	0,005	0,002	0,002
a_6	0,011	0,010	0,002	0,004	0,005	0	0,001	0,002	0	0	0	0
a_7	0,007	0,001	0,001	0,008	0,001	0,002	0,005	0,001	0,002	0	0	0,001
a_8	0,006	0,003	0,001	0,002	0,001	0	0	0	0	0	0	0

Предполагается, что функция $f[\xi]$ нечетна, т. е. $-f[-\xi]=f[\xi]$, а общее количество уровней квантования a_i равно четному числу.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квантователя.

Решение [1]. Математическое ожидание

$$m_\eta = M\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f[\xi]\, p_1(\xi)\, d\xi.$$

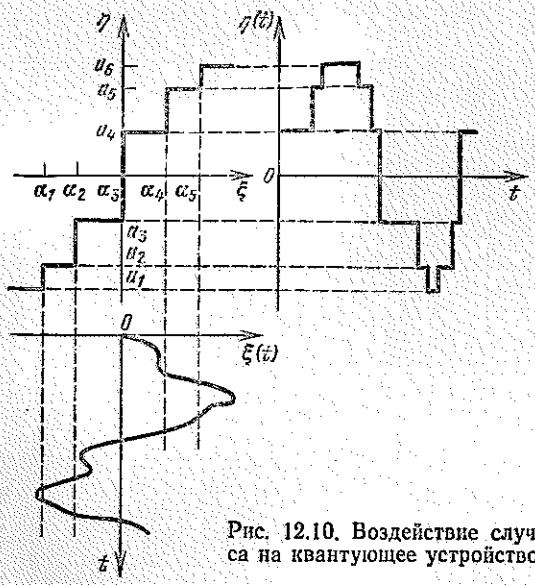


Рис. 12.10. Воздействие случайного процесса на квантующее устройство

Подставляя сюда плотность распределения вероятностей $p_1(\xi)$, определяемую формулой (12.21) при $m_\xi = 0$, и учитывая нечетность функции $f[\xi]$, находим

$$m_\eta = 0.$$

Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ на основании формулы (12.17) равна

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f[\xi]\, \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi \right\}^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f[\xi]\, \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f'[\xi]\, \Phi^{(n)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi.$$

Для рассматриваемого примера

$$f'[\xi] = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i\, \delta(\xi - \alpha_i),$$

где $\Delta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ — расстояние между соседними уровнями квантования. Таким образом, находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f[\xi]\, \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) d\xi = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i\, \Phi^n\left(\frac{\alpha_i}{\sigma_\xi}\right).$$

Подставляя это выражение в $R_\eta(\tau)$, получаем следующую формулу для корреляционной функции:

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{\sigma_\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N-1}\Delta_i\,\Phi^{(n)}\left(\frac{\alpha_i}{\sigma_\xi}\right)\right]^2\frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}.$$

12.7. Найти корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ на выходе безынерционного сглаженного ограничителя с характеристикой (рис. 12.11)

$$\eta=f[\xi]=a+\frac{2a}{\gamma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi}e^{-x^2/2\gamma^2}\,dx,$$

где a и γ — постоянные величины, при воздействии на вход ограничителя стационарного гауссовского шума с двумерной плотностью распределения вероятностей (12.14).

Решение. Для определения $R_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой (12.20). Подставив в нее первые производные

$$f'[\xi]=\frac{2a}{\gamma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\xi^2/2\gamma^2},$$

находим

$$\frac{\partial\tilde{m}_{1,1}(\tau)}{\partial r_\xi(\tau)}=\frac{2a^2}{\pi\gamma^2}\sqrt{\frac{b^2-d^2}{1-r_\xi^2(\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{b^2-d^2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{b\xi_{s1}^2-2d\xi_{s1}\xi_{s2}+b\xi_{s2}^2}{2(b^2-d^2)}\right]d\xi_{s1}\,d\xi_{s2},\qquad(12.33)$$

где

$$b=\frac{\gamma^2\sigma_\xi^2(\gamma^2+\sigma_\xi^2[1-r_\xi^2(\tau)])}{(\gamma^2+\sigma_\xi^2)^2-\sigma_\xi^4 r_\xi^2(\tau)},\quad d=\frac{\gamma^2 b r_\xi(\tau)}{\gamma^2+\sigma_\xi^2[1-r_\xi^2(\tau)]}.$$

Двукратный интеграл в правой части равенства (12.33) равен единице, поскольку он представляет собой интеграл от двумерной

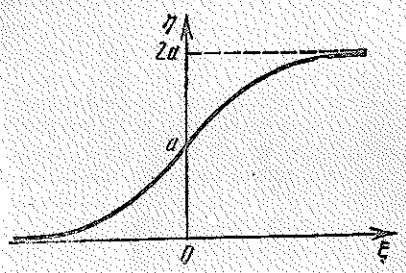


Рис. 12.11. Амплитудная характеристика сглаженного ограничителя

нормальной плотности распределения вероятностей по всей области изменения переменных. Следовательно,

$$\frac{\partial \breve{m}_{1,1}(\tau)}{\partial r_\xi(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{1-r_\xi^2(\tau)}} = \frac{2a^2\sigma_\xi^2}{\pi(\sigma_\xi^2+\gamma^2)}\left[1-\left(\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Отсюда находим

$$\breve{m}_{1,1}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2}} \frac{dx}{1-x^2} + C = \frac{2a^2}{\pi}\arcsin\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Она определяется из условий

$$\lim_{\tau\to\infty} r_\xi(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \breve{m}_{1,1}(\tau) = C = m_\eta^2 = a^2.$$

Таким образом, искомая корреляционная функция равна

$$R_\eta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi}\arcsin\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2}. \tag{12.34}$$

Если воспользоваться разложением

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots,$$

функцию (12.34) можно представить в виде ряда

$$R_\eta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi}\left\{\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\left[\frac{\sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2+\gamma^2}\right]^3 + \ldots\right\}.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

12.1. На вход двухполупериодного квадратичного детектора с характеристикой (рис. 12.3)

$$\eta = f[\xi] = a\xi^2, \qquad a > 0,$$

воздействует стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

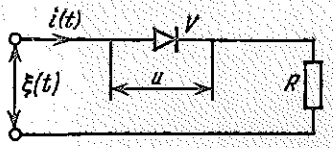
Найти плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$, математическое ожидание m_η и дисперсию D_η выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = a\sqrt{2m_\xi^2 D_\xi + m_\xi^4}, \qquad D_\eta = 2a^2 D_\xi (D_\xi + 2m_\xi^2),$$

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi a\eta}\,\sigma_\xi}\left\{\exp\left[-\dfrac{\left(\sqrt{\eta/a}-m_\xi\right)^2}{2\sigma_\xi^2}\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[-\dfrac{\left(\sqrt{\eta/a}+m_\xi\right)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]\right\}, & \eta \geqslant 0 \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

Рис. 12.12. Нелинейная электрическая цепь



12.2. Огибающая $A(t)$ узкополосного случайного напряжения на входе квадратичного детектора огибающей распределена по закону Релея:

$$p_1(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2}, \quad A \geqslant 0.$$

Найти плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$, математическое ожидание m_η и дисперсию D_η напряжения $\eta(t)$ на выходе детектора, если

$$\eta(t) = (\alpha/2) A^2(t).$$

Ответ: $m_\eta = \alpha\sigma^2$, $D_\eta = \alpha^2\sigma^4$, $p_1(\eta) = \frac{1}{\alpha\sigma^2} e^{-\eta/\alpha\sigma^2}$, $\eta \geqslant 0$.

12.3. На цепь, состоящую из последовательно соединенных полупроводникового диода V и резистора R (рис. 12.12), воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$. Характеристика диода имеет вид

$$i = f[u] = \begin{cases} su, & u \geqslant 0, \\ s_1 u, & u < 0, \end{cases}$$

где

$$s = (R_{i_{пр}} + R)^{-1}, \quad s_1 = (R_{i_{обр}} + R)^{-1},$$

$R_{i_{пр}}$ и $R_{i_{обр}}$ — внутреннее сопротивление диода в прямом и обратном направлении.

Определить математическое ожидание m_i тока $i(t)$ в цепи и его дисперсию D_i.

Ответ: $m_i = \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{2\pi}}(s - s_1)$; $D_i = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}[(\pi - 1)(s^2 + s_1^2) + 2ss_1]$.

12.4. Найти плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе однополупериодного линейного детектора, характеристика которого представлена на рис. 12.13, если на вход детектора воздействует гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Ответ: $p_1(\eta) = \frac{1}{2}\delta(\eta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a\sigma_\xi} e^{-\eta^2/2a^2\sigma_\xi^2}$, $\eta \geqslant 0$.

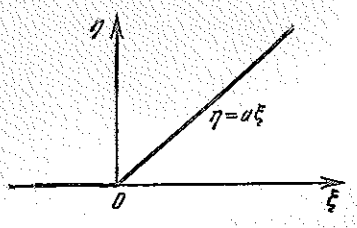


Рис. 12.13. Амплитудная характеристика однополупериодного линейного детектора

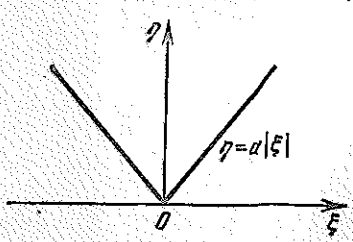


Рис. 12.14. Амплитудная характеристика двухполупериодного линейного детектора

12.5. Найти плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе двухполупериодного линейного детектора, характеристика которого представлена на рис. 12.14. На вход детектора воздействует гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Ответ: $p_1(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\sigma_\xi} e^{-\eta^2/2a^2\sigma_\xi^2}$, $\eta \geqslant 0$.

12.6. Найти одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе однополупериодного квадратичного детектора, характеристика которого изображена на рис. 12.15, если на вход детектора воздействует гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Ответ: $p_1(\eta) = \frac{1}{2}\delta(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi a\eta}\,\sigma_\xi} e^{-\eta/2a\sigma_\xi^2}$, $\eta \geqslant 0$.

12.7. На квантующее устройство с характеристикой (рис. 12.16)

$$\eta = f[\xi] = a \operatorname{sgn} \xi$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

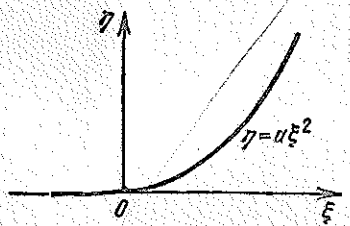


Рис. 12.15. Амплитудная характеристика однополупериодного квадратичного детектора

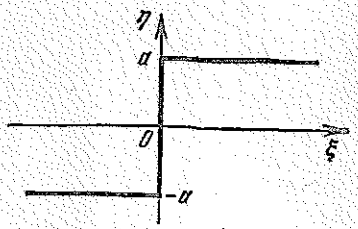


Рис. 12.16. Амплитудная характеристика квантователя на два уровня

Определить: 1) средний квадрат ε^2 разности процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на входе и выходе квантующего устройства; 2) значение $a = a_{\text{opt}}$, минимизирующее ε^2, и соответствующий этому значению минимальный средний квадрат $\varepsilon^2_{\min}$.

Ответ:

1) $\varepsilon^2 = M\{[\eta(t) - \xi(t)]^2\} = \sigma_\xi^2 - 2\sqrt{2/\pi}a\sigma_\xi + a^2$;

2) $a_{\text{opt}} = \sqrt{2/\pi}\sigma_\xi$, $\varepsilon^2_{\min} = (1 - 2/\pi)\sigma_\xi^2$.

12.8. На вход квантователя (рис. 12.16) воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$, математическое ожидание m_η и дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе квантователя.

Ответ:

$$p_1(\eta) = \Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\delta(a-\eta) + \Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\delta(a+\eta);$$

$$m_\eta = a\left[\Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\right];\ D_\eta = 4a^2\Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right).$$

12.9. На симметричный ограничитель, характеристика которого представлена на рис. 12.17, воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Найти одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ для напряжения $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Ответ:

$$p_1(\eta) = \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_\xi}\right)\right]\delta(\eta + a) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi}e^{-\eta^2/2\sigma_\xi^2} + \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_\xi}\right)\right]\delta(\eta - a),\ -a \leqslant \eta \leqslant a,$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (12.11).

12.10. Найти одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$, математическое ожидание m_η и дисперсию D_η напряжения на выходе идеального ограничителя с характеристикой

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} \xi - h, & \xi \geqslant h, \\ 0, & \xi < h, \end{cases}$$

если на вход ограничителя подается случайное напряжение $\xi(t)$ с плотностью распределения вероятностей

$$p_1(\xi) = \xi e^{-\xi^2/2},\ \xi \geqslant 0.$$

Ответ

$$p_1(\eta) = [1 - e^{-h^2/2}]\delta(\eta) + (\eta + h)e^{-(\eta+h)^2/2},\ \eta \geqslant 0;$$

$$m_\eta = \sqrt{2\pi}\,[1 - \Phi(h)];\ D_\eta = 2(e^{-h^2/2} - hm_\eta) - m_\eta^2.$$

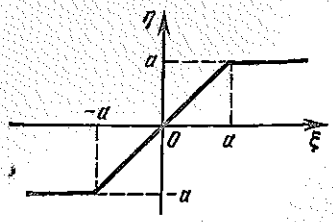


Рис. 12.17. Амплитудная характеристика симметричного ограничителя

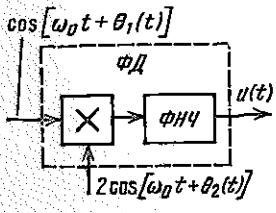


Рис. 12.18. Фазовый детектор

12.11. Напряжение $u(t)$ на выходе фазового детектора (ФД), состоящего из перемножителя и фильтра нижних частот (ФНЧ) (рис. 12.18), равно

$$u(t) = \cos\varphi(t) = \cos[\theta_1(t) - \theta_2(t)].$$

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(u)$, если $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ представляют собой независимые стационарные случайные процессы, равномерно распределенные на интервале $(-\pi,\pi)$.

Ответ: $p_1(u) = 1/\pi\sqrt{1-u^2}$, $|u| \leqslant 1$.

12.12. На радиотехническое устройство, состоящее из квадратичного детектора огибающей, линии задержки и преобразователя (рис. 12.19), воздействует гауссовский стационарный квазигармонический случайный процесс

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2\rho_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau$.

Определить одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(y)$, одномерную начальную моментную функцию ν-го порядка $m_\nu(t) = M\{y^\nu(t)\}$, математическое ожидание $m_y(t) = m_1(t) = M\{y(t)\}$ и дисперсию $D_y(t) = m_2(t) - m_1^2(t)$ процесса $y(t)$ на выходе преобразователя, осуществляющего сложение процессов $u(t)$ и $u(t+\tau)$:

$$y(t) = u(t) + u(t-\tau),$$

где $u(t)$ — процесс на выходе детектора, равный квадрату огибающей входного шума $\xi(t)$: $u(t) = A^2(t)$.

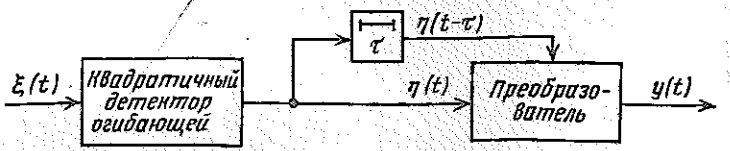


Рис. 12.19. Квадратичный детектор огибающей, линия задержки и преобразователь

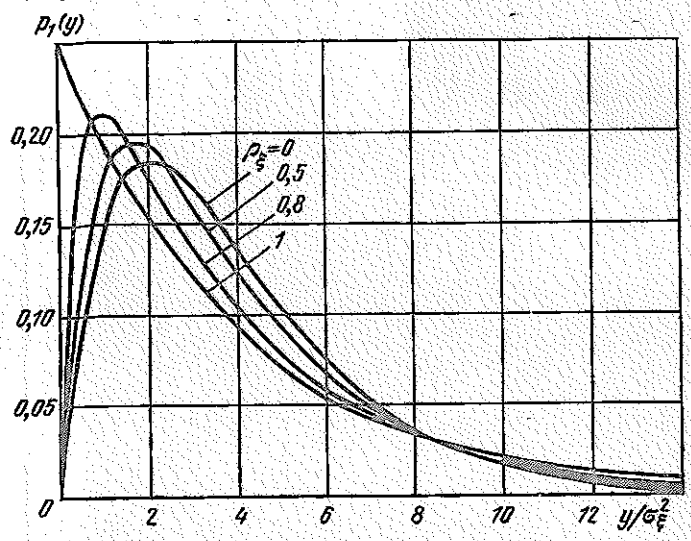


Рис. 12.20. Плотность распределения вероятностей суммы квадратов огибающей квазигармонического шума

Ответ::

$$p_1(y) = \frac{1}{4\sigma_\xi^2 \rho_\xi}\left\{\exp\left[-\frac{y}{2\sigma_\xi^2(1+\rho_\xi)}\right] - \exp\left[-\frac{y}{2\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi)}\right]\right\}, \quad y \geqslant 0,$$

$$m_\nu(t) = m_\nu = 2^\nu \nu! [(1+\rho_\xi)^{\nu+1} - (1-\rho_\xi)^{\nu+1}]\,\sigma_\xi^{2\nu}/2\rho_\xi,$$

$$m_y(t) = m_y = 4\sigma_\xi^2, \quad D_y(t) = D_y = 8(1+\rho_\xi^2)\rho_\xi^4, \quad \rho_\xi = \rho_\xi(\tau).$$

График функции $p_1(y)$ приведен на рис. 12.20.

12.13. Решить предыдущую задачу при условии, что процесс на выходе преобразователя $y(t) = u(t) - u(t-\tau)$.

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{1}{4\sigma_\xi^2\sqrt{1-\rho_\xi^2}} \exp\left(-\frac{|y|}{2\sigma_\xi^2\sqrt{1-\rho_\xi^2}}\right);$$

$$m_{2\nu} = 2^\nu \nu!(1-\rho_\xi^2)^\nu \sigma_\xi^{4\nu}; \qquad m_y = 0; \qquad D_y = 2\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2).$$

График функции $p_1(y)$ приведен на рис. 12.21.

12.14. Решить задачу 12.17 для случая, когда преобразователь представляет собой перемножитель, т. е.

$$y(t) = u(t)\,u(t-\tau).$$

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{1}{2\sigma_\xi^4(1-\rho_\xi^2)} I_0\left(\frac{\rho_\xi\sqrt{y}}{\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)}\right) K_0\left(\frac{\rho_\xi\sqrt{y}}{\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)}\right), \quad y \geqslant 0,$$

$$m_\nu = 2^{2\nu}(\nu!)^2(1-\rho_\xi^2)^2 \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(\nu+k)!}{(k!)^2(\nu-k)!}\left(\frac{\rho_\xi^2}{1-\rho_\xi^2}\right)\sigma_\xi^{4n},$$

$$m_y = 4\sigma_\xi^4(1+\rho_\xi^2), \qquad D_y = 16\sigma_\xi^8(3+14\rho_\xi^2+3\rho_\xi^4).$$

Здесь $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода [76]. График функции $p_1(y)$ приведен на рис. 12.22.

12.15. Решить задачу 12.12 при условии, что процесс на выходе преобразователя равен $y(t) = u(t-\tau)/u(t)$.

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{(1-\rho_\xi^2)^2(1+y)}{[1+2(1-2\rho_\xi^2)y+y^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad y \geqslant 0;$$

m_ν, m_y и D_y элементарно не вычисляются. График функции $p_1(y)$ приведен на рис. 12.23.

12.16. На радиотехническое устройство, состоящее из линейного детектора огибающей, линии задержки и преобразователя

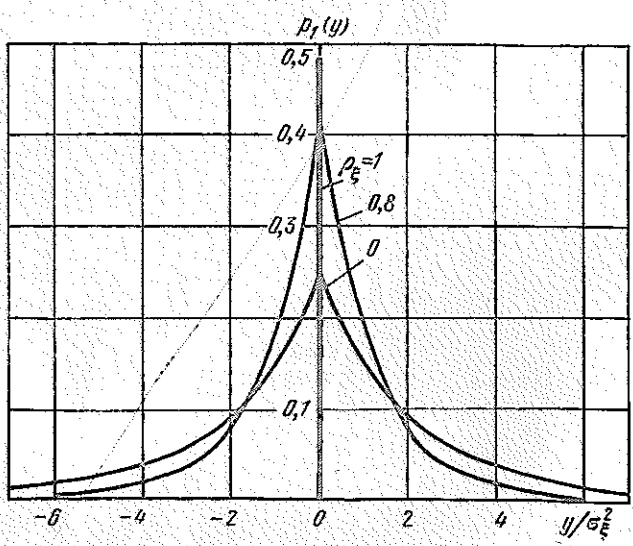


Рис. 12.21. Плотность распределения вероятностей разности квадратов огибающей квазигармонического шума

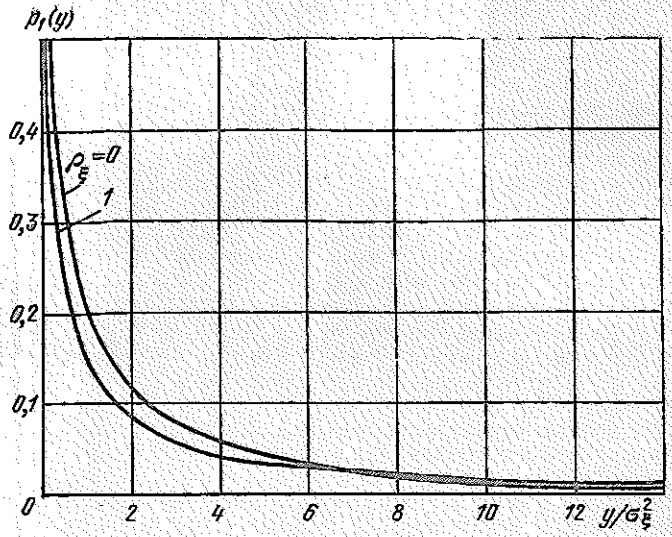


Рис. 12.22. Плотность распределения вероятностей произведения квадратов огибающей квазигармонического шума

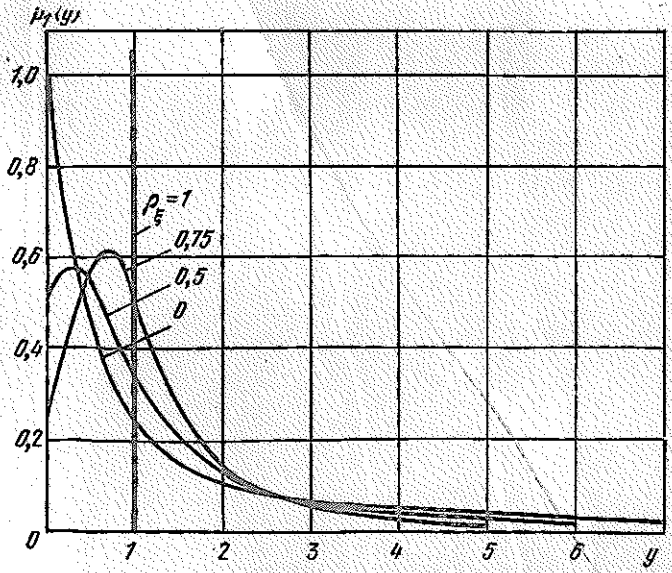


Рис. 12.23. Плотность распределения вероятностей частного квадратов огибающей квазигармонического шума

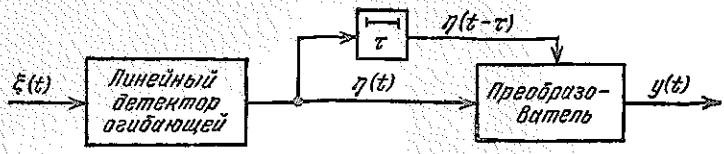


Рис. 12.24. Линейный детектор огибающей, линия задержки и преобразователь

(рис. 12.24), воздействует гауссовский стационарный квазигармонический случайный процесс

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

Вычислить одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(y)$, одномерную начальную моментную функцию ν-го порядка $m_\nu(t) = M\{y^\nu(t)\}$, математическое ожидание $m_y(t) = m_1(t) = M\{y(t)\}$ и дисперсию $D_y(t) = m_2(t) - m_1^2(t)$ процесса $y(t)$ на выходе преобразователя, осуществляющего операцию суммирования:

$$y(t) = u(t) + u(t-\tau), \qquad u(t) = A(t).$$

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{1-\rho_\xi^2}{2\sigma_\xi}\left\{\frac{y}{\sigma_\xi}\exp\left(-\frac{y^2}{4\sigma_\xi^2}\right) + \sqrt{\pi}\left(\frac{y^2}{2\sigma_\xi} - 1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\Phi\left(\frac{y}{\sigma_\xi}\right) - \frac{1}{2}\right]\right\}\exp\left(-\frac{y^2}{4\sigma_\xi^2}\right) + \rho_\xi^2\frac{y}{4\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{y^2}{8\sigma_\xi^2}\right), \quad y \geqslant 0,$$

$$m_\nu(t) = m_\nu \simeq (1-\rho_\xi^2)(\sqrt{2}\,\sigma_\xi)^\nu \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k \Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu-k}{2}\right) + \rho_\xi^2(2\sqrt{2}\,\sigma_\xi)^\nu \Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right),$$

$$m_y(t) = m_y = \sqrt{2\pi}\sigma_\xi, \qquad D_y(t) = D_y = (4-\pi)(1+\rho_\xi^2)\sigma_\xi^2,$$

$$\rho_\xi = \rho_\xi(\tau).$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. График функции $p_1(y)$ приведен на рис. 12.25.

12.17. Решить предыдущую задачу при условии, что процесс на выходе преобразователя $y(t) = u(t) - u(t-\tau)$.

Ответ:

$$p_1(y) \simeq \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi(1-\rho_\xi^2)}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)}\right);$$

$$m_{2\nu} \simeq (2\nu-1)!!(1-\rho_\xi^2)^\nu\sigma_\xi^{2\nu}; \qquad m_y = 0; \quad D_y \simeq \sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2).$$

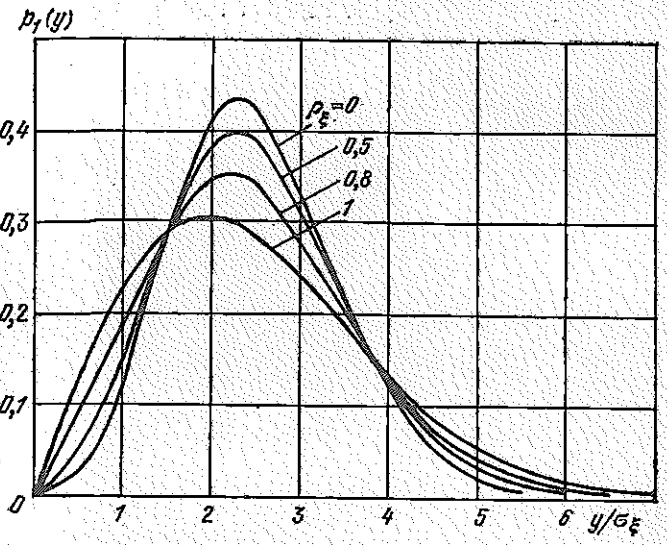


Рис. 12.25. Плотность распределения вероятностей суммы огибающих квазигармонического шума

График плотности распределения вероятностей $p_1(y)$ приведен на рис. 12.26.

12.18. Решить задачу 12.16 для случая, когда преобразователь представляет собой перемножитель, т. е. $y(t) = u(t)\,u(t-\tau)$.

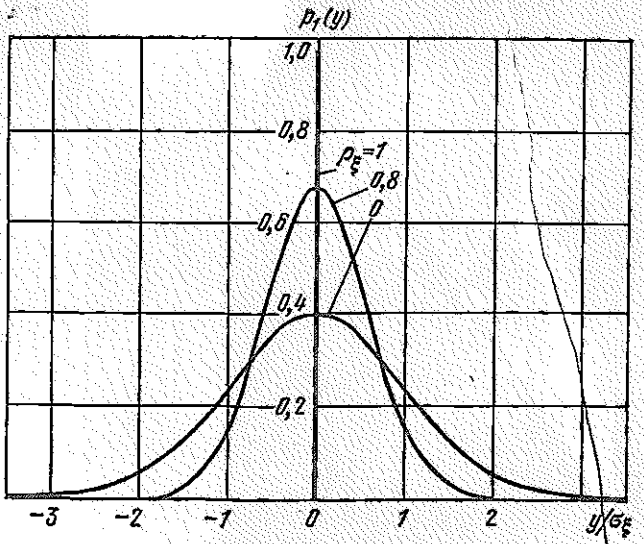


Рис. 12.26. Плотность распределения вероятностей разности огибающих квазигармонического шума

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{y}{\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)} I_0\left(\frac{\rho_\xi y}{\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)}\right) K_0\left(\frac{y}{\sigma_\xi^2(1-\rho_\xi^2)}\right), \quad y \geqslant 0,$$

$$m_\nu = 2^\nu \Gamma^2\left(1+\frac{\nu}{2}\right)(1-\rho_\xi^2)^{\nu+1}\, {}_2F_1\left(1+\frac{\nu}{2};\ 1+\frac{\nu}{2};\ 1;\ \rho_\xi^2\right)\sigma_\xi^{2\nu};$$

$$m_y = \frac{\pi}{2}(1-\rho_\xi^2)^2\, {}_2F_1\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ 1;\ \rho_\xi^2\right)\sigma_\xi^2; \quad D_y = m_2 - m_y^2.$$

Здесь ${}_2F_1(x;\ y;\ z;\ q)$ — гипергеометрическая функция [71]. График $p_1(y)$ дан на рис. 12.27.

12.19. Решить задачу 12.16 при условии, что процесс на выходе преобразователя $y(t) = u(t-\tau)/u(t)$.

Ответ:

$$p_1(y) = \frac{2(1-\rho_\xi^2)\, y(y^2+1)}{[1+2(1-2\rho_\xi^2)\, y^2 - y^4]^{3/2}}, \quad y \geqslant 0, \quad m_y = E(\rho_\xi).$$

Здесь $E(z)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. График плотности распределения вероятностей $p_1(y)$ приведен на рис. 12.28.

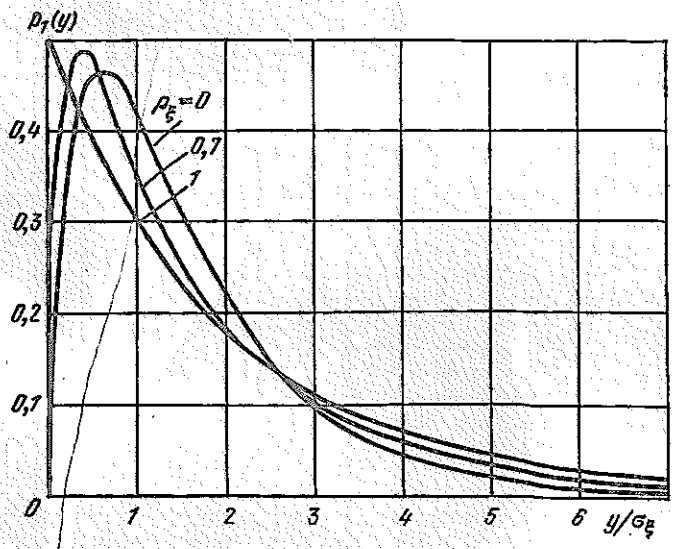


Рис. 12.27. Плотность распределения вероятностей произведения огибающих квазигармонического шума

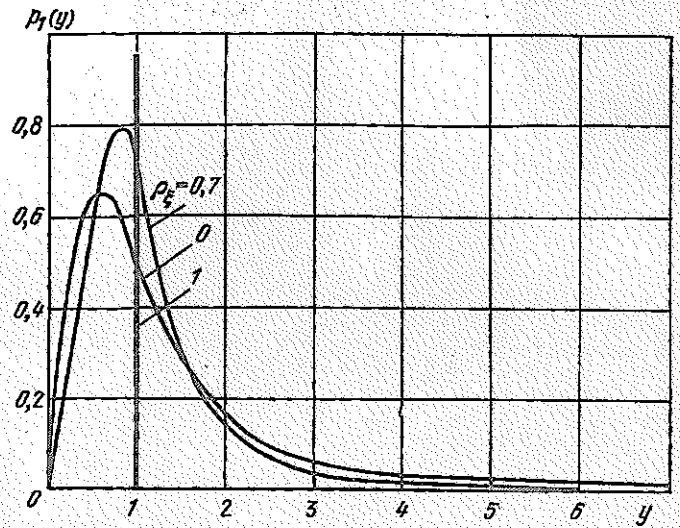


Рис. 12.28. Плотность распределения вероятностей частного огибающих квазигармонического шума

12.20. На вход радиотехнического устройства, состоящего из сумматора и линейного детектора огибающей (рис. 12.29), воздействует гауссовский стационарный квазигармонический шум

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$ и гармоническое колебание

$$u_0(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \psi).$$

В некоторый момент времени $t = t_0$ на третий вход сумматора подается сигнал

$$u_s(t) = U_s\cos\omega_0 t.$$

Определить отношение

$$a = \frac{(m_y)_{o+s} - (m_y)_o}{(\sigma_y)_{o+s}},$$

где $(m_y)_o$ — математическое ожидание процесса $y(t)$ на выходе устройства при воздействии на его вход процессов $\xi(t)$ и $u_o(t)$, $(m_y)_{o+s}$ и $(\sigma_y)_{o+s}$ — соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое значение при воздействии процессов $\xi(t)$, $u_o(t)$ и $u_s(t)$.

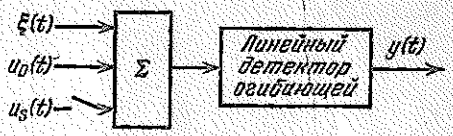


Рис. 12.29. Сумматор и линейный детектор огибающей

Ответ:

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{{}_1F_1\left(-\frac{1}{2};\,1;\,-\frac{U^2}{2\sigma_\xi^2}\right)-{}_1F_1\left(-\frac{1}{2};\,1;\,-\frac{U_0}{2\sigma_\xi^2}\right)}{\left[2\left(1+\frac{U^2}{2\sigma_\xi^2}\right)-\frac{\pi}{2}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2};\,1;\,-\frac{U^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\right]^{1/2}},$$

где

$$U^2 = U_s^2 + U_0^2 + 2U_sU_0\cos\psi.$$

При $U^2/2\sigma_\xi^2 \ll 1$ и $U_0^2/2\sigma_\xi^2 \ll 1$ имеем

$$a \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4-\pi}\right)^{1/2}(U_s^2 + 2U_0U_s\cos\psi)\,\sigma_\xi^{-2};$$

при $U^2/2\sigma_\xi^2 \gg 1$, $U_0^2/2\sigma_\xi^2 \gg 1$

$$a = (U - U_0)/\sigma_\xi.$$

Графики функций $a = f(U_0/\sigma_\xi,\ U_s/\sigma_\xi)$ приведены на рис. 12.30.

12.21. На вход безынерционного однополупериодного линейного детектора с характеристикой (рис. 12.13)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a\xi, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau).$$

Определить математическое ожидание m_η, корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и дисперсию D_η выходного процесса $\eta(t)$.

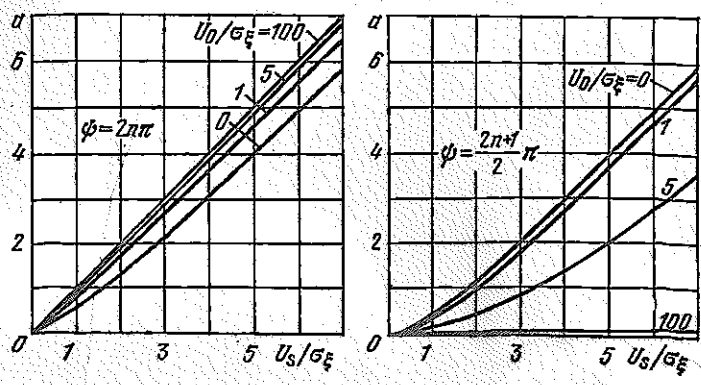


Рис. 12.30. Относительное приращение математического ожидания линейного детектора огибающей

Ответ [33]:

$$m_\eta = \frac{a\sigma_\xi}{\sqrt{2\pi}}; \quad R_\eta(\tau) = \frac{a^2\sigma_\xi^2}{2\pi}\{[1 - r_\xi^2(\tau)]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ r_\xi(\tau)\arccos[-r_\xi(\tau)]\} - m_\eta^2 \simeq \frac{a^2}{4}\left[R_\xi(\tau) + \frac{R_\xi^2(\tau)}{\pi\sigma_\xi^2}\right]; \quad D_\eta = \frac{a^2\sigma_\xi^2}{2}.$$

Указание: Следует воспользоваться разложениями в ряд:

$$\arccos(-z) = \frac{\pi}{2} + z + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \ldots,$$

$$(1-z^2)^{1/2} = 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2\cdot 4} - \ldots$$

12.22. На вход безынерционного двухполупериодного линейного детектора с характеристикой (рис. 12.14)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a\xi, & \xi \geqslant 0, \\ -a\xi, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η процесса $\eta(t)$ на выходе детектора и его корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$.

Ответ: $m_\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a\sigma_\xi$, $R_\eta(\tau) = \frac{a^2}{\pi\sigma_\xi^2}R_\xi^2(\tau)$.

12.23. На вход безынерционного однополупериодного квадратичного детектора с амплитудной характеристикой (рис. 12.15)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a\xi^2, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = \frac{a\sigma_\xi^2}{2}, \quad R_\eta(\tau) = \frac{2a^2\sigma_\xi^4}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}r_\xi^2(\tau) + \frac{1}{4}\arcsin r_\xi(\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}r_\xi^2(\tau)\arcsin r_\xi(\tau) + \frac{3}{4}r_\xi(\tau)\sqrt{1 - r_\xi^2(\tau)}\right].$$

12.24. На вход двухполупериодного квадратичного детектора с амплитудной характеристикой (рис. 12.3)

$$\eta = f[\xi] = a\xi^2, \qquad a > 0,$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ: $m_\eta = a\sigma_\xi^2$; $R_\eta(\tau) = 2a^2 R_\xi^2(\tau)$.

12.25. На вход квантующего устройства на три уровня с амплитудной характеристикой (рис. 21.31)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ 0, & -\beta \leqslant \xi < \alpha, \\ a, & \xi \geqslant \alpha, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = (a - b) - \left[a\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - b\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)\right],$$

$$R_\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a\Phi^{(n)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) + b\Phi^{(n)}\left(-\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)\right]^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}.$$

12.26. На вход несимметричного квантующего устройства на два уровня с амплитудной характеристикой (рис. 1.32)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a, & \xi \geqslant 0, \\ -b, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе устройства.

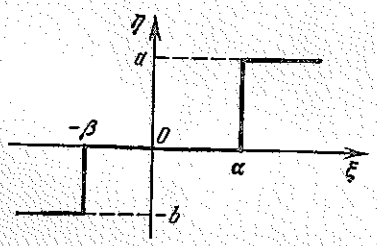


Рис. 12.31. Амплитудная характеристика квантующего устройства на три уровня

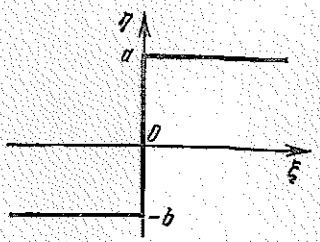
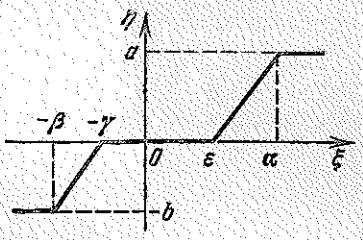


Рис. 12.32. Амплитудная характеристика несимметричного квантователя на два уровня

Рис. 12.33. Амплитудная характеристика ограничителя



Ответ:

$$m_\eta = \frac{1}{2}(a-b),\ R_\eta(\tau) = \frac{(a+b)^2}{2\pi}\arcsin r_\xi(\tau).$$

12.27. На ввод нелинейного безынерционного устройства с амплитудной характеристикой (рис. 12.33)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ b(\xi+\gamma)/(\gamma-\beta), & -\beta \leqslant \xi < -\gamma, \\ 0, & -\gamma \leqslant \xi < \varepsilon, \\ a(\xi-\varepsilon)/(\alpha-\varepsilon), & \varepsilon \leqslant \xi < \alpha, \\ a, & \xi \geqslant \alpha, \end{cases}$$

где $a/(\alpha-\varepsilon) = b/(\gamma-\beta) = s$, воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе.

Ответ:

$$m_\eta = s\sigma_\xi\left\{\frac{\alpha}{\sigma_\xi} - \frac{\beta}{\sigma_\xi} - \frac{\varepsilon}{\sigma_\xi} + \frac{\gamma}{\sigma_\xi} - \left[\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) + \frac{\beta}{\sigma_\xi}\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)\right] + \right.$$
$$+\left[\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) - \frac{\gamma}{\sigma_\xi}\Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)\right] - \left[\Phi'\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \Phi'\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)\right] +$$
$$\left.+\left[\Phi'\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) - \Phi'\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)\right]\right\},$$

$$R_\eta(\tau) = (s\sigma_\xi)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\Phi^{(n+1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \Phi^{(n+1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)\right] - \right.$$
$$\left.-\left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)\right]\right\}\frac{1}{n!}r_\xi^n(\tau).$$

12.28. На вход однополупериодного линейного детектора с амплитудной характеристикой

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a\xi, & \xi \geqslant \alpha, \\ 0, & \xi < \alpha, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить математическое ожидание m_η и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = a\sigma_\xi\left[\Phi'\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \frac{\alpha}{\sigma_\xi}\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right)\right],$$

$$R_\eta(\tau) = (a\sigma_\xi)^2\left\{\Phi^{(2)}\left(-\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) r_\xi(\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right)\right]^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}\right\}.$$

12.29. На логарифмическое устройство с нелинейной характеристикой вида

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} \ln(1+\alpha\xi), & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить корреляционную функциию $R_\eta(\tau)$ и дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе.

Ответ [77]:

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\infty \ln(1+ax)\, e^{-\frac{x^2}{2}} D_n(x)\, dx\right]^2 r_\xi^2(\tau),$$

где $a = \alpha\sigma_\xi\sqrt{2}$; $D_n(x)$ — функция параболического цилиндра [78];

$$D_\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\ln^2(1+ax)\, dx - M^2\{\ln(1+\alpha\xi)\}.$$

12.30. На вход симметричного ограничителя с характеристикой (рис. 12.34)

$$\eta = f[\xi] = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\int_{-\infty}^{\xi} e^{-x^2/2\sigma_0^2}\, dx - a$$

воздействует гауссовский стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Рис. 12.34. Амплитудная характеристика симметричного сглаженного ограничителя

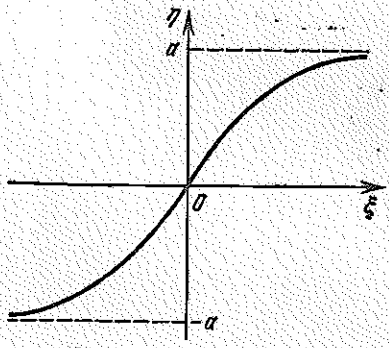
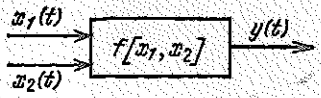


Рис. 12.35. Безынерционное нелинейное устройство с двумя входами



Определить одномерную плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Ответ [79]:

$$p_1(\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\eta}\exp\left(-\dfrac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right), & \sigma_\xi \ll \sigma_0,\\ 1/2a, & \sigma_\xi=\sigma_0,\\ [\delta(\eta+a)+\delta(\eta-a)]/2, & \sigma_\xi \gg \sigma_0;\end{cases}$$

$$R_\eta'(\tau)=\sigma_\eta^2\,\frac{\arcsin[r_\xi(\tau)/(1+\alpha)]}{\arcsin[1/(1+\alpha)]},\quad \alpha=\frac{\sigma_0\sqrt{\pi}}{\sigma_\xi}.$$

12.31. На вход безынерционного нелинейного устройства (рис. 12.35) воздействуют стационарные гауссовские случайные процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями $m_{x_1}=m_{x_2}=0$ и дисперсиями $D_{x_1}=D_{x_2}=1$. Совместная плотность распределения вероятностей процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеет вид

$$p_2(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2}{2(1-r^2)}\right],$$

где $r=r(\tau)$ — нормированная взаимная корреляционная функция. Процесс на выходе нелинейного устройства определяется соотношением

$$y(t)=f[x_1(t),\ x_2(t)].$$

Доказать, что n-я производная от математического ожидания $M\{y(t)\}$ по $r(\tau)$

$$\frac{\partial^n M\{y(t)\}}{\partial r^n(\tau)}=M\left\{\frac{\partial^{2n} f[x_1(t),\ x_2(t)]}{\partial^n x_1(t)\,\partial^n x_2(t)}\right\}.$$

12.32. Используя результат задачи 12.31, определить математическое ожидание $M\{y(t)\}$ процесса $y(t)$ на выходе безынерционного нелинейного устройства с характеристикой

$$y(t) = f[x_1(t),\ x_2(t)] = |x_1(t) + x_2(t)| - |x_1(t) - x_2(t)|,$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — стационарные гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями $m_{x_1} = m_{x_2} = 0$, дисперсиями $D_{x_1} = D_{x_2} = 1$ и совместной плотностью распределения вероятностей

$$p_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2(1-r^2)}\right].$$

Ответ: $M\{y(t)\} = m_y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r}\right]$.

12.33. Процесс $\eta(t)$ формируется из случайного колебания $\xi(t)$ посредством нелинейного безынерционного преобразования: $\eta(t) = f[\xi(t)]$. Предполагается, что $\xi(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ для следующих частных случаев:

1) $\eta(t) = \xi(t)\,\xi(t+T)$; 2) $\eta(t) = \xi^3(t)$; 3) $\eta(t) = \xi^4(t)$.

Ответ:

1) $R_\eta(\tau) = R_\xi^2(\tau) + R_\xi(\tau+T)\,R_\xi(\tau-T)$;
2) $R_\eta(\tau) = 6R_\xi^3(\tau) + 9\sigma_\xi^2 R_\xi(\tau)$;
3) $R_\eta(\tau) = 24R_\xi^4(\tau) + 72\sigma_\xi^2 R_\xi^2(\tau)$.

12.34. Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе однополупериодного линейного детектора с амплитудной характеристикой

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} a\xi, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

при воздействии на его вход стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0, & \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = (a^2 N_0/2\pi)(\omega_2 - \omega_1)\,\delta(\omega) + S_{\eta_0}(\omega),$$

где

$$S_{\eta_0}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{a^2N_0}{2\pi}\dfrac{\omega_2-\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega_1}, & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_2-\omega_1,\\ \dfrac{a^2N_0}{2\pi}, & \omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2,\\ \dfrac{a^2N_0}{2\pi}\dfrac{\omega-2\omega_1}{\omega_2-\omega_1}, & 2\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_1+\omega_2,\\ \dfrac{a^2N_0}{2\pi}\dfrac{2\omega_2-\omega}{\omega_2-\omega_1}, & \omega_1+\omega_2<\omega\leqslant 2\omega_2,\\ 0 & \text{при других } \omega.\end{cases}$$

График функции $S_{\eta_0}(\omega)$ представлен на рис. 12.36.

12.35. Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе двухполупериодного линейного детектора с амплитудной характеристикой

$$\eta=f[\xi]=\begin{cases}a\xi, & \xi\geqslant 0,\\ -a\xi, & \xi<0,\end{cases}$$

при воздействии на его вход стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi=0$ и спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega)=\begin{cases}N_0, & \omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2,\\ 0 & \text{при других } \omega.\end{cases}$$

Ответ:

$$S_\eta(\omega)=(2a^2N_0/\pi)(\omega_2-\omega_1)\,\delta(\omega)+S_{\eta_0}(\omega),$$

где

$$S_{\eta_0}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2a^2N_0}{2\pi}\dfrac{\omega_2-\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega_1}, & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_2-\omega_1,\\ \dfrac{a^2N_0}{\pi}\dfrac{\omega-2\omega_1}{\omega_2-\omega_1}, & 2\omega_1\leqslant\omega<\omega_1+\omega_2,\\ \dfrac{a^2N_0}{\pi}\dfrac{2\omega_2-\omega}{\omega_2-\omega_1}, & \omega_1+\omega_2\leqslant\omega\leqslant 2\omega_2.\end{cases}$$

График спектральной плотности $S_{\eta_0}(\omega)$ приведен на рис. 12.37.

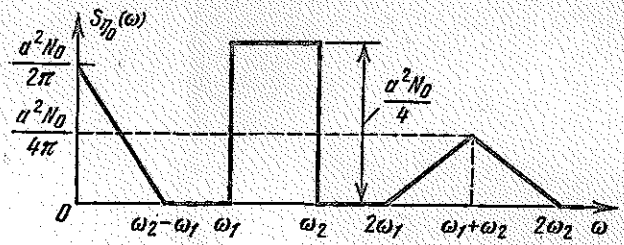


Рис. 12.36. Спектральная плотность процесса на выходе однополупериодного детектора

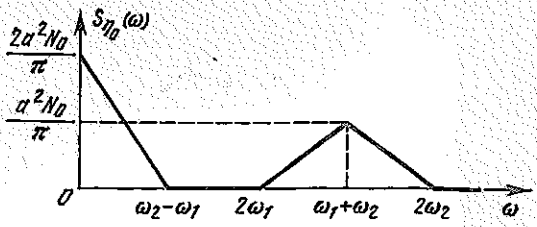


Рис. 12.37. Спектральная плотность процесса на выходе двухполупериодного линейного детектора

12.36. На вход радиотехнического устройства, состоящего из дифференцирующей схемы и перемножителя (рис. 12.38), подается гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right).$$

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе устройства.

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = \frac{4\sigma_\xi^2\alpha(\alpha^2+\omega_0^2)\omega^2(\omega^2+20\alpha^2+4\omega_0^2)}{(\omega^2+4\alpha^2)[(\omega^2+4\alpha^2+4\omega_0^2)^2-16\omega^2\omega_0^2]}.$$

12.37. На входы перемножителя (рис. 12.6) подаются независимые стационарные случайные процессы $\xi(t)$ и $\mu(t)$ с математическими ожиданиями m_ξ и m_μ и корреляционными функциями

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad R_\mu(\tau) = \sigma_\mu^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе перемножителя.

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2(\alpha+\beta)\sigma_\xi^2\sigma_\mu^2}{(\alpha+\beta)^2+\omega^2} + \frac{2\beta m_\xi^2\sigma_\mu^2}{\beta^2+\omega^2} + \frac{2\alpha m_\mu^2\sigma_\xi^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

12.38. На вход радиотехнического устройства, состоящего из дифференцирующих схем и перемножителя (рис. 12.39), подаются независимые стационарные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с ну-

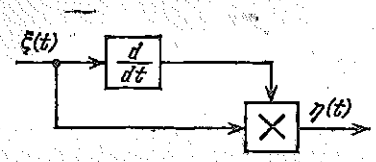


Рис. 12.38. Дифференцирующая схема и перемножитель

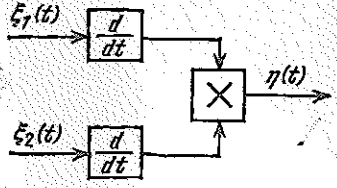
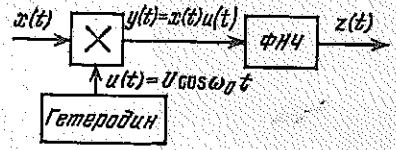


Рис. 12.39. Две дифференцирующие схемы и перемножитель

Рис. 12.40. Синхронный детектор



левыми математическими ожиданиями $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$ и корреляционными функциями

$$R_{\xi_1}(\tau) = \sigma_{\xi_1}^2 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{\alpha_1}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

$$R_{\xi_2}(\tau) = \sigma_{\xi_2}^2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\omega_2\tau + \frac{\alpha_2}{\omega_2}\sin\omega_2|\tau|\right).$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе перемножителя.

Ответ:

$$R_\eta(\tau) = R_{\xi_1}(\tau)\,R_{\xi_2}(\tau) = \sigma_{\xi_1}^2\,\sigma_{\xi_2}^2\,(\alpha_1^2+\omega_1^2)(\alpha_2^2+\omega_2^2)\times$$

$$\times e^{-(\alpha_1+\alpha_2)|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau - \frac{\alpha_1}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right)\left(\cos\omega_2\tau - \frac{\alpha_2}{\omega_2}\sin\omega_2|\tau|\right);$$

$$S_\eta(\omega) = a\left[\frac{\alpha\cos\delta_1 + (\omega-\omega_c)\sin\delta_1}{(\omega-\omega_c)^2+\alpha^2} - \frac{\alpha\cos\delta_1 + (\omega+\omega_c)\sin\delta_1}{(\omega+\omega_c)^2+\alpha^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha\cos\delta_2 + (\omega-\omega_p)\sin\delta_2}{(\omega-\omega_p)^2+\alpha^2} - \frac{\alpha\cos\delta_2 + (\omega+\omega_p)\sin\delta_2}{(\omega+\omega_p)^2+\alpha^2}\right],$$

где

$$a = \sigma_{\xi_1}^2\,\sigma_{\xi_2}^2\,\omega_1^2\,\omega_2^2/2\cos^3\gamma_1\cos^3\gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\omega_1},\quad \gamma_2 = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_2}{\omega_2},\quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\delta_1 = \gamma_1 + \gamma_2,\quad \delta_2 = \gamma_1 - \gamma_2,\quad \omega_c = \omega_1 + \omega_2,\quad \omega_p = \omega_1 - \omega_2.$$

12.39. Найти спектральную плотность $S_y(\omega)$ процесса $y(t)$ на выходе умножителя синхронного детектора (рис. 12.40), если воздействующее на детектор колебание $x(t) = s(t) + n(t)$, где входной шум $n(t)$ представляет собой стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием $m_n = 0$ и спектральной плотностью

$$S_n(f) = \frac{\sigma_n^2}{2\alpha\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\alpha^2}\right] + \exp\left[-\frac{(f+f_0)^2}{2\alpha^2}\right]\right\},\quad \alpha \ll f_0,$$

а полезный сигнал $s(t) = A_m\cos(\omega_0 t + \theta)$.

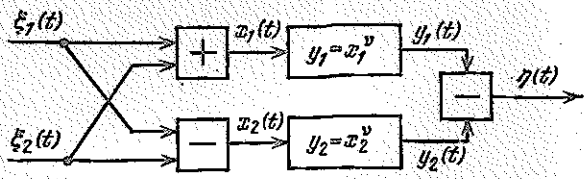


Рис. 12.41. Балансный модулятор

Здесь A_m — постоянная амплитуда, θ — равномерно распределенная в интервале $(-\pi, \pi)$ случайная фаза, не зависящая от шума.

Ответ: $S_y(f) = S_{y\text{с}}(f) + S_{y\text{ш}}(f)$,

где

$$S_{y\text{с}}(f) = \frac{1}{8} A_m^2 U^2 \delta(f) + \frac{1}{16} A_m^2 U^2 [\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)]$$

— спектральная плотность сигнала на выходе умножителя;

$$S_{y\text{ш}}(f) = \frac{\sigma_n^2 U^2}{8\alpha\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\exp\left(-\frac{f^2}{2\alpha^2}\right) + \exp\left[-\frac{(f-2f_0)^2}{2\alpha^2}\right] + \exp\left[-\frac{(f+2f_0)^2}{2\alpha^2}\right] \right\}$$

— спектральная плотность шума на выходе умножителя.

12.40. На входы балансного модулятора (рис. 12.41) поступают стационарные и стационарно связанные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$, корреляционными функциями $R_{\xi_1}(\tau) = R_{\xi_2}(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$ и взаимной корреляционной функцией $R_{\xi_1\xi_2}(\tau) = \sigma^2 r_{12}(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta_\nu(t)$.

Ответ [14]:

$$R_\eta(\tau) = \sigma^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k-\nu}\Gamma^2(\nu+1)}{\Gamma(2k+1)\Gamma^2\left(1-k+\frac{\nu}{2}\right)} [r(\tau) + r_{12}(\tau)]^{2k}.$$

12.41. Случайная величина $\eta(T)$ формируется в результате усреднения квадрата стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ на интервале T:

$$\eta(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t)\, dt.$$

Определить математическое ожидание m_η величины $\eta(T)$ и ее дисперсию D_η при условии, что процесс $\xi(t)$ характеризуется следующими спектральными плотностями:

1) $S_\xi(\omega) = \dfrac{4\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2+\omega^2}$; 2) $S_\xi(\omega) = \dfrac{\sigma_\xi^2 \omega^2}{\omega^2 + \left(\dfrac{Q}{\omega_0}\right)^2 (\omega^2-\omega_0^2)^2}$.

Рис. 12.42. Дискретный накопитель

Ответ [14]:

1) $m_\eta = \sigma_\xi^2$, $D_\eta = \frac{\sigma_\xi^4}{4\beta^2}(4\beta - 1 + e^{-4\beta})$, $\beta = \frac{\alpha T}{2}$;

2) $m_\eta = \sigma_\xi^2$, $D_\eta = \frac{2\sigma_\xi^4}{\gamma^2} \times$

$$\times \left[\gamma - 1 + e^{-\gamma} + \frac{2}{4Q^2-1} e^{-\gamma} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sqrt{4Q^2-1}\right], \quad \gamma = \frac{\omega_0 T}{Q}.$$

12.42. На вход схемы рис. 12.42, состоящей из линейного детектора огибающей (ЛДО), устройства выборки и накопителя, воздействует стационарный гауссовский квазигармонический шум

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$. Выборочные значения $A_i = A(t_i)$ взаимно не коррелированы.

Определить математическое ожидание m_Y, дисперсию D_Y и плотность распределения вероятностей $p_1(Y)$ случайной величины Y на выходе накопителя, если

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad n \gg 1.$$

Ответ:

$$m_Y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \sigma_\xi, \quad D_Y = \frac{4-\pi}{2\pi} \sigma_\xi^2,$$

$$p_1(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_Y}} \exp\left[-\frac{(Y-m_Y)^2}{2D_Y}\right].$$

12.43. На систему ограничитель—фильтр (рис. 12.43) воздействует стационарный гауссовский шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp(-\gamma|\tau|)$.

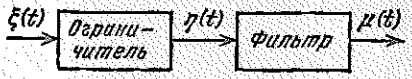


Рис. 12.43. Система ограничитель—фильтр

Определить корреляционную функцию $R_\mu(\tau)$ процесса $\mu(t)$ на выходе системы в предположении, что амплитудная характеристика ограничителя имеет вид (рис. 12.4)

$$\eta = f[\xi] = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta \leqslant \xi \leqslant \alpha, \\ a, & \xi > \alpha, \end{cases}$$

импульсная характеристика фильтра

$$h(t) = \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2},$$

причем $\tau_1 \gg 1/\gamma$, $\tau_2 \gg 1/\gamma$.

Ответ [80]:

$$R_\mu(\tau) = 2\sigma_\eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\gamma} \left[\frac{1}{2\tau_1} e^{-\frac{1}{\tau_1}|\tau|} + \frac{1}{2\tau_2} e^{-\frac{1}{\tau_2}|\tau|} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left(e^{-\frac{1}{\tau_1}|\tau|} + e^{-\frac{1}{\tau_2}|\tau|} \right) \right],$$

где

$$a_n = \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \frac{s^2 \sigma_\xi^2}{n! \sigma_\eta^2};$$

$$\sigma_\eta^2 = M\{\eta^2(t)\} - M^2\{\eta(t)\};$$

$$M\{\eta(t)\} = s\sigma_\xi \left\{ \frac{\alpha}{\sigma_\xi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) \right] - \Phi^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{\sigma_\xi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right] + \Phi^{(1)}\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right\};$$

$$M\{\eta^2(t)\} = s^2 \sigma_\xi^2 \left\{ \left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)^2 - \right.$$

$$- \left[\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right)^2 \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) - \left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right)^2 \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right] +$$

$$+ \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) + \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) - 1 -$$

$$\left. - \left[\frac{\alpha}{\sigma_\xi} \Phi^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi}\right) + \frac{\beta}{\sigma_\xi} \Phi^{(1)}\left(\frac{\beta}{\sigma_\xi}\right) \right] \right\},$$

$\Phi^{(n)}(z)$ — n-я производная от интеграла вероятности (12.11).

12.44. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 12.44, воздействует стационарный белый шум $\xi(t)$, спект-

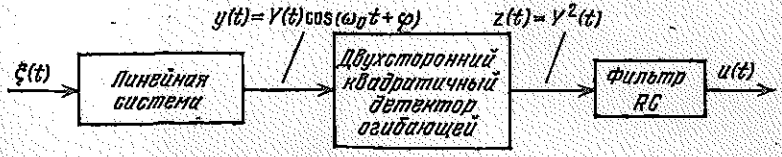


Рис. 12.44. Радиоприемное устройство

ральная плотность которого $S_\xi(\omega) = N_0/2$. Комплексная частотная характеристика линейной системы имеет вид

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

а импульсная характеристика фильтра RC $h(t) = \gamma e^{-\gamma t}$.

Определить:

1) плотность распределения вероятностей $p_1(z)$ процесса $z(t)$ на выходе двухстороннего квадратичного детектора огибающей;

2) математическое ожидание m_z процесса $z(t)$;

3) корреляционную функцию $R_z(\tau)$ и дисперсию D_z;

4) математическое ожидание m_u процесса $u(t)$ на выходе фильтра RC;

5) корреляционную функцию $R_u(\tau)$ и дисперсию D_u на выходе фильтра RC.

Ответ:

1) $p_1(z) = \frac{1}{2\sigma_y^2} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma_y^2}\right), \quad z \geqslant 0,$

где $\sigma_y^2 = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2/2$ — дисперсия процесса $y(t)$ на выходе линейной системы;

2) $m_z = 2\sigma_y^2 = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2$;

3) $R_z(\tau) = \alpha^2 N_0^2 \mathcal{K}_0^4 e^{-2\alpha|\tau|}, \quad D_z = \alpha^2 N_0^2 \mathcal{K}_0^4$;

4) $m_u = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2$;

5) $R_u(\tau) = \frac{\gamma\alpha^2 N_0^2 \mathcal{K}_0^4}{\gamma^2 - 4\alpha^2}(\gamma e^{-2\alpha|\tau|} - 2\alpha e^{-\gamma|\tau|}),$

$$D_u = \alpha^2 N_0^2 \mathcal{K}_0^4 \frac{\gamma}{\gamma + 2\alpha}.$$

12.45. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 12.44, воздействует случайный процесс

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t) \cdot 1_0(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный белый шум со спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0/2$; $1_0(t)$ — единичная функция;

$$\eta(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

— стационарный квазигармонический шум с нулевым математическим ожиданием $m_\eta = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 \exp(-\beta|\tau|)\cos\omega_0\tau.$$

Комплексная частотная характеристика линейной системы, как и в задаче 12.44, имеет вид

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(z; t)$ процесса $z(t)$, его математическое ожидание $m_z(t)$ и корреляционную функцию $R_z(t, \tau)$ для $t > 0$.

Ответ:

$$p_1(z; t) = \frac{1}{2\sigma_y^2(t)} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma_y^2(t)}\right), \quad z \geqslant 0,$$

$$m_z(t) = 2\sigma_y^2(t), \quad R_z(t, \tau) = 4\sigma_y^4(t) r_y^2(t, \tau), \quad r_y(t, \tau) = R_y(t, \tau)/\sigma_y^2(t).$$

Здесь

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2(t), \quad \sigma_\mu^2 = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2/2,$$

$$\sigma_\nu^2(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\sigma_\eta^2 \mathcal{K}_0^2}{\alpha^2 - \beta^2}\left[(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)e^{-2\alpha t} - 2\alpha e^{-(\alpha+\beta)t}\right], & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$$R_y(t, \tau) = R_\mu(\tau) + R_\nu(t, \tau), \quad R_\mu(\tau) = \frac{\alpha N_0 \mathcal{K}_0^2}{2} e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau,$$

$$R_\eta(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\sigma_\eta^2 \mathcal{K}_0^2}{\alpha^2 - \beta^2}\left[(\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}) + (\alpha + \beta)e^{-\alpha\tau - 2\alpha t} - \right. \\ \quad \left. - \alpha(e^{-\alpha\tau} + e^{-\beta\tau})e^{-(\alpha+\beta)t}\right]\cos\omega_0\tau, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

12.46. Используя условие и результаты задачи 12.45, определить математическое ожидание $m_u(t)$ процесса $u(t)$ на выходе фильтра с импульсной характеристикой $h(t) = \gamma e^{-\nu t}$.

Ответ:

$$m_u(t) = \alpha N_0 \mathcal{K}_0^2 + \frac{2\alpha\gamma N_0}{\alpha^2 - \beta^2}\left[\frac{\alpha - \beta}{\gamma} + \right.$$

$$+ \left(\frac{2\alpha}{\gamma - \alpha - \beta} - \frac{\alpha - \beta}{\gamma} - \frac{\alpha + \beta}{\gamma - 2\alpha}\right)e^{-\nu t} +$$

$$\left. + \frac{\alpha + \beta}{\gamma - 2\alpha}e^{-2\alpha t} - \frac{2\alpha}{\gamma - \alpha - \beta}e^{-(\alpha+\beta)t}\right].$$

12.47. На радиотехническое устройство, состоящее из интегрирующей цепочки RC, двухполупериодного безынерционного квадратичного элемента с характеристикой $\zeta = a\eta^2$ и идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) (рис. 12.45), воздействует стационарный

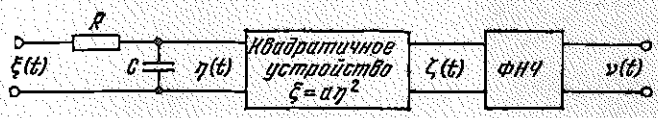


Рис. 12.45. Радиотехническая схема

гауссовский белый шум $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leqslant \omega < \infty$.

Определить ковариационную функцию $K_\zeta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\zeta(\omega)$ процесса $\zeta(t)$ на выходе нелинейного элемента.

Ответ:

$$K_\zeta(\tau) = \frac{a^2 N_0^2}{4(RC)^2}\left[1 + 2\exp\left(-\frac{2}{RC}|\tau|\right)\right];$$

$$S_\zeta(\omega) = \frac{a^2 N_0^2}{4(RC)^2}\left[2\pi\delta(\omega) + \frac{4}{4+(\omega RC)^2}\right].$$

12.48. Используя условие и результаты задачи 12.47, определить математическое ожидание m_ν и дисперсию $D_\nu = \sigma_\nu^2$ процесса $\nu(t)$ на выходе фильтра нижних частот с импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Вычислить отношение σ_ν/m_ν и его предельное значение при $T \to \infty$.

Ответ:

$$m_\nu = \frac{\alpha N_0}{2\beta}(1 - e^{-\alpha T}),\ \sigma_\nu^2 = \frac{\alpha a^2 N_0^2}{2\beta}\left[\frac{1}{\alpha\beta+2} + \frac{1}{\alpha\beta-2}e^{-2\alpha T} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2-4}e^{-\frac{(\alpha\beta+2)T}{\beta}}\right],\ \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma_\nu}{m_\nu} = \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\alpha\beta+2}},\ \beta = RC.$$

12.49. Используя условие и результаты задачи 12.47, определить математическое ожидание m_ν и дисперсию D_ν процесса $\nu(t)$ на выходе фильтра нижних частот с импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Ответ: $m_\nu = \frac{\alpha N_0 T}{2\beta}$; $D_\nu = \frac{a^2 N_0^2}{4}\left[\frac{2T}{\beta} - 1 + e^{-\frac{2T}{\beta}}\right]$.

12.50. На рис. 12.46 приведена упрощенная схема двухканального коррелятора. На один из его входов поступает колебание

$$\xi_1(t) = s_1(t) + n_1(t),$$

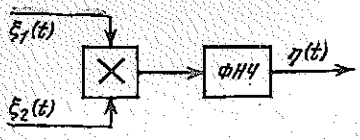


Рис. 12.46. Двухканальный коррелятор с фильтром нижних частот

а на другой

$$\xi_2(t) = s_2(t) + n_2(t).$$

Здесь $s_i(t)$ — гармонические колебания частоты ω_0 с различными амплитудами и начальными фазами:

$$s_1(t) = A_1 \cos \omega_0 t, \qquad s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \theta);$$

$n_i(t)$ — квазигармонические флуктуации:

$$n_1(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t + y_1(t) \sin \omega_0 t,$$

$$n_2(t) = [x_1(t) + kx_2(t)] \cos \omega_0 t + [y_1(t) + ky_2(t)] \sin \omega_0 t.$$

Квадратурные составляющие $x_i(t)$ и $y_i(t)$ являются независимыми стационарными случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $D_1 = \sigma_1^2$ для $x_1(t)$, $y_1(t)$ и $D_2 = \sigma_2^2$ для $x_2(t)$, $y_2(t)$. Коэффициент k определяет степень коррелированности флуктуаций $n_1(t)$ и $n_2(t)$:

$$M\{n_1(t) n_2(t)\} = k\sigma_1^2.$$

Определить математическое ожидание m_η и дисперсию D_η процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот.

Ответ:

$$m_\eta = A_1 A_2 \cos\theta + 2k\sigma_1^2,$$

$$D_\eta = 4k^2\sigma_1^4 + \sigma_1^2(A_2^2 + k^2 A_1^2 + 2kA_1 A_2 \cos\theta + A_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2).$$

12.51. Применительно к условию задачи 12.50 определить характеристическую функцию $\Theta_1(jv)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот.

Ответ [81]:

$$\Theta_1(jv) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\alpha\beta + v^2)} \times$$

$$\times \exp\left\{jvA_1(b - A_1 k) - \frac{[\alpha A_1^2 + \beta(b^2 + c^2) + 2jA_1 bv]\, v^2}{2(\alpha\beta + v^2)}\right\},$$

где

$$b = A_2 \cos\theta + A_1 k, \quad c = A_2 \sin\theta, \quad \alpha = 1/\sigma_1^2 - 2jkv, \quad \beta = 1/\sigma_2^2.$$

12.52. Используя результат задачи 12.50, вычислить плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот для частного случая воздействия на коррелятор

идентичных колебаний $\xi_1(t) = \xi_2(t)$, т. е. при $A_1 = A_2 = A$, $\theta = 0$, $k = 1$ и $\sigma_3^2 = 0$.

Ответ:

$$p_1(\eta) = \frac{1}{2\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{\eta + A^2}{2\sigma_1^2}\right) I_0\left(\frac{A\sqrt{\eta}}{\sigma_1^2}\right), \quad \eta \geqslant 0.$$

12.53. Решить задачу 12.52 для случая отсутствия шума $n_2(t)$ на втором входе коррелятора.

Ответ:

$$p_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\eta} \exp\left[-\frac{(\eta - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right],$$

где $m_\eta = A_1 A_2 \cos\theta$, $\sigma_\eta^2 = \sigma_1^2 A_2^2$.

12.54. Решить задачу 12.52 для случая воздействия на коррелятор идентичных сигналов $s_1(t) = s_2(t)$ и некоррелированных процессов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ с равными дисперсиями, т. е. при $A_1 = A_2 = A$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\theta = 0$, $k = 0$.

Ответ [81]:

$$p_1(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sigma^2} e^{\frac{\eta}{2\sigma^2} - a}, & \eta < 0, \\ \dfrac{1}{4\sigma^2} e^{-\frac{\eta}{2\sigma^2} - a} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\eta}{\sigma^2}\right)^n \left[1 - \frac{e_{n-1}^a}{e^a}\right], & \eta \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь $a = A^2/2\sigma^2$ — отношение сигнал/шум на входе коррелятора,

$$e_{n-1}^a = 1 + \frac{1}{1!}a + \frac{1}{2!}a^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}a^{n-1}.$$

График плотности распределения вероятностей $p_1(\eta)$ приведен на рис. 12.47.

12.55. На вход коррелятора, состоящего из линии задержки (ЛЗ) с временем задержки $t_{\text{зад}} = \tau$, перемножителя и фильтра нижних частот (ФНЧ) (рис. 12.48), поступает стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau) \cos\omega_0\tau.$$

Фильтр нижних частот пропускает без искажений только низкочастотные составляющие процесса на выходе перемножителя.

Определить плотность распределения вероятностей $p_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе коррелятора.

Ответ [82]:

$$p_1(\eta) = \frac{1}{4\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{\eta}{2\sigma_\xi^2[1 - \rho_\xi(\tau)]}\right\}.$$

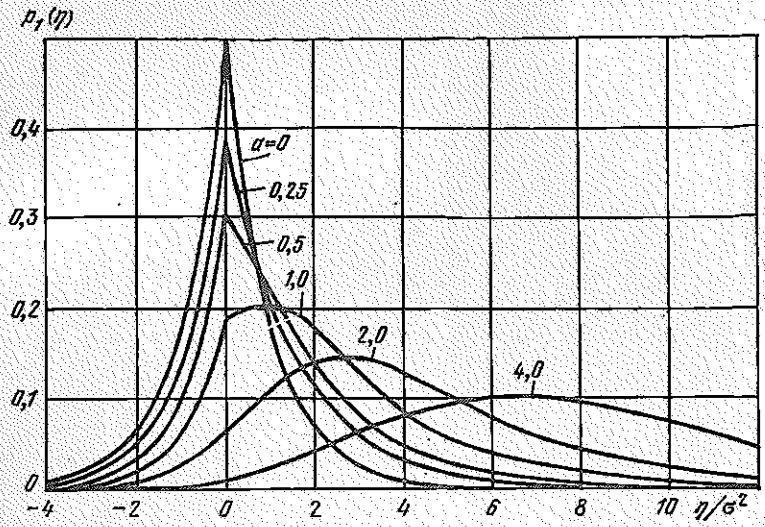


Рис. 12.47. Плотность распределения вероятностей на выходе двухканального коррелятора

12.56. На один из входов двухканального коррелятора (рис. 12.49) поступает колебание

$$x_1(t) = s_1(t) + n_1(t),$$

а на другой

$$x_2(t) = s_2(t) + n_2(t).$$

Здесь

$$s_i(t) = \frac{A_i}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + \psi_i). \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2,$$

— прямоугольный радиоимпульс длительностью T; $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые стационарные гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$R_{n_1}(\tau) = R_{n_2}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau), \quad M\{n_1(t)\, n_2(t+\tau)\} = 0.$$

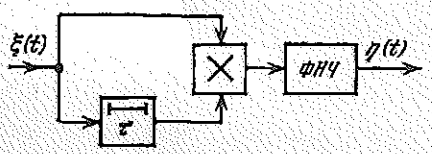


Рис. 12.48. Коррелятор

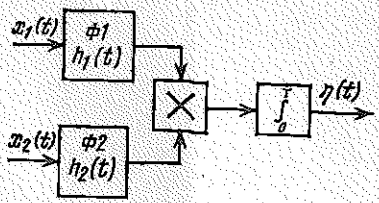


Рис. 12.49. Двухканальный коррелятор с интегратором

В качестве входных фильтров (Ф) коррелятора используются колебательные контуры с импульсными характеристиками

$$h_i(t) = 2\alpha_i e^{-\alpha_i t} \cos \omega_0 t, \quad t > 0.$$

Определить математическое ожидание $m_\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ на выходе коррелятора в момент времени $t = T$.

Ответ:

$$m_\eta(T) = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2} \cos(\psi_2 - \psi_1) F(a_1, a_2),$$

где

$$a_1 = \alpha_1 T, \; a_2 = \alpha_2 T, \; E_1 = A_1^2 T/2, \; E_2 = A_2^2 T/2,$$

$$F(a_1, a_2) = 1 - \frac{1}{a_1}(1 - e^{-a_1}) + \frac{1}{a_2}(1 - e^{-a_2}) + \frac{1}{a_1 + a_2}(1 - e^{-(a_1 + a_2)}).$$

13. ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим какую-либо реализацию непрерывного (дифференцируемого) случайного процесса $\xi(t)$ длительностью T (рис. 13.1). Такая реализация на конечном интервале T имеет конечное число максимумов и минимумов с различными значениями H, причем в момент времени t_m реализация имеет абсолютный (наибольший) максимум H_m.

Реализация $\xi(t)$ может несколько раз пересекать фиксированный уровень C снизу вверх (с положительной производной), причем в момент времени τ_0 впервые происходит такое пересечение (т. е. первый раз снизу достигается граница C). Когда случайный процесс $\xi(t)$ пересекает уровень C снизу вверх, будем говорить, что имеет место положительный выброс. Если же уровень C пересекается сверху вниз, то можно говорить об отрицательном выбросе. Тогда можно сказать, что реализация $\xi(t)$ длительностью T имеет n положительных (отрицательных) выбросов на уровне C, причем указанные на рисунке величины τ и θ можно назвать соответственно длительностями положительных и отрицательных выбросов. Часто величину θ называют длительностью интервалов между выбросами.

Величины τ, θ и H в пределах одной реализации могут принимать несколько значений (в зависимости от уровня C и интервала T) и вместе с величинами n, τ_0 и H_m изменяются случайным образом от одной реализации к другой.

При статистическом описании этих случайных величин можно интересоваться их средними значениями, дисперсиями, плотностями вероятности

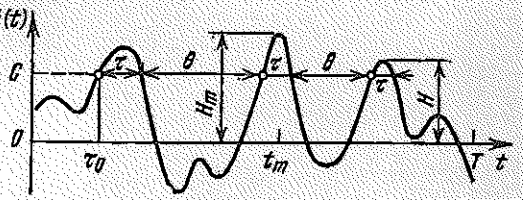


Рис. 13.1. Реализация стационарного случайного процесса

и другими характеристиками. В данной главе приведены окончательные формулы в основном для средних значений, так как вычисление других характеристик, как правило, связано с выполнением численного интегрирования, что выходит за пределы целевого назначения данной книги. Другие характеристики рассматриваются тогда, когда они могут быть найдены без сложных математических вычислений.

1. Среднее число пересечений дифференцируемым случайным процессом $\xi(t)$ непрерывной кривой $a(t)$ снизу вверх (рис. 13.2) на интервале $(t_0, t_0 + T)$ вычисляется по формуле

$$N_a^+(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t)\, p_2[a(t),\ \dot{a}(t)+\dot{\xi}(t)]\, d\dot{\xi}. \qquad (13.1)$$

Здесь $p_2[\xi(t), \dot{\xi}(t)]$ — совместная плотность вероятности для процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t) = d\xi(t)/dt$ в один и тот же момент времени.

Аналогично число пересечений процессом $\xi(t)$ сверху вниз кривой $a(t)$ равно

$$N_a^-(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \dot{\xi}(t)\, p_2[a(t),\ \dot{a}(t)+\dot{\xi}(t)]\, d\dot{\xi}. \qquad (13.2)$$

Пусть на интервале $(t_0, t_0 + T)$ заданы две непрерывные кривые $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющие неравенству $a(t) < b(t)$. Среднее число раз, когда процесс выйдет из границ $a(t) < \xi(t) < b(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + T)$, определяется формулой

$$N_{ab}(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t)\left\{p_2[b(t),\ \dot{b}(t)+\dot{\xi}(t)] + p_2[a(t),\ \dot{a}(t)-\dot{\xi}(t)]\right\} d\dot{\xi}. \qquad (13.3)$$

В том частном случае, когда рассматриваются пересечения процесса $\xi(t)$ с горизонтальной прямой, т. е. $a(t) = C = \text{const}$, формулы (13.1) и (13.2) принимают соответственно вид

$$N^+(C, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t)\, p_2[C,\ \dot{\xi}(t)]\, d\dot{\xi}, \qquad (13.4)$$

$$N^-(C, T) = -\int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \dot{\xi}(t)\, p_2[C,\ \dot{\xi}(t)]\, d\dot{\xi}. \qquad (13.5)$$

Применительно к стационарным в узком смысле процессам $\xi(t)$ внутренние интегралы в формулах (13.4) и (13.5) не зависят от времени и целесообразно ввести среднее число пересечений в единицу времени. Для среднего числа пересечений в единицу времени стационарным случайным процессом

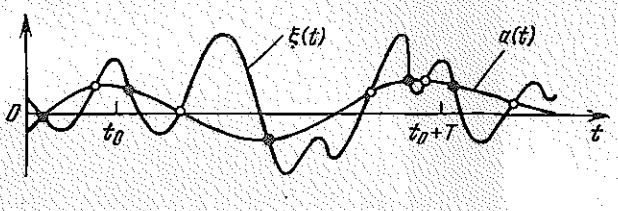


Рис. 13.2. Пересечения случайного процесса $\xi(t)$ и детерминированной функции $a(t)$

$\dot{\xi}(t)$ фиксированного уровня C снизу вверх и сверху вниз из (13.4) и (13.5) получаем простые формулы

$$N_1^+(C) = N^+(C, 1) = \int_0^\infty \dot{\xi} p_2(C, \dot{\xi})\, d\dot{\xi}, \qquad (13.6)$$

$$N_1^-(C) = N^-(C, 1) = -\int_{-\infty}^0 \dot{\xi} p_2(C, \dot{\xi})\, d\dot{\xi}. \qquad (13.7)$$

Для ряда стационарных процессов (например, гауссовских) значения процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t)$ в совпадающие моменты времени оказываются статистически независимыми, т. е.

$$p_2(C, \dot{\xi}) = p_1(C)\, p(\dot{\xi}). \qquad (13.8)$$

При выполнении этого условия формулы (13.6) и (13.7) еще более упрощаются:

$$N_1^+(C) = p_1(C) \int_0^\infty \dot{\xi} p(\dot{\xi})\, d\dot{\xi}, \quad N_1^-(C) = -p_1(C) \int_{-\infty}^0 \dot{\xi}\, p(\dot{\xi}) d\dot{\xi}. \qquad (13.9)$$

Применительно к гауссовскому стационарному дифференцируемому процессу $\xi(t)$ с математическим ожиданием m и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2 r(\tau) \qquad (13.10)$$

формулы (13.9) принимают вид

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-r_0''}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C-m}{\sigma}\right)^2\right], \quad r_0'' = \left.\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}. \qquad (13.11)$$

Для огибающей $V(t)$ суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \times \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и гауссовского квазигармонического (узкополосного) случайного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \qquad (13.12)$$

получаем

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \left(\frac{-\rho_0''}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(A_m^2 + C^2)\right] I_0\left(\frac{A_m C}{\sigma^2}\right),$$

$$\rho_0'' = \left.\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}, \quad C \geqslant 0. \qquad (13.13)$$

Здесь $I_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. При $A_m = 0$ формула (13.13) определяет число выбросов огибающей $A(t)$ одного квазигармонического процесса $\xi(t)$:

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \left(\frac{-\rho_0''}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right], \quad C \geqslant 0. \qquad (13.14)$$

2. Среднее число максимумов дифференцируемого процесса $\xi(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + T)$ определяется формулой

$$N_{\max}(T) = -\int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi}(t)\, p_2[\dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)]\, d\ddot{\xi}, \qquad (13.15)$$

где $p_2[\dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)]$ — совместная плотность вероятности для первой и второй производных процесса $\xi(t)$ в один и тот же момент времени.

Для среднего числа минимумов процесса справедлива формула

$$N_{\min}(T)=\int_{t_0}^{t_0+T}dt\int_0^{\infty}\ddot{\xi}(t)\,p_2[0,\ddot{\xi}(t)]\,d\ddot{\xi}. \tag{13.16}$$

Среднее число максимумов на интервале (t_0, t_0+T), превышающих фиксированный уровень C, равно

$$N_{\max}(H>C,\,C)=-\int_{t_0}^{t_0+T}dt\int_C^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{0}\ddot{\xi}(t)\,p_3[\xi(t),\,0,\,\ddot{\xi}(t)]\,d\ddot{\xi}, \tag{13.17}$$

где $p_3[\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)]$ — совместная плотность вероятности самого процесса и его первых двух производных в один и тот же момент времени.

Применительно к стационарным процессам можно интересоваться средним числом максимумов в единицу времени. При этом из формул (13.15) и (13.17) имеем

$$N_{1\max}=N_{\max}(1)=-\int_{-\infty}^{0}\ddot{\xi}\,p_2(0,\ddot{\xi})\,d\ddot{\xi}, \tag{13.18}$$

$$N_{1\max}(H>C)=N_{\max}(H>C,\,1)=-\int_C^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{0}\ddot{\xi}\,p_3(\xi,\,0,\,\ddot{\xi})\,d\ddot{\xi}. \tag{13.19}$$

Формулы (13.18) и (13.19) для гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (13.10) принимают соответственно вид

$$N_{1\max}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r_0^{(4)}}{-r_0''}},\qquad r_0^{(4)}=\left.\frac{d^4r(\tau)}{d\tau^4}\right|_{\tau=0}, \tag{13.20}$$

$$N_{1\max}(H>C)=N_{1\max}\left[\Phi\left(-\frac{C_0}{\nu}\right)+\sqrt{1-\nu^2}\,e^{-C_0^2/2}\,\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu}C_0\right)\right], \tag{13.21}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности,

$$C_0=C/\sigma,\quad \nu=(1-r_0''^2/r_0^{(4)})^{1/2}. \tag{13.22}$$

3. Средняя длительность выброса стационарного эргодического процесса $\xi(t)$ над фиксированным уровнем C вычисляется по формуле

$$\bar{\tau}(C)=\frac{1}{N_1^+(C)}\int_C^{\infty}p_1(\xi)\,d\xi. \tag{13.23}$$

Средний интервал между выбросами на уровне C

$$\bar{\theta}(C)=\frac{1}{N_1^+(C)}\int_{-\infty}^{C}p_1(\xi)\,d\xi. \tag{13.24}$$

Применительно к гауссовскому стационарному процессу с математическим ожиданием m и корреляционной функцией (13.10) формулы (13.23) и (13.24) принимают вид

$$\bar{\tau}(C)=\frac{2\pi}{\sqrt{-r_0''}}\,[1-\Phi(\gamma)]\,e^{\gamma^2/2},\quad \gamma=\frac{C-m}{\sigma}, \tag{13.25}$$

$$\bar{\theta}(C)=\frac{2\pi}{\sqrt{-r_0''}}\,\Phi(\gamma)\,e^{\gamma^2/2}, \tag{13.26}$$

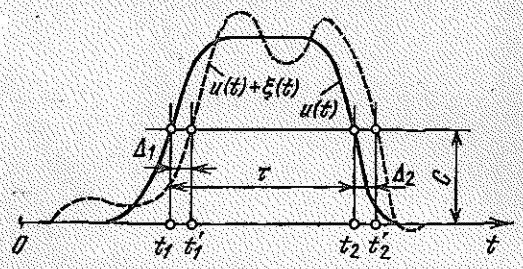


Рис. 13.3. Смещение моментов срабатывания реле из-за шума

Для огибающей $A(t)$ квазигармонического процесса $\xi(t)$, имеющего корреляционную функцию (13.12), справедливы следующие соотношения:

$$\bar{\tau}(C) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{-\rho_0''}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sigma} > 0, \tag{13.27}$$

$$\bar{\theta}(C) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{-\rho_0''}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2\right) - 1\right]. \tag{13.28}$$

Средняя длительность интервала между минимумом и следующим за ним соседним максимумом $\bar{\tau}_m$, а также между максимумом и последующим соседним минимумом $\bar{\theta}_m$ находятся по формулам

$$\bar{\tau}_m = \frac{1}{N_{1\min}}\int_0^\infty p(\xi)\,d\dot{\xi}, \quad \bar{\theta}_m = \frac{1}{N_{1\max}}\int_{-\infty}^0 p(\xi)\,d\dot{\xi}. \tag{13.29}$$

Для гауссовского стационарного процесса

$$\bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m = \pi\sqrt{-r_0''/r_0^{(4)}}. \tag{13.30}$$

4. В радиотехнических приложениях рассмотрение выбросов часто связывают с анализом действия полезных регулярных импульсных сигналов $u(t)$ совместно с помехами $\xi(t)$ на электронные реле и другие пороговые устройства. В том случае, когда детерминированный полезный сигнал складывается с «гладкими» помехами малой интенсивности, помехи вызывают случайное дрожание моментов срабатывания и моментов окончания работы реле.

Пусть в отсутствие помех реле срабатывает от полезного импульса $u(t)$ в некоторый момент времени t_1 и затем через промежуток времени τ, т. е. в момент $t_2 = t_1 + \tau$, скачком возвращается в первоначальное состояние (рис. 13.3). При наличии слабых помех $\xi(t)$ эти моменты времени будут смещены на малые и случайные величины Δ_1 и Δ_2, т. е. $t_1' = t_1 + \Delta_1$, $t_2' = t_2 + \Delta_2$.

В линейном приближении

$$\Delta_1 = \xi(t_1)/s(t_1), \quad \Delta_2 = \xi(t_2)/s(t_2), \tag{13.31}$$

где $s(t_i) = \left.\dfrac{du(t)}{dt}\right|_{t=t_i}$ — крутизна полезного импульса на уровне срабатывания C.

Если стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$, то дисперсии момента срабатывания реле и момента окончания работы соответственно равны

$$\sigma_{\Delta_1}^2 = \sigma^2/s^2(t_1), \quad \sigma_{\Delta_2}^2 = \sigma^2/s^2(t_2). \tag{13.32}$$

Из равенства $\tau' = t_2' - t_1' = \tau + (\Delta_2 - \Delta_1)$ по известным правилам находим дисперсию длительности импульса на выходе реле

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sigma^2}{s^2(t_1)}\left[1 - 2\frac{s(t_1)}{s(t_2)}r(\tau) + \frac{s^2(t_1)}{s^2(t_2)}\right]. \qquad (13.33)$$

2. ПРИМЕРЫ

13.1. Вычислить вероятность наличия в интервале $(t,\ t+\tau)$ нечетного числа нулей гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$. Под нулями понимаются точки на оси времени, в которых $\xi(t) = 0$.

Решение. Очевидно, что при выполнении неравенства $\xi(t) \times \xi(t+\tau) < 0$ число нулей траектории процесса $\xi(t)$ в интервале $(t,\ t+\tau)$ нечетное (рис. 13.4). Обозначим вероятность нечетного числа нулей в интервале $(t,\ t+\tau)$ через $p_{\text{н}}(\tau)$. Очевидно, что

$$p_{\text{н}}(\tau) = P\{\xi(t)\,\xi(t+\tau) < 0\} = P\{\xi(t) > 0,\ \xi(t+\tau) < 0\} + P\{\xi(t) < 0,\ \xi(t+\tau) > 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для стационарого гауссовского процесса с нулевым математическим ожиданием оба слагаемых в правой части этого равенства равны друг другу и

$$p_{\text{н}}(\tau) = 2P[\xi(t) > 0,\ \xi(t+\tau) < 0] = 2\int_0^\infty\int_{-\infty}^0 p_2(\xi,\ \xi_\tau)\,d\xi_\tau d\xi,$$

где $p_2(\xi,\ \xi_\tau)$ — двумерная плотность вероятности значений случайного процесса, разделенных промежутком времени τ. Подставив сюда выражение двумерной нормальной плотности вероятности (5.23) и выполнив интегрирование, получим

$$p_{\text{н}}(\tau) = \pi^{-1}\arccos r(\tau),\quad 0 \leqslant \arccos r(\tau) < \pi$$

или

$$\cos[\pi p_{\text{н}}(\tau)] = r(\tau). \qquad (13.34)$$

13.2. Определить число положительных выбросов на уровне $C = 3\sigma$ во временном интервале $T = 100$ мкс гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$, имеющего математическое ожидание $(m = 0)$ и спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{1}{2}N_0\left\{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha}\right]\right\},$$

если $f_0 = \omega_0/2\pi = 60$ МГц и эффективная ширина спектра $\Delta f_{\text{э}} = 2$ МГц.

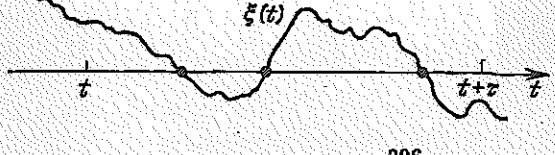


Рис. 13.4. Нечетное число нулей в интервале $(t,\ t+\tau)$

Решение. Обозначим среднее число интересующих нас выбросов через $N^+(C, T)$. Так как процесс $\xi(t)$ стационарен, то $N^+(C, T) = TN^+(C)$. Для рассматриваемого примера среднее число положительных выбросов в единицу времени определяется формулой (13.11) при $m = 0$

$$N^+(C, T) = \frac{1}{2\pi} T \sqrt{-r_0''} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right].$$

Пользуясь формулой (6.15) можем написать

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega,$$

где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = N_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

— дисперсия процесса $\xi(t)$.

Следовательно,

$$r_0'' = r''(0) = -\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega)\, d\omega.$$

Подставив сюда выражение спектральной плотности и выполнив интегрирование, получим $r_0'' = -(\omega_0^2 + 2\alpha)$. Поэтому

$$N^+(C, T) = f_0 T \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{\omega_0^2}}\, e^{-4,5} \simeq f_0 T \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2}\right) e^{-4,5}.$$

По определению эффективной ширины спектра

$$\Delta f_э = \frac{1}{2\pi S_0} \int_0^{\infty} S(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi S_0} N_0 \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}\right] d\omega \simeq \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

находим $\alpha = \pi \Delta f_э^2$. С учетом этого соотношения получаем окончательную расчетную формулу

$$N^+(C, T) \simeq f_0 T \left[1 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2\right] e^{-4,5} =$$

$$= 60 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \left[1 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{60}\right)^2\right] \simeq 67.$$

13.3. Определить относительный уровень C/σ, при котором огибающая $A(t)$ квазигармонического процесса $\xi(t)$, имеющего постоянную и отличную от нуля спектральную плотность только

при частотах $|f-f_0| \leqslant \Delta f/2 = 0{,}5$ МГц, на интервале $T = 1000$ мкс превышает уровень C в среднем один раз.

Решение. Воспользовавшись формулой (13.14), можем написать

$$N^+(C, T) = TN_1^+(C) = T\sqrt{\frac{-\rho_0''}{2\pi}}\frac{C}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right].$$

В данном примере

$$\rho(\tau) = \sin \pi\Delta f\tau/\pi\Delta f\tau, \quad \rho_0'' = -(\pi^2/3)\,\Delta f^2.$$

Поэтому

$$N^+(C, T) = \Delta fT\sqrt{\frac{\pi}{6}}\frac{C}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right].$$

После подстановки отдельных значений приходим к трансцендентному уравнению относительно C/σ

$$1 = 10^6 \cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{C}{\sigma}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

приближенное решение которого дает $C/\sigma \simeq 4$.

13.4. Пусть задано функциональное преобразование $y = f(x)$, которое является невырожденным, непрерывным, взаимно-однозначным, и $x = \varphi(y)$ — обратная функция. Требуется вычислить среднее число выбросов случайного процесса

$$\eta(t) = f[\xi(t)], \tag{13.35}$$

где $\xi(t)$ — дифференцируемый случайный процесс с известной совместной плотностью вероятности $p[\xi(t), \dot{\xi}(t)]$.

Решение. По известным правилам пересчета плотностей вероятностей при функциональных преобразованиях случайных величин находим совместную плотность вероятности для $\eta(t)$ и $\dot{\eta}(t)$:

$$p[\eta(t), \dot{\eta}(t)] = p[\varphi(\xi), \varphi'(\xi)\dot{\xi}]\,\varphi'^2(\xi).$$

По формуле (13.4) находим среднее число положительных выбросов процесса $\eta(t)$ в интервале $(0, T)$ на уровне $H_\eta = f(H_\xi)$:

$$N_\eta^+(H_\eta, T) = \int_0^T dt\int_0^\infty \dot{\eta}p(H_\eta, \dot{\eta})\,d\dot{\eta} =$$

$$= \int_0^T dt\int_0^\infty \dot{\eta}p(\varphi(H_\eta), \varphi'(\eta)\dot{\eta})\,\varphi'^2(H_\eta)\,d\dot{\eta}. \tag{13.36}$$

Из сравнения этой формулы с формулой для среднего числа выбросов процесса $\xi(t)$

$$N_\xi^+(H_\xi, T) = \int_0^T dt\int_0^\infty \dot{\xi}p(H_\xi, \dot{\xi})\,d\dot{\xi}$$

следует, что

$$N_{\eta}^{+}(H_{\eta},\ T) = N_{\xi}^{+}(H_{\xi},\ T). \qquad (13.37)$$

Это равенство выражает очевидный факт — при взаимно-однозначном функциональном преобразовании (13.35) всегда существует однозначное соответствие между каждым пересечением процессом $\xi(t)$ уровня H_{ξ} и каждым пересечением процессом $\eta(t)$ уровня H_{η}.

13.5. Найти среднее число максимумов в единицу времени над уровнем $C = 2\sigma$ гауссовского стационарного процесса с нормированной корреляционной функцией $r(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$, $\alpha = 4\pi\Delta f_э^2$.

Решение. Ответ дает формула (13.21). Так как $r_0'' = -2\alpha$, $r_0^{(4)} = 12\alpha^2$, то $\nu = \sqrt{2/3}$. Подставив отдельные величины в формулу (13.21), получим

$$N_{1\,\max}(H > 2\sigma) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\Delta f_э \times$$

$$\times \left[\Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \sqrt{\frac{1}{3}}\,e^{-2}\,\Phi\left(\sqrt{3}\right)\right] \simeq 0{,}256\Delta f_э.$$

13.6. Вычислить средний интервал времени между максимумом (минимумом) и соседним минимумом (максимумом) гауссовского стационарного процесса с нормированной корреляционной функцией

$$r(\tau) = \rho(\tau)\cos\omega_0\tau, \qquad \rho'(0) = 1.$$

Рассмотреть частный случай, когда $\rho(\tau) = \exp(-\pi\Delta f_э^2\tau^2)$, причем $\Delta f_э \ll f_0 = \omega_0/2\pi$.

Решение. Для рассматриваемой нормированной корреляционной функции находим $r_0'' = -(\omega_0^2 - \rho_0'')$, $r_0^{(4)} = \omega_0^4 - 6\omega_0^2\rho_0'' + \rho_0^{(4)}$. Подставив эти величины в формулу (13.30), получим

$$\bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m = \frac{1}{2f_0}\left(\frac{1 - \rho_0''/\omega_0^2}{1 - 6\rho_0''/\omega_0^2 + \rho_0^{(4)}/\omega_0^4}\right)^{1/2}. \qquad (13.38)$$

Для $\rho(\tau) = \exp(-\pi\Delta f_э^2\tau^2)$ имеем $\rho_0'' = -2\pi\Delta f_э^2$, $\rho_0^{(4)} = 12\pi^2\Delta f_э^4$. Поэтому

$$\bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m = \frac{1}{2f_0}\left[\frac{1 + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2}{1 + \frac{3}{\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2 + \frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^4}\right]^{1/2} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2f_0}\left[1 - \frac{5}{4\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2\right], \quad f_0 \gg \Delta f_э.$$

13.7. На «безынерционное» электронное реле воздействует сумма сигнала в виде импульса гауссовой формы

$$u(t) = A_0 \exp\left[-2{,}8\left(\frac{t}{\tau_и}\right)^2\right]$$

и дифференцируемого флуктуационного шума с малой дисперсией $\sigma^2 = N_0\Delta f_э$. Определить возможную наименьшую нестабильность момента срабатывания реле σ_{Δ_1}, обусловленную шумом.

Решение. Первая из формул (13.22) показывает, что при заданной дисперсии шума σ^2 наименьшая нестабильность момента срабатывания будет при пороге срабатывания реле, соответствующем максимальной крутизне импульса.

Из равенства $u''(t) = 0$ находим момент времени $t_1 = \tau_и/\sqrt{5,6}$, при котором гауссовский импульс имеет максимальную крутизну:

$$s(t_1) = u'(t)|_{t=t_1} = A_0\sqrt{5,6}\,e^{-0,5}\,\frac{1}{\tau_и} = 1,435\,\frac{A_0}{\tau_и}.$$

Подставив это значение в первую формулу (13.32), находим наименьшую нестабильность момента срабатывания реле

$$\sigma_{\Delta_1} = \tau_и\sqrt{N_0\Delta f_э}/1,435\,A_0.$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

13.1. Найти вероятность $p_ч(\tau)$ того, что гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma_ч^2(\tau)$ имеет в интервале $(t,\ t+\tau)$ четное число нулей.

Ответ: $p_ч(\tau) = P\{\xi(t)\,\xi(t+\tau) > 0\} = 1 - \pi^{-1}\arccos r(\tau)$, $0 \leqslant \arccos r(\tau) < \pi$.

13.2. Получить приближенное выражение для вероятности наличия в малом временном интервале $(t,\ t+\tau)$ одного нуля гауссовского стационарного дифференцируемого случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $p_1(\tau) = \nu\tau$, $\nu = \sqrt{-r_0''}/\pi$.

Указание. В малом временном интервале практически возможно наличие лишь одного нуля дифференцируемого процесса $\xi(t)$, т. е. в формуле (13.34) можно положить $p_н(\tau) \simeq p_1(\tau)$. Поскольку при малых τ выполняется неравенство $p_1(\tau) \ll 1$, то учитывая лишь первые два члена разложения косинуса в степенной ряд, имеем $1 - (1/2)\,\pi^2 p_1^2(\tau) \simeq r(\tau)$. Разлагая затем в степенной ряд четную нормированную корреляционную функцию $r(\tau) \simeq \simeq 1 + (1/2)\,r_0''\tau^2$, получаем ответ.

13.3. Вычислить значение параметра ν в ответе к задаче 13.2, когда гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{при } |\omega| \leqslant \Delta\omega, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \Delta\omega. \end{cases}$$

Ответ: $\nu = \Delta\omega/\pi\sqrt{3}$.

13.4. Получить выражение для вероятности наличия одного нуля в малом временном интервале $(t, t+\tau)$ для процесса $\eta(t) = s(t) + \xi(t)$, где случайный сигнал $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = \xi_1(t)\cos\omega_0 t + \xi_2(t)\sin\omega_0 t.$$

Случайные процессы $\xi(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ являются гауссовскими, стационарными, независимыми с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $R(\tau)$, $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$, причем $R_1(\tau) = R_2(\tau)$.

Ответ: $p_1(\tau) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\omega_0^2 R_1(0) - R_1''(0) - R''(0)}{R_1(0) + R(0)}\right]^{1/2}\tau.$

Указание. Случайный процесс $\eta(t)$ является гауссовским, стационарным, имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $R_\eta(\tau) = R_1(\tau)\cos\omega_0\tau + R(\tau)$.

13.5. Решить задачу 13.4, когда ξ_1 и ξ_2 являются не случайными процессами, а независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой дисперсией σ^2. Рассмотреть частный случай $\xi(t) = 0$.

Ответ: $p_1(\tau) = \frac{\tau}{\pi}\left[\frac{\omega_0^2\sigma^2 - R''(0)}{\sigma^2 + R(0)}\right]^{1/2}$, $p_1(\tau) = \omega_0\tau/\pi$ при $\xi(t) = 0$.

13.6. Получить выражение условной вероятности $p_н(\tau)$ наличия нечетного числа нулей внутри интервала $(t, t+\tau)$ для гауссовского стационарного дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$. Предполагается, что в начале интервала имеется нуль, т. е. $\xi(t) = 0$.

Ответ: $\cos\pi p_н(\tau) = -r'(\tau)/\sqrt{-r_0''\,[1 - r^2(\tau)]}$.

Указание. Очевидно, что $p_н(\tau) = P\{\xi(t)\,\xi(t+\tau) < 0 \mid \xi(t) = 0\}$. Условная плотность вероятности $p[\xi(t), \xi(t+\tau) \mid \xi(t) = 0]$ является нормальной с нулевым математическим ожиданием и нормированной корреляционной функцией

$$\tilde{r}(\tau) = \frac{M\{\xi(t)\,\xi(t+\tau) \mid \xi(t)\}}{\sqrt{M\{\xi^2(t+\tau) \mid \xi(t)\}\,M\{\xi^2(t) \mid \xi(t)\}}}.$$

Поэтому применима формула (13.34), только теперь в нее вместо $r(\tau)$ нужно подставить $\tilde{r}(\tau)$. Вычислив $\tilde{r}(\tau)$, получим ответ.

13.7. Найти среднее число положительных выбросов в единицу времени на уровне $C < A_m$ для гармонического колебания $s(t) = A_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$, начальная фаза которого случайна и распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ: $N_1^+(C) = f_0 = \omega_0/2\pi$, $C < A_m$.

Указание. Так как производная по времени от процесса $\dot{s}(t) = -\omega_0 A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \pm\omega_0\sqrt{A_m^2 - s^2(t)}$, то совместная плотность вероятности определяется формулой

$$p_2[s(t), \dot{s}(t)] = p_1(\dot{s})\, p(\dot{s}\,|\,s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{A_m^2 - s^2}}\left[\delta\left(\dot{s} - \omega_0\sqrt{A_m^2 - s^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \delta\left(\dot{s} + \omega_0\sqrt{A_m^2 - s^2}\right)\right] \neq p_1(s)\, p(\dot{s}),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

В данном случае условие независимости (13.8) не выполняется и поэтому следует применять формулу (13.6).

13.8. Найти на интервале T дисперсию числа нулей $\sigma_n^2(T)$ гармонического колебания $s(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$, у которого случайная начальная фаза распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [83]: $\sigma_n^2(T) = (2f_0T - [2f_0T])(1 - 2f_0T + [2f_0T])$, где $[2f_0T]$ — целая часть числа $2f_0T$.

13.9. Получить в явном виде выражение $N_1^+(C)$ для гауссовских стационарных процессов с нулевыми математическими ожиданиями, одинаковыми дисперсиями и тремя нормированными корреляционными функциями

$$r_1(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\, e^{-\alpha|\tau|}, \quad r_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2},$$

$$r_3(\tau) = \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2}.$$

Сравнить полученные результаты при одном и том же значении уровня C и одинаковой эффективной ширине спектров $\Delta f_э$.

Ответ:

$$N_{1,1}^+(C) = \frac{2}{\pi}\Delta f_э \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] = 0{,}63662\Delta f_э \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,2}^+(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Delta f_э \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] =$$

$$= 0{,}38894\,\Delta f_э \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,3}^+(C) = \frac{1}{\sqrt{12}}\Delta f_э \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] = 0{,}28867\Delta f_э \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,1}^+(C) > N_{1,2}^+(C) > N_{1,3}^+(C).$$

13.10. Даны два гауссовских стационарных узкополосных процесса с корреляционными функциями

$$R_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right),$$

$$R_2(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right).$$

Какой из двух процессов является дифференцируемым? Вычислить для него среднее число положительных выбросов $N_1^+(C)$.

Ответ: первый процесс дифференцируем, второй — нет;

$$N_1^+(C)=f_0\left[1+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^2\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right),\quad \Delta f_0\simeq\frac{1}{2}\alpha.$$

13.11. Найти среднее значение полного числа пересечений $N_1(C)$ уровня C для суммы $\eta(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два гауссовских независимых стационарных дифференцируемых процесса, имеющих нулевые математические ожидания и корреляционные функции $R_1(\tau)=\sigma_1^2 r_1(\tau)$, $R_2(\tau)=\sigma_2^2 r_2(\tau)$.

Ответ:

$$N_1(C)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sigma_1^2 r_{10}''+\sigma_2^2 r_{20}''}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{C^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right],$$

$$r_{i0}''=\left.\frac{d^2 r_i(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

13.12. Решить задачу 13.11 для случая, когда

$$\eta(t)=\xi_1(t)-\xi_2(t).$$

Ответ:

$$N_1(C)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sigma_1^2 r_{10}''+\sigma_2^2 r_{20}''}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{C^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right).$$

13.13. В задаче 13.11 найти число «положительных» нулей $N_1^+(0)$ процесса $\eta(t)$, когда

$$R_1(\tau)=\sigma_1^2\rho_1(\tau)\cos\omega_1\tau,\quad R_2(\tau)=\sigma_2^2\rho_2(\tau)\cos\omega_2\tau,$$
$$\rho_1(0)=\rho_2(0)=1.$$

Ответ:

$$N_1^+(0)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sigma_1^2(\omega_1^2-\rho_{10}'')+\sigma_2^2(\omega_2^2-\rho_{20}'')}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^{1/2},\quad \rho_{i0}''=\left.\frac{d^2\rho_i(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

13.14. Найти на интервале $(t_0,\ t_0+T)$ среднее число превышений уровня C суммой гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ и прямой $a(t)=a_0+a_1 t$, где a_0 и a_1 — постоянные коэффициенты. Процесс $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и дважды дифференцируемую корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2 r(\tau)$.

Ответ:

$$N^+(C,T)=\left[\frac{\sigma}{a_1}\sqrt{\frac{-r_0''}{2\pi}}\exp\left(\frac{a_1^2}{2\sigma^2 r_0''}\right)+\Phi\left(\frac{a_1}{\sigma\sqrt{-r_0''}}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{C-a_0-a_1 t}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C-a_0-a_1(t_0+T)}{\sigma}\right)\right].$$

Указание: Предварительно нужно найти совместную плотность вероятности $p_2(\eta(t), \dot{\eta}(t))$ для гауссовского нестационарного процесса $\eta(t) = a_0 + a_1 t + \xi(t)$ и его производной $\dot{\eta}(t) = a_1 + \dot{\xi}(t)$, а затем следует воспользоваться формулой (13.4).

13.15. Вычислить среднее число нулей на интервале $(0, mT_0)$, где m — целое положительное число, для периодически нестационарного гауссовского процесса $\eta(t) = \xi(t)\cos\omega_0 t$, $T = 2\pi/\omega_0$. Здесь $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $N(0, mT_0) = \dfrac{mT_0}{\pi}\left(\omega_0 + \sqrt{-r_0''}\right)$.

13.16. Найти среднее число нулей в единицу времени процесса $\eta(t) = \xi_1(t)\,\xi_2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два гауссовских стационарных независимых дифференцируемых процесса с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $R_1(\tau) = \sigma_1^2 r_1(\tau)$, $R_2(\tau) = \sigma_2^2 r_2(\tau)$.

Ответ: $N_1(0) = \dfrac{1}{\pi}\left(\sqrt{-r_{10}''} + \sqrt{-r_{20}''}\right)$, $r_{i0}'' = \left.\dfrac{d^2 r_i(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$.

Указание: Поскольку независимые процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ дифференцируемы, то их реализации представляют собой плавно изменяющиеся функции времени. Вероятность совпадения нулей двух таких функций практически равна нулю. Поэтому число нулей произведения двух функций равно сумме чисел нулей каждой из перемножаемых функций.

13.17. Вычислить среднее число выбросов $N^{\dagger}(C)$ квадрата стационарного случайного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $N^{\dagger}(C) = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{-r_0''}\exp\left(-\dfrac{C}{2\sigma^2}\right)$, $C \geqslant 0$.

13.18. Найти среднее число выбросов $N^{\dagger}(C)$ случайного процесса $\eta(t) = \sqrt{\xi^2(t)} = |\xi(t)|$, если гауссовский процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $N^{\dagger}(C) = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{-r_0''}\exp\left(-\dfrac{C^2}{2\sigma^2}\right)$, $C \geqslant 0$.

13.19. Вычислить среднее число выбросов на уровне $C \geqslant 0$ логарифмически нормального процесса $\eta(t)$, заданного выражением $\xi(t) = \ln\eta(t)$. Здесь $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $N^{\dagger}(C) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{-r_0''}\exp\left(-\dfrac{\ln^2 C}{2\sigma^2}\right)$, $C \geqslant 0$.

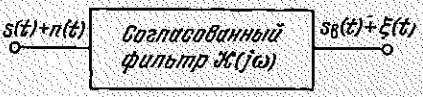


Рис. 13.5. Воздействие суммы сигнала и шума на согласованный фильтр

13.20. Получить выражение $N_1^+(C)$ для стационарного процесса $\eta(t) = \sqrt{\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)}$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два независимых гауссовских стационарных процесса с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми корреляционными функциями $R_1(\tau) = R_2(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ: $N_1^+(C) = \sqrt{\frac{-r_0''}{2\pi}}\left(\frac{C}{\sigma}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right]$, $C \geqslant 0$.

13.21. Имеется линейный фильтр (рис. 13.5), согласованный с детерминированным импульсом гауссовской формы

$$s(t) = A_0 \exp\left[-2{,}8\left(\frac{t-\tau_0}{\tau_и}\right)^2\right],\ 0 < \tau_0 < T,\ T \gg \tau_и,$$

где τ_0 — момент времени, соответствующий середине импульса; $\tau_и$ — длительность импульса на уровне 0,5; T — интервал наблюдения.

Частотная характеристика согласованного фильтра имеет вид

$$\mathcal{K}(j\omega) = A_0 \tau_и \sqrt{\frac{\pi}{2{,}8}} \exp\left[-\frac{(\omega\tau_и)^2}{12} - j\omega(t_0 - \tau_0)\right],$$

где t_0 — момент времени, соответствующий наибольшему значению выходного сигнала $s_{в\,max} = s_в(t_0) = E = A_0^2 \tau_и \sqrt{\pi/5{,}6}$.

Найти среднее число положительных выбросов $N^+(C, T)$ выходного шума $\xi(t)$ на уровне C, равном наибольшему значению выходного сигнала.

Ответ: $N^+(C, T) = \frac{\sqrt{0{,}7}}{\pi}\left(\frac{T}{\tau_и}\right)\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)$.

13.22. Получить явные выражения $N_1^+(C)$ для гауссовских стационарных узкополосных процессов с нулевыми математическими ожиданиями, одинаковыми дисперсиями и тремя разными нормированными корреляционными функциями

$$r_1(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\,e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau,\ r_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}\cos\omega_0\tau,$$

$$r_3(\tau) = \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2}\cos\omega_0\tau.$$

Сравнить полученные результаты при одном и том же значении уровня C и одинаковой эффективной ширине спектров $\Delta f_э$.

Ответ:

$$N_{1,1}^+(C) \simeq f_0[1 + (2/\pi)(\Delta f_э/f_0)^2]\exp(-C^2/2\sigma^2),$$
$$N_{1,2}^+(C) \simeq f_0[1 + (1/4\pi)(\Delta f_э/f_0)^2]\exp(-C^2/2\sigma^2), \quad f_0 = \omega_0/2\pi,$$

$$N_{1,3}^{+}(C) \simeq f_0 [1 + (1/24)(\Delta f/f_0)^2] \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad \Delta f = \Delta\omega/2\pi,$$

$$N_{1,1}^{+}(C) > N_{1,2}^{+}(C) > N_{1,3}^{+}(C).$$

13.23. Получить формулу для среднего числа положительных выбросов в единицу времени на уровне C гауссовского стационарного процесса с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \gamma(\tau)], \qquad \rho(0) = 1.$$

Ответ:

$$N_1^{+}(C) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{\gamma_0'}{\omega_0}\right)^2 - \frac{\rho_0''}{\omega_0^2} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right), \quad \gamma_0' = \left.\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

13.24. Определить среднее число выбросов $N^{+}(C, T)$ огибающей $A(t)$ квазигармонического шума, спектральная плотность которого постоянна в интервале частот $|f - f_0| \leqslant \Delta f/2$ и равна нулю вне этого интервала. Рассмотреть случай, когда $T = 1000$ мкс, $\Delta f = 1$ Мгц и $C = 3\sigma$.

Ответ:

$$N^{+}(C, T) = T N_1^{+}(C) = T \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right), \quad C > 0,$$

$$N^{+}(3\sigma,\ 10^{-3}) \simeq 24\ \text{с}^{-1}.$$

13.25. На вход системы, представленной на рис. 13.6, воздействует белый шум $n(t)$, односторонняя спектральная плотность которого $S_n(f) = N_0$, $f \geqslant 0$. Определить число срабатываний «безынерционного» электронного реле от шумовых выбросов при порогах срабатывания $C_1 = 2\sigma$ и $C_2 = 3\sigma$ за время $T = 1000$ мкс, если квадрат частотной характеристики усилителя промежуточной частоты (УПЧ) имеет вид

$$\mathcal{K}^2(f) = \mathcal{K}_0 \exp\left[-2{,}8\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right)^2\right], \quad \Delta f \ll f_0,$$

где f_0 — резонансная частота; Δf — полоса пропускания УПЧ на уровне 0,5. Вычисления выполнить для $\Delta f = 2$ МГц.

Ответ:

$$N^{+}(C, T) = T N_1^{+}(C) = T \Delta f_э \frac{C}{\sigma} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Delta f_э = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{2{,}8}}.$$

$$N^{+}(2\sigma,\ 10^{-3}) \simeq 540\ \text{с}^{-1}, \quad N^{+}(3\sigma,\ 10^{-3}) \simeq 66\ \text{с}^{-1}.$$

Рис. 13.6. Простейшая схема амплитудного радиоприемника с электронным реле

Указание. На выходе линейного детектора огибающей воспроизводится огибающая $A(t)$ квазигармонического шума $\xi(t)$, воздействующего на вход детектора.

13.26. Пусть на схему рис. 13.6 воздействует сумма гармонического сигнала $s(t) = A_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и квазигармонического шума $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2\exp(-\pi\Delta f_э^2\tau^2)\cos\omega_0\tau.$$

Найти среднее число срабатываний реле за фиксированное время T при пороге срабатывания реле $C = 3\sigma$, если отношение сигнал/шум $a = A_m/\sigma = 2$.

Ответ:

$$N^+(C, T) = TN\dagger(C) = T\Delta f_э\,\frac{C}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{C^2}{\sigma^2}\right)\right] I_0\left(a\,\frac{C}{\sigma}\right) \simeq$$

$$\simeq 0{,}37T\Delta f_э.$$

Указание: На выходе линейного детектора огибающей воспроизводится огибающая $V(t)$ суммы сигнала и шума.

13.27. Решить задачу 13.26 для случая, когда корреляционная функция шума $\xi(t)$ имеет вид

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2\,\frac{\sin\pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau}\cos\omega_0\tau,$$

и сравнить ответы.

Ответ:

$$N^+(C, T) = T\Delta f\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,\frac{C}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{C^2}{\sigma^2}\right)\right] I_0\left(a\,\frac{C}{\sigma}\right) \simeq$$

$$\simeq 0{,}22T\Delta f.$$

13.28. Вычислить средние числа максимумов в единицу времени $N_{1\max}$ гауссовских стационарных процессов с нормированными корреляционными функциями

$$r_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2},\quad r_3(\tau) = \sin\pi\Delta f\tau/\pi\Delta f\tau.$$

Сравнить полученные результаты при одинаковой эффективной ширине спектров.

Ответ:

$$N_{1,2\max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{6\alpha} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\Delta f_э = 1{,}382\Delta f_э,$$

$$N_{1,3\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\Delta f = 0{,}387\Delta f_э < N_{1,2\max}.$$

13.29. Для процессов, указанных в задаче 13.28, вычислить средний временной интервал между максимумом (минимумом) и соседним минимумом (максимумом).

Ответ:

$$\bar{\tau}_{2m}=\frac{\pi}{\sqrt{6a}}=\frac{1}{2\Delta f_э}\sqrt{\frac{\pi}{6}}=\frac{0{,}362}{\Delta f_э},$$

$$\bar{\tau}_{3m}=\frac{1}{\Delta f}\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{1{,}292}{\Delta f}>\bar{\tau}_{2m},\ \Delta f=\Delta f_э.$$

13.30. Найти среднее число максимумов в единицу времени $N_{1\max}$ гауссовского стационарного процесса с нормированной корреляционной функцией $r(\tau)=\rho(\tau)\cos\omega_0\tau$, $\rho(0)=1$.

Ответ:

$$N_{1\max}=f_0\left(\frac{1-6\rho_0''/\omega_0^2+\rho_0^{(4)}/\omega_0^4}{1-\rho_0''/\omega_0^2}\right)^{1/2},\ f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}.$$

13.31. Решить задачу 13.30 при нормированной корреляционной функции

$$r(\tau)=\frac{\sin\pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau}\cos\omega_0\tau,$$

считая $\Delta f\ll f_0=\omega_0/2\pi$.

Ответ:

$$N_{1\max}=f_0\left[\frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2+\frac{1}{90}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^4}{1+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2}\right]^{1/2}\simeq$$

$$\simeq f_0\left[1+\frac{5}{24}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2\right].$$

13.32. Решить задачу 13.30 при нормированной корреляционной функции

$$r(\tau)=\exp(-\pi\Delta f_э^2\tau^2)\cos\omega_0\tau,\ \Delta f_э\ll f_0=\omega_0/2\pi.$$

Ответ:

$$N_{1\max}=f_0\left[\frac{1+\frac{3}{\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2+\frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^4}{1+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2}\right]^{1/2}\simeq$$

$$\simeq f_0\left[1+\frac{5}{4\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2\right].$$

13.33. Выразить через эффективную ширину спектра $\Delta f_э$ среднее время между двумя соседними положительными выбросами на

уровне C для гауссовских стационарных процессов с нулевыми математическими ожиданиями и нормированными корреляционными функциями

$$r_1(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\, e^{-\alpha|\tau|}, \quad r_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad r_3(\tau) = \sin \pi\Delta f\tau / \pi\Delta f\tau.$$

Сопоставить полученные ответы с результатами решения задачи 13.9.

Ответ:

$$\bar{\tau}_1(C) = \frac{\pi}{4\Delta f_э}\left[1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right]\exp\frac{C^2}{2\sigma^2},$$

$$\bar{\tau}_2(C) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Delta f_э}\left[1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right]\exp\frac{C^2}{2\sigma^2},$$

$$\bar{\tau}_3(C) = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta f}\left[1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right]\exp\frac{C^2}{2\sigma^2}.$$

13.34. Для гауссовских процессов, указанных в задаче 13.33, найти средний интервал времени между соседними нулями.

Ответ:

$$\frac{\bar{\tau}_1(0)}{2} = \frac{\pi}{8\Delta f_э} = \frac{0{,}3927}{\Delta f_э}, \quad \frac{\bar{\tau}_2(0)}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{2\Delta f_э} = \frac{0{,}6267}{\Delta f_э},$$

$$\frac{1}{2}\,\bar{\tau}_3(0) = \frac{\sqrt{3}}{\Delta f} = \frac{1{,}732}{\Delta f}.$$

13.35. Определить средний интервал между положительными выбросами на уровне C гауссовского стационарного процесса с нулевым математическим ожиданием и нормированной корреляционной функцией

$$r(\tau) = \rho(\tau)\cos\omega_0\tau, \quad \omega_0^2 \gg -\rho_0'', \quad \rho(0) = 1.$$

Ответ:

$$\bar{\tau}(C) \simeq \frac{1}{f_0}\left(1 + \frac{\rho_0''}{2\omega_0^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right]\exp\left(\frac{C^2}{2\sigma^2}\right).$$

13.36. Пользуясь ответом к задаче 13.35, определить средний интервал между соседними нулями процессов с корреляционными функциями

$$r_2(\tau) = \exp(-\pi\Delta f_э^2\,\tau^2)\cos\omega_0\tau, \quad r_3(\tau) = \frac{\sin\pi\Delta f_э\,\tau}{\pi\Delta f_э\,\tau}\cos\omega_0\tau.$$

Ответ:

$$\frac{1}{2}\,\bar{\tau}_2(0) \simeq \frac{1}{2f_0}\left[1 - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2\right], \quad \frac{1}{2}\,\bar{\tau}_3(0) \simeq \frac{1}{2f_0}\left[1 - \frac{1}{24}\left(\frac{\Delta f_э}{f_0}\right)^2\right].$$

13.37. Определить средний интервал между соседними положительными и отрицательными выбросами огибающей $A(t)$ на некотором уровне $C > 0$ для гауссовских стационарных процессов с нормированными корреляционными функциями, указанными в задаче 13.36.

Ответ:

$$\bar{\tau}_2(C) = \frac{1}{\Delta f_э}\frac{\sigma}{C},\quad \bar{\tau}_э(C) = \frac{1}{\Delta f_э}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma}{C},$$

$$\bar{\theta}_2(C) = \frac{1}{\Delta f_э}\frac{\sigma}{C}\left[\exp\left(\frac{C^2}{2\sigma^2}\right) - 1\right],\quad \bar{\theta}_э(C) = \frac{1}{\Delta f_э}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma}{C}\times$$
$$\times\left[\exp\left(\frac{C^2}{2\sigma^2}\right) - 1\right].$$

13.38. Найти наибольшую точность определения положения τ_0 центра видеоимпульса гауссовской формы (рис. 13.7)

$$u(t) = A_0 \exp\left[-2{,}8\left(\frac{t-\tau_0}{\tau_и}\right)^2\right],$$

где $\tau_и$ — известная длительность импульса на уровне 0,5, в случаях, когда: 1) для определения τ_0 используется пороговое устройство, реагирующее только на фронт импульса; 2) момент τ_0 определяется пороговым устройством, реагирующим как на фронт, так и на срез импульса.

Указанный импульс принимается на фоне аддитивного флуктуационного шума малой интенсивности с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\pi}{4}\Delta f_э^2 \tau^2\right),\quad \Delta f_э \simeq \frac{1}{\tau_и}.$$

Ответ:

1) $\sigma_{\tau_0} = \dfrac{\sigma\tau_и}{1{,}435A_0}$;

2) $\sigma_{\tau_0} = \dfrac{6\tau_и}{1{,}435\sqrt{2}\,A_0}\sqrt{1+\exp\left(-\pi\Delta f_э^2\tau_и^2/5{,}6\right)} \simeq \dfrac{0{,}886\,\sigma\tau_и}{1{,}435A_0}$.

У к а з а н и е. Рассматриваемый гауссовский видеоимпульс имеет максимальную крутизну фронта и среза $u'_{max}(t_{1,2}) =$

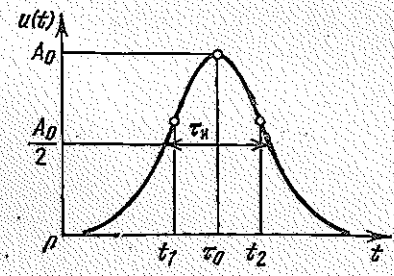


Рис. 13.7. Видеоимпульс гауссовской формы

$= \pm A_0\sqrt{5{,}6}\,e^{-0{,}5}/\tau_и$ в точках $t_{1,2} = \tau_0 \pm \tau_и/\sqrt{5{,}6}$, отстоящих друг от друга на $\tau = \tau_и/\sqrt{1{,}4}$. Пороговые устройства должны иметь порог срабатывания $C = A_0 e^{-0{,}5}$. Центр импульса во втором случае определяется равенством $\tau_0 = (t_1 + t_2)/2$.

13.39. Определить временную нестабильность положения какого-либо нуля суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и плавно изменяющегося флуктуационного шума с нулевым математическим ожиданием и малой дисперсией $\sigma^2 \ll A_m^2$.

Ответ: $\sigma_0 = \sigma/\omega_0 A_m$.

13.40. Найти плотность вероятности временного интервала τ между соседними нулями суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и гауссовского стационарного шума (малой интенсивности) с нулевым математическим ожиданием и дифференцируемой корреляционной функцией $R(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$.

Ответ:

$$p_0(\tau) = \frac{a\omega_0}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1 + r(\pi/\omega_0)}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 a^2 (\omega_0 \tau/\pi - 1)^2}{4[1 + r(\pi/\omega_0)]}\right\}, \quad a = \frac{A_m}{\sigma}.$$

Указание. Как следует из (13.31), в линейном приближении плотность вероятности интервала времени между соседними нулями будет нормальной. При этом среднее значение интервала, очевидно, равно π/ω_0, а для вычисления дисперсии нужно воспользоваться формулой (13.33).

Раздел IV

ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ

14. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем виде задачу оптимальной фильтрации сигналов из шумов можно сформулировать следующим образом. Пусть колебание $x(t)$, принятое на некотором интервале времени, является функцией от сигнала $s[t, \lambda(t)]$ и шума $n(t)$:

$$x(t) = F\{s[t, \lambda(t)], n(t)\}. \tag{14.1}$$

Сигнал $s[t, \lambda(t)]$ в общем случае может зависеть не от одного, а от нескольких параметров $\lambda_i(t)$, причем либо сам сигнал $s[t, \lambda(t)]$, либо его параметр $\lambda(t)$ являются случайными процессами. Вид функции $F\{s, n\}$, т. е. способ комбинирования сигнала и шума, и некоторые статистические характеристики сигнала и шума предполагаются априорно известными. Используя эти априорные данные, необходимо определить устройство (рис. 14.1), решающее оптимальным образом, какая реализация самого сигнала $s[t, \lambda(t)]$ или его параметра $\lambda(t)$ содержится в принятом колебании (14.1).

Из-за наличия шума $n(t)$ и случайного характера сигнала $s[t, \lambda(t)]$ оценка реализации сигнала $s[t, \lambda(t)]$ или его параметра $\hat{\lambda}(t)$ не будет совпадать с истинной реализацией, т. е. будут иметь место ошибки фильтрации. Для количественной характеристики качества фильтрации можно использовать различные критерии [42]. Наиболее часто в задачах фильтрации используются критерий минимума среднего квадрата ошибки, критерий максимального отношения сигнал/шум и критерий максимума апостериорной вероятности.

В зависимости от дополнительных предположений о характере сигнала и шума сформулированная задача решается методами линейной или нелинейной фильтрации. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрениями лишь задач линейной фильтрации. Кроме того, будем предполагать, что сигнал и шум взаимодействуют аддитивно, т. е.

$$x(t) = s[t, \lambda(t)] + n(t). \tag{14.1а}$$

Оптимальная линейная фильтрация по критерию минимума среднего квадрата ошибки [84—89]. Предположим, что входящие в (14.1а) сигнал $s[t, \lambda(t)] = s(t)$ и шум $n(t)$ представляют собой стационарные нормальные гауссовские случайные процессы с известными ковариационными функциями:

$$K_s(\tau) = M\{s(t), s(t+\tau)\}, \quad K_n(\tau) = \{n(t)\, n(t+\tau)\},$$

$$K_{sn}(\tau) = M\{s(t) n(t+\tau)\}.$$

Требуется определить систему, которая из принимаемой смеси

$$x(t) = s(t) + n(t) \tag{14.1б}$$

с минимальной средней квадратической ошибкой выделяет не параметр $\lambda(t)$, а сам полезный сигнал $s(t)$. Таким образом, искомая оптимальная система должна минимизировать величину

$$\varepsilon^2 = M\{[\hat{s}(t) - s(t+\Delta)]^2\}. \tag{14.2}$$

В (14.2) для общности введен временной сдвиг Δ. При $\Delta > 0$ оценка $\hat{s}(t)$ на выходе системы должна предсказывать (прогнозировать) значение входного сигнала $s(t)$ на время Δ, при $\Delta = 0$ сформулированная задача сводится к выделению (сглаживанию) сигнала $s(t)$ из колебания $x(t)$.

Строгое математическое решение сформулированной задачи для случая полубесконечного интервала наблюдения $(-\infty, t)$ было дано А. Н. Колмогоровым [84] и Н. Винером [85]. Ими, в частности, было показано, что оптимальное по критерию минимума среднего квадрата ошибки устройство в данном случае относится к классу линейных фильтров с постоянными параметрами. Основные результаты теории Колмогорова—Винера заключаются в следующем.

Предположим, что на вход физически реализуемой линейной системы (рис. 14.2) с импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} h(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{14.3}$$

воздействует стационарный случайный процесс $x(t)$. При этом стационарный случайный процесс $y(t) = \hat{s}(t)$ на ее выходе будет определяться соотношением

$$y(t) = \hat{s}(t) = \int_0^\infty h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\,. \tag{14.4}$$

Подставляя (14.4) в (14.2), получаем следующее выражение для среднего квадрата ошибки фильтрации:

$$\varepsilon^2 = M\left\{\left[\int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau - s(t+\Delta)\right]^2\right\},$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$\varepsilon^2 = K_s(0) - 2\int_0^\infty h(\tau)K_{sx}(\tau+\Delta)d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)K_x(\tau_2-\tau_1)d\tau_1 d\tau_2. \tag{14.5}$$

Здесь

$$K_{sx}(\tau) = M\{s(t)x(t+\tau)\} \tag{14.6}$$

— взаимная ковариационная функция процессов $s(t)$ и $x(t)$;

$$K_x(\tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\} \tag{14.7}$$

— ковариационная функция случайного процесса $x(t)$.

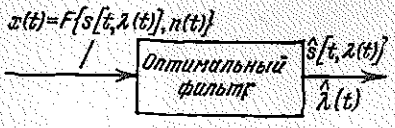


Рис. 14.1. Оптимальный фильтр

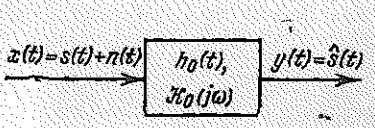


Рис. 14.2. Линейный фильтр

Чтобы определить импульсную характеристику $h_0(t)$ оптимального фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки (14.5), воспользуемся известным методом вариационного исчисления. Пусть

$$h(t) = h_0(t) + \mu g(t), \tag{14.8}$$

где μ — параметр, не зависящий от t; $g(t)$ — произвольная функция. При этом условие минимума среднего квадрата ошибки записывается в следующем виде:

$$\left.\frac{d\varepsilon^2}{d\mu}\right|_{\mu=0} = 0. \tag{14.9}$$

После подстановки (14.8) в (14.5) условие (14.9) принимает вид

$$\int_0^\infty g(\tau)\left[\int_0^\infty h_0(\nu)K_x(\tau-\nu)d\nu - K_{sx}(\tau+\Delta)\right]d\tau = 0.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться при произвольной функции $g(t)$, то отсюда следует, что импульсная характеристика $h_0(t)$ оптимального фильтра должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^\infty h_0(\nu)K_x(\tau-\nu)d\nu = K_{sx}(\tau+\Delta),\ \tau \geqslant 0. \tag{14.10}$$

Это интегральное уравнение является основным уравнением теории линейной фильтрации и называется уравнением Винера—Хопфа [86].

Таким образом, задача нахождения оптимального сглаживающего ($\Delta = 0$) или прогнозирующего ($\Delta > 0$) физически реализуемого фильтра сводится к решению интегрального уравнения (14.10). Решение этого уравнения в общем случае встречает известные трудности, обусловленные, главным образом, требованием физической реализуемости оптимального фильтра. Однако в частном, но весьма важном с практической точки зрения случае дробно-рациональной спектральной плотности $S_x(\omega)$ входного процесса $x(t)$ из (14.10) можно получить следующее выражение для комплексной частотной характеристики $\mathcal{K}_0(j\omega)$ оптимального фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{1}{2\pi F(j\omega)}\int_0^\infty e^{-j\omega\tau}d\tau\int_0^\infty \frac{S_{sx}(\Omega)}{F^*(j\Omega)}e^{j\Omega(\tau+\Delta)}d\Omega. \tag{14.11}$$

Здесь

$$F(j\omega)F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2 = S_x(\omega),$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^\infty K_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \tag{14.12}$$

$$S_{sx}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty K_{sx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

При этом минимальный средний квадрат ошибки фильтрации

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [S_s(\omega) - |\mathcal{K}_0(j\omega)|^2 S_x(\omega)]\,d\omega, \tag{14.13}$$

где

$$S_s(\omega) = \int_{-\infty}^\infty K_s(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{14.14}$$

Для частного случая сглаживания аддитивной смеси взаимно независимых стационарных случайного процесса $s(t)$ и белого шума $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_n = 0$ и корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$$

формула (14.11) упрощается [89] и приводится к виду:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = 1 - \frac{N_0}{[2S_s(\omega) + N_0]_+}. \qquad (14.11а)$$

Индекс «+» у выражения в квадратных скобках означает, что если это выражение разложить на простые дроби, то в разложении должны быть оставлены только те из них, которые соответствуют полюсам, расположенным в верхней полуплоскости. Все простые дроби функции $F(\omega) = S_s(\omega) + N_0/2$, соответствующие полюсам в нижней полуплоскости, а также целая часть $F(\omega)$ должны быть отброшены. Минимальный средний квадрат ошибки для рассматриваемого случая может быть вычислен по формуле [89]

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2S_s(\omega)}{N_0}\right) \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (14.13а)$$

Практические вычисления по формуле (14.11) оказываются довольно громоздкими. Значительное упрощение получается, если не накладывать на оптимальный фильтр требования физической реализуемости (14.3), т. е. полагать в (14.4) и последующих формулах нижний предел равным $-\infty$. При этом вместо уравнения (14.10) получаем интегральное уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_0(v) K_x(\tau - v) dv = K_{sx}(\tau + \Delta), \qquad (14.15)$$

решение которого приводит к следующему выражению для комплексной частотной характеристики физически нереализуемого оптимального фильтра:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_x(\omega)} e^{j\omega\Delta}. \qquad (14.16)$$

Минимальный средний квадрат ошибки и в этом случае вычисляется по формуле (14.13). Для частного случая статистически независимых сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ формула (14.16) приводится к виду

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} e^{j\omega\Delta}. \qquad (14.16а)$$

Хотя соотношения (14.16) и (14.16а) соответствуют физически нереализуемым оптимальным фильтрам, они весьма полезны, так как любой физически реализуемый фильтр не может дать меньшей средней квадратической ошибки, чем фильтры, определяемые (14.16) и (14.16а). Объясняется это тем, что наложение на фильтр условия физической реализуемости (14.3) сужает возможности выбора оптимальной характеристики фильтра и по этой причине может привести лишь к ухудшению конечного результата.

Оптимальная линейная фильтрация по критерию максимума отношения сигнал/шум [27, 42, 82, 89—91]. Предположим, что на вход линейного фильтра с комплексной частотной характеристикой $\mathcal{K}(j\omega)$ поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t), \qquad (14.17)$$

где $n(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_n(\omega)$; $s(t)$ — статистически независимый от $n(t)$ полезный сигнал, форма которого (амплитудный спектр $S(j\omega)$) заранее известна. При этих условиях процесс на выходе фильтра

$$y(t) = s_{\text{вых}}(t) + n_{\text{вых}}(t), \tag{14.18}$$

где $s_{\text{вых}}(t)$ и $n_{\text{вых}}(t)$ — результаты преобразования сигнала и помехи линейным фильтром. Сигнальная составляющая определяется соотношением

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\mathcal{K}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{14.19}$$

а дисперсия выходного шума $n_{\text{вых}}(t)$ вычисляется по формуле

$$D_{\text{вых}} = \sigma^2_{\text{вых}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2 d\omega. \tag{14.20}$$

Введем в рассмотрение отношение

$$a = |s_{\text{вых}}(T)|/\sigma_{\text{вых}}, \tag{14.21}$$

представляющее собой отношение мгновенного значения сигнала на выходе фильтра в некоторый момент времени $t = T$ к среднему квадратическому значению выходного шума. В соответствии с (14.19) и (14.20) это отношение равно

$$a = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\,\mathcal{K}(j\omega)\,e^{j\omega T}d\omega\right|}{\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2\,d\omega\right]^{1/2}}. \tag{14.22}$$

Линейный фильтр, максимизирующий отношение (14.22), называется фильтром, оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум. Можно показать [89, 90], что комплексная частотная характеристика такого фильтра

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = C\frac{S^*(j\omega)}{S_n(\omega)}e^{-j\omega T}, \tag{14.23}$$

где C — некоторая постоянная; $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная с амплитудным спектром $S(j\omega)$ входного сигнала $s(t)$.

Если входящий в (14.17) случайный процесс $n(t)$ представляет собой стационарный гауссовский белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_0/2$, $-\infty < \omega < \infty$, то формула (14.23) приводится к виду

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \kappa S^*(j\omega)\,e^{-j\omega T}. \tag{14.24}$$

Таким образом, в случае приема аддитивной смеси сигнала и белого шума комплексная частотная характеристика фильтра, оптимального по критерию максимального отношения сигнал/шум, полностью определяется амплитудным спектром входного сигнала. В соответствии с этим оптимальные фильтры с комплексными частотными характеристиками (14.24) называют согласованными.

Определим импульсную характеристику согласованного фильтра:

$$h_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_0(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega. \qquad (14.25)$$

После подстановки (14.24) в (14.25) получаем

$$h_0(t) = \kappa s(T - t), \qquad (14.26)$$

где κ — некоторая постоянная величина, имеющая смысл коэффициента усиления.

2. ПРИМЕРЫ

14.1. Имеется аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty; \qquad (14.27)$$

$s(t)$ — статистически независимый от $n(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = 1/(1 + \omega^2), \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ физически реализуемого прогнозирующего фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t + \Delta)]^2\}.$$

Здесь $y(t)$ — случайный процесс на выходе фильтра.

Решение. В соответствии с (14.11)

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{1}{2\pi F(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{sx}(\Omega)}{F^*(j\Omega)} e^{j\Omega(\tau+\Delta)}\, d\Omega,$$

где

$$F(j\omega)F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2 = S_x(\omega).$$

Поскольку по условию задачи $s(t)$ и $n(t)$ статистически независимы, то

$$S_{sx}(\omega) = S_s(\omega) = 1/(1 + \omega^2),$$

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega) = (N_0 + 2 + N_0\omega^2)/[2(1 + \omega^2)].$$

Отсюда следует, что

$$F(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0+2} + j\omega\sqrt{N_0}}{\sqrt{2}\,(1+j\omega)}, \quad F^*(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0+2} - j\omega\sqrt{N_0}}{\sqrt{2}\,(1-j\omega)}.$$

Таким образом, искомая комплексная частотная характеристика определяется соотношением

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\pi(\sqrt{N_0+2} + j\omega\sqrt{N_0})} \int_0^{\infty} I(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

где

$$I(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+j\Omega)(\sqrt{N_0+2}-j\Omega\sqrt{N_0})}e^{j\Omega(\tau+\Delta)}d\Omega.$$

Учитывая, что [17]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\beta+jx)^{-2\mu}(\gamma-jx)^{-2\nu}e^{-jpx}dx=$$

$$=2\pi(\beta+\gamma)^{-\mu-\nu}\frac{(-p)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(2\mu)}e^{p(\beta-\gamma)/2}W_{\mu-\nu,\,1/2-\mu-\nu}(-\beta p-$$

$$-\gamma p),\ p<0,$$

где $W_{\lambda,q}(z)$ — функция Уиттекера, находим

$$I(\tau)=\frac{2\pi}{\sqrt{N_0}}\left(\frac{\sqrt{N_0+2}}{\sqrt{N_0}}+1\right)^{-1}\exp\left[-\frac{\sqrt{N_0}-\sqrt{N_0+2}}{2\sqrt{N_0}}(\tau+\Delta)\right]\times$$

$$\times W_{0,\,-1/2}\left(\frac{\sqrt{N_0+2}+\sqrt{N_0}}{\sqrt{N_0}}(\tau+\Delta)\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{N_0+2}+\sqrt{N_0}}\times$$

$$\times\exp[-(\tau+\Delta)].$$

После подстановки $I(\tau)$ в $\mathcal{K}_0(j\omega)$ и ряда несложных преобразований окончательно получаем

$$\mathcal{K}_0(j\omega)=\mathcal{K}_0/(1+j\omega T_0),$$

где

$$\mathcal{K}_0=\frac{2}{\sqrt{N_0+2}(\sqrt{N_0+2}+\sqrt{N_0})}e^{-\Delta},\quad T_0=\sqrt{\frac{N_0}{N_0+2}}.$$

Таким образом, искомый прогнозирующий фильтр может быть представлен в виде последовательного соединения идеального (неискажающего) усилителя с коэффициентом усиления $\mathcal{K}_0$ и интегрирующей цепочки RC с постоянной времени $RC=T_0$ (рис. 14.3).

14.2. На вход фильтра воздействует аддитивная смесь $x(t)=s(t)+n(t)$, где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью (14.27); $s(t)$ — статистически независимый от $n(t)$ стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $m_s=0$ и корреляционной функцией

$$R_s(\tau)=\sigma_s^2e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau.$$

Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ физически реализуемого сглаживающего линейного фильтра и вычислить соответствующий ему минимальный средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2=M\{[y(t)-s(t)]^2\}.$$

Рис. 14.3. Прогнозирующий фильтр

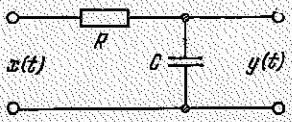


Рис. 14.4. Интегрирующая цепочка RC

Решение: В соответствии с (14.16а) искомая комплексная частотная характеристика имеет вид

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)},$$

а спектральная плотность процесса $s(t)$ при $m_s = 0$

$$S_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \alpha\sigma_s^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}\right].$$

Подставляя $S_s(\omega)$ в $\mathcal{K}_0(j\omega)$, получаем

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2}{2\alpha\sigma_s^2 + \alpha^2 N_0 + N_0(\omega - \omega_0)^2} + \frac{2\alpha\sigma_s^2}{2\alpha\sigma_s^2 + \alpha^2 N_0 + N_0(\omega + \omega_0)^2}.$$

Значение среднего квадрата ошибки находим из (14.13):

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\min}^2 = \sigma_s^2 \sqrt{\frac{\alpha N_0}{(\alpha N_0 + 2\sigma_s^2)}}.$$

14.3. На вход RC-фильтра (рис. 14.4) поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = 2\alpha\sigma_s^2/(\alpha^2 + \omega^2), \quad -\infty < \omega < \infty;$$

$n(t)$ — статистически независимый от $s(t)$ стационарный гауссовский белый шум, для которого

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Найти оптимальное значение постоянной времени $T = RC$, минимизирующее средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t)]^2\},$$

где $y(t)$ — процесс на выходе фильтра, и определить значение $\varepsilon_{\min}^2$.

Решение. Обозначим импульсную характеристику RC-фильтра через $h(t)$. Тогда разность $\xi(t) = y(t) - s(t)$ можно представить в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = s_1(t) + n_1(t),$$

где

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{t} [h(t-\tau) - \delta(t-\tau)]s(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h_1(t-\tau)s(\tau)d\tau,$$

$$n_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)n(\tau)d\tau.$$

По условию задачи процессы $s(t)$ и $n(t)$ взаимно не коррелированы, вследствие чего взаимно не коррелированы и процессы $s_1(t)$ и $n_1(t)$. Таким образом, спектральная плотность процесса $\xi(t)$

$$S_\xi(\omega) = S_{s_1}(\omega) + S_{n_1}(\omega),$$

где

$$S_{s_1}(\omega) = S_s(\omega)|\mathcal{K}_1(j\omega)|^2, \quad S_{n_1}(\omega) = S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2$$

— спектральные плотности процессов $s_1(t)$ и $n_1(t)$,

$$\mathcal{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,e^{-j\omega u}du,$$

$$\mathcal{K}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [h(u) - \delta(u)]\,e^{-j\omega u}du.$$

Таким образом, дисперсия процесса $\xi(t)$

$$\sigma_\xi^2 = \varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega)|\mathcal{K}(j\omega) - 1|^2 + S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2]d\omega.$$

По условию задачи,

$$\mathcal{K}(j\omega) = \beta/(\beta + j\omega), \quad \beta = 1/RC = 1/T.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\alpha\sigma_s^2\,\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(\beta^2+\omega^2)} + \frac{\beta^2 N_0}{2(\beta^2+\omega^2)}\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha+\beta} + \frac{N_0}{2}\beta\right).$$

Для нахождения оптимального значения $\beta = 1/T$ составим производную от ε^2 по β:

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_0}{2} - \frac{2\alpha\sigma_s^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)$$

Отсюда следует, что при $N_0 < 4\sigma_s^2/\alpha$ оптимальное значение постоянной времени RC-фильтра

$$T_0 = \frac{1}{\beta_0} = \frac{\sqrt{N_0}}{2\sigma_s\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{N_0}},$$

а соответствующий ему минимальный средний квадрат ошибки сглаживания

$$\varepsilon^2_{\min} = \sigma_s\sqrt{\alpha N_0} - \alpha N_0/4.$$

Если же $N_0 \geqslant 2A^2/\alpha^2$, то оптимальное значение $T_0 = 1/\beta_0 \to \infty$, а средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2_{\min} \to \sigma_s^2.$$

14.4. При тех же условиях, что и в примере 14.3, найти оптимальное значение постоянной времени $T = RC$, минимизирующее средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t + \Delta)]^2\}.$$

Решение. В данном примере разность

$$\xi(t) = y(t) - s(t + \Delta) = s_1(t) + n_1(t),$$

где

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{t} [h(t - \tau) - \delta(t + \Delta - \tau)]s(\tau)d\tau,$$

$$n_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t - \tau)n(\tau)d\tau.$$

Поскольку процессы $s_1(t)$ и $n_1(t)$ взаимно не коррелированы, спектральная плотность процесса $\xi(t)$

$$S_\xi(\omega) = S_{s_1}(\omega) + S_{n_1}(\omega),$$

где

$$S_{s_1}(\omega) = S_s(\omega)|\mathcal{K}_1(j\omega)|^2, \quad S_{n_1}(\omega) = S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{K}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)e^{-j\omega u}du = \int_{-\infty}^{\infty} [h(u) - \delta(u + \Delta)]e^{-j\omega u}du =$$

$$= \mathcal{K}(j\omega) - e^{-j\omega\Delta},$$

находим

$$S_\xi(\omega) = S_s(\omega)|\mathcal{K}(j\omega) - e^{j\omega\Delta}|^2 + S_n(\omega)|\mathcal{K}(j\omega)|^2.$$

Отсюда дисперсия процесса $\xi(t)$

$$\sigma_\xi^2 = \varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega)\,|\,\mathcal{K}(j\omega) - e^{j\omega\Delta}|^2 + S_n(\omega)\,|\,\mathcal{K}(j\omega)|^2]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha^2+\omega^2}\left|\frac{\beta}{\beta+j\omega} - e^{j\omega\Delta}\right|^2 + \frac{N_0\beta^2}{2(\beta^2+\omega^2)}\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\sigma_s^2(1-e^{-\alpha\Delta}) - \frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha+\beta}(1-2e^{-\alpha\Delta}) + \beta\frac{N_0}{2}\right].$$

Анализируя зависимость ε^2 от β, нетрудно установить, что при $\Delta \geqslant (\ln 2)/\alpha$ наименьшее значение среднего квадрата ошибки имеет место при $\beta_0 = 1/T_0 = 1/RC = 0$ и равно

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_s^2.$$

Если $\Delta < (\ln 2)/\alpha$ и

$$\left[\frac{4\alpha\sigma_s^2}{N_0}(2e^{-\alpha\Delta} - 1)\right]^{1/2} - \alpha < 0,$$

то наименьшее значение ε^2 также имеет место при $\beta_0 = 0$. В случае $\Delta < (\ln 2)/\alpha$ и

$$\left[\frac{4\alpha\sigma_s^2}{N_0}(2e^{-\alpha\Delta} - 1)\right]^{1/2} - \alpha > 0$$

минимальное значение $\varepsilon_{\min}^2$ обеспечивается при

$$\beta_0 = \frac{1}{T_0} = \left[\frac{4\alpha\sigma_s^2}{N_0}(2e^{-\alpha\Delta} - 1)\right]^{1/2} - \alpha.$$

14.5. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный гауссовский белый шум;

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha(t-T)}, & t \geqslant T, \\ 0, & t < T, \end{cases}$$

— статистически независимый от шума $n(t)$ экспоненциальный видеоимпульс (рис. 14.5).

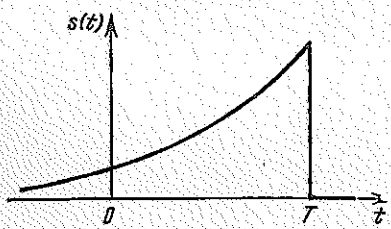


Рис. 14.5. Экспоненциальный видеоимпульс

Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе.

Решение. Вычислим спектр сигнала $s(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\,dt = Ae^{-\alpha T}\int_{-\infty}^{T} e^{(\alpha - j\omega)t}\,dt = \frac{A}{\alpha - j\omega}e^{-j\omega T}.$$

Используя соотношение (14.24), находим искомую комплексную частотную характеристику:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \kappa S^*(j\omega)e^{-j\omega T} = \kappa_1/(\alpha + j\omega).$$

Таким образом, фильтр, согласованный с данным сигналом, может быть реализован в виде цепочки RC (рис. 14.4), у которой $RC = 1/\alpha$.

14.6. Определить комплексную частотную характеристику фильтра, согласованного с сигналом

$$s(t) = A\exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_и}\right)^2\right],$$

где $\tau_и$ — длительность импульса $s(t)$ на уровне A/e.

Решение. Вычислим спектр видеоимпульса $s(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = b\exp\left(-\frac{f^2}{\Delta f^2}\right),$$

где $\Delta f = 2{,}25/\tau_и$ — ширина спектра $S(j\omega)$ на уровне b/e. Используя (14.24), находим

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \mathcal{K}_0\exp[-(f/\Delta f)^2 - j\omega T].$$

14.7. Найти фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_и, \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

и вычислить отношение сигнал/шум на его выходе.

Решение. Спектр прямоугольного видеоимпульса

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = A\int_{0}^{\tau_и} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{A}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau_и}).$$

Таким образом, комплексная частотная характеристика $\mathcal{K}_0(j\omega)$ фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью $\tau_и$, имеет вид

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \kappa S^*(j\omega)\,e^{-j\omega T} = \frac{\mathcal{K}_0}{j\omega}(e^{j\omega\tau_и} - 1)\,e^{-j\omega T}.$$

Рис. 14.6. Фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом

Если интервал наблюдения совпадает с длительностью импульса, т. е. $T = \tau_и$, то

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{\mathcal{K}_0}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau_и}).$$

Схема такого фильтра приведена на рис. 14.6.

Определим сигнал на выходе фильтра, имея в виду, что в соответствии с (14.26) его импульсная характеристика имеет вид

$$h_0(t) = \mathcal{K}_0 s(T - t) = \mathcal{K}_0 s(\tau_и - t).$$

Следовательно,

$$s_{вых}(t) = \int_0^t h_0(\tau) s(t - \tau)\, d\tau = \mathcal{K}_0 \int_0^t s(\tau_и - \tau)\, s(t - \tau)\, d\tau.$$

Нетрудно видеть, что максимальное значение $[s_{вых}(t)]_{max}$ имеет место при $t = \tau_и$ и равно

$$[s_{вых}(t)]_{max} = \mathcal{K}_0 A^2 \tau_и = \mathcal{K}_0 E,$$

где $E = A^2\tau_и$ — энергия сигнала $s(t)$.

Вычислим дисперсию шума $D_{вых}$ на выходе согласованного фильтра, полагая, что спектральная плотность входного шума

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Тогда

$$D_{вых} = \sigma^2_{вых} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\, |\mathcal{K}_0(j\omega)|^2\, d\omega =$$

$$= \frac{\mathcal{K}_0^2 N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\omega^2}(1 - \cos\omega\tau_и)\, d\omega = \frac{\mathcal{K}_0^2 N_0 E}{2}.$$

Следовательно, максимальное отношение сигнал/шум

$$a = [s_{вых}(t)]_{max}/\sigma_{вых} = \sqrt{2E/N_0}.$$

14.8. На вход интегрирующей цепочки RC (рис. 14.4) воздействует аддитивная смесь статистически независимых стационарного гауссовского белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и прямоугольного видеоимпульса

$$s(t)=\begin{cases} U, & 0\leqslant t\leqslant \tau_{\text{и}}, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Под выходным отношением сигнал/шум a понимается отношение максимального значения сигнала на выходе к среднему квадратическому значению выходного шума:

$$a=[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}/\sigma_{\text{вых}}.$$

Вывести соотношение, связывающее отношение сигнал/шум на выходе цепочки RC с длительностью импульса $\tau_{\text{и}}$ и эффективной шумовой полосой $\Delta f_{\text{э}}$ цепи RC; определить, в каком соотношении должны находиться длительность импульсов и оптимальная эффективная шумовая полоса $\Delta f_{\text{э opt}}$, при которой на выходе RC-цепи имеет место максимальное отношение сигнал/шум.

Решение. В соответствии с теоремой Винера—Хинчина дисперсия стационарного шума на выходе цепочки RC

$$D_{\text{вых}}=\sigma^2_{\text{вых}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{n\ \text{вых}}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_n(\omega)\,|\mathcal{K}(j\omega)|^2\,d\omega.$$

Подставляя в это выражение

$$\mathcal{K}(j\omega)=1/(1+j\omega RC),$$

находим

$$\sigma^2_{\text{вых}}=N_0/4RC=N_0\Delta f_{\text{э}}/2,$$

где $\Delta f_{\text{э}}=1/2RC$ — эффективная шумовая полоса цепи RC.

Полезный сигнал на выходе рассматриваемого фильтра

$$s_{\text{вых}}(t)=\int\limits_0^t h(t-\tau)s(\tau)d\tau,$$

где

$$h(t)=\begin{cases} \alpha\exp(-\alpha t), & 0\leqslant t,\ \alpha=1/RC, \\ 0 & \text{при } t<0. \end{cases}$$

В результате несложных вычислений находим

$$s_{\text{вых}}(t)=U(1-e^{-\alpha t})\cdot 1_0(t)-U(1-e^{-\alpha(t-\tau_{\text{и}})})\cdot 1_0(t-\tau_{\text{и}}),$$

где

$$1_0(t)=\begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0, \end{cases}$$

— единичная функция.

Нетрудно видеть, что значение $[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}$ имеет место при $t=\tau_{\text{и}}$, т. е. в момент окончания входного импульса:

$$[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}=s_{\text{вых}}(\tau_{\text{и}})=U(1-e^{-\tau_{\text{и}}/RC}).$$

В соответствии с этим максимальное отношение сигнал/шум на выходе

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}}{\sigma_{\text{вых}}} = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{N_0 \Delta f_{\text{э}}}} (1 - e^{-2\Delta f_{\text{э}} \tau_{\text{и}}}).$$

Для определения зависимости между длительностью импульса $\tau_{\text{и}}$ и оптимальной эффективной шумовой полосой $\Delta f_{\text{э opt}}$ необходимо вычислить производную от a по $\Delta f_{\text{э}}$:

$$\frac{da}{d(\Delta f_{\text{э}})} = \sqrt{\frac{2}{N_0}} U \left[2\tau_{\text{и}} \Delta f_{\text{э}}^{-1/2} e^{-2\Delta f_{\text{э}} \tau_{\text{и}}} + \frac{1}{2} \Delta f_{\text{э}}^{-3/2} (1 - e^{-2\Delta f_{\text{э}} \tau_{\text{и}}}) \right].$$

Приравняв эту производную нулю, получим

$$\tau_{\text{и}} \Delta f_{\text{э opt}} = (1/2) \ln [4\tau_{\text{и}} \Delta f_{\text{э opt}} + 1],$$

откуда

$$\Delta f_{\text{э opt}} = 0{,}628/\tau_{\text{и}}.$$

При этом максимальное выходное отношение сигнал/шум

$$a_{\max} = 0{,}9\sqrt{2U^2 \tau_{\text{и}}/N_0} = 0{,}9\sqrt{2E/N_0},$$

где $E = U^2 \tau_{\text{и}}$ — энергия входного видеоимпульса.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

14.1. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty;$$

$s(t)$ — взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \begin{cases} A \dfrac{\omega + \omega_c}{\omega_c}, & -\omega_c \leqslant \omega < 0, \\ A \dfrac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, & 0 \leqslant \omega < \omega_c, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Найти комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ физически нереализуемого линейного сглаживающего фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки фильтрации

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t)]^2\}.$$

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{A(1 - |\omega|/\omega_c)}{A(1 - |\omega|/\omega_c) + N_0/2}, \quad |\omega| \leqslant \omega_c.$$

14.2. На вход фильтра поступает аддитивная смесь статистически независимых случайного процесса $s(t)$ со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = 1/(1 + \omega^2), \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и стационарного гауссовского белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ оптимального физически реализуемого линейного сглаживающего фильтра и вычислить соответствующий ему минимальный средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t)]^2\} = \varepsilon^2_{\min}.$$

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{\mathcal{K}_0}{1 + j\omega T}, \quad \varepsilon^2_{\min} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\mathcal{K}_0^2}{1+T} - \frac{\mathcal{K}_0^2 N_0}{2T}\right],$$

где

$$\mathcal{K}_0 = \frac{2}{\sqrt{N_0 + 2}\,[\sqrt{N_0 + 2} + \sqrt{N_0}]}, \quad T = \sqrt{\frac{N_0}{N_0 + 2}}.$$

14.3. Случайный сигнал имеет корреляционную функцию

$$R_s(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|).$$

Найти для такого сигнала импульсную характеристику $h_0(t)$ линейного физически реализуемого прогнозирующего фильтра, если спектральная плотность шума

$$S_n(\omega) = 4/(4 + \omega^2).$$

Ответ: $h_0(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2}} e^{-(t+\Delta)}$,

где Δ — время прогнозирования.

14.4. Решить задачу 14.2 при условии, что спектральные плотности сигнала и шума соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{2\beta\sigma_n^2}{\beta^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{(\beta+1)(\beta + j\omega)}{(2\beta\sigma_n^2 + 1)(A + 1)(A + j\omega)}, \quad A = \sqrt{\frac{2\beta\sigma_n^2 + \beta^2}{2\beta\sigma_n^2 + 1}}.$$

14.5. На вход оптимального прогнозирующего линейного фильтра с комплексной частотной характеристикой $\mathcal{K}_0(j\omega)$, минимизирующей средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t + \Delta)]^2\},$$

воздействует аддитивная смесь взаимно коррелированных стационарного шума $n(t)$ и сигнала $s(t)$: $x(t) = s(t) + n(t)$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$ процесса $x(t)$ и выходного процесса $y(t) = \hat{s}(t)$.

Ответ: $S_{xy}(\omega) = [S_s(\omega) + S_{sn}(\omega)]\, e^{j\omega\Delta}$.

14.6. Найти комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ оптимального физически реализуемого прогнозирующего фильтра, на вход которого поступает аддитивная смесь статистически независимых стационарного гауссовского белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и стационарного случайного процесса $s(t)$ со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha^2+\omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{4\alpha\sigma_s^2}{N_0} \frac{e^{-\alpha\Delta}}{(\alpha+\gamma)(\gamma+j\omega)}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{4\alpha\sigma_s^2 + N_0\alpha^2}{N_0}}.$$

14.7. Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ оптимального физически реализуемого линейного сглаживающего фильтра при поступлении на его вход аддитивной смеси взаимно не коррелированных сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha^2+\omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{2\beta\sigma_n^2}{\beta^2+\omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ: $\mathcal{K}_0(j\omega) = \dfrac{2\alpha\sigma_s^2(\alpha+\beta)(\beta+j\omega)}{c^2(\alpha+\gamma)(\gamma+j\omega)}$,

где

$$c^2 = 2\alpha\sigma_s^2 + 2\beta\sigma_n^2, \quad \gamma = \sqrt{2\alpha\beta^2\sigma_s^2 + 2\alpha^2\beta\sigma_n^2}/c.$$

14.8. При тех же условиях, что и в задаче 14.7, определить комплексную частотную характеристику оптимального прогнозирующего фильтра.

Ответ: $\mathcal{K}_0(j\omega) = \dfrac{2\alpha\sigma_s^2(\alpha+\beta)(\beta+j\omega)}{c^2(\alpha+\gamma)(\gamma+j\omega)} e^{-\alpha\Delta}$,

где Δ — время упреждения;

$$c^2 = 2\alpha\sigma_s^2 + 2\beta\sigma_n^2, \quad \gamma = \sqrt{2\alpha\beta^2\sigma_s^2 + 2\alpha^2\beta\sigma_n^2}/c.$$

14.9. На вход оптимального линейного фильтра с комплексной частотной характеристикой $\mathcal{K}_0(j\omega)$, минимизирующей средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - ds(t)/dt]^2\}, \qquad (14.28)$$

воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t)$ и $n(t)$ — взаимно коррелированные стационарные случайные процессы со спектральными плотностями $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$ входного процесса $x(t)$ и процесса $y(t)$ на выходе фильтра.

Ответ: $S_{xy}(\omega) = j\omega[S_s(\omega) + S_{sn}(\omega)]$,
где $S_{sn}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность процессов $s(t)$ и $n(t)$.

14.10. Применительно к условию задачи 14.9 вычислить минимальное значение среднего квадрата ошибки (14.28).

Ответ [4]:

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\omega^2 S_s(\omega) - [S_s(\omega) + S_n(\omega) + S_{sn}(\omega) + S^*_{sn}(\omega)]\,|\mathcal{K}_0(j\omega)|^2\}\,d\omega.$$

14.11. На вход физически реализуемого линейного фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки (14.28), воздействует аддитивная смесь статистически независимых стационарных случайного процесса $s(t)$ со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = A/[4\alpha^2 + (2\beta^2 - \omega^2)^2], \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и гауссовского белого шума $n(t)$, для которого

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Определить оптимальную комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ фильтра и вычислить минимальное значение $\varepsilon^2_{\min}$.

Ответ [4]:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{jA}{2mN_0}\left\{\frac{m + j(n + n_1)}{[m + j(n + n_1)]^2 - m_1^2}\,\frac{\omega + m - jn}{(\omega - m_1 - jn_1)(\omega + m_1 - jn_1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{-m + jn}{[m - j(n + n_1)]^2 - m_1^2}\,\frac{\omega - m - jn}{(\omega - m_1 - jn_1)(\omega + m_1 - jn_1)}\right\},$$

где

$$m = \sqrt{\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + \alpha^4}}, \quad n = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \alpha^4} - \beta^2},$$

$$m_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \alpha^4 + \frac{A}{2N_0}} + \beta^2},$$

$$n_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \alpha^4 + \frac{A}{2N_0}} - \beta^2},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{A}{4}\left\{\frac{1}{n} - \frac{2A}{m^2 N_0}\left[\frac{|B|^2}{n} + \operatorname{Im}\left(\frac{B^2}{m+jn}\right)\right]\right\},$$

$$B = \frac{m+jn}{[m^2 - m_1^2 - (n+n_1)^2] - 2jm(n+n_1)}.$$

14.12. Процесс $y(t)$ представляет собой аддитивную смесь взаимно не коррелированных стационарных случайных процессов $s(t)$ и $n(t)$:

$$y(t) = a[s(t) + n(t)].$$

Определить значение постоянной a, минимизирующей средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t+\Delta)]^2\},$$

и вычислить значение $\varepsilon^2_{\min}$. Спектральные плотности процессов $s(t)$ и $n(t)$ соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha^2+\omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{2\beta\sigma_n^2}{\beta^2+\omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$a = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_n^2}\,e^{-\alpha\Delta}, \quad \varepsilon^2_{\min} = \sigma_s^2\left(1 - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_n^2}\,e^{-2\alpha\Delta}\right).$$

14.13. На вход оптимального сглаживающего фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t)]^2\},$$

воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_n/2, \quad -\infty < \omega < \infty;$$

статистически независимый от шума сигнал $s(t)$ образуется пропусканием стационарного нормального белого шума $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = N_\xi/2, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

через интегрирующую цепочку RC (рис. 14.4).

Определить минимальное значение среднего квадрата ошибки сглаживания $\varepsilon^2_{\min}$.

Ответ:

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{\alpha N_\xi}{4}\left[1 - \frac{a^2}{(1+\sqrt{1+a^2})^2}\right],$$

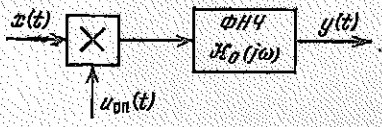
где

$$\alpha = 1/RC, \quad a^2 = N_\xi/N_n.$$

14.14. На вход оптимального прогнозирующего (экстраполирующего) фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - s(t+\Delta)]^2\},$$

Рис. 14.7. Когерентный приемник



воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t)$ и $n(t)$ соответствуют условиям задачи 14.13.

Определить минимальное значение среднего квадрата ошибки экстраполяции $\varepsilon^2_{\min}$.

Ответ:

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{\alpha N_\xi}{4}\left[1 - \frac{a^2 e^{-2\alpha\Delta}}{(1+\sqrt{1+a^2})^2}\right],$$

$$\alpha = 1/RC, \quad a^2 = N_\xi/N_n.$$

14.15. На вход когерентного приемника амплитудно-модулированных сигналов, состоящего из перемножителя и фильтра нижних частот (рис. 14.7), поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty;$$

$$s(t) = \sqrt{2P}\, m(t)\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

— статистически не зависящее от $n(t)$ амплитудно-модулированное колебание с подавленной несущей. Здесь ω_0 — угловая частота несущей, φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$, $m(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_m(\omega) = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2), \quad -\infty < \omega < \infty.$$

На второй вход перемножителя подается опорное колебание

$$u_{оп}(t) = \sqrt{2}\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ фильтра нижних частот, минимизирующую средний квадрат ошибки

$$\varepsilon^2 = M\{[y(t) - m(t)]^2\},$$

и вычислить значение $\varepsilon^2_{\min}$.

Ответ [92]:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{(a-1)\alpha}{\alpha a + j\omega}, \quad a = \sqrt{1 + \frac{4P}{\alpha N_0}}, \quad \varepsilon^2_{\min} = \frac{2P}{a+1}.$$

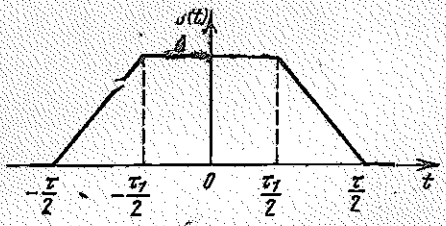


Рис. 14.8. Трапецеидальный видеоимпульс

14.16. Найти импульсную характеристику $h_0(t)$ согласованного фильтра для сигнала

$$s(t)=\begin{cases} A, & 0\leqslant t\leqslant\infty,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Ответ: $h_0(t)=\begin{cases} A, & 0\leqslant t<\infty,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

14.17. Определить импульсную характеристику $h_0(t)$ согласованного фильтра для сигнала $s(t)=A_m\sin\omega_0 t$, если на интервале $(0,\ T)$ укладывается нечетное число полупериодов.

Ответ: $h_0(t)=\begin{cases} A_m\sin\omega_0 t, & 0\leqslant t<\infty,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

14.18. Найти согласованный фильтр для трапецеидального видеоимпульса (рис. 14.8)

$$s(t)=\frac{2A}{\tau-\tau_1}\left[\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot 1_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\left(t+\frac{\tau_1}{2}\right)\cdot 1_0\left(t+\frac{\tau_1}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(t-\frac{\tau_1}{2}\right)\cdot 1_0\left(t-\frac{\tau_1}{2}\right)+\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot 1_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right],$$

где единичная функция

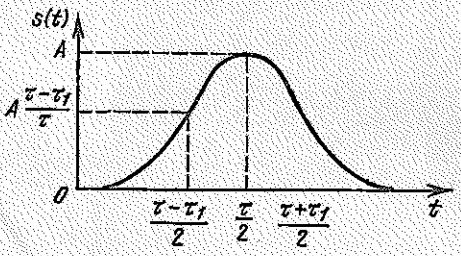
$$1_0(t)=\begin{cases} 1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Ответ [82]:

$$\mathcal{K}_0(j\omega)=\frac{\mathcal{K}_0}{(j\omega)^2}\left[1-\exp\left(-j\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)\right]\left[1-\exp\left(-j\omega\frac{\tau+\tau_1}{2}\right)\right],$$

$$h_0(t)=\frac{2A}{\tau-\tau_1}\left[t\cdot 1_0(t)-\left(t-\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)\cdot 1_0\left(t-\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(t-\frac{\tau+\tau_1}{2}\right)\cdot 1_0\left(t-\frac{\tau+\tau_1}{2}\right)+(t-\tau)\cdot 1_0(t-\tau)\right].$$

Рис. 14.9. Параболический видеоимпульс



14.19. Найти импульсную характеристику $h_0(t)$ согласованного фильтра для видеосигнала $s(t)$, имеющего параболическую форму:

$$s(t)=\begin{cases} A[1-(2t/\tau)^2], & -\tau/2\leqslant t\leqslant\tau/2, \\ 0, & |t|>\tau/2. \end{cases}$$

Ответ [82]: $h_0(t)=\frac{8A}{\tau^2}\left[-\frac{t^2}{2}\cdot 1_0(t)+\frac{\tau}{2}t\cdot 1_0(t)+\frac{1}{2}(t-\tau)^2\times\right.$

$$\left.\times 1_0(t-\tau)+\frac{1}{2}\tau(t-\tau)\cdot 1_0(t-\tau)\right].$$

14.20. Видеоимпульс $s(t)$ (рис. 14.9) описывается функцией, составленной из трех отрезков парабол таким образом, чтобы первая производная $\dot{s}(t)$ была непрерывной:

$$s(t)=\begin{cases} \frac{4A}{\tau(\tau-\tau_1)}t^2, & 0\leqslant t<\frac{\tau-\tau_1}{2}, \\ A\left[1-\frac{4}{\tau\tau_1}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2\right], & \frac{\tau-\tau_1}{2}\leqslant t<\frac{\tau+\tau_1}{2}, \\ \frac{4A}{\tau(\tau-\tau_1)}(t-\tau)^2, & \frac{\tau+\tau_1}{2}\leqslant t<\tau, \\ 0, & t<0,\ t>\tau. \end{cases}$$

Определить согласованный фильтр для такого импульса.
Ответ [82]:

$$h_0(t)=\frac{8A}{\tau(\tau-\tau_1)}\left\{\frac{t^2}{2}\cdot 1_0(t)+\frac{\tau}{\tau_1}\left[-\frac{1}{2}\left(t-\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times 1_0\left(t-\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{\tau+\tau_1}{2}\right)^2\cdot 1_0\left(t-\frac{\tau+\tau_1}{2}\right)\right]-\frac{(t-\tau)^2}{2}\cdot 1_0(t-\tau)\right\}.$$

14.21. На вход оптимального линейного фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе, воздействует полезный сигнал

$$s(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<a, \\ 2a-t, & a\leqslant t<2a, \\ 0, & t<0,\ t\geqslant 2a \end{cases}$$

и белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Найти комплексную частотную $\mathcal{K}_0(j\omega)$ и импульсную $h_0(t)$ характеристики фильтра.

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = -\frac{\mathcal{K}_0}{\omega^2}(1-e^{-j\omega a})^2 e^{-j\omega T},$$

$$h_0(t) = \begin{cases} t-(T-2a), & T-2a \leqslant t < T-a, \\ T-t, & T-a \leqslant t < T, \\ 0, & t < T-2a,\ t \geqslant T. \end{cases}$$

14.22. Найти сигнал $s_2(t)$ на выходе фильтра, согласованного с входным сигналом

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_и, \\ 0, & t < 0,\ t > \tau_и. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_2(t) = \begin{cases} \kappa A^2(t-T+\tau_и), & T-\tau_и \leqslant t < T, \\ -\kappa A^2(t-T-\tau_и), & T \leqslant t \leqslant T+\tau_и. \end{cases}$$

14.23. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_и, \\ 0, & t < 0,\ t > \tau_и \end{cases}$$

— прямоугольный видеоимпульс длительностью $\tau_и$; $n(t)$ — стационарный гауссовский шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = 2\alpha a/(\alpha^2 + \omega^2), \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Найти комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ фильтра, максимизирующего выходное отношение сигнал/шум.

Ответ [82]: $\mathcal{K}_0(j\omega) = \mathcal{K}_0[(\alpha^2/j\omega) - j\omega](1-e^{-j\omega\tau_и})$.

14.24. Решить задачу 14.23 для случая приема прямоугольного видеоимпульса на фоне стационарного шума со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = 2a\omega^2/(\alpha^2 + \omega^2), \quad 0 \leqslant \omega < \infty.$$

Ответ [82]: $\mathcal{K}_0(j\omega) = \dfrac{\mathcal{K}_0}{j\omega}\left[1 - \dfrac{\alpha^2}{(j\omega)^2}\right](1-e^{-j\omega\tau_и})$.

14.25. Найти комплексную частотную $\mathcal{K}_0(j\omega)$ и импульсную $h_0(t)$ характеристики оптимального фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе, если на вход фильтра поступает аддитивная смесь статистически независимых сигнала

$$s(t) = A\exp(-t^2/4\alpha^2)$$

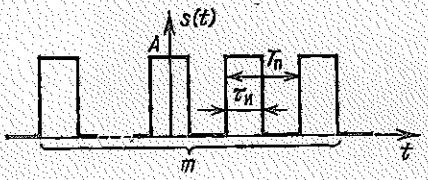


Рис. 14.10. Последовательность прямоугольных видеоимпульсов

и шума со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0 \exp(-\beta^2\omega^2),$$

причем $\beta \ll \alpha$.

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \mathcal{K}_0 \exp[-(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 - j\omega T],$$

$$h_0(t) = \mathcal{K}_0 \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \exp\left[-\frac{(t-T)^2}{4(\alpha^2-\beta^2)}\right].$$

14.26. Определить комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ оптимального линейного фильтра, обеспечивающего максимально возможное отношение сигнал/шум на выходе, если на вход фильтра поступает аддитивная смесь статистически независимых полезного сигнала в виде последовательности из m прямоугольных видеоимпульсов (рис. 14.10) и белого шума со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega) = \frac{\mathcal{K}_0}{j\omega} \frac{1-e^{j\omega m T_п}}{1-e^{j\omega T_п}} (e^{j\omega\tau_и} - 1) e^{-j\omega T}.$$

14.27. Найти комплексную частотную характеристику $\mathcal{K}_0(j\omega)$ согласованного фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум, если в качестве полезного сигнала принять радиолокационный сигнал, представляющий собой пакет (пачку) из m прямоугольных импульсов, амплитуда которых изменяется в соответствии с формой диаграммы направленности РЛС (рис. 14.11).

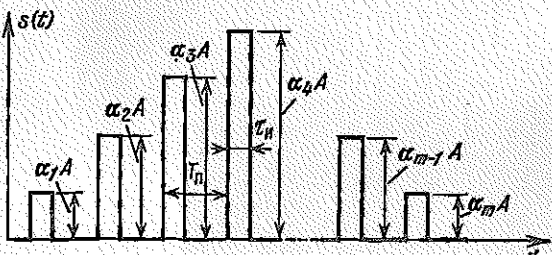


Рис. 14.11. Последовательность видеоимпульсов, модулированных по амплитуде

Ответ:

$$\mathcal{K}_0(j\omega)=\frac{\mathcal{K}_0}{j\omega}\left[\alpha_1+\alpha_2 e^{j\omega T_{\text{п}}}+\ldots+\alpha_m e^{j\omega(m-1)T_{\text{п}}}\right](e^{j\omega\tau_{\text{и}}}-1)e^{-j\omega T}.$$

14.28. Определить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе устройства, изображенного на рис. 14.12, при воздействии на него аддитивной смеси статистически независимых белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью

$$S_n(\omega)=N_0/2,\quad -\infty<\omega<\infty,$$

и сигнала $s(t)$, имеющего вид изображенной на рис. 14.13 последовательности элементарных фазоманипулированных прямоугольных видеоимпульсов с равными амплитудами A и длительностями $\tau_{\text{и}}$:

$$s(t)=A[1_0(t)-2\cdot 1_0(t-3\tau_{\text{п}})+2\cdot 1_0(t-4\tau_{\text{п}})-$$
$$-1_0(t-5\tau_{\text{и}})].$$

Выходной фильтр согласован с элементарным импульсом и имеет импульсную характеристику

$$h_0(t)=\begin{cases}A(\tau_{\text{п}}-t), & 0\leqslant t\leqslant\tau_{\text{и}},\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$$

Ответ: $a=[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}/\sigma_{\text{вых}}=\sqrt{2E/N_0}$,

где $E=5A^2\tau_{\text{и}}$ — полная энергия сигнала.

14.29. На вход линейного фильтра, изображенного на рис. 14.14, подается аддитивная смесь статистически независимых стационарного гауссовского белого шума и сигнала $s(t)$, представляющего собой пять следующих друг за другом элементарных прямоугольных импульсов с равными амплитудами A и длительностями $\tau_{\text{и}}$ (рис. 14.15). Отводы от линии задержки соответствуют временным задержкам $t_{\text{зад}}=0{,}4\tau_{\text{и}}$, $5\tau_{\text{п}}$, $9\tau_{\text{п}}$, $10\tau_{\text{и}}$ и $14\tau_{\text{п}}$. Выходной фильтр согласован с элементарным импульсом (см. задачу 14.28).

Определить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

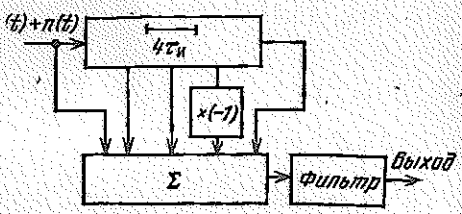


Рис. 14.12. Согласованный фильтр

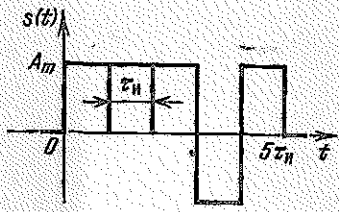


Рис. 14.13. Последовательность биполярных прямоугольных видеоимпульсов

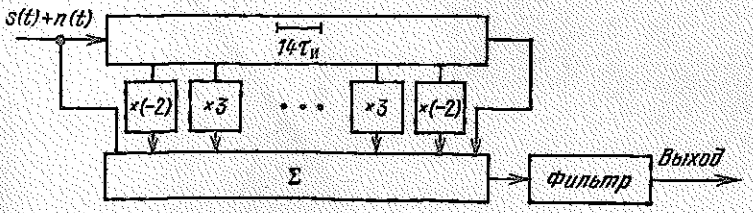


Рис. 14.14. Неоптимальный фильтр

Ответ:

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\max}}{\sigma_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{36}{28}\frac{2E_{\text{и}}}{N_0}},$$

где $E_{\text{и}} = A^2\tau_{\text{и}}$ — энергия элементарного импульса.

14.30. На вход одиночного колебательного контура с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = 2\alpha\omega/[2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)]$$

воздействует аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный гауссовский белый шум; $s(t)$ — статистически независимый от шума прямоугольный радиоимпульс длительностью $\tau_{\text{и}}$, несущая частота которого совпадает с резонансной частотой контура ω_0.

Определить оптимальное значение полосы пропускания Δf_{opt} контура, при котором выходное отношение сигнал/шум достигает максимума.

Ответ: $\Delta f_{\text{opt}} = 0{,}4/\tau_{\text{и}}$, $a_{\max} = 0{,}9\sqrt{q}$,
где Δf — полоса пропускания на уровне 0,5 по мощности; $q = 2E/N_0$ — входное отношение сигнал/шум.

14.31. Решить задачу 14.30 для случая воздействия аддитивной смеси прямоугольного радиоимпульса и белого шума на идеальный фильтр с прямоугольной амплитудно-частотной и нулевой фазовой характеристиками:

$$\mathcal{K}(j\omega) = \begin{cases} \mathcal{K}_0, & -\omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_0 + \Delta\omega/2, \\ \mathcal{K}_0, & \omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega/2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ: $\Delta f_{\text{opt}} = 1{,}37/\tau_{\text{и}}$, $a_{\max} = 0{,}91\sqrt{q}$.

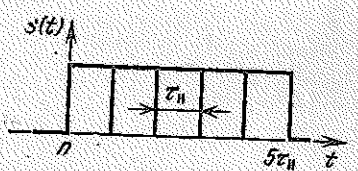


Рис. 14.15. Последовательность примыкающих прямоугольных видеоимпульсов

14.32. Решить задачу 14.30 для случая воздействия аддитивной смеси прямоугольного радиоимпульса и белого шума на гауссовский фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 \exp\left[-1{,}4\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2 - j\omega T\right].$$

Ответ: $\Delta f_{\text{opt}} = 0{,}72/\tau_{\text{и}}$, $a_{\max} = 0{,}94\sqrt{q}$.

14.33. Вычислить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе фильтра с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \begin{cases} \mathcal{K}_0, & -\omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_0 + \Delta\omega/2, \\ \mathcal{K}_0, & \omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega/2, \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

при воздействии на его вход аддитивной смеси статистически независимых белого шума и гауссовского радиоимпульса

$$s(t) = A\exp[-2{,}8\,(t/\tau_{\text{и}})^2 + j\omega_0 t].$$

Определить оптимальное значение полосы пропускания фильтра.

Ответ: $\Delta f_{\text{opt}} = 0{,}72/\tau_{\text{и}}$, $a_{\max} = 0{,}94\sqrt{q}$.

14.34. Решить задачу 14.33 для случая воздействия аддитивной смеси белого шума и гауссовского радиоимпульса на гауссовский фильтр.

Ответ: $\Delta f_{\text{opt}} = 0{,}63/\tau_{\text{и}}$, $a_{\max} = \sqrt{q}$.

14.35. На вход фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом $s(t)$ длительностью $\tau_{\text{и}}$:

$$s(t) = A_m \cos\omega_0 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_{\text{и}},$$

(A_m, ω_0 и $\tau_{\text{и}}$ — постоянные величины), воздействует аддитивная смесь статистически независимых сигнала $s(t)$ и стационарного белого шума $n(t)$.

Определить отношение сигнал/шум $a(t) = U_{\text{вых}}(t)/\sigma_{\text{вых}}(t)$, где $U_{\text{вых}}(t)$ — огибающая сигнала на выходе фильтра, $\sigma_{\text{вых}}(t)$ — среднее квадратическое значение выходного шума, в конце импульса ($t = \tau_{\text{и}}$) для следующих случаев:

1) сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ начинают воздействовать на фильтр одновременно с момента $t = 0$ (случай точного временно́го стробирования импульсного сигнала, принимаемого на фоне белого шума);

2) шум $n(t)$ начинает воздействовать на фильтр с некоторым опережением Δt по отношению к сигналу $s(t)$;

3) шум $n(t)$ воздействует на фильтр с момента $t \to -\infty$, а сигнал $s(t)$ — с момента $t = 0$ (случай отсутствия временно́го стробирования).

Ответ: 1) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$, 2) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$, 3) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$. Здесь $q = 2E/N_0$, $E = A_m^2\tau_{\text{и}}/2$.

14.36. На вход колебательного контура с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = 2\alpha\omega/[2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)]$$

воздействует аддитивная смесь статистически независимых прямоугольного радиоимпульса $s(t)$ длительностью $\tau_и$ и стационарного белого шума $n(t)$.

Определить отношение сигнал/шум $a(\tau_и)$ в конце импульса для случаев, указанных в задаче 14.35. Для случая отсутствия временного стробирования определить оптимальное значение полосы пропускания Δf_{opt}, при которой $a(\tau_и) = a_{max}$.

Ответ:

1) $a(\tau_и) = \sqrt{q}\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta f\tau_и}\frac{1-\exp(-\pi\Delta f\tau_и)}{\sqrt{1-\exp(2\pi\Delta f\tau_и)}}}$;

2) $a(\tau_и) = \sqrt{q}\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta f\tau_и}\frac{1-\exp(-\pi\Delta f\tau_и)}{\sqrt{1-\exp[2\pi\Delta f\,(\tau_и+\Delta t)]}}}$;

3) $a(\tau_и) = \sqrt{q}\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta f\tau_и}}[1-\exp(-\pi\Delta f\tau_и)]$, $\Delta f_{opt} = \frac{0{,}4}{\tau_и}$.

Графики функции $a(\tau_и) = f(\Delta f\tau_и, \Delta f\Delta t)$ приведены на рис. 14.16.

14.37. Решить задачу 14.36 для случая воздействия аддитивной смеси сигнала $s(t)$ и белого шума на идеальный полосовой фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \begin{cases} \mathcal{K}_0, & -\omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_0 + \Delta\omega/2, \\ \mathcal{K}_0, & \omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega/2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

1) $a(\tau_и) = \sqrt{q}\,\frac{2\,\mathrm{Si}(\pi\Delta f\tau_и/2)}{\sqrt{2\pi\Delta f\tau_и}\sqrt{\mathrm{Si}(\pi\Delta f\tau_и) - \frac{\sin^2(\pi\Delta f\tau_и/2)}{\pi\Delta f\tau_и/2}}}$,

где

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x}\,dx$$

— интегральный синус;

2) $a(\tau_и) =$

$$= \sqrt{q}\,\frac{2\,\mathrm{Si}(\pi\Delta f\tau_и/2)}{\sqrt{2\pi\Delta f\tau_и}\sqrt{\mathrm{Si}\left[2\pi\Delta f\left(\frac{\tau_и}{2}+\Delta t\right)\right] - \frac{\sin^2[\pi\Delta f\,(\tau_и/2+\Delta t)]}{\pi\Delta f\,(\tau_и/2+\Delta t)}}};$$

3) $a(\tau_и) = \sqrt{q}\,\frac{2}{\pi\sqrt{\Delta f\tau_и}}\,\mathrm{Si}\left(\frac{\pi\Delta f\tau_и}{2}\right)$, $\Delta f_{opt} = \frac{1{,}37}{\tau_и}$.

Графики функции $a(\tau_и) = f(\Delta f\tau_и, \Delta f\Delta t)$ представлены на рис. 14.17.

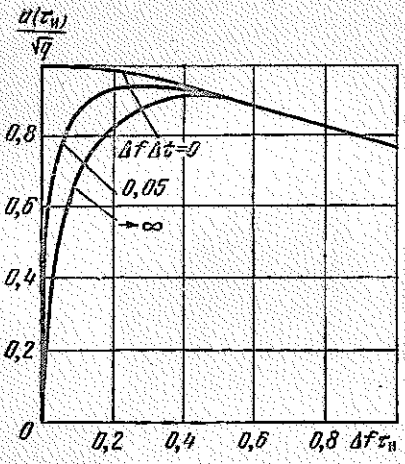


Рис. 14.16. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура

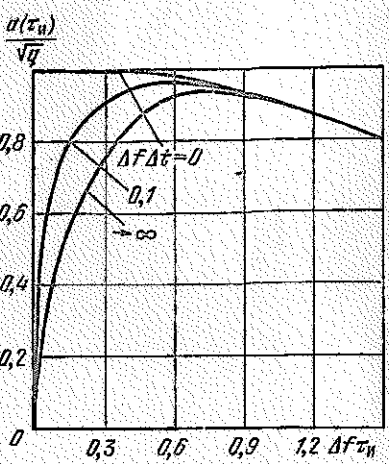


Рис. 14.17. Отношение сигнал/шум на выходе идеального фильтра

14.38. Решить задачу 14.36 для случая воздействия аддитивной смеси сигнала $s(t)$ и белого шума на фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\beta} \right)^2 \right] + \exp\left[-\left(\frac{\omega + \omega_0}{\beta} \right)^2 \right] \right\}.$$

Ответ:

1) $$a(\tau_и) = \sqrt{q}\, \frac{2\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \right] \left[\Phi\left(\frac{b}{2} \right) - \frac{1}{2} \right]^{-1/2};$$

2) $$a(\tau_и) = \sqrt{q}\, \frac{2\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \right] \left[\Phi\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi \Delta f \Delta t}{\sqrt{0{,}347}} \right) - \frac{1}{2} \right]^{-1/2};$$

3) $$a(\tau_и) = \sqrt{q}\, \frac{2\sqrt[4]{8\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

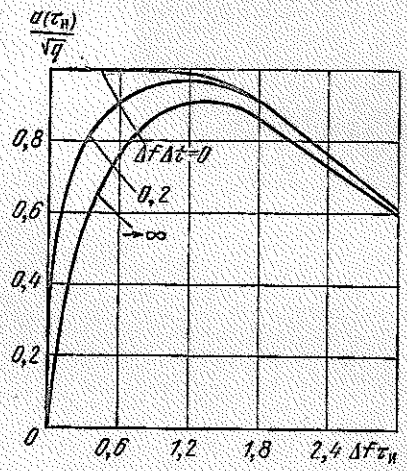
$$b = \frac{\pi \Delta f \tau_и}{\sqrt{0{,}347}}, \quad \Delta f_{opt} = \frac{0{,}72}{\tau_и}.$$

Значения $a(\tau_и)$ приведены на рис. 14.18.

14.39. На вход фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом $s_0(t)$ длительностью $\tau_и$:

$$s_0(t) = A_m \cos \omega_0 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_и,$$

Рис. 14.18. Отношение сигнал/шум на выходе гауссовского фильтра



(A_m, ω_0 и $\tau_и$ — постоянные величины), воздействует аддитивная смесь $x(t) = s_1(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный белый шум, $s_1(t)$ — статистически независимый от шума прямоугольный радиоимпульс длительностью $\tau_и$:

$$s_1(t) = A_m \cos \omega_1 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_и,$$

частота которого ω_1 отлична от частоты сигнала $s_0(t)$ ($|\omega_1 - \omega_0| = \Delta\omega_р \ll \omega_0$).

Определить отношение сигнал/шум $a(t)$ на выходе фильтра в конце импульса $s_1(t)$.

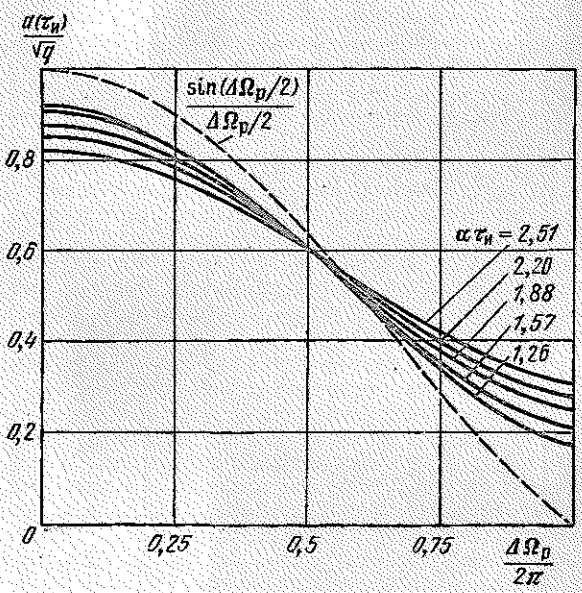


Рис. 14.19. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра и колебательного контура от обобщенной расстройки

Ответ [93]:

$$a(\tau_и) = \sqrt{q}\,\frac{\sin(\Delta\Omega_р/2)}{\Delta\Omega_р/2}, \quad \Delta\Omega_р = \Delta\omega_р\tau_и .$$

График функции $a(\tau_и)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_р)$ представлен на рис. 14.19 (штриховая линия).

14.40. На вход колебательного контура с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0 2\alpha\omega/[2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)]$$

воздействует аддитивная смесь $x(t) = s_1(t) + n(t)$, где $n(t)$ — стационарный белый шум,

$$s_1(t) = A_m\cos\omega_1 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_и$$

— статистически независимый от шума прямоугольный радиоимпульс длительностью $\tau_и$, частота которого ω_1 отлична от резонансной частоты контура ($|\omega_1 - \omega_0| = \Delta\omega_р \ll \omega_0$).

Определить отношение сигнал/шум $a(t)$ на выходе контура в конце импульса $s_1(t)$.

Ответ [93]:

$$a(\tau_и) = \sqrt{q}\,\sqrt{2\alpha\tau_и\,\frac{1 - 2e^{-\alpha\tau_и}\cos\Delta\Omega_р + e^{-2\alpha\tau_и}}{(\alpha\tau_и)^2 + \Delta\Omega_р^2}}.$$

Значения функции $a(\tau_и)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_р, \alpha\tau_и)$ приведены на рис. 14.19.

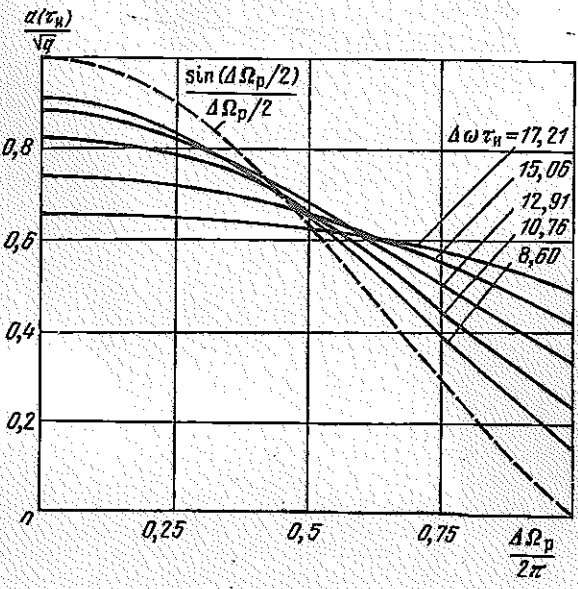


Рис. 14.20. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе идеального фильтра от обобщенной расстройки

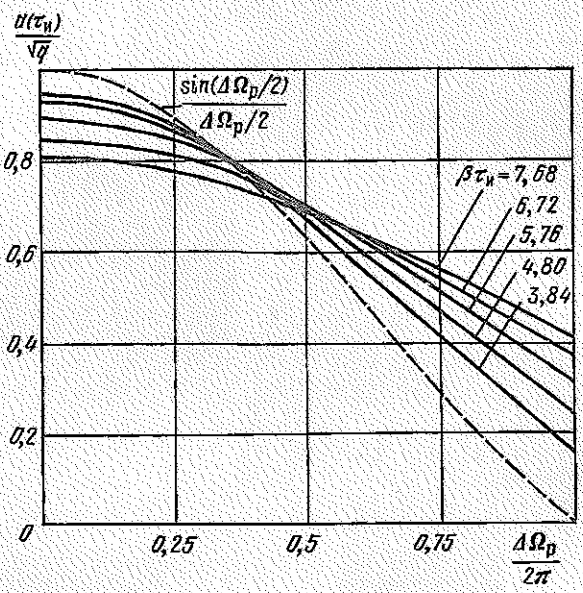


Рис. 14.21. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе гауссовского фильтра от обобщенной расстройки

14.41. Решить задачу 14.40 в случае воздействия суммы $x(t)$ на фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \begin{cases} \mathcal{K}_0, & -\omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_0 + \Delta\omega/2, \\ \mathcal{K}_0, & \omega_0 - \Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega/2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ [93]:

$$a(\tau_п) = \sqrt{q}\sqrt{\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{Si}\,(\Delta\omega\tau_п/2 + \Delta\Omega_р/2) + \mathrm{Si}\,(\Delta\omega\tau_п/2 - \Delta\Omega_р/2)}{\sqrt{\Delta\Omega_р}}}.$$

Графики функции $a(\tau_п)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_р, \Delta\omega\tau_п)$ представлены на рис. 14.20.

14.42. Решить задачу 14.40 для случая воздействия суммы $x(t)$ на фильтр с комплексной частотной характеристикой

$$\mathcal{K}(j\omega) = \mathcal{K}_0\left\{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\beta^2}\right]\right\}.$$

Ответ [93]:

$$a(\tau_п) = \sqrt{q}\sqrt[4]{\frac{8}{\pi}}\sqrt{\beta\tau_п}\int_0^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta^2\tau_п^2}{4}x^2\right)\cos(\Delta\Omega_р x)\,dx.$$

Графики функции $a(\tau_п)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_р, \beta\tau_п)$ представлены на рис. 14.21.

15. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При рассмотрении помехоустойчивости различных радиотехнических систем следует различать две группы задач.

1. Заданы статистические характеристики сигналов и помех и структурная схема приемного устройства. Требуется определить количественные характеристики помехоустойчивости приема данных сигналов данным приемником.

2. Заданы статистические характеристики сигналов и помех и характер их взаимодействия. Требуется определить структуру устройства, осуществляющего оптимальную, по определенному критерию, обработку смеси сигнала и шума, и вычислить соответствующие количественные характеристики помехоустойчивости оптимального приема данных сигналов.

Задачи первой группы по существу сводятся к анализу воздействия на данное радиотехническое устройство заданной смеси сигнала и шума. Конечной целью анализа является вычисление статистических характеристик случайных процессов на выходе приемника, необходимых для последующего определения требуемых количественных характеристик помехоустойчивости. Задачи этой группы решаются рассмотренными в предыдущих главах методами анализа воздействия случайных процессов на линейные и нелинейные звенья радиотехнических устройств.

Для решения задач второй группы необходимо использовать аппарат теории статистических решений [1, 27, 94—98].

Предположим, что на вход приемного устройства поступает смесь сигнала и шума

$$x(t) = F[s(t), \xi(t)], \tag{15.1}$$

где $s(t)$ — полезный сигнал; $\xi(t)$ — помеха. Функция $F[s, \xi]$, т. е. характер взаимодействия сигнала и помехи, а также статистические характеристики шума $\xi(t)$ и сигнала $s(t)$ предполагаются известными.

Применительно к случаю различения m сигналов, принимаемых на фоне помех, входящий в (15.1) сигнал $s(t)$ можно представить в виде суммы

$$s(t) = s(t, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i\left(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_k^{(i)}\right), \tag{15.2}$$

где λ_i — параметр, определяющий, какой из сигналов $s_i(t) = s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_k^{(i)})$ присутствует на входе приемника в данный момент времени; $l_\nu^{(i)}$ — параметр сигнала $s_i(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Параметр λ_i представляет собой случайную величину, принимающую на интервале наблюдения $(0, T)$ значения $\lambda_i = \lambda_{i0} = 0$ либо $\lambda_i = \lambda_{i1} = 1$, причем если $\lambda_i = \lambda_{i1} = 1$, то все остальные входящие в (15.2) параметры λ_j с индексом $j \neq i$ равны нулю: $\lambda_j = \lambda_{j0} = 0$. Приемник, осуществляющий различение m сигналов, должен определить, какой из коэффициентов λ_i равен единице, т. е. какой из сигналов $s_i(t)$ присутствует в принятом колебании $x(t)$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случая различения двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, принимаемых на фоне помех. При этом сигнал (15.2) может быть представлен в виде

$$s(t) = s(t, \lambda) = \lambda s_1\left(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_k^{(1)}\right) + (1 - \lambda)\, s_2\left(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_k^{(2)}\right). \tag{15.3}$$

Здесь λ — параметр, случайный образом принимающий два значения: $\lambda = \lambda_1 = 1$, что соответствует наличию в принятой реализации $x(t)$ сигнала $s_1(t)$, или $\lambda = \lambda_0 = 0$, когда в реализации $x(t)$ присутствует сигнал $s_2(t)$. Представление сигнала $s(t)$ в форме (15.3) характерно для различных систем

передачи двоичной информации, широко используемых в связи, телеметрии, телеуправлении и т. п.

Применительно к случаю обнаружения сигнал $s(t)$ представляется в виде

$$s(t) = s(t, \lambda) = \lambda s_1(t, l_1, l_2, \ldots, l_k). \tag{15.4}$$

Значение параметра $\lambda = \lambda_1 = 1$ соответствует наличию на входе приемника смеси сигнала и шума, $\lambda = \lambda_0 = 0$ означает, что на входе приемника имеется только шум. Приемник, предназначенный для обнаружения сигналов, определяет, какое значение на данном интервале наблюдения $(0, T)$ имеет параметр λ, т. е. представляет ли принимаемое колебание $x(t)$ только шум или смесь сигнала и шума.

В соответствии с теорией статистических решений принятие гипотезы $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$ должно основываться на результатах анализа отношения правдоподобия. При дискретной обработке реализации это отношение имеет вид

$$\Lambda[x(t)] = p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)/p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0), \tag{15.5}$$

где $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)$ и $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0)$ — n-мерные плотности распределения вероятностей выборок $x_k = x(t_k)$ процесса $x(t)$ соответственно при гипотезах $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_0$. Рассматриваемая как функция параметра λ, условная плотность распределения вероятностей $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda)$ обозначается через $L(\lambda)$ и называется функцией правдоподобия.

В случае непрерывной обработки реализации $x(t)$ отношение правдоподобия

$$\Lambda[x(t)] = F[x(t) \mid \lambda_1]/F[x(t) \mid \lambda_0], \tag{15.6}$$

где

$$F[x(t) \mid \lambda] = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda) \tag{15.7}$$

— так называемый функционал плотности распределения вероятностей. Здесь $\Delta = t_{k+1} - t_k$ — временной интервал между соседними выборками $x_k = x(t_k, \lambda)$ и $x_{k+1} = x(t_{k+1}, \lambda)$. Рассматриваемый как функция от параметра λ, он называется функционалом правдоподобия и обозначается через $F(\lambda)$.

Следует отметить, что конечный предел, определяемый соотношением (15.7), не существует. Можно показать [96], что в правую часть равенства (15.7) входит множитель $k = k(\Delta)$, не зависящий от выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но зависящий от Δ так, что при $\Delta \to 0$ $k \to \infty$. Однако в результате того, что неопределенный множитель k не зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеется возможность вычислить конечный предел отношения (15.5):

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \frac{p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)}{p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0)} = \frac{F[x(t) \mid \lambda_1]}{F[x(t) \mid \lambda_0]}. \tag{15.8}$$

Наиболее просто функции правдоподобия $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda) = L(\lambda)$ вычисляются в том случае, когда $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала $s(t, \lambda)$, зависящую только от одного случайного параметра λ, и шума $\xi(t)$:

$$x(t) = s(t, \lambda) + \xi(t). \tag{15.9}$$

В этом случае [96]

$$p_n(x, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda) = L(\lambda) = p_{n\xi}[x_1 - s_1(\lambda), \; x_2 - s_2(\lambda), \ldots, x_n - s_n(\lambda)], \tag{15.10}$$

где $p_{n\xi}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — n-мерная плотность распределения вероятностей шума $\xi(t)$; $x_k = x(t_k)$; $s_k(\lambda) = s(t_k, \lambda)$. Переходя в (15.10) к пределу при $\Delta = t_{k+1} - t_k \to 0$, получаем

$$F[x(t) \mid \lambda] = F(\lambda) = F_\xi[x(t) - s(t, \lambda)]. \tag{15.11}$$

В более общем случае полезный сигнал может зависеть не только от параметра λ, называемого существенным, но и от ряда несущественных случайных параметров $l_1, l_2, \ldots, l_h$. При этих условиях и функционал плотности распределения вероятностей $F_\xi[x(t) - s(t, \lambda, l_1, l_2, \ldots, l_h)]$ оказывается зависящим от несущественных случайных параметров и для определения функционала правдоподобия $F[x(t) \mid \lambda]$ требуется его усреднение по несущественным параметрам:

$$F[x(t) \mid \lambda] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi[x(t) - s(t, \lambda, l_1, l_2, \ldots, l_h)] \times$$
$$\times p_h(l_1, l_2, \ldots, l_h) dl_1 dl_2 \ldots dl_h. \qquad (15.11а)$$

Здесь $p_h(l_1, l_2, \ldots, l_h)$ — совместная плотность распределения вероятностей несущественных параметров $l_1, l_2, \ldots, l_h$.

Если $\xi(t)$ представляет собой гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $m_\xi(t) = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\}$, то его n-мерная плотность распределения вероятностей определяется формулой

$$p_{n\xi}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n \Delta}} \times$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2\Delta} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Delta_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_\mu}{\sigma_\mu} \frac{\xi_\nu}{\sigma_\nu} \right). \qquad (15.12)$$

Здесь $\sigma_\mu^2 = \sigma_\xi^2(t_\mu) = M\{\xi^2(t_\mu)\} - m_\xi^2(t_\mu)$ — дисперсия случайной величины $\xi_\mu = \xi(t_\mu)$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

— определитель n-го порядка, составленный из нормированных взаимных корреляционных функций $r_{\mu\nu} = r(t_\mu, t_\nu) = R_\xi(t_\mu, t_\nu)/\sigma_\mu\sigma_\nu$; $\Delta_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $r_{\mu\nu}$ определителя Δ. Переходя в (15.12) к пределу при $\Delta = t_{k+1} - t_k \to 0$, получаем следующее выражение для функционала плотности распределения вероятностей гауссовского случайного процесса $\xi(t)$:

$$F_\xi[\xi(t)] = k \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \xi(t_1)\xi(t_2)\theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right], \qquad (15.13)$$

где $\theta(t_1, t_2)$ определяется интегральным уравнением

$$\int_0^T R_\xi(t_1, \tau)\theta(\tau, t_2)\, d\tau = \delta(t_2 - t_1). \qquad (15.14)$$

Иногда удобно преобразовать (15.13), введя функцию

$$\varphi(t) = \int_0^T \xi(t_1)\theta(t, t_1) dt_1. \qquad (15.14а)$$

При этом получим

$$F_\xi[\xi(t)] = \kappa \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^T \xi(t)\varphi(t) dt \right], \qquad (15.13а)$$

где функция $\varphi(t)$, как это следует из (15.14) и (15.14а), удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\int_0^T R_\xi(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = \xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{15.14б}$$

Предположим, что $\xi(t)$ представляет собой гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi(t) = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\} = (N_0/2)\delta(t_2 - t_1). \tag{15.15}$$

Подставляя (15.15) в (15.14б), находим, что

$$\varphi(t) = (2/N_0)\xi(t),$$

в соответствии с чем для функционала плотности распределения вероятностей белого шума получаем следующее выражение:

$$F_\xi[\xi(t)] = \kappa \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T \xi^2(t)\,dt\right]. \tag{15.16}$$

Аналогично находится функционал плотности распределения вероятностей для гауссовского процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi(t) = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sigma_\xi^2\, e^{-\alpha|t_2 - t_1|}. \tag{15.17}$$

В этом случае [96]

$$F_\xi[\xi(t)] = \kappa \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\sigma_\xi^2}\left[\int_0^T \xi^2(t)dt + \int_0^T \left(\frac{\dot\xi(t)}{\alpha}\right)^2 dt\right] + \frac{1}{4\sigma_\xi^2}[\xi^2(0) + \xi^2(T)]\right\}. \tag{15.18}$$

Для гауссовского процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi(t) = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|}\left[\cos\omega_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|t_2 - t_1|\right] \tag{15.19}$$

имеем [96]

$$F_\xi[\xi(t)] = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{4\sigma_\xi^2\,\alpha_0\,\omega_0^2}\left(\int_0^T [\ddot\xi(t)]^2 dt + \alpha_0^2\int_0^T [\dot\xi(t)]^2\,dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega_0^4\int_0^T \xi^2(t)\,dt + 2\omega_0^2\int_0^T \xi(t)\,\ddot\xi(t)\,dt + \alpha_0\,\omega_0^2\,[\xi^2(0) + \xi^2(T)] + \alpha_0\,[\dot\xi^2(0) + \dot\xi^2(T)]\right)\right\}, \tag{15.20}$$

где $\omega_0^2 = \omega_1^2 + \alpha^2$, $\alpha_0 = 2\alpha$.

Если в результате дискретной обработки принятой реализации $x(t)$ окажется, что отношение правдоподобия (15.5) превышает некоторую величину C, т. е.

$$\Lambda[x(t)] = \frac{p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n|\lambda_1)}{p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n|\lambda_0)} = \frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} > C, \tag{15.21}$$

принимается решение $\lambda = \lambda_1$. В противном случае принимается решение $\lambda = \lambda_0$.

Принятие решения означает разбиение всей области Г возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на две подобласти Γ_1 и Γ_0. При попадании принятой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в область Γ_1 принимается решение $\lambda = \lambda_1$, а при попадании $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в область Γ_0 принимается решение $\lambda = \lambda_0$. Так как $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)$ и $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0)$ определены по всей области Г, всегда имеется вероятность того, что при $\lambda = \lambda_0$ выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ попадает в подобласть Γ_1, или наоборот, при $\lambda = \lambda_1$ выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ попадает в подобласть Γ_0. Таким образом, при приеме реализации $x(t)$ всегда имеется вероятность принять ошибочное решение $\lambda = \lambda_1$, тогда как в действительности $\lambda = \lambda_0$, и наоборот. Эти условные вероятности называются соответственно вероятностями ложной тревоги P_{F_1} и ложного отбоя P_{F_0} и определяются соотношениями

$$P_{F_1} = P(\lambda_1 \mid \lambda_0) = \int_{\Gamma_1} p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{15.22}$$

$$P_{F_0} = P(\lambda_0 \mid \lambda_1) = \int_{\Gamma_0} p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{15.23}$$

Вероятности принятия правильных решений $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$ называются мощностью решения и обозначаются соответственно через P_{D_1} и P_{D_0}:

$$P_{D_1} = P(\lambda_1 \mid \lambda_1) = \int_{\Gamma_1} p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{15.24}$$

$$P_{D_0} = P(\lambda_0 \mid \lambda_0) = \int_{\Gamma_0} p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \lambda_0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{15.25}$$

Следует отметить, что условные вероятности P_{F_1} и P_{F_0} не полностью характеризуют ошибки решения. Относительная частота появления этих ошибок зависит от значений априорных вероятностей $p(\lambda_1)$ и $p(\lambda_0)$, т. е. от того, насколько часто априори на входе решающего устройства появляется сигнал, соответствующий $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$. Поэтому в ряде случаев ошибки решения характеризуются полными вероятностями ошибок первого P_1 и второго P_2 рода:

$$P_1 = p(\lambda_1) P_{F_0} = p(\lambda_1) P(\lambda_0 \mid \lambda_1), \tag{15.26}$$

$$P_2 = p(\lambda_0) P_{F_1} = p(\lambda_0) P(\lambda_1 \mid \lambda_0). \tag{15.27}$$

Значения вероятностей ошибок зависят от правила принятия решения (15.21) и определяются значением постоянной C. Естественно выбрать такую постоянную, при которой правило (15.21) оказывалось бы в определенном смысле оптимальным. В задачах связи, телеметрии и телеуправления в качестве критерия оптимальности обычно используют критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова—Зигерта), совпадающий с байесовым критерием минимального среднего риска при простой функции потерь, когда ошибочному решению приписывается вес, равный единице, а правильному — вес, равный нулю. Согласно этому критерию оптимальным считается соотношение (15.21), минимизирующее суммарную вероятность ошибок первого и второго рода

$$P = p(\lambda_1) P(\lambda_0 \mid \lambda_1) + p(\lambda_0) P(\lambda_1 \mid \lambda_0). \tag{15.28}$$

Можно показать [96], что это условие выполняется при $C = p(\lambda_0)/p(\lambda_1)$, в соответствии с чем оптимальное по критерию идеального наблюдателя правило принятия решения $\lambda = \lambda_1$ принимает вид

$$L(\lambda_1)/L(\lambda_0) > p(\lambda_0)/p(\lambda_1). \tag{15.29}$$

В случае непрерывной обработки реализации $x(t)$ правило (15.29) преобразуется к виду

$$F(\lambda_1)/F(\lambda_0) > p(\lambda_0)/p(\lambda_1). \tag{15.29а}$$

В задачах радиолокации широко используется другой критерий оптимальности, называемый критерием Неймана—Пирсона. Согласно этому критерию оптимальным считается правило (15.21), максимизирующее вероятность правильного решения P_{D_1} (мощность решения) при заданной вероятности ложной тревоги P_{F_1}. Можно показать [96], что это условие выполняется при $C = h$, где h определяется по заданной вероятности ложной тревоги P_{F_1}. Таким образом, оптимальное по критерию Неймана—Пирсона правило принятия решения $\lambda = \lambda_1$ имеет вид

$$L(\lambda_1)/L(\lambda_0) > h \tag{15.30}$$

или

$$F(\lambda_1)/F(\lambda_0) > h. \tag{15.30а}$$

Таким образом, решение сформулированных в начале параграфа задач второй группы сводится к отысканию оптимального устройства, осуществляющего обработку принимаемой смеси $x(t)$ в соответствии с правилами (15.29) или (15.30), и вычислению соответствующих вероятностей ошибочных решений.

В двух рассмотренных критериях предполагалось, что решение принимается за фиксированный интервал времени длительностью T. Однако в отдельных случаях принимаемая реализация $x(t)$ может оказаться настолько благоприятной, что надежное обнаружение или различение сигналов можно произвести значительно быстрее, чем в случае приема менее благоприятной реализации. Поэтому, если заранее не фиксировать длительность T наблюдения, можно получить в среднем значительную экономию во времени обработки принимаемых реализаций $x(t)$. Такое наблюдение, при котором длительность обработки $x(t)$ заранее не фиксируется, а определяется самим ходом эксперимента, называется последовательным наблюдением (последовательным анализом) [99, 100].

При последовательном наблюдении производится непрерывный анализ отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами h_1 и $h_0 < h_1$. Если отношение правдоподобия меньше h_0, принимается гипотеза $\lambda = \lambda_0$. Если же отношение правдоподобия $\Lambda[x(t)] > h_1$, принимается гипотеза $\lambda = \lambda_1$. В том случае, когда отношение правдоподобия находится между нижним h_0 и верхним h_1 уровнями, считается, что полученная в результате обработки реализации $x(t)$ статистика недостаточна для принятия решения и испытание продолжается.

2. ПРИМЕРЫ

15.1. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_m^{(1)}) + (1 - \lambda)s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_m^{(2)}) + \xi(t), \tag{15.31}$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau); \tag{15.32}$$

$$s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)}) = f(t, l_1^{(i)}, \ldots, l_k^{(i)}) \cos [\omega_i t + \Psi_i(t, l_{k+1}^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)})], \quad i = 1, 2, \tag{15.33}$$

— детерминированные узкополосные радиосигналы.

Здесь ω_i — несущие частоты, $f_i(t)$ и $\Psi_i(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции, $l_k^{(i)}$ — априорно известные параметры сигналов $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)}) = s_i(t)$.

Предполагается, что ширина спектров сигналов $s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_m^{(1)})$ и $s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_m^{(2)})$ много меньше их несущих частот и, кроме того, $|\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega \ll \omega_i$, а сами сигналы $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)})$ полностью определены на интервалах времени длительностью T и равны нулю вне этого интервала. Параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую на фиксированном интервале $(kT, (k+1)T)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, значение $\lambda = \lambda_1 = 1$, что соответствует наличию в принятом колебании $x(t)$ сигнала $s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_m^{(1)}) = s_1(t)$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$, когда в колебании $x(t)$ присутствует сигнал $s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_m^{(2)}) = s_2(t)$. Априорные вероятности $p(s_1) = p(\lambda_1)$ и $p(s_2) = p(\lambda_0)$ присутствия сигналов (15.33) в колебании (15.31) считаются известными.

Определить структуру приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку реализации $x(t)$ и вычислить соответствующую ей минимальную суммарную вероятность ошибочного приема детерминированных сигналов $s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_m^{(1)}) = s_1(t)$ и $s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_m^{(2)}) = s_2(t)$.

Решение. Как следует из (15.11) и (15.16), в случае приема детерминированных сигналов $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)}) = s_i(t)$ на фоне белого шума $\xi(t)$ функционалы правдоподобия $F(\lambda_1)$ и $F(\lambda_0)$ определяются соотношениями

$$F(\lambda_1) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2\, dt\right\}, \tag{15.34}$$

$$F(\lambda_0) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2\, dt\right\}. \tag{15.35}$$

Подставляя (15.34) и (15.35) в (15.29а) и логарифмируя полученное выражение, находим, что оптимальный приемник для различения двух детерминированных сигналов $s_i(t)$ $(i = 1, 2)$ на фоне белого шума должен сформировать величину

$$U = \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_2(t)dt \tag{15.36}$$

и сравнить ее с порогом

$$H = \frac{1}{2}\left[E_1 - E_2 + N_0 \ln\frac{p(s_2)}{p(s_1)}\right]. \tag{15.37}$$

Здесь

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)dt,\ E_2 = \int_0^T s_2^2(t)dt \tag{15.38}$$

— энергия сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

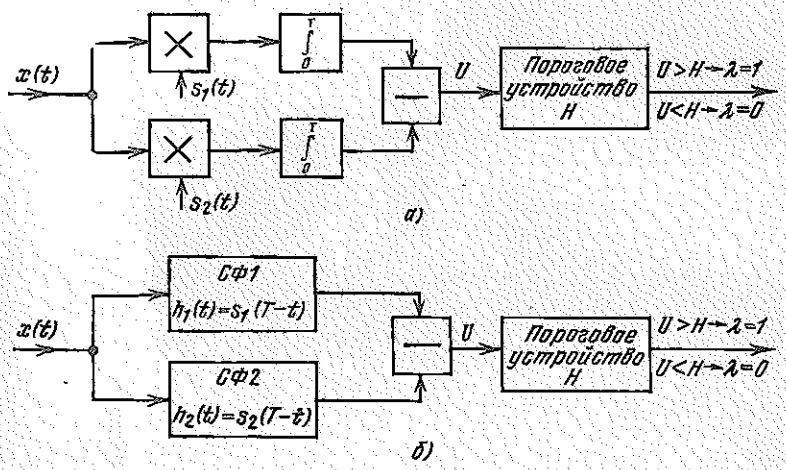


Рис. 15.1. Оптимальные устройства для различения двух детерминированных сигналов

Решение $\lambda = 1$ принимается при $U > H$, в противном случае принимается решение $\lambda = 0$.

В соответствии с (15.36) и (15.37) искомое оптимальное приемное устройство должно состоять из двух перемножителей, интеграторов и порогового устройства с порогом H (рис. 15.1, *а*). Перемножители и интеграторы можно заменить согласованными фильтрами (СФ) [82, 90] с импульсными характеристиками

$$h_i(t) = s_i(T - t), \tag{15.39}$$

при этом схема оптимального приемника преобразуется к виду, изображенному на рис. 15.1, *б*.

Предположим, что колебание (15.31) на входе приемного устройства имеет вид $x(t) = s_1(t) + \xi(t)$, а сформированная приемником величина $U < H$. В этом случае будет иметь место ошибка (принимается решение $\lambda = 0$, когда в действительности $\lambda = 1$), вероятность которой

$$P_1 = p(s_1)P(s_2 \mid s_1) = p(s_1) \int_{-\infty}^{H} p_1(U \mid \lambda = 1)dU. \tag{15.40}$$

Здесь $p_1(U \mid \lambda = 1)$ — условная плотность распределения вероятностей случайной величины U при наличии на входе приемника сигнала $s_1(t)$.

Из (15.36) следует, что U является гауссовской случайной величиной с плотностью распределения вероятностей

$$p_1(U \mid \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\lambda} \exp\left[-\frac{(U - m_\lambda)^2}{2\sigma_\lambda^2}\right], \tag{15.41}$$

математическое ожидание m_λ и дисперсия $D_\lambda = \sigma_\lambda^2$ которой зависят от параметра λ. Подставляя, в частности, в (15.36) сумму $x(t) = s_1(t) + \xi(t)$, после несложных вычислений находим

$$m_{\lambda=1} = E_1 - B_s, \quad \sigma^2_{\lambda=1} = (N_0/2)(E_1 + E_2 - 2B_s),$$

где

$$B_s = \int_0^T s_1(t)\, s_2(t)\, dt. \tag{15.42}$$

Таким образом, вероятность принятия ошибочного решения $\lambda = 0$

$$P_1 = p(s_1)\left\{1 - \Phi\left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s - N_0 \ln [p(s_2)/p(s_1)]}{2\sqrt{(E_1 + E_2 - 2B_s)\, N_0/2}}\right)\right\}, \tag{15.43}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

— интеграл вероятности.

Пусть $U > H$, $x(t) = s_2(t) + \xi(t)$. В этом случае также имеет место ошибка (принимается решение $\lambda = 1$, когда в действительности $\lambda = 0$), вероятность которой

$$P_2 = p(s_2) P(s_1 \mid s_2) = p(s_2) \int_H^\infty p_1(U \mid \lambda = 0)\, dU. \tag{15.44}$$

В данном случае

$$m_{\lambda=0} = B_s - E_2, \ \sigma^2_{\lambda=0} = (E_1 + E_2 - 2B_s) N_0/2 \tag{15.45}$$

и формула (15.44) принимает вид

$$P_2 = p(s_2)\left\{1 - \Phi\left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s + N_0 \ln [p(s_2)/p(s_1)]}{\sqrt{2(E_1 + E_2 - 2B_s) N_0/2}}\right)\right\}. \tag{15.46}$$

Подставляя (15.43) и (15.46) в (15.28), находим следующее выражение для суммарной вероятности ошибки при оптимальном приеме детерминированных сигналов:

$$P = p(s_1)\left\{1 - \Phi\left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s - N_0 \ln [p(s_2)/p(s_1)]}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}(E_1 + E_2 - 2B_s)}}\right)\right\} +$$

$$+ p(s_2)\left\{1 - \Phi\left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s + N_0 \ln [p(s_2)/p(s_1)]}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}(E_1 + E_2 - 2B_s)}}\right)\right\}. \tag{15.47}$$

При $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$ формула (15.47) значительно упрощается:

$$P = 1 - \Phi(\sqrt{q_1(1 + \delta - 2\rho_{s1})/4}), \qquad (15.48)$$

где

$$q_1 = 2E_1/N_0, \quad \delta = E_2/E_1, \quad \rho_{s1} = B_s/E_1. \qquad (15.49)$$

Для большинства применяемых в системах радиотелеграфии сигналов характерным является равенство их энергий $E_i = E$. При этом условии из формул (15.48) получим [27]

$$P = 1 - \Phi(\sqrt{q(1-\rho_s)/2}), \qquad (15.50)$$

где

$$\rho_s = \frac{B_s}{E} = \frac{1}{E}\int_0^T s_1(t)\, s_2(t)\, dt \qquad (15.51)$$

— коэффициент взаимной корреляции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Из (15.50) следует, что определение потенциальной помехоустойчивости для случая оптимального приема детерминированных сигналов сводится к вычислению коэффициента их взаимной корреляции. Учитывая монотонно возрастающий характер функции $\Phi(z)$, приходим к выводу, что при одинаковых отношениях сигнал/шум $q = 2E/N_0$ наиболее помехоустойчивыми являются сигналы $s_i(t)$, для которых коэффициент ρ_s минимален. Значения $P = f(q, \rho_s)$, вычисленные по формуле (15.50), представлены на рис. 15.2.

15.2. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m) + \xi(t), \qquad (15.52)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией (15.32);

$$s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m) = f(t, l_1, \ldots, l_k)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l_{k+1}, \ldots, l_m)], \qquad (15.53)$$

— детерминированный узкополосный радиосигнал. Здесь ω_0 — несущая частота, $f(t)$ и $\Psi(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции, l_k — априорно известные параметры сигнала $s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m) = s(t)$. Предполагается, что ширина спектра сигнала $s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m)$ много меньше его несущей частоты, а сам сигнал полностью определен на интервале длительностью T и равен нулю вне этого интервала. Параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую на фиксированном интервале наблюдения $(0, T)$ значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Определить структуру приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию Неймана—Пирсона обработку реализации $x(t)$ и вычислить характеристики обнаружения детерминированного сигнала $s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m)$ на фоне белого шума.

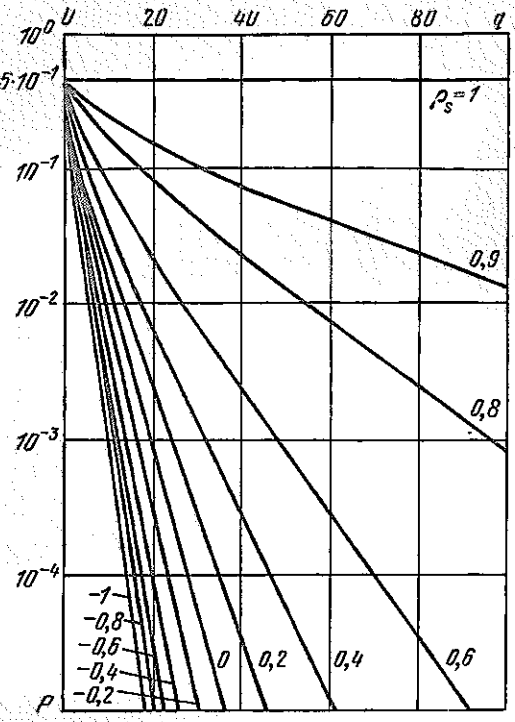


Рис. 15.2. Суммарная вероятность ошибочного приема детерминированных сигналов

Решение. В соответствии с (15.11) и (15.16) для рассматриваемого случая

$$F(\lambda_1) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - s(t)]^2\, dt\right\}, \qquad (15.54)$$

$$F(\lambda_0) = \kappa \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\, dt\right]. \qquad (15.55)$$

Подставляя (15.54) и (15.55) в (15.30а) и логарифмируя полученное выражение, находим, что оптимальный приемник для обнаружения детерминированного сигнала $s(t)$ должен сформировать величину

$$U = \int_0^T x(t)\, s(t)\, dt \qquad (15.56)$$

и сравнить ее с порогом

$$H_0 = (E + N_0 \ln h)/2, \qquad (15.57)$$

где

$$E = \int_0^T s^2(t)\,dt \qquad (15.58)$$

— энергия сигнала $s(t)$.

При $U > H_0$ принимается решение $\lambda = \lambda_1 = 1$, в противном случае принимается $\lambda = \lambda_0 = 0$.

На основании (15.56) и (15.57) искомый оптимальный приемник должен состоять из перемножителя, интегратора и порогового устройства с порогом H_0 (рис. 15.3, *а*). Как отмечалось, перемножитель и интегратор можно заменить согласованным фильтром с импульсной характеристикой

$$h(t) = s(T - t), \qquad (15.59)$$

при этом схема оптимального обнаружителя преобразуется к виду, изображенному на рис. 15.3, *б*.

Найдем характеристики обнаружения. Вероятность ложной тревоги P_{F_1} равна вероятности того, что $U > H_0$ при условии $\lambda = \lambda_0 = 0$, и определяется формулой

$$P_{F_1} = \int_{H_0}^{\infty} p_1(U \mid \lambda = 0)\,dU. \qquad (15.60)$$

Здесь $p_1(U|\lambda = 0)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины U при $\lambda = \lambda_0 = 0$, т. е. при наличии на входе приемника только шума.

Как следует из (15.56), U представляет собой гауссовскую случайную величину с плотностью распределения вероятностей (15.41). При $\lambda = 0$

$$U = \int_0^T \xi(t)\,s(t)\,dt,$$

откуда находим

$$m_{\lambda=0} = 0, \quad \sigma^2_{\lambda=0} = EN_0/2. \qquad (15.61)$$

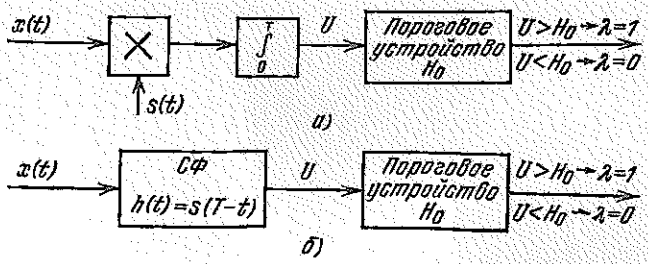


Рис. 15.3. Оптимальные устройства для обнаружения детерминированного сигнала

Подставляя (15.41) в (15.60) и учитывая соотношения (15.61), получаем

$$P_{F_1} = 1 - \Phi(h_0/\sqrt{q}), \quad q = 2E/N_0, \tag{15.62}$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности;

$$h_0 = 2H_0/N_0 = E/N_0 + \ln h. \tag{15.63}$$

Вероятность правильного обнаружения (мощность решения) P_{D_1} равна вероятности того, что $U > H_0$ при условии $\lambda = \lambda_1 = 1$:

$$P_{D_1} = \int_H^\infty p_1(U \mid \lambda = 1)\, dU. \tag{15.64}$$

Подставляя в (15.64) плотность распределения вероятностей (15.41) и учитывая, что при $\lambda = \lambda_1 = 1$ математическое ожидание и дисперсия случайной величины U равны

$$m_{\lambda=1} = E, \quad \sigma^2_{\lambda=1} = EN_0/2, \tag{15.65}$$

находим

$$P_{D_1} = 1 - \Phi(h_0/\sqrt{q} - \sqrt{q}). \tag{15.66}$$

Формулы (15.62) и (15.66) показывают, что как вероятность ложной тревоги P_{F_1}, так и вероятность правильного обнаружения P_{D_1} однозначно определяются пороговым уровнем h_0 и отношением сигнал/шум $q = 2E/N_0$. Задаваясь значением вероятности ложной тревоги P_{F_1}, по формуле (15.62) можно вычислить зависимость $h_0 = f_1(q)$, а затем определить функцию $P_{D_1} = f_2(q)$, называемую характеристикой обнаружения. Значения $P_{D_1} = f_2(q)$, вычисленные по формуле (15.66) для нескольких значений вероятностей ложной тревоги, представлены на рис. 15.4 (сплошные линии).

15.3. Решить пример 15.2 при условии, что процесс $\xi(t)$ в (15.52) представляет собой стационарный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$.

Решение [96]. В соответствии с (15.11) и (15.13) функционалы правдоподобия для рассматриваемого примера определяются соотношениями

$$F(\lambda_0) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \theta(t_1, t_2)\, x(t_1)\, x(t_2)\, dt_1\, dt_2\right\}, \tag{15.67}$$

$$F(\lambda_1) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \theta(t_1, t_2)\,[x(t_1) - s(t_1)]\,[x(t_2) - s(t_2)]\, dt_1\, dt_2\right\}, \tag{15.68}$$

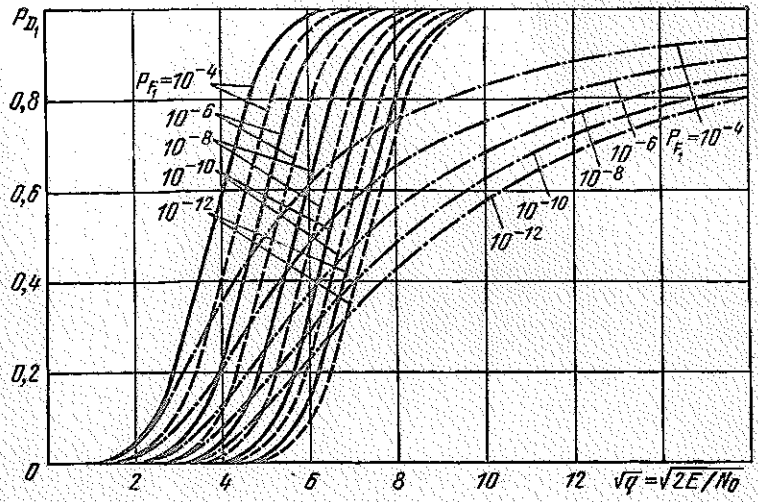


Рис. 15.4. Характеристики обнаружения детерминированного сигнала (сплошные линии), сигнала со случайной начальной фазой (штриховые) и сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой (штрих-пунктир)

где функция $\theta(t_1, t_2)$ удовлетворяет интегральному уравнению (15.14). Подставляя (15.67) и (15.68) в (15.30а), находим

$$\Lambda[x(t)] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T s(t_1)\, s(t_2)\, \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\int_0^T x(t_1)\, s(t_2)\, \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2\right].$$

Здесь учтено, что вследствие симметрии функции $\theta(t_1, t_2)$

$$\int_0^T\int_0^T x(t_1)\, s(t_2)\, \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_0^T\int_0^T x(t_2)\, s(t_1)\, \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Вводя далее функцию

$$\varphi(t_1) = \int_0^T \theta(t_1, t_2)\, s(t_2)\, dt_2,$$

удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма первого рода, $\int_0^T R_\xi(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = s(t)$, окончательно получаем

$$\Lambda[x(t)] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T s(t)\, \varphi(t)\, dt + \int_0^T x(t)\, \varphi(t)\, dt\right]. \quad (15.69)$$

Согласно критерию Неймана—Пирсона решение $\lambda = \lambda_1 = 1$ принимается при

$$\Lambda [x(t)] > h. \tag{15.70}$$

После логарифмирования это условие приводится к виду

$$U = \int_0^T x(t)\, s(t)\, dt > h_0, \tag{15.71}$$

где

$$h_0 = \ln h + \frac{1}{2}\int_0^T s(t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{15.72}$$

Соотношение (15.71) определяет структуру оптимального обнаружителя. Если окажется, что $U > h_0$, принимается решение $\lambda = \lambda_1 = 1$, в противном случае принимается решение $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Определим характеристики обнаружения. Вероятность ложной тревоги определяется формулой (15.60), где $p_1(U|\lambda = 0)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины U, которая при $\lambda = \lambda_0 = 0$ равна

$$U = \int_0^T \xi(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{15.73}$$

и, следовательно, представляет собой гауссовскую случайную величину с плотностью распределения вероятностей (15.41), с нулевым математическим ожиданием $m_{\lambda=0} = 0$ и дисперсией

$$\sigma^2_{\lambda=0} = \int_0^T \int_0^T R_\xi(t_1, t_2)\, \varphi(t_1)\, \varphi(t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_0^T s(t)\, \varphi(t)\, dt = \sigma_0^2.$$

После подстановки (15.41) в (15.60) получаем

$$P_{F_1} = 1 - \Phi(h_0/\sigma_0).$$

Вероятность правильного обнаружения равна

$$P_{D_1} = 1 - \Phi(h_0/\sigma_0 - \sigma_0).$$

15.4. Входящие в (15.31) сигналы $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)})$ имеют вид

$$s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)}) = s_i(t, \varphi_i) = f_i(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t) + \varphi_i], \quad i = 1, 2, \tag{15.74}$$

причем все параметры $l_k^{(i)}$ таких сигналов, кроме начальных фаз φ_i, априори известны, а начальные фазы φ_i представляют собой случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(-\pi, \pi)$, и считаются несущественными параметрами. Сохраняя в силе остальные условия примера 15.1, определить схему оптимального по критерию Котельникова—Зигерта приемника сигналов $s_i(t, \varphi_i)$

со случайными начальными фазами и вычислить суммарную вероятность ошибочного приема.

Решение [101]. В этом случае функционалы правдоподобия $F(\lambda_1)$ и $F(\lambda_0)$ следует вычислять по формуле (15.11а), осуществляя усреднение по случайным фазам φ_i как несущественным параметрам:

$$F(\lambda_1)=\frac{\kappa}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T[x(t)-\right.$$

$$\left.-f_1(t)\cos(\omega_1 t+\psi_1(t)+\varphi_1)]^2\,dt\right\}d\varphi_1, \qquad (15.75)$$

$$F(\lambda_0)=\frac{\kappa}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T[x(t)-\right.$$

$$\left.-f_2(t)\cos(\omega_2 t+\psi_2(t)+\varphi_2)]^2\,dt\right\}d\varphi_2. \qquad (15.76)$$

Введем обозначения

$$X_i=\int_0^T x(t)f_i(t)\cos[\omega_i t+\psi_i(t)]\,dt,$$

$$Y_i=\int_0^T x(t)f_i(t)\sin[\omega_i t+\psi_i(t)]\,dt \qquad (15.77)$$

и учтем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(R\cos\theta)\,d\theta=I_0(R),$$

где $I_0(R)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Тогда после подстановки (15.75) и (15.76) в (15.29а) и ряда несложных преобразований найдем, что оптимальный приемник для различения двух сигналов (15.74) с неизвестными начальными фазами должен сформировать величину

$$U=\ln I_0(2R_1/N_0)-\ln I_0(2R_2/N_0) \qquad (15.78)$$

и сравнить ее с порогом

$$H=(E_1-E_2)/N_0+\ln[p(s_1)/p(s_2)]. \qquad (15.79)$$

Здесь E_1 и E_2—энергии сигналов $s_1(t,\varphi_1)$ и $s_2(t,\varphi_2)$, определяемые формулами (15.38). Величины $R_i=\sqrt{X_i^2+Y_i^2}$ представляют собой значения огибающих суммы сигнала $s_i(t,\varphi_i)$ и шума (в моменты времени $t=kT$) на выходе согласованных фильтров с импульсными характеристиками $h_i(t)=s_i(T-t)$.

Схема такого приемника представлена на рис. 15.5, *а*. Принятое колебание $x(t)$ воздействует на два согласованных фильтра с им-

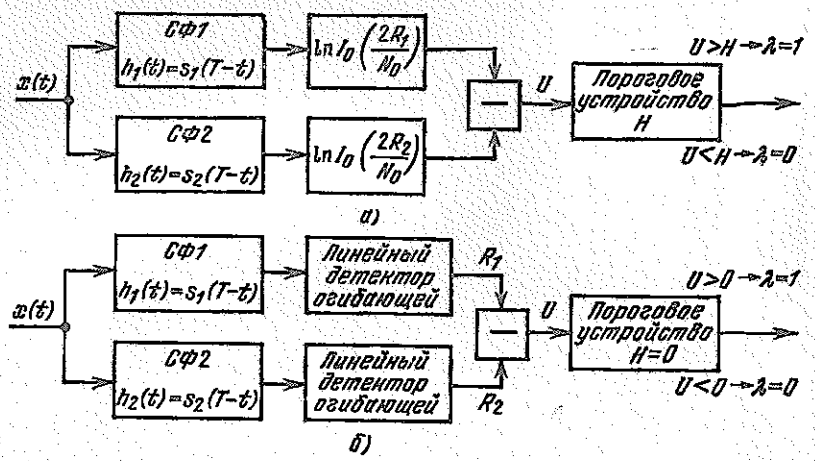


Рис. 15.5. Оптимальные устройства для различения двух сигналов со случайными начальными фазами

пульсными характеристиками $h_i(t)$. На выходе каждого фильтра стоят детекторы огибающих, выходные напряжения которых вычитаются и разность (15.78) подается на пороговое устройство с порогом H. При $U > H$ принимается решение $\lambda = 1$, при $U < H$ принимается $\lambda = 0$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь симметричных систем передачи двоичных сигналов, для которых $E_1 = E_2 = E$, $p(s_1) = p(s_2)$ и $P(s_1|s_2) = P(s_2|s_1)$. Для таких систем, как это следует из (15.79), порог $H = 0$ и выражение (15.78) приводится к виду

$$U = I_0(2R_1/H_0) - I_0(2R_2/H_0).$$

Следует отметить, что при сделанных здесь предположениях закон детектирования не имеет существенного значения. Важно лишь, чтобы выходное напряжение детектора было монотонной функцией огибающей $R_i(t)$. Если, например, в оптимальном приемнике применить линейное детектирование огибающей (рис. 15.5, *б*), то с нулевым порогом нужно сравнивать величину $U = R_1 - R_2$.

Суммарная вероятность ошибки при этом определяется формулой

$$P = \int_0^\infty dR_1 \int_{R_1}^\infty p_2(R_1, R_2)\, dR_2, \qquad (15.80)$$

где

$$p_2(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{\sigma^4(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{q}{2} - \frac{R_1^2 + R_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right] \times$$
$$\times I_0\left(\sqrt{q}\,\frac{R_1}{\sigma}\right) I_0\left(\frac{\rho R_1 R_2}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \qquad (15.81)$$

— совместная плотность распределения вероятностей случайных величин R_1 и R_2. Здесь $q = 2E/N_0$ — отношение сигнал/шум на входе приемника (на входе согласованных фильтров), $\sigma^2 = EN_0/2$ — дисперсия шума на выходе каждого фильтра, ρ — коэффициент, имеющий смысл коэффициента взаимной корреляции между сигналами:

$$\rho = \left|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right|/E, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\int_0^T f_1(t) f_2(t) \cos[(\omega_2 - \omega_1) t + \psi_2(t) - \psi_1(t)]\, dt, \tag{15.82}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\int_0^T f_1(t) f_2(t) \sin[(\omega_2 - \omega_1) t + \psi_2(t) - \psi_1(t)]\, dt.$$

Подставив (15.81) в (15.80) и выполнив интегрирование, получим следующее выражение для суммарной вероятности ошибки при приеме сигналов $s_i(t, \varphi_i)$ с неизвестными начальными фазами:

$$P = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{q(1-\sqrt{1-\rho^2})};\ \frac{1}{2}\sqrt{q(1+\sqrt{1-\rho^2})}\right) - \\ - \frac{1}{2} e^{-q/4} I_0\left(\frac{\rho q}{4}\right), \tag{15.83}$$

где

$$Q(v, u) = \int_u^\infty x \exp\left(-\frac{x^2+v^2}{2}\right) I_0(vx)\, dx, \tag{15.84}$$

— функция распределения Релея—Райса [32, 102].

15.5. Решить пример 15.2 при условии, что входящий в (15.52) сигнал $s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m)$ имеет вид

$$s(t, l_1, l_2, \ldots, l_m) = s(t, \varphi) = f(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi], \tag{15.85}$$

где φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Функционалы правдоподобия для рассматриваемого случая в соответствии с (15.11а) равны

$$F(\lambda_1) = \kappa \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[\int_0^T x^2(t)\, dt + E\right]\right\} I_0\left(\frac{2R}{N_0}\right), \tag{15.86}$$

$$F(\lambda_0) = \kappa \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\, dt\right]. \tag{15.87}$$

После подстановки (15.86) и (15.87) в (15.30а) получаем следующее правило принятия решения $\lambda = \lambda_1 = 1$ (рис. 15.6, *а*):

$$e^{E/N_0} I_0(2R/N_0) > h \tag{15.88}$$

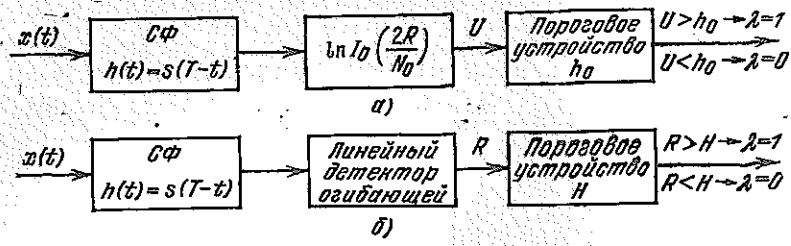


Рис. 15.6. Оптимальные устройства для обнаружения сигнала со случайной начальной фазой

или

$$I_0(2R/N_0) > h_0 = he^{E/N_0}, \tag{15.88а}$$

где

$$R = |\sqrt{X^2+Y^2}|,$$

$$X = \int_0^T x(t) f(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]\, dt, \tag{15.89}$$

$$Y = \int_0^T x(t) f(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)]\, dt.$$

Так как функция $I_0(z)$ является монотонной, решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \varphi)$ на входе приемника можно принимать на основании сравнения с некоторым порогом любой монотонной функции аргумента R, представляющего собой, как отмечалось в примере 15.4, значения огибающей $R(t)$ на выходе согласованного фильтра с импульсной характеристикой $h(t) = s(T-t)$ в момент времени $t = T$. Если сравнивать с порогом H саму огибающую $R(t)$, то правило принятия решения $\lambda = \lambda_1 = 1$ принимает вид

$$R > H. \tag{15.88б}$$

Соответствующая этому правилу схема оптимального приемника приведена на рис. 15.6, *б*.

В соответствии с (15.88б), (15.22) и (15.24) вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения определяются формулами

$$P_{F_1} = \int_H^\infty p_1(R \mid \lambda = 0)\, dR, \quad P_{D_1} = \int_H^\infty p_1(R \mid \lambda = 1)\, dR. \tag{15.90}$$

Нетрудно показать, что входящие в (15.90) плотности распределения вероятностей равны

$$p_1(R \mid \lambda = 1) = \frac{R}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{R^2+E^2}{2\sigma_0^2}\right) I_0\left(\frac{RE}{\sigma_0^2}\right),$$

$$p_1(R \mid \lambda = 0) = \frac{R}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 = \frac{EN_0}{2}.$$

После подстановки $p_1(R|\lambda=1)$ и $p_1(R|\lambda=0)$ в (15.90) находим

$$P_{F_1}=e^{-h_0^2/2}=h_0=\frac{\sqrt{2}H}{\sqrt{EN_0}}=\frac{H}{\sigma_0},$$

$$P_{D_1}=Q(\sqrt{q},\ h_0), \qquad (15.90а)$$

где функция $Q(v,\ u)$ определена соотношением (15.84). Значения $P_{D_1}=f(q)$, вычисленные по формулам (15.90а) для заданных значений вероятности ложной тревоги P_{F_1}, представлены на рис. 15.4 (штриховые линии).

15.6. На вход приемного устройства поступает колебание

$$\tilde{x}(t)=\lambda\tilde{u}_1(t)+(1-\lambda)\tilde{u}_2(t)+\tilde{\xi}(t), \qquad (15.91)$$

где $\tilde{\xi}(t)$ — комплексный стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $\tilde{m}_{\tilde{\xi}}=0$ и корреляционной функцией

$$\tilde{R}_{\tilde{\xi}}(\tau)=(N_0/2)\delta(\tau);\ \ \tilde{u}_i(t)=ae^{-j\theta}\tilde{s}_i(t)$$

— федингующие сигналы. Здесь

$$s_i(t)=f_i(t)\exp\{j[\omega_i t+\psi_i(t)]\},\ \ 0\leqslant t\leqslant T$$

— детерминированные узкополосные радиосигналы, a и θ — независимые случайные величины, характеризующие медленные изменения амплитуды и фазы сигналов $\tilde{s}_i(t)$.

Принимаемые сигналы $\tilde{u}_i(t)$ состоят из детерминированной и случайной составляющих:

$$\tilde{u}_i(t)=\tilde{s}_i(t)[\alpha e^{-j\delta}+\beta e^{-j\varepsilon}], \qquad (15.92)$$

т. е.

$$ae^{-j\theta}=\alpha e^{-j\delta}+\beta e^{-j\varepsilon}, \qquad (15.93)$$

где α и δ представляют собой амплитудный коэффициент и фазовый сдвиг детерминированной составляющей сигнала $\tilde{u}_i(t)$ (α и δ — постоянные величины); β и ε — амплитудный множитель и фазовый сдвиг случайной компоненты, постоянные на интервале наблюдения $(0,\ T)$. В дальнейшем будем предполагать, что β и ε представляют собой независимые случайные величины, причем β распределена по закону Релея, а ε — равномерно на интервале $(-\pi,\ \pi)$, вследствие чего их совместная плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p_2(\beta,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{2\pi\sigma_\phi^2}\exp\left(-\dfrac{\beta^2}{2\sigma_\phi^2}\right), & 0\leqslant\beta<\infty,\ \ -\pi\leqslant\varepsilon\leqslant\pi,\\ 0 & \text{при других } \beta \text{ и } \varepsilon.\end{cases}$$

При сделанных предположениях совместная плотность распределения вероятностей случайных величин a и θ определяется законом Райса:

$$p_2(a, \theta) = \begin{cases} \dfrac{a}{2\pi\sigma_\Phi^2} \exp\left[-\dfrac{a^2+\alpha^2-2a\alpha\cos(\theta-\delta)}{2\sigma_\Phi^2}\right], \\ \qquad 0 \leqslant a < \infty, \quad -\pi \leqslant \theta-\delta \leqslant \pi, \\ 0 \qquad \text{при других } a \text{ и } \theta, \end{cases} \tag{15.94}$$

а средние энергии сигналов $\widetilde{u}_i(t)$

$$M\{E_{\widetilde{u}_i}\} = M\left\{\int_0^T |\widetilde{u}_i(t)|^2\, dt\right\} = E_{s_i}\int_0^\infty a^2\, p_1(a)\, da =$$

$$= 2\sigma_\Phi^2 E_{s_i}(1+\gamma^2/2) = \overline{E}_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\gamma = \alpha/\sigma_\Phi$ характеризует соотношение между детерминированной и случайной составляющими сигнала $\widetilde{u}_i(t)$; E_{s_i} — энергия сигналов $\widetilde{s}_i(t)$.

Параметр λ в колебании (15.91) может принимать значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(u_1) = p(\lambda_0) = p(k_2) = 1/2$. По принятой реализации $x(t)$ требуется решить с минимальной суммарной вероятностью ошибки (15.28), какое значение имеет параметр λ на данном интервале наблюдения $(0, T)$.

Решение [103]. При решении сформулированной задачи следует различать два частных случая: 1) среднее значение δ фазового сдвига θ принимаемых сигналов (15.92) априори известно; 2) среднее значение фазового сдвига θ на приемной стороне неизвестно.

Подставляя в (15.11а) вместо сигналов $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_m^{(i)})$ сигналы $\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{u}_i(t, a, \theta)$, определяемые соотношением (15.92), и осуществляя усреднение по несущественным параметрам a и θ с плотностью распределения вероятностей (15.94), находим, что оптимальный по критерию идеального наблюдателя приемник сигналов (15.92) с равными энергиями $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = \overline{E}$, равными априорными вероятностями $p(\widetilde{u}_1) = p(\widetilde{u}_2) = 1/2$ и известным средним значением δ их фазового сдвига θ должен сформировать величину

$$U = \left[\frac{\sigma_\Phi^2}{\alpha N_0}|\widetilde{r}_1|^2 + \mathrm{Re}(\widetilde{r}_1 e^{-j\delta})\right] - \left[\frac{\sigma_\Phi^2}{\alpha N_0}|\widetilde{r}_2|^2 + \mathrm{Re}(\widetilde{r}_2 e^{-j\delta})\right] \tag{15.95}$$

и сравнить ее с порогом $H = 0$. При $U < H$ выносится решение $\lambda = 0$, при $U > H$ принимается $\lambda = 1$.

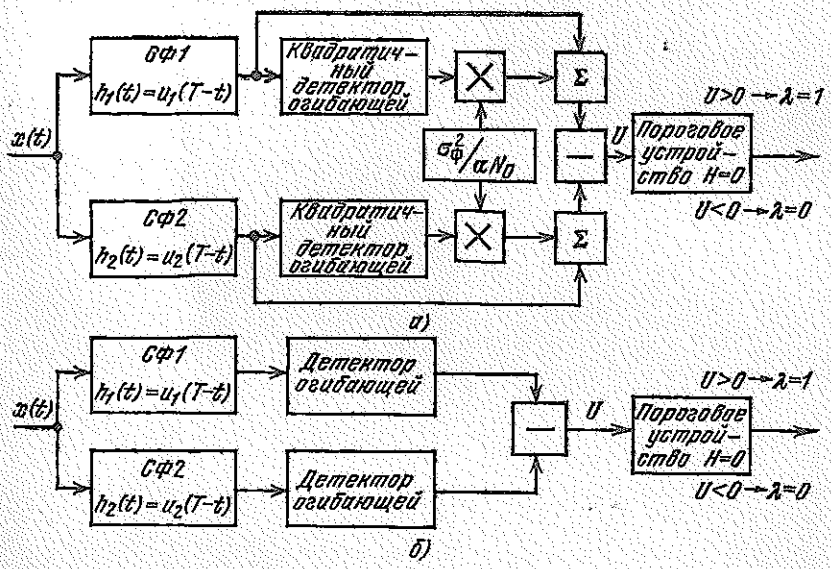


Рис. 15.7. Квазикогерентное (*а*) и некогерентное (*б*) устройства для различения двух медленно федингующих сигналов

Входящие в (15.95) величины $\widetilde{r}_i = \widetilde{r}_i(0)$ — значения комплексных взаимных корреляционных функций сигналов (15.92) и принятого колебания (15.91), равных

$$\widetilde{r}_i(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^T \widetilde{x}^*(t)\,\widetilde{u}_i(t-\tau)\,dt.$$

Здесь $\widetilde{x}^*(t)$ — функция, комплексно-сопряженная с $\widetilde{x}(t)$. Используя условие узкополосности сигналов $\widetilde{u}_i(t)$, можно показать, что действительная часть функции $\widetilde{r}_i(\tau)$ представляет собой взаимную корреляционную функцию для действительных частей колебаний $\widetilde{x}(t)$ и $\widetilde{u}_i(t)$:

$$\mathrm{Re}[\widetilde{r}_i(\tau)] = \int_0^T \mathrm{Re}[\widetilde{x}(t)]\,\mathrm{Re}[\widetilde{u}_i(t-\tau)]\,dt,$$

а значения $|\widetilde{r}_i(\tau)|$ совпадают со значениями огибающей этой корреляционной функции. В соответствии с этим схема оптимального приемника может быть представлена в виде, изображенном на рисунке 15.7, *а*. При этом суммарная вероятность P ошибок квазикогерентного приема медленно федингующих сигналов (15.92) подсчитывается по формуле

$$P = Q(ac,\ bc) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\mu\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}}\right]\exp\left[-\frac{(a^2+b^2)c^2}{2}\right]I_0(abc^2), \qquad (15.96)$$

где

$$a = 1 - \frac{\mu\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}},\quad b = 1 + \frac{\mu\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}},\quad \mu = \frac{2\sigma_\Phi^2 q}{2\sigma_\Phi^2 q + 4}, \qquad (15.97)$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma^2\left[(1-\rho^2)\,\sigma_\Phi^2 q + 2\,(1-\rho_s)\right]}{4\sigma_\Phi^2 q\,(1-\rho^2)}},\quad q = \frac{2E}{N_0},$$

а коэффициенты ρ_s и ρ определяются соотношениями (15.51) и (15.82).

Если среднее значение δ фазового сдвига θ принимаемых сигналов (15.92) неизвестно, оптимальный приемник для различения двух федингующих сигналов должен выносить решение о приеме $\widetilde{u}_1(t)$ или $\widetilde{u}_2(t)$ на основе анализа простого выражения (рис. 15.7, *б*): $U = |\widetilde{r}_1| - |\widetilde{r}_2|$.

При $U < 0$ принимается решение $\lambda = 0$, в противном случае — $\lambda = 1$. Отметим, что при некогерентном приеме не требуется знания отношения $\sigma_\Phi^2/\alpha N_0$.

Суммарная вероятность ошибки при некогерентном приеме подсчитывается по формуле (15.96), в которой

$$a = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{(1-\rho^2)\,(1-\mu^2\rho^2)}}{1-\mu\rho^2}},\quad b = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{(1-\rho^2)\,(1-\mu^2\rho^2)}}{1-\mu\rho^2}},$$

$$c = \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{2}\,\frac{1-\mu\rho^2}{1-\mu^2\rho^2}}. \qquad (15.98)$$

15.7. На выходе УПЧ приемника амплитудно-манипулированных радиосигналов, схема которого представлена на рис. 15.8, имеет место смесь сигнала и шума

$$x(t) = \lambda s_1(t,\ \varphi_1) + (1-\lambda)\,s_2(t,\ \varphi_2) + \xi(t),$$

где

$$\xi(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t$$

— гауссовский квазигармонический шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2\rho_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau;$$

$$s_1(t,\ \varphi_1) = A_m\cos(\omega_0 t + \varphi_1),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$s_2(t,\ \varphi_2) = 0,$$

— амплитудно-манипулированные радиосигналы. Начальная фаза φ_1 случайна и равномерно распределена на интервале $(-\pi,\ \pi)$.

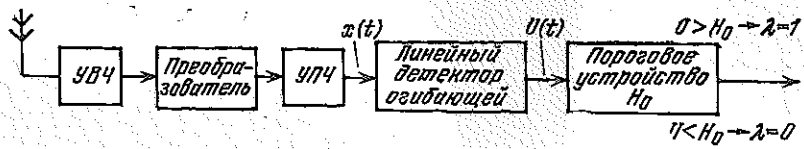


Рис. 15.8. Приемник АМ сигналов со случайной начальной фазой

Параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую на интервале $(0, T)$ значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$. Решение $\lambda = \lambda_1$ принимается в тех случаях, когда значение огибающей $U = U(T)$, выделяемой линейным детектором огибающей, превышает порог H. В противном случае принимается $\lambda = \lambda_0$.

Определить оптимальный порог H_0, минимизирующий суммарную вероятность ошибочных решений (15.28), и вычислить соответствующую ему суммарную вероятность ошибок.

Решение. В соответствии с (15.28) суммарная вероятность ошибок приема амплитудно-манипулированных сигналов

$$P_{\text{АМ}} = p(s_1)\int_0^{H_0} p_1(U \mid \lambda = 1)\, dU + p(s_2)\int_{H_0}^{\infty} p_1(U \mid \lambda = 0)\, dU, \quad (15.99)$$

где

$$p_1(U \mid \lambda = 1) = \frac{U}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{U^2 + A_m^2}{2\sigma_\xi^2}\right) I_0\left(\frac{UA_m}{\sigma_\xi^2}\right), \quad U \geqslant 0$$

— плотность распределения вероятностей огибающей суммы сигнала $s_1(t, \varphi_1)$ и квазигармонического шума $\xi(t)$;

$$p_1(U \mid \lambda = 0) = \frac{U}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \quad U \geqslant 0$$

— плотность распределения вероятностей огибающей только шума $\xi(t)$. Подставляя $p_1(U \mid \lambda_i)$ в (15.99), находим

$$P_{\text{АМ}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{H_0}{\sigma_\xi}\right)^2\right] - Q\left(\frac{A_m}{\sigma_\xi}, \frac{H_0}{\sigma_\xi}\right)\right\}. \quad (15.100)$$

Взяв производную по H_0 от выражения (15.100) и приравняв ее нулю, получим уравнение, связывающее оптимальный порог H_0 с отношением сигнал/шум A_m/σ_ξ:

$$I_0\left(\frac{H_0 A_m}{\sigma_\xi^2}\right) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_m}{\sigma_\xi}\right)^2\right].$$

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

15.1. На вход приемного устройства, оптимального по критерию идеального наблюдателя, воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda)\, s_2(t) + \xi(t), \quad (15.101)$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau);$$

$$s_1(t) = A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$s_2(t) = 0,$$

— детерминированные амплитудно-манипулированные сигналы. Параметр λ принимает значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$.

Вычислить суммарную вероятность ошибочного приема сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Ответ: $P_{\text{АМ}} = 1 - \Phi\sqrt{q/4}$, $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx$,

$$q = A_m^2 T/N_0 = 2E_1/N_0.$$

График функции $P_{\text{АМ}} = f(q)$ приведен на рис. 15.9.

15.2. Решить задачу 15.1 для случая оптимального приема детерминированных частотно-манипулированных сигналов

$$s_1(t) = A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$
$$s_2(t) = A_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при условии, что $|\omega_1 - \omega_2| T \gg 1$.

Ответ: $P_{\text{ЧМ}} = 1 - \Phi(\sqrt{q/2})$, $q = A_m^2 T/N_0 = 2E/N_0$.
График функции $P_{\text{ЧМ}} = f(q)$ приведен на рис. 15.9.

15.3. Решить задачу 15.1 для случая оптимального приема фазоманипулированных сигналов

$$s_1(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$
$$s_2(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ: $P_{\text{ФМ}} = 1 - \Phi(\sqrt{q})$.
График функции $P_{\text{ФМ}} = f(q)$ дан на рис. 15.9.

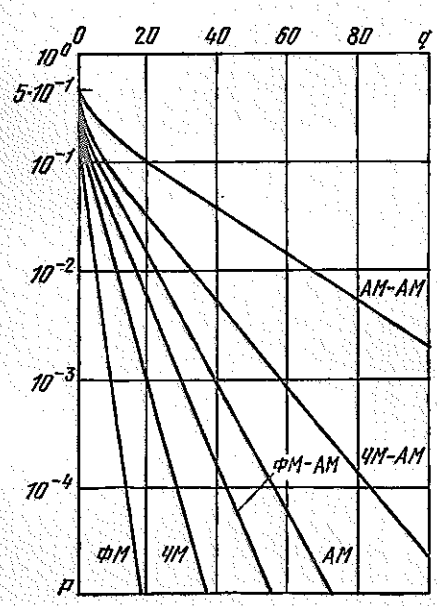


Рис. 15.9. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при оптимальном различении детерминированных сигналов

15.4. На вход оптимального по критерию Котельникова—Зигерта приемника воздействует колебание (15.101), где $s_i(t)$ — детерминированные тонально-манипулированные сигналы вида АМ-АМ:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m[1 + m_1 \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m[1 + m_2 \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Вычислить суммарную вероятность ошибочного приема таких сигналов на фоне белого шума при условии равенства априорных вероятностей сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Предполагается, что период тональных колебаний $T_\Omega = 2\pi/\Omega \ll T$ и $\Omega \ll \omega_0$.

Ответ: $P_{\text{АМ-АМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{q}{4}\frac{(m_1-m_2)^2}{2+m_1^2}}\right)$.

Значения $P_{\text{АМ-АМ}} = f(q)$ для $m_1 = 1$ и $m_2 = 0$ приведены на рис. 15.9.

15.5. Решить задачу 15.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ-АМ:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m[1 + m \cos \Omega_1 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m[1 + m \cos \Omega_2 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предполагается, что тональные частоты $\Omega_i \ll \omega_0$ и, кроме того, период тональных колебаний $T_{\Omega_i} = 2\pi/\Omega_i$ много меньше длительности T сигналов $s_i(t)$.

Ответ [104]: $P_{\text{ЧМ-АМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{q}{2}\frac{m^2}{2+m^2}}\right)$.

Значения $P_{\text{ЧМ-АМ}} = f(q)$ при $m = 1$ приведены на рис. 15.9.

15.6. Решить задачу 15.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ФМ-АМ:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m[1 + m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m[1 - m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ [104]: $P_{\text{ФМ-АМ}} = 1 - \Phi\sqrt{q\frac{m^2}{2+m^2}}$.

Значения $P_{\text{ФМ-АМ}} = f(q)$ для $m = 1$ приведены на рис. 15.9.

15.7. Определить суммарную вероятность ошибки при оптимальном по критерию идеального наблюдателя приеме на фоне белого шума детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида АМ-ЧМ:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos[\omega_0 t + \beta_1 \cos \Omega t + \varphi_1], \\ s_2(t) &= A_m \cos[\omega_0 t + \beta_2 \cos \Omega t + \varphi_2], \end{aligned} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ: $P_{\text{АМ-ЧМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q[1 - J_0(\beta_2 - \beta_1)]/2}\right)$,

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

15.8. Решить задачу 15.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ-ЧМ:

$$s_1(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \beta \cos \Omega_1 t + \varphi_1], \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$s_2(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \beta \cos \Omega_2 t + \varphi_2],$$

Ответ [104]: $P_{\text{чм-чм}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q[1 - J_0^2(\beta)]/2}\right)$.

15.9. Решить задачу 15.4 для случая приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ФМ-ЧМ:

$$s_1(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \beta \cos \Omega t + \varphi_1], \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$
$$s_2(t) = A_m \cos[\omega_0 t - \beta \cos \omega t + \varphi_2],$$

Ответ [104]: $P_{\text{фм-чм}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q[1 - J_0(2\beta)]/2}\right)$.

15.10. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t, \varphi_1) + (1 - \lambda) s_2(t, \varphi_2) + \xi(t), \qquad (15.102)$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau);$$
$$s_1(t, \varphi_1) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$s_2(t, \varphi_2) = 0,$$

— амплитудно-манипулированные сигналы. Начальная фаза φ_1 сигнала $s_1(t, \varphi_1)$ является случайной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, и считается несущественным параметром. Предполагается, что входящий в (15.102) параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с равными априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$.

Определить структуру оптимального по критерию Котельникова—Зигерта приемника амплитудно-манипулированных сигналов с неизвестными начальными фазами и вычислить суммарную вероятность ошибочного приема.

Ответ: Оптимальный приемник должен состоять из согласованного фильтра с импульсной переходной функцией $h(t) = s_1(T - t)$, линейного детектора огибающей и порогового устройства с порогом h_0, определяемым соотношением

$$I_0\left(h_0\sqrt{q}\right) = e^{-q/2}, \quad q = 2E_1/N_0.$$

Суммарная вероятность ошибочного приема амплитудно-манипулированных сигналов при этом вычисляется по формуле

$$P_{\text{АМ}} = \left[1 + e^{-h_0^2/2} - Q\left(\sqrt{q}, h_0\right)\right]/2.$$

Значения $P_{\text{АМ}} = f(q)$ приведены на рис. 15.10.

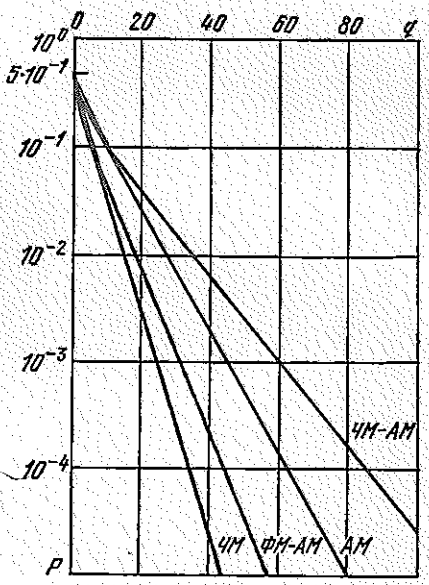


Рис. 15.10. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при оптимальном различении сигналов со случайной начальной фазой

15.11. Вычислить суммарную вероятность ошибок при оптимальном по критерию идеального наблюдателя приеме априори равновероятных частотно-манипулированных сигналов

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

на фоне стационарного гауссовского белого шума $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau).$$

Случайные начальные фазы φ_1 и φ_2 сигналов $s_1(t, \varphi_1)$ и $s_2(t, \varphi_2)$ равномерно распределены на интервале $(-\pi, \pi)$ и считаются несущественными параметрами. Предполагается, что $|\omega_1 - \omega_2| T \gg 1$.

Ответ: $P_{\text{ЧМ}} = (1/2)\,e^{-q/4}$.

Значения $P_{\text{ЧМ}} = f(q)$ приведены на рис. 15.10.

15.12. Решить задачу 15.11 для случая оптимального приема тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ-АМ:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_1 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_2 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

начальные фазы которых случайны и равномерно распределены на интервале $(-\pi, \pi)$. Предполагается, что $\Omega_i \ll \omega_0$ и $T_{\Omega_i} = 2\pi/\Omega_i \ll T$.

Ответ:

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(v, u) - \frac{1}{2} e^{-q/4} I_0\left(\frac{q}{2}\frac{1}{2+m^2}\right),$$

где

$$v = \sqrt{\frac{q}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2m^2+m^4}}{2+m^2}\right)}, \quad u = \sqrt{\frac{q}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2m^2+m^4}}{2+m^2}\right)}.$$

Значения $P_{\text{ЧМ-АМ}} = f(q)$ для $m = 1$ приведены на рис. 15.10.

15.13. Решить задачу 15.12 для случая оптимального приема тонально-манипулированных сигналов вида ФМ-АМ:

$$s_1(t) = A_m [1 + m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$
$$s_2(t) = A_m [1 - m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ:

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = Q(v, u) - \frac{1}{2} e^{-q/4} I_0\left(\frac{q}{4}\frac{2-m^2}{2+m^2}\right),$$

где

$$v = \sqrt{\frac{q}{4}\frac{(\sqrt{2}-m)^2}{2+m^2}}, \quad u = \sqrt{\frac{q}{4}\frac{(\sqrt{2}+m)^2}{2+m^2}}.$$

График функции $P_{\text{ФМ-АМ}} = f(q)$ для $m = 1$ приведен на рис. 5.10.

15.14. На вход приемного устройства поступает колебание

$$\tilde{x}(t) = \lambda \tilde{u}_1(t) + (1 - \lambda)\tilde{u}_2(t) + \tilde{\xi}(t),$$

где $\tilde{\xi}(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $\tilde{m}_{\tilde{\xi}} = 0$ и корреляционной функцией

$$\tilde{R}_{\tilde{\xi}}(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau);$$

$$\tilde{u}_1(t) = ae^{-j\theta} s_1(t) = aA_m \exp[j(\omega_0 t - \theta)], \quad \tilde{u}_2(t) = 0,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

— медленно федингующие амплитудно-манипулированные сигналы. Здесь a — амплитудный множитель, принимающий на интервалах $(0, T)$ случайные значения с плотностью распределения вероятностей

$$p_1(a) = \frac{a}{\sigma_\Phi^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\sigma_\Phi^2} + \gamma^2\right)\right] I_0\left(\gamma \frac{a}{\sigma_\Phi}\right), \quad 0 \leqslant a < \infty,$$

где $\gamma = \alpha/\sigma_\Phi$ характеризует ссотношение между детерминированной и случайной составляющими сигнала $\tilde{u}_1(t)$ (см. пример 15.6). Начальная фаза θ сигнала $\tilde{u}_1(t)$ является случайной равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$ и считается несущественным параметром. Параметр λ принимает значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\tilde{u}_1) = p(\lambda_0) = p(\tilde{u}_2) = 1/2$.

Определить схему приемника, осуществляющего оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку колебания $x(t)$, и вычислить соответствующую ей суммарную вероятность ошибочного приема.

Ответ: Оптимальный приемник должен состоять из согласованного фильтра с импульсной характеристикой $\widetilde{h}(t) = \widetilde{s}_1(T-t)$, линейного детектора огибающей и порогового устройства с порогом h_0, определяемым из уравнения

$$\frac{2}{2+\bar{q}} I_0\left(\gamma h_0 \frac{\sqrt{2\bar{q}}}{2+\bar{q}}\right) \exp\left(\frac{1}{2} h_0^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}\right).$$

При этом вероятность ошибочного приема вычисляется по формуле

$$P_{\text{АМ}} = \frac{1}{2}\left[1 + \exp\left(-\frac{1}{2} h_0^2\right) - Q\left(\gamma\sqrt{\frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}},\ h_0\sqrt{\frac{2}{2+\bar{q}}}\right)\right].$$

Для частного случая приема амплитудно-манипулированных сигналов, федингующих по закону Релея ($\gamma = 0$), имеем

$$P_{\text{АМ}} = \frac{1}{2}\left[1 + \exp\left(-\frac{1}{2} h_0^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} h_0^2 \frac{2}{2+\bar{q}}\right)\right],$$

где h_0 определяется из уравнения

$$\exp\left(-\frac{1}{2} h_0^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}\right) = \frac{2}{2+\bar{q}}.$$

Здесь

$$\bar{q} = 2\sigma_\Phi^2 q_1 = 2\sigma_\Phi^2 \cdot 2E_1/N_0 = 2\sigma_\Phi^2 A_m^2 T/N_0.$$

Графики функций $P_{\text{АМ}} = f_1(\bar{q}, \gamma)$ и $h_0 = f_2(\bar{q}, \gamma)$ приведены соответственно на рис. 15.11 и 15.12. Через $\bar{q}$ обозначено отношение сигнал/шум, равное отношению удвоенного среднего значения $\bar{E}_1 = M\{E_{\widetilde{u}_1}\}$ энергии сигнала $\widetilde{u}_1(t)$ к спектральной плотности шума $\widetilde{\xi}(t)$:

$$\bar{q} = 2\bar{E}_1/N_0 = \bar{q}(1 + \gamma^2/2).$$

15.14. На вход приемного устройства поступает колебание

$$\widetilde{x}(t) = \lambda\widetilde{u}_1(t) + (1-\lambda)\widetilde{u}_2(t) + \widetilde{\xi}(t),$$

где $\widetilde{\xi}(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $\widetilde{m}_{\widetilde{\xi}} = 0$ и корреляционной функцией

$$\widetilde{R}_{\widetilde{\xi}}(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau);$$

$$\widetilde{u}_1(t) = aA_m \exp[j(\omega_1 t - \theta)], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\widetilde{u}_2(t) = aA_m \exp[j(\omega_2 t - \theta)],$$

— медленно федингующие частотно-манипулированные сигналы.

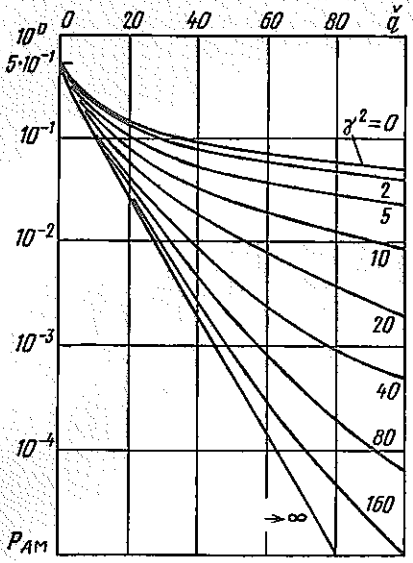
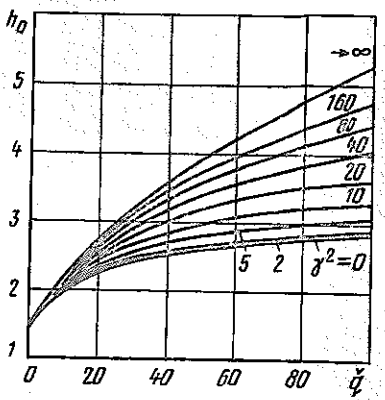


Рис. 15.11. Суммарная вероятность ошибочного приема АМ сигналов со случайными амплитудой и начальной фазой

Рис. 15.12. Зависимость оптимального порога от отношения сигнал/шум при приеме АМ сигналов со случайными амплитудой и начальной фазой



Здесь a и θ — амплитудный множитель и фазовый сдвиг, принимающие на интервалах $(0, T)$ случайные значения с совместной плотностью распределения вероятностей (см. пример 15.6)

$$p_2(a,\theta)=\begin{cases}\dfrac{a}{2\pi\sigma_\Phi^2}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{\sigma_\Phi^2}+\gamma^2-\dfrac{2a\gamma\cos\theta}{\sigma_\Phi}\right)\right], & 0\leqslant a<\infty,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ 0 & \text{при других } a \text{ и } \theta.\end{cases}$$

Параметр λ принимает значения $\lambda=\lambda_1=1$ или $\lambda=\lambda_0=0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1)=p(\lambda_0)=1/2$.

Приемное устройство осуществляет оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку принимаемого колебания $\tilde{x}(t)$. Вычислить соответствующую ей суммарную вероятность ошибочного приема для случаев априори известного среднего значения $m_\theta=M\{\theta\}$ фазового сдвига θ (квазикогерентный прием) и неизвестного среднего значения m_θ (некогерентный прием) при условии $|\omega_1-\omega_2|T\gg 1$.

Ответ: $$P_{\text{чм}}=Q(ac, bc)-\frac{2+\bar{q}}{4+\bar{q}}\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2\right]I_0(abc^2),$$

где для квазикогерентного приема

$$a=\frac{4}{4+\bar{q}},\quad b=\frac{2(2+\bar{q})}{4+\bar{q}},\quad c=\gamma\sqrt{\frac{4+\bar{q}}{4\bar{q}}},$$

а для некогерентного приема

$$a = 0,\ b = \sqrt{2},\ c = \gamma\sqrt{\bar{q}/2\ (4 + \bar{q})}.$$

Графики функции $P_{\text{чм}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного приема медленно федингующих частотно-манипулированных сигналов приведены на рис. 15.13, *а* и *б*.

15.16. Решить задачу 15.15 для случая оптимального приема медленно федингующих фазоманипулированных сигналов

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= aA_m \exp[j(\omega_0 t - \theta)], \\ \tilde{u}_2(t) &= aA_m \exp[j(\omega_0 t + \pi - \theta)], \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ: При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{фм}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\gamma^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}}\right),$$

при некогерентном приеме $P_{\text{фм}} = 1/2$.

График функции $P_{\text{фм}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случая квазикогерентного приема приведен на рис. 15.14.

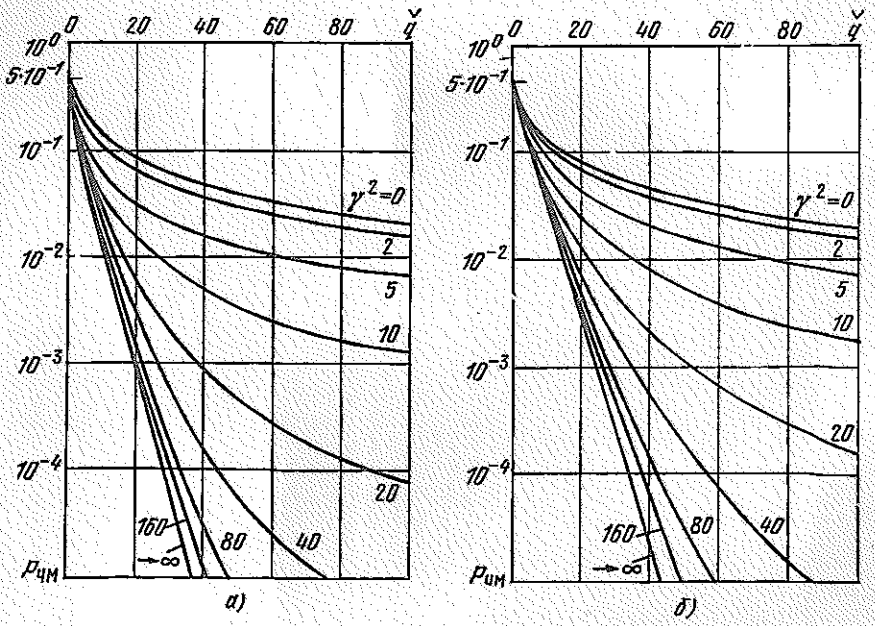


Рис. 15.13. Зависимость суммарной вероятности ошибок от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (*а*) и некогерентном (*б*) приеме медленно федингующих ЧМ сигналов

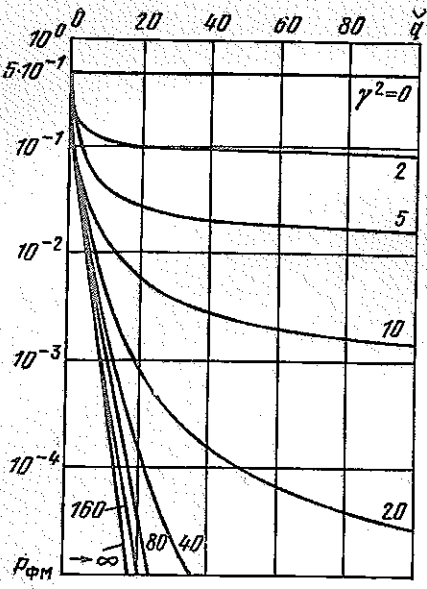


Рис. 15.14. Зависимость суммарно вероятности ошибок от отношени сигнал/шум при квазикогерентно приеме медленно фединтующих Ф сигналов

15.17. Решить задачу 15.15 для случая оптимального приема медленно фединтующих тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ-АМ

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_1(t) &= aA_m[1+\cos\Omega_1 t]\exp[j(\omega_0 t-\theta)],\\ \widetilde{u}_2(t) &= aA_m[1+\cos\Omega_2 t]\exp[j(\omega_0 t-\theta)],\end{aligned}\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

при условии $\Omega_i \ll \omega_0$, $T\Omega_i = 2\pi/\Omega_i \ll T$.

Ответ: При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2}\,b\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2\right]I_0(abc^2),$$

где

$$a = 1-\frac{\sqrt{5}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}};\quad b = 1+\frac{\sqrt{5}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}};$$

$$c = \gamma\sqrt{\frac{1}{4\bar{q}}\left(\bar{q}+\frac{12}{5}\right)};$$

при некогерентном приеме

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{5}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}}\right]e^{-c^2}I_0(abc^2),$$

где

$$a=\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}\sqrt{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}}{9(4+\bar{q})-4\bar{q}}};\quad b=\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}\sqrt{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}}{9(4+\bar{q})-4\bar{q}}};$$

$$c=\gamma\sqrt{\frac{1}{2}\,\bar{q}\,\frac{9(4+\bar{q})-4\bar{q}}{9(4+\bar{q})^2-4\bar{q}^2}}.$$

Графики функций $P_{\text{ЧМ-АМ}}=f(\bar{q},\gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного медленно федингующих тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ-АМ приведены на рис. 15.15, *а* и *б*.

15.18. Решить задачу 15.17 для случая оптимального приема медленно федингующихся тонально-манипулированных сигналов вида ФМ-АМ:

$$\tilde{u}_1(t)=aA_m\,[1+\cos\Omega t]\exp[j(\omega_0 t-\theta)],$$
$$\tilde{u}_2(t)=aA_m\,[1-\cos\Omega t]\exp[j(\omega_0 t-\theta)],\qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Ответ: При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{ФМ-АМ}}=Q(ac,\,bc)-\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\,c^2\right]I_0(abc^2),$$

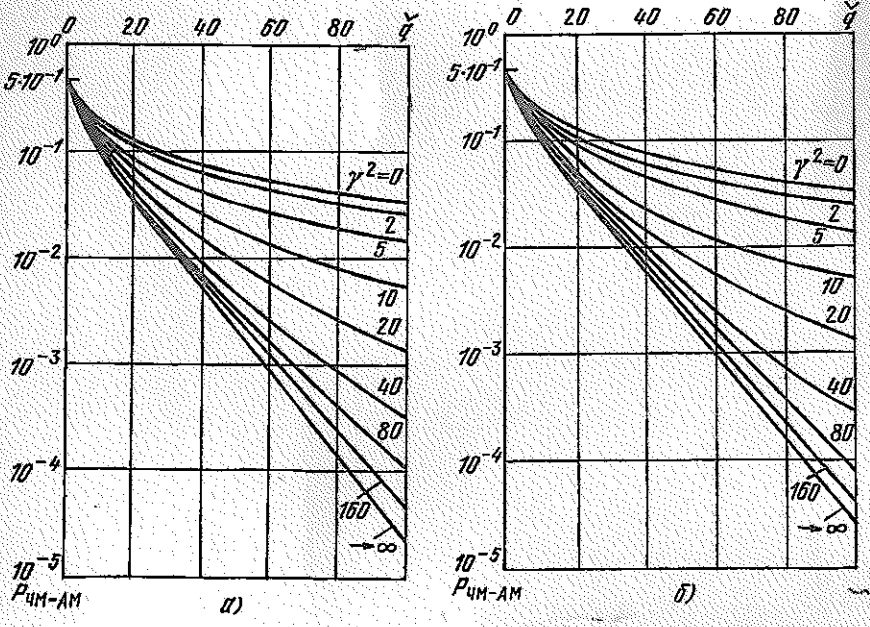


Рис. 15.15. Зависимость суммарной вероятности ошибок от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (*а*) и некогерентном (*б*) приеме медленно федингующих ЧМ-АМ сигналов

где

$$a = 1 - \frac{2\sqrt{2}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}; \quad b = 1 + \frac{2\sqrt{2}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}};$$

$$c = \gamma \sqrt{\frac{1}{4\bar{q}}(3+\bar{q})};$$

при некогерентном приеме

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2\sqrt{2}\,\bar{q}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}\right] e^{-c^2} I_0(abc^2),$$

где

$$a = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}}; \quad b = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}};$$

$$c = \gamma \sqrt{\frac{1}{2} q \frac{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}}.$$

Графики функций $P_{\text{ФМ-АМ}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного приема приведены на рис. 15.16, *а* и *б*.

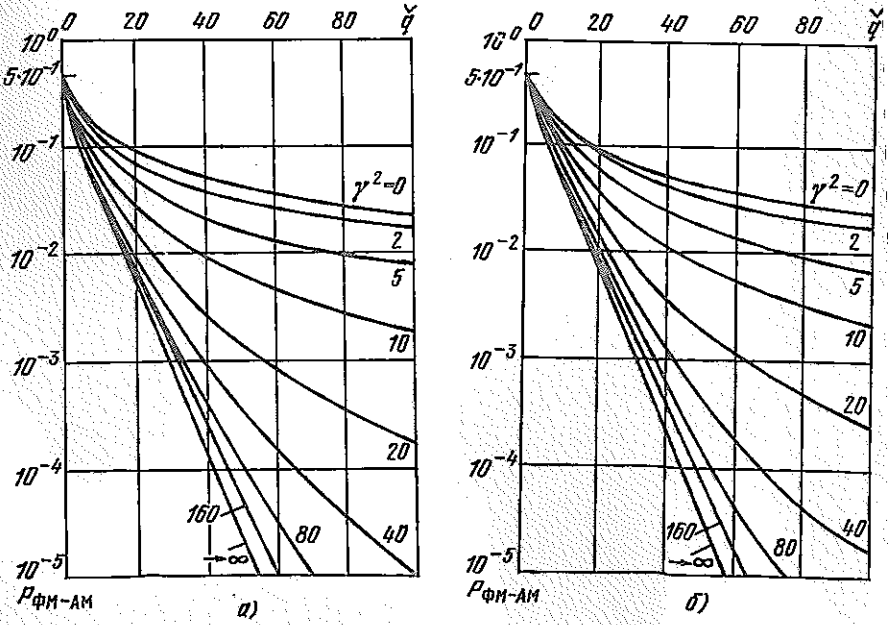


Рис. 15.16. Зависимость суммарной вероятности ошибок от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (*а*) и некогерентном (*б*) приеме медленно федингующих ФМ-АМ сигналов

15.19. На вход приемного устройства поступает колебание

$$x(t) = s(t) + \xi(t),$$

где

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i(t)$$

— один из m возможных сигналов $s_1(t)$, ..., $s_m(t)$, причем если $\lambda_i = 1$, то все остальные $\lambda_j = 0$ $(j \neq i)$. Предполагается, что априорные вероятности $p(s_i)$ присутствия сигналов $s_i(t)$ в реализации $x(t)$ априори известны и равны:

$$p(s_1) = p(s_2) = \ldots = p(s_m) = 1/m,$$

а сами сигналы $s_i(t)$ полностью определены на интервале $(0, T)$ и равны нулю вне этого интервала, имеют равные энергии $E_i = E$ и ортогональны:

$$\int_0^T s_i(t)\, s_j(t)\, dt = \begin{cases} E, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Аддитивная помеха $\xi(t)$ представляет собой стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\, \delta(\tau).$$

Определить структурную схему приемника, осуществляющего оптимальное по критерию идеального наблюдателя различение m-ичных сигналов $s_i(t)$, и вычислить соответствующую ему суммарную вероятность P ошибочного приема.

Ответ: Приемник должен сформировать величины

$$U_i = \int_0^T x(t)\, s_i(t)\, dt$$

и осуществить их сравнение. Решение $\lambda_i = 1$ принимается, если $U_i = U_{max}$ (рис. 15.17). При этом суммарная вероятность ошибочного приема

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \left[\Phi\left(z + \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right]^{m-1} dz.$$

15.20. Решить задачу 15.19 для случая приема m-ичных детерминированных сигналов $s_i(t)$ на фоне аддитивной гауссовской стационарной помехи $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$.

Ответ: Оптимальный приемник для различения m-ичных сигналов на фоне коррелированного шума должен сформировать случайные величины

$$U_i = \int_0^T x(t)\, \vartheta_i(t)\, dt,$$

где $\vartheta_i(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$\int_0^T R_\xi(\lambda - t)\,\vartheta_i(\lambda)\,d\lambda = s_i(t),$$

и осуществить их сравнение. Решение $\lambda_i = 1$ принимается, если $U_i = U_{max}$. При этом суммарная вероятность ошибочного приема

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} [\Phi(z + \sigma_0)]^{m-1}\,dz,$$

где $\sigma_0^2 = \int_0^T \vartheta_i'(t)\,s_i(t)\,dt$.

15.21. На выходе УПЧ синхронного приемника (рис. 15.18) имеет место колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda)\,s_2(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — квазигармонический гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2\,\rho_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau;$$

$$s_1(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$s_2(t) = 0,$$

— детерминированные амплитудно-манипулированные сигналы.

На второй вход синхронного детектора подается колебание от местного гетеродина $u_г(t) = U_г \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$. Если напряжение $U(t)$ на выходе синхронного детектора превышает некоторый порог H_0, принимается решение о приеме сигнала $s_1(t)$ ($\lambda = 1$), в противном случае принимается решение о приеме сигнала $s_2(t)$ ($\lambda = 0$). Априорные вероятности $p(s_i)$ присутствия на входе приемника сигналов $s_i(t)$ равны между собой: $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$.

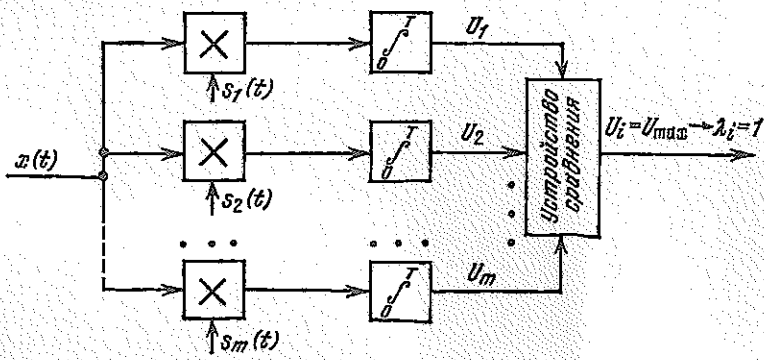


Рис. 15.17. Оптимальный приемник m-ичных сигналов

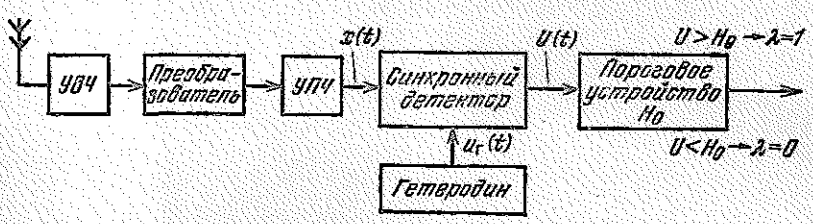


Рис. 15.18. Синхронный приемник

Определить суммарную вероятность ошибочного приема при условии, что порог H_0 выбран оптимальным по критерию идеального наблюдателя.

Ответ: $P = 1 - \Phi(A_m/2\sigma_\xi)$, $H_0 = A_m/2$.

15.22. Решить задачу 15.21 для случая приема фазоманипулированных сигналов

$$\left.\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \pi), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ответ: $P = 1 - \Phi(A_m/\sigma_\xi)$, $H_0 = 0$.

15.23. На выходе УПЧ приемника, схема которого представлена на рис. 15.8, имеет место колебание

$$x(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — квазигармонический гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$\left.\begin{aligned} R_\xi(\tau) &= \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau; \\ u_1(t) &= U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \\ u_2(t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

— амплитудно-манипулированные сигналы.

Сигнал $u_1(t)$ представляет собой отрезок квазигармонических флуктуаций, огибающая которых распределена по закону Релея:

$$p_1(U) = (U/\sigma_c^2) \exp(-U^2/\sigma_c^2), \quad U \geqslant 0,$$

а случайная начальная фаза — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$. Параметр λ принимает значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$. Если процесс $U(t)$ на выходе линейного детектора огибающей превышает некоторый порог H_0, принимается решение $\lambda = 1$, в противном случае принимается $\lambda = 0$.

Определить суммарную вероятность ошибок при условии, что порог H_0 выбран оптимальным по критерию идеального наблюдателя.

Ответ:

$$P=\frac{1}{2}\left\{1+\exp\left(-\frac{H_0^2}{2\sigma_\xi^2}\right)-\exp\left[-\frac{H_0^2}{2(\sigma_c^2+\sigma_\xi^2)}\right]\right\},$$

где

$$H_0=\frac{\sigma_\xi}{\sigma_c}\sqrt{2(\sigma_c^2+\sigma_\xi^2)\ln\frac{\sigma_c^2+\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2}}.$$

15.24. Найти структурную схему приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию Неймана—Пирсона обработку колебания

$$x(t)=\lambda s(t)+\xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi=0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|};$$

$s(t)$ — детерминированный сигнал, определенный на интервале $(0, T)$ и равный нулю вне его.

Ответ [96]: Оптимальный приемник должен сформировать величину

$$U=\frac{\alpha}{2\sigma_\xi^2}\int_0^T\left[x(t)s(t)+\frac{1}{\alpha^2}\dot{x}(t)\dot{s}(t)\right]dt+\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[x(0)s(0)+x(T)s(T)]$$

и сравнить ее с порогом h_0, определяемым заданной вероятностью ложной тревоги

$$P_{F_1}=1-\Phi(h_0/\sigma_0),$$

где

$$\sigma_0^2=\frac{\alpha}{2\sigma_\xi^2}\int_0^T\left[s^2(t)+\frac{1}{\alpha}\dot{s}^2(t)\right]dt+\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[s^2(0)+s^2(T)].$$

Если $U>h_0$, принимается решение $\lambda=\lambda_1=1$, в противном случае принимается $\lambda=\lambda_0=0$. Вероятность правильного обнаружения вычисляется по формуле

$$P_{D_1}=1-\Phi\left(\frac{h_0}{\sigma_0}-\sigma_0\right).$$

15.25. Решить задачу 15.24 для случая, когда корреляционная функция шума имеет вид

$$R_\xi(t_1, t_2)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|}\left[\cos\omega_1(t_2-t_1)+\frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|t_2-t_1|\right].$$

Ответ [96]: Оптимальный приемник должен сформировать величину

$$U = \frac{1}{2\alpha_0 \omega_0^2 \sigma_\xi^2} \int_0^T \left[\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)\right] \times$$

$$\times \left[\ddot{s}(t) + \alpha \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t)\right] dt + \frac{x(0)\, s(0)}{\sigma_\xi^2} + \frac{\dot{x}(0)\, \dot{s}(0)}{\omega_0^2 \sigma_\xi^2},$$

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \alpha^2, \quad \alpha_0 = 2\alpha,$$

и сравнить ее с порогом h_0, определяемым заданной вероятностью ложной тревоги

$$P_{F_1} = 1 - \Phi(h_0/\sigma_0),$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2\alpha_0 \omega_0^2 \sigma_\xi^2} \int_0^T \left[\ddot{s}(t) + \alpha \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t)\right] dt + \frac{s^2(0)}{\sigma_\xi^2} + \frac{\dot{s}^2(0)}{\omega_0^2 \sigma_\xi^2}.$$

При $U > h_0$ принимается $\lambda = \lambda_1 = 1$, в противном случае принимается $\lambda = \lambda_0 = 0$. Вероятность правильного обнаружения вычисляется по формуле

$$P_{D_1} = 1 - \Phi(h_0/\sigma_0 - \sigma_0).$$

15.26. На вход оптимального по критерию Неймана—Пирсона приемника поступает колебание $x(t) = \lambda u(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) = (N_0/2)\, \delta(\tau);$$

$$u(t) = aA_m \cos(\omega_0 t + \theta), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

— медленно флуктуирующий сигнал. Здесь A_m и ω_0 — постоянные величины, θ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$, a — амплитудный множитель, принимающий на интервале $(0, T)$ случайные значения с плотностью распределения вероятностей

$$p_1(a) = (a/\sigma_\Phi^2) \exp(-a^2/2\sigma_\Phi^2), \quad 0 \leqslant a < \infty.$$

Вычислить вероятность ложной тревоги и правильного обнаружения.

Ответ:

$$P_{F_1} = \exp\left(-\frac{1}{2} h_0^2\right); \quad P_{D_1} = \exp\left(-\frac{1}{2+\bar{q}} h_0^2\right), \quad \bar{q} = 2\sigma_\Phi^2 q,$$

$$q = \frac{2E}{N_0} = \frac{A_m^2 T}{N_0}.$$

График функции $P_{D_1} = f(q)$ приведен на рис. 15.4 (штрих-пунктирные линии).

16. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть на некотором временном интервале $(0, T)$ имеется реализация $\eta(t)$ суммы полезного сигнала $s(t_1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, зависящего от нескольких параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, и гауссовского стационарного шума $\xi(t)$:

$$\eta(t) = s(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots) + \xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16.1}$$

Предполагаются известными следующие сведения: 1) гауссовский стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и известную корреляционную функцию:

$$M\{\xi(t)\} = 0, \quad M\{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\} = R(t_2 - t_1); \tag{16.2}$$

2) вид сигнала $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ задан и он полностью расположен внутри интервала наблюдения $(0, T)$, так что значения сигнала и его производных на концах этого интервала равны нулю; 3) до наблюдений ориентировочно известны априорные плотности вероятности параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Для интересующих нас параметров в дальнейшем они полагаются равномерными в некотором интервале значений.

Путем обработки принятого колебания $\eta(t)$ нужно найти предельную точность оценки одного или нескольких параметров λ_i.

Обработка принятой реализации может осуществляться в дискретном или непрерывном времени. В первом случае обычно используются равноотстоящие отсчеты реализации $\eta_1 = \eta(\Delta)$, $\eta_2 = \eta(2\Delta)$, ..., $\eta_m = \eta(T/m)$, называемые в совокупности выборкой объема m; во втором случае используется вся реализация $\eta(t)$ на интервале $(0, T)$.

Пусть истинное значение параметра λ_i постоянно и равно λ_{i0}, а его оценка по принятой реализации есть $\hat{\lambda}_i$. Оценка $\hat{\lambda}_i$ из-за наличия шума будет случайной величиной, изменяющейся от одной реализации к другой.

В качестве определяющих можно взять разные характеристики случайной величины $\hat{\lambda}_i$. В зависимости от этого рассматривают точечные и интервальные оценки. При точечных оценках интересуются главным образом математическим ожиданием и дисперсией случайной величины $\hat{\lambda}_i$. Интервальная оценка сводится к вычислению интервала, в котором с заданной вероятностью заключено значение оцениваемого параметра. В дальнейшем рассматриваются только точечные оценки.

Оценка $\hat{\lambda}_i$ называется несмещенной, если $M\{\hat{\lambda}_i\} = \lambda_{i0}$; в противном случае $(M\{\hat{\lambda}_i\} \neq \lambda_{i0})$ оценка называется смещенной. Разность $\Delta\lambda = M\{\hat{\lambda}_i\} - \lambda_{i0}$ называется смещением или систематической ошибкой оценки. Несмещенная оценка, имеющая наименьшую возможную дисперсию

$$D_{\hat{\lambda}_i} = \min M\left\{\left(\hat{\lambda}_i - \lambda_{i0}\right)^2\right\}, \tag{16.3}$$

называется эффективной. Конечно, всегда желательно получить эффективную оценку.

В том случае, когда полезный сигнал $s(t, \lambda)$ зависит от одного оцениваемого параметра λ и его оценка производится по выборке $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\}$ объема m, можно доказать, что дисперсия несмещенной оценки имеет нижнюю границу, определяемую следующим неравенством Рао—Крамера:

$$D_{\hat{\lambda}} \geqslant \left\{\int \ldots \int \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln p_m(\eta_1, \ldots, \eta_m; \lambda)\right]^2 p_m(\eta_1, \ldots, \eta_m; \lambda)\, d\eta_1 \ldots d\eta_m\right\}^{-1}, \tag{16.4}$$

где $p_m(\eta_1, \ldots, \eta_m; \lambda)$ — совместная плотность вероятности выборочных значений.

Если выборочные значения $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ независимы в совокупности, правая часть неравенства (16.4), определяющая минимально возможное значение дисперсии несмещенной оценки, принимает вид [105]

$$D_{\hat{\lambda}\min} = \frac{1}{m}\left[M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}}\right\}^2\right]^{-1} = -\frac{1}{m}\left[M\left\{\frac{\partial^2 \ln p(\eta; \lambda)}{\partial \hat{\lambda}^2}\right\}\right]^{-1}, \tag{16.5}$$

где для непрерывной случайной величины η

$$M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \lambda)}{\partial \lambda}\right\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln p(\eta; \lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 p(\eta; \lambda)\, d\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial p(\eta; \lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 \frac{d\eta}{p(\eta; \lambda)}, \tag{16.6}$$

а для дискретной случайной величины

$$M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \lambda)}{\partial \lambda}\right\}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln p(\eta_i; \lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 p(\eta_i; \lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial p(\eta_i; \lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 \frac{1}{p(\eta_i; \lambda)}. \tag{16.7}$$

Когда полезный сигнал $s(t, \lambda_1, \lambda_2)$ зависит от двух параметров λ_1, λ_2 и оценка их производится по независимой выборке объема m, формулы для минимальных дисперсий оценок и нормированной корреляционной функции между оценками имеют вид

$$D_{\hat{\lambda}_1 \min} = \frac{(1-r_{12})^{-1}}{mM\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_1}\right\}^2}, \quad D_{\hat{\lambda}_2 \min} = \frac{(1-r_{12})^{-1}}{mM\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_2}\right\}^2}. \tag{16.8}$$

$$r_{12} = -\frac{M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_1}\,\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_2}\right\}}{\left[M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_1}\right\}^2 M\left\{\frac{\partial \ln p(\eta; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{\partial \hat{\lambda}_2}\right\}^2\right]^{1/2}}.$$

Для получения оценок могут применяться разные методы: метод моментов, по математическому ожиданию апостериорного распределения, по максимуму апостериорного распределения, метод максимального правдоподобия и др. [6, 106]. Наиболее часто используются метод максимальной апостериорной плотности вероятности и метод максимального правдоподобия.

По предположению, значения оцениваемых параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ постоянны на интервале наблюдения. Используя тот факт, что шум в (16.1) гауссовский, можно найти совместную плотность вероятности для выборки $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$$p(\eta_1, \ldots, \eta_m; \lambda_1, \lambda_2, \ldots) = p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\, p(\eta_1, \ldots, \eta_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots) = p(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \mid \eta_1, \ldots, \eta_m).$$

Остюда получаем формулу Байеса для условной плотности вероятности

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots | \eta_1, \ldots, \eta_m) = k p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\, p(\eta_1, \ldots, \eta_m | \lambda_1, \lambda_2, \ldots), \quad (16.9)$$

где коэффициент k определяется из условия нормировки:

$$k^{-1} = \int \ldots \int p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\, p(\eta_1, \ldots, \eta_m | \lambda_1, \lambda_2, \ldots)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots$$

При решении ряда практических задач до проведения наблюдений с большей или меньшей степенью достоверности бывает ориентировочно известна плотность вероятности оцениваемых параметров $p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, которую называют априорной (доопытной). Условная плотность вероятности $p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots | \eta_1, \ldots, \eta_m)$ называется апостериорной (послеопытной) плотностью вероятности параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ При данной выборке она дает полные сведения об интересующих нас параметрах.

Условная плотность вероятности $p(\eta_1, \ldots, \eta_m | \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, рассматриваемая как функция параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, называется функцией правдоподобия. При извлеченной выборке (без учета априорного распределения $p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ она показывает, насколько одни возможные значения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ более правдоподобны, чем другие.

В методе максимальной апостериорной плотности вероятности в качестве оценок $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots$ параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ берутся те значения, при которых для данной выборки $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ апостериорная плотность вероятности имеет абсолютный максимум. Эти значения являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_i} p(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_i, \ldots | \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \quad (16.10)$$

Эти решения должны явным образом зависеть от результатов выборки и обеспечивать получение абсолютного максимума апостериорной плотности вероятности.

Так как логарифм — однозначная и монотонно возрастающая функция аргумента, то результат максимизации апостериорной плотности вероятности и логарифма от нее совпадают. Поэтому вместо уравнения (16.10) можно искать соответствующие корни уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_i} \ln p(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_i, \ldots, | \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \quad (16.11)$$

Во многих практических случаях априорная плотность вероятности $p_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ оказывается неизвестной и ее полагают равномерно распределенной (например, прямоугольной или нормальной с большой дисперсией) на интервале возможных значений параметров. При этом координаты максимума апостериорной плотности вероятности будут совпадать с соответствующими координатами функции правдоподобия, которые определяются путем решения системы уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_i} L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_i, \ldots) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \ldots$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_i} \ln L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_i, \ldots) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad (16.12)$$

где

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = p(\eta_1, \ldots, \eta_m | \lambda_1, \lambda_2, \ldots). \quad (16.13)$$

Решения должны явным образом зависеть от результатов выборки и обеспечивать получение абсолютного максимума функции правдоподобия (или ее логарифма).

В большинстве радиотехнических задач, связанных с оценкой параметров, преимущественно используется метод максимального правдоподобия. Это объясняется рядом достоинств оценок, получаемых этим методом, а также сравнительной простотой вычислений и практической реализации соответствующих алгоритмов в виде измерительных устройств [107, 108]. В частности, при оценке одного параметра получаемая оценка оказывается асимптотически (при очень большом объеме выборки) эффективной. Перечислим теперь исходные условия, выполнение которых предполагается в дальнейшем, и затем в справочном виде приведем конечные формулы для дисперсии оценок [108] при обработке непрерывной реализации $\eta(t)$.

1. В реализациях $\eta(t)$, подлежащих обработке, отношение сигнал/шум настолько велико, что неоднозначность оценки практически исключена.

2. Рассматривается оценка лишь одного какого-либо известного параметра λ_i полезного сигнала $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Априорная плотность вероятности этого параметра λ_i принимается равномерной в некотором интервале значений. Остальные параметры сигнала считаются или все известными (так называемый полностью известный сигнал, за исключением оцениваемого параметра) или же радиосигнал $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ имеет случайную начальную фазу, равномерно распределенную в интервале $(-\pi, \pi)$ (сигнал со случайной начальной фазой). В дальнейшем рассматривается в основном случай полностью известного сигнала. Однако ряд полученных результатов остается справедливым и для радиосигналов со случайной начальной фазой.

Параметры λ_i (амплитуда, длительность импульса), от которых зависит энергия сигнала, называются энергетическими; остальные параметры (частота, время появления, фаза и др.) — неэнергетическими.

3. В дальнейшем рассматриваются три частных вида гауссовского стационарного шума $\xi(t)$:

белый шум с корреляционной функцией

$$R_0(t_2 - t_1) = N_0\delta(t_2 - t_1)/2, \tag{16.14}$$

экспоненциально-коррелированный шум

$$R_1(t_2 - t_1) = \sigma^2 \exp(-\alpha|t_2 - t_1|), \tag{16.15}$$

узкополосный шум с корреляционной функцией

$$R_2(t_2 - t_1) = \sigma^2 \exp(-\alpha|t_2 - t_1|)\left[\cos\omega_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1|t_2 - t_1|\right]. \tag{16.16}$$

При указанных трех условиях оценки неэнергетических параметров сигнала, а также его амплитуды оказываются несмещенными.

Дисперсия оценки неэнергетического параметра λ полностью известного сигнала $s(t, \lambda)$ определяется формулой [108]

$$\sigma_\lambda^2 = \left[\frac{d^2 s(\lambda)}{d\lambda^2}\right]^{-1}_{\lambda=\lambda_0}, \tag{16.17}$$

где λ_0 — истинное значение оцениваемого параметра;

$$s(\lambda) = \int_0^T s(t, \lambda_0)\, v(t, \lambda)\, dt. \tag{16.18}$$

Для гауссовских стационарных шумов с корреляционными функциями (16.14)—(16.16) функция $v(t, \lambda)$ соответственно равна

$$v_0(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} s(t, \lambda), \tag{16.19}$$

$$v_1(t, \lambda) = \frac{\alpha}{2\sigma^2}\left[s(t, \lambda) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2 s(t, \lambda)}{dt^2}\right], \tag{16.20}$$

$$v_2(t,\lambda)=\frac{1}{4\alpha\omega_0^2\sigma^2}\left[\omega_0^4 s(t,\lambda)+2(\omega_0^2-2\alpha^2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d^2 s(t,\lambda)}{dt^2}+\frac{d^4 s(t,\lambda)}{dt^4}\right],\quad \omega_0^2=\omega_1^2+\alpha^2. \tag{16.21}$$

Дисперсия оценки «амплитуды» a полностью известного сигнала вида $s(t, a)=a s_0(t)$, где $s_0(t)$ — нормализованный сигнал, равна

$$\sigma_a^2=\left[\int_0^T s_0(t)\,v'(t)\,dt\right]^{-1}. \tag{16.22}$$

Здесь функция $v'(t)$ определяется прежними формулами (16.19)—(16.21) с заменой в правых частях $s(t, \lambda)$ на $s_0(t)$.

2. ПРИМЕРЫ

16.1. Случайная величина X принимает два значения 1 и 0 с вероятностями $P\{x=1\}=\lambda$, $P\{x=0\}=1-\lambda$. Пусть в результате m испытаний исход $x=1$ осуществился k раз, а исход $x=0$ осуществился $m-k$ раз. Требуется получить оценку вероятности λ по результатам опыта.

Решение. В данном примере функция правдоподобия определяется биномиальным распределением $L(\lambda)=\lambda^k(1-\lambda)^{m-k}$. Уравнение правдоподобия принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\ln L(\hat{\lambda})=\frac{k}{\hat{\lambda}}-\frac{m-k}{1-\hat{\lambda}}=0.$$

Отсюда получаем решение $\hat{\lambda}=k/m$. Следовательно, оценкой вероятности $P\{x=1\}=\lambda$ является относительная частота k/m исхода $x=1$.

Для нахождения минимальной дисперсии оценки воспользуемся формулами (16.5) и (16.7). Так как $\partial p/\partial\lambda=1$ при $x=1$ и $\partial p/\partial\lambda=-1$ при $x=0$,

$$M\left\{\frac{\partial \ln p(x;\lambda)}{\partial\lambda}\right\}^2=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}.$$

Поэтому

$$D_{\hat{\lambda},\min}=\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})/m.$$

16.2. Некоторая нормально распределенная случайная величина λ измеряется независимо двумя неравноточными приборами, которые осуществляют измерения без систематических ошибок, но с разными дисперсиями D_1 и D_2. Нужно указать результирующую погрешность измерения случайной величины λ.

Решение. Обозначим показания первого и второго приборов соответственно через η_1 и η_2. Можем записать $\eta_1=\lambda+\xi_1$, $\eta_2=\lambda+\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_1 и D_2.

Нетрудно убедиться, что функция правдоподобия случайной величины λ определяется выражением

$$L(\lambda) = p(\eta_1, \eta_2 | \lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(\eta_1-\lambda)^2}{2D_1} - \frac{(\eta_2-\lambda)^2}{2D_2}\right].$$

Уравнение правдоподобия принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}} \ln L(\hat{\lambda}) = \frac{(\eta_1-\hat{\lambda})}{D_1} + \frac{(\eta_2-\hat{\lambda})}{D_2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\hat{\lambda} = \frac{D_2}{D_1+D_2}\eta_1 + \frac{D_1}{D_1+D_2}\eta_2.$$

По известным правилам получаем дисперсию такой оценки

$$D_{\hat{\lambda}} = D_1D_2/(D_1 + D_2).$$

16.3. Вычислить дисперсию оценки амплитуды a прямоугольного радиоимпульса

$$s(t, a) = a\cos(\omega t + \varphi_0),\ 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_и < T,\ \omega T \gg 1, \tag{16.23}$$

принимаемого на фоне гауссовского стационарного шума с корреляционной функцией (16.15).

Решение. Рассматриваемый радиоимпульс равен нулю на концах интервала наблюдения $(0, T)$. Для него функция $v'(t)$, входящая в формулу (16.22), определяется выражением (16.20) и равна

$$v'(t) = \frac{\alpha}{2\sigma^2}\left[s_0(t, \lambda) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2 s_0(t, \lambda)}{dt^2}\right] = \frac{\alpha}{2\sigma^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Подставив эту функцию $v'(t)$ в формулу (16.22) и выполнив интегрирование, при условии $\omega T \gg 1$ получим

$$\sigma_a^2 = \frac{4\sigma^2}{\alpha\tau_и\left(1+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)} = \sigma^2\left(\frac{\Delta f}{\Delta f_э}\right)\left[1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{f}{\Delta f_э}\right)^2\right]^{-1},$$

где $\Delta f_э = \alpha/4$ — эффективная ширина спектра шума; Δf — ширина основного «лепестка» спектра радиоимпульса.

16.4. Определить дисперсию оценки разности $\tau = \tau_1 - \tau_2$ временных положений двух неперекрывающихся радиоимпульсов

$$s_1(t - \tau_1) = a_1 f(t - \tau_1)\cos(\omega t + \varphi_1),$$
$$s_2(t - \tau_2) = a_2 f(t - \tau_2)\cos(\omega t + \varphi_2),$$

принятых на фоне белого шума $n(t)$ в интервале времени $(0, T)$, причем $\omega T \gg 1$. Функция $f(t - \tau_i)$ описывает огибающие радиоимпульсов.

Решение. Если обозначить через δ_1 и δ_2 соответственно случайные ошибки определения τ_1 и τ_2, то дисперсия оценки разности $\delta = \delta_1 - \delta_2$ определяется соотношением

$$D_\tau = M\{\delta^2\} = M\{\delta_1^2\} + M\{\delta_2^2\} - 2M\{\delta_1 \delta_2\} = D_{\tau_1} + D_{\tau_2} - 2\sqrt{D_{\tau_1} D_{\tau_2}}\, r_{12},$$

где D_{τ_1} и D_{τ_2} — дисперсии раздельных оценок τ_1 и τ_2; r_{12} — нормированная корреляционная функция совместной оценки τ_1 и τ_2.

Так как импульсы не перекрываются, то $r_{12} = 0$ и

$$D_\tau = D_{\tau_1} + D_{\tau_2}. \tag{16.24}$$

Слагаемые в правой части (16.24) находим по основной формуле (16.17), причем для белого шума в (16.18) нужно подставлять функцию $v(t, \tau_i)$, определенную соотношением (16.19).

Следовательно, можем написать

$$D_{\tau_i} = -\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T s_i(t-\tau_{i0})\frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2} s_i(t-\tau_i)dt\right]^{-1}_{\tau_i=\tau_{i0}}, \quad i=1,2. \tag{16.25}$$

Можно показать [108], что этот результат приводится к виду

$$D_{\tau_i} = \frac{1}{(2E_i/N_0)\beta^2}, \tag{16.26}$$

где

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t-\tau_i)\,dt \tag{16.27}$$

— энергия радиоимпульса $s_i(t-\tau_i)$,

$$\beta^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega\right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega, \tag{16.28}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt \tag{16.29}$$

— комплексный спектр огибающей $f(t)$.

Вычисления по формуле (16.28) для огибающей гауссовой формы $f(t) = \exp(-2{,}8t^2/\tau_и^2)$, где $\tau_и$ — длительность импульса на уровне 0,5 от максимального значения, приводят к следующему результату: $\beta^2 = 2{,}8/\tau_и^2$.

Применительно к гауссовым радиоимпульсам формула (16.24) при $a_1 = a_2 = a$ принимает вид

$$D_\tau = \frac{\tau_и^2}{1{,}4\,(2E/N_0)}; \quad E = \sqrt{\frac{\pi}{5{,}6}}\,\frac{A^2\tau_и}{2} = 0{,}37a^2\tau_и. \tag{16.30}$$

16.1. Имеется последовательность N независимых испытаний, в каждом из которых интересующий нас исход наступает с постоянной, но неизвестной вероятностью p. Пусть n — наблюдаемое число положительных исходов. Каково наиболее правдоподобное значение p?

Ответ: $\hat{p} = n/N$.

16.2. Оценить параметр λ в законе распределения Пуассона $p(x, \lambda) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, пользуясь выборкой, которая для случайной величины X дала значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ответ: $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $D_{\hat{\lambda}} = \dfrac{\hat{\lambda}}{n}$.

16.3. Показания $n_1, n_2, \ldots, n_N$ каждого из N счетчиков распределены по закону Пуассона. Известно, что средние значения $M\{n_i\} = \lambda t_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где λ — неизвестная интенсивность; t_i — отдельные временные интервалы счета. Найти оценку интенсивности λ.

Ответ: $\hat{\lambda} = \sum\limits_{i=1}^{N} n_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} t_i$.

16.4. Случайная величина ξ имеет нормальную плотность вероятности

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(\xi - m)^2}{2D}\right]$$

с известным математическим ожиданием m и неизвестной дисперсией D. В результате наблюдений получены n независимых значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ случайной величины ξ. Найти правдоподобное значение дисперсии D. Будет ли полученная оценка несмещенной?

Ответ: $\hat{D} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - m)^2$;

оценка несмещенная.

16.5. В тех же условиях, что и в задаче 16.4 неизвестны и подлежат оценке математическое ожидание m и дисперсия D. Смещенными или несмещенными будут оценки максимального правдоподобия?

Ответ: $\hat{m} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $\hat{D} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - m)^2$.

Оценка математического ожидания несмещенная, так как $M\{\hat{m} - m\} = 0$, а оценка дисперсии смещенная, так как $M\{\hat{D}\} = D(n - 1)/n$.

16.6. Найти дисперсию оценки амплитуды a гауссова импульса

$$s(t, a) = a \exp\left[-\frac{2,8}{\tau_и^2}(t-\tau_0)^2\right],\ 0<\tau_0<T,$$

принимаемого на фоне гауссовского стационарного шума с экспоненциальной корреляционной функцией (16.15).

Ответ: $\sigma_a^2 = \dfrac{4\sigma^2}{\sqrt{\dfrac{2\pi}{2,8}\left(\alpha\tau_и + \dfrac{2,8}{\alpha\tau_и}\right)}} = 2,67\,\dfrac{\alpha\tau_и\,\sigma^2}{2,8+(\alpha\tau_и)^2}$.

16.7. На фоне одного и того же белого шума $n(t)$ раздельно принимаются прямоугольный и гауссов радиоимпульсы

$$s_1(t,\ a) = a\cos(\omega t + \varphi_0),\ 0 < t \leqslant t+\tau_и < T,$$

$$s_2(t, a) = ae^{-\gamma(t-\tau_0)^2}\cos[\omega(t-\tau_0)+\varphi_0],\ 0<\tau_0<T.$$

Найти предельную точность измерения амплитуды a таких радиоимпульсов, считая, что они практически полностью расположены внутри интервала $(0, T)$. Сравнить результаты при равенстве энергий радиоимпульсов, т. е. при условии

$$\int_0^T s_1^2(t, a)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t, a)\,dt.$$

Ответ: $\sigma_{1a}^2 = \dfrac{N_0}{\tau_и}$, $\sigma_{2a}^2 = N_0\sqrt{\dfrac{2\gamma}{\pi}}$; $\sigma_{1a}^2 = \sigma_{2a}^2$ при $\tau_и = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\gamma}}$.

16.8. Вычислить дисперсию оценки параметра m радиосигнала $s(t, m) = a_0(1 + m\cos\Omega t)\cos(\omega t + \varphi_0)$, $0<t<T$, $\omega T \gg 1$, принимаемого на фоне белого шума $n(t)$.

Ответ: $\sigma_m^2 = \dfrac{2N_0}{a_0^2 T}\left[1 + \dfrac{\sin 2\Omega T}{2\Omega T}\right]^{-1}$.

16.9. Прямоугольный радиоимпульс (16.23) принимается на фоне узкополосного шума (16.16). Найти дисперсию оценки амплитуды a. Рассмотреть частный случай, когда $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}$.

Ответ: $\sigma_a^2 = \dfrac{8\alpha\omega_0^2\,\sigma^2}{(\omega^2-\omega_0^2)+4\alpha^2\omega^2}$; $\sigma_a^2 = \dfrac{2\sigma^2}{\alpha}$ при $\omega = \omega_0$.

16.10. На фоне белого шума $n(t)$ принимается радиосигнал

$$s(t,\ \varphi) = U(t)\cos[\omega t + \psi(t) + \varphi],$$

где $U(t)$ и $\psi(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции. Определить дисперсию оценки неизвестной начальной фазы φ.

Ответ: $\sigma_{\varphi}^2 = \dfrac{1}{(2E/N_0)}$, $E = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^T U^2(t)\,dt$, $\omega T \gg 1$.

16.11. Вычислить дисперсию оценки временного положения τ_0 гауссовского импульса

$$s(t, \tau_0) = a \exp\left[-\frac{2,8}{\tau_и^2}(t-\tau_0)^2\right]$$

при оптимальном приеме на фоне белого шума. Предполагается, что весь импульс практически находится внутри интервала наблюдения $(0, T)$.

Ответ:

$$\sigma_{\tau_0}^2 = \frac{\tau_и^2}{2,8\,(2E/N_0)}, \quad E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \tau_0)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{5,6}}\,a^2\tau_и = 0,75a^2\tau_и.$$

16.12. Решить задачу 16.11 для случая, когда прием гауссова импульса производится на фоне экспоненциально-коррелированного шума (16.15). При каком условии ответы к задачам 16.11 и 16.12 совпадают?

Ответ: $\sigma_{\tau_0}^2 = 4\sigma^2\tau_и^2/5,6\alpha E$, $N_0 = 4\sigma^2/\alpha$.

16.13. На фоне белого шума $n(t)$ принимается прямоугольный радиоимпульс

$$s(t, \Omega) = a\cos[(\omega+\Omega)t + \varphi_0], \quad 0 < t \leqslant \tau_и.$$

Найти предельную точность измерения смещения частоты Ω.

Ответ:

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{3}{\tau_и^2\,(2E/N_0)}, \quad E = \int\limits_0^T s^2(t, \Omega)\,dt = \frac{1}{2}\,a^2\tau_и, \quad \omega T \gg 1.$$

16.14. Решить задачу 16.13 для гауссова радиоимпульса

$$s(t, \Omega) = a\exp\left[-\frac{2,8}{\tau^2}(t-\tau_0)^2\right]\cos[(\omega+\Omega)(t-\tau_0)+\varphi_0], \quad 0<\tau_0<T.$$

Сравнить результаты для прямоугольного и гауссова радиоимпульсов при равенстве их энергий.

Ответ: $\sigma_{\Omega}'^2 = \dfrac{11,2}{\tau^2\,(2E/N_0)}$, $\dfrac{\sigma_{\Omega}'^2}{\sigma_{\Omega}^2} = 3,7\left(\dfrac{\tau_и}{\tau}\right)^2$.

16.15. Решить задачу 16.13 для случая, когда прямоугольный радиоимпульс принимается на фоне экспоненциально-коррелированного шума (16.15), считая возможные значения Ω много меньше ω.

Ответ: $\sigma_\Omega^2 = \dfrac{6\sigma^2}{2\alpha\tau_и^2 E\,[1+(\omega/\alpha)^2]}$.

16.16. Вычислить дисперсию оценки параметра β радиосигнала

$$s(t,\ \beta) = a\cos(\omega t + \beta\cos\Omega t + \varphi_0),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

принимаемого на фоне белого шума. Предполагается, что возможные значения β много меньше ω и $\omega T \gg 1$.

Ответ:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{2}{2E/N_0}\left[1 + \frac{\sin 2\Omega T}{2\Omega T}\right]^{-1} \simeq \frac{2}{2E/N_0},\ E = \int_0^T s^2(t,\beta)\,dt \simeq \frac{1}{2}a^2 T.$$

16.17. Определить дисперсию оценки небольшого смещения частоты Ω прямоугольного радиоимпульса

$$s(t,\ \Omega) = a\cos[(\omega+\Omega)t + \varphi_0],\ 0 < t \leqslant \tau_и,$$

принимаемого на фоне флуктуационного шума с корреляционной функцией (16.16), в которой $\omega_1 = \omega_0 \gg \alpha$. Предполагается, что допустимые значения Ω значительно меньше ω.

Ответ:

$$\sigma_\Omega^2 = \frac{12\alpha\sigma^2}{\tau_и^2 E}\left(\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^2,\ E = \int_0^{\tau_и} s^2(t,\Omega)\,dt = \frac{1}{2}a^2\tau_и,\ \omega\tau_и \gg 1.$$

Раздел V

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

17. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дискретные (цифровые) системы связи — системы, в которых как реализации сообщения, так и реализации сигнала представляют собой последовательности символов алфавита, содержащего конечное число элементарных символов [1].

Пусть x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — совокупность возможных различных независимых элементарных символов алфавита на входе системы, а y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ — совокупность символов на ее выходе; $p(x_i)$ — априорная вероятность символа x_i; $p(y_j)$ — вероятность появления символа y_j на выходе системы; $p(x_i, y_j)$ — совместная вероятность появления на выходе системы символа y_j, если на входе был символ x_i; $p(x_i \mid y_j)$ — апостериорная вероятность символа x_i; $p(y_j \mid x_i)$ — условная вероятность появления на выходе системы y_j, при условии, что на входе был символ x_i. Для этих вероятностей выполняются соотношения

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j), \quad \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = 1. \quad (17.1)$$

Тогда собственная информация символа x_i (количество информации, доставляемое самим символом x_i или любым другим однозначно с ним связанным) определяется формулой

$$I(x_i) = -\log p(x_i). \quad (17.2)$$

Другие понятия информации определяются следующими соотношениями:
— условная собственная информация символа x_i при известном y_j

$$I(x_i \mid y_j) = -\log p(x_i \mid y_j); \quad (17.3)$$

— взаимная информация двух случайных символов относительно друг друга (количество информации относительно символа x_i, доставляемое y_j

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i \mid y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)\, p(y_j)}; \quad (17.4)$$

— собственная информация совместного события (x_i, y_j)

$$I(x_i, y_j) = -\log p(x_i, y_j); \quad (17.5)$$

— среднее количество информации, доставляемое принятым символом y_j относительно множества всех передаваемых символов

$$X=\{x_i\},\ i=1,2,\ldots,\ n,$$

$$I(X;\ y_j)=\sum_{i=1}^{n} I(x_i;\ y_j)\,p(x_i\mid y_j)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i\mid y_j)\log\frac{p(x_i\mid y_j)}{p(x_i)}; \quad (17.6)$$

— среднее количество взаимной информации по множеству символов $Y=\{y_j\}$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, при фиксированном x_i

$$I(x_i;\ Y)=\sum_{j=1}^{m} I(x_i;\ y_j)\,p(y_j\mid x_i)=\sum_{j=1}^{m} p(y_j\mid x_i)\log\frac{p(y_j\mid x_i)}{p(y_j)}; \quad (17.6a)$$

— полное среднее количество взаимной информации в множестве символов Y относительно множества символов X

$$I(X;\ Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j)\log\frac{p(x_i\mid y_j)}{p(x_i)}=\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\,I(X;\ y_j). \quad (17.7)$$

При решении большинства задач, связанных с построением систем передачи и преобразования информации, наибольший интерес представляет величина $I(X;\ Y)$.

Если символ x_i статистически связан не только с символом y_j, но и с третьим символом z_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ l$, то при известных вероятностях $p(x_i,\ y_j\ z_k)$ условная взаимная информация равна

$$I(x_i;\ y_j\mid z_k)=\log\frac{p(x_i\mid y_j,\ z_k)}{p(x_i\mid z_k)}=\log\frac{p(x_i;\ y_j\mid z_k)}{p(x_i\mid z_k)\,p(y_j\mid z_k)}, \quad (17.8)$$

где $I(x_i;\ y_j\mid z_k)$ — количество информации, доставляемое y_j о x_i, когда предварительно известен символ z_k.

Единица количества информации определяется выбором основания логарифмов. Когда используются логарифмы при основании два, то количество информации I измеряется в двоичных единицах (дв. ед., или бит). Переход от одной системы логарифмов к другой равносилен простому изменению единицы измерения информации. Этот переход осуществляется по формуле $\log_b k=\log_b a\cdot\log_a k$.

Для количества информации справедливы следующие соотношения:

$$I(x_i;\ y_j)=I(y_j;\ x_i),\ I(x_i;\ y_j)\leqslant I(x_i),\ I(x_i;\ y_j)\leqslant I(y_j), \quad (17.9)$$

$$I(x_i;\ y_j,\ z_k)=I(x_i;\ y_j)+I(x_i;\ z_k\mid y_j)=I(x_i;\ z_k)+I(x_i;\ y_j\mid z_k), \quad (17.10)$$

$$I(x_i;\ y_j)=I(x_i)-I(x_i\mid y_j)=I(y_j)-I(y_j\mid x_i)=$$
$$=I(x_i)+I(y_j)-I(x_i,\ y_j), \quad (17.11)$$

$$I(x_i,\ y_j)=I(x_i)+I(y_j)-I(x_i;\ y_j), \quad (17.12)$$

$$I(X;\ y_j)\geqslant 0,\ I(x_i;\ Y)\geqslant 0, \quad (17.13)$$

$$I(X;\ Y)=I(Y;\ X)\geqslant 0, \quad (17.14)$$

$$I(X;\ Y,\ Z)=I(X;\ Y)+I(X;\ Z\mid Y), \quad (17.15)$$

$$I(Y,\ Z;\ X)=I(Y;\ X)+I(Z;\ X\mid Y). \quad (17.16)$$

По аналогии со средней взаимной информацией, средняя собственная информация определяется формулой

$$I(X)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, I(x_i)=-\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)=H(X), \qquad (17.17)$$

где $H(X)$ — энтропия дискретной случайной величины X, определяющая количественную меру неопределенности о сообщении до его приема.

Для энтропии справедливы следующие выражения:

$$H(Y\mid X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j)\log p(y_j\mid x_i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\sum_{j=1}^{m} p(y_j\mid x_i)\log p(y_j\mid x_i)=I(Y\mid X), \qquad (17.18)$$

$$H(X\mid Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j)\log(x_i\mid y_j)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\sum_{i=1}^{n} p(x_i\mid y_j)\log p(x_i\mid y_j)=I(X\mid Y), \qquad (17.19)$$

$$H(X,\ Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j)\log p(x_i,\ y_j), \qquad (17.20)$$

$$H(X,\ Y)=H(X)+H(Y\mid X)=H(Y)+H(X\mid Y), \qquad (17.21)$$

где $H(Y\mid X)$ — условная энтропия множества событий Y при данном множестве событий X; $H(X\mid Y)$ — условная энтропия множества событий X при данном множестве Y; $H(X,\ Y)$ — энтропия множества совместных событий X, Y.

Когда множества X и Y независимы, то $H(Y\mid X)=H(Y)$, $H(X\mid Y)=H(X)$. При этом

$$H(X,\ Y)=H(X)+H(Y). \qquad (17.21а)$$

Средняя взаимная информация $I(X;\ Y)$ связана с энтропией соотношениями

$$I(X;\ Y)=H(X)-H(X\mid Y)=H(Y)-H(Y\mid X)=H(X)+H(Y)-$$
$$-H(X,\ Y), \qquad (17.22)$$

$$I(X;\ Y)\leqslant H(X),\ I(X;\ Y)\leqslant H(Y). \qquad (17.23)$$

Энтропия H — удобная мера неопределенности законов распределения вероятностей, особенно в тех случаях, когда распределения являются асимметричными, многовершинными и когда использование таких числовых характеристик, как среднее значение, дисперсия и моменты высших порядков, теряет всякую наглядность.

Выражения для энтропии некоторых дискретных законов распределения вероятностей приведены в табл. 17.1.

Для характеристики величины, на которую удлиняются сообщения на данном языке по сравнению с минимальной длиной, необходимой для передачи той же информации, вводят специальный параметр R — избыточность:

$$R=1-H_\infty/\log N=1-H_\infty/H_0=1-\mu,\ 0\leqslant R\leqslant 1, \qquad (17.24)$$

где N — число различных букв используемого алфавита; H_∞ — энтропия, приходящаяся на одну букву смыслового текста при учете всех многобуквенных сочетаний; $H_0=\log N$ — максимальная энтропия, приходящаяся на

Таблица 17.1

Энтропия $H(X)$ некоторых дискретных законов распределения

Наименование закона распределения	Аналитическое выражение закона распределения	$H(X)$
Биномиальный	$P_n(X=k)=\begin{cases}0, & X<0,\\ C_n^k p^k q^{n-k}, & 0\leqslant X\leqslant n,\\ 0, & X>n\end{cases}$	$H(X)=-n[p\log p+q\log q]-$ $-\sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k}\log C_n^k,$ $q=1-p$
Пуассона	$P_n(X=k)=\begin{cases}0, & X<0,\\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & X\geqslant 0\end{cases}$	$H(X)=\lambda\log\frac{e}{\lambda}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\log(k!)$
Равномерный	$P(X=k)=\begin{cases}0, & X<1\\ 1/n, & 1\leqslant X\leqslant n\end{cases}$	$H(X)=\log n$
Полиа	$P(X=k)=$ $=\begin{cases}0, & X<0,\\ P_0\left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\frac{1(1+\alpha)\ldots[1+(k-1)\alpha]}{k!}, & X>0\end{cases}$	$H(X)=-\lambda\log\lambda+\frac{1+\alpha\lambda}{\alpha}\log(1+\alpha\lambda)-$ $-\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_0\left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\frac{1(1+\alpha)\ldots[1+(k-1)\alpha]}{k!}\times$ $\times\log\frac{1(1+\alpha)\ldots[1+(k-1)\alpha]}{k!}$

Таблица 17.2

Относительные частоты появления букв в русском тексте

Буква	— (тире)	о	е, ё	а	и	т	н	с	р	в	л
Частота	0,175	0,090	0,072	0,062	0,062	0,053	0,053	0,045	0,040	0,038	0,035
Буква	к	м	д	п	у	я	ы	з	ь, ъ	б	г
Частота	0,028	0,026	0,025	0,023	0,021	0,018	0,016	0,016	0,014	0,014	0,013
Буква	ч	й	х	ж	ю	ш	ц	щ	э	ф	
Частота	0,012	0,010	0,009	0,007	0,006	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	

Таблица 17.3

Относительные частоты появления букв в английском тексте

Буква	— (тире)	*e*	*t*	*o*	*a*	*n*	*i*	*r*	*s*	*h*
Частота	0,2	0,105	0,072	0,0654	0,063	0,059	0,055	0,054	0,052	0,047
Буква	*d*	*l*	*c*	*f*	*u*	*m*	*p*	*y*	*w*	*g*
Частота	0,035	0,029	0,023	0,0225	0,0225	0,021	0,0175	0,012	0,012	0,011
Буква	*b*	*v*	*k*	*x*	*j*	*q*	*z*			
Частота	0,0105	0,008	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001			

Таблица 17.4

Значения энтропий H_l, приходящихся на одну букву с учетом различных буквенных сочетаний

Энтропия $\left[\frac{\text{дв.ед.}}{\text{буква}}\right]$	H_0	H_1	H_2*)	H_3	H_4	H_∞
Русский текст	5,00	4,35	3,52	3,00	—	—
Английский текст	4,75	4,03	3,32	3,10	2,16	1,86

*) H_2 — энтропия на букву текста при учете вероятности появления двухбуквенных сочетаний.

букву, когда буквы независимы и равновероятны; μ — коэффициент сжатия текста.

Избыточность наиболее распространенных европейских языков превышает 50%. Некоторые статистические данные о структуре различных языков приведены в табл. 17.2 — 17.4 [1, 15].

Во многих случаях выгодно первоначальное сообщение источника представить при помощи другого алфавита путем кодирования.

Характеристиками кода являются значность и его основание. Значность кода n — число символов в кодовом слове (кодовой комбинации), а основание L —число различных символов кода. Наиболее распространены двоичные (бинарные) коды с основанием $L = 2$. Равномерным является такой код, у которого значность кода для всех кодовых слов одинакова (например, код Бодо).

При кодировании сообщений, передаваемых по каналам связи без помех, необходимо выполнить два условия: 1) кодовые слова должны быть различимы и однозначно связаны с соответствующими сообщениями; 2) применяемый способ кодирования должен обеспечить максимальную экономичность (краткость) кода, при которой на передачу данного сообщения затрачивается минимальное время.

Код, удовлетворяющий второму из этих условий, называют оптимальным.

Если $\{u_i\}$, $i=1, 2, \ldots, N$,—ансамбль взаимно независимых сообщений с априорными вероятностями $p(u_i)$, а $\{v_j\}$, $j=1, 2, \ldots, L$,—ансамбль символов кода и $L<N$, то число кодовых слов по n символов в каждом слове $M=L^n$. При $L^n \geqslant N$, где n— наименьшее целое число, для которого выполняется это неравенство, ансамбль сообщений $\{u_i\}$ можно однозначно закодировать при помощи N различных кодовых слов по n символов в слове.

Среднее число $\langle n\rangle$ символов кода, приходящихся на одно сообщение,

$$\langle n\rangle = \sum_{i=1}^{n} n_i\, p(u_i), \tag{17.25}$$

причем

$$H(U)/\log L \leqslant \langle n\rangle < H(U)/\log L + 1, \tag{17.26}$$

где

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{N} p(u_i) \log p(u_i)$$

— энтропия ансамбля сообщений.

При кодировании целых «блоков», а не отдельных сообщений

$$H(U)/\log L \leqslant \langle n\rangle < H(U)/\log L + 1/\nu, \tag{17.27}$$

где ν — число статистически независимых символов в блоке.

Для двоичного кода

$$H(U) \leqslant \langle n\rangle < H(U) + 1/\nu. \tag{17.28}$$

Примерами двоичных кодов, близких к оптимальным, являются код Шеннона—Фано и код Хаффмена [1, 2, 109, 110].

Экономичность кодирования сообщений — одна из важных характеристик работы системы связи. Другими ее характеристиками являются скорость передачи, пропускная способность, достоверность приема информации и т. д.

Пусть имеется дискретный стационарный канал связи без памяти (без последствия) с заданными характеристиками (рис. 17.1), причем все символы x_i закодированного сообщения и соответствующие им элементарные сигналы y_j имеют одинаковую длительность τ, где $F = 1/\tau$ — частота посылки символов.

Канал без памяти полностью описывается априорными вероятностями $p(x_i)$, характеризующими структуру закодированных сообщений, и условными вероятностями $p(y_j|\, x_i)$, определяющимися характеристиками канала.

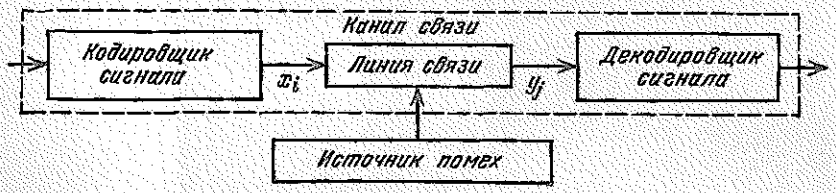


Рис. 17.1. Канал связи с помехами

Скорость передачи V_k — среднее количество информации, получаемое за единицу времени:

$$V_k = F\,I\,(X; Y) = F\,[H\,(X) - H\,(X \mid Y)] = F[H\,(Y) - H\,(Y \mid X)]. \quad (17.29)$$

При отсутствии помех множества событий X и Y статистически полностью взаимозависимы, т. е. $H\,(X \mid Y) = H\,(Y \mid X) = 0$. Следовательно,

$$V_{k\,\max} = FH\,(X) = FH\,(Y). \quad (17.29а)$$

Пропускная способность канала связи C — максимальная скорость передачи информации, которая может быть достигнута выбором оптимального распределения вероятностей передачи $p\,(x_i)$ символов сообщения:

$$C = \max_{p\,(x_i)} F\,I\,(X; Y) = \max_{p\,(x_i)} F\,[H\,(X) - H\,(X \mid Y)] =$$

$$= \max_{p\,(x_i)} F\,[H\,(Y) - H\,(Y \mid X)]. \quad (17.30)$$

При отсутствии помех $[H\,(X \mid Y) = H\,(Y \mid X) = 0]$:

$$C = C_m = \max_{p\,(x_i)} F\,I\,(X; Y) = \max_{p\,(x_i)} F\,H\,(X) = \max_{p(x_i)} F\,H(Y). \quad (17.30а)$$

Для двоичного симметричного канала связи

$$C = F\,[1 + (1 - P_e) \log (1 - P_e) + P_e \log P_e], \quad (17.31)$$

где P_e — вероятность ошибочного приема.

При отсутствии помех ($P_e = 0$)

$$C = C_m = F. \quad (17.31а)$$

На рис. 17.2 приведены зависимости относительной пропускной способности от отношения сигнал/шум при оптимальных методах приема радиотелеграфных сигналов [1]; сплошные кривые относятся к детерминированным сигналам, а штриховые — к сигналам со случайной начальной фазой; E — энергия сигнала, N_0 — спектральная плотность белого шума.

Для повышения достоверности приема дискретной информации используют корректирующие коды (коды с обнаружением ошибок и коды с обнаружением и исправлением ошибок). Методы помехоустойчивого кодирования основаны на введении в код некоторой избыточности, достаточной для компенсации помех [109—115].

Экономичность и эффективность кодов с обнаружением ошибок определяют коэффициент избыточности R_u и коэффициент обнаружения K_0 [114]:

$$R_u = 1 - \log M_1 / \log M, \quad (17.32)$$

$$K_0 = Q/(Q + Q_1), \quad (17.33)$$

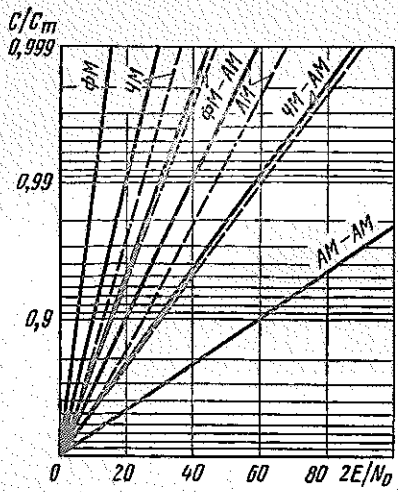


Рис. 17.2. Пропускная способность различных систем радиотелеграфии при приеме детерминированных сигналов (сплошные линии) и сигналов со случайной начальной фазой (штриховые линии) на фоне белого шума

где $M = 2^n$ — общее число кодовых слов, которое можно получить в n-элементном коде; M_1 — количество используемых комбинаций; Q — общее количество искаженных комбинаций, ошибка в которых может быть обнаружена; Q_1 — общее число искаженных комбинаций, ошибка в которых не поддается обнаружению.

2. ПРИМЕРЫ

17.1. В партии 100 радиоламп, из них 5% бракованных. Из партии выбирают наугад 5 радиоламп для контроля.

Какое количество информации содержится в сообщении о том, что в случайной выборке оказалось ровно 3 бракованных радиолампы?

Решение: Случайная величина X — число бракованных радиоламп в выборке из 5 радиоламп — может принять значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Распределение вероятностей величины X подчинено гипергеометрическому закону (см. табл. 2.1):

$$P_n^r(X = k) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n.$$

В нашем случае $N = 100$, $n = 5$, $M = 100 \cdot 0{,}05 = 5$, $k = 3$. Следовательно, вероятность $P_5(3)$ того, что в случайной выборке будет ровно три бракованных радиолампы, равна

$$P_5(3) = C_5^3 C_{100-5}^{5-3} / C_{100}^3 = \frac{5!}{3!\,2!} \frac{95!}{2!\,93!} \left[\frac{100!}{5!\,95!}\right]^{-1} \simeq 0{,}000953.$$

Используя формулу (17.2), получаем

$$I(x_4) = -\log p(x_4) = -\log P_5(3) \approx 10{,}7 \text{ дв. ед.}$$

17.2. По двоичному симметричному каналу связи с помехами (рис. 17.3) передаются сигналы x_1 и x_2 с априорными вероятностями $p(x_1) = 3/4$ и $p(x_2) = 1/4$. Из-за наличия помех вероятность

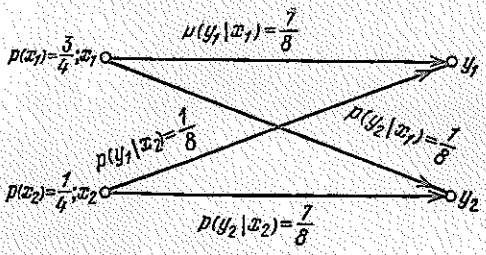


Рис. 17.3. Двоичный симметричный канал связи с помехами

правильного приема каждого из сигналов (x_1 и x_2) уменьшается до 7/8.

Найти: 1) условную собственную информацию $I(x_2|y_2)$; 2) взаимную информацию $I(x_2; y_2)$; 3) средние количества информации $I(X; y_2)$, $I(X)$, $I(X|Y)$, $I(X; Y)$.

Решение. По условию $p(x_1) = 3/4$, $p(x_2) = 1/4$, $p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = 7/8$, $p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = 1/8$.

Вычислим вероятности $p(y_j)$, $p(x_i, y_j)$ и $p(x_i|y_j)$:

$$p(y_1) = p(x_1)\,p(y_1|x_1) + p(x_2)\,p(y_1|x_2) = \frac{3}{4}\,\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{22}{32};$$

$$p(y_2) = p(x_2)\,p(y_2|x_2) + p(x_1)\,p(y_2|x_1) = \frac{1}{4}\,\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{10}{32};$$

$$p(x_1, y_1) = p(x_1)\,p(y_1|x_1) = p(y_1)\,p(x_1|y_1) = \frac{3}{4}\,\frac{7}{8} = \frac{21}{32};$$

$$p(x_1, y_2) = p(x_1)\,p(y_2|x_1) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{3}{32};$$

$$p(x_2, y_1) = p(x_2)\,p(y_1|x_2) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{32};$$

$$p(x_2, y_2) = p(x_2)\,p(y_2|x_2) = \frac{1}{4}\,\frac{7}{8} = \frac{7}{32}.$$

Так как

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i)\,p(y_j|x_i)}{p(y_j)},$$

то

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1)\,p(y_1|x_1)}{p(y_1)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}:\frac{22}{32} = \frac{21}{22};$$

$$p(x_1|y_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}:\frac{10}{32} = \frac{3}{10};\quad p(x_2|y_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}:\frac{22}{32} = \frac{1}{22};$$

$$p(x_2|y_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}:\frac{10}{32} = \frac{7}{10}.$$

1. На основании (17.3) имеем

$$I(x_2|y_2) = -\log p(x_2|y_2) = -\log(7/10) \simeq 0{,}515 \text{ дв. ед.}$$

2. Используя формулу (17.4), получаем

$$I(x_2;y_2)=\log\frac{p(x_2\mid y_2)}{p(x_2)}=\log\frac{7/10}{1/4}\simeq 1{,}485 \text{ дв. ед.}$$

3. Согласно (17.6) находим

$$I(X;y_2)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i\mid y_2)\log\frac{p(x_i\mid y_2)}{p(x_i)}=p(x_1\mid y_2)\log\frac{p(x_1\mid y_2)}{p(x_1)}+$$

$$+\,p(x_2\mid y_2)\log\frac{p(x_2\mid y_2)}{p(x_2)}=\frac{3}{10}\log\frac{3/10}{3/4}+\frac{7}{10}\log\frac{7/10}{1/4}\simeq$$

$$\simeq 0{,}644 \text{ дв. ед.}$$

Применив формулу (17.17), получим

$$I(X)=-\sum_{i=1}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=-[p(x_1)\log p(x_1)+p(x_2)\log p(x_2)]=$$

$$=-\left(\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right)\simeq 0{,}811 \text{ дв. ед.}$$

Для вычисления информации $I(X\mid Y)$ воспользуемся формулой (17.19):

$$I(X\mid Y)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_i,y_j)\log p(x_i\mid y_j)=$$

$$=-[p(x_1,y_1)\log p(x_1\mid y_1)+p(x_2,y_1)\log p(x_2\mid y_1)+$$

$$+\,p(x_1,y_2)\log p(x_1\mid y_2)+p(x_2,y_2)\log p(x_2\mid y_2)]=$$

$$=-\left(\frac{21}{32}\log\frac{21}{22}+\frac{1}{32}\log\frac{1}{22}+\frac{3}{32}\log\frac{3}{10}+\frac{7}{32}\log\frac{7}{10}\right)\simeq$$

$$\simeq 0{,}459 \text{ дв. ед.}$$

Согласно формуле (17.7) находим

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i\mid y_j)}{p(x_i)}=p(x_1,y_1)\log\frac{p(x_1\mid y_1)}{p(x_1)}+$$

$$+\,p(x_2,y_1)\log\frac{p(x_2\mid y_1)}{p(x_2)}+p(x_1,y_2)\log\frac{p(x_1\mid y_2)}{p(x_1)}+$$

$$+\,p(x_2,y_2)\log\frac{p(x_2\mid y_2)}{p(x_2)}=\frac{21}{32}\log\frac{21/22}{3/4}+\frac{1}{32}\log\frac{1/22}{1/4}+$$

$$+\frac{3}{32}\log\frac{3/10}{3/4}+\frac{7}{32}\log\frac{7/10}{1/4}\simeq 0{,}352 \text{ дв. ед.}$$

17.3. Источник сообщений генерирует множество кодовых комбинаций, одна из которых имеет априорную вероятность $p(x)=1/8$, а апостериорные вероятности, соответствующие последовательному приему символов $y=1$, $z=0$ и $u=1$, равны: $p(x\mid y)=p(x\mid 1)=1/6$, $p(x\mid y,z)=p(x\mid 10)=1/2$, $p(x\mid y,z,u)=p(x\mid 101)=1$.

Определить увеличение информации о сообщении x в процессе приема символов y, z и u.

Решение. После приема первого символа $y = 1$ информация

$$I(x;\ y) = I(x;\ 1) = \log \frac{p(x \mid 1)}{p(x)} = \log \frac{4}{3} \simeq 0{,}415 \text{ дв. ед.}$$

Второй принятый символ $z = 0$ на основании (17.8) доставит дополнительную информацию

$$I(x;\ z \mid y) = I(x;\ 0 \mid 1) = \log \frac{p(x \mid 10)}{p(x \mid 1)} = \log \frac{1/2}{1/6} \simeq 1{,}585 \text{ дв. ед.}$$

Аналогично третий символ $u = 1$ доставит о сообщении x информацию

$$I(x;\ u \mid y, z) = I(x;\ 1 \mid 10) = \log \frac{p(x \mid 101)}{p(x \mid 10)} = \log 2 = 1 \text{ дв. ед.}$$

Полная информация $I(x;\ y,\ z,\ u)$ о сообщении x после приема всех трех символов

$$I(x;\ y,\ z,\ u) = I(x;\ y) + I(x;\ z|y) + I(x;\ u \mid y,\ z) = I(x;\ 1) +$$
$$+ I(x;\ 0|1) + I(x;\ 1|10) = 0{,}415 + 1{,}585 + 1 = 3 \text{ дв. ед.}$$

17.4. Источник вырабатывает ансамбль символов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, с вероятностями $p(x_1) = 0{,}2$, $p(x_2) = 0{,}3$, $p(x_3) = 0{,}4$ и $p(x_4) = 0{,}1$. Корреляционные связи между символами отсутствуют. Вычислить энтропию источника.

Решение. Применив формулу (17.17), получим

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log p(x_i) = -[p(x_1) \log p(x_1) + p(x_2) \times$$
$$\times \log p(x_2) + p(x_3) \log p(x_3) + p(x_4) \log p(x_4)] =$$
$$= -0{,}2 \times \log 0{,}2 - 0{,}3 \log 0{,}3 - 0{,}4 \log 0{,}4 - 0{,}1 \log 0{,}1 =$$
$$= 0{,}4644 + 0{,}5211 + 0{,}5288 + 0{,}3322 \simeq 1{,}847 \text{ дв. ед.}$$

17.5. Определить энтропию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону: 1) в общем случае; 2) при $p = 1/2$ и $n = 5$.

Решение. По условию случайная величина X распределена по биномиальному закону. Следовательно,

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ q = 1 - p.$$

1. $$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k p^k q^{n-k} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k - \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \log p^k -$$
$$- \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \log q^{n-k}.$$

Так как при $k = 0$ и $k = n$ $\log C_n^k = 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = np,$$

то

$$H(X) = -n(p \log p + q \log q) - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k.$$

2. При $p = q = 1/2$ и $n = 5$ имеем

$$H(X) = -5\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{4} C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \log C_5^k =$$

$$= 5 - \frac{1}{32}\sum_{k=1}^{4} C_5^k \log C_5^k = 5 - \frac{5\log 5 + 10\log 10}{16} \simeq 2{,}198 \text{ дв. ед.}$$

17.6. Алфавит состоит из четырех букв x_1, x_2, x_3, x_4, вероятности появления которых равны: $p(x_1) = 0{,}5$, $p(x_2) = 0{,}25$; $p(x_3) = p(x_4) = 0{,}125$. Условные вероятности $p(x_j | x_i)$ появления j-й буквы при условии, что ей предшествовала i-я буква, заданы таблицей

x_i	x_j				
	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum_{j=1}^{4} p(x_j \mid x_i)$
x_1	0	0,2	0,4	0,4	1
x_2	0,2	0,2	0,3	0,3	1
x_3	0,25	0	0,25	0,5	1
x_4	0,2	0,4	0,4	0	1

Найти избыточность R_1 источника сообщений при статистической независимости букв и избыточность R_2 с учетом зависимости между буквами.

Решение. На основании (17.24) имеем $R_1 = 1 - H_1/H_0$. Так как

$$H_0 = \log N = \log 4 = 2 \text{ дв. ед.},$$

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log p(x_i) = -(0{,}5 \log 0{,}5 + 0{,}25 \log 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}125 \log 0{,}125) = 1{,}75 \text{ дв. ед.},$$

то $R_1 = 1 - 1{,}75/2 = 0{,}125$.

При учете статистической зависимости между буквами $R_2 = 1 - H_2/H_0$, где H_2 — энтропия на букву при учете двухбуквенных сочетаний.

Энтропия двухбуквенного текста

$$H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1) = 1{,}75 + H(X_2|X_1),$$

где

$$H(X_2|X_1) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \sum_{j=1}^{4} p(x_j|x_i) \log p(x_j|x_i) =$$

$$= -0{,}5(0{,}2 \log 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 \log 0{,}4) - 0{,}125 (2 \cdot 0{,}2 \log 0{,}2 +$$

$$+ 2 \cdot 0{,}3 \log 0{,}3) - 0{,}125 (2 \cdot 0{,}25 \log 0{,}25 + 0{,}5 \log 0{,}5) -$$

$$- 0{,}125 (0{,}2 \log 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 \log 0{,}4) \simeq 1{,}62 \text{ дв. ед.}$$

— условная энтропия второй буквы, определяемая формулой (17.18).

Средняя энтропия на одну букву

$$H_2 = H(X_1, X_2)/2 = (1{,}75 + 1{,}62)/2 = 1{,}685 \text{ дв. ед.}$$

Следовательно,

$$R_2 = 1 - 1{,}685/2 \simeq 0{,}16.$$

17.7. Закодировать двоичным кодом Шеннона—Фано ансамбль сообщений $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 7, 8$, если все кодируемые сообщения равновероятны. Показать оптимальный характер полученного кода.

Решение. При кодировании по методу Шеннона—Фано все сообщения записываются в порядке убывания их вероятностей и разбиваются на две группы так, чтобы суммы вероятностей сообщений в каждой из групп были по возможности близкими к 1/2. Всем сообщениям, входящим в верхнюю группу, приписывается цифра «0» в качестве первой цифры двоичного кода, а сообщениям, входящим в нижнюю группу, — цифра «1». Затем каждая из групп аналогично разбивается на подгруппы по возможности с одинаковыми суммарными вероятностями, причем верхним подгруппам в обеих группах опять приписывается цифра «0» (вторая цифра кода), а нижним — цифра «1». Деление повторяется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одному сообщению. Процесс кодирования приведен в табл. 17.5.

Среднее число двоичных знаков, приходящихся на одно сообщение,

$$\langle n \rangle = \sum_{i=1}^{8} n_i p(x_i) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 3 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = 3 \text{ дв. ед.}$$

Энтропия ансамбля кодируемых сообщений

$$H(X) = \log N = \log 8 = 3 \text{ дв. ед.}$$

Так как средняя длина кодового слова $\langle n \rangle$ равна энтропии $H(X)$, то код оптимален.

Таблица 17.5

Кодирование по методу Шеннона — Фано

Сообщения x_i	$p(x_i)$	Разбиения			Кодовые слова
x_1	1/8	0	0	0	0 0 0
x_2	1/8			1	0 0 1
x_3	1/8		1	0	0 1 0
x_4	1/8			1	0 1 1
x_5	1/8	1	0	0	1 0 0
x_6	1/8			1	1 0 1
x_7	1/8		1	0	1 1 0
x_8	1/8			1	1 1 1

17.8. Показать, что энтропия $H(X)$ алфавита $\{x_i\}$ с конечным множеством символов x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, достигает максимума $H(X) = H_m(X) = \log n$, когда все символы равновероятны.

Решение. Обозначив $p(x_i) = p_i$, имеем

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, найдем экстремум функции

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Дифференцируя это выражение по $p_1, \ldots, p_n$ и приравнивая производные нулю, получаем систему уравнений:

$$\log p_i + \log e + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\log p_i = -\lambda - \log e = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$.

Следовательно,

$H(X) = H_m(X) = \log n$. Иное решение задачи дано в [1, 110].

17.9. Вычислить пропускную способность C двоичного симметричного канала (рис. 17.4) при условии, что все символы сообщения и соответствующие им элементарные сигналы y_j имеют одинаковую длительность τ, где $F = 1/\tau$ — частота посылки символов.

Построить график зависимости $C/C_m = f(P_e)$, где C_m — максимальная пропускная способность (при отсутствии помех), а P_e — вероятность ошибочного приема.

Решение. Согласно (17.30) имеем

$$C = F \operatorname*{Max}_{p(x_i)} [H(Y) - H(Y \mid X)].$$

В нашем случае

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_j) \log p(y_j),$$

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{2} p(y_j \mid x_i) \log p(y_j \mid x_i).$$

Так как

$$p(y_1) = p(x_1)\, p(y_1|x_1) + p(x_2)\, p(y_1|x_2) = p(1 - P_e) + (1 - p)\, P_e = p + P_e - 2pP_e,$$

$$p(y_2) = p(x_2)\, p(y_2|x_2) + p(x_1)\, p(y_2|x_1) = (1 - p)(1 - P_e) + pP_e = 1 - p - P_e + 2pP_e,$$

то

$$H(Y) = -[(p + P_e - 2pP_e) \log (p + P_e - 2pP_e) + (1 - p_e - P_e + 2pP_e) \log (1 - p - P_e + 2pP_e)],$$

$$H(Y|X) = -p(x_1)[p(y_1|x_1) \log p(y_1|x_1) + p(y_2|x_1) \times \log p(y_2|x_1)] - p(x_2)[p(y_1|x_2) \log p(y_1|x_2) + p(y_2|x_2) \times \log p(y_2|x_2)] = -[(1 - P_e) \log (1 - P_e) + P_e \log P_e].$$

Из выражения для $H(Y \mid X)$ видно, что ввиду симметрии канала связи условная энтропия $H(Y|X)$ не зависит от вероятности передачи p. Поэтому максимальное значение $I(X; Y)$ достигается просто максимизацией $H(Y)$.

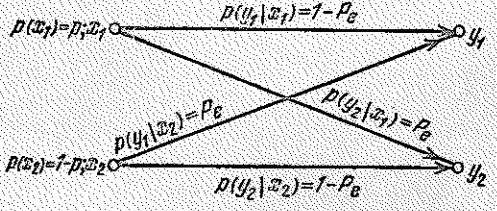


Рис. 17.4. Двоичный симметричный канал связи

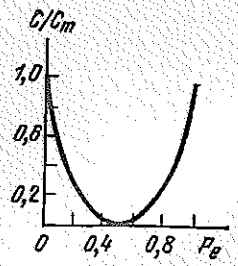


Рис. 17.5. Зависимость пропускной способности двоичного симметричного канала от вероятности ошибочного приема

Максимум $H(Y)$ достигается тогда, когда сигналы y_1 и y_2 независимы и равновероятны (см. пример 17.8), что в свою очередь имеет место при равной вероятности передаваемых символов. Следовательно,

$$C = F[1 + (1 - P_e)\log(1 - P_e) + P_e \log P_e].$$

При отсутствии помех ($P_e = 0$) $C = C_m = F$. Поэтому $C/C_m = f(P_e) = 1 + (1 - P_e)\log(1 - P_e) + P_e \log P_e$. Зависимость относительной пропускной способности C/C_m от вероятности ошибочного приема P_e изображена на рис. 17.5.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

17.1. Самолет противника с равной вероятностью может находиться в одной из 1024 зон воздушного пространства.

Какое количество информации получает оператор радиолокационной станции, когда он фиксирует наличие самолета в одной из зон?

Ответ: $I(x_i) = 10$ дв. ед.

17.2. Радиостанция состоит из 16 равноценных с точки зрения надежности блоков и имеет устройство контроля и индикации исправности блоков.

Определить минимальное число проб k, которое необходимо выполнить этому устройству, чтобы отыскать любой неисправный блок.

Ответ: $k \geqslant 4$.

17.3. По каналу телекодовой связи передаются пять команд $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ с вероятностями $p(x_1) = 0{,}3$, $p(x_2) = 0{,}1$, $p(x_3) = 0{,}25$, $p(x_4) = 0{,}2$, $p(x_5) = 0{,}15$.

Определить среднее количество информации, приходящееся на одну команду.

Ответ: $I(X) \simeq 2{,}228$ дв. ед.

17.4. Символы алфавита азбуки Морзе появляются в сообщении со следующими вероятностями: 0,51 для точки, 0,31 для тире, 0,12 для промежутка между буквами, 0,06 для промежутка между словами.

Определить среднее количество информации в сообщении из 500 символов данного алфавита, считая, что связь между последовательными символами отсутствует.

Ответ: $I(X) = 236$ дв. ед.

17.5. Напряжение изменяется в пределах $U_2 - U_1 = 8$ В. При равномерном квантовании датчик регистрирует приращения напряжения $\Delta U = 0{,}1$ В.

Вычислить максимальное количество информации за 5 отсчетов.

Ответ: $I(X) = 31{,}61$ дв. ед.

17.6. Найти количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующем одному кадру развертки изображения, если: в кадре 625 строк; сигнал, соответствующий одной строке развертки изображения, представляет собой последовательность из 600 случайных по амплитуде импульсов, каждый из которых может с равной вероятностью принять любое значение в интервале от 0 до 8 В; каждый импульс квантуется по величине с шагом квантования 1 В; импульсы изображения между собой не коррелированы.

Ответ: $I(X) = 1125 \cdot 10^3$ дв. ед.

17.7. Вычислить среднее количество информации $I(X; y_2)$ о переданных командах $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, доставляемое принятым сигналом y_2 ансамбля сигналов $Y = \{y_j\}$, $j = 1, 2, 3$, если объединенная система (X, Y) характеризуется распределением вероятностей, приведенным в следующей таблице:

y_j	x_i			$p(y_j)$
	x_1	x_2	x_3	
y_1	0,05	0,2	0	0,25
y_2	0	0,3	0,1	0,4
y_3	0,05	0	0,3	0,35
$p(x_i)$	0,1	0,5	0,4	

Ответ: $I(X; y_2) \simeq 0{,}268$ дв. ед.

17.8. Радиостанция противника может работать на волне λ_1 (событие A_1) или на волне λ_2 (событие A_2), причем в импульсном (событие B_1) или непрерывном (событие B_2) режимах. Вероятности совместных событий имеют следующие значения: $p(A_1, B_1) = 0{,}7$, $p(A_1, B_2) = 0{,}15$, $p(A_2, B_1) = 0{,}05$, $p(A_2, B_2) = 0{,}1$.

Вычислить количество информации, получаемой о режиме работы станции, если станет известной длина волны станции.

Ответ: $I(B; A) = 0{,}102$ дв. ед.

17.9. Найти максимальную энтропию черно-белого изображения с двумя градациями, содержащего $5 \cdot 10^5$ независимых элементов.

Ответ: $H_m(X) = 5 \cdot 10^5$ дв. ед.

17.10. Распределение вероятностей случайной величины X имеет вид: $p(x_1) = 0{,}1$, $p(x_2) = 0{,}1$, $p(x_3) = 0{,}1$, $p(x_4) = 0{,}7$.

Определить число n значений случайной величины, при котором энтропия $H_p(X)$ равномерного распределения будет равна энтропии $H(X)$ заданного распределения.

Ответ: $n = 2{,}56$.

17.11. Вероятность появления события A при одном испытании равна p. Испытания повторяются до первого появления события A. Найти энтропию числа испытаний X и выяснить характер изменения энтропии с изменением p.

Ответ: $H(X) = -[p \log p + (1-p) \log (1-p)]/p$ дв. ед.

При уменьшении p от 1 до 0 энтропия монотонно возрастает от 0 до ∞.

17.12. Для повышения достоверности каждое сообщение может передаваться по каналу связи k раз, причем вероятность неискаженного прохождения сигнала при каждой передаче $p_1 = 0{,}2$. После k повторений ($1 \leqslant k \leqslant N$) решающее устройство сравнивает все k принятых сигналов и при их совпадении выносит решение о правильном приеме, после чего отправителю посылается команда о прекращении посылки данного сообщения и о передаче следующего сообщения.

Определить значение коэффициента дублирования k из условия максимума количества информации, обеспечиваемой решающим устройством.

Ответ: $k = 3$.

17.13. Ансамбли событий X и Y объединены, причем вероятности совместных событий равны: $p(x_1, y_1) = 0{,}1$, $p(x_1, y_2) = 0{,}25$, $p(x_2, y_1) = 0{,}2$, $p(x_2, y_2) = 0$, $p(x_3, y_1) = 0{,}3$, $p(x_3, y_2) = 0{,}15$.

Определить: а) энтропии ансамблей X и Y; б) энтропию объединенного ансамбля; в) условные энтропии ансамблей.

Ответ:

а) $H(X) = 1{,}512$ дв. ед., $H(Y) = 0{,}971$ дв. ед.;

б) $H(X, Y) = 2{,}228$ дв. ед.;

в) $H(X|Y) = 1{,}257$ дв. ед., $H(Y|X) = 0{,}716$ дв. ед.

17.14. Источник сообщений создает последовательность букв, выбранных из набора букв A, B, C, D с вероятностями 0,5; 0,25; 0,125; 0,125, причем очередная буква выбирается независимо.

Вычислить избыточность текста.

Ответ: $R = 0{,}125$.

17.15. Для передачи сообщений используется код, состоящий из трех символов, вероятности появления которых равны 0, 6; 0,2; 0,2. Корреляция между символами кода отсутствует.

Определить избыточность кода.

Ответ: $R = 0{,}139$.

17.16. Ансамбль сообщений $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, и вероятности сообщений заданы следующей таблицей:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
p_i	1/4	1/4	1/8	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16

Построить код Шеннона—Фано для данного ансамбля и показать его оптимальный характер.

Ответ:

Сообщение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Кодовая комбинация	00	01	100	101	1100	1101	1110	1111

$$H(X) = \langle n \rangle = 2{,}75 \text{ дв. ед.}$$

17.17. Сообщения x_1, x_2, x_3, x_4 появляются соответственно с вероятностями 1/2, 1/4, 1/8, 1/8 и кодируются четырьмя двоичными кодовыми словами 0, 10, 110, 111.

Требуется: а) показать, что если сообщения статистически независимы, то в получающейся последовательности кодовых слов символы 0 и 1 появляются с равными вероятностями, и что символы в такой последовательности независимы; б) найти среднее значение $\langle n \rangle$ числа двоичных символов на сообщение.

Ответ: б) $\langle n \rangle = H(X) = 1{,}75$ дв. ед.

17.18. Ансамбль сообщений $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 9$, и их вероятности заданы следующей таблицей:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
p_i	0,20	0,15	0,15	0,12	0,10	0,10	0,08	0,06	0,04

Произвести кодирование двоичным кодом по методу Хаффмена (метод вспомогательных группировок) и вычислить энтропию сообщений $H(X)$ и среднюю длину $\langle n \rangle$ кодового слова.

Ответ:

Сообщение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
Кодовая комбинация	10	001	010	011	110	111	0001	00000	00001

$$H(X) \simeq 3{,}04 \text{ дв. ед.}, \quad \langle n \rangle \simeq 3{,}08 \text{ дв. ед.}$$

17.19. Ансамбль сообщений состоит из двух букв: x_1 и x_2, причем вероятности $p(x_i)$ появления букв равны $p(x_1) = 0{,}89$, $p(x_2) = 0{,}11$.

Определить среднее число символов кода, приходящееся на одну букву, если кодирование осуществляется: а) по одной букве; б) блоками по две буквы; в) блоками по три буквы.

Ответ [115]:

Сообщение	а)		б)			
	x_1	x_2	x_1x_1	x_1x_2	x_2x_1	x_2x_2
Кодовая комбинация	0	1	0	10	110	111
$\langle n \rangle$, дв. ед.	1		$\simeq 0{,}66$			

Сообщение	в)							
	$x_1x_1x_1$	$x_1x_1x_2$	$x_1x_2x_1$	$x_2x_1x_1$	$x_1x_2x_2$	$x_2x_1x_2$	$x_2x_2x_1$	$x_2x_2x_2$
Кодовая комбинация	0	100	101	110	11100	11101	11110	11111
$\langle n \rangle$, дв.ед.	0,552							

17.20. Определить пропускную способность C двоичного симметричного канала со стиранием (рис. 17.6), если символы x_i и y_j имеют одинаковую длительность τ, где $F = 1/\tau$ — частота посылки символов.

Ответ:

$$C = F\{(1-q)[1 - \log(1-q)] + (1 - P_e - q)\log(1 - P_e - q) + P_e \log P_e\}.$$

17.21. На вход канала связи (рис. 17.7) поступает ансамбль сигналов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, с вероятностями $p(x_i)$ и часто-

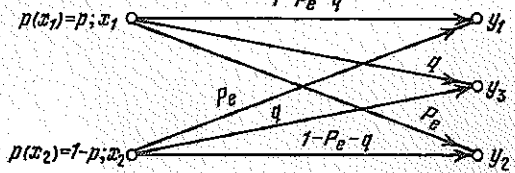


Рис. 17.6. Двоичный симметричный канал связи со стиранием

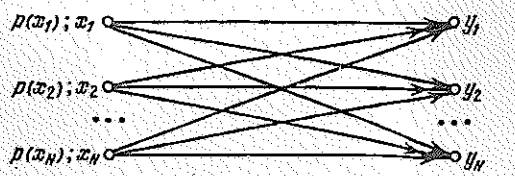
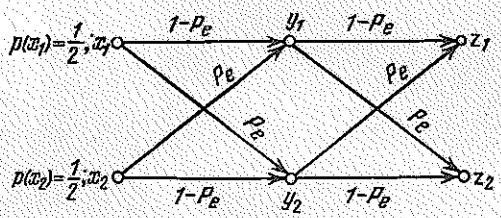


Рис. 17.7. Канал связи

Рис. 17.8. Канал связи с ретранслятором



той посылки $F = 1/\tau$, где τ — длительность сигналов. Вероятности перехода равны $p(y_j|x_i) = 1 - P_e$ при $j = i$ и $p(y_j|x_i) = P_e/(N-1)$ при $j \neq i$.

Определить пропускную способность канала связи.

Ответ:

$$C = F\left[\log N + P_e \log \frac{P_e}{N-1} + (1-P_e)\log(1-P_e)\right].$$

17.22. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника (рис. 17.8), передаются сигналы x_1 и x_2 с частотой следования $F = 1/\tau$, где τ — длительность сигналов. Значения априорных вероятностей и вероятностей перехода на участке передатчик—ретранслятор и ретранслятор—приемник указаны на рисунке.

Вычислить пропускную способность канала связи.

Ответ:

$$C = F\,[1 + (1 - 2P_e + 2P_e^2)\log(1 - 2P_e + 2P_e^2) + 2P_e(1 - P_e) + 2P_e(1 - P_e)\log P_e(1 - P_e)].$$

17.23. Определить пропускную способность канала связи, по которому передаются сигналы x_1, x_2, x_3, x_4 с частотой следования $F = 1/\tau$, где τ — длительность сигналов. Влияние помех характеризуется условными вероятностями $p(y_j|x_i)$:

$$p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = p(y_3|x_3) = p(y_4|x_4) = 1 - P_e,$$
$$p(y_2|x_1) = p(y_1|x_2) = p(y_4|x_3) = p(y_3|x_4) = P_e,$$
$$p(y_3|x_1) = p(y_4|x_1) = p(y_3|x_2) = p(y_4|x_2) = p(y_1|x_3) = p(y_2|x_3) = p(y_1|x_4) = p(y_2|x_4) = 0.$$

Ответ: $C = F\,[2 + P_e \log P_e + (1 - P_e)\log(1 - P_e)]$.

18. НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Непрерывные системы передачи информации — системы, в которых как реализации сообщения, так и реализации сигнала на конечном временном интервале $(0, T)$ представляют собой некоторые непрерывные функции времени [1, 110].

Пусть $x(t)$ — реализация непрерывного сообщения на входе какого-либо блока схемы связи, $y(t)$ — реализация выходного сообщения (сигнала), $p_1(x)$ — одномерная плотность вероятности ансамбля входных сообщений, $p_1(y)$ — одномерная плотность вероятности ансамбля выходных сообщений, $p_2(x, y)$ — совместная плотность вероятности, $p_1(x \mid y)$ — условная плотность вероятности x при известном y, $p_1(y \mid x)$ — условная плотность вероятности y при известном x. Тогда для количества информации I справедливы следующие соотношения [1, 3, 110, 115]:

$$I(x; y) = \log \frac{p_2(x, y)}{p_1(x)\, p_1(y)} = \log \frac{p_1(x \mid y)}{p_1(x)} = \log \frac{p_1(y \mid x)}{p_1(y)} = I(y; x), \tag{18.1}$$

$$I(X; y) = \int_X I(x; y)\, p_1(x \mid y)\, dx, \quad I(x; Y) = \int_Y I(x; y)\, p_1(y \mid x)\, dy, \tag{18.2}$$

$$I(X; Y) = \int_Y p_1(y)\, I(X; y)\, dy =$$

$$= \int_Y \int_X p_2(x, y)\, I(x; y)\, dx dy = I(Y; X), \tag{18.3}$$

$$I(X; Y) = \int_Y \int_X p_2(x, y) \log \frac{p_1(x \mid y)}{p_1(x)}\, dx dy = -\int_X p_1(x) \log p_1(x)\, dx +$$

$$+ \int_X \int_Y p_2(x, y) \log p_1(x \mid y)\, dx dy, \tag{18.4}$$

$$I(X; y) \geqslant 0, \quad I(x; Y) \geqslant 0, \quad I(X; Y) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

Здесь $I(x; y)$ — взаимная информация между каким-либо значением x входного и значением y выходного сообщений, $I(X; y)$, $I(x; Y)$ — средние значения условной информации, $I(X; Y)$ — полная средняя взаимная информация.

Формулы для энтропии H непрерывных сообщений получаются путем обобщения формул для энтропии дискретных сообщений. Если Δx — интервал квантования (точность измерения), то при достаточно малом Δx энтропия непрерывных сообщений

$$H_1(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \log p_1(x)\, dx - \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\, dx =$$

$$= H(X) - \log \Delta x = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \log [p_1(x)\, \Delta x]\, dx, \tag{18.6}$$

где

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \log p_1(x)\, dx. \tag{18.7}$$

Из (18.6) видно, что информативность сообщений, обусловленная статистикой состояний элементов сообщения, целиком определяется величиной $H(X)$, которая называется дифференциальной [115, 116], а иногда приведенной [3] энтропией.

Величина $-\log \Delta x$ зависит только от выбранного интервала Δx, определяющего точность квантования, и при $\Delta x = \text{const}$ есть величина постоянная, которую иногда исключают из рассмотрения [117, 118]. При определении полной взаимной информации $I(X; Y)$ величины $\log \Delta x$ и $\log \Delta y$ взаимно компенсируются, так что $I(X; Y)$ от выбора координат не зависит.

По аналогии с (18.7)

$$H(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(y) \log p_1(y)\, dy, \tag{18.8}$$

$$H(X \mid Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) \log p_1(x \mid y)\, dxdy, \tag{18.9}$$

$$H(Y \mid X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) \log p_1(y \mid x)\, dxdy. \tag{18.10}$$

Когда X и Y статистически связаны между собой, то

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y). \tag{18.11}$$

При независимых X и Y

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y). \tag{18.12}$$

Полная средняя взаимная информация определяется формулой

$$I(X; Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X), \tag{18.13}$$

а пропускная способность непрерывного канала

$$C = \lim_{T\to\infty} \operatorname{Max}\left[\frac{1}{T} I(X; Y)\right], \tag{18.14}$$

где максимум $I(X; Y)$ достигается выбором оптимального распределения $p_1(x)$ входного сигнала $x(t)$ при достаточно большом интервале времени T.

В случае канала связи с ограниченной полосой частот пропускная способность определяется формулой Шеннона [1]

$$C = F \log(1 + \sigma_s^2/N_0 F), \tag{18.15}$$

где F — полоса пропускания канала; N_0 — постоянная спектральная плотность нормального стационарного шума $n(t)$ в полосе $0 < f < F$; $\sigma_s^2 = \langle x^2(t) \rangle = \text{const}$ — ограниченная средняя мощность сигнала $x(t)$, представляющего собой стационарный гауссовский процесс с равномерной спектральной плотностью в полосе $0 < f < F$; $y(t) = x(t) + n(t)$, причем $x(t)$ и $n(t)$ — статистически независимы.

Если $\sigma_s^2/N_0F \gg 1$ (отношение сигнал/шум велико), то

$$C \simeq F \log(\sigma_s^2/N_0F). \tag{18.16}$$

При $\sigma_s^2/N_0F \ll 1$

$$C \simeq 1{,}443\sigma_s^2/N_0. \tag{18.17}$$

Когда спектральная плотность гауссовского случайного сигнала $x(t)$ есть $S(f)$, а спектральная плотность аддитивного гауссовского шума $n(t)$ равна $N(f)$, формула (18.15) имеет вид

$$C = \int_{f_1}^{f_2} \log[1 + S(f)/N(f)]\, df. \tag{18.18}$$

В табл. 18.1 приведены значения энтропии $H(X)$ некоторых непрерывных законов распределения [1, 15, 110, 115—120].

Таблица 18.1

Энтропия $H(X)$ некоторых непрерывных законов распределения

Наименование закона распределения	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	$H(X)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\log p_1(x)\,dx$
Равномерный (прямоугольный)	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases}$	$\log(b-a)=\log(\sigma 2\sqrt{3})$
Гауссовский (нормальный)	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\log(\sigma\sqrt{2\pi e})$
χ^2	$\dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,x^{n/2-1}\,e^{-x/2},$ $x>0$	$\log\Gamma(n/2)+\log 2+$ $+[n/2-(n/2-1)\,\psi(n/2)]\log e,$ где $\psi(z)=\dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)-$ пси-функция Эйлера
Гамма-распределение	$\dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\,x^{\alpha}\,e^{-x/\beta},$ $x>0,\ \alpha>-1,\ \beta>0$	$\log\Gamma(\alpha+1)-\alpha\log e\cdot\psi(\alpha+1)+$ $+(\alpha+1)\log e+\log\beta,$ где $\psi(\alpha+1)$ — пси-функция Эйлера
Коши	$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{h}{h^2+(x-x_0)^2}$	$\log 4\pi h$
Релея	$\dfrac{x}{\sigma^2}\,e^{-x^2/2\sigma^2},$ $x>0$	$(c/2+1)\log e,$ где $c=0{,}5772\ldots$ — число Эйлера
Максвелла	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{\sigma^3}\,x^2\,e^{-x^2/2\sigma^2},$ $x>0$	$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2\pi\sigma^2}{e}+c\log e,$ где $c=0{,}5772$
Лапласа (двухсторонний экспоненциальный)	$\dfrac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda\lvert x-\mu\rvert}$	$\log\dfrac{2e}{\lambda}=\log(\sigma e\sqrt{2})$
Экспоненциальный односторонний	$\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$\log\dfrac{e}{\lambda}=\log(\sigma e)$

Наименование закона распределения	Аналитическое выражение плотности вероятности $p_1(x)$	$H(X) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \log p_1(x)\, dx$
Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x},\ x > 0$	$\log m! - m \log e \times \times \left[\sum\limits_{k=2}^{m} \frac{1}{k} - c\right] + \log e,$ где $c = 0{,}5772$
Симпсона (треугольный)	$\begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{b+a}{2}, \\ \frac{4(b-a)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 0, & x > b \end{cases}$	$\log \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2} = \log(\sigma\sqrt{6e})$
Закон арксинуса	$\begin{cases} 0, & x < -a, \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & -a < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\log \pi + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^a \frac{\log(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

2. ПРИМЕРЫ

18.1. На вход приемного устройства воздействует колебание $y(t) = x(t) + n(t)$, где сигнал $x(t)$ и помеха $n(t)$ — независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными соответственно σ_x^2 и σ_n^2.

Определить: 1) количество взаимной информации $I(x; y)$, которое содержится в каком-либо значении принятого колебания $y(t)$, о значении сигнала $x(t)$; 2) полную среднюю взаимную информацию $I(X; Y)$.

Решение. По условию задачи $y(t)$ представляет собой сумму независимых колебаний $x(t)$ и $n(t)$, которые имеют нормальные плотности вероятности. Поэтому

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2,$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad p_1(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

$$p_1(y|x) = p_1(y-x) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right) = p_1(n).$$

1. По формуле (18.1) находим

$$I(x;\ y)=\log\frac{p_1(y\mid x)}{p_1(y)}=\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{p_1(y\mid x)}{p_1(y)}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sigma_y}{\sigma_n}\exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

$$I(x;\ y)=\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}+\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}+\frac{y^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_n^2)}\right].$$

2. Согласно (18.3) имеем

$$I(X;\ Y)=\int_X\int_Y p_2(x,\ y)\,I(x;\ y)\,dxdy=\langle[I(x;\ y)]\rangle=\log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}+$$

$$+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{\langle y^2\rangle}{2(\sigma_x^2+\sigma_n^2)}-\frac{\langle n^2\rangle}{2\sigma_n^2}\right]=\log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}+$$

$$+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{\sigma_x^2+\sigma_n^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_n^2)}-\frac{\sigma_n^2}{2\sigma_n^2}\right],$$

где $\langle\ \ \rangle$ — знак усреднения по множеству.

Таким образом,

$$I(X;\ Y)=\log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)\text{дв. ед.}$$

18.2. Вычислить полную среднюю взаимную информацию $I(X;\ Y)$ между случайными величинами X и Y, имеющими нормальные плотности вероятностей и коэффициент взаимной корреляции

$$R_{xy}=R=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\langle(x-m_x)(y-m_y)\rangle,$$

где m_x, m_y, σ_x^2, σ_y^2 — математические ожидания и дисперсии величин X и Y.

Решение. В соответствии с (18.3) и (18.1) имеем

$$I(X;\ Y)=\int_X\int_Y p_2(x,\ y)\,I(x;\ y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_2(x,\ y)\times$$

$$\times\log\frac{p_2(x,\ y)}{p_1(x)\,p_1(y)}\,dxdy=\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_2(x,\ y)\,[\ln p_2(x,\ y)-\ln p_1(x)-$$

$$-\ln p_1(y)]\,dxdy=\frac{1}{\ln 2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_2(x,\ y)\ln p_2(x,\ y)\,dxdy-\right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\ln p_1(x)\,dxdy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\ln p_1(y)\,dxdy\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\ln p_2(x, y)\,dxdy - \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\ln p_1(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y)\ln p_1(y)\,dy\right].$$

Вычислим эти интегралы, учитывая, что по условию

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

$$p_1(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right],$$

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2R\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\ln p_2(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y)\times$$

$$\times\left\{\ln\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}} - \frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2R\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}dxdy = -\ln\left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2(1-R^2)\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 p_2(x, y)\,dxdy +$$

$$+ \frac{2R}{2(1-R^2)\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,p_2(x, y)\,dxdy -$$

$$- \frac{1}{2(1-R^2)\sigma_y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 p_2(x, y)\,dxdy.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 p_2(x, y)\,dxdy = \sigma_x^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 p_2(x, y)\,dxdy = \sigma_y^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,p_2(x, y)\,dxdy = R\sigma_x\sigma_y,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x,y)\ln p_2(x,y)\,dxdy = -\ln\left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}\right) - \frac{1}{2(1-R^2)} +$$

$$+\frac{R^2}{1-R^2} - \frac{1}{2(1-R^2)} = -\ln\left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}\right) - 1 =$$

$$= -\ln\left(2\pi e\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\ln p_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\left[\ln\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]dx =$$

$$= -\ln\left(\sigma_x\sqrt{2\pi}\right) - 1/2 = -\ln\sqrt{2\pi e\sigma_x^2}.$$

По аналогии

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(y)\ln p_1(y)\,dy = -\ln\sqrt{2\pi e\sigma_y^2}.$$

Тогда

$$I(X;\,Y) = \frac{1}{\ln 2}\left[-\ln\left(2\pi e\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}\right) + \ln\sqrt{2\pi e\sigma_x^2} +\right.$$

$$\left.+\ln\sqrt{2\pi e\sigma_y^2}\right] = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sqrt{4\pi^2 e^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{\sqrt{4\pi^2 e^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-R^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\sqrt{\frac{1}{1-R^2}} = -\frac{1}{2\ln 2}(1-R^2).$$

Следовательно,

$$I(X;\;Y) = -(1/2)\log(1-R^2).$$

18.3. По линии связи передаются непрерывные амплитудно-модулированные сигналы $x(t)$, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$ и дисперсией $\sigma_x^2 = \sigma^2 = 8\text{В}^2$.

Определить энтропию $H_1(X)$ сигнала при точности его измерения $\Delta x = 0{,}2$ В.

Решение. По условию плотность вероятности сигнала $x(t)$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

По формуле (18.6) имеем

$$H_1(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\log p_1(x)\,dx - \log\Delta x =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\ln p_1(x)\,dx - \log\Delta x =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\left[\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx - \log\Delta x =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}\right) - \log\Delta x =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\sqrt{2\pi e\sigma^2} - \log\Delta x = \log\frac{\sqrt{2\pi e\sigma^2}}{\Delta x}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$H_1(X) = \log\frac{\sqrt{2\pi e 8}}{0{,}2} \simeq 5{,}87 \text{ дв. ед.}$$

18.4. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности $p_1(x)$. Величина Y есть однозначная функция $Y = g(X)$.

Показать, что

$$H(Y) = H(X) - \left\langle \log\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\right\rangle,$$

где $H(X)$, $H(Y)$ — соответственно дифференциальные энтропии величин X и Y; $D(x/y)$ — якобиан преобразования от x к y.

Решение. Так как

$$p_1(y) = p_1(x)\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|, \quad dy = \left|D\left(\frac{y}{x}\right)\right|dx,$$

то по формуле (18.8) имеем

$$H(Y) = -\int_Y p_1(y)\log p_1(y)\,dy = -\int_X p_1(x)\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right| \times$$

$$\times \log\left[p_1(x)\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\right]\left|D\left(\frac{y}{x}\right)\right|dx =$$

$$= -\int_X p_1(x)\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\left|D\left(\frac{y}{x}\right)\right|\log p_1(x)\,dx -$$

$$-\int_X p_1(x)\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\left|D\left(\frac{y}{x}\right)\right|\log\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|dx.$$

Поскольку

$$\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\left|D\left(\frac{y}{x}\right)\right| = 1, \quad \int_X p_1(x)\log\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|dx = \left\langle \log\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\right\rangle,$$

окончательно получим

$$H(Y) = H(X) - \left\langle \log\left|D\left(\frac{x}{y}\right)\right|\right\rangle.$$

18.5. Средняя мощность передаваемых сигналов $\sigma_x^2 = \sigma^2$. Найти распределение, которое при данном ограничении обладает максимальной энтропией, равной

$$H(X) = (1/2) \ln (2\pi e\sigma^2).$$

Решение. Решим задачу с помощью методов вариационного исчисления [117] (иной метод использован в [1, 110]).

Если требуется найти максимум (или минимум) интеграла

$$I = \int_a^b F[x,\ p_1(x)]\, dx \tag{18.19}$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi_1[x,\ p_1(x)]\, dx = k_1 = \text{const},\\
&\int_a^b \varphi_2[x,\ p_1(x)]\, dx = k_2 = \text{const},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_a^b \varphi_n[x,\ p_1(x)]\, dx = k_n = \text{const},
\end{aligned} \tag{18.20}$$

то функция $p_1(x)$, обеспечивающая максимум (или минимум) интеграла (18.19), находится из решения уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_1} = 0, \tag{18.21}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые константы (неопределенные множители Лагранжа), которые определяются подстановкой $p_1(x)$, являющейся решением уравнения (18.21), в равенства (18.20).

В данном случае требуется найти такую функцию $p_1(x)$, при которой

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \ln p_1(x)\, dx$$

достигает максимума, причем максимум следует искать при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\, dx = \sigma^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\, dx = 1. \tag{18.22}$$

Функции F, φ_1, φ_2 имеют вид

$$F[x,\ p_1(x)] = -p_1(x) \ln p_1(x),$$

$$\varphi_1[x,\ p_1(x)] = x^2 p_1(x), \quad \varphi_2[x,\ p_1(x)] = p_1(x).$$

Следовательно,

$$\partial F/\partial p_1 = -[1 + \ln p_1(x)], \quad \partial\varphi_1/\partial p_1 = x^2, \quad \partial\varphi_2/\partial p_1 = 1.$$

Подставив значения производных в (18.21), получим

$$-1 - \ln p_1(x) + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 = 0.$$

Из этого соотношения следует, что $\ln p_1(x) = \lambda_2 - 1 + \lambda_1 x^2$ или

$$p_1(x) = e^{\lambda_2 - 1} e^{\lambda_1 x^2}. \tag{18.23}$$

Для исключения неизвестных λ_1 и λ_2 подставим найденное значение $p_1(x)$ во второе равенство (18.22). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_2 - 1} e^{\lambda_1 x^2}\,dx = 2e^{\lambda_2 - 1}\int_0^{\infty} e^{\lambda_1 x^2}\,dx = 1.$$

Отметим, что λ_1 должно быть отрицательным, ибо в противном случае интеграл $\int_0^{\infty} p_1(x)\,dx$ расходится. Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2a,$$

то

$$2e^{\lambda_2 - 1}\int_0^{\infty} e^{\lambda_1 x^2}\,dx = 2e^{\lambda_2 - 1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_1}} = 1$$

или

$$e^{-\lambda_2 - 1} = \sqrt{-\lambda_1/\pi}.$$

Тогда (18.23) примет вид

$$p_1(x) = \sqrt{-\lambda_1/\pi}\, e^{\lambda_1 x^2}. \tag{18.24}$$

Подставим (18.24) в первое соотношение (18.22):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\,dx = 2\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}}\int_0^{\infty} x^2 e^{\lambda_1 x^2}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}}\,\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{(-\lambda_1)^3}} = -\frac{1}{2\lambda_1}.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1/2\sigma^2$.

Подставив значение λ_1 в выражение (18.24), окончательно получим

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Таким образом, при ограничении сигналов по их средней мощности максимальной энтропией обладают функции с нормальным распределением.

Вычислим энтропию случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \ln p_1(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \ln\sqrt{2\pi\sigma^2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \frac{x^2}{2\sigma^2}\, dx.$$

Учитывая ограничивающие условия (18.22), найдем

$$H(X) = H_m(X) = \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} + \sigma^2/2\sigma^2 = \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} + \ln e.$$

Следовательно,

$$H(X) = \ln\sqrt{2\pi e\sigma^2} = (1/2) \ln (2\pi e\sigma^2).$$

18.6. Определить полосу пропускания канала передачи телевизионного черно-белого изображения с $5 \cdot 10^5$ элементами, 25 кадрами в секунду и 8 равновероятными градациями яркости для отношения $\sigma_s^2/N_0F = P_s/P_n = 15$ при условии, что изображение может принимать наиболее хаотичный вид — вид «белого шума».

Решение. Изображение принимает вид белого шума, если все его элементы как в одном кадре, так и в различных независимы. Энтропия такого изображения при указанных условиях равна

$$H_k(X) = 5 \cdot 10^5 \log 8 = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ дв. ед.}$$

Ввиду независимости кадров общее максимальное количество информации, которое должно быть передано в 1 с, составит $H(X) = 25 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6$ дв. ед. Приравнивая это значение пропускной способности канала (18.15), получаем $25 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = F \log (1 + 15)$, откуда

$$F = 9{,}375 \cdot 10^6 \text{ Гц} \simeq 9{,}4 \text{ МГц}.$$

Обычные телевизионные изображения имеют сильную пространственную и временную корреляцию. Поэтому практически необходимая пропускная способность может быть существенно меньше принятого здесь максимального значения.

18.7. Найти спектральную плотность сигнала $S(f)$, которая при заданных значениях его полной мощности $P_s = \int_{f_1}^{f_2} S(f)\, df$ и спектральной плотности гауссовской помехи $N(f)$ обеспечит максимальную скорость передачи информации.

Решение. Согласно (18.18)

$$C = \int_{f_1}^{f_2} \ln [1 + S(f)/N(f)]\, df.$$

Требуется найти максимум этого интеграла при условии $P_s = \int_{f_1}^{f_2} S(f)\,df$. На основании (18.21) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial S} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \ln\left(1 + \frac{S}{N}\right) + \lambda \frac{\partial S}{\partial S} = 0,$$

где $S = S(f)$, $N = N(f)$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial S} \ln\left(1 + \frac{S}{N}\right) = \frac{1}{1 + S/N} \frac{1}{N},$$

то $[S(f) + N(f)]^{-1} = -\lambda$. Следовательно,

$$S(f) = -1/\lambda - N(f).$$

Искомая спектральная плотность сигнала $S(f)$ должна быть такой, чтобы, будучи добавленной к спектральной плотности помехи $N(f)$, она обеспечила постоянство этой суммы и независимость ее от частоты. Величина λ выбирается так, чтобы общая мощность полезного сигнала равнялась заданной мощности P_s.

3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

18.1. Информация передается посредством изменения амплитуды сигнала X, распределенной по нормальному закону с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x^2 = 15$. Величина X измеряется регистрирующим устройством с погрешностью Z, не зависящей от амплитуды сигнала и также распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $m_z = 0$ и дисперсией $\sigma_z^2 = 9$.

Определить количество информации $I(X; Y)$ о величине X заключенное в случайных результатах измерений $Y = X + Z$.

Ответ: $I(X; Y) \simeq 0{,}71$ дв. ед.

18.2. Для контроля исправности блока периодически измеряют напряжение в контрольной точке схемы. При исправном блоке это напряжение равно 1 В, а при неисправном — 0 В. Ошибка вольтметра распределена равномерно с нулевым средним, но ширина этого распределения зависит от значения измеряемого напряжения: она равна 2 В, если напряжение на выходе составляет 1 В, и 1 В в противном случае. В среднем в 90% времени блок исправен.

Вычислить количество информации $I(X; Y)$, доставляемой прибором при одном измерении.

Ответ [120]: $I(X; Y) = 0{,}28$ дв. ед.

18.3. Информация передается с помощью частотно-модулированных синусоидальных сигналов, рабочая частота F которых изменяется с равной вероятностью от $f_1 = 10$ МГц до $f_2 = 50$ МГц.

Определить энтропию $H_1(F)$, если точность измерения частоты $\Delta f = 2$ кГц.

Ответ: $H_1(F) \simeq 14{,}28$ дв. ед.

18.4. Измерительное устройство вырабатывает временные интервалы, распределенные случайным образом в пределах от 100 до 500 мс.

Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1 мс до 1 мкс?

Ответ: Энтропия увеличится примерно на 10 дв. ед.

18.5. Вычислить дифференциальную энтропию нормального закона с дисперсией σ^2 и равномерного распределения с той же дисперсией.

Ответ: $H_{\text{г}}(X) = \log(\sigma\sqrt{2\pi e})$, $H_{\text{р}}(X) = \log(\sigma 2\sqrt{3})$.

18.6. В результате полной дезорганизации управления n самолетов летят с произвольными курсами. Управление восстановлено и все самолеты взяли общий курс со средней квадратической ошибкой $\sigma_\varphi = 3°$.

Определить изменение энтропии ΔH_1, считая, что в первом состоянии имеет место равномерное распределение вероятности, а во втором — нормальное.

Ответ: $\Delta H = H_{\text{р}}(X) - H_{\text{г}}(X) = 4{,}86\ n$ дв. ед.

18.7. Плотность вероятности случайного процесса $x(t)$ имеет вид $p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Найти дифференциальную энтропию величины X.

Ответ: $H(X) = \log(e/\lambda)$.

18.8. Определить энтропию $H(X)$ случайной величины X, функция распределения которой

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $H(X) = \log(\sqrt{e}/2)$.

18.9. Показать, что если система с нормальным распределением координаты переходит из состояния, при котором $\sigma_x = \sigma_1$, в состояние, при котором $\sigma_x = \sigma_2$, то приращение энтропии

$$\Delta H = H_2(X) - H_1(X) = \log(\sigma_2/\sigma_1).$$

18.10. Найти дифференциальную энтропию случайной величины $Y = A \sin \omega t$, где t равномерно распределено в интервале от $-\pi/\omega$ до π/ω; A и ω — положительные постоянные.

Ответ [62]: $H(Y) = \ln(\pi A/2)$.

18.11. Определить условную дифференциальную энтропию $H(X|y)$ и среднюю условную дифференциальную энтропию $H(X|Y)$ случайной величины X относительно Y, а также $H(Y|x)$ и $H(Y|X)$ случайной величины Y относительно X для системы (X, Y) гауссовских случайных величин.

Ответ:

$$H(X|y) = H(X|Y) = \log[\sigma_x\sqrt{2\pi e(1 - R_{xy}^2)}];$$

$$H(Y|x) = H(Y|X) = \log[\sigma_y\sqrt{2\pi e(1 - R_{xy}^2)}],$$

где σ_x и σ_y — средние квадратические значения; R_{xy} — коэффициент корреляции между X и Y.

18.12. Найти дифференциальную энтропию $H(X)$ равномерного распределения на отрезке $(0, 2)$ и энтропию суммы двух независимых случайных величин X и Y, равномерно распределенных на указанном интервале.

Ответ: $H(X) = 1$ дв. ед., $H(X, Y) = 2$ дв. ед.

18.13. Радиоприем осуществляется на две антенны, разнесенные в пространстве так, что сигналы $x(t)$ и $y(t)$ в ветвях статистически независимы.

Определить энтропию $H(Z)$ колебания $z(t)$ на выходе суммирующего устройства, если $x(t)$ и $y(t)$ распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_x^2 = 16$ В^2 и $\sigma_y^2 = 25$ В^2.

Ответ: $H(Z) \simeq 4{,}73$ дв. ед.

18.14. Показать, что если $Y = X \pm c$, где c — постоянная величина, или $Y = -X$, то $H(Y) = H(X)$.

18.15. Измерительное устройство вырабатывает случайный сигнал $x(t)$ с нормальной плотностью вероятности и корреляционной функцией вида $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

Определить энтропию сигнала и его изытбочность, вызванную наличием корреляции, если $\sigma_x = 6$ В.

Ответ [116]: $H(X|Y) = 4{,}52$ дв. ед., $R = 0{,}024$.

18.16. Ансамбль сигналов, проходящих через усилитель, имеет значения, ограниченные сверху величиной $x = b$ и снизу — величиной $x = a$.

Найти максимальную энтропию $H_m(X)$ и энтропию $H(X)$ на единицу времени, если ширина полосы пропускания усилителя равна F.

Ответ: $H_m(X) = \log(b-a)$ дв. ед., $H(X) = 2F \log(b-a)$ дв. ед.

18.17. Передаваемые сигналы ограничены по пиковой мощности. Определить распределение, которое при данном ограничении обладает максимальной энтропией, а также вычислить энтропию при этом распределении.

Ответ: $p_1(x) = 1/2\sqrt{P_m}$, $H(X) = \ln 2\sqrt{P_m}$, где P_m — пиковая мощность.

18.18. Сигнал с математическим ожиданием m_x может принимать только положительные значения [$p_1(x) = 0$ при $x < 0$].

Найти распределение, которое при данных ограничениях обладает максимальной энтропией.

Ответ: $p_1(x) = \dfrac{1}{m_x} e^{-x/m_x}$.

18.19. Показать, что при заданной энтропии нормальное распределение вероятностей

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

имеет наименьшую из всех одномерных распределений дисперсию.

18.20. Определить максимально возможную скорость передачи информации по радиотехническому каналу связи пункта управления с телеуправляемой ракетой, если полоса пропускания канала связи равна 3 МГц, а минимальное отношение сигнал/шум по мощности в процессе наведения ракеты на цель равно трем.

Ответ: $C = 6 \cdot 10^6$ дв. ед./с.

18.21. Вычислить пропускную способность канала связи с амплитудно-импульсной модуляцией, если число уровней сигнала 16, полоса частот исходного сигнала F_s, сигнал равномерно распределен на интервале ($-U_м$, $+U_м$), а вероятность искажения, выражающая возможность перехода в соседний уровень, 5%.

Ответ [119]: $C = 8{,}5$ дв. ед.

18.22. Сравнить пропускные способности двух каналов связи, если в первом действует белый гауссовский шум в полосе F с дисперсией $\sigma^2 = 1$ В^2, а во втором — белый шум, равномерно распределенный в интервале $\pm 1{,}5$ В с полосой $2F$. Считать, что мощность передаваемого сигнала P_s велика по сравнению с мощностью шумов.

Ответ: $C_1 - C_2 = F \log \frac{N_э^2}{P_s}$, $N_э = \frac{1}{2\pi e} e^{2\log 3}$,

где C_1 и C_2 — пропускные способности первого и второго каналов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица нормальной плотности вероятности $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1824	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблица интеграла вероятности $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ для $0{,}00\leqslant z\leqslant 4{,}99$; $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0 7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899

2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0,9^20097$	$0,9^20358$	$0,9^20613$	$0,9^20863$	$0,9^21106$	$0,9^21344$	$0,9^21576$
2,4	$0,9^21802$	$0,9^22024$	$0,9^22240$	$0,9^22451$	$0,9^22656$	$0,9^22857$	$0,9^23053$	$0,9^23244$	$0,9^23431$	$0,9^23613$
2,5	$0,9^23790$	$0,9^23963$	$0,9^24132$	$0,9^24297$	$0,9^24457$	$0,9^24614$	$0,9^24766$	$0,9^24915$	$0,9^25060$	$0,9^25201$
2,6	$0,9^25339$	$0,9^25473$	$0,9^25604$	$0,9^25731$	$0,9^25855$	$0,9^25975$	$0,9^26093$	$0,9^26207$	$0,9^26319$	$0,9^26427$
2,7	$0,9^26533$	$0,9^26636$	$0,9^26736$	$0,9^26833$	$0,9^26928$	$0,9^27020$	$0,9^27110$	$0,9^27197$	$0,9^27282$	$0,9^27365$
2,8	$0,9^27445$	$0,9^27523$	$0,9^27599$	$0,9^27673$	$0,9^27744$	$0,9^27814$	$0,9^27882$	$0,9^27948$	$0,9^28012$	$0,9^28074$
2,9	$0,9^28134$	$0,9^28193$	$0,9^28250$	$0,9^28305$	$0,9^28359$	$0,9^28411$	$0,9^28462$	$0,9^28511$	$0,9^28559$	$0,9^28605$
3,0	$0,9^28650$	$0,9^28694$	$0,9^28736$	$0,9^28777$	$0,9^28817$	$0,9^28856$	$0,9^28893$	$0,9^28930$	$0,9^28965$	$0,9^28999$
3,1	$0,9^30324$	$0,9^30646$	$0,9^30957$	$0,9^31260$	$0,9^31553$	$0,9^31836$	$0,9^32112$	$0,9^32378$	$0,9^32636$	$0,9^32886$
3,2	$0,9^33129$	$0,9^33363$	$0,9^33590$	$0,9^33810$	$0,9^34024$	$0,9^34230$	$0,9^34429$	$0,9^34623$	$0,9^34810$	$0,9^34991$
3,3	$0,9^35166$	$0,9^35335$	$0,9^35499$	$0,9^35658$	$0,9^35811$	$0,9^35959$	$0,9^36103$	$0,9^36242$	$0,9^36376$	$0,9^36505$
3,4	$0,9^36631$	$0,9^36752$	$0,9^36869$	$0,9^36982$	$0,9^37091$	$0,9^37197$	$0,9^37299$	$0,9^37398$	$0,9^37493$	$0,9^37585$
3,5	$0,9^37674$	$0,9^37759$	$0,9^37842$	$0,9^37922$	$0,9^37999$	$0,9^38074$	$0,9^38146$	$0,9^38215$	$0,9^38282$	$0,9^38347$
3,6	$0,9^38409$	$0,9^38469$	$0,9^38527$	$0,9^38583$	$0,9^38637$	$0,9^38689$	$0,9^38739$	$0,9^38787$	$0,9^38834$	$0,9^38879$
3,7	$0,9^38922$	$0,9^38964$	$0,9^40039$	$0,9^40426$	$0,9^40799$	$0,9^41158$	$0,9^41504$	$0,9^41838$	$0,9^42159$	$0,9^42468$
3,8	$0,9^42765$	$0,9^43052$	$0,9^43327$	$0,9^43593$	$0,9^43848$	$0,9^44094$	$0,9^44331$	$0,9^44558$	$0,9^44777$	$0,9^44988$
3,9	$0,9^45190$	$0,9^45385$	$0,9^45573$	$0,9^45753$	$0,9^45926$	$0,9^46092$	$0,9^46253$	$0,9^46406$	$0,9^46554$	$0,9^46696$
4,0	$0,9^46833$	$0,9^46964$	$0,9^47090$	$0,9^47211$	$0,9^47327$	$0,9^47439$	$0,9^47546$	$0,9^47649$	$0,9^47748$	$0,9^47843$
4,1	$0,9^47934$	$0,9^48022$	$0,9^48106$	$0,9^48186$	$0,9^48263$	$0,9^48338$	$0,9^48409$	$0,9^48477$	$0,9^48542$	$0,9^48605$
4,2	$0,9^48665$	$0,9^48723$	$0,9^48778$	$0,9^48832$	$0,9^48882$	$0,9^48931$	$0,9^48978$	$0,9^50226$	$0,9^50655$	$0,9^51066$
4,3	$0,9^51460$	$0,9^51837$	$0,9^52199$	$0,9^52545$	$0,9^52876$	$0,9^53193$	$0,9^53497$	$0,9^53788$	$0,9^54066$	$0,9^54332$
4,4	$0,9^54587$	$0,9^54841$	$0,9^55065$	$0,9^55288$	$0,9^55502$	$0,9^55706$	$0,9^55902$	$0,9^56089$	$0,9^56268$	$0,9^56439$
4,5	$0,9^56602$	$0,9^56759$	$0,9^56908$	$0,9^57051$	$0,9^57187$	$0,9^57318$	$0,9^57442$	$0,9^57561$	$0,9^57675$	$0,9^57784$
4,6	$0,9^57888$	$0,9^57987$	$0,9^58081$	$0,9^58172$	$0,9^58258$	$0,9^58340$	$0,9^58419$	$0,9^58494$	$0,9^58566$	$0,9^58634$
4,7	$0,9^58699$	$0,9^58761$	$0,9^58821$	$0,9^58877$	$0,9^58931$	$0,9^58983$	$0,9^60320$	$0,9^60789$	$0,9^61235$	$0,9^61661$
4,8	$0,9^62067$	$0,9^62453$	$0,9^62822$	$0,9^63173$	$0,9^63508$	$0,9^63827$	$0,9^64131$	$0,9^64420$	$0,9^64696$	$0,9^64958$
4,9	$0,9^65208$	$0,9^65446$	$0,9^65673$	$0,9^65889$	$0,9^66094$	$0,9^66289$	$0,9^66475$	$0,9^66652$	$0,9^66821$	$0,9^66981$

Пример: $\Phi(3,57) = 0,9^38215 = 0,9998215$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Процентные точки распределения χ^2 $P[\chi^2_k > \chi^2_{k;\,\alpha}] = \alpha$

	α							
k	0,990	0,975	0,950	0,900	0,10	0,05	0,025	0,010
1	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12	4,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
120	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95

При $k > 120$ $\chi^2_{k;\,\alpha} \simeq k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^2$, где z_α — заданная процентная точка нормированного гауссовского распределения.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Процентные точки t-распределения Стьюдента $P\,[t_k > t_{k;\,\alpha}] = \alpha$

	α				
k	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Значения $\alpha = 0{,}995$; 0,990; 0,975; 0,950 и 0,900 получают, пользуясь соотношением $t_{k;\,1-\alpha} = -t_{k;\,\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966. — 678 с.
2. **Яглом А. М., Яглом И. М.** Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
3. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей: Учебник для вузов — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1964 — 576 с.
4. **Сборник** задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: Учеб. пособие для вузов/Б. Г. Володин, М. П. Ганин, И. Я. Динер и др.; Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 632 с.
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I; Пер. с англ./Под ред. Е. Б. Дынкина. — М.: Мир, 1967. — 498; т. 2; Пер. с англ./Пер. Ю. В. Прохорова. — М.: Мир, 1967. — 752 с.
6. **Крамер Г.** Математические методы статистики: Пер. с англ./Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
7. **Уилкс С.** Математическая статистика: Пер. с англ./Под ред. Ю. В. Линника. — М.: Наука, 1967. — 632 с.
8. **Хан Г., Шапиро С.** Статистические модели в инженерных задачах: Пер. с англ./Под ред. В. В. Налимова. — М.: Мир, 1969. — 396 с.
9. **Статистические методы** в экспериментальной физике: Пер. с англ./ В. Идье, Д. Драйард, Ф. Джеймс и др. Пер. под ред. А. А. Тяпкина. — М.: Атомиздат, 1976. — 336 с.
10. **Кендалл М., Стюарт А.** Теория распределений: Пер. с англ./ Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Наука, 1966. — 588 с.
11. **Farison I.** On calculating moments for some common probability laws. — IEEE Trans. 1965, v. IT-11, № 4, p. 586—589.
12. **Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.** Теория вероятностей: Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1973. — 496 с.
13. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей: Учебник для университетов. — 5-е изд., стереот. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
14. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. В 3-х кн. — т. 1. — М.: Сов. радио, 1974. — 550 с.
15. **Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И.** Примеры и задачи по статистической радиотехнике: Учебное пособие для вузов/Под ред. В. И. Тихонова. — М.: Сов. радио, 1970. — 600 с.
16. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
17. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — 5-е изд., перераб. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
18. **Вентцель Е. С.; Овчаров Л. А.** Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стереот. — М.: Наука, 1973. — 368 с.
19. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976. — 496 с.

20. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений: Учебное пособие для вузов. М.: Физматгиз, 1959. — 436 с.
21. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1971. — 576 с.
22. Тихонов В. И., Бакаев Ю. Н. Статистическая теория радиотехнических устройств: Учебник для вузов ВВС/ВВИА им. Н. Е. Жуковского. — М., 1978. — 420 с.
23. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1977. — 499 с.
24. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1971. — 328 с.
25. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Коваленко. — М.: Мир, 1971. — 408 с.
26. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства.: Докт. дис. /ВВИА им. Н. Е. Жуковского. — М., 1956.
27. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. I. Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961. — 782 с.; т. 2, 1962. — 750 с.
28. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы. — Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, № 2, с. 144—163.
29. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. — Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, № 4, с. 375—391.
30. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.: ИТТЛ, 1949. — 264 с.
31. Лезин Ю. С. О распределении случайных напряжений на выходе некогерентного накопительного устройства с экспоненциальной весовой функцией. — Изв. вузов СССР. Радиотехника, 1960, № 6, с. 592—597.
32. Marcum J. I. A Statistical theory of target detection by pulsed radar. — IRE. Trans., 1960, v. IT-6, № 2, p. 59—144.
33. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. Детектирование случайных сигналов. — Радиотехника, 1966, т. 21, № 1, с. 31—46.
34. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1965. — 208 с.
35. Papoulis A. Probability, random variables and stochastic processes. — New-York: McGraw-Hill Book Co., 1965. — 583 p.
36. Rice S. O. Mathematical analysis of random noise. — BSTJ, 1944, v. 23, № 3, p. 282—332; v. 24, № 1, p. 46—156.
37. Barret J. E., Lampard D. G. An expansion for some second-order probability distributions and its application to noise problems. — IRF Trans· 1955, v. IT-1, № 1, p. 10—15.
38. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. — 798 с.
39. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Пер. с нем./Под ред. Л. И. Седова. — М.: Наука, 1964. — 344 с.
40. Расщепляев Ю. С. Синтез моделей случайных процессов для исследования систем при помощи ЦВМ. — Радиотехника и электроника, 1975, т. XX, № 1, с. 188—192.
41. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применение. Пер.: с англ. Под ред. В. С. Пугачева. — М.: Наука, 1965. — 464 с.
42. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов: Пер. с англ./Под ред. Р. Л. Добрушина. — М.: ИЛ, 1960. — 468 с.
43. Расщепляев Ю.С., Фандиенко В. Н. О построении моделей стационарных случайных процессов для исследования систем управления. — Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 1, с. 224—231

44. Жуков В. П., Карташев В. Г., Николаев А. М. Сборник задач по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы»: Учебн. пособие для вузов/ Под ред. А. М. Николаева. — М.: Сов. радио, 1972. — 192 с.
45. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
46. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. Пер. с англ./Под ред. А. Н. Ширяева. — М.: Наука, 1969. — 511 с.
47. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ. /Под ред. И. Н. Коваленко. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
48. Cox D. R., Miller H. D. The theory of stochastic processes. — London: Methuen, 1965. — 398 p.
49. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975. — 704 с.
50. Френкс Л. Теория сигналов: Пер. с англ./Под ред. Д. Е. Вакмана. — М.: Сов. радио, 1974. — 344 с.
51. Kaufman H., King E. H. Spectral power density functions in pulse time modulation. — IRE Trans. 1955, v. IT-1, № 1, p. 40—46.
52. Macfarlane G. G. On the energy-spectrum of an almost periodic succession of pulses. — Proc. IRE, 1949, v. 37, № 10, p. 1139—1143.
53. ГОСТ 13377—75. Надежность в технике. Термины и определения.
54. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. — М.: Сов. радио, 1975. — 472 с.
55. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники в 2-х т./ А. А. Барыбин, О. Г. Вендик, Б. Н. Горин и др.; Под ред. Б. Х. Кривицкого, В. Н. Дулина. — М.: Энергия, 1977. Т. 1 — 504 с.
56. Сборник задач по теории надежности/А. М. Половко, И. М. Маликов, А. Н. Жигарев, В. И. Зарудный; Под ред. А. М. Половко, И. М. Маликова. — М.: Сов. радио, 1972. — 408 с.
57. Теория надежности радиоэлектронных систем в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов/Г. В. Дружинин, С. В. Степанов, В. Л. Шихматова, Г. А. Ярыгин; Под ред. Г. В. Дружинина. — М.: Энергия, 1976. — 448 с.
58. Сотсков Б. С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники: Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1970. — 270 с.
59. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 432 с.
60. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Пер. с англ./Под ред. И. Н. Коваленко и Р. Д. Когана. — М.: Сов. радио, 1965. — 510 с.
61. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Сов. радио, 1967. — 300 с.
62. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для университетов. — Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 1967. — 332 с.
63. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. — М.: Сов. радио, 1962. — 254 с.
64. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.
65. Горяинов В. Т. Воздействие на линейную систему отрезка квазигармонических флуктуаций в смеси с белым шумом. — Радиотехника, 1966, т. 21, № 6, с. 1—6.
66. Чайковский В. И. Энергетический спектр суммы запаздывающих стохастических сигналов. —Изв. вузов СССР, Радиотехника, 1965, т. VIII, № 1, с. 87—98.
67. Тепляков И. М. Радиотелеметрия. — М.: Сов. радио. 1966. — 312 с.
68. Wohman W. M., Fuller A. T. Probability densities of the smoothed «Random telegraph signal». — Journ. Electrics and Control, 1958, v. 4, № 6, p. 567—576.

69. **Леонов В. П., Ширяев А. Н.** К технике вычисления семиинвариантов. — Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. 4, вып. 3, с. 342—355.
70. **Таблицы функции ошибок и ее первых двадцати производных.** Пер. с англ./Пер. Л. С. Барк и Л. Н. Большева. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1965. — 276 с.
71. **Слейтер Л. Дж.** Вырожденные гипергеометрические функции: Пер. с англ./ Пер. М. К. Керимова. — М.: Изв. ВЦ АН СССР, 1966. — 250 с.
72. **Амиантов И. Н., Тихонов В. И.** Воздействие нормальных флуктуаций на типовые нелинейные элементы. — Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 4, с. 33—41.
73. **Тихонов В. И., Амиантов И. Н.** Воздействие сигнала и шума на нелинейные элементы (прямой метод). — Радиотехника и электроника, 1957, т. II, № 5, с. 579—590.
74. **Price R.** A useful theorem for nonlinear devices having gaussian inputs. — IRE Trans. 1958, v. IT-4, № 2, p. 69—72.
75. **Ralston G.** Addition of uniform and gaussian distributions — exact and approximate solutions. — Proc. IEEE, 1966, v. 54, № 7, p. 647—654.
76. **Morgan S. P.** Tables of Bessel functions of imaginary order and imaginaru argument. — Institute of Technology, California, 1947. — 61 p.
77. **Билык М. Г.** Корреляционная функция случайного нормального процесса на выходе логарифмического устройства. — В кн.: Проблемы передачи квазистационарных сигналов. — Киев: Изд. АН УССР, 1967, 180 с.
78. **Кратцер А., Франц В.** Трансцендентные функции: Пер. с нем./Пер. Н. Я. Виленкина. — М.: ИЛ, 1963. — 466 с.
79. **Baum R. F.** The correlation function of smoothly limited gaussian noise. — IRE Trans., 1957, v. IT-3, № 3, p. 193—197.
80. **Данилин Б. В., Михайлов Ю. П.** Воздействие флуктуаций на систему ограничитель — инерционная цепь *RC*. — Изв. вузов СССР. Радиотехника, 1966, т. 8, № 6, с. 668—675.
81. **Cooper D. C.** The probability density function for the output of a correlator with band-pass input waveforms. — IEEE Trans., 1965, v. IT-11, № 2, p. 190—195.
82. **Лезин Ю. С.** Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. — М.: Сов. радио, 1969. — 446 с.
83. **Тихонов В. И.** Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
84. **Колмогоров А. Н.** Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.— Изв. АН ССР Сер. математическая, 1941, № 5, с. 3—14.
85. **Wiener N.** Extrapolation, interpolation and soothing of stationary time series. — New-York: John Wiley, 1949— 162 p.
86. **Солодовников В. В.** Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960. — 656 с.
87. **Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г.** Случайные процессы в задачах автоматического управления: Пер. с англ./Под ред. В. С. Пугачева. — М.: ИЛ, 1958— 388 с.
88. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1960. — 884 с.
89. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции: Пер. с англ./ Под ред. В. И. Тихонова. Т. I. — М.: Сов. радио, 1972. — 744 с.
90. **Turin G. L.** An introduction to matched filters.— IRE Trans., 1960, v. IT-6, № 3, p. 311—329.
91. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Сов. радио, 1972. — 448 с.
92. **Витерби Э. Д.** Принципы когерентной связи: Пер. с англ. /Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1970. — 392 с.
93. **Горяинов В. Т.** Отношение сигнал/шум на выходе линейной системы при расстроенном входном сигнале. — Радиотехника, 1966, т. 21, № 6, с. 1—9.

94. **Котельников В. А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956. — 152 с.
95. **Вудворд Ф. М.** Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации: Пер. с англ./Под ред. Г. С. Горелика. — М.: Сов. радио, 1955, — 128 с.
96. **Амиантов И. Н.** Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971. — 416 с.
97. **Хелстром К.** Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963. — 432 с.
98. **Фалькович С. Е.** Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. — М.: Сов. радио, 1961. — 310 с.
99. **Вальд А.** Последовательный анализ. Пер. с англ./Под ред. Б. А. Севастьянова. — М.: Физматгиз, 1962. — 328 с.
100. **Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.** Методы статистического последовательного анализа и их приложения.— М.: Сов. радио, 1962. — 352 с.
101. **Helstrom C. W.** The Resolution of Signals in White Gaussian Noise. — Proc. IRE, 1955, v. 43, № 9, p. 1111—1118.
102. **Таблицы** распределения Релея—Райса/Л. С. Барк, Л. Н. Большев, П. И. Кузнецов и др. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1964. — 246 с.
103. **Turin G. L.** Error probabilities for binary symmetric ideal reception through nonselective slow fading and noise. — Proc. IRE, 1958, v. 46, № 9, p. 851—857.
104. **Константинов П. А.** Помехоустойчивость систем связи с тональной манипуляцией при идеальном приеме. — Радиотехника, 1961, т. 16, № 11, с. 18—25.
105. **Хальд А.** Математическая статистика с техническими приложениями: Пер. с англ./Под ред. Ю. В. Линника. — М.: ИЛ, 1956. — 664 с.
106. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика: Пер. с немец./Под ред. Н. В. Смирнова. — М.: ИЛ, 1960. — 436 с.
107. **Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В.** Теория вероятностей и математическая статистика в технике. — М.: Гостехиздат, 1955. — 556 с.
108. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 256 с.
109. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь: Пер. с англ./Под ред. М. С. Пинскера, Б. С. Цыбакова.—М.: Сов. радио, 1974. — 720 с.
110. **Фано Р.** Передача информации. Статистическая теория связи: Пер. с англ./Под ред. Р. Л. Добрушина. — М.: Мир, 1965. — 439 с.
111. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами. — М.: Наука, 1965. — 276 с.
112. **Мешковский К. А., Кириллов Н. Е.** Кодирование в технике связи. — М.: Связь, 1966. — 324 с.
113. **Цымбал В. П.** Теория информации и кодирование: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд. испр. и доп. — Киев: Вища школа, 1977. — 288 с.
114. **Шляпоберский В. И.** Элементы дискретных систем связи. — М.: Воениздат, 1962. — 236 с.
115. **Тарасенко Ф. П.** Введение в курс теории информации. — Томск: ТГУ им. В. В. Куйбышева, 1963. — 240 с.
116. **Солодов А. В.** Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. — М.: Наука, 1967. — 432 с.
117. **Голдман С.** Теория информации: Пер. с англ./Под ред. В. В. Фурдуева. — М.: ИЛ, 1957. — 446 с.
118. **Клюев Н. И.** Информационные основы передачи сообщений. — М.: Сов. радио, 1966. — 360 с.
119. **Орлов В. А., Филиппов Л. И.** Теория информации в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1976. — 136 с.
120. **Акулиничев Ю. П., Дроздова В. И.** Сборник задач по теории информации. — Томск, ТГУ им. В. В. Куйбышева, 1976. — 114 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Безынерционный преобразователь 339
Белый шум 162
Блуждания случайные 187
Вариационный ряд 108
Вероятность апостериорная 8
— априорная 8
— безотказной работы 7, 249
— доверительная 113
— ложной тревоги 448
— отказа 250
— ошибок 448
— перехода 98, 179
— правильного решения 448
— финальная 181
Взаимная корреляционная функция 145
Время обслуживания заявки 258
— первого достижения границ 184
Выборочные значения 108
— моменты 109
Выброс случайного процесса 392
Гистограмма 108
Дельта-функция 28
Детектор безынерционный квадратичный
— линейный 362
— синхронный
Дисперсия случайной величины
— случайного процесса 130
Доверительный интервал 113
Закон распределения вероятностей 26, 30
— — условный 77
Импульсная характеристика 276
— — оптимального фильтра 414
— — согласованного фильтра 417
Интеграл вероятности 27, 341
Интенсивность отказов 250
Интервал корреляции 145
Квантование 231, 356
Ковариационная функция 129
Комплексная частотная характеристика 282
— — — оптимального фильтра 414
— — — согласованного фильтра 416
Корреляционная матрица 80
Корреляционная функция 130
— — нормированная 145
— — огибающей 324
— — узкополосного процесса 321
Корреляционный момент 79
Коэффициент асимметрии 48
— готовности 252
— избыточности 501
— корреляции 79
— простоя 253
— сноса и диффузии 183
— эксцесса 48
Критерий Байеса 448
— идеального наблюдателя 114, 448
— Неймана—Пирсона 114, 448
— согласия 108
Математическое ожидание 28, 129
Моментные функции 129, 130
Моменты случайной величины 29
— — — абсолютные 29, 78
— — — начальные 29, 78
— — — условные 79
— — — факторные 29, 78
— — — центральные 29, 78
Надежность оценки 113
Неравенство Рао—Крамера 484
Огибающая узкополосного процесса 320, 321
Ограничитель 350, 359, 363
Оптимальная линейная фильтрация 412, 415
Отношение правдоподобия 115, 445
— сигнал/шум 416
Оценка интервальная 110
— несмещенная 111, 484
— параметров распределения 107, 110
— состоятельная 111
— точечная 110
— эффективная 111, 484
Параметр интенсивности 206
— потока отказов 252
Параметры сигнала несущественные 446
— — энергетические 487
Плотность (распределения) вероятностей 26
— — двумерная 75, 132
— — нормальная 27, 128, 132, 136
— — огибающей 323
— — условная 77
— — фазы 323
— отказов 250
— потока 257
Поток восстановления 258
— входной 257
— заявок 257
— Пальма 258
— простейший 257
— Эрланга 239, 258
Процесс марковский 176
— рождения и гибели 190
— пуассоновский 205
— узкополосный 320
Распределение многомодальное 29
— статистическое 110
Семиинварианты 48
Сигнал двоичный 467
— — случайный 188
— квазислучайный телеграфный 196
— случайный [illegible]отелеграфный 226
Систематическая ошибка 111
Случайная величина 26
— — дискретная двумерная 74
— — многомерная 74
— — центрированная 28
Случайный процесс гауссовский 131
— — дифференцируемый 148
— — комплексный 144
— — непрерывный 148
— — стационарный 131
— — центрированный 130
Спектральная плотность 146
Среднее арифметическое отклонение 48
— время безотказной работы 250
— время восстановления 252
— квадратическое отклонение 29
Средний квадрат ошибки фильтрации 413
Тождество Вальда 208
Точность оценки 113
Уравнение интегральное Абеля 133
— — Винера — Хопфа 414
— — Фредгольма 414
— Маркова 180
— Фоккера—Планка—Колмогорова 183
Уровень значимости 109
Условие нормировки 128
— симметрии 128
— согласованности 128
— положительной определенности 128
Фильтр оптимальный 412
— прогнозирующий 413
— сглаживающий 413
— согласованный 416
Формула Винера—Хинчина 147
— Кемпбелла 209
Функционал плотности вероятности 445
— правдоподобия 445
Функция надежности 249
— правдоподобия 486
— распределения вероятностей 26, 75
Характеристическая функция 28, 50, 128, 131
Цепь Маркова 179, 186
Ширина спектральной плотности 148
— — — эффективная 148
Энтропия 29, 497, 516
Якобиан преобразования 81, 340

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию 3

РАЗДЕЛ I. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 4

1. Основные определения и теоремы теории вероятностей 4
   1. Теоретические сведения 4
   2. Примеры 16
   3. Задачи и ответы 19

2. Законы распределения и числовые характеристики одномерных случайных величин 26
   1. Теоретические сведения 26
   2. Примеры 56
   3. Задачи и ответы 67

3. Законы распределения и числовые характеристики многомерных случайных величин 74
   1. Теоретические сведения 74
   2. Примеры 84
   3. Задачи и ответы 98

4. Основы математической статистики 107
   1. Теоретические сведения 107
   2. Примеры 115
   3. Задачи и ответы 122

РАЗДЕЛ II. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ 128

5. Законы распределения и моментные функции 128
   1. Теоретические сведения 128
   2. Примеры 132
   3. Задачи и ответы 136

6. Корреляционные функции и спектральные плотности 143
   1. Теоретические сведения 143
   2. Примеры 150
   3. Задачи и ответы 157

7. Марковские случайные процессы 176
   1. Теоретические сведения 176
   2. Примеры 186
   3. Задачи и ответы 193

8. Точечные и импульсные случайные процессы 205
   1. Теоретические сведения 205
   2. Примеры 224
   3. Задачи и ответы 236

9. Основы теории надежности и массового обслуживания 249
1. Теоретические сведения 249
2. Примеры 261
3. Задачи и ответы 268

РАЗДЕЛ III. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛЕМЕНТЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ 275

10. Воздействие случайных процессов на линейные системы 275
1. Теоретические сведения 275
2. Примеры 282
3. Задачи и ответы 295

11. Узкополосные случайные процессы 319
1. Теоретические сведения 319
2. Примеры 324
3. Задачи и ответы 330

12. Воздействие случайных процессов на нелинейные системы . . . 339
1. Теоретические сведения 339
2. Примеры 347
3. Задачи и ответы 360

13. Выбросы случайных процессов 391
1. Теоретические сведения 391
2. Примеры 396
3. Задачи и ответы 400

РАЗДЕЛ IV. ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ 412

14. Фильтрация сигналов 412
1. Теоретические сведения 412
2. Примеры 417
3. Задачи и ответы 426

15. Обнаружение и различение сигналов 444
1. Теоретические сведения 444
2. Примеры 449
3. Задачи и ответы 467

16. Оценка параметров сигнала 484
1. Теоретические сведения 484
2. Примеры 488
3. Задачи и ответы 491

РАЗДЕЛ V. ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ 495

17. Дискретные системы передачи информации 495
1. Теоретические сведения 495
2. Примеры 502
3. Задачи и ответы 510

18. Непрерывные системы передачи информации 515
1. Теоретические сведения 515
2. Примеры 519
3. Задачи и ответы 527

Приложения 531

Приложение I 531
Приложение II 532
Приложение III 534
Приложение IV 535
Список литературы 536
Предметный указатель 541

Горяинов В. Т. и др.

Г67 Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. Учебн. пособие для вузов / Под ред. В. И. Тихонова. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с., илл.

В пер.: 1 р. 30 к.

Книга содержит примеры и задачи по основным разделам статистической радиотехники (теории вероятностей и математической статистике, теории случайных процессов, помехоустойчивости и теории информации). В каждой главе приведены теоретические сведения, подробно разобраны типовые примеры и сформулированы задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Г $\frac{30401\text{-}022}{046(01)\text{-}80}$ 2-80 2402020000

ББК 32.841
6Ф2

ИБ № 306

Владимир Тимофеевич Горяинов, Андрей Георгиевич Журавлев, Василий Иванович Тихонов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Редактор *Е. В. Вязова*
Художественный редактор *Н. А. Игнатьев*
Переплет художника *Л. Рабенау*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *З. Г. Галушкина*

Сдано в набор 7.07.79 Подписано в печать 27.12.79. Т-21616
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литер. Печать высокая.
Объем усл. 34 п. л. 33,7 уч. изд. л. Тираж 27 000 экз.
Зак. 1203 Цена 1 р. 30 к.
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 129041, Б. Переяславская, 46