

Томский институт автоматизированных систем управления
и радиоэлектроники

В.С.Баушев, Б.А.Бондарь, Н.С.Легостаев

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ
СХЕМ

Учебное пособие

Издательство Томского университета
Томск - 1990

УДК 621.325.5 : 621.382.049.77

Баушев В.С., Бондарь В.А., Легостаев Н.С. Расчет и проектирование электронных схем: Учебное пособие. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. - 265 с. - 40 к. 1000 экз. 2402010000.

Приводятся содержание процесса проектирования электронных схем, топологические модели (схемы замещения) и математические модели электронных схем. Изложены аналитические методы анализа электронных схем с применением унитарных и унитарных графов, сигнальных графов и теоретико-множественного подхода. Рассмотрены вопросы численного анализа и расчета устройств, математические модели которых представляются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для студентов факультета электронной техники, а также инженерно-технических работников, специализирующихся в области проектирования электронных схем.

Рецензент - кандидат технических наук Б.А. Багинский

JSBN 5-73-11-0078-6

В 2402010000 - 70-90
I77(012)-90

(С) Баушев В.С., Бондарь В.А., Легостаев Н.С., 1990

ВВЕДЕНИЕ

Возникающая в процессе практической деятельности человека потребность производить те или иные технические объекты, и в частности объекты электроники, обычно реализуется в последовательности действий:

1. Разработка технического задания.
2. Проектирование объекта.
3. Материализация спроектированного объекта.

В свою очередь, проектирование - это:

- создание идеального образа объекта;
- проверка его функционирования с позиций удовлетворения техническому заданию.

В учебном пособии затрагиваются в основном вопросы проектирования.

В первой, по существу, вводной главе рассмотрено содержание процесса проектирования электронных схем.

В главе 2 проведен анализ схем замещения и математических моделей элементов электронных схем, которые являются своеобразными "кирпичиками" для построения моделей более сложных объектов электроники.

Главы 3 и 4 ориентированы на проектирование электронных схем, представляемых линейными математическими моделями.

В главе 3 на основе схемных функций выявляются те цели анализа, реализация которых приводит к получению нужной информации об объекте.

В главе 4 изложены аналитические методы анализа электронных схем с применением унитарных и УНИТных графов, сигнальных графов и теоретико-множественного подхода. Здесь же рассмотрены моделирование и расчет устройств по их функциональным схемам, а также приемы предварительного расчета схем.

Содержание главы 5 связано с вопросами анализа и проектирования устройств с позиций разработки систем автоматизированного проектирования. В частности, показана возможность автоматизации формирования моделей на основе предложенного формального подхода. Задача поиска стационарных решений сведена к системе трансцендентных уравнений относительно компонент вектора начальных условий для периодического решения. Обсуждаются некоторые подходы к решению этой системы. Для реализации математических

моделей и параметрической оптимизации приведены конкретные примеры и блок-схемы.

Учебное пособие адресовано прежде всего студентам соответствующих специальностей и отражает программы курсов: методы анализа и расчета электронных схем (МАРЭС), электронные цепи непрерывного и импульсного действия (ЭЦНИД), системы автоматизированного проектирования электронных схем (САПР ЭС), преобразовательной техники (ПТ).

1. СОДЕРЖАНИЕ ПРОЦЕССА СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

1.1. Формирование целей проектирования

В процессе создания нового изделия (машины, аппарата, компьютера, холодильника, электронной игрушки, платы управления инверторным силовым модулем или просто "штиблет с электронным зажиганием") на различных его этапах принимают участие сначала инженеры-разработчики (иногда совместно с научными сотрудниками), затем конструкторы-проектировщики, технологи и, наконец, техники и рабочие. Специалисты по промышленной электронике готовятся в основном по профилю инженеров-разработчиков. Попробуем разобраться, что это за профиль и какие задачи должен решать инженер на этапе разработки нового изделия. Прежде чем формулировать и перечислять задачи разработки, полезно определить границы этой работы в довольно продолжительном процессе создания нового изделия. Здесь лучше сознаться сразу, что четких, резко очерченных границ нам, пожалуй, не определить. Они зависят от характера изделия и функционального назначения тех частей, на которые оно разбивается в процессе разработки. Ведь чаще всего каждому инженеру выдается задание на разработку какой-то одной функционально законченной части (блок, модуль, узел, секция, схема, плата и т.п.). Если, конечно, речь идет о довольно сложном изделии. Но словосочетание "задание на разработку" уже прозвучало и понятно, что именно с этого и начинается всякая разработка. Так, формирование технического задания (ТЗ), состоящего из определенного набора технических требований (ТТ) на разрабатываемый объект, и является началом, первым этапом процесса разработки. Заметим, что вообще решение любой задачи, в том числе и технической, начинается с ее постановки, формулирования. Говорят, что правильная, удачная постановка задачи содержит в себе ключ к ее успешному разрешению. Вот почему и нам важно задержаться на этом этапе до полного выяснения его особенностей. Итак, постановка

задачи. Она зависит, по-видимому, от типа задачи, а их еще со времен Евклида сумели разделить всего-навсего на два самых общих типа. Так, к первому относят задачи на поиск (нахождение, конструирование) некоторого объекта, включающие построение, проведение, получение, отождествление, формирование. Короче - это синтез объекта (схемы, устройства, способа, принципа построения), удовлетворяющего с заданной точностью условиям и данным задачи. Ко второму типу относят задачи на доказательство правильности выдвинутых предложений (способов, принципов построения объектов или процедур, теории, гипотез и т.д.). Последние задачи предполагают анализ предложений, сформулированных в условиях задачи, заключение о их правильности или ошибочности, или оценку оптимальности предложенного технического решения по заданным критериям. Процесс разработки новых изделий состоит, по-видимому, от начала и до конца из ряда следующих друг за другом и вытекающих одна из другой задач обоих типов. В целом же процесс разработки - это задача первого типа - задача на нахождение (конструирование). Попробуем ее сформулировать в общем виде (это, кстати сказать, всегда легче, чем сделать что-либо конкретное, хорошо и надежно работающее). Однако сначала напомним, что главными частями задачи являются: неизвестное (искомый объект); условие, которому должен удовлетворять искомый объект, и данные задачи, которые связаны с искомым объектом условиями задачи. Другими словами, целью (решением) задачи разработки является нахождение объекта (схемы, системы, устройства), удовлетворяющего наилучшим образом техническим требованиям ТЗ. Технические требования ТЗ включают как условия задачи (функциональные и электрические параметры объекта и др.), так и ее данные (параметры входных сигналов и параметры нагрузки, заданную элементную базу, параметры внешней среды, весогабаритные показатели и другие технико-экономические требования, выступающие зачастую в роли ограничений поиска оптимального решения). Разделение ТТ на условия и данные, вообще говоря, может быть различным и зависит от конкретного изделия. Формулировать же их в общем виде вряд ли целесообразно, тогда пришлось бы доказывать, что это вообще возможно и т.п. Вернемся к разработке как процессу. Итак, видим, что на первом этапе необходимо заниматься формированием ТЗ. Оно, в сущности, определяет (описывает) разрабатываемый объект, поэтому над формированием ТЗ надо работать как следует. Какие задачи остаются на выделенном нами первом этапе разработки? Обратимся к богатому опыту разработчиков. На первом этапе они выделяют

такие задачи: 1) формирование целей разработки (основные требования ТЗ) и оценка ее целесообразности (здесь, кстати, встретились оба типа задач: на нахождение и на доказательство); 2) формирование полного ТЗ (с четким разделением требований на относящиеся к условиям и на составляющие данные); 3) формирование критерия оптимального выбора технического решения (предложений). Последовательность решения этих задач иногда может быть и другой, когда вторая и третья меняются местами.

Первая задача - формирование целей или целевых установок разработки нового изделия - относится к изделию в целом или к его частям, имеющим самостоятельное значение (например, генератор пилообразного напряжения, АПП, ПАП, быстродействующий усилитель, аналоговое ОЗУ, транзисторный быстродействующий ключ и т.п.). На этом этапе разработки формулируются только основные технические требования на изделие и только в самых общих чертах, включая такие параметры и характеристики, которые определяют судьбу изделия, его целесообразность (а стоит ли им заниматься вообще?). Определяющими здесь являются социальные, экономические и потребительские характеристики, которые, в свою очередь, конечно, тесно связаны с техническими характеристиками и параметрами. Причем, трудно установить, что здесь первично, а что вторично. Ясно одно - их взаимное влияние друг на друга очень сильное. Тем не менее подчеркнем еще раз, что решающая оценка при этом остается за социальными, потребительскими и экономическими характеристиками, которые должны быть обеспечены новым изделием на достаточно высоком уровне. Для постановки такой задачи необходимо соответствующее изучение социальной значимости и потребительского спроса на изделия данного класса; возможностей и достижений технологии, которую реально использовать на конкретном производстве; тенденций развития изделий с прогнозированием улучшаемых параметров и степени этого улучшения; прогнозирование появления в недалеком будущем и желательность новых свойств изделия; и, наконец, оценка экономической целесообразности разработки изделия с учетом ожидаемых спроса, цены и стоимости (затрат). Перечисленного, по-видимому, достаточно, чтобы понять, как непросто решить задачу о целесообразности разработки нового изделия. При этом надо иметь в виду, что далеко не всегда можно получить полную и объективную информацию по всем затронутым вопросам из-за известных ограничений по времени, добросовестности и негативных привычек, поэтому решение приходится принимать в обстановке неполной информации, а значит рисковать.

Итак, если решение о целесообразности разработки нового изделия принято, то из него должно быть ясно, какие основные технико-экономические требования и в каком виде необходимо реализовать в изделии. Заметим, что в решении первой задачи (о целесообразности) принимают участие специалисты различного профиля: администраторы, социологи, экономисты, инженеры и т.д.

1.2. Поиск схмотехнического решения

Вторую задачу, надеясь найти оригинальное решение, решают в два этапа. На первом формируют техническое задание на разработку или на выбор сначала способа (принципа) построения нового изделия (или его части). На втором, когда принцип построения изделия выбран (или придуман), продолжают формировать ТЗ уже до полного вида. Это связано с тем, что поиску оригинальных технических решений мешают подробности, различные детали, т.е. не основные требования ТЗ. Здесь разработчик должен интуитивно выделить, выхватить, уловить те требования ТЗ, которые в своей совокупности как бы обладают потенциалом для удачного нахождения оригинального решения. Инженерам-изобретателям, ученым-прикладникам это довольно часто удается. Кроме того, здесь же необходимо выбрать и сформулировать критерии отбора наилучшего решения, поскольку инженерные задачи в принципе всегда имеют множество решений. Выбор критерия должен, по-видимому, вытекать из решения предыдущей задачи о целях разработки. Итак, если все ясно, поиск можно начинать. Однако на пути создания новых изделий далеко не всегда может быть все ясно, т.е. не все характеристики и связи возможных новых способов (принципов) построения изделия известны. Необходимо проводить дополнительные исследования - научный поиск, эксперименты и т.п. Именно на этих этапах разработки реально возможно наиболее яркое проявление творческого подхода инженера, ученого к решению задач. Существуют, конечно, рецепты, на которые следовало бы обратить внимание с целью выработки в себе правильного подхода к постановке и творческому решению задач. Для ознакомления с эвристическими приемами и методами следует обратиться к соответствующей литературе [1, 2, 8, 9]. Некоторые рекомендации из нее для первоначальной оценки существа дела приводятся ниже.

А теперь рекомендации.

1. Творить нельзя без умственных усилий. Действительно, творческий человек - это всегда труженик, энтузиаст, энергичный человек.

2. Не увязайте слишком глубоко в трясине подробностей. Оставляйте детали на потом. Начав разрабатывать подробно первое найденное "хорошее" решение, Вы помешаете сами себе и не сможете уже думать по-другому. Даже если потом и сыщется лучшее решение, Вы все же склонны будете разрабатывать первое, так как оно оказалось лучше проработанным и более дорогим Вам.

3. Чаше спрашивайте себя: "Почему?" и "Зачем?". Это очень простое и полезное правило.

4. Поставьте себе ближайшей целью найти как можно больше вариантов решений.

5. Избегайте консерватизма, не бойтесь риска.

6. Избегайте поспешных решений. Не торопитесь отвергать найденное решение. Первое рассмотрение может быть поверхностным. Одним из качеств квалифицированного инженера является его настойчивость в применении новых идей, радикально отличающихся от всех предыдущих.

7. Избегайте преждевременного удовлетворения. Не соблазнитесь первой встретившейся "хорошей" идеей или той, что лишь улучшает имеющееся решение, если экономически оправданы дальнейшие поиски. Нужно всегда исходить из того, что есть лучшее решение, чем то, которое уже нашли. Придерживающиеся этого правила редко ошибаются.

8. Обращайтесь за идеями к аналогичным задачам, решаемым в других ситуациях, областях.

9. Консультируйтесь с другими. Это не только расширяет знания, но и наталкивает порой на мысль.

10. Заставьте себя отвлечься от существующих решений любыми способами.

11. Пробуйте групповой подход - мозговой штурм. Этот метод довольно эффективен.

12. Всегда помните об ограниченности ума в процессе создания идей. Если вы постоянно отдаете себе отчет в том, что могут возникнуть чужие ограничения, стараетесь не быть консервативным, не делать поспешных выводов, значит вы сделали важный шаг в преодолении тенденций, которые буквально душат изобретательность.

Продолжая решение второй задачи после нахождения способа построения разрабатываемого объекта, необходимо перейти к ее второй части (этапу). Формирование полного ТЗ во всех деталях потребует тщательного анализа результатов проделанной ранее работы, т.е. целей задачи разработки, основных требований ТЗ и выбранного способа построения объекта. Порядок действий здесь примерно

такой:

1) определить условия задачи разработки, включающие, как правило, описание функций разрабатываемого объекта. Для несложных электронных изделий или их частей (блоков, узлов, устройств, схем) функции имеют сравнительно простое математическое описание. Так, в операторной форме (преобразования Лапласа) функция схемы $F(p)$ определяется отношением выходного сигнала к входному. Для цифровых или цифро-аналоговых устройств функции преобразования сигналов могут быть более сложными, для их описания используется логика, булева алгебра и другие методы. Когда речь идет об известном и вполне определенном классе устройств, в ТЗ включают чаще всего не его основную функцию, которая понятна и однозначно определена в самом названии (например, выпрямитель, усилитель и т.п.), а параметры его основных характеристик (для выпрямителя, например, коэффициент пульсаций, среднее значение выпрямленного напряжения и др., для усилителя - полоса пропускания, коэффициент нелинейных искажений и т.д.). Определяя указанные технические требования, важно соблюсти принцип согласованности, т.е. непротиворечивости требований друг другу. Кроме того, сами требования к тем или иным параметрам должны быть реально выполнимыми и физически реализуемыми;

2) определить данные задачи разработки, включающие параметры входных сигналов и других воздействий на устройство, параметры и характер нагрузки, временные соотношения и т.п.;

3) выделить и определить ограничения, включающие, как правило, условия эксплуатации, параметры окружающей среды, характер элементной базы и ряд технологических ограничений и т.п.;

4) сформировать критерии оптимизации на основе ранее выбранных с учетом опыта их использования при поиске наилучшего способа (принципа) построения разрабатываемого изделия;

5) разбить разрабатываемое изделие на функционально законченные части с целью их детальной проработки и возможности распараллеливания работ;

6) сформулировать ТЗ на каждую выделенную часть, руководствуясь приведенным выше порядком.

Практика составления ТЗ показывает, что как бы мы ни старались качественно и добросовестно проделать эту работу, каким-то необъяснимым образом всегда пусть совсем незначительная часть требований оказывается упущенной. В процессе последующей разработки эти упущения последовательно устраняются.

Итак, одолев несколько страниц текста, мы, кажется, завершили первое и, по-видимому, все же шапочное знакомство с этапом постановки задачи и создания ТЗ — первым этапом разработки нового изделия. Подробное изложение всех последовательно выполняемых действий этапе систематизировано в табл. I, составленной по [1].

Следующий и основной этап в процессе разработки нового изделия — это поиск полного технического решения (поиск полного решения задачи). Он основывается на результатах предыдущего поиска способа или принципа построения (физической основы, элементной базы, логического построения и т.п.), без предварительного выбора которого было бы трудно сформировать полное ТЗ. Если выбранный или предложенный способ построения изделия или его функциональной части (смотря о чем идет речь) является новым или недостаточно изученным, планируется этап или подэтап в рамках обозначенного нами основного, на котором необходимо провести исследования способа. Цель: подтвердить правильность (действительную оптимальность) его выбора в соответствии с поставленной задачей и получить все необходимые для построения устройства данные (характеристики, зависимости, влияющие на параметры устройства, реализующего предложенный способ). Много причин и обстоятельств лежит в основе определения длительности этого научно-исследовательского этапа. Это и характер изначальной задачи; область, к которой относится изделие (достаточно ли она нова и как она изучена); достижения в смежных областях знаний или отраслях техники и производства (так, новые достижения в совершенствовании элементной базы могут существенно, а иногда революционно изменить подход к выбору или определению способов построения тех или иных устройств заданного класса технических систем, например, так происходит сейчас с появлением оптоэлектронных приборов); существующий научный задел коллектива разработчиков и т.п. По окончании необходимых научных исследований дело за инженерами-разработчиками. Они должны в соответствии с ТЗ, используя собственный и коллективный опыт, информацию, добытую на этапе научно-исследовательских работ, синтезировать (предложить) схему (функциональную и, главное, принципиальную) изделия или устройства. В некоторых случаях возможны варианты схем, окончательный выбор из которых планируется на следующем этапе анализа и проверки, экспериментального исследования или испытаний. Характер работы инженера на этапе поиска технического решения (схемы устройства), безусловно, творческий. Рассмотрим кратко из чего он складывается.

Таблица I

Этап формирования ТЗ

№ подэтапа	Наименование подэтапа	Содержание подэтапа	Комментарии к действию
I	2	3	4
I.	Формирование основных требований ТЗ или постановка задачи в общих чертах	I.1. Определение основных функций изделия на качественном уровне I.2. Определение основных количественных функциональных соотношений по отношению к I.1 I.3. Подбор известных изделий наиболее полно отвечающих ТЗ (п.1.1, I.2) I.4. Анализ недостатков известных изделий (п.1.3) и составление перечня недостатков по каждому из них I.5. Предварительная формулировка задачи (ТЗ) в целом и определение ее типа: а) усовершенствовать выявленные известные изделия (п.1.3) путем устранения их недостатков (цель задачи); б) найти принципиально новый способ построения изделия, удовлетворяющий основное ТЗ	Рекомендуется попытаться поставить задачу также и в другом изложении, т.е. без специальных терминов. Это способствует преодолению психологических барьеров в процессе поиска ее решения

I	2	3	4
II.	Анализ основных требований ТЗ		Составление дерева эволюции с указанием нарастающих отличий
	2.1. Исследование истории развития (эволюции) рассматриваемого класса изделий		За основу берут результаты патентного исследования и других источников
	2.2. Определение тенденций развития рассматриваемого класса		Что в истории главным образом определяет необходимость создания нового изделия этого класса? Полезно с точки зрения генерации новых идей, выделить ведущий класс изделий из олиго-
	2.3. Сбор информации с прогнозах развития рассматриваемого класса		кой, но другой области техники, причем такой, которая развивается более быстрыми темпами
	2.4. Выделение путем анализа основных факторов, влияющих на развитие		технологического прогресса (автоматизация - авиация - космонавтика и т.п.). Прогноз и влияющие факторы могут оказаться общими с ведущим классом, тогда надо заимствовать
	2.5. Ранжирование недостатков известных технических решений изделия		С точки зрения важности их устранения - один ряд и по трудности их устранения - другой ряд
	2.6. Определение причин, вызывающих недостатки в известных технических решениях изделия		Можно ли исключить ряд этих причин путем коррекции ТЗ?
	2.7. Исследование возможности комбинирования целей решения задачи разработки изделия и определить наиболее перспективные из них		Выделить комбинации целей, усиливающие противоречивые и независимые

Продолжение табл. I

I	2	3	4
2.8. Проверка реальности постановки задачи на разработку изделия (по основному варианту ТЗ)			Здесь надо учесть современный уровень развития науки, техники, технологии и организации производства
2.9. Определение условий достижения цели			Что мешает и что способствует достижению цели — создание нового изделия? Рассмотреть факторы психологические, этические, юридические, эргономические, экологические и др.
2.10. Исследовать совместимость нового изделия в эксплуатации с другими (смежными объектами)			Определить взаимное влияние и скорректировать ТЗ, если уместно повлиять на функциональные или технические свойства смежных объектов, подлежащих разработке или, возможно, переделке. При этом может потребоваться оценка экономической целесообразности внесения изменений в смежные объекты
2.11. Оценить степень актуальности поставленной задачи разработки в настоящем и обозримом будущем			Целесообразно начать с тенденций исторического развития рассматриваемого класса изделий
2.12. Определение идеального изделия данного класса			Принять во внимание историю тенденции и прогноза развития всего класса изделий. Найти или сформулировать критерии оптимизации определяемой совокупности функциональных и других, в том числе потребительских, свойств изделия

Чаше всего в работе инженера ищутся решения частных задач (узлов), из которых затем оптимальным образом синтезируется все устройство.

На этом этапе существенно проявление изобретательности — что это такое и из чего оно складывается? Из знаний, усилий (настойчивости), способностей и метода работы.

1. Знание — информация, благодаря которой инженер может порождать идеи. Мысль (идея) — такое сочетание двух и более частиц знаний, которое является новым для создавшего это сочетание человека. Таким образом, идеи не рождаются из ничего! Чем больше у человека знаний — тем выше вероятность появления у него новых идей.

2. Усилия, которые он применяет: как активно он ищет идеи, степень отдачи в работе — внутренняя и внешняя мотивация.

3. Его способности — природные качества, играющие роль в изобретательстве.

4. Метод, которым он пользуется: манера, которой он следует при рождении идей, например применяемый метод поиска, т.е. то, что помогает ему натолкнуться на мысль, процедура нахождения решения, которой он следует и т.п. — легко формализуемый фактор.

Человек, имеющий низкие способности к изобретательству, может компенсировать этот недостаток, прикладывая больше усилий и применяя более эффективные методы поиска. Чтобы повышать эффективность методов поиска, необходимо упорно, настойчиво тренировать свой мозг на выполнение определенных операций, рассмотренных ниже.

Модель процесса поиска (рис. I.1) [7].

Представим, что на рисунке точки соответствуют различным решениям. Чем они дальше друг от друга, тем сильнее отличаются эти решения. Желательно, чтобы человек, начав с какой-то точки-решения, равномерно двигался от одного решения к другому, наилучшему и т.д., пока не кончится время поиска или не найдется безупречное решение. Однако ограниченность ума обычно не позволяет следовать такому эффективному методу. Вместо этого человек как бы топчется на месте, часто возвращается, повторяется. Часто принятое решение оказывается случайным.

Обычно инженер начинает поиск с известного решения (S_0) и движется, как показано стрелками. Решение, на которое он натолкнулся, дело случая. Как видно, шаги между точками невелики, т.е. мысли теснятся в основном вокруг уже известных решений.

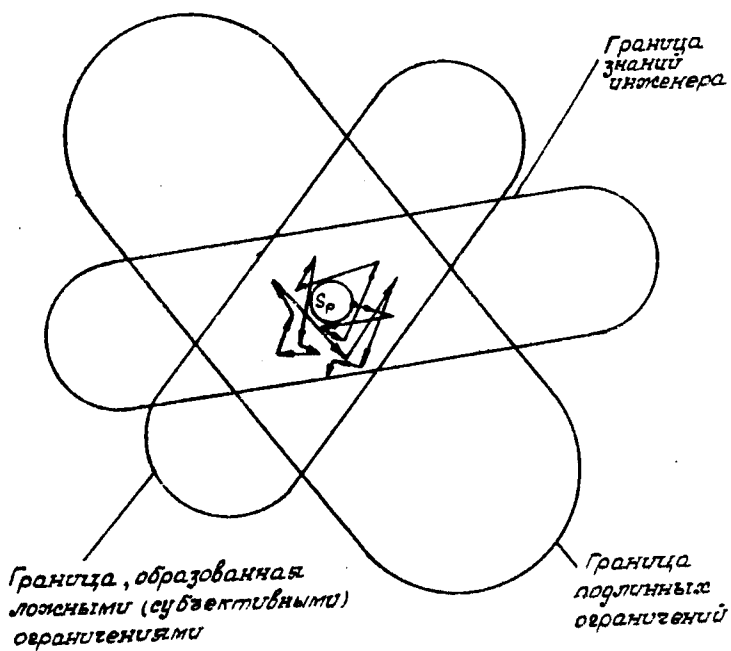


Рис. 1.1

В пространстве решений, очевидно, существуют гипотетические границы, в пределах которых инженер выбирает решение. Их три типа (см. рис. I.I). В результате получается, что область реальных ограничений наибольшая, а область фиктивных ограничений (субъективных) - наименьшая.

Причины этого: мало приложено умственных усилий (леность) - это результат поиска модификаций существующего решения, а не всего разнообразия принципиально допустимых решений; естественная тенденция быть консервативным(!), вызванная подсознательным предположением, что крупное изменение в решении нежелательно, обременительно, запрещено или нереально с точки зрения его производства или эксплуатации - издержки адаптации и стабилизации человеческого организма, обеспечивающие его жизнеспособность.

Пути преодоления [7].

1. Необходимо стараться получить максимальное число разнообразных решений, из которых можно выбрать, наметив себе границы реальные. Для этого нужно: 1) сознательно и добросовестно попытаться вычленить ложные ограничения; 2) тщательно отобрать действительные ограничения; 3) расширить свои знания.

2. Создавая максимально большой район поиска решений, необходимо полностью воспользоваться тем, что ему доступно, чтобы наиболее эффективно определить эту область. Надо брать образцы решений во всех областях, где есть хоть какая-то возможность найти оптимальное решение, т.е. выбирать не одну, а много начальных точек S_p . Чтобы избежать элемента случайности ("научного тыка"), есть три метода: 1) руководствоваться объемом продукции, ее использованием и критериями; 2) ввести определенную систему поисков; 3) использовать математические и графические способы, облегчающие нахождение оптимального решения.

Рассмотренный этап поиска технического решения закончим описанием предложенной схемы устройства, предварительным выбором элементов и грубым расчетом их параметров. В целом задача этого этапа получила название структурный оптимальный синтез, и решается она, как видим, без ЭВМ.

Следующий этап - это этап анализа выбранных технических решений и их параметрическая оптимизация. Последняя предполагает поиск оптимального сочетания параметров элементов схемы в соответствии с выбранным критерием. Для решения этих задач на данном этапе с каждым днем все шире и шире удастся использовать ЭВМ. Как это делается - мы увидим в последующих разделах книги.

Следующие этапы - эскизное проектирование макетного образца,

изготовление и испытание. Надо заметить, в жизни бывает несколько сложнее. Например, макетирование довольно еще часто проводят раньше, на этапе проведения научно-исследовательских работ, но, как правило, проводят его в неполном, ограниченном объеме. В условиях дефицита времени и людских ресурсов приходится где-то что-то не доделывать. Обычное, к сожалению, дело — спешка. Однако, как бы мы ни комбинировали этапы, необходимый набор задач, составляющих разработку, надо решать в полном объеме и с хорошим качеством. Только такой подход обеспечит в конечном счете высокую конкурентоспособность разрабатываемого изделия. На этом собственно разработка и заканчивается.

Для подготовки разработанного изделия к производству необходимо провести по нему цикл опытно-конструкторских работ, включающий решение задачи по техническому проектированию, и затем цикл по рабочему проектированию, включающий, в свою очередь, рабочее проектирование опытного образца, технологическую проработку, изготовление, отладку и испытание, ввод в действие.

Подведем итоги путем систематизации всех рассмотренных этапов разработки, проектирования и задач, которые при этом на каждом этапе решаются. Данные систематизации сведены в табл. 2. В заключение заметим, что здесь, как почти и везде, с терминологией тоже есть свои трудности.

1.3. Проблемы автоматизации поиска схемотехнического решения и пути их реализации

Этап поиска оптимального способа построения устройства а затем его схемотехнического решения обеспечивается в системах автоматизированного проектирования (САПР) подсистемой поискового конструирования (ППК). Всякая ППК, как правило, включает программное и информационное обеспечение. Последнее состоит из базы данных, включающей минимум две библиотеки (два раздела): способы построения устройств в пределах их заданных классов (видов) и схемотехнические решения (реализации этих способов построения). Программное обеспечение ППК призвано решить задачу эффективного поиска оптимального способа, а затем оптимальной схемотехнической его реализации.

В САПР первых поколений подсистемы поискового конструирования практически не включаются по ряду причин: слабая теоретическая проработка их формирования; практически непреодолимые трудности создания универсальных ППК. Первая причина постепенно устраняется,

Таблица 2

Разработка и проектирование

Этапы и подэтапы	Стадии	Задачи	Разделы (виды) работы
I	2	3	4
I. Формирование ТЗ	I. Предпроектные исследования	I. Постановка задачи:	НИР
I.1. Формирование основных требований ТЗ, определяющих поиск способа построения	2. Техническое задание	I.1. Формирование целей разработки и оценка ее целесообразности	
I.2. Анализ основных требований ТЗ	3. Техническое предложение	I.2. Формирование условий и планов задач разработки. Исключение противоречивых требований (несовместимых)	
I.3. Поиск способа построения		I.3. Формирование критерия для оптимального выбора способа и схемного решения	
I.4. Анализ и исследование выбранного способа		I.4. Анализ выбираемых способов	
I.5. Формирование полного ТЗ			
2. Поиск технического решения		2. Структурный синтез оптимального технического (схемного) решения	
2.1. Исследование выбранного способа по всему ТЗ		2.1. Моделирование и анализ выбранного способа построения. Получение необходимых соотношений, характеристик и зависимостей	
2.2. Поиск схемного решения			
3. Анализ и проверка выбранного схемного решения		3. Моделирование и анализ схемного решения	
3.1. Составление модели		3.1. Расчет электронных схем	
3.2. Анализ и параметрическая оптимизация		3.2. Параметрическая оптимизация	

Продолжение табл. 2

1	2	3	4
I			
4. Эскизное проектирование макетного образца, изготовление и испытание			
4.1. Эскизное проектирование			
4.2. Изготовление			
4.3. Отладка			
4.4. Испытание			
4.5. Доводка			
4.6. Оформление технической документации для передачи на ОКР			
5. ОКР	1. Эскизный проект опытного образца 2. Технический проект		ОКР
6. Рабочее проектирование	1. Рабочий проект 2. Изготовление опытного образца 3. Отладка 4. Испытание 5. Доводка 6. Ввод в действие (внедрение)		

т.к к этой проблеме привлечено внимание многих специалистов различного профиля [1] . Вторая проблема решается на пути перехода от универсальности к специализации и самих САПР, и ППК. Причем, специализация ППК более выражена и при этом, разумеется, не вступает в противоречие с менее выраженной специализацией всей САПР, т.к. лишь дополняет ее. Как правило, ППК строятся открытыми системами, поэтому постепенное пополнение их баз данных библиотеками новых классов устройств приводит лишь к благоприятному расширению возможностей САПР, росту их эффективности и рентабельности.

1.3.2. Концепции построения базы данных для информационного обеспечения ППК:

1) структура построения базы данных в большой степени определяется алгоритмами поиска, включенными в программное обеспечение ППК;

2) база данных должна быть организована как открытая система, в которую по мере накопления можно вводить новые данные как по старой, так и, возможно, по измененной или дополненной структуре;

3) необходимо предусмотреть возможность расширения или совершенствования алгоритмов поиска в рамках неперестраиваемой базы данных;

4) необходимо обеспечить свободный оперативный доступ к данным.

Чаще всего используется файловая организация базы данных

[3] . Описания способов построения или схемотехнических реализаций могут быть организованы по-разному. Известны три основные модели описания данных: реляционная, сетевая и иерархическая [3] .

Реляционная (относительная и повторяющаяся) модель данных является наиболее простой и доступной и представляется в виде обычных таблиц, каждая строка (кортеж) которой содержит описание, например одного из вариантов схемотехнического решения, каждому столбцу соответствует определенный параметр (атрибут). В описание включаются значения этих параметров.

Полезно применение иерархической модели, которая основана на понятии дерева графа. Вершины дерева соответствуют одному или связанной совокупности параметров (атрибутов), характеризующих, допустим, схемотехническое решение. Корневая вершина образует начало записи логической базы данных. Использование иерархической модели (дерева) позволяет сосредоточить в одной модели сразу несколько вариантов в рамках одного принципиального решения, от-

личающихся, например, элементной базой, схемами отдельных узлов и т.п. Путь, образованный ветвями и вершинами дерева от корневой вершины до одной из вершин самого нижнего уровня, соответствует одному из вариантов, например схмотехнического решения, записанного таким образом в базу данных. Вершины, вошедшие в этот путь, образуют совокупность параметров (свойств), характеризующих один из вариантов решения. Совокупность иерархических моделей (деревьев) образует лес в базе данных.

В сетевой модели данных элементарные данные и отношения между ними представляются в виде направленного графа (сети). При этом база данных разбивается на ряд областей, содержащих записи данных. Каждая такая запись состоит из нескольких полей. Используется эта модель для организации крупных баз данных, имеющих оперативное значение, т.е. часто или постоянно изменяемых.

1.3.3. Программное обеспечение ППК в общем случае должно содержать следующие подпрограммы (П) и информационные фонды (М):

1) П1 - поиск оптимального набора технических и других требований ТЗ, для синтеза способов построения (физических принципов действия (ФПД));

2) П2 - оптимальный синтез способов построения или ФПД по выбранному набору ТТ;

3) П3 - оптимальный синтез технического решения по сформированному ТЗ.

Рассмотрим задачи, которые решаются с помощью выделенных подпрограмм. Заметим, что практически все программное обеспечение ППК работает в диалоговом режиме, что обеспечивает возможность использования эвристических приемов поиска, т.е. образует элементы искусственного интеллекта в САПР.

Итак, П1 решает в основном две задачи: задачу проверки предъявленного набора требований ТЗ на совместимость (допустимость, непротиворечивость) и задачу проверки его на полноту. Для этого необходимо, конечно, использовать соответствующий информационный фонд М1. Он должен содержать наиболее полный на сегодняшний день перечень требований ТЗ на устройства данного класса. И так по каждому классу устройств (систем и т.д.), входящих в обслуживаемую конкретным ППК САПР. Проще всего организовать проверку на полноту набора требований ТЗ путем их последовательного ввода по запросу в режиме диалога. При этом должна быть предусмотрена возможность расширения фонда М1 при появлении новых требований (параметров) ТЗ. Предложенный режим ввода ТЗ попутно решает

задачу обучения пользователя, он расширяет в отдельных случаях его знания о возможных свойствах, параметрах и характеристиках устройств рассматриваемого класса, поскольку предъявляет их в достаточно полном и подробном виде, чего нельзя найти практически ни в какой литературе и тем более в учебной.

Проверка на противоречивость предъявляемых требований ТЗ основана, конечно, на специфике устройств того или иного класса. С учетом этого выделяется ограниченный ряд так называемых основных требований (параметров), связанных между собой логическими или аналитическими зависимостями, которые непременно должны выполняться. Первые, как известно, определяются функциональными и информационными требованиями, вторые — электрическими (законы Ома и Кирхгофа) и технико-экономическими параметрами. Далее, путем предварительного составления и анализа так называемых морфологических матриц выделяются все несовместимые сочетания, состоящие из этих основных требований (параметров). Что это значит — покажем на примере генератора импульсов пилообразной формы. Допустим заданы, кроме прочих, амплитуда выходного напряжения $U_m^{r3} = 10 \text{ В}$, напряжение источника питания $E^{r3} = 9 \text{ В}$ и коэффициент эффективности (использования напряжения питания) $\epsilon^{r3} = 0,8$. Последний определяется так: $\epsilon = U_m / E$. Из анализа предъявленных в примере значений параметров видим, что они противоречивы, т.к. $U_m^{r3} / E^{r3} \neq \epsilon^{r3}$ ($10/9 \neq 0,8$). В этом случае пользователю предлагается скорректировать ТЗ, т.е. либо увеличить E^{r3} соответственно заданному значению ϵ^{r3} , либо привести ϵ^{r3} в соответствие с заданными значениями U_m^{r3} и E^{r3} . При этом второй из предлагаемых вариантов коррекции ТЗ необходимо в данном примере сопроводить информацией о том, что схемы генераторов с $\epsilon > 1$ довольно сложны, когда нельзя использовать на выходе генератора усилитель напряжения и дополнительный источник питания $E > E^{r3}$.

Морфологические матрицы, каждая из которых представляет одно из возможных сочетаний основных параметров ТЗ (т.е. один из вариантов ТЗ), используются также и для рекомендации наиболее подходящего (или ряда подходящих) способов построения схемотехнических решений. Рекомендации эти основаны на изучении и обобщении опыта разработки устройств данного класса. Анализируя эти рекомендации и используя, конечно, свой опыт, разработчик принимает на этом этапе решение по выбору способа построения устройства. Впрочем, окончательный выбор способов построения устройств

ведется с помощью подпрограммы П2. Она анализирует предъявленное ТЗ по окончании работы с подпрограммой П1 и находит из массива известных способов (или ФПД) один или несколько наиболее подходящих вариантов.

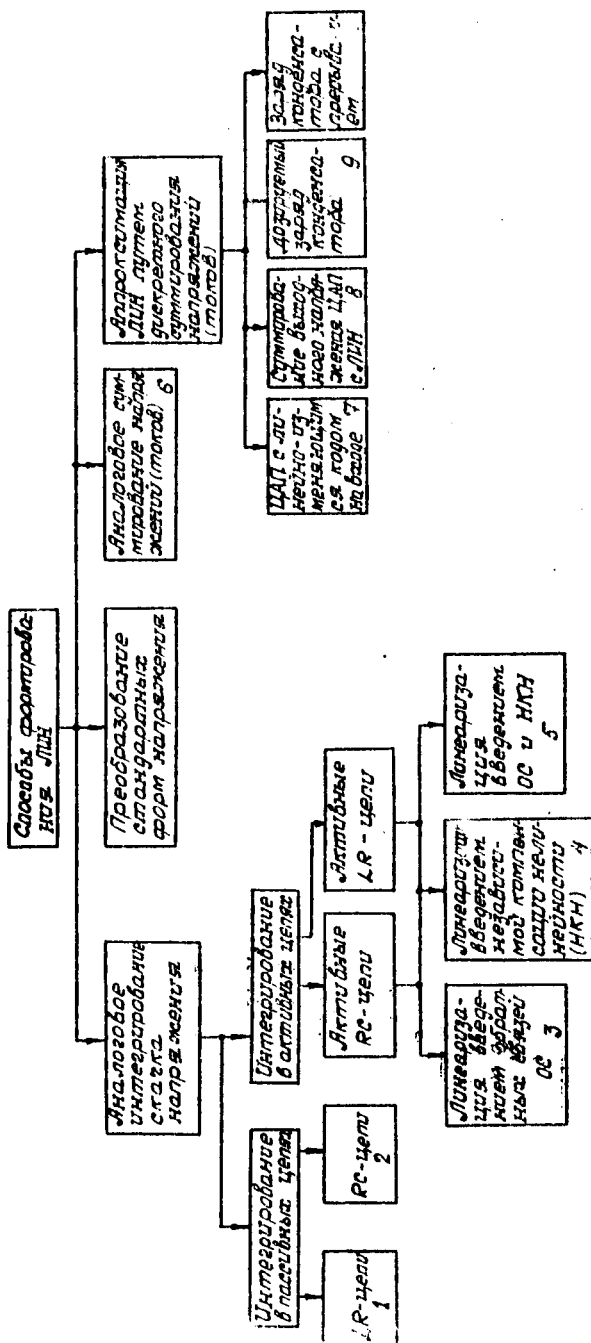
Существуют ИШК, в которых информационный вход М2 содержит заранее составленное, также на основе обобщения опыта разработки устройств заданного класса, дерево или граф решений (способов). Он представляет собой, в сущности, обычную классификационную структуру, но составленную достаточно строго и подробно. Вершины графа соответствуют элементам решения (в нашем случае это могут быть элементы (составляющие) способов построения и их признаки), а ветви указывают на связь (соподчиненность) между элементами, между элементами и их признаками [8].

По информационному содержанию дерево или граф решений строится по принципу от общего к частному, в направлении от корня к остальным вершинам.

В [1] для описания множества решений предлагается использовать так называемое И-ИЛИ-дерево, в котором для компактности изображения вводятся И-вершины и ИЛИ-вершины. Первые объединяют совместно существующие элементы или признаки, вторые - альтернативные, т.е. возможные. Тем не менее, даже для класса казалось бы несложных устройств дерево решений оказывается очень громоздким. В этой связи уместно ввести использование вместо него графа, имеющего в отличие от дерева циклы, что улучшает компактность изображения, т.к. исключает повторяющиеся вершины, элементы и признаки.

Примеры в виде классификационных структур (каждая структурная единица соответствует вершине графа) приведены на рис. 1.2, 1.3, 1.4. На рис. 1.2 показан граф способов формирования линейно изменяющегося напряжения (для ИПН; представленных в укрупненном виде). На рис. 1.3 - продолжение предыдущего графа по соответствующим вершинам 3, 4, 5. На рис. 1.4 приведена классификационная структура схмотехнических решений для автогенераторов линейно изменяющегося напряжения.

Обычно графы и деревья решений отличаются от классификационных структур наличием в них вершин-признаков, характеризующих элементы. Так, на рис. 1.4 признаками, характеризующими, например спусковые элементы, могут быть указаны быстрдействие, особенности схемы включения, число вспомогательных элементов, величина



Руч. 1.2

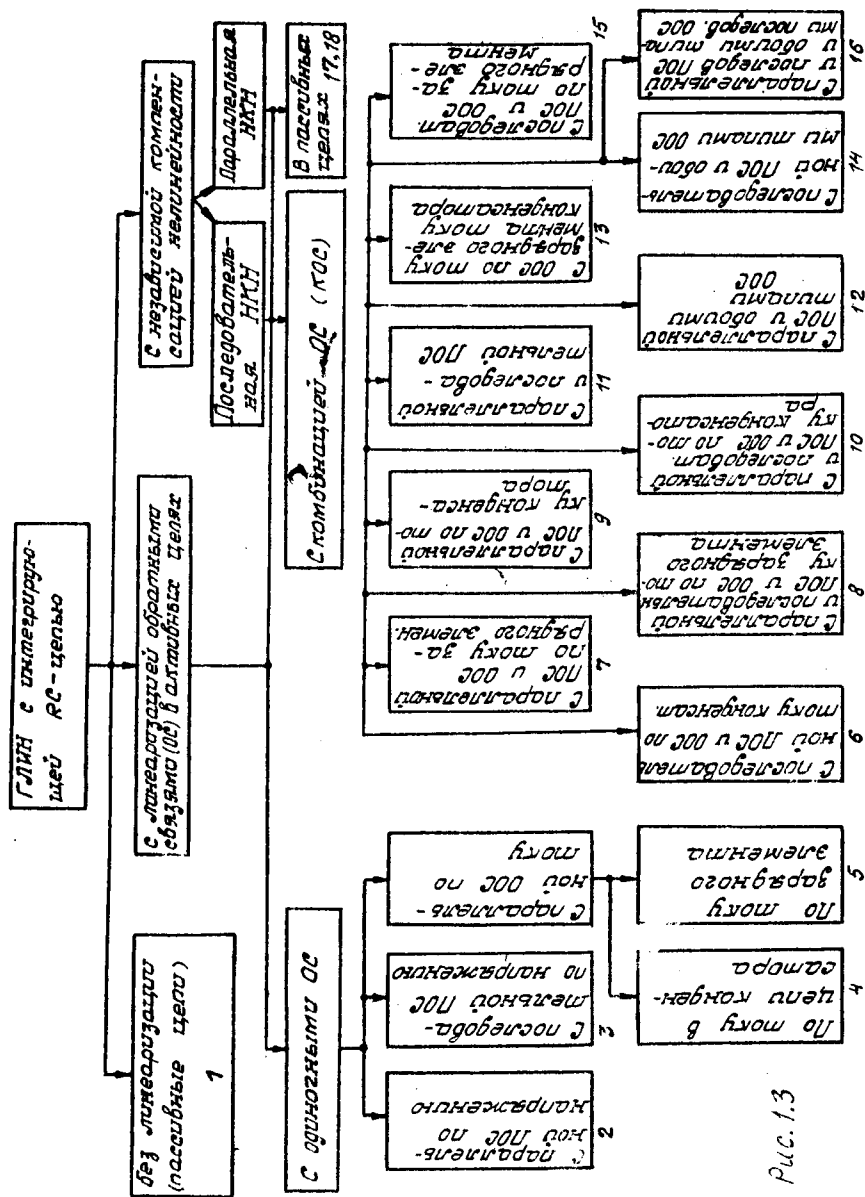


Рис. 1.3

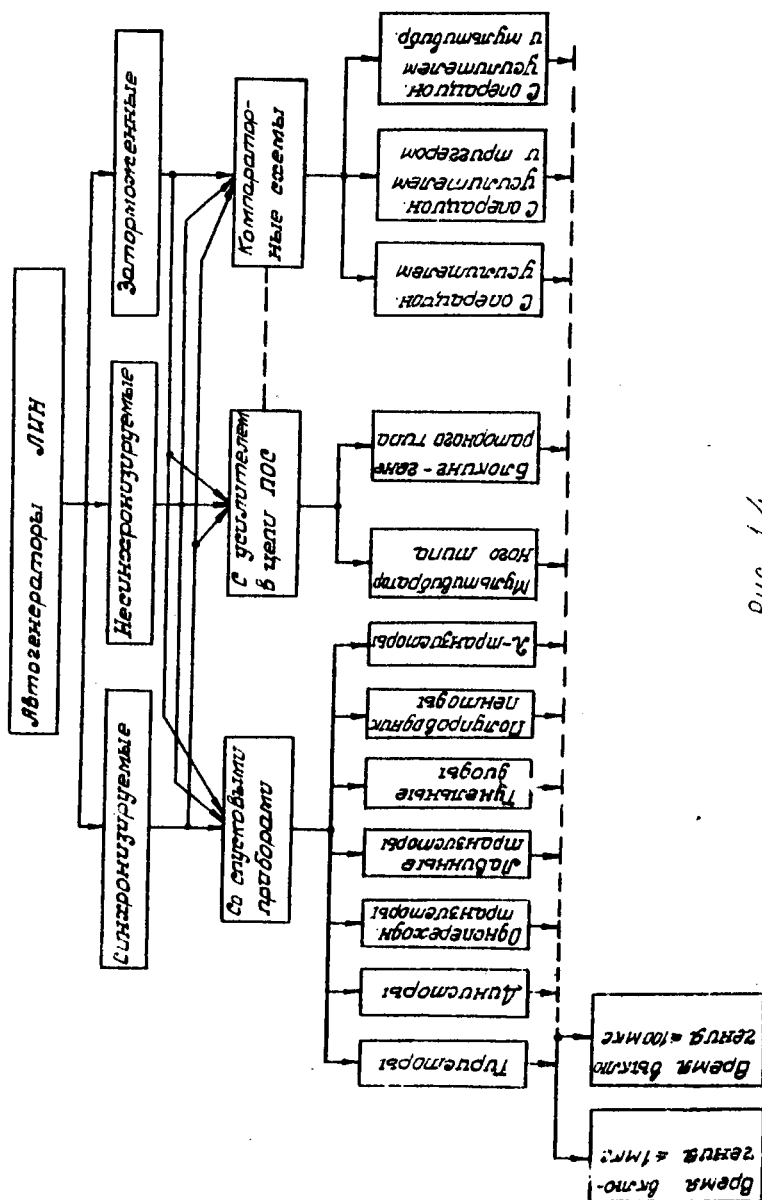


Рис. 1.4

тока в открытом состоянии, величина тока утечки в закрытом состоянии, стоимость, величина допустимого напряжения питания, величина остаточного напряжения (напряжение насыщения) в открытом состоянии и др. Граф решений более компактен, однако требует в конечных вершинах дать полное описание непоказанных признаков для каждого варианта (пути) решения, исходящего из корневой вершины (рис.1.5). Число возможных путей из корня в конечные вершины графа определяет число вариантов решения, вмещавшихся в данную иерархическую модель.

Подпрограмма ПЗ решает совместно с пользователем сначала задачу поиска оптимального технического решения (схему устройства) из числа известных, хранимых в соответствующем информационном фонде МЗ. Критерии оптимизации формируются пользователем или выбираются из представленных подпрограммой. Основным из них является минимум числа несовпадающих требований (параметров) ТЗ с данными технического решения (ТР): $\min N_{nc}$. В случае, когда первая задача не имеет удовлетворительного решения, т.е. величина $\min N_{nc}$ превышает некоторую наперед заданную пороговую величину $\max \min N_{nc}$, ПЗ переходит к решению второй задачи. Она состоит в поиске оптимального варианта базового ТР, предназначенного для доработки с целью получения нового (усовершенствованного) ТР. Поиск и в этом случае ведется по фонду известных ТР МЗ. Необходимость в решении именно второй задачи возникает чаще всего либо из-за чрезмерно повышенных требований по отдельным параметрам проектируемого устройства, либо из-за введения в ТЗ новых функциональных требований, выходящих за рамки традиционного типового ТЗ, хранимого в фонде МГ. Вторая причина особо принципиальна, поэтому ее обнаружение еще в процессе реализации ПЗ должно исключить из-за очевидной бессмысленности решение первой задачи в ПЗ с непосредственным переходом к решению сразу ее второй задачи.

Рассмотрим возможные алгоритмы решения задачи поиска ТР. Это полезно, так как пользователь принимает в процессе поиска весьма активное участие. Подобные задачи практически всегда решаются в интерактивном режиме. Указанные алгоритмы несколько различаются в зависимости от содержания информационного фонда и используемой модели базы данных. Пусть используется простейшая модель описания ТР - реляционная. Как уже указывалось, это, по существу, построенная запись значений параметров и функциональных свойств, характеризующих хранимые варианты ТР (схемотехнических решений)

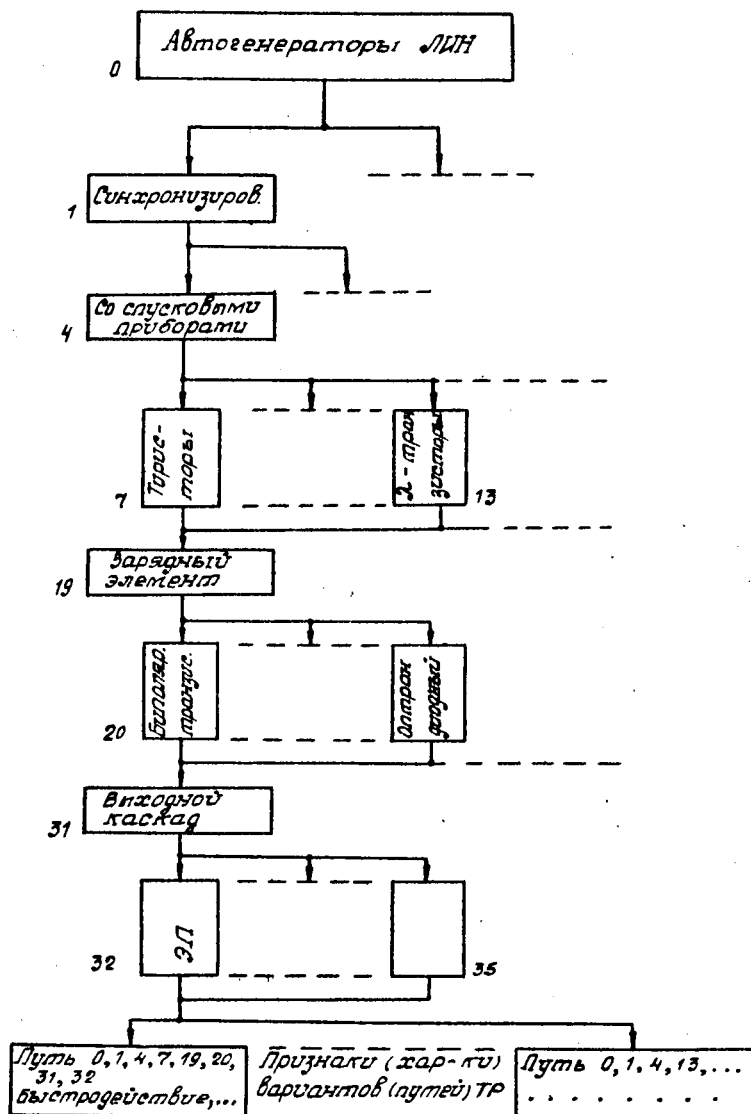


Рис. 1.5

в нашем случае (СТР)). По отношению к иерархической модели описания ТР или СТР, представляющей дерево или граф СТР, в реляционной модели используется описание признаков (характеристик) всех путей на дереве или в графе (см. рис. 1.5, где они представлены в нижнем ряду). В начале процесса пользователю предлагается выделить из ТЗ ряд (вектор a) обязательных требований (параметров), невыполнение которых недопустимо в соответствии с условиями: $a_{\kappa} \geq a_{\kappa}^{T3}$ и (или) $a_{\epsilon} \leq a_{\epsilon}^{T3}$. Эти условия означают, что параметры искомой схемы устройства должны или совпадать с заданными значениями в ТЗ или быть лучше их. Остальные b_{κ}^{T3} , b_{ϵ}^{T3} параметры ТЗ (вектор b) называют желательными, дополнительными или ранговыми, носящими критериальный характер. Считается во многих применениях, что допустимыми являются А варианты СТР с различными уровнями выполнения этих оставшихся параметров, а усиление любого из них или увеличение уровня выполнения до полного удовлетворения всех b_{κ}^{T3} , b_{ϵ}^{T3} параметров ТЗ соответствует улучшению качества проектируемого устройства.

Критерием качества (оптимизации) здесь выступает ранее обозначенный $\min N_{nc}$, который определяется для выделенных на первом этапе поиска А вариантов допустимых СТР на векторе параметров b , т.е. $(\min N_{nc} \in b) = \min N_{bnc}$. В результате, на втором этапе поиска наилучших решений из числа А допустимых пользователю в общем случае предъявляется: полученное значение $\min N_{bnc}$; перечень несовпадающих с ТЗ параметров и краткое описание отобранных вариантов СТР. Но это только в общем случае, в частности же на практике возможны варианты: 1) когда $\min N_{bnc} = N_{bnc}$, т.е. ни один из b_{κ} , b_{ϵ} желательных параметров не совпадает с ТЗ или 2) он достаточно велик, т.е. $\min N_{bnc} > \max \min N_{bnc}$. Здесь и ранее $\max \min N_{bnc}$ - это ожидаемое, а точнее допустимое число несовпадающих параметров, которое не всегда вводится сразу, потому что трудно предсказуемо его значение; 3) третий вариант соответствует удовлетворительному значению $\min N_{bnc}$, по большому числу соответствующих ему СТР. В принципе этот вариант возможен и при $\min N_{bnc} = 0$. А теперь уместно рассмотреть возможную стратегию поведения пользователя на обоих этапах поиска. Вначале он наблюдает результат работы первого этапа поиска (по обязательным a_{κ}^{T3} , a_{ϵ}^{T3} параметрам ТЗ). Они также могут быть различны: 1) нет ни одного СТР, удовлетворяющего всем выделенным обязательным параметрам; 2) найдено небольшое число СТР, удовлетворяющих всем

выделенным обязательным параметрам и 3) найдено большое число СТР. Анализируя ситуацию по первому случаю, пользователь может запросить информацию, например, о $\min N_{\alpha \text{ нс}}$ и $\min N_{\alpha \text{ нс}}$, о пересечении и характере несовпадения параметров с целью коррекции вектора a^{T3} обязательных параметров или коррекции самого ТЗ путем ослабления некоторых параметров вектора a^{T3} . Аналогичными могут быть действия пользователя и во втором случае, если ему покажется желательным расширить число A допустимых вариантов СТР. В третьем случае для может быть желательного теперь уже сужения области допустимых решений пользователь должен либо расширить вектор a обязательных параметров, либо скорректировать ТЗ путем усиления (ужесточения) отдельных его требований. В случае неудачи, связанной с попыткой коррекции вектора a или ТЗ, по первому случаю пользователь должен принять решение выйти из первой задачи подпрограммы ПЗ, так как имеющиеся в информационном фонде МЗ СТР не могут удовлетворить предъявленное ТЗ. Переход к работе в рамках второй задачи будет рассмотрен несколько позже. А теперь вернемся к другому положительному исходу, когда в результате поиска по обязательным параметрам ТЗ найдена удовлетворительная по объему область допустимых СТР. Как уже указывалось, здесь начинается второй этап поиска, результатом которого должно быть получено наилучшее СТР в смысле максимального удовлетворения остальных параметров ТЗ, образующих вектор δ^{T3} .

Если в результате поиска на втором этапе имеет место первый или второй вариант, необходимо пользователю произвести коррекцию ТЗ путем ослабления требований по вектору δ^{T3} . Когда этот путь не приводит к желаемому результату, поскольку дальнейшее ослабление ТЗ по вектору δ нежелательно, приходится делать заключение о том, что предъявленное ТЗ не может быть реализовано ни одним СТР из фонда ШК МЗ. Здесь принимается решение о выборе теперь наилучшего СТР для целей его доработки, т.е. о выходе на вторую задачу ПЗ. В третьем варианте, когда выбирается несколько равнозначных СТР по значению $\min N_{\delta \text{ нс}}$, необходимо просмотреть у всех отобранных СТР те требования и параметры, которые не выполняются. Провести сравнительный анализ, оставив такое СТР, которое содержит среди невыполняющихся наиболее незначительные с точки зрения пользователя параметры. Такой путь заключительного выбора единственного СТР возможен, когда число первоначально отобранных СТР невелико и вполне поддается сравнительному анализу. В противном случае желательно корректировать

ТЗ, ослабляя наименее значительные с точки зрения пользователя требования или параметры вектора $\delta^{ТЗ}$. После повторения процедуры поиска величина $\min N_{\delta_{не}}$ снижается и число отобранных СТР также уменьшается. В принципе можно предложить пользователю заранее ранжировать по предпочтительности параметры и требования, вошедшие в вектор δ . Тогда легко автоматизировать поиск такого СТР, который, входя в группу решений, имеющих $\min N_{\delta_{не}}$, будет содержать в их числе максимальное количество менее предпочтительных параметров из вектора δ . Аналогично можно поступить и в решении задачи выбора СТР без разбиения параметров ТЗ на обязательные и желательные. Для этого пользователем должна быть произведена ранжировка всех требований и параметров ТЗ. В этом случае критерий выбора остается прежний - $\min N_{\delta_{не}}$, а в качестве ограничения оптимизационной задачи выступает допустимое значение $\max \min N_{\delta_{не}}$. Количественно оно, очевидно, может совпадать с числом выделяемых в предыдущем подходе обязательных требований и параметров ТЗ. В любых ситуациях, которые могут возникнуть в процессе поиска, последнее слово в выборе наилучшего СТР за пользователем-разработчиком электронной аппаратуры.

Выход на вторую задачу, как уже указывалось выше, неизбежен, когда выясняется, что информационный фонд МЗ не содержит СТР, удовлетворяющего предъявленному ТЗ. Выбор СТР, наилучшим образом удовлетворяющего задаче построения на его основе нового схемотехнического решения неоднозначен. Сама постановка задачи в смысле формулирования критерия поиска оптимального для этих целей СТР не имеет вполне определенного однозначного решения. Наверное, разработчик-пользователь должен иметь возможность в рамках ППК сам определять этот критерий. Наиболее простым подходом, с нашей точки зрения, остается тот же самый, который используется при решении первой задачи. Отличие, может быть, состоит только в подходе к формированию векторов обязательных параметров α и дополнительных параметров δ . Окончательный выбор базовых СТР должен быть намеренно многозначным, чтобы обеспечить необходимую свободу для полета творческой фантазии по совершенствованию, модернизации или созданию существенно нового технического решения.

Выбор базовых вариантов СТР и затем конструирование на их основе новых в принципе желательно осуществлять формальными математическими методами. В данном случае речь может идти о задаче структурного оптимального синтеза СТР, для решения которой ис-

пользуют известный аппарат — математическое программирование. Попытки постановки и решения подобных задач формальными, т.е. чисто математическими методами предпринимались неоднократно

[1, 9] , но пока не имеет общего решения. Любые из предложенных алгоритмов требуют применения для генерации структурных решений (вариантов СТР) эвристических приемов.

1.4. Проблемы и задачи анализа схмотехнических решений

После того как решена задача на построение (структурный синтез нового схмотехнического решения), необходимо, как указывалось ранее, перейти к анализу вновь полученной схемы. Первая задача анализа состоит в этом случае в необходимости подтвердить (доказать себе, а может быть кому-то из сомневавшихся) правильность выбранного СТР, соответствие его выходных параметров, характеристик, свойств заданным или ожидаемым. Вторая задача анализа состоит в необходимости получения так называемой аналитической модели, содержащей аналитические выражения для параметров всех компонентов схемы. В тех случаях, когда это не удается сделать даже в приближенном (грубом и упрощенном) виде, бросают оставшиеся силы на построение так называемой алгоритмической модели, которая представляет собой обычно систему уравнений. В качестве переменных в системе должны быть, очевидно, параметры компонентов схемы. Все эти модели нужны для проведения предварительного расчета параметров компонентов схемы. По данным этого, как правило, может быть весьма приближенного расчета, затем проводится полный анализ СТР. Далее, переходят к решению еще одной важной задачи проектирования СТР — уточненному и оптимальному расчету параметров компонентов СТР. Процесс решения этой важной и, пожалуй, центральной задачи, называемой, кстати, оптимальным параметрическим синтезом, состоит в том, что здесь анализ прокручивается многократно (конечно, на ЭВМ) по мере уточнения значений параметров компонентов в процессе приближения к оптимальному их набору. Подробно о решении задачи оптимального параметрического синтеза будет сказано в последующих главах.

Основой анализа, его первым этапом считается построение модели СТР. Вообще, в природе моделирование (т.е. отражение или отображение всегда, в принципе, будучи неполным, односторонним) является, по сути, одним из основных методов познания мира (если говорить о человеке) или в общем случае, признаков взаимного

влияния, взаимодействия вещей, событий, явлений и т.п. Модели различают и классифицируют по многим признакам, например, по форме их представления (математическая, физическая, качественная и др.), по языку описания каждой из предыдущих (матричная, топологическая, графическая и др.), по характеру отображаемых явлений, процессов, событий и т.п. (информационные, электрические, механические и др.), по точности (степени адекватности), сложности (или экономичности с точки зрения ее реализации), универсальности и др. Для описания СТР, как правило, используют модели удобные и хорошо приспособленные к специфике электронных схем. Это, конечно, очень распространенные математические (матричные и топологические) модели (ММ). Поскольку электронная цепь (схема) является, вообще говоря, многохарактерной вещью, то и модели для ее описания приходится строить различные по своему характеру. Объясняется это еще и тем, что с точки зрения реализации модели должны быть достаточно несложными. Считается в практике работы с ними, что лучше последовательно построить и реализовать несколько простых моделей, описывающих СТР с разных сторон, чем одну сложную и многостороннюю. Стремление к использованию простых моделей, а особенно желательны и наглядных, и выразительных, объясняется не только вычислительными трудностями на пути их реализации, но, главным образом, в целях лучшего познания характерных особенностей изучаемого класса схем. Познание здесь имеет смысл адекватного построения такой мозговой модели электронной схемы, уровень совершенства которой был бы достаточным для интуитивного принятия новых решений в рассматриваемом классе схем, т.е. для успешного решения задач структурного синтеза. Другими словами, достаточное накопление знаний по видам схем, их характерным особенностям, свойствам, зависимостям и соотношениям между выходными параметрами и параметрами их компонентов и прочим закономерностям, которые выявляются с помощью математического (преимущественно) и физического (практически более надежного и понятного) моделирования, должно рано или поздно перейти в новое качество, определяющее способность инженера-разработчика или исследователя к созданию новых оригинальных схемотехнических решений, т.е. к изобретательству.

СТР в виде электронных схем в задачах моделирования представляют разными уровнями абстрагирования. С этой целью выделяют модели на микроуровне (моделирование физических процессов в полупроводниковых структурах электронных приборов и микросхем

в координатах пространства и времени); модели на макроуровне (моделирование электрических процессов в сравнительно несложных и небольших электронных цепях (схемах) с использованием законов Ома и Кирхгофа в координатах времени); модели на метеоуровне (моделирование информационных процессов в уже сравнительно больших и сложных электронных устройствах, представленных поэтому в виде функциональных или структурных схем).

В процессе проектирования анализ лучше начинать с метеоуровня путем построения математической информационной модели (МИМ) по функциональной или структурной схеме СТР. Модель составляется по условиям абстрагирования и упрощения, известным из функционального моделирования систем автоматического управления (САУ). Основные из них: 1) однонаправленность передачи звеньев (блоков), при которой пренебрегают влиянием выходных цепей блока на его входные цепи; 2) взаимная развязанность блоков, т.е. пренебрегают взаимным влиянием параметров нагрузки и параметров выходных цепей, параметров источников, выходных цепей одних блоков и входных цепей других блоков; 3) использование вместо фазовых переменных двух типов (ток и напряжение) переменных одного типа, называемых сигналами; 4) линейность моделей инерционных компонентов. При этом по аналогии с САУ блоки классифицируются по свойствам и характеру преобразования сигналов: 1) линейные безынерционные (пропорциональные) блоки (звенья), выполняющие функции повторения, инвертирования, умножения, деления, чистого запаздывания, идеального усиления, суммирования сигналов; 2) нелинейные безынерционные блоки (звенья), выполняющие функции ограничения, детектирования, модуляции и других преобразований; 3) линейные инерционные блоки (звенья), выполняющие операции дифференцирования, интегрирования, фильтрации и коррекции формы сигналов; 4) нелинейные инерционные блоки (звенья) часто представляют в виде последовательного соединения нелинейного безынерционного и линейного инерционного звеньев (реже - наоборот, в обратной последовательности); 5) генераторы сигналов.

Математическая модель функциональной схемы (ФС) составляется из моделей блоков по определенным правилам, образующим метод составления МИМ ФС. Наиболее удобным, универсальным и алгоритмически четким является метод сигнальных графов применимый преимущественно для линейных ФС. Математические модели блоков ФС записываются в виде соотношений сигналов (переменных) на входе и выходе. Для линейных безынерционных элементов

эти соотношения вида $U_{\delta_{\text{вх}}}(\rho) = \kappa U_{\delta_{\text{х}}}(\rho)$ или в общем случае $X_{\delta_{\text{вх}}} = \kappa X_{\delta_{\text{х}}}$ довольно просты, поскольку κ , характеризующая передаточную функцию блока $F(\rho) = U_{\delta_{\text{вх}}}(\rho)/U_{\delta_{\text{х}}}(\rho)$, является постоянной величиной $F(\rho) = \kappa$. Для линейных инерционных блоков МИМ в виде передаточной функции представляется уже в виде отношения полиномов переменной ρ (комплексная частота $\rho = \sigma + j\omega$): $F(\rho) = U_{\delta_{\text{вх}}}(\rho)/U_{\delta_{\text{х}}}(\rho) = A(\rho)/B(\rho) = (a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0) / (\beta_n \rho^n + \beta_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \beta_1 \rho + \beta_0)$. При этом переменные (сигналы) на входе и выходе блока, являющиеся, как правило, функциями времени t , представляются в виде изображений по Лапласу или Фурье. При анализе во временной области в качестве модели блока используют указанную передаточную функцию блока $F(\rho)$, от которой переходят к временным характеристикам вида $U_{\delta_{\text{вх}}}(t) = \int_0^t U_{\delta_{\text{х}}}(\tau) h(t - \tau) d\tau$, в частотной области переходит к модели, состоящей из частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, АФХ и др.). Последние можно получить по известным и довольно простым правилам непосредственно из выражения передаточной функции $F(\rho)$ путем замены переменной ρ на $j\omega$, т.е. путем перехода от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье. При наличии у блока нескольких входов и выходов его МИМ представляется в виде матрицы передаточных функций каждой пары вход-выход или соответственно частотных характеристик.

Примером линейного инерционного блока ФС является простейший однокаскадный РС-усилитель. Его передаточная функция имеет вид

$$F(\rho) = \frac{\kappa_0}{(1 + \rho \tau_g)(1 + \rho \tau_n)},$$

где κ_0 — коэффициент усиления на средних частотах;
 τ_g, τ_n — постоянные времени каскада на высоких и низких частотах соответственно.

Выражение для частотных характеристик каскада

$$F(j\omega) = \frac{\kappa_0}{(1 + j\omega \tau_g)(1 + j\omega \tau_n)}$$

Однокаскадный резонансный ЛС-усилитель имеет следующий вид передаточной функции:

$$F(\rho) = \kappa_g \frac{\rho L + z}{L \rho^2 + c \tau \rho + 1},$$

где K_s — крутизна усиления на резонансной частоте;
 L, C, r — индуктивность, емкость и последовательное сопротивление потерь параллельного колебательного контура.

МММ нелинейного инерционного блока аналитическим выражением, к сожалению, представляется только в редких случаях. Наиболее универсальным видом применяемых МММ в этом и других случаях являются дифференциальные уравнения, связывающие выходные сигналы блока с его входными сигналами. В общем случае это система n уравнений вида

$$\frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + g_i(U_{\text{вых}}(t)) = \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + f_i(U_{\text{вх}}(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Она, как правило, разрешается в численном виде, т.е. приближенно.

Как уже указывалось, анализ линейных функциональных схем проще и нагляднее всего проводить методом сигнальных графов, описанным в следующих главах. По передаточным функциям каждого блока схемы легко найти по графу передаточную функцию всей функциональной схемы. Для нелинейных функциональных схем приходится применять методы численного расчета, рассмотренные в следующих главах, а модели блоков при этом представляются во временной форме. Поскольку численные методы универсальны, хорошо приспособлены к компьютерной реализации, обеспечивают извлечение из анализа любой информации о выходных параметрах схем, правда, в численном виде (в виде графиков, таблиц, мнемосхем и т.п.) и не зависят от сложности или объема схем, их сейчас широко применяют для анализа и линейных схем, и параметрических, и других.

Более подробное описание, часто применяемых блоков функциональных схем и поэтому называемых базовыми, дано в следующей главе.

После успешного завершения анализа на метауровне (функциональные схемы) в зависимости от вида СТР необходимо перейти к анализу выбранных схем отдельных блоков, которые являются либо оригинальными, либо нестандартными. К последним относятся схемы энергетической (силовой) и аналоговой информационной электроники. Это информационные, энергетические и изморятельные преобразователи, аналоговые генераторы сигналов различной формы непрерывного и импульсного действия, высококачественные измерительные усилители, усилители с повышенной быстродействием, усиленной выход-

ной мощностью, высоковольтные, с время-импульсным или частотным преобразованием, ключевые мощные или высоковольтные преобразователи и т.д.

Моделирование и методы анализа электронных схем, входящих в состав выделенных блоков, рассмотрены в последующих главах. Здесь только подчеркнем, что цель анализа принципиальных схем отдельных блоков и затем их параметрического оптимального синтеза (многовариантный анализ) состоит в том, чтобы добиться необходимой точности в реализации заданных блоку определенных функций при одновременном выполнении других требований на выходные параметры блоков (потребляемая мощность, стабильность параметров, быстродействие, надежность и т.п.).

Как известно, модели составляют под задачу, т.е. вид модели, ее характер, оложность, объем и другие особенности зависят от выбранных целей анализа. Так, выше задачей моделирования является отражение информационных (электрических) процессов, протекающих в устройстве. В результате реализации таких моделей можно получить аналитическое или графо-аналитическое приближение описания формы выходного сигнала во временных, или частотных, или фазовых координатах.

В анализе структурных и функциональных схем (особенно первых) типичны и другие задачи моделирования: анализ надежности, анализ производительности, анализ точности и т.п. При этом каждый блок необходимо описывать (моделировать) в соответствии с решаемой задачей. Например, в задаче надежности, когда надо определить в качестве цели анализа вероятность безотказной работы схемы, каждый из блоков должен характеризоваться собственной вероятностью безотказной работы или ее зависимостью от некоторых внешних и внутренних параметров. Несколько подробнее эти вопросы рассмотрены в [6] .

2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОМПОНЕНТОВ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

2.1. Задача построения моделей компонентов

Одним из наиболее важных вопросов расчета и проектирования электронных схем является разработка моделей компонентов электронных схем. Этот вопрос имеет особую важность в связи с тем, что модели компонентов, с одной стороны, в большой степени определяют такие важные характеристики процесса машинного проектирования, как время расчета и объем требуемой памяти, и с другой — определяют конечные результаты проектирования и в первую очередь его точность.

В общем случае под математической моделью реального объекта обычно понимается любое математическое описание, отражающее с требуемой точностью поведение этого объекта в заданных условиях. Математическую модель можно рассматривать как некоторый оператор, ставящий в соответствие системе параметров объекта $x_1, x_2, \dots, x_n$ совокупность функционально связанных между собой внешних параметров $y_1, y_2, \dots, y_m$.

В настоящее время принята следующая классификация моделей.

1. По характеру отображающих процессов модели можно разделить на статические и динамические.

2. По способу представления модели могут быть аналитическими, графическими или табличными.

Графические модели имеют вид вольтамперных характеристик устройства, причем обычно из рассмотрения исключают реактивные элементы схемы, в результате чего модель становится статической.

Табличные модели задаются в виде определенной совокупности числовых таблиц, устанавливающих зависимость между параметрами устройства для фиксированного режима его работы.

Аналитические модели отражают взаимосвязь между параметрами компонента в виде явной аналитической зависимости или в неявном виде — с помощью системы дифференциальных уравнений относительно этих параметров.

3. По характеру зависимостей, используемых для моделирования, модели делятся на два больших класса: линейные или нелинейные. Различают особый класс кусочно-линейных моделей, нелинейность которых проявляется в точках стыковки линейных участков. Нелинейные модели более точны, но зато линейные и кусочно-линейные — более просты и могут использоваться для экономии времени на начальных

этапах проектирования, а также в тех случаях, когда требуется только приближенно исследовать, например, электромагнитные процессы.

4. По диапазону рабочих частот различают низкочастотные модели и высокочастотные.

В связи с широким внедрением в практику интегральных схем возникла необходимость в моделировании не только отдельных компонентов, но и целых типовых функциональных узлов (операционный усилитель, триггер, логический элемент и т.п.) упрощенные модели которых получили название *макромоделей*. Подход макромоделирования снижает точность расчета, однако имеет ряд преимуществ. Это, прежде всего, уменьшение сложности эквивалентной схемы и затрат машинного времени. Макромоделирование исключает необходимость в определении параметров отдельных схемных компонентов - макромодель копирует внешние характеристики, её параметры устанавливаются по экспериментальным данным.

Точность расчета всей схемы определяется точностью вычислений на ЭВМ. Погрешность вычислений, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью, возникающей из-за неточности моделей электронных компонентов, входящих в состав схемы.

Решая вопрос выбора моделей для цифрового моделирования электромагнитных процессов или оптимизации параметров узлов на этапе постановки задачи моделирования, следует:

- оценить возможность разделения анализа быстрых и медленных процессов, соответствующих временным интервалам, в которых силовые полупроводниковые приборы (транзисторы, диоды, тиристоры) переключаются или находятся в одном из устойчивых состояний;

- задаться точностью, с которой требуется моделировать те или иные процессы в устройстве (узле). Например, необходимо точно моделировать напряжение (ток) транзистора в процессе включения или выключения или достаточно только с необходимой точностью определить длительность этих процессов или потери мощности в процессе переключения и т.п.;

- определить какой максимальный порядок систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) могут решить имеющиеся подпрограммы решения СОДУ при сохранении требуемой точности и подходит ли для решения жестких систем. Для подпрограмм решения жестких уравнений желательно иметь оценки максимального разброса постоянных времени исследуемой цепи или собственных значений матрицы решаемой системы дифференциальных уравнений первого порядка;

- определить, будет ли данная модель использоваться для оптимизации параметров устройства (узла).

При моделировании электромагнитных процессов в устройствах, в которых длительность медленных процессов значительно превышает время переключения полупроводниковых приборов, целесообразно при анализе этих процессов использовать формальные модели, сложность которых зависит от требуемой точности моделирования. Например, в случаях, когда влияние вентилей на исследуемые процессы в схеме минимально и заключается лишь в переключении элементов моделируемого преобразователя, целесообразно применение ключевых моделей.

Если при исследовании электромагнитных процессов требуется только приближенно моделировать ряд процессов, возникающих при переключении, то целесообразно использовать нелинейные модели или времязависимые, при этом необходимо учесть, что данных каталогов и справочников для построения моделей, описанных в литературе, недостаточно и, кроме того, использование моделей, содержащих время в явном виде вызывает затруднения.

Точный анализ быстрых электромагнитных процессов в устройствах следует производить с помощью физических моделей, ориентированных на исследование электромагнитных процессов в преобразователе на отдельных этапах работы прибора (включение, выключение) или сложных формальных моделей.

Для решения задач оптимизации характеристик преобразовательных устройств целесообразно использовать формальные модели различной сложности.

2.2. Топологические модели компонентов электронных схем

2.2.1. Выбор моделей компонентов

При выборе модели компонента необходимо учитывать процесс подготовки к автоматизированным испытаниям, которые представляют совокупность тестовых воздействий на компонент и измерений реакций на них. Первоначально определяются статические параметры. При этом уравнение модели могут быть записаны в виде

$$Y = F(X, \theta), \quad (2.1)$$

где X , Y - векторы соответственно входных и выходных переменных; θ - вектор параметров; F - вектор - функция.

Эта система уравнений описывает реакцию модели компонента на некоторую совокупность воздействий. При этом численные значе-

ний составляющих вектора θ могут быть определены на основании результатов эксперимента. Однако число параметров модели компонента в большинстве случаев все же слишком велико для организации достаточно эффективной процедуры параметрической идентификации.

Для упрощения задачи определения параметров модели компонента на практике их множество разбивают на такие подмножества θ_{ℓ_k} , чтобы соблюдались соотношения

$$\begin{aligned} U\theta_{\ell_k} &= \theta, \quad U_{\ell_k} = m, \quad \theta_{\ell_j} \cap \theta_{\ell_j} = \theta_j, \quad j = i+1, \\ \ell_k &\subset T, \quad \ell_k \subset T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где T - множество испытаний; ℓ_k - количество параметров в k -й группе; θ_j - множество параметров, определенных в результате предыдущих $(j-1)$ испытаний. В частном случае $\theta_0 = 0$.

Тогда исходящая система уравнений эквивалентна следующей:

$$y_k = F_k(x_k, \theta_{\ell_k}), \quad k = 1, \dots, n_t, \quad (2.3)$$

где n_t - число групп параметров; x_k - задаваемые значения электрических величин в ходе k -го испытания; y_k - измеряемые значения электрических величин; θ_{ℓ_k} - параметры модели компонента, влияющие на y_k .

Чтобы реализовать подобный подход, требуется организовать n_t испытаний, в ходе которых могут быть получены значения θ . В то же время уравнение (2.3) позволяет получать рассчитанные значения параметров.

Динамические параметры модели компонента могут быть определены после получения статических параметров и, в свою очередь, разбиты на подмножества в соответствии с уравнениями (2.2).

Таким образом, появляется возможность автоматизации определения параметров модели компонента. При этом необходимо, во-первых, автоматизировать проведение испытаний, обеспечивающих получение совокупности исходных данных $\{x_k, y_k\}$, а, во-вторых, рассчитать по результатам испытаний параметры модели компонента, т.е. обеспечить сходимость итерационных процедур в ходе параметрической идентификации.

2.2.2. Математические модели элементов схем

В состав эквивалентных схем устройств могут входить следующие пассивные элементы: резисторы, конденсаторы и индуктивности. Модели пассивных элементов, как правило, не содержат никаких других элементов, кроме самого компонента и его паразитных параметров - индуктивностей выводов L_b , межвитковых емкостей C_n , омического сопротивления катушки $\sim$, сопротивление утечки конденсатора R_y (рис.2.1), которыми обычно в рабочем диапазоне частот можно пренебречь.

Модель полупроводникового диода. Нелинейная динамическая модель полупроводникового диода описывает вольт-амперные характеристики (ВАХ) прибора, а также его динамические свойства при прямом и обратном смещении.

В модели учитываются влияние на ВАХ диода объемного сопротивления базы и сопротивления утечки $p-n$ - перехода, температурный сдвиг ВАХ диода и режимная зависимость диффузионной и барьерной составляющей емкости $p-n$ - перехода. Эквивалентная схема модели диода представлена на рис.2.2. Уравнения модели диода имеют вид:

$$U_A = I_A R_s + U_n, \\ I_A = I_n + \frac{U_n}{R_y} + C_n \frac{dU_n}{dt}, \quad (2.4)$$

$$I_n = I_s [\exp(\theta_A U_n) - 1],$$

$$C_n = \begin{cases} \tau_A \theta_A I_n + C_{s0} (1 + M U_n / \Phi_0) & \text{при } U_n > 0, \\ \tau_A \theta_A I_n + C_{s0} (1 - U_n / \Phi_0)^M & \text{при } U_n \leq 0, \end{cases}$$

где I_n - ток через $p-n$ - переход; U_n - падение напряжения на $p-n$ - переходе; C_n - емкость $p-n$ - перехода; $I_s, \theta_A = 1/\varphi_T$, R_s, R_y - статические параметры модели; $\tau_A, C_{s0}, \Phi_0, M$ - динамические параметры модели.

При прямом смещении диода ($U_A > 0$) и $U_n > 1/\theta_A = \varphi_T$ выполняются условия $\exp(\theta_A U_n) \gg 1$ и $I_{R_y} = U_n / R_y \ll I_n$. Тогда уравнение прямой ветви ВАХ диода может быть представлено в виде

$$U_A \approx I_A R_s + \varphi_T \ln(I_n / I_s). \quad (2.5)$$

При обратном смещении диода ($U_A \leq 0$) выполняется условие $I_{R_y} \gg I_s$ и уравнение обратной ветви ВАХ диода имеет вид

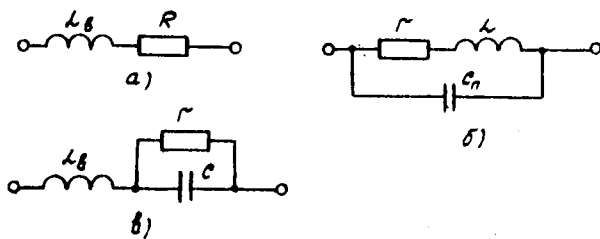


Рис. 2.1

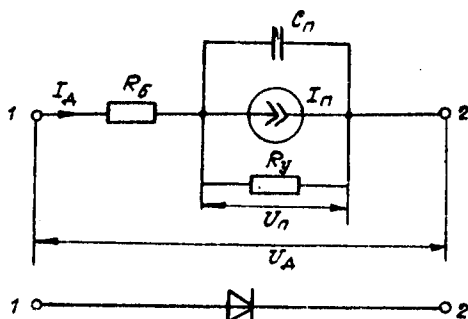


Рис. 2.2

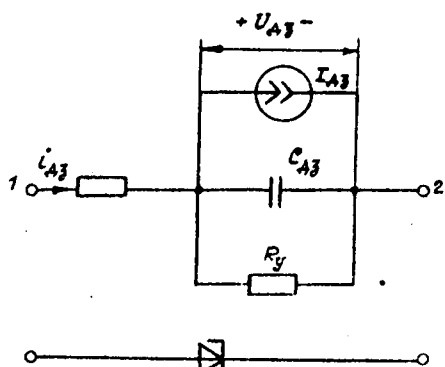


Рис. 2.3

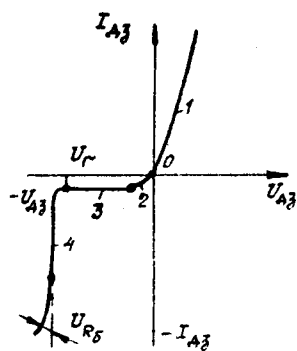


Рис. 2.4

$$I_A \approx I_{R_y} = U_A / R_y . \quad (2.6)$$

Параметры $R_B, R_y, T_A, C_{BO}, \Phi_0, M$ модели для простоты полагаются не зависящими от температуры, а температурная зависимость параметров I_s и θ_A описывается соотношениями:

$$I_s(T) = I_s(T_0) \exp \left[\kappa_{T_{I_s}} \left(\frac{T - T_0}{T} \right) \right]; \quad (2.7)$$

$$\varphi_T(T) = \frac{1}{\theta_A(T)} = \varphi_T(T_0) \left(1 + \frac{T - T_0}{T} \right), \quad (2.8)$$

где $I_s(T_0)$, $\varphi_T(T_0)$ - значения параметров I_s и φ_T при исходной температуре $T_0 = 298^\circ K$; T - текущая температура, K ; $\kappa_{T_{I_s}} = q U_{A0} / k T_0$ - температурный коэффициент, зависящий от типа полупроводникового материала (U_{A0} - ширина запрещенной зоны полупроводника, экстраполированная к нулю Кельвина, q - заряд электрона, k - постоянная Больцмана). Для кремния $\kappa_{T_{I_s}} = 46,9$, для германия $\kappa_{T_{I_s}} = 30,6$. Перечень параметров модели диода с указанием единиц измерения приведен в табл. 2.1.

Таблица 2.

Обозначение	Единица измерения	Наименование параметра
I_s	A	Тепловой ток $p-n$ - перехода
$\theta_A = 1/\varphi_T$	B ⁻¹	Коэффициент наклона линейного участка ВАХ при прямом смещении диода
R_B	OM	Объемное сопротивление базы
R_y	OM	Сопротивление утечки $p-n$ - перехода
T_A	c	Постоянная времени диода
C_{BO}	Ф	Барьерная емкость $p-n$ - перехода при $U_n = 0$
Φ_0	B	Контактная разность потенциалов $p-n$ - перехода
M		Показатель степени, зависящий от типа $p-n$ - перехода
$\kappa_{T_{I_s}}$		Температурный коэффициент теплового тока $p-n$ - перехода

Модель стабилитрона. На рис.2.3 представлена схема модели стабилитрона (диода Зенера), состоящая из генератора тока I_{A3} , емкости C_{A3} и сопротивлений R_s и R_y . Вольт-амперная характеристика диода Зенера представлена на рис. 2.4. Прямая и обратная ветви характеристики при изменении напряжения от нуля до U_r практически ничем не отличается от обычной диодной характеристики. При превышении обратного напряжения $|U_r|$ обратный ток диода резко возрастает, т.е. начинается процесс стабилизации напряжения. Генератор тока $I_{A3} = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = I_{sA3T} [\exp(\theta_r U_{A3}) - 1]; \quad (2.9)$$

$$I_2 = -\exp[A(U_r - BU_{A3})], \quad (2.10)$$

где U_{A3} - напряжение на переходе диода;
 U_r - напряжение стабилизации.

При положительном напряжении U_{A3} ток $I_2 \approx 0$, следовательно, $I_{A3} = I_1$. При больших отрицательных напряжениях, т.е. при $|U_{A3}| > |U_r|$, ток $I_1 \approx 0$ и поэтому $I_{A3} \approx I_2$. Коэффициенты A и B в (2.10) характеризуют форму кривой в области стабилизации.

Обратная ветвь диода более точно можно представить суммой двух экспоненциальных составляющих, т.е.

$$I_2 = -\exp[A(U_r - BU_{A3})] - \exp[CU_r - DU_{A3}]. \quad (2.11)$$

Разделив ВАХ диода (рис.2.4) на четыре области, обозначенные соответственно через (1), (2), (3) и (4), генератор тока модели можно представить следующим образом:

$$I_{A3} = f(U_{A3}) \begin{cases} 1) I_{sA3T} [\exp(\frac{\theta_r}{n} U_{A3}) - 1] \\ 2) I_{sA3T} \frac{\theta_r}{n} U_{A3} \\ 3) - I_{sA3T} \\ 4) - e^{-\kappa_1(U_1 + U_{A3})} - e^{-\kappa_2(U_2 + U_{A3})} + e^{-\kappa_1 U_1} + e^{-\kappa_2 U_2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Такое представление I_{A3} позволяет исключить вычисление экспоненциальных функций для участков (2) и (3) ВАХ.

Если не требуется более точного выражения ВАХ диода, можно ограничиться выражением (2.10). При этом в (2.12) полагаем $\kappa_2 = 0$.

В модель диода входит также емкость. Поскольку диод Зенера используется для стабилизации напряжения, а следовательно, представляет главным образом режим его работы при обратном напряжении, емкость C определяется барьерной емкостью, выраженной уравнением

$$C = C_{\text{бд}} = \frac{C_{\text{б0}}}{(1 - U_{\text{дз}} / U_z)^N} \quad (2.13)$$

Итак, существует математическая модель стабилитрона, схема которой представлена на рис.2.3. Элементы модели, а именно генератор тока и емкость, представлены соответственно уравнениями (2.12) и (2.13). Параметры модели обычно определяются исходя из экспериментальных характеристик диода.

В [12] разработана модель стабилитрона, обладающая, по мнению авторов, преимуществами по сравнению с известными моделями, а именно:

модель достаточно точна в рабочем диапазоне, погрешность воспроизведения ВАХ в 5-10 раз меньше технологического разброса характеристики;

ВАХ модели проходит через начало координат, не имеет скачков производной, позволяет вести итерационные расчеты вне предельно допустимых значений тока и напряжения (не содержит неопределенностей вида деления на ноль и др.), а также в области прямой проводимости (диодная часть ВАХ);

модель пригодна для представления в базе данных любых модификаций стабилитронов: стабилитронов, двуханодных, прецизионных, низковольтных (до 7-9 В), высоковольтных (свыше 9-10 В);

модель позволяет автоматизировать процесс определения её параметров, производить расчет температурной нестабильности не хуже, чем по справочным данным.

Нелинейная динамическая модель стабилитрона описывает ВАХ прибора, а также его динамические свойства при прямом и обратном смещениях. В модели учитываются наличие участков туннельного и лавинного пробоя на рабочем участке ВАХ, температурный сдвиг ВАХ и режимная зависимость диффузионной и барьерной составляющих емкости $p-n$ - перехода.

Эквивалентная схема модели стабилитрона представлена на рис. 2.5. Уравнения модели имеют вид:

$$I = \begin{cases} I_g = I_n + C_n \frac{dU_n}{dt} & \text{при } U_{cr} < 0, \\ I_{cr} = I_0 + C_n \frac{dU_n}{dt} & \text{при } U_{cr} \geq 0; \end{cases} \quad (2.14)$$

$$I_n = I_g [\exp(\theta_{cr} U_n) - 1];$$

$$I_0 = \begin{cases} A [\exp(B U_{cr}) - 1] \frac{1}{1 - (U_{cr}/U_0)^2} & \text{при } 0,995 U_0 > U_{cr} \geq 0, \\ 100 \exp(B \cdot 0,995 U_0) (B + 199/U_0) (U_{cr} - 0,995 U_0) & \text{при } U_{cr} \geq 0,995 U_0 \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \tau_{cr} \theta_{cr} I_n + C_{so} (1 + M U_n / \Phi_0) & \text{при } U_n > 0, \\ \tau_{cr} \theta_{cr} I_n + C_{so} (1 - U_n / \Phi_0)^M & \text{при } U_n \leq 0, \end{cases}$$

где I_g - ток, протекающий через стабилитрон при прямом $p-n$ - переходе ($U_n > 0$; $U_{cr} < 0$); I_{cr} - ток, протекающий через стабилитрон при обратном смещении $p-n$ - перехода ($U_n \leq 0$; $U_{cr} \geq 0$); I_{cr} , $\theta_{cr} = 1/\varphi_T$, R_g , A , B , U_0 - статические параметры модели; τ_{cr} , C_{so} , Φ_0 , M - динамические параметры модели.

В принятой модели параметры I_g , θ_{cr} , R_g , B , а также все динамические параметры в первом приближении полагаются не зависящими от температуры, а температурная зависимость параметров A и U_0 описывается соотношениями:

$$A(T) = A(T_0) \exp[-B U_0(T_0) \kappa_{Tcr} (T - T_0)]; \quad (2.15)$$

$$U_0(T) = U_0(T_0) [1 + \kappa_{Tcr} (T - T_0)], \quad (2.16)$$

где $A(T_0)$, $U_0(T_0)$ - значения параметров A и U_0 при исходной температуре; κ_{Tcr} - температурный коэффициент напряжения стабилизации, определяемый по нормативно-справочным данным.

Перечень параметров модели стабилитрона с указанием единиц измерения в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Обозначение	Единицы измерения	Наименование параметра
I_g	A	Тепловой ток $p-n$ - перехода
$\theta_{cr} = 1/\varphi_T$	B^{-1}	Коэффициент наклона линейного участка

		ВАХ стабилитрона при прямом смещении
		$p-n$ - перехода
R_b	ΩM	Объемное сопротивление базы
A	A	Коэффициент аппроксимации ВАХ стабилитрона
		при обратном смещении $p-n$ - перехода
U_0	B	Напряжение пробоя стабилитрона
$\tau_{ст}$	c	Постоянная времени стабилитрона
C_{50}	φ	Барьерная емкость $p-n$ - перехода
		при $U_n = 0$
φ_0	B	Контактная разность потенциалов $p-n$ - перехода
M		Показатель степени
$K_{тст}$	K^{-1}	Температурный коэффициент напряжения стабилизации

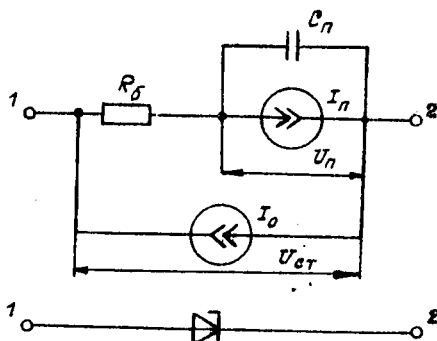


Рис. 2.5

Модель биполярного транзистора. В зависимости от того, в каком режиме работает транзистор, составляет эквивалентная схема. Рассмотрим малосигнальные модели транзистора.

Малосигнальные модели транзисторов показаны на рис. 2.6 и отличаются диапазоном частот их применимости [5]. Параметры низкочастотных моделей транзистора определяют через какую-либо систему параметров транзисторов,

найденной для соответствующей схемы включения. Так для транзистора в схеме с общей базой (ОБ):

$$\tilde{r}_g = \tilde{r}_{15} - \tilde{r}_{125} = \frac{g_{125} + g_{225}}{g_{115} g_{225} - g_{125} g_{215}} = h_{115} - (1 + h_{215}) \frac{h_{125}}{h_{225}};$$

$$\tilde{r}_5 = \tilde{r}_{125} = - \frac{g_{125}}{g_{115} g_{225} - g_{125} g_{215}} = - \frac{h_{125}}{h_{225}};$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{225} - \tilde{r}_{125} = \frac{g_{115} + g_{125}}{g_{115} g_{225} - g_{125} g_{215}} = \frac{1 - h_{125}}{h_{225}} \approx \frac{1}{h_{225}}; \quad (2.17)$$

$$\tilde{r}_m = \tilde{r}_{215} - \tilde{r}_{125} = \frac{g_{125} - g_{215}}{g_{115} g_{225} - g_{125} g_{215}} = - \frac{h_{125} + h_{215}}{h_{225}} \approx - \frac{h_{215}}{h_{225}};$$

$$\alpha = \frac{\tilde{r}_{215} - \tilde{r}_{125}}{\tilde{r}_{225} - \tilde{r}_{125}} = \frac{g_{125} - g_{215}}{g_{115} + g_{125}} = - \frac{h_{125} + h_{215}}{1 - h_{125}} \approx h_{215}.$$

Подобные таблицы пересчета параметров транзисторов приведены в [5].

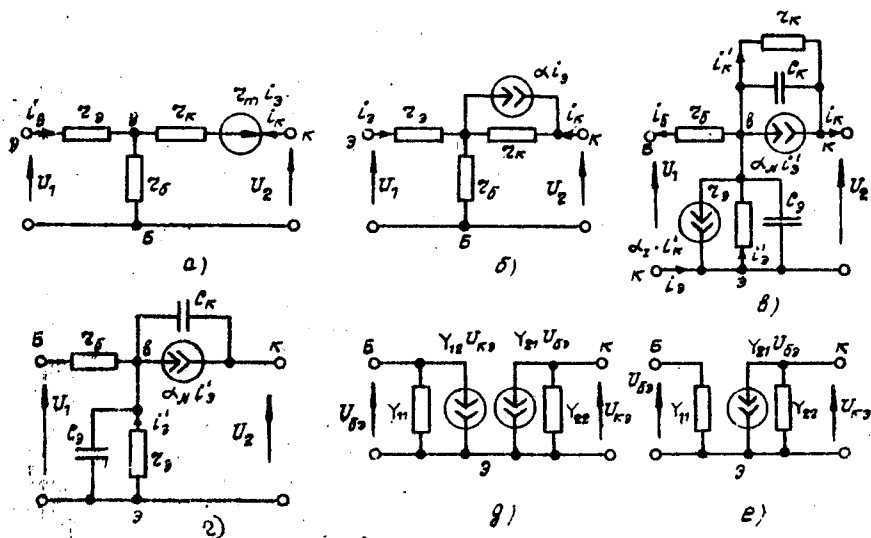


Рис. 2.6

В [11] рассмотрены модели биполярных полупроводниковых элементов, предназначенные для анализа статических и динамических характеристик электронных схем с помощью ЭВМ. Это модели Эберса-Молла и ПАЭС (рис. 2.7),

Согласно схеме, изображенной на рис.2.7,а, модель Эберса-Молла включает в себя генераторы токов I_F , I_R , $\alpha_n I_F$, $\alpha_i I_R$, емкости C_3 и C_K , а также сопротивления R_3 , R_K , шунтирующие переходы, и сопротивления R_{33} , R_{66} , R_{KK} соответствующих областей транзисторов. Каждая из емкостей транзистора состоит из барьерной и диффузионной емкостей: $C_3 = C_{33} + C_{d3}$, $C_K = C_{6K} + C_{dK}$.

Модель ПАЭС (рис.2.7,б) состоит из генераторов тока i_{a4} и i_{k4} , генератора тока i_2 , представляющего передачу носителей через базу. В модель включены емкости C_3 , C_K сопротивления R_3 , R_K и сопротивления R_{33} , R_{66} , R_{KK} аналогичные тем, которые имеются в схеме рис. 2.7,а.

На рис. 2.7 показаны принятые положительные направления токов и напряжений U_3 и U_K на переходах транзистора.

Приведем математические описания этих моделей.

Модель Эберса-Молла. Генератор тока I_F отображает не только ток, обусловленный инжекцией электронов из эмиттера в базу транзистора, но и ток инжекции дырок из базы в эмиттер, токи утечки, шунтирующие эмиттерный переход, и другие паразитные компоненты. По величине первая составляющая тока превалирует над остальными. Генератор тока I_R отображает ток, обусловленный инжекцией электронов из коллектора в базу транзистора, ток, отражающий инжекцию дырок из базы в область коллектора, и другие паразитные компоненты. Составляющая тока, обусловленная инжекцией электронов в активную зону базы планарного транзистора, чрезвычайно мала по сравнению с остальными. Поэтому очень мал инверсный коэффициент усиления по току.

Основная часть тока I_R при прямом смещении коллекторного перехода ответвляется в базу. Из-за паразитных токов, шунтирующих $p-n$ переходы, и других факторов, свойственных планарному транзистору при высоких уровнях инжекции, вольт-амперные уравнения зависимости I_F от U_3 и I_R от U_K не подчиняются идеальной экспоненциальной зависимости. Эти отклонения в модели учитываются коэффициентами m_3 и m_K . Токи I_F и I_R представлены в модели уравнениями (2.18) и (2.19), где $\varphi_T = kT/q$ (см.табл. 2.3).

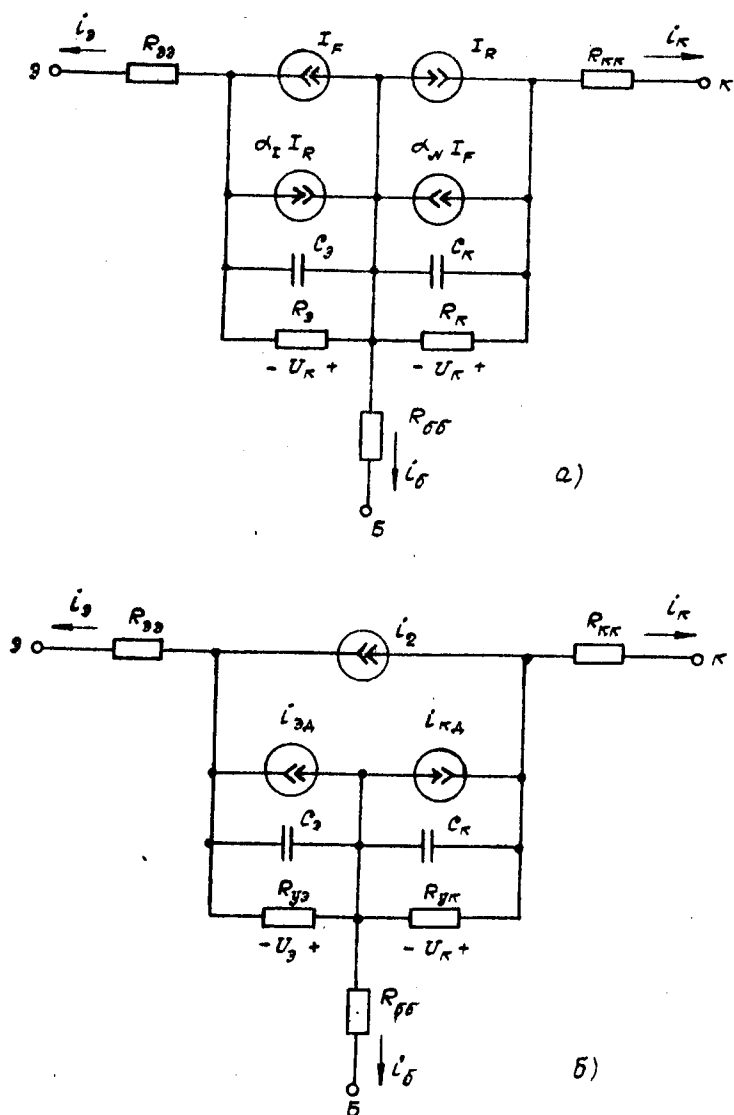


Рис. 2.7

Для того, чтобы отразить работу как маломощных, так и мощных планарных транзисторов в условиях как низких, так и высоких уровней инжекции, коэффициент усиления по току β_N (отражающий работу в нормальном активном режиме) и β_I (отражающий работу в инверсном активном режиме) представлены в функциях от электрического режима работы транзистора. Вводя эти зависимости, удается использовать модель Эберса-Молла для описания планарного транзистора, отнюдь не обладающего свойствами идеального транзистора.

Существует две модификации данной модели [11]. Они совершенно одинаковы, за исключением способов представления β_N и β_I . В одной модификации β_N есть функция от напряжения на эмиттерном переходе U_E , а β_I — функция напряжения на коллекторном переходе U_K . В другой модификации β_N представлен функцией тока I_F , а β_I — тока I_R . В обоих случаях эти зависимости имеют вид полиномов третьей и четвертой степени.

Максимальные значения коэффициентов усиления $\beta_{N\max}$ и $\beta_{I\max}$ в диапазоне допустимых для данного типа транзистора токов I_F и I_R соответственно принимаются исходя из реальных зависимостей $\beta_N = f(I_F)$ и $\beta_I = f(I_R)$, получаемых экспериментально для конкретных типов транзисторов.

В модель входят также емкости C_E и C_K , каждая из которых состоит из суммы барьерной емкости соответствующего перехода и диффузионной емкости. Емкости C_E и C_K определяются уравнениями (2.20) и (2.21), где C_{E0} и C_{K0} — барьерные емкости переходов транзистора при нулевых напряжениях на них, т.е. при $U_E = 0$ и $U_K = 0$; U_{E2} и U_{K2} — контактные разности потенциалов эмиттерного и коллекторного перехода.

Как в данной модели, так и во всех других, где использованы выражения, аналогичные (2.20) и (2.21), необходимо учитывать, что использованные в них составляющие, отражающие барьерные емкости т.е. C_{E0} и C_{K0} , довольно точно представляют барьерные емкости при обратных напряжениях на переходах. При прямом смещении переходов и напряжениях U_E и U_K более 0,2–0,3 В увеличение напряжения может привести к резкому росту C_{E2} и C_{K2} , поэтому нецелесообразно предусмотреть предельные значения C_{E2} и C_{K2} . При прямом смещении переходы шунтируются большим прямым током, поэтому принятое ограничение барьерной емкости практически не отражается на точности моделирования транзистора.

Значения τ_F и τ_R , входящие в уравнения (2.20) и (2.21), являются постоянными величинами, характеризующими перемещение носителей в базе в нормальном и инверсном направлениях. Отметим, что τ_F в действительности зависит от тока I_C , а τ_R - от режима насыщения транзистора, что следует принять во внимание при использовании модели транзистора для расчета конкретных электронных схем.

В математическом описании модели τ_F и τ_R представлены как постоянные величины, чтобы не усложнять описание модели, поскольку при машинных расчетах многих схем это практически не отражается на точности получаемых результатов. Но величины τ_F и τ_R должны быть выбраны с учетом наиболее часто используемых электрических режимов работы транзистора в различных схемах.

Сопротивления R_E и R_K отражают влияние токов утечки, шунтирующих переходы, и эффект Эрли, обусловленный изменением толщины базы при модуляции толщин переходов с изменением напряжений на них.

Сопротивление $R_{ЭЭ}$ очень мало. Им часто пренебрегают и исключают из модели. Сопротивления $R_{ББ}$ и $R_{КК}$ включены в модель как постоянные величины, но следует учитывать их зависимость от режима работы транзистора. В частности, сопротивление $R_{ББ}$ зависит от тока базы, поскольку с увеличением тока базы растет концентрация носителей заряда в ней и вместе с этим уменьшается сопротивление области базы. На сопротивление $R_{КК}$ также отражается режим работы транзистора и, в частности, переход к режиму вытеснения инжекции к периферии эмиттера. Следовательно, величины $R_{ББ}$ и $R_{КК}$ должны быть выбраны с учетом изложенных факторов.

Как видно из математического описания, данная модель представляет свойства транзистора при определенной постоянной температуре T . Все параметры за исключением коэффициентов усиления; а именно $I_{ЭБ}$, $I_{КС}$, m_3 , m_K , $C_{БЭ}$, $C_{БК}$, $U_{ЭЭ}$, $U_{ЭК}$, τ_F , τ_R , R_E , R_K , $R_{ЭЭ}$, $R_{ББ}$, $R_{КК}$, приняты постоянными независимыми от электрических режимов транзистора.

Модель ПАЭС. Согласно схеме, представленной на рис. 2.7,б, модель ПАЭС включает в себя генераторы токов $i_{ЭД}$ и $i_{КД}$. Первый из них содержит ток рекомбинации носителей, инжектированных из эмиттера в базу, токи утечки, шунтирующие эмиттерный переход, и другие паразитные компоненты. В $i_{КД}$ входит ток рекомбинации носителей, инжектированных из коллектора в базу, ток,

обусловленный инжекцией носителей из базы в коллектор, а также токи утечки и другие паразитные компоненты. Составляющая тока, обусловленная инжекцией носителей из базы в коллектор планарных транзисторов, очень велика по сравнению с остальными [11].

В математическом описании модели ПАЭС, приведенном в табл. 2.3, токи $i_{э4}$ и $i_{к4}$ представлены экспоненциальными функциями (2.22) и (2.23), которые неточно отражают истинные зависимости этих токов от напряжений на переходах транзистора. В модель входит также генератор тока i_2 , емкости C_3 и C_K , которые выражены соответственно уравнениями (2.24), (2.25) и (2.26).

Как видно из (2.25), (2.26), емкости C_3 и C_K состоят как бы из барьерных емкостей, представленных первыми членами правых частей этих уравнений, так и из диффузионных емкостей. Как известно, диффузионная емкость определяется как производная заряда, накопленного в базе, по напряжению на переходе через который происходит инжекция носителей. С этой точки зрения диффузионная емкость $C_{d3} = dQ_3 / dU_3$. Диффузионная емкость для модели ПАЭС имеет вид

$$C_{d3} = (\tau_n / U_{30}) B \cdot (i_{э4} + I_{T3}) .$$

Но поскольку время жизни носителей τ связано с временем передачи носителей τ_n соотношением $\tau \approx B \tau_n$, выражение для C_3 , приведенное в модели ПАЭС, правомочно.

Параметрами модели являются: I_{T3} , I_{TK} - тепловые токи эмиттерного и коллекторного переходов; B_n , B_K - коэффициенты усиления по току при нормальном и инверсном активных режимах; C_{30} , C_{K0} - емкость эмиттерного и коллекторного переходов соответственно при нулевых напряжениях; U_{30} , U_{K0} - контактные разности потенциалов эмиттерного и коллекторного переходов; τ , τ_n - эффективные времена жизни носителей в области базы. Все указанные параметры являются постоянными величинами.

Данную модель следует отнести к моделям ограниченной точности, поскольку она не отражает влияния электрического режима и температуры на параметры транзистора [11].

В [12] для обеспечения диалоговых систем схемотехнического проектирования принят вариант нелинейной динамической модели, предложенной Логаном. Модель Логана описывает ВАХ биполярного транзистора (так называемые ВАХ переноса), а также его динамические свойства при нормальном и инверсном режимах работы. Учитывается влияние на ВАХ биполярного транзистора

Таблица 2.3.

Наименование	Математическое описание модели
Модель Эберса-Молла (рис.2.7,б)	Параметры: $I_{зз}, I_{кз}, m_3, m_k, \varphi_T, B_{I\max}, B_{I\max}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, C_{бз0}, C_{бк0}, U_{зз}, U_{зк}, \tau_F, \tau_R, R_3, R_k, R_{зз}, R_{бб}, R_{кк}$ $I_F = I_{зз} \left(\exp \frac{U_3}{m_3 \varphi_T} - 1 \right); \quad (2.18)$ $I_R = I_{кз} \left(\exp \frac{U_k}{m_k \varphi_T} - 1 \right); \quad (2.19)$ $\alpha_N = B_N / (1 + B_N); \quad \alpha_I = B_I / (1 + B_I);$ $B_N = B_{N\max} (a_0 + a_1 I_F + a_2 I_F^2 + a_3 I_F^3 + a_4 I_F^4);$ $B_I = B_{I\max} (b_0 + b_1 I_R + b_2 I_R^2 + b_3 I_R^3 + b_4 I_R^4);$ $C_3 = \frac{C_{бз0}}{(1 - U_3 / U_{зз})^{1/2}} + \frac{\tau_F (I_F + I_{зз})}{m_3 \varphi_T}; \quad (2.20)$ $C_k = \frac{C_{бк0}}{(1 - U_k / U_{зк})^{1/3}} + \frac{\tau_R}{m_k \varphi_T} (I_R + I_{кз}); \quad (2.21)$
Модель ПАЗС (рис.2.7,б)	Параметры: $I_{тз}, I_{тк}, m_1, m_2, \varphi_T, B_N, B_I, C_{бз0}, C_{бк0}, \tau, \tau_H, U_{зз}, U_{зк}, R_{уз}, R_{yk}, R_{зз}, R_{бб}, R_{кк}$ $I_{зА} = I_{тз} \left(\exp \frac{U_3}{m_1 \varphi_T} - 1 \right); \quad (2.22)$ $I_{кА} = I_{тк} \left(\exp \frac{U_k}{m_2 \varphi_T} - 1 \right); \quad (2.23)$ $I_2 = B_N I_{зА} - B_I I_{кА}; \quad (2.24)$ $C_3 = \frac{C_{бз0}}{(1 - U_3 / U_{зз})^{1/2}} + \frac{\tau}{m_1 \varphi_T} (I_{зА} + I_{тз}); \quad (2.25)$ $C_k = \frac{C_{бк0}}{(1 - U_k / U_{зк})^{1/3}} + \frac{\tau_H}{m_2 \varphi_T} (I_{кА} + I_{тк}); \quad (2.26)$

объемных сопротивлений базы и коллектора, зависимости нормального и инверсного коэффициентов передачи тока от режима и температуры, а также зависимость диффузионных и барьерных составляющих емкостей $\rho - \alpha$ - переходов биполярного транзистора от режима.

Эквивалентная схема модели представлена на рис.2.8. Уравнения модели имеют вид:

$$U_{эб}(t) = I_э(t) R_э + U_{эп}(t) + I_б(t) R_б;$$

$$U_{кб}(t) = I_к(t) R_к + U_{кп}(t) + I_б(t) R_б;$$

$$I_э(t) = \left(1 + \frac{1}{\beta_{N0}}\right) I_N - I_I + \frac{U_{эп}}{R_{yтэ}} + \frac{d}{dt} (C_{эп} U_{эп});$$

$$I_к(t) = -I_N + \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right) I_I + \frac{U_{кп}}{R_{yтк}} + \frac{d}{dt} (C_{кп} U_{кп});$$

$$I_б(t) = I_э(t) + I_к(t);$$

$$I_N = I_{sN} [\exp(U_{эп} \theta_N) - 1];$$

$$I_I = I_{sI} [\exp(U_{кп} \theta_I) - 1];$$

$$\beta_{N0} = \beta_N I_N^{q_N} \exp(\rho_N I_N); \quad (2.27)$$

$$\theta_{I0} = \theta_I I_I^{q_I} \exp(\rho_I I_I);$$

$$R_{yтэ} = \beta_{I0} / I_I \kappa_I;$$

$$R_{yтк} = \beta_{N0} / I_N \kappa_N;$$

$$C_{эп} = \begin{cases} \tau_N \theta_N I_N + C_{эп0} (1 + M_э U_{эп} / \varphi_{ээ}) & \text{при } U_{эп} > 0, \\ \tau_N \theta_N I_N + C_{эп0} (1 - U_{эп} / \varphi_{ээ})^{-M_э} & \text{при } U_{эп} \leq 0; \end{cases}$$

$$C_{кп} = \begin{cases} \tau_I \theta_I I_I + C_{кп0} (1 + M_к U_{кп} / \varphi_{ок}) & \text{при } U_{кп} > 0, \\ \tau_I \theta_I I_I + C_{кп0} (1 - U_{кп} / \varphi_{ок})^{-M_к} & \text{при } U_{кп} \leq 0, \end{cases}$$

где $U_{эп}$, $U_{кп}$ - падение напряжения на эмиттерном и коллекторном $p-n$ - переходах соответственно;

I_N , I_I - токи переноса при нормальном (N) и инверсном (I) включении; β_{N0} , β_{I0} - статические коэффициенты передачи тока при нормальном и инверсном включениях транзистора и нулевых напряжениях на $p-n$ - переходах ($U_{кп} = 0$ и $U_{эп} = 0$ соответственно); $C_{эп}$, $C_{кп}$ - емкости эмиттерного и коллекторного $p-n$ - переходов соответственно; I_{sN} , I_{sI} , $\theta_N = 1/\varphi_{TN}$, $\theta_I = 1/\varphi_{TI}$, R_β , R_ϵ , R_K , G_N , θ_N , μ_N , ρ_I , θ_I , ρ_I , κ_N , κ_I - статические параметры модели транзистора; τ_{eN} , τ_{eI} , $C_{эпо}$, $C_{кпо}$, M_β , M_K , $\phi_{0\beta}$, ϕ_{0K} - динамические параметры модели.

В принятой модели статические параметры R_β , R_ϵ , R_K , G_N , θ_N , ρ_N , θ_I , ρ_I , κ_N , κ_I , а также все динамические параметры, чтобы излишне не усложнять модель, полагаются независимыми от температуры, а температурная зависимость параметров I_{sN} , I_{sI} , θ_N , θ_I описывается соотношениями:

$$I_{sN(I)}(T) = I_{sN(I)}(T_0) \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \exp \left(\kappa_{TIs} \frac{T - T_0}{T_0} \right); \quad (2.28)$$

$$\varphi_{TN(I)}(T) = \frac{1}{\theta_{N(I)}(T)} = \varphi_{TN(I)}(T_0) \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right), \quad (2.29)$$

где $I_{sN(I)}(T_0)$, $\varphi_{TN(I)}(T_0)$ - значения параметров $I_{sN(I)}$, $\varphi_{TN(I)}$ при исходной температуре $T_0 = 298$ К; T - текущая температура, К; $\kappa_{TIs} = q U_{A0} / \kappa T_0$ - температурный коэффициент, зависящий от типа полупроводникового материала ($U_{A0} = 1,205$ В - для кремния, $U_{A0} = 0,708$ В - для германия, q - заряд электрона, κ - постоянная Больцмана). При $T_0 = 298$ К для кремния $\kappa_{TIs} = 46,9$; для германия $\kappa_{TIs} = 30,6$.

Температурная зависимость статического коэффициента передачи тока при нормальном включении биполярного транзистора учитывается в модели следующим соотношением:

$$\beta_{N0}(I_N, T) = \beta_{N0}(I_N, T_0) [1 + \kappa_{\beta N} (T - T_0)], \quad (2.30)$$

где $\beta_{N0}(I_N, T_0) = G_N I_N^{\theta_N} \exp(\rho_N I_N)$ - значение статического коэффициента передачи тока β_{N0} при заданном токе коллектора I_N и исходной температуре $T_0 = 298$ К; T - текущая температура, К; $\kappa_{\beta N}$ - температурный коэффициент.

Температурный коэффициент $\kappa_{\beta N}$ является функцией тока коллектора I_N , т.е. $\kappa_{\beta N} = f(I_N)$. С ростом тока I_N коэффициент $\kappa_{\beta N}$ уменьшается, причем для биполярного транзистора средней и большой мощности в рабочем диапазоне токов I_N коэф-

коэффициент $K_{T_{B_{\text{н}}}}$ изменяет знак.

Учет режимной зависимости коэффициента $K_{T_{B_{\text{н}}}}$ существенно усложняет модель. Поэтому в модели, предложенной в [12], коэффициент $K_{T_{B_{\text{н}}}}$ принимается постоянным. Значения коэффициентов $K_{T_{B_{\text{н}}}}$ для конкретных типоназваний транзистора определяются по результатам температурных испытаний приборов при значении тока коллектора, нормируемом в ТУ. Перечень параметров модели биполярного транзистора приведен в табл. 2.4.

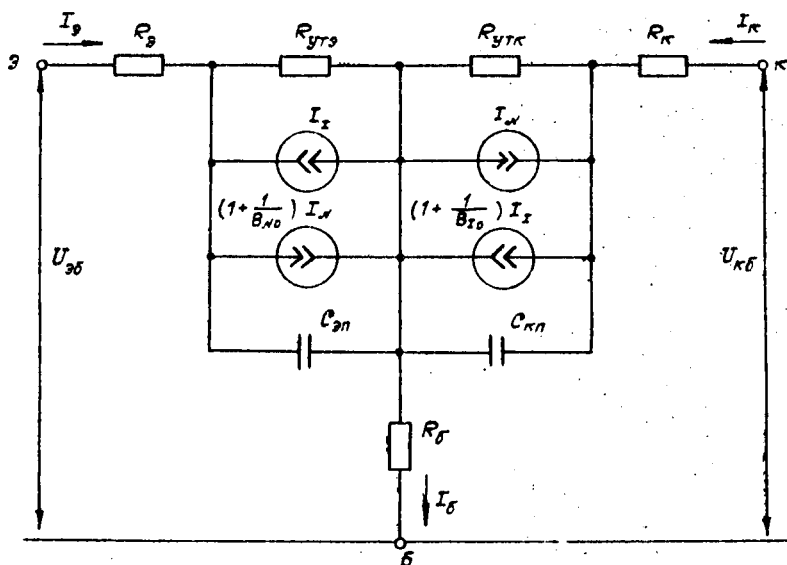


Рис. 2.8

Таблица 2.4

Обозначения	Единицы измерения	Наименование параметра
$I_{S_{\text{н}}}$	A	Тепловой ток при нормальном режиме работы транзистора, определяемый точкой пересечения линейного участка ВАХ $I_{\text{к}} = f(U_{\text{эб}})$ с осью ординат

$I_{\delta I}$	A	Тепловой ток при инверсном режиме работы транзистора, определяемый точкой пересечения линейного участка ВАХ $\varrho I_2 = f(U_{\kappa\delta})$ с осью ординат
$\theta_N = 1/\varphi_{TN}$	B^{-1}	Коэффициент наклона линейного участка ВАХ $\varrho I_{\kappa} = f(U_{\delta\delta})$ при нормальном режиме работы транзистора
$\theta_I = 1/\varphi_{TI}$	B^{-1}	Коэффициент наклона линейного участка ВАХ $\varrho I_2 = f(U_{\kappa\delta})$ при инверсном режиме работы транзистора
R_{δ}	OM	Объемное сопротивление базы
R_{κ}	OM	Объемное сопротивление коллектора
R_{δ}	OM	Объемное сопротивление эмиттера
$\left\{ \begin{matrix} G_N \\ Q_N \\ P_N \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} A^{-\alpha} \\ - \\ A^{-1} \end{matrix} \right\}$	Параметры аппроксимации зависимости нормального коэффициента передачи тока B_{N0} от тока коллектора I_{κ}
$\left\{ \begin{matrix} G_I \\ Q_I \\ P_I \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} A^{-\alpha} \\ - \\ A^{-1} \end{matrix} \right\}$	Параметры аппроксимации зависимости инверсного коэффициента передачи тока θ_{I0} от тока эмиттера I_2
κ_N	B^{-1}	Параметр, характеризующий зависимость коэффициента передачи тока B_N от напряжения $U_{\kappa\delta}$
κ_I	B^{-1}	Параметр, характеризующий зависимость коэффициента передачи тока θ_I от напряжения $U_{\delta\delta}$
κ_{TIS}	$-$	Температурный коэффициент теплового тока транзистора
κ_{TBN}	K^{-1}	Температурный коэффициент статического коэффициента передачи тока при нормальном режиме работы транзистора
τ_N	c	Постоянная времени, обусловленная диффузией, при нормальном режиме работы транзистора
τ_I	c	Дифференциальная постоянная времени при инверсном режиме работы транзистора

Продолжение табл. 2.4

$\left\{ \begin{array}{l} C_{эл0} \\ M_3 \\ \Phi_{03} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \\ - \\ B \end{array} \right\}$	Параметры аппроксимации зависимости барьерной емкости эмиттерного $p-n$ -перехода от напряжения $U_{эб}$
$\left\{ \begin{array}{l} C_{кл0} \\ M_K \\ \Phi_{ок} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \\ - \\ B \end{array} \right\}$	Параметры аппроксимации зависимости барьерной емкости коллекторного $p-n$ -перехода от напряжения $U_{кб}$

В [10] проведено сравнение нелинейных моделей биполярных транзисторов (модели Эберса-Молла, ПАЭС и модели Логана) и на основе сравнения сделан вывод, что предпочтение следует отдавать модели Логана, базирующейся на передаточных токах I_{ω} и I_T , и учитывая этот вывод, предложен унифицированный комплекс моделей биполярного транзистора для применения в универсальных программах анализа и оптимизации электронных схем.

Комплекс состоит из подробной модели Логана, ее упрощенного варианта и линейной (малосигнальной) модели транзистора. В [10] приводится математическое описание унифицированного комплекса моделей биполярного транзистора, в котором даны параметры моделей и уравнения, позволяющие определить все элементы каждой модели в зависимости от напряжений на переходах U_3 и U_K параметров модели.

М о д е л ь М Д П - т р а н з и с т о р а .

Удовлетворительные результаты по точности моделирования, удобству включения в программу автоматизированного схемотехнического проектирования и затратам машинного времени на вычисления даст модификации статической модели Хофстайна [11]. Эта модель позволяет рассматривать МДП - транзистор как четырех-полюсник, содержащий между полюсами стока и истока зависимый источник тока. Дополнив четырех-полюсник паразитными емкостями и сопротивлениями, моделирующими утечки, в [11] получена динамическая модель МДП - транзистора (рис.2.9).

Зависимый источник тока I_c описывается кусочно-линейной функцией потенциалов полюсов транзистора $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_n$

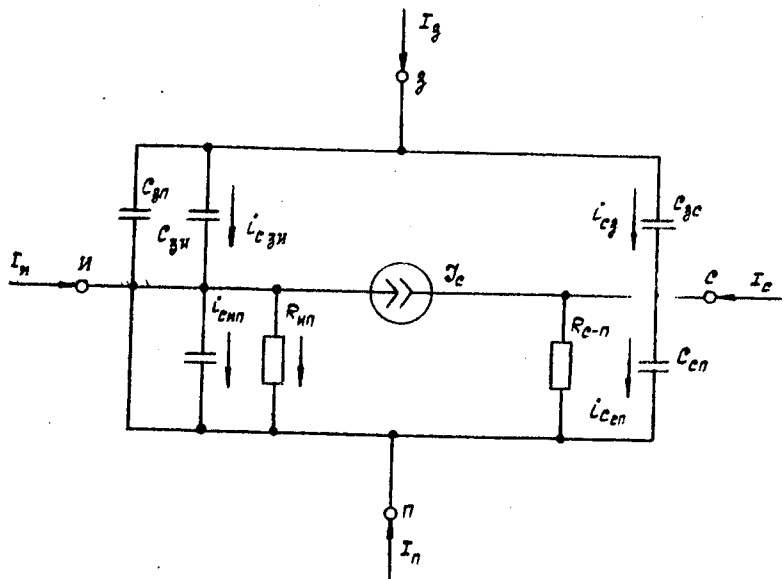


Рис. 2.9

$$J_z = \begin{cases} -A \cdot \beta [(\varphi_3 - \varphi_n - U_{эф})(\varphi_3 - \varphi_n) - (\varphi_3 - \varphi_n)^2 / 2] & \text{при } |\varphi_3| < |U_{нас}|; \\ -A \cdot \beta (\varphi_3 - \varphi_n - U_{эф})^2 / 2 & \text{при } |\varphi_3| \geq |U_{нас}|; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\beta = \mu \epsilon_d \omega / (L x_0); \quad U_{эф} = U_0 + K(\sqrt{A(\varphi_n - \varphi_n) + 2\varphi_F} - \sqrt{2\varphi_F});$$

$$K = (x_0 / \epsilon_n) \sqrt{2 \epsilon_n q N};$$

$$U_{нас} = A(\varphi_3 - \varphi_n) - U_{эф},$$

где μ - эффективная подвижность носителей в канале; ϵ_d - диэлектрическая проницаемость окисла; x_0 - толщина окисла под затвором; L - длина канала; ω - ширина канала; U_0 - пороговое напряжение; φ_F - уровень Ферми; ϵ_n - диэлектрическая проницаемость полупроводника; q - заряд электрона; N - концентрация примесей в подложке; A - коэффициент, определяющий тип транзистора ($A = -1$ - транзистор с p -каналом; $A = 1$ - транзистор с n -каналом).

Емкости модели МДП - транзистора могут быть достаточно просто выражены через конструкторско-технологические параметры полупроводниковой структуры. Емкости перекрытия C_{3n} и C_{3c} определяются через удельную емкость тонкого окисла C_0 и геометрические размеры области: $C_{3n} = C_{3c} = C_0 \omega l_n$, где l_n - длина перекрытия.

Емкости обратно-смешенных p - n - переходов области истока и стока в общем случае нелинейны и описываются зависимостью, аналогичной барьерной составляющей емкостей переходов биполярного транзистора и в упрощенном варианте их можно считать постоянным:

$C_{np} = C_{p-n} S_{np}$, $C_{cn} = C_{p-n} S_{cn}$, где C_{p-n} - удельная емкость p - n - перехода; S_{np} , S_{cn} - площади областей истока и стока.

Емкость C_{3n} зависит от суммарной емкости канала транзистора, равной $C_k = C_0 \omega L$. В общем случае емкость C_k нелинейна и в зависимости от режима транзистора перераспределяется между емкостями C_{3n} , C'_{3n} и C'_{3c} , при этом две последние емкости следует рассматривать как дополнительные слагаемые емкостей C_{3n} и C_{3c} .

Иногда используется усреднение емкостей транзистора по режимам

$C'_{3n} = 0$; $C'_{3c} = 0$; $C_{3n} = C_K$ - в режиме отсечки;
 $C'_{3n} = 0,6C_K$; $C'_{3c} = 0,3C_K$; $C_{3n} = 0$ - в крутой области;
 $C'_{3n} = 0,7C_K$; $C'_{3c} = 0$; $C_{3n} = 0$ - в пологой области.

М о д е л и т и р и с т о р о в . В основе построения всех моделей тиристоров лежит принцип идентичности реального объекта и его модели с точки зрения их внешних электрических характеристик (статических, динамических, переходных и прочих) в тех или иных условиях (режимах работы, диапазонах изменения каких-либо внешних величин и т.п.). Идентификацию электрической схемы модели и ее параметров проводят двумя путями. В одном случае учитывают внутренние особенности моделируемого прибора (электрофизические свойства, геометрические размеры и т.п.), в другом - только поведение реального объекта относительно внешних выводов.

В соответствии с этим модели тиристоров, описанные в советской и зарубежной литературе, предлагается разделить на две группы: формальные и физические [13] .

Под формальной моделью прибора понимают многополюсную электрическую схему с количеством выводов, равным количеству внешних выводов (контактов) моделируемого прибора. Эта схема содержит минимальное количество пассивных и активных элементов, необходимых для учета внешних характеристик реального прибора. Структура схемы замещения прибора, вид входящих в нее элементов и их параметры подбираются таким образом, чтобы в моделируемом процессе или режиме работы соответствующие внешние характеристики многополюсника и реального прибора совпадали с требуемой точностью.

Под физической моделью полупроводникового прибора понимают также многополюсник с количеством полюсов, равным количеству внешних выводов прибора. Однако в отличие от формальной модели структура его электрической схемы и составляющие её элементы отображают основные электрофизические процессы, протекающие в моделируемом приборе, и учитывают геометрические размеры и особенности многослойной полупроводниковой структуры.

Простейшей моделью тиристора является и д е а л ь н ы й к л ю ч , переключающийся из разомкнутого состояния в замкнутое в определенный момент времени при условии, что напряжение $U_{ак}$ на разомкнутом ключе больше нуля и на управляющий электрод подан импульс управления. Ключ возвращается в разомкнутое состояние при достижении анодным током тиристора I_a некоторого минимального

значения, величина которого обычно равна току выключения или нулю. Простота реализации и отсутствие параметров, связанных с характеристиками реальных приборов, обусловили широкое распространение этой модели при анализе тех электромагнитных явлений в тиристорных устройствах, где вид и длительность процессов, возникающих на этапе переключения вентилей, а также потери мощности в них, не являются определяющими.

Учет статических потерь мощности как во включенном, так и в выключенном состоянии приводит к моделированию тиристора активным сопротивлением, меняющим свою величину скачкообразно в момент переключения (R - модель). В схеме замещения вентиля эти потери учитываются сопротивлениями $R_{дк,л}$ и $R_{вк,л}$, коммутируемые идеальным ключом.

R_L - модель тиристора является дальнейшим развитием ключевой R - модели. В этом случае тиристор во включенном и выключенном состоянии моделируется последовательной R_L - цепочкой [13]. Параметры этой цепочки выбираются таким образом, чтобы в любом состоянии вентиля отношение индуктивного сопротивления модели на основной частоте работы устройства к ее активному сопротивлению оставалось неизменным. При этом добротность модели тиристора должна быть близкой к добротности других элементов устройства. Так, например, величина этого соотношения выбирается равной добротности анодного дросселя мостового преобразователя.

В [13] отмечается, что введение индуктивности в R - модель управляемого вентиля в описанном выше виде не является отражением физических особенностей тиристора, а преследует чисто вычислительную цель - сократить затраты машинного времени при расчете цепей с сильно различающимися постоянными времени.

Кусочно-линейные модели тиристора позволяют более точно моделировать вид статической вольт-амперной характеристики. В основе этой группы моделей лежит кусочно-линейная аппроксимация статической вольт-амперной характеристики прибора, содержащая более двух участков.

Кусочно-линейные модели способны несколько более точно, чем ключевые, описать процессы, связанные с этапом переключения вентилей в схеме тиристорного преобразователя. Однако отсутствие учета этими моделями внутренних особенностей реального прибора ведет к очень приближенному моделированию электромагнитных процессов,

возникающих в устройстве при переключении вентиля. Кроме того, определение параметров кусочно-линейных моделей требует знания большего количества характеристик моделируемого прибора, которые не всегда можно найти в каталогах или справочниках. Это основная причина по которой эта группа моделей здесь упоминается, но электрические схемы не приводятся.

В системах автоматизированного проектирования электронных устройств с успехом используются физические модели тиристоров. Кроме хорошей точности моделирования, физические модели позволяют связать свои параметры с электрофизическими и геометрическими характеристиками полупроводниковой структуры реального прибора. Это позволяет избежать многочисленных экспериментов для нахождения параметров модели. Из физических моделей заслуживают рассмотрения модели тиристоров, управляемые током (модели типа Эберса-Молла).

В основе приведенных ниже схем замещения тиристоров лежит явление переноса неосновных носителей заряда через базовые области $p-n-p$ - структуры прибора. При этом так или иначе учитываются токи неосновных носителей заряда, инжектированных одними $p-n$ - переходами и собираемых другими. Поэтому эти модели получили название моделей, управляемых током.

Модели для анализа статического режима. Простейшая из них приведена на рис.2.10. Вольтамперные характеристики диодов в этой модели представляют собой логарифмические аппроксимации вольт-амперных характеристик $p-n$ - переходов тиристора (двух эмиттерных $D1$ и $D2$ и одного коллекторного $D3$):

$$I_A = I_{A0} \left(\exp \frac{U_A}{\varphi_T} - 1 \right), \quad (2.32)$$

где I_{A0} - обратный ток $p-n$ - перехода;

φ_T - температурный потенциал.

Влияние на статическую вольт-амперную характеристику тиристора токов неосновных носителей заряда (прямых и инверсных) отражено в модели источниками токов $\alpha \cdot I_A$. Влияние сопротивлений базового и эмиттерного слоев отражено сопротивлениями R_a , R_k и R_y . Нелинейный характер коэффициентов передачи токов α за счет зависимости коэффициентов инжекции $p-n$ - переходов γ от протекающего через них полного тока

$$\alpha = \gamma \cdot \gamma$$

$$\gamma = \operatorname{sech} \frac{W}{L};$$

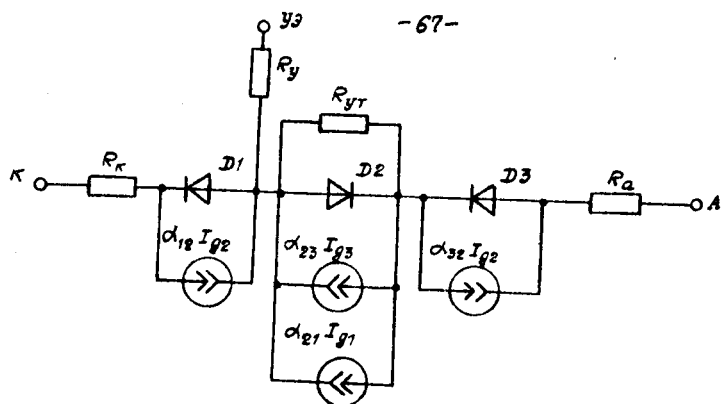


Рис. 2.10

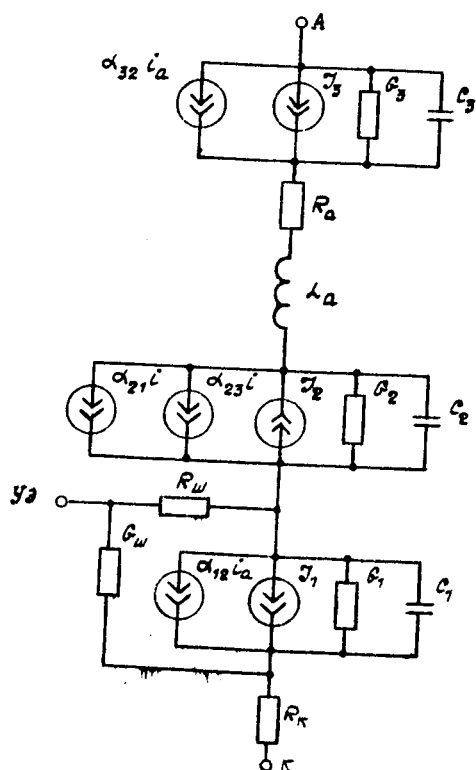


Рис. 2.11

$$\gamma = \gamma_0 [1 - 2 / (1 + \sqrt{1 + 2 I_a / I_0})],$$

- где χ - коэффициент переноса тока через область базы;
 γ - коэффициент инжекции $p-n$ - перехода;
 γ_0 - коэффициент инжекции $p-n$ - перехода без учета процесса рекомбинации;
 I_0 - ток, при котором эффективность эмиттера достигает примерно 1/3 своего предельного значения;
 W - толщина базовой области;
 L - диффузионная длина неосновных носителей заряда в базовой области.

Динамическая модель тиристора. Модель (см. рис. 2.11) используется для расчета электронных схем с помощью ЭВМ. Модель учитывает: зависимость коэффициентов передачи токов эмиттеров в коллектор от величин этих токов; влияние толстой базовой области, которое проявляется в увеличенном падении напряжения на включаемом тиристоре при высоких плотностях токов (R_a , L_a); наличие низкоомной утечки, шунтирующей управляющий $p-n$ - переход (G_w); инерционность увеличения площади начального включения полупроводниковой структуры.

Параметры схемы замещения тиристора в этой модели описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} J_K &= M_K J_{0K} \left(\exp \frac{U_K}{m \varphi_T} - 1 \right), \\ \alpha_{KE} &= M_K \alpha_{0KE} [1 - 2 / (1 + \sqrt{1 + 8 j_K / I_0})], \\ M_K &= 1 / [1 - (U_K / U_L) q], \\ C_K &= C_{8K} \left(\frac{U_{0K}}{U_{0K} - U_K} \right)^P + C_{AK} \exp \frac{U_K}{m \varphi_T}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

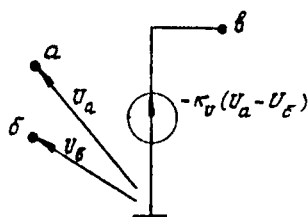
- где J - диффузионные токи $p-n$ - переходов;
 α - коэффициенты передачи токов;
 M - коэффициенты лавинного умножения;
 C - суммарные емкости $p-n$ - переходов;
 α_0 - максимальное значение коэффициента передачи тока;
 J_0 - обратный ток $p-n$ - перехода без учета лавинного умножения носителей в области пространственного заряда;
 U_L - напряжение лавинного пробоя $p-n$ - перехода;
 k, l - номера диодов в схеме, соответствующих $p-n$ - переходам полупроводниковой структуры тиристора;

I_0 - ток, при котором $\alpha = \alpha_0/2$;
 C_b, C_d - барьерная и диффузионная емкости $p-n$ -перехода при напряжении, равном нулю;
 U_0 - контактная разность потенциалов $p-n$ - перехода;
 m, q, ρ - постоянные коэффициенты.

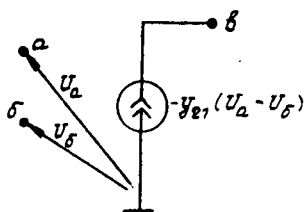
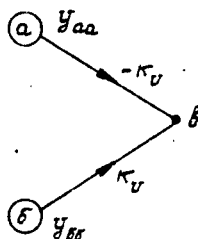
Результаты исследований возможности применения динамической модели тиристора для анализа электронных процессов в преобразователях приведены в [13] .

2.2.3. Обобщенные сигнальные графы линейных электронных компонентов

Обобщенные сигнальные графы (ОСГ) источника напряжения управляемого напряжением (ИНУН) и источника тока управляемого напряжением (ИТУН) представлены на рис.2.12.



а)



б)

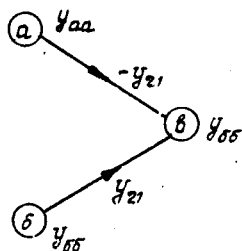


Рис. 2.12

ОСГ типовых звеньев, построенных на операционных усилителях.

Операционный усилитель (ОУ) будем представлять в виде идеального усилителя напряжения, имеющего коэффициент усиления K_U и два управляющих напряжения U_H и U_N (табл.2.5). Фактически его модель состоит из двух параллельно включенных зависимых источников, выходное напряжение которых соответственно равно $K_U U_H$ и $K_U U_N$. Заменяв их одним ИНУН с управляющим напряжением U_{HH} , равным разности $U_H - U_N$, получим схемную модель ОУ и ее обобщенный сигнальный граф (табл.2.5).

ОСГ типовых звеньев, построенных на ОУ, представлены в табл. 2.5. [4].

Для применения транзисторов в линейных усилителях режим их работы должен быть таким, чтобы нелинейные свойства проявлялись возможно меньше. Это получается, если на фоне больших постоянных токов и напряжений действуют небольшие переменные составляющие. Поскольку именно они являются переносчиками информации в усилителе, можно при исследовании усилительных свойств устройства ограничиться только нахождением соотношений между переменными напряжениями. Постоянные токи и напряжения рассчитывают отдельно, используя модель Эберса-Молла. В рабочей точке при малых приращениях функции ее раскладывают в ряд Тейлора и ограничиваются линейными членами. Поэтому для малых переменных составляющих применяют малосигнальные (или дифференциальные) линейные модели, состоящие из линейных элементов и отражающие отношения приращений токов и напряжений.

Для расчетов электронных схем широко применяют метод узловых напряжений. Поэтому дифференциальные параметры транзистора удобнее всего описать с помощью y^* - параметров линейного трех-полюсника:

$$i_1 = y_{11}^* U_1 + y_{12}^* U_2, \quad (2.34)$$

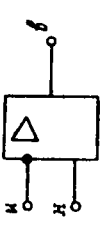
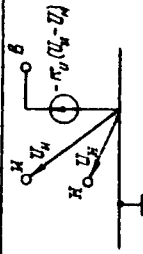
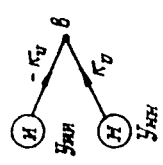
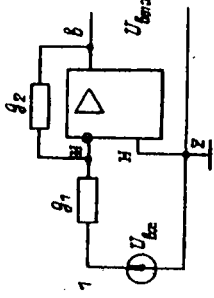
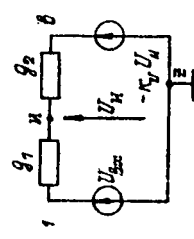
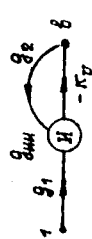
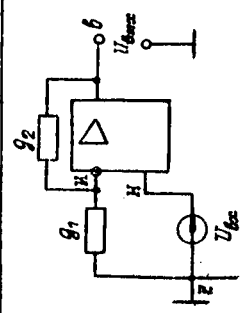
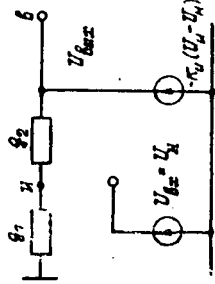
$$i_2 = y_{21}^* U_1 + y_{22}^* U_2.$$

где $y_{11}^* = (i_1 / U_1) U_2 = \text{const}$ - входная проводимость;

$y_{22}^* = (i_2 / U_2) U_1 = \text{const}$ - выходная проводимость (U измеряют и часто рассматривают как входную проводимость);

$y_{21}^* = (i_2 / U_1) U_2 = 0$ - передаточная проводимость со входа на выход; $y_{12}^* = (i_1 / U_2) U_1 = 0$ - передаточная проводимость с выхода на вход, отражающая обратную связь в транзисторе.

Таблица 2.5

Операция	Схема звена	Схема замещения	ОСГ
Усиление			
Инвертирующее масштабирование			
Неинвертирующее масштабирование			

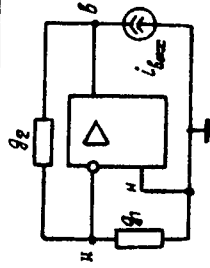
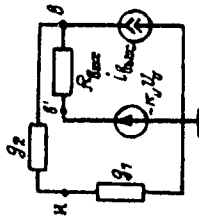
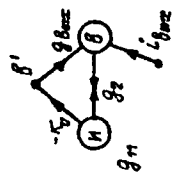
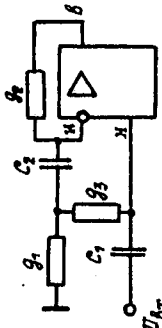
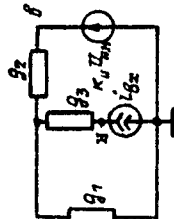
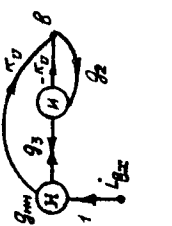
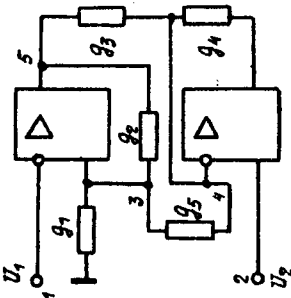
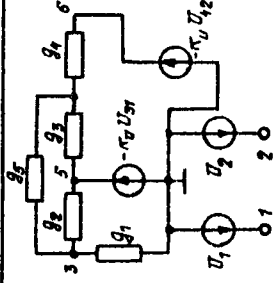
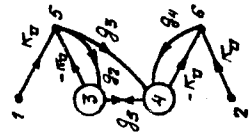
Пояснение табл. 2.5

1	2	3	4
Повторитель напряжения			
Алгебраическое суммирование			
Инвертирующее масштабиро- вание на пере- менном токе			

Продолжение табл. 2.

1	2	3	4
Идентифицирующее матричное уравнение на переменном токе			
Определение входного сопротивления			
Определение сопротивления между узлами			

Продолжение табл. 2.5

1	2	3	4
Определение выходного сопротивления			
Повышение входного сопротивления нейнвертирую- щего масштаба			
Вычитание сигналов и повышение выходного сопротивления			

Для приведенных величин равенство нулю U_1 и U_2 означает, что измерение соответствующего параметра производится в режиме короткого замыкания по переменному току (постоянные токи через выводы транзистора равны статическим значениям).

Для маломощных транзисторов типичные значения y^* - параметров (в микросименсах) следующие:

$$y_{11}^* = 2200; \quad y_{12}^* = 0,45; \quad y_{21}^* = 27200; \quad y_{22}^* = 7,8 [4].$$

Схемная интерпретация соотношений (2.34) показана на рис.

2.13,а. Входная и выходная проводимости включены между входными и выходными узлами. Передаточные проводимости y_{21}^* и y_{12}^* в силу их необратимости и неравенства друг другу представлены в виде коэффициентов у соответствующих зависимых источников тока, управляемых напряжением (источник тока $y_{21}^* U_{г-э}$ отражает коллекторный ток, управляемый напряжением $U_{г-э}$, а источник тока $y_{12}^* U_{к-э}$ отражает базовый ток $i_{г}$, управляемый напряжением $U_{к-э}$).

В большинстве практических случаев обратную связь в транзисторах через ИТУН с коэффициентом передачи y_{12}^* можно не учитывать (рис.2.13,б) из-за малости y_{12}^* по сравнению с y_{11}^* . Если к коллектору транзистора подключается база следующего транзистора (низкоомная цепь нагрузки), то чаще всего можно не учитывать и проводимость y_{22}^* (рис.2.13,в), так как $y_{22}^* \ll y_{11}^*$.

Линейную модель транзистора (рис.2.13,в) чаще всего применяют при анализе его работы в линейных усилителях. Следует также учитывать соотношение между y^* - параметрами биполярного транзистора

$$y_{21}^* = h_{21}^* y_{11}^*,$$

где $h_{21}^* \approx h_{21}$ - дифференциальный коэффициент передачи транзистора по току, мало отличающийся от статического. Для разных типов транзисторов h_{21}^* лежит в пределах от 10 до 200, если не считать транзисторов, у которых h^* может достигать нескольких тысяч.

На рис.2.14 а,б приведены обобщенные сигнальные графы для моделей, изображенных соответственно на рис.2.14 б и в.

В справочниках по транзисторам обычно приводятся так называемые смешанные h_{21}^* - параметры, получаемые из уравнений трех-полосника

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11}^* i_1 + h_{12}^* U_2, \\ i_2 &= h_{21}^* i_1 + h_{22}^* U_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

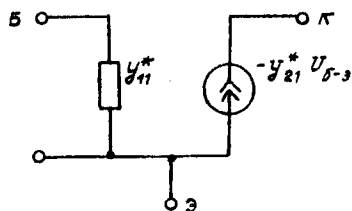
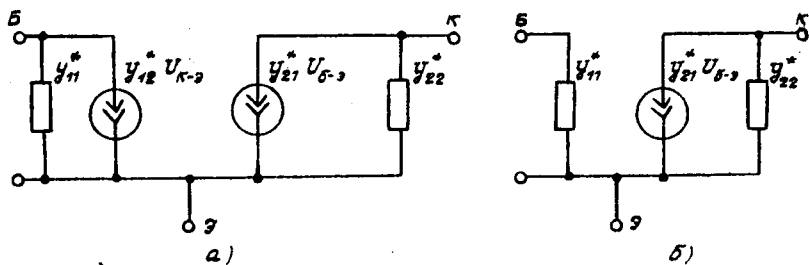


Рис. 2.13

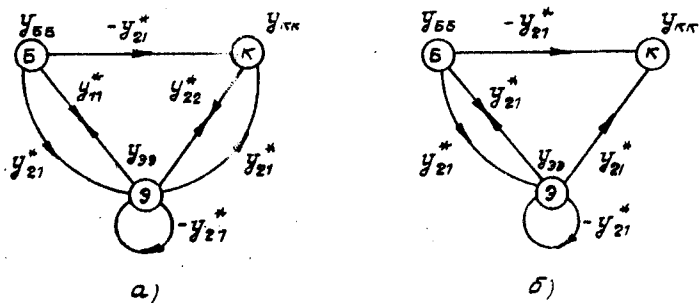


Рис. 2.14

где $h_{11}^* = (U_1 / I_1) U_2 = 0$ - входное сопротивление;
 $h_{22}^* = (I_2 / U_2) I_1 = 0$ - выходная проводимость;
 $h_{12}^* = (U_1 / U_2) I_1 = 0$ - коэффициент обратной связи по напряжению;
 $h_{21}^* = (I_2 / I_1) U_2 = 0$ - коэффициент передачи транзистора по току.
 Между y^* и h^* - параметрами имеется следующая взаимосвязь:

$$y_{11}^* \approx 1/h_{11}^* ; \quad y_{21}^* = h_{21}^* / h_{11}^* , \quad y_{22}^* \approx h_{22}^* . \quad (2.36)$$

2.3. Математические информационные модели компонентов (базовых блоков) функциональных схем

2.3.1. Генераторы сигналов

Классификация генераторов сигналов осуществляется в основном по функциональному признаку (типу генерируемой функции): экспоненциальные, синусоидальные (гармонические), пилообразные (линейно изменяющиеся), прямоугольные, специальные и составные (комбинированные или сложные); по режиму работы: автоколебательные, щупящие и др.; по способу запуска; электрическим параметрам и т.д.

Информационное моделирование, очевидно, относится в основном к описанию выходных сигналов и зависит от типа общей принятой модели системы в которую входит генератор. При использовании линейных моделей в генераторной форме применяют соответствующие преобразования Лапласа для указанных выше функций, если анализ системы ведется только во время действия самой функции. Например, для линейно-изменяющихся сигналов - во время действия линейной части импульса, т.е. во время так называемого прямого хода импульса. В тех случаях, когда анализ следует проводить в более точном виде, т.е. не на одном, а на нескольких периодах действия сигнала генератора, необходимо применять преобразования Лапласа для периодической последовательности импульсных и других сигналов (табл.2.6).

В методах численного анализа непрерывная функция сигнала генератора $e(t)$ заменяется дискретной решетчатой функцией $e_n = e(t_n)$. При большом требуемом числе отсчетов применяют рекуррентную формулу: $e_n = f(e_{n-1}, e_{n-2}, \dots)$.

Пример [6]. Дана функция $e(t) = Ae^{2t}$. Приведем рекуррентное соотношение вида

$$e_n = Ae^{\alpha t_n} = Ae^{\alpha(t_{n-1} + \Delta t)} = Ae^{\alpha \Delta t} e^{\alpha t_{n-1}} = e^{\alpha \Delta t} e_{n-1} .$$

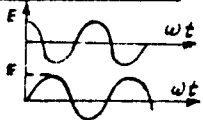
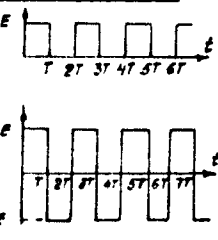
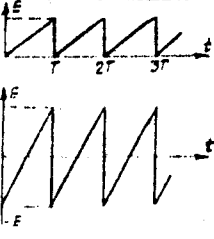
При постоянном временном интервале отсчета Δt значение $E = e^{\alpha \Delta t}$ вычисляется один раз, а все последующие значения e рассчитываются по простой рекуррентной формуле $e_n = E e_{n-1}$, $e_0 = 1$. Аналогично и для других функций. Так, для $e_1(t) = \sin \omega t$, $e_2 = \cos \omega t$, представляя $\sin \omega t_n = \sin \omega (t_{n-1} + \Delta t)$, $\cos \omega t_n = \cos \omega (t_{n-1} + \Delta t)$, получаем следующие рекуррентные формулы:

$$e_{1,n} = A_1 e_{1,n-1} + A_2 e_{2,n-1},$$

$$e_{2,n} = A_1 e_{2,n-1} - A_2 e_{1,n-1},$$

где $A_1 = \cos \omega \Delta t$, $A_2 = \sin \omega \Delta t$, $e_{1,0} = 0$, $e_{2,0} = 1$. Сигналы $e_{1,n}$ и $e_{2,n}$ моделируются попеременно.

Таблица 2,6

Генерируемые периодические функции	Временная аналитическая модель	Операторная модель (по Лапласу)	Изображение периодических функций
Гармоническая	$E \cos \omega t$ $E \sin \omega t$	$E \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ $E \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
Прямоугольная униполярная, биполярная	$E[1_-(t) - 1_-(t-T) + 1_-(t-2T) - 1_-(t-3T) + \dots]$ $E[1_-(t) - 21_-(t-T) + 2 \cdot 1_-(t-2T) - 2 \cdot 1_-(t-3T) + \dots]$	$\frac{E}{p} \frac{1}{1 + e^{-pT}}$ $\frac{E}{p} \left(\frac{1}{1 + e^{-pT}} - 1 \right) = -\frac{E}{p} \frac{e^{-pT}}{1 + e^{-pT}}$	
Линейно изменяющаяся униполярная, биполярная	$E[1_-(t) - 1_-(t-T) + 1_-(t-2T) - \dots]$ $E[1_-(t) - \frac{1}{2} 1_-(t) - 1_-(t-T) - 1_-(t-2T) - 1_-(t-3T) - \dots]$	$\frac{E}{p^2} \frac{1 - (1+pT)e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$ $\frac{E}{p^2} \frac{1 - (1+2pT)e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$	

2.3.2. Безынерционные статические элементы

Эти элементы описываются функциями $y = f(x)$ статического типа, значения которых могут быть вычислены в любой момент времени, в отличие от безынерционных динамических элементов. У последних значение функции может быть определено лишь по прошествии некоторого времени, т.е. является дискретной величиной.

Статическими безынерционными элементами представляются (моделируются) различного рода нелинейности характеристик реальных устройств (смесители, детекторы, ограничители, идеальные, ключевые устройства и т.п.). Для элементов без памяти вычисление их функции $y = f(x)$ производится для любого заданного значения x , а для элементов с памятью, имеющих гистерезисную характеристику, вычисление производится для одной из двух функций с учетом текущего состояния элемента

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } S = S_1, \\ f_2(x) & \text{при } S = S_2. \end{cases}$$

Так для элемента с памятью (триггер и др.) его функция должна вычисляться в зависимости от текущего состояния элемента либо по верхней части гистерезисной кривой характеристики (состояние S_1), либо по нижней части, когда его состояние соответствует $S_2 = 0$.

2.3.3. Безынерционные динамические элементы

Как уже указывалось значение выходной функции в этих элементах зависит как от x (входного сигнала), так и от некоторого временного интервала Δt , необходимого для полного формирования входного сигнала $x(t)$. Эта ситуация возникает, как правило, в логических, цифровых схемах при последовательной передаче много-разрядного (позиционного) кода и других кодов, представляющих сигнал. Так, в цифровой схеме совпадения на выходе формируется $y = 1$ при $x_1 \geq x_2$ или $y = 0$ при $x_1 < x_2$, где x_1, x_2 - последовательные цифровые коды, полное появление которых на входах схемы совпадения требует времени $\Delta t = N \delta t$ (N - число разрядов кода x_1 и x_2 ; δt - время формирования одного разряда). К этому же типу элементов относятся импульсные, аналого-импульсные и импульсно-аналоговые элементы, в которых выходной сигнал (код) $y(t)$ ставится в соответствие входному сигналу (коду) $x(t)$ по закону: $y(t) = y_i(t)$, при $x(t) = x_i(t)$.

Для определения выходного сигнала $y_c(t)$ необходимо получить полный входной сигнал $x_c(t)$, для чего потребуется определенный временной интервал Δt от t_1 до t_2 , в течении которого одновременно осуществляется анализ $x(t)$ на соответствие некоторому $x_c(t)$. Выходной сигнал $y_c(t)$ считается действующим с момента t_1 , т.е. задержка в элементе отсутствует, т.к. элемент считается безынерционным. Подобные элементы удобно использовать при моделировании функциональных схем методом полного сигнала [6].

В заключение заметим, что преобразующей характеристикой статического элемента является функция, ставящая в соответствие числу число, а преобразующей характеристикой динамического элемента - оператор, ставящий в соответствие функции функцию, или функционал, ставящий в соответствие функции число.

2.3.4. Инерционные линейные элементы, заданные переходной характеристикой во временной области $-h(t)$

Эти элементы моделируются с помощью численного расчета интеграла свертки, определяющего выходную величину как функцию времени

$$U_{\delta x}(t) = \int_0^t U_{\delta x}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Чаще всего численное интегрирование осуществляют методом скользящего суммирования. Суть метода состоит в разбиении заданного интервала интегрирования $(0, t)$ и интервала текущего интегрирования $(0, \tau)$ на отрезки Δt (см. рис. 2.15). Тогда $t = n\Delta t$, $\tau = \kappa\Delta t$; $t - \tau = (n - \kappa)\Delta t$. Применяя самый простой метод численного интегрирования - метод прямоугольников, полагаем на каждом из отрезков Δt значения $U_{\delta x}(t)$ и $h(t - \tau)$ постоянными. Тогда $d\delta \approx \Delta t$ и интеграл аппроксимируется в виде суммы, называемой дискретной сверткой

$$U_{\delta x, n} = \sum_{\kappa=0}^n U_{\delta x}(\kappa\Delta t) h((n-\kappa)\Delta t) \Delta t = \Delta t \sum_{\kappa=0}^n U_{\delta x, \kappa} h_{n-\kappa}.$$

В результате, вычисление выходного сигнала $U_{\delta x, n-1}$, $U_{\delta x, n}$.

$U_{\delta x, n+1}, \dots$ в моменты времени t_{n-1} , t_n , t_{n+1} сводится к вычислению соответствующих сумм методом скользящего суммирования значений $U_{\delta x, \kappa}$ со скользящим весом $h_{n-\kappa}$

$$U_{\delta x, n-1} = \Delta t (U_{\delta x, 0} h_{n-1} + U_{\delta x, 1} h_{n-2} + \dots + U_{\delta x, n-1} h_0);$$

$$U_{\delta x, n} = \Delta t (U_{\delta x, 0} h_n + U_{\delta x, 1} h_{n-1} + \dots + U_{\delta x, n} h_0);$$

$$U_{\delta x, n+1} = \Delta t (U_{\delta x, 0} h_{n+1} + U_{\delta x, 1} h_n + \dots + U_{\delta x, n+1} h_0).$$

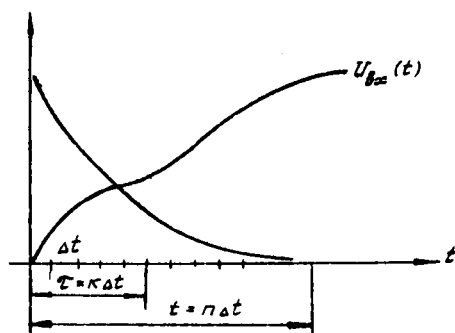
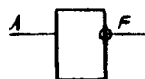
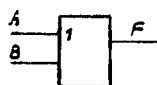
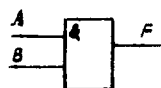


Рис. 2.15



a)

$$F = A \& B$$

$B \backslash A$	0	x	1
0	0	0	0
x	0	x	x
1	0	x	1

$$F = A + B$$

$B \backslash A$	0	x	1
0	0	x	1
x	x	x	1
1	1	1	1

$$F = \bar{A}$$

A	0	x	1
F	1	x	0

b)

$$F = A \& B$$

$B \backslash A$	0	D	x	E	1
0	0	0	0	0	0
D	0	D	x	x	D
x	0	x	x	x	x
E	0	x	x	E	E
1	0	D	x	E	1

$B \backslash A$	0	D	x	E	1
0	0	D	x	E	1
D	D	D	x	x	1
x	x	x	x	x	1
E	E	x	x	E	1
1	1	1	1	1	1

A	0	D	x	E	1
F	1	E	x	D	0

в)

Рис. 2.16

Применяя другие методы вычисления интеграла (метод трапеции, парабол и т.д.), получают более точные формулы дискретной свертки.

2.3.5. Инерционные линейные элементы, заданные обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

Эти элементы моделируются во временной области с помощью дискретизации с последующей алгебраизацией ОДУ. Дискретизация состоит в приближенной замене производных в ОДУ конечными разностями. Например,

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} = \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_n} \approx \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t}; \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_n} \approx \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2 \Delta t}$$

или в общем

$$\frac{dU}{dt} \approx \sum_{i=n-\kappa}^{n+1} \alpha_i U_i,$$

где α_i - коэффициенты, соответствующие разным способам дискретизации производных.

В результате дискретизации всех производных ОДУ преобразуется в алгебраическое уравнение относительно $U_{\text{вх}, n+1}$:

$$\alpha_{n+1} U_{\text{вх}, n+1} + \sum_{i=n-\kappa}^n \alpha_i U_{\text{вх}, i} + g(U_{\text{вх}, \rho}) = \sum_{i=n-\kappa}^{n+1} \beta_i U_{\text{вх}, i} + f(U_{\text{вх}, \rho}),$$

где κ, ρ - максимальный порядок производных функции $g(U_{\text{вх}, \rho}), f(U_{\text{вх}, \rho})$, $dU_{\text{вх}}/dt$ должны вычисляться в одной точке: либо t_{n+1} , либо в какой-то предыдущей точке. При этом, если $dU_{\text{вх}}/dt, g(U_{\text{вх}, \rho}), f(U_{\text{вх}, \rho})$ вычисляются в точке t_{n+1}

($\rho = n+1$), то получившееся уравнение будет соответствовать неявному методу численного решения ОДУ, а если в предыдущей точке $t_{n+1-\kappa}$ ($\kappa = 1, 2, \dots$) - явному методу.

В первом случае для вычисления $U_{\text{вх}, n+1}$ при известных $U_{\text{вх}, n}, U_{\text{вх}, n-1}, \dots, U_{\text{вх}, n-\kappa}, U_{\text{вх}, n+1}, \dots, U_{\text{вх}, n-\kappa}$ требуется решить уравнение

$\alpha_{n+1} U_{\text{вх}, n+1} + \sum_{i=n-\kappa}^n \alpha_i U_{\text{вх}, i} + g(U_{\text{вх}, n+1}) = \sum_{i=n-\kappa}^{n+1} \beta_i U_{\text{вх}, i} + f(U_{\text{вх}, n+1})$ относительно $U_{\text{вх}, n+1}$, а во втором случае оно выражается явно

$$U_{\text{вх}, n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left(\sum_{i=n-\kappa}^{n+1} \beta_i U_{\text{вх}, i} + f(U_{\text{вх}, n}) - \sum_{i=n-\kappa}^n \alpha_i U_{\text{вх}, i} - g(U_{\text{вх}, n}) \right).$$

2.3.6. Инерционные линейные элементы, заданные операторным коэффициентом передачи $F(p)$ или номинальным $F(j\omega)$ в частотной области

Применяют либо алгебраическую форму записи $F(p)$, либо показательную. В первом случае имеем $U_{\delta x}(p) = U_{\delta x,1}(\sigma, \omega) + jU_{\delta x,2}(\sigma, \omega)$, $F(p) = F_1(\sigma, \omega) + jF_2(\sigma, \omega)$, $U_{\delta nx}(p) = U_{\delta nx,1}(\sigma, \omega) + jU_{\delta nx,2}(\sigma, \omega)$.

Так как $U_{\delta nx}(p) = F(p)U_{\delta x}(p)$, то $U_{\delta nx,1}(\sigma, \omega) = U_{\delta x,1}(\sigma, \omega)F_1(\sigma, \omega) - U_{\delta x,2}(\sigma, \omega)F_2(\sigma, \omega)$, $U_{\delta nx,2}(\sigma, \omega) = U_{\delta x,1}(\sigma, \omega)F_2(\sigma, \omega) + U_{\delta x,2}(\sigma, \omega)F_1(\sigma, \omega)$.

При показательной форме записи

$$U_{\delta x}(p) = U_{\delta x}(\sigma, \omega) e^{j\varphi_{\delta x}(\sigma, \omega)}, \quad F(p) = F(\sigma, \omega) e^{j\varphi_F(\sigma, \omega)}, \quad \text{тогда}$$

$$U_{\delta nx}(p) = U_{\delta x}(\sigma, \omega) F(\sigma, \omega) e^{j(\varphi_{\delta x}(\sigma, \omega) + \varphi_F(\sigma, \omega))}.$$

Практически вместо $U_{\delta nx}(p)$ вычисляется в этом случае

$U_{\delta nx}(\sigma, \omega) = U_{\delta x}(\sigma, \omega)F(\sigma, \omega)$ и $\varphi_{\delta nx}(\sigma, \omega) = \varphi_{\delta x}(\sigma, \omega) + \varphi_F(\sigma, \omega)$.
Переход от показательной формы к алгебраической осуществляется по известным формулам $U_{\delta nx,1}(\sigma, \omega) = U_{\delta nx}(\sigma, \omega) \cos \varphi_{\delta nx}(\sigma, \omega)$,
 $U_{\delta nx,2}(\sigma, \omega) = U_{\delta nx}(\sigma, \omega) \sin \varphi_{\delta nx}(\sigma, \omega)$.

Приведенные соотношения используются как для описания одного элемента, так и для описания всей функциональной (структурной) схемы. При замене p на $j\omega$, т.е. когда σ принимается равной нулю получают аналогичные соотношения для комплексных передач

$$F(j\omega), \quad U_{\delta x}(j\omega), \quad U_{\delta nx}(j\omega).$$

Моделирование элементов во временной области, заданных функцией $F(p)$, в общем случае осуществляется в численном виде с использованием $\mathcal{Z}$ - преобразования (дискретного преобразования).

Моделирование нелинейных инерционных элементов за редким исключением осуществляют путем разбиения их на простейшие составляющие. Например, на безынерционную нелинейную и линейную инерционную [6].

2.3.7. Математические информационные (функциональные) модели логических элементов

Особенностью моделирования логических элементов является дискретизация переменных (сигналов), т.е. их значения могут принадлежать только заданному конечному множеству – алфавиту двоичному $\{0,1\}$, троичному $\{0,1,2\}$, $\{0,1,x\}$, пятиричному $\{0,1,x,2,\varepsilon\}$ и др. Моделирование цифровых схем с учетом различной степени детализации осуществляют на двух уровнях: логическом и регистровом. На логическом (вентильном) уровне схему представляют в виде соединения простых вентильных элементов. На регистровом уровне в качестве простейших элементов рассматривают наряду с вентильными и более сложные их сочетания, представляющие функционально законченные цифровые элементы (регистры, счетчики, дешифраторы, сумматоры, компараторы, арифметико-логические устройства (АЛУ), мультиплексоры и т.п.).

На логическом уровне для одноходовых комбинационных элементов модель представляет собой выражение (алгоритмическое в общем случае), позволяющее по значениям входных сигналов в момент времени t вычислить значение выходного сигнала в момент времени $t + t_z$, где t_z – время задержки, характеризующее элементы. Подобные модели называют асинхронными. При $t_z = 0$ элементы и их модели называют синхронными. Модель многоходового элемента включает алгоритм вычисления задержек и значения всех выходных сигналов.

Пример [3]. Асинхронная модель элемента ЗИ-НЕ с фиксированной задержкой t_z , входами: $U_{\delta x_1}, U_{\delta x_2}, U_{\delta x_3}$ и одним выходом

$$U_{\delta y} (t + t_z) = U_{\delta x_1} (t) \& U_{\delta x_2} (t) \& U_{\delta x_3} (t),$$

где $\&$ – символ операции конъюнкции.

Для описания элементов с памятью в последовательных цифровых схемах используют

модели, в которых выходные сигналы $U_{\delta y_j}$ определяются не только входными $U_{\delta x_i}$, но и внутренними (храняемыми) переменными $U_{\delta \mu_k}$. Вектор внутренних переменных V отражает состояние элемента, т.е. содержимое его памяти в данный момент времени.

Пример [3]. Модель J - K триггера (входы J и K , состояние V_0 в предыдущем такте и V в последующем такте). Тогда

$$V = V_0 \& \bar{J} \& \bar{K} + \bar{V}_0 \& J \& K + J \& \bar{K},$$

где „ + “ - символ операции дизъюнкции.

В приведенных примерах используется двоичный (двухзначный) алфавит. Модели получаются довольно простыми, однако это ограничивает возможности анализа работоспособности схем. Шире в настоящее время используют трехзначный (троичный) алфавит типа $\{0, 1, x\}$, где x интерпретируется как неопределенное. Последнее возникает на практике во время переключения, а также в установившихся режимах при неопределенных значениях входных сигналов и внутренних переменных. При таком моделировании выявляются ситуации, в которых возможны сбои из-за рассогласования времени прохождения сигналов по различным цепям (эффект состязания сигналов). Модели представляются в виде таблиц истинности и обычно приводятся в справочниках.

Расширенные возможности по выявлению сбойных ситуаций даст применение пятизначных моделей ($\{0, 1, x, D, E\}$). Здесь с помощью значений D и E различают переходы из состояния 1 в 0 и из состояния 0 в 1 соответственно. Иногда алфавит расширяют и далее, учитывая импульсные помехи, воздействие некоторых внешних факторов и т.п.

Пример. Синхронные модели в виде таблиц истинности для двухходового элемента И, ИЛИ, и одноходового НЕ пригедены на рис.2.16. В асинхронных моделях, учитывающих задержку, обязательно указывается значение задержек сигнала при переключении элементов.

Математические информационные модели на регистровом уровне могут быть также алгоритмического типа, схемного и смешанного. Модели схемного типа описывают связи между сигналами на входах и выходах элемента и их представляют в виде конечного автомата (понятие это заимствовано из кибернетики, теории конечных автоматов) и называют автоматными моделями

$$KA = \{V_0, U, Y, V, \varphi, \psi\},$$

где V_0 - исходное состояние автомата; U, Y, V - векторы входных, выходных и внутренних переменных, принимающих значение в конечных множествах; φ - функции переходов; ψ - функция выходов. Функция переходов задает преобразование возможных наборов входных сигналов и внутренних переменных на предыдущем такте в определенные наборы внутренних переменных на последующем такте

$$V(t + t_s) = \varphi(V(t), U(t)).$$

Функция выходов задает, в свою очередь, преобразование вектора входных сигналов и внутренних переменных в вектор выходных сигналов

$$Y(t) = \Psi(V(t), U(t)).$$

Функции φ , Ψ , характеризующие цифровой элемент, представляют в виде формул, таблиц, описаний на входных языках САПР. Задержки t_{ij} для элемента с n входами и m выходами задаются в виде таблицы (матрицы) $[T_{i,j}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, где $T_{i,j}$ — задержка передачи сигнала от i -го входа к j -му выходу.

Сложные цифровые элементы (арифметико-логические устройства, шифраторы, сумматоры, схемы контроля четности и др.) удобнее описывать алгоритмом функционирования, например

$$Y := X_1 * X_2,$$

где Y — идентификатор выхода; X_1, X_2 — идентификаторы входов; $*$ — символ выполняемой цифровым элементом операции (алгоритма) над операндами X_1 и X_2 . Векторы Y, X_1, X_2 могут быть булевого или вещественного типа.

2.4. Определение параметров математических моделей электронных компонентов

Методика определения ВАХ диода и стабилитрона.

Для определения параметров статической модели диода снимается экспериментальная ВАХ диода в области прямых смещений, по которой строится асимптотическая характеристика

$$I_A = I_s + \theta_A U_A,$$

представляющая собой прямую линию в полупологарифмическом масштабе (рис. 2.17).

Точка пересечения асимптотической характеристики с осью ординат определяет параметр I_s и наклон — параметр $\theta_A = 1/\varphi_T$.

Для измерения прямой ветви ВАХ диода $U_A = U_A(I_A)$ используется тестер И4 ТКС 100-001, с помощью которого измеряется напряжение насыщения коллектор-эмиттер $U_{кэ наэ}$ (рис. 2.18). Ток базы здесь задается произвольно, так как источник тока базы I_B в данном испытании не используется.

Экспериментальная ВАХ $U_A = U_A(I_A)$ в области больших токов будет существенно отличаться от асимптотической. По этому отклонению может быть вычислен параметр R_F .

Несмотря на то, что тестер позволяет измерять обратные токи $p-n$ - переходов, измерения обратной ветви ВАХ диода производить нецелесообразно, так как при этом не обеспечивается необходимая точность. Сведения о значении параметра R_y могут быть почерпнуты из справочной литературы.

Методика измерения прямой ветви ВАХ стабилитрона аналогична методике измерения прямой ветви ВАХ диода. При этом по асимптотической ВАХ определяются параметры I_s и $\theta_{ст}$.

Методика измерения обратной ветви ВАХ стабилитрона реализуется по той же схеме (рис. 2.18), но в обратном смещении стабилитрона. На данной ВАХ, построенной в полулогарифмическом масштабе, могут быть выделены два участка (рис. 2.19), соответствующие двум сомножителям в выражении, описывающем характеристику стабилитрона при обратном смещении

$$I_{ст} = A (e^{B U} - 1) \frac{1}{1 - (U_{ст} / U_0)^2}.$$

Таким образом, по первому участку данной ВАХ определяются параметры A и B , а по второму - параметр U_0 .

Характерной особенностью стабилитронов некоторых типов является то, что на ВАХ отсутствует второй участок. В этом случае принимается $U_0 = 10 U_{ст \max}$. При этом в [12] утверждается, что погрешность моделирования будет не более 5%.

Методика измерения ВАХ биполярного транзистора. Транзисторы относятся к элементам, которые в значительной степени влияют на характеристики многих электронных схем. Методика определения параметров моделей транзистора играет существенную роль, поскольку определяет точность модели, а следовательно, достоверность результатов расчета электронных схем.

В [12] изложена методика измерения ВАХ биполярного транзистора, которая включает пять испытаний транзистора, по результатам которых определяются статические параметры модели транзистора рис. 2.20.

Испытание I заключается в измерении ВАХ переноса $I_N = I_N(U_{эб})$ при нормальном включении транзистора. Цель испытания - получение исходных данных для определения параметров модели: $I_{сн}$, θ_N , R_δ и зависимости коэффициента передачи тока $\beta_{N0} = \beta_{N0}(I_N)$ от режима при заданной температуре T . Схема испытания приведена на рис. 2.20.

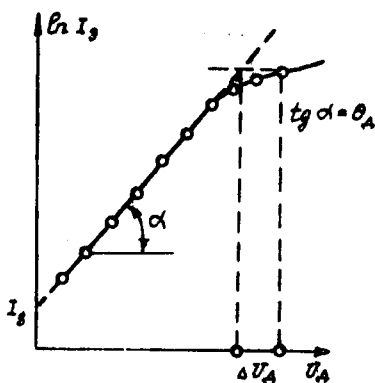


Рис. 2.17

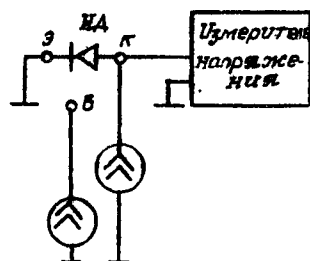


Рис. 2.18

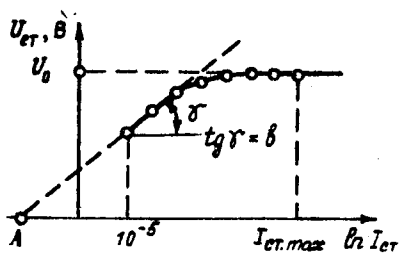


Рис. 2.19

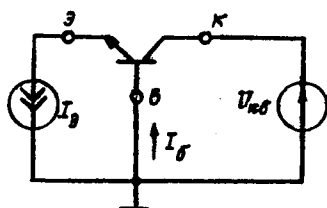


Рис. 2.20

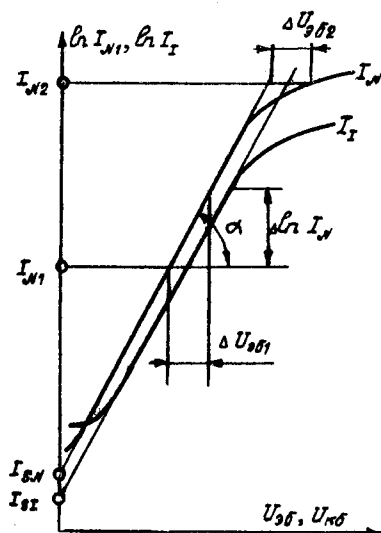


Рис. 2.21

В процессе испытания биполярного транзистора последовательно задается ряд заранее выбранных значений тока эмиттера I_E при фиксированном значении напряжения $U_{KБ}$ и измеряются ток базы I_B и напряжение $U_{ЭБ}$. При измерении стремятся к обеспечению условия $U_{KБ} = 0$ ($U_{KБ}$ - падение напряжения на ρ - z - переходе коллектор-база с учетом падения напряжения от тока коллектора I_K на объемном сопротивлении коллектора R_K).

Испытание 2 заключается в измерении ВАХ переноса $I_I = I_I(U_{KБ})$ при инверсном включении транзистора. Цель испытания - получение исходных данных для определения параметров модели I_{SI} , θ_I и зависимости инверсного коэффициента передачи тока $\beta_{T_0} = \beta_{T_0}(I_I)$ от режима при заданной температуре T . Данное испытание аналогично испытанию I, но коллектор и эмиттер испытываемого транзистора меняются местами.

На рис. 2.21 показан вид зависимостей $\ln I_N = f(U_{ЭБ})$ и $\ln I_I = f(U_{KБ})$ для нормального и инверсного включения транзистора соответственно.

Обработка экспериментальных данных заключается в выявлении линейных участков ВАХ переноса

$\ln I_N = \ln I_{SN} + \theta_N U_{ЭБ}$, $\ln I_I = \ln I_{SI} + \theta_I U_{KБ}$, представляющих собой в полупологарифмическом масштабе прямые линии. Наклон линейных участков ВАХ переноса к оси абсцисс определяет параметры передаточной модели транзистора θ_N и θ_I :

$$\theta_N = \Delta \ln I_N / \Delta U_{ЭБ}, \quad \theta_I = \Delta \ln I_I / \Delta U_{KБ}.$$

Для большинства транзисторов выполняется условие $\theta_N = \theta_I = \theta$, причем

$$\theta = \varphi_T^{-1} = q / kT = 1,16 \cdot 10^4 / T,$$

где φ_T - температурный потенциал; q - заряд электрона; k - постоянная Больцмана; T - абсолютная температура активной области биполярного транзистора.

Точки пересечения асимптотических ВАХ переноса с осью ординат определяют параметры модели биполярного транзистора

$$I_{SN} = \exp(\ln I_{N1} - \theta_N U_{ЭБ1}), \quad I_{SI} = \exp(\ln I_{I1} - \theta_I U_{KБ1}).$$

Рассмотренные испытания позволяют также определить зависимости коэффициентов передачи тока транзистора $\beta_{N_0}(I_N)$ и

$\beta_{I_0} = \beta_{I_0}(I_I)$ от режима при нулевом напряжении на коллекторе и эмиттере и фиксированной температуре T . Характер этих зависимостей в полупологарифмическом масштабе показан на рис. 2.22.

В результате обработки полученных зависимостей определяются параметры аппроксимирующих функций $B_{\lambda 0}$, $B_{\lambda 1}$.

Отклонение реальной ВАХ переноса при нормальном включении транзистора от асимптотической в области больших токов I_{λ} позволяет оценить объемное сопротивление базы R_{δ} . Полагая объемное сопротивление эмиттера R_{ε} пренебрежимо малым, получаем

$$\Delta U_{\varepsilon \delta 2} = I_{\delta 2} \{ R_{\delta} [1 + B_{\lambda 0}(I_{\lambda 2})] R_{\varepsilon} \} \approx I_{\delta 2} R_{\delta},$$

откуда

$$R_{\delta} \approx \Delta U_{\varepsilon \delta 2} / I_{\delta 2} = B_{\lambda 0}(I_{\lambda 2}) \Delta U_{\varepsilon \delta 2} / I_{\lambda 2}.$$

Испытание 3 заключается в измерении выходных ВАХ транзистора при его нормальном включении по схеме с общим эмиттером. Цель испытания - получение исходных данных для определения параметра κ_{λ} модели биполярного транзистора. Схема испытания приведена на рис.2.23.

В процессе испытания биполярного транзистора последовательно задается ряд заранее выбранных значений напряжения $U_{\kappa \varepsilon}$ при фиксированном токе базы I_{δ} и измеряются ток эмиттера I_{ε} и напряжение $U_{\varepsilon \delta}$. При измерении ток I_{δ} выбирается достаточно малым, чтобы избежать проявления тепловых эффектов.

Испытание 4 заключается в измерении выходных ВАХ биполярного транзистора при инверсном включении. Цель испытания - получение исходных данных для определения параметра κ_{λ} модели.

Данное испытание аналогично испытанию 3, но коллектор и эмиттер транзистора меняются местами.

Экспериментальные данные, получаемые в процессе испытаний 3 и 4, позволяют определить зависимости $I_{\varepsilon} = I_{\varepsilon}(U_{\kappa \varepsilon})$, $I_{\kappa} = I_{\kappa}(U_{\kappa \varepsilon})$ при $I_{\delta} = \text{const}$, по которым определяются зависимости $B_{\lambda} = B_{\lambda}(U_{\kappa \delta})$, $B_{\lambda} = B_{\lambda}(U_{\varepsilon \delta})$, показанные на рис. 2.24.

Как видно из приведенного графика, при обеспечении изотермических условий испытаний 3 и 4 зависимости $B_{\lambda} = B_{\lambda}(U_{\kappa \delta})$, $B_{\lambda} = B_{\lambda}(U_{\varepsilon \delta})$ линейны и их наклон к оси абсцисс определяет параметры κ_{λ} и κ_{λ} модели биполярного транзистора

$$\kappa_{\lambda} = \Delta U_{\kappa \delta} / \Delta B_{\lambda}, \quad \kappa_{\lambda} = \Delta U_{\varepsilon \delta} / \Delta B_{\lambda}.$$

Испытание 5 заключается в измерении ВАХ $U_{\kappa \varepsilon \text{нас}} = U_{\kappa \varepsilon \text{нас}}(I_{\kappa})$ в режиме насыщения биполярного транзистора. Цель испытания - получение исходных данных для определения параметра R_{κ} модели биполярного транзистора. Схема испытания представлена на рис.2.25.

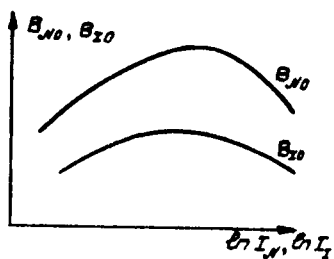


Рис. 2.22

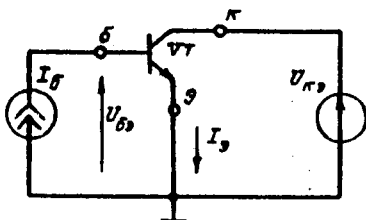


Рис. 2.23

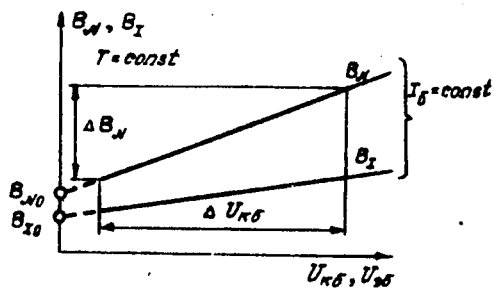


Рис. 2.24

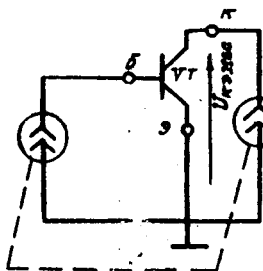


Рис. 2.25

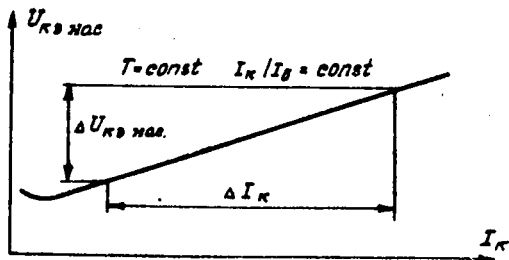


Рис. 2.26

В процессе испытания последовательно задается ряд заранее выбранных значений I_K и I_B таким образом, чтобы выполнялось условие $I_K/I_B = \text{const}$, и измеряется напряжение коллектор-эмиттер биполярного транзистора в режиме насыщения $U_{KЭ\text{нас}}$.

Напряжение $U_{KЭ\text{нас}}$ описывается соотношением

$$U_{KЭ\text{нас}} = R_K I_K + \varphi_T \ln \frac{1 + (1 + I_K/I_B)/B_I}{1 - I_K/B_N I_B}.$$

Из этого выражения видно, что при небольшом изменении коэффициентов B_N и B_I в заданном диапазоне изменения тока и постоянного отношении I_K/I_B график зависимостей $U_{KЭ\text{нас}} =$

$U_{KЭ\text{нас}}(I_K)$ представляет собой прямую линию, наклон которой к оси абсцисс определяется значением объемного сопротивления коллектора R_K . Характер экспериментальной зависимости $U_{KЭ\text{нас}} =$

$U_{KЭ\text{нас}}(I_K)$ показан на рис.2.26.

Обработка экспериментальных данных, получаемых в процессе испытания 5, заключается в выявлении линейного участка зависимости $U_{KЭ\text{нас}} = U_{KЭ\text{нас}}(I_K)$ и определении параметра R_K модели биполярного транзистора по отношению

$$R_K = \Delta U_{KЭ\text{нас}} / \Delta I_K.$$

Описанная методика получения исходных данных для определения параметров модели биполярного транзистора может быть реализована с помощью тестера типа И4 ТКС 100-001 следующим образом [12].

В испытании I для каждого значения тока эмиттера $I_{Эс}$ из выбранного ряда значений I_3 при напряжении $U_{Бс}$ проводятся два стандартных теста: измерение $U_{Бэ}(I_{Эс}) = U_{ЭБ}(I_{Эс})$ и измерение $1 + h_{213}(I_{Эс}) = 1 + B_N(I_{Эс})$. Полученные экспериментальные данные используются для определения одной точки ВАХ переноса $I_N = I_N(U_{ЭБ})$ и одной точки зависимости $B_{N0} = B_{N0}(I_N)$ по следующим соотношениям:

$$I_{N0} = I_{Эс} \left[1 - \frac{1}{1 + h_{213}(I_{Эс})} \right], \quad I_{Бс} = \frac{I_{Эс}}{1 + h_{213}(I_{Эс})},$$

$$B_{N0} = I_{N0} / I_{Бс} = [1 + h_{213}(I_{Эс})] - 1.$$

По полученной таким образом ВАХ переноса в соответствии с изложенной выше методикой определяются параметры модели биполярного транзистора: I_{3N} , θ_N , R_B ; а по полученной зависимости $B_{N0} = B_{N0}(I_N)$ - параметры аппроксимирующей функции: R_N , θ_N , θ_N .

Испытание 2 выполняется аналогично испытанию I, но для инверсного включения биполярного транзистора. По результатам испытания определяются параметры модели транзистора: I_{3I} , θ_I , а

по полученной зависимости $\beta_{I_0} = \beta_{I_0}(I_I)$ - параметры аппроксимирующей функции $\beta_I, \beta_I, \beta_I$.

В испытании 3 при значении заранее выбранного достаточно малого тока эмиттера I_3^0 выполняется стандартный тест $1 + h_{213}(I_3^0, U_{K\delta}) = 1 + \beta_N(I_3^0, U_{K\delta})$ для ряда заданных значений напряжений $U_{K\delta}$. Полученные экспериментальные данные используются для определения зависимости $\beta_N(U_{K\delta})$, по которой в соответствии с изложенной выше методикой определяется параметр κ_N модели биполярного транзистора.

Испытание 4 выполняется аналогично испытанию 3, но для инверсного включения биполярного транзистора. По результатам испытания определяется параметр κ_I модели.

Испытание 5 выполняется на основе стандартного теста по измерению напряжения. Коллектор-эмиттер транзистора в режиме насыщения $U_{K\delta \text{нас}} = U_{K\delta \text{нас}}(I_K)$ при задании ряда заранее выбранных значений тока коллектора I_K и тока базы I_B , отвечающих условно $I_K/I_B = \text{const}$. По результатам испытания в соответствии с изложенной выше методикой определяется параметр ρ_K модели биполярного транзистора.

О п р е д е л е н и е п а р а м е т р о в м о д е л и М Д П - т р а н з и с т о р а

Модель МДП - транзистора, представленная выше, имеет сравнительно небольшой набор параметров. Для моделирования статических характеристик в этот набор входят: W, L - геометрические размеры, определяющие ширину и длину наклона транзистора; U_0 - пороговое напряжение; X_0 - толщина окисла под затвором; μ - эффективная подвижность носителей в канале; N - концентрация примесей в подложке.

В [11] рассмотрен простой, но обеспечивающий приемлемую точность, вариант методики определения перечисленных параметров, выполняемой с помощью измерений на тестовых структурах и по данным о физико-топологических характеристиках транзисторов.

1. С целью определения порогового напряжения U_0 в измерительной схеме (рис.2.27,а) снимается зависимость $\sqrt{I_D} = f(\varphi_g)$. Выполнение условия $\varphi_g = \varphi_c$ означает, что данному режиму измерений соответствует область насыщения, в которой зависимость тока от напряжения на затворе, описанной в разделе 2.3, будет квадратичной. Следовательно, аппроксимируя нелинейную экспериментальную характеристику прямой (рис.2.27,б), легко найти значение U_0 .

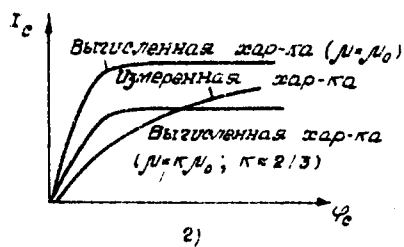
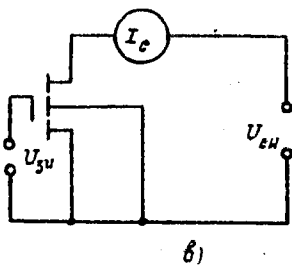
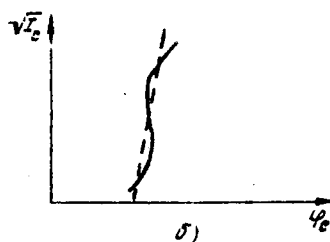
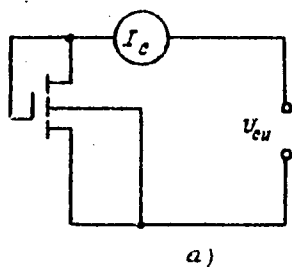


Рис. 2.27

2. Для определения геометрических размеров канала транзистора необходимо в каждом конкретном случае учитывать технологические факторы путем пересчета размеров W, L , заданных в технологическом чертеже, по корректирующим формулам.

3. Для определения толщины подзатворного окисла x_o осуществляется измерение емкости затвор-подложка C_{uzm} , по которой находится удельная емкость окисла $C_o = C_{uzm} / (W \cdot L)$ и затем $x_o = \varepsilon \cdot \varepsilon_o / C_o$, где ε_o - абсолютная диэлектрическая проницаемость в вакууме, ε - относительная диэлектрическая проницаемость окисла ($\varepsilon_{SiO_2} = 4,2$; $\varepsilon_{SiO_2-Si_3O_4} = 5 + 7$).

4. Значение эффективной подвижности носителей μ находится из измерения малосигнальной проводимости $g (g = \partial I_c / \partial \varphi_c)$ по схеме, изображенной на рис.2.27,в. Измерения выполняют в режиме слабого поля ($\varphi_c = 10 + 50$ мВ, $\varphi_3 - U_o = 1$ В), соответствующем уравнению крутого участка вольт-амперной характеристики. В данном режиме проводимость $g \approx \beta (\varphi_3 - U_o)$ и, следовательно, при $\varphi_3 - U_o = 1$ В имеет $g \approx \beta = \mu_o \varepsilon \varepsilon_o W / (x_o L)$, откуда определяется значение подвижности μ_o при слабых полях.

В моделях МДП - транзисторов, учитывающих влияние режима на подвижность носителей, полученная величина μ_o используется в качестве исходного параметра $\mu = \mu_o$. Если же в модели подвижность принята постоянной, то необходимо выполнить ее корректировку $\mu = K \mu_o$. Значение коэффициента K может быть найдено из условия наилучшего совпадения измеренных и вычисленных характеристик $I_c = f(\varphi_c, \varphi_3)$ (рис.2.27,г).

5. Значение концентрации примесей в подложке зависит от характеристик используемого полупроводникового материала и может быть уточнена по результатам измерения удельной проводимости материала.

В табл. 2.7 приведены типовые значения электрофизических параметров моделей МДП - транзисторов, изготавливаемых по канальным технологиям.

Таблица 2.7

Тип канала	$N, \text{см}^{-3}$	$x_o, \text{мкм}$	$\mu_o, \text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$	$U_o, \text{В}$
p - канал	$5 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{15}$	0,1-0,15	200-250	2-4
n - канал	$8 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{15}$	0,07-0,1	500-620	0,8-1,6

3. СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ, ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

3.1. Определение схемных функций

Формальное решение задачи анализа электронных схем сводится к получению выражений схемных функций, их вычислению и построению частотных, временных и других характеристик и различных параметров последних. По виду и значению указанных критериев проводится сравнение различных вариантов схем рассматриваемого класса, оценка их качества, свойств и перспективных возможностей в процессе дальнейшего совершенствования элементной базы или структуры схемы. Для определения конкретных видов функций рассмотрим уравнения равновесия схемы. Они составляются на основе законов Кирхгофа, опубликованных им в знаменитой статье в 1857 году. Запишем в общем виде уравнения равновесия

$$q_i = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

где x_i — переменные реакции схемы на воздействие;

q_i — переменные воздействия, приложенные ко входам схем.

Как независимые переменные q_i , так и зависимые x_i являются функциями времени. Для упрощения математических моделей линейных схем интегро-дифференциальные уравнения в целом ряде случаев удается перевести в алгебраические путем применения прямого преобразования Лапласа

$$q(p) = \mathcal{L}[q(t)] = \int_0^{\infty} q(t) e^{-pt} dt,$$

где $p = \sigma + j\omega$ — комплексная переменная или (в теории цепей) комплексная частота.

Для обратного перехода от изображения $q(p)$ к оригиналу $q(t)$ или от $x(p)$ к $x(t)$ применяют так называемое обратное преобразование Лапласа

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}[q(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} q(p) e^{pt} dt.$$

В общем случае цепь описывается системой уравнений дифференциальных (во временной области) или алгебраических (в области комплексного переменного). Пусть система уравнений равновесия цепи составлена в алгебраической форме, тогда в самом общем виде имеем

$$q_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

или подробнее можем записать

$$q_1 = \omega_{11} x_1 + \omega_{12} x_2 + \dots + \omega_{1n} x_n;$$

$$q_2 = \omega_{21} x_1 + \omega_{22} x_2 + \dots + \omega_{2n} x_n;$$

$\vdots$

$$q_n = \omega_{n1} x_1 + \omega_{n2} x_2 + \dots + \omega_{nn} x_n.$$

Здесь q_i — независимые переменные системы, например входные воздействия (сигналы) схемы, т.е. задающие токи и напряжения;

x_j — зависимые (искомые) переменные (токи или напряжения) системы;

ω_{ij} — коэффициенты системы уравнений называются эквивалентными параметрами схемы, они выражаются через параметры компонентов схемы.

В матричной форме система уравнений схемы, приведенная выше, запишется так

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Сокращенно $[q] = [\omega][x]$ или $Q = W \cdot X$.

Здесь $[q]$, Q — вектор независимых переменных системы (задающих источников схемы);

$[x]$, X — вектор искомых переменных системы (токов или напряжений схемы);

$[\omega]$, W — квадратная матрица весовых коэффициентов системы (эквивалентных параметров схемы) или просто матрица схемы.

Решая это уравнение относительно вектора искомых переменных X , получим

$$X = W^{-1} Q,$$

где W^{-1} — обратная матрица, получаемая из известного в матричной алгебре соотношения:

$$W^{-1} = [\omega]^{-1} = [\Delta_{ij}]^t / \Delta,$$

или

$$W^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix},$$

где $\Delta = |\omega|$ — определитель матрицы W ;

$\Delta_{ij} = |\omega_{ij}|$ — алгебраическое дополнение элемента ω_{ij} матрицы W ;

$[\Delta_{ij}]^t$ — означает транспонирование матрицы $[\Delta_{ij}]$.

Схемными функциями называют отношения переменных $x_i(p)$ реакций к переменным $q_j(p)$ воздействия на одном из входов схемы

$$F_{ij}(p) = \frac{x_i(p)}{q_j(p)} \left(= \frac{x_i \delta_{ix}(p)}{q_j \delta_x(p)} \right). \quad (3.4)$$

Схемные функции определяются только параметрами компонентов схемы и способом их соединения и являются в общем случае функциями комплексного переменного.

Зная функции схемы, можно определить ее реакции на любые заданные воздействия $x_i(p) = F_{ij}(p) q_j(p)$ и, следовательно, анализировать свойства схемы как в пространстве комплексной переменной, так и во временной области, осуществляя в последнем случае обратное преобразование Лапласа

$F_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_{ij}(p)]$. Выражение схемной функции можно просто получить из матрицы схемы W по формулам Крамера, считая ненулевым только один источник $q_j(p)$

$$F_{ij} = \frac{x_i(p)}{q_j(p)} = \frac{\Delta_{ji}(p)}{\Delta(p)}, \quad (3.5a)$$

где $\Delta_{ji}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента матрицы схемы (эквивалентного параметра ω_{ji}).

Схемная функция называется входной (выходной), если $j=i$, т.к. воздействие и реакция определяется на одном и том же входе (выходе) j или i :

$$F_{jj} = \frac{x_j(p)}{q_j(p)} = -\frac{\Delta_{jj}(p)}{\Delta(p)}, \quad F_{ii} = \frac{x_i(p)}{q_i(p)} = \frac{\Delta_{ii}(p)}{\Delta(p)} \quad (3.56)$$

Схемная функция называется передаточной, если $j \neq i$.
Для переменных реакции

$$F_{ij} = \frac{x_i(p)}{x_j(p)} = \frac{\Delta_{ji}(p)}{\Delta_{jj}(p)} \quad (3.5в)$$

Для обратимой схемы $F_{ji} = F_{ij}$, т.к. элементы матрицы b , расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу: $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Нарушение указанной симметрии свидетельствует о том, что схема является необратимой, т.е. содержит необратимые (невзаимные) компоненты.

Итак, связь между токами и напряжениями многополюсной цепи описывается набором передаточных и входных (выходных) функций.

Согласно принципу наложения в линейных цепях можно отдельно рассматривать связь между воздействием на j -м входе и реакцией на это воздействие на i -м выходе. Это значит, что любую сколько угодно сложную многополюсную цепь можно представлять по отношению к рассматриваемой паре вход-выход в виде эквивалентного 2×2 -полюсника (т.е. проходного четырехполюсника). На рис.3.1 показана схема эквивалентного 2×2 -полюсника, ко входу которого присоединен источник сигнала, а к выходу — нагрузка. Таким образом моделируется передача электрического сигнала через выделенную пару вход-выход в исследуемой многополюсной цепи.

Подставляя вместо $x_i(p)$ и $q_i(p)$ токи и напряжения на входе и выходе схемы (рис.3.1), получим определения всех широко известных схемных функций.

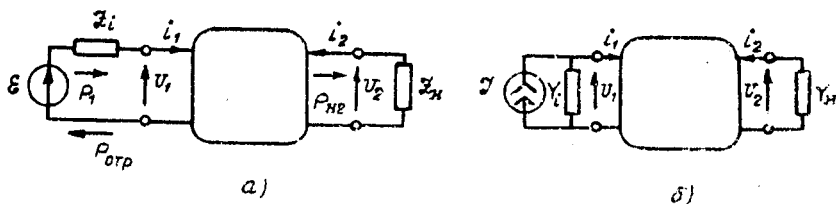


Рис.3.1

Входные функции: входное сопротивление

$$Z_{BX}(\rho) = U_1(\rho) / I_1(\rho)$$

или

$$Z_{BX}(\rho) = U_{BX}(\rho) / I_{BX}(\rho);$$

входная проводимость $Y_{BX}(\rho) = I_1(\rho) / U_1(\rho)$

или $Y_{BX}(\rho) = I_{BX}(\rho) / U_{BX}(\rho),$

выходное сопротивление

$$Z_{BX}(\rho) = U_2(\rho) / I_2(\rho)$$

или $Z_{BX}(\rho) = U_{BX}(\rho) / I_{BX}(\rho);$

выходная проводимость

$$Y_{BX}(\rho) = I_2(\rho) / U_2(\rho)$$

или

$$Y_{BX}(\rho) = I_{BX}(\rho) / U_{BX}(\rho).$$

Входной иммитанс (сопротивление $Z_{BX}(\rho)$ или проводимость $Y_{BX}(\rho)$) зависит от параметров 2х2-полюсника и в общем случае от иммитанса нагрузки $Z_N = 1 / Y_N$.

Входной иммитанс ($Z_{BX}(\rho)$ или $Y_{BX}(\rho)$) определяется как входной со стороны нагрузки при замене обратимого двухполюсника нагрузки идеальным источником тока I_2 или напряжения U_2 и зависит как от параметров самого 2х2-полюсника, так и от иммитанса эквивалентного источника сигнала на входе. При этом полагают $\delta = 0$ и $\gamma = 0$, т.е. источник напряжения сигнала, поскольку он в схеме представлен идеальным, закорачивает, а источник тока сигнала —,разрывает.

Передаточные функции и соотношения между ними (табл.3.1):

коэффициент передачи напряжения

$$K_U(\rho) = K_{2,U} = U_2(\rho) / U_1(\rho)$$

или

$$K_U(\rho) = U_{BX}(\rho) / U_{BX}(\rho);$$

коэффициент передачи тока

$$K_I(\rho) = K_{2,I} = I_2(\rho) / I_1(\rho)$$

или

$$K_I(\rho) = I_{BX}(\rho) / I_{BX}(\rho);$$

сопротивление передачи (передаточное сопротивление) $Z_{пер}(\rho) = Z_{21} = U_2(\rho) / I_1(\rho)$

или

$$Z_{пер}(\rho) = U_{BX}(\rho) / I_{BX}(\rho);$$

проводимость передачи (передаточная проводимость) $Y_{пер}(\rho) = Y_{21} = \dot{I}_2(\rho) / U_1(\rho)$

или

$$Y_{пер}(\rho) = \dot{I}_{вх}(\rho) / U_{вх}(\rho)$$

Таблица 3.1

<i>Соотношения между основными функциями</i>	
$Z_{пер} Y_{пер} = K_I K_V$	
$Z_{вх} = \frac{Z_{пер}}{K_V} = \frac{\dot{I}_1}{Y_{пер}} = \frac{K_I}{Y_H K_V} = Z_H \frac{K_I}{K_V}$	
$Y_{вх} = \frac{K_V}{Z_{пер}} = \frac{Y_{пер}}{K_I} = Y_H \frac{K_V}{K_I} = \frac{K_V}{Z_H K_I}$	
$Z_{пер} = Z_H K_I = \frac{K_I}{Y_H}$	
$Y_{пер} = Y_H K_V = \frac{K_V}{Z_H}$	

Перечисленные функции характеризуют собственно четырехполюсник. Однако можно ввести функции с учетом параметров источников сигналов. Такие функции называют передаточными функциями цепи передачи или полными схемными функциями

$$\dot{Z}_{21}(\rho) = U_2(\rho) / \mathcal{I}(\rho); \quad Y_{21}(\rho) = \dot{I}_2(\rho) / \mathcal{E}(\rho);$$

$$K_{21V}(\rho) = U_2(\rho) / \mathcal{E}(\rho); \quad K_{21I}(\rho) = \dot{I}_2(\rho) / \mathcal{I}(\rho)$$

и передаточными функциями входной цепи

$$\dot{Z}_{11}(\rho) = U_1(\rho) / \mathcal{I}(\rho); \quad Y_{11}(\rho) = \dot{I}_1(\rho) / \mathcal{E}(\rho);$$

$$K_{11V}(\rho) = U_1(\rho) / \mathcal{E}(\rho); \quad K_{11I}(\rho) = \dot{I}_1(\rho) / \mathcal{I}(\rho).$$

Коэффициент передачи мощности. Определяет эффективность передачи энергии через многополюсную цепь и является мерой ско-

рости изменения или рассеяния энергии. Мощность, поступающая в 2х2-полосник, в данный момент времени равна произведению входных тока и напряжения и направлена внутрь, как показано на рис.3.1,а. При изменении направления тока или напряжения изменяется и направление мощности. При гармоническом изменении токов и напряжений различают комплексную $U\hat{I}$, полную $U\hat{I}$ или $\hat{U}\hat{I}$ (здесь $\hat{I}$ и $\hat{U}$ комплексно сопряженные величины), полезную $Re U\hat{I}$ и реактивную $Im U\hat{I}$ мощности. Отсюда и коэффициенты передачи мощности имеют различный смысл [15].

Коэффициент передачи комплексной мощности от входа 2х2-полосника к его нагрузке

$$K_{MK} = \frac{P_H}{P_{BX}} = \frac{Y_H}{Z_{BX}} Z_{21}^2 = \frac{Z_H}{Y_{BX}} Y_{21}^2 = \frac{Y_H}{Y_{BX}} K_{21U}^2 = \frac{Z_H}{Z_{BX}} K_{21I}^2 ;$$

коэффициент передачи полной мощности

$$K_{MP} = \frac{Y_H}{Z_{BX}} |Z_{21}|^2 = \frac{Z_H}{Y_{BX}} |Y_{21}|^2 = \frac{Y_H}{Y_{BX}} |K_{21U}|^2 = \frac{Z_H}{Z_{BX}} |K_{21I}|^2 ;$$

коэффициент передачи полезной (активной) мощности

$$K_{MA} = \frac{Re Y_H}{Re Z_{BX}} |Z_{21}|^2$$

Располагаемый (достижимый) коэффициент передачи комплексной мощности определяет отношение комплексной мощности, поступающей в нагрузку 2х2-полосника, к номинальной (падающей) комплексной мощности P_N источника

$$K_{PK} = 4 \frac{P_H}{P_N} = 4 \frac{Y_H}{Z_L} Z_{21}^2 = 4 \frac{Z_H}{Y_L} Y_{21}^2 = 4 \frac{Y_H}{Y_L} K_{21U}^2 = 4 \frac{Z_H}{Z_L} K_{21I}^2 ;$$

где $P_N = S^2 / 4 Z_L = I^2 / 4 Y_L$ — комплексная мощность источника, прикладываемая ко входу цепи при выполнении условия согласования

$$Z_{BX} = Z_L \quad \text{или} \quad Y_{BX} = Y_L$$

Располагаемый (достижимый) коэффициент передачи полезной (активной) мощности

$$\begin{aligned} K_{PA} &= 4 \frac{P_H}{P_{NR}} = 4 \frac{Re Y_H}{Re Z_L} |Z_{21}|^2 = 4 \frac{Re Z_H}{Re Y_L} |Y_{21}|^2 = \\ &= 4 \frac{Re Y_H}{Re Y_L} |K_{21V}|^2 = 4 \frac{Re Z_H}{Re Z_L} |K_{21T}|^2, \end{aligned}$$

где $P_{NR} = S^2 / 4 Re Z_L = I^2 / 4 Re Y_L$ — номинальная полезная (активная) мощность источника, при условии сопряженного согласования $Z_{ex} = Z_L$ или $Y_{ex} = Y_L$, когда мнимая часть суммарного иммитанса $\hat{Z}_{ex} + Z_L$ или $Y_{ex} + Y_L$ равна нулю (емкостные составляющие не компенсируются индуктивными).

Если условия согласования выполняются одновременно на входе и выходе 2х2-полусника, то указанные коэффициенты достигают предельно достижимых максимальных значений для данного 2х2-полусника.

Процесс нахождения схемных функций сводится, как видно из (3.5), к раскрытию определителей и алгебраических дополнений матрицы W коэффициентов системы уравнений, составляющих математическую модель схемы.

3.2. Формы представления схемных функций

Для проведения анализа электронных схем необходимо использовать наиболее удобные формы представления схемных функций. Рассмотрим их. В общем случае каждая схемная функция является функцией комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$, поскольку согласно формуле Крамера (3.5a) она выражается через алгебраическое дополнение Δ_{ij} и определитель Δ матрицы эквивалентных параметров схемы. Последние состояются, в свою очередь, из параметров компонентов схемы, в том числе реактивных (конденсаторов, имеющих сопротивление $Z_C = 1/pC$, индуктивностей $Z_L = pL$) и иммитансных (зависимых от p в бо-

лее сложном виде, например, для транзистора входная проводимость $g_{in} = [z_k(1+\beta) + z_3 + \rho z_3 z_k (C_k + C_3)] / [z_3 z_5 + z_k [z_3 + z_5 / (1+\beta)] + \rho z_3 z_k z_5 (C_k + C_3)]$.

В результате

$$F_{ij} = \frac{\Delta j_i(\rho)}{\Delta(\rho)}$$

или в общем случае

$$F(\rho) = \frac{A(\rho)}{B(\rho)} = \frac{a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0}{b_m \rho^m + b_{m-1} \rho^{m-1} + \dots + b_1 \rho + b_0} \quad (3.6)$$

Здесь все коэффициенты a_i и b_i вещественны и определяются только параметрами компонентов эквивалентной схемы цепи. Выражение (3.6) можно записать в ином виде в соответствии с основной теоремой алгебры

$$F(\rho) = H \frac{(\rho - z_1)(\rho - z_2) \dots (\rho - z_n)}{(\rho - p_1)(\rho - p_2) \dots (\rho - p_m)}, \quad (3.7)$$

где $H = \frac{a_n}{b_m}$ — постоянный множитель (масштабный коэффициент, его часто опускают, предварительно пронормировав функцию);

z_i — корни числителя. Когда текущее значение ρ принимает значение $\rho = z_i$, функция $F(\rho) = 0$, поэтому корни числителя z_i называют нулями ($zero$) функции;

p_i — корни знаменателя. Когда $\rho = p_i$, функция стремится к бесконечности, поэтому p_i называют полюсами ($pole$) функции.

Если имеется несколько одинаковых корней числителя или знаменателя, то их называют кратными нулями или кратными полюсами соответственно, а их числом определяют порядок кратности нуля или полюса. При отсутствии кратных нулей или полюсов их называют различными или простыми.

Поскольку коэффициенты функции $F(\rho)$ могут быть только действительными, она обладает свойством сопряженной симметрии. Это означает, что ее нули и полюсы на плоскости комплексной переменной могут располагаться либо на действительной оси, либо симметрично относительно ее, т.е. могут быть либо действительными, либо мнимыми или комплексными, но только парно сопря-

женными.

Для упрощения аналитического вида дробно-рациональную функцию (3.6) обычно представляют в виде суммы простых дробей или цепной дроби. Для получения цепной (лестничной или непрерывной) дроби вида

$$F(p) = F_1 + \frac{1}{F_2 + \frac{1}{F_3 + \frac{1}{F_4 + \dots}}} \quad (3.8)$$

необходимо делить числитель функции на ее знаменатель (или наоборот) с последующим делением знаменателя остатка от предыдущего деления на его числитель и записывать частные от каждого деления в приведенную выше формулу. Представление схемной функции в виде цепной дроби используется в задаче синтеза лестничных цепей.

Общий вид разложения дробно-рациональной функции $F(p)$ на сумму простых (частных) дробей, имеющих ℓ простых и z кратных полюсов κ -й кратности, приводится к следующему:

$$F(p) = \sum_{q=0}^{n-m} \kappa_q p^q + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\kappa_i}{p-p_i} + \sum_{i=1}^z \sum_{s=1}^{\kappa} \frac{\kappa_{is}}{(p-p_i)^s} \quad (3.9)$$

Первую сумму получают путем деления полинома числителя на полином знаменателя $F(p)$. Обычно (для реальных цепей) она содержит не более двух членов типа $\kappa_0 + \kappa_1 p$, поскольку $n \leq m-1$. Для получения остальных сумм простых дробей необходимо найти все полюсы p_i , затем вычислить коэффициенты κ_i и κ_{is} по известным формулам из теории вычетов

$$\kappa_{i1} = [(p-p_i)^{\kappa} F(p)]_{p=p_i}, \quad (3.10)$$

$$\kappa_{i\kappa} = \frac{1}{(\kappa-1)!} \frac{d^{\kappa-1}}{dp^{\kappa-1}} [(p-p_i)^{\kappa} F(p)]_{p=p_i} \quad (3.11)$$

Для простых полюсов коэффициенты разложения κ_i вычисляют по первой из этих формул.

От аналитических форм представления схемных функций в виде дробно-рациональных функций комплексного переменного (3.6) и (3.7) можно перейти к более наглядным графическим. Самой прос-

той формой графического представления является так называемое полюсно-нулевое изображение. Карта нулей и полюсов функции строится на плоскости комплексной частоты (p -плоскости) путем нанесения координат всех ее нулей в виде кружочков и всех полюсов в виде крестиков (рис.3.2). Порядок кратности обозначают цифрами, постоянный (масштабный) множитель H иногда указывает справа у действительной оси в квадратике.

Текущее значение переменной p на комплексной плоскости представляется в виде вектора $p = (\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}) e^{j\varphi}$,

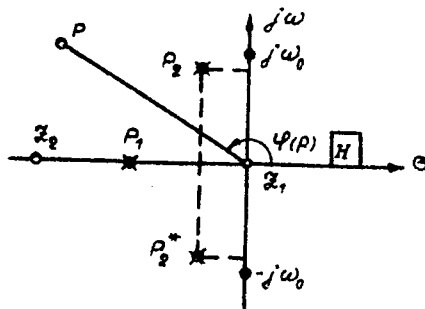


Рис.3.2

направленного из начала координат в данную точку плоскости.

Нули и полюсы функции также могут изображаться векторами

$p_i = (\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}) e^{j\varphi_i}$. Соответственно можно отобразить векторами и множители типа $(p - z_i)$, $(p - p_i)$ в выражении схемной функции (3.7). Тогда оно может быть записано в виде

$$F(p) = |F(p)| e^{j\varphi(p)}, \quad (3.12a)$$

где модуль функции в точке p

$$|F(p)| = H \frac{\prod_{i=1}^n |p - z_i|}{\prod_{i=1}^m |p - p_i|}, \quad (3.12б)$$

фазовый угол функции в точке p

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^n \varphi_{z_i} - \sum_{i=1}^m \varphi_{p_i}, \quad (3.12в)$$

расстояние от точки p до i -го нуля (нулевое расстояние) или полюса (полюсное расстояние)

$$|p - z_i| = \sqrt{(\sigma - \sigma_i)^2 + (\omega - \omega_i)^2}, \quad (3.12г)$$

$\varphi_{z_i}, \varphi_{p_i}$ - углы между направлением векторов $p - z_i$, $p - p_i$ и положительной действительной полуосью, отсчитываемые против хода часовой стрелки.

Пусть $F(p)$ не имеет нулей и полюсов в начале координат p -плоскости, тогда формула (3.12) примет вид

$$F(p) = |F(0)| e^{j\varphi(0)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (p/z_i - 1)}{\prod_{i=1}^m (p/p_i - 1)}, \quad (3.13а)$$

где модуль функции в начале координат

$$|F(0)| = H \frac{\prod_{i=1}^n |z_i|}{\prod_{i=1}^m |p_i|}, \quad (3.13б)$$

фазовый угол функции в начале координат

$$\varphi(0) = \sum_{i=1}^n \varphi_{z_i} - \sum_{i=1}^m \varphi_{p_i}, \quad (3.13в)$$

$\varphi_{z_i}, \varphi_{p_i}$ - угол между положительным направлением действительной полуоси и направлением к нулю или полюсу из начала координат, отсчитываемый против хода часовой стрелки.

На основании формул (3.12) и (3.13) определяют графически значение функции $F(p)$ в любой точке p -плоскости с учетом полюсно-нулевого ее изображения.

Подставляя в (3.12) $p = \sigma + j\omega$, получим следующие формы записи схемной функции:

$$F(p) = F(\sigma + j\omega) = F_R(\sigma, \omega) + jF_I(\sigma, \omega), \quad (3.14а)$$

$$\text{или } F(p) = F(\sigma + j\omega) = F(\tau, \omega) e^{j\varphi(\sigma, \omega)}, \quad (3.14б)$$

$$\text{где модуль функции } F(p) \quad F(\tau, \omega) = \sqrt{F_R^2(\sigma, \omega) + F_I^2(\sigma, \omega)}, \quad (3.14в)$$

$$\text{а } \varphi(\sigma, \omega) = \arctg \frac{F_I(\sigma, \omega)}{F_R(\sigma, \omega)} \quad (3.14г)$$

Функции $F_R(\sigma, \omega)$, $F_I(\sigma, \omega)$, $F(\sigma, \omega)$ и $\varphi(\sigma, \omega)$, как видим, являются функциями двух переменных σ и $j\omega$, а значит графически представляются в виде поверхностей, расстояния (высоты) которых от координатной плоскости с осями σ и $j\omega$ определяются значениями этих функций. Из примеров, приведенных в [5], видно, что полюсы, например функции $F(\sigma, \omega)$, являются горными пиками, а нули-впадинами как бы некой горной местности. Линии фаз представляются здесь траекториями, по которым скатывался бы с возвышенностей безынерционный шарик. Конечно, работать с таким графическим изображением схемных функций затруднительно. Несколько более простым может быть задание функции двух переменных в виде семейства линий равного значения (изолиний) подобно геодезическим картам. В этом случае функции схемы представляются графически на комплексной плоскости семействами изолиний функций $F_R(\sigma, \omega)$, $F_I(\sigma, \omega)$, $F(\sigma, \omega)$, $\varphi(\sigma, \omega)$.

Изображение схемных функций семейством изолиний совпадает также и с картиной электростатического поля разноименных точечных зарядов, расположенных в нулях и полюсах. Причем, силовые линии поля совпадают с линиями равных фаз схемной функции, а эквипотенциальные линии с линиями равных модулей [15].

3.3. Частотные характеристики

В практике анализа и расчета электронных цепей непосредственное применение графических изображений схемных функций затруднительно, поскольку они содержат в себе слишком большой объем информации, спрессованный в ограниченном координатном пространстве. Схемная функция отображает свойства цепи независимо от вида входных сигналов, в то время как реальные цепи и устройства работают, как правило, с вполне определенным видом входных сигналов, ограниченным, например, некоторым диапазоном частот, или максимальной и минимальной скоростью изменения во времени, диапазоном изменения амплитуд и т.п. Если учесть подобные ограничения, то можно, очевидно, упростить изображение схемной функции. Практика анализа схем показала, что, исходя из особенностей работы электронных цепей, а также с целью упрощения анализа их схем, необходимо в большинстве случаев отдельно рассматривать процесс в момент подключения ко входу схемы

входного сигнала, т.е. переходный процесс, а затем установившийся (стационарный) процесс, который устанавливается в цепи по окончании переходного процесса.

С указанных позиций оказалось целесообразным ввести в практику рассмотрение реакции цепи на простейшие формы сигналов. Среди таковых в первую очередь привлекли внимание гармонические функции с единичной амплитудой. Дело в том, что, как известно, любые сложные формы сигналов, воздействующие на цепь в некотором интервале времени Δt и удовлетворяющие условиям Дирихле, можно представить в виде суммы простейших гармонических сигналов, т.е. разложением в сходящийся тригонометрический ряд Фурье:

$$f(t) = \sum (a_n \sin n \omega t + b_n \cos n \omega t),$$

где a_n, b_n - коэффициенты гармоник;

$n \omega t = n \pi / \Delta t$ - частоты гармоник.

Чем более функция входного сигнала $f(t)$ приближается к гармонической, тем меньшее число членов ряда Фурье требуется для ее описания (аппроксимации) с заданной точностью. С другой стороны, в соответствии с принципом суперпозиции, приложенным к линейным цепям, реакция цепи на воздействие сложной формы может быть определена как сумма реакций на простейшие составляющие этого воздействия, т.е. как сумма реакций на каждую его гармоническую составляющую.

На p -плоскости гармоническая функция с частотой, допустим ω_0 , отображается очень просто - двумя симметрично расположенными (попарно-сопряженными) точками на мнимой оси. Обычно рассматривают только положительную мнимую полуось, на которой круговые частоты ω положительны, что имеет простую физическую интерпретацию. Для получения реакции цепи на гармоническое воздействие достаточно перейти от $F(p)$ к $F(j\omega)$, т.е. считать, что p принимает значение $p = j\omega$. Тогда

$$F(p)|_{p=j\omega} = F(j\omega) = \frac{F(j\omega) | e^{j\varphi(\omega)}}{|F(j\omega)|} \quad \text{где } |F(j\omega)| = F(\omega) = \sqrt{F(j\omega)F(-j\omega)} \quad - \text{модуль; (3.15)}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} \quad - \text{фазовый угол.} \quad (3.16)$$

Поскольку сложная функция воздействия представляется, как правило, суммой большого числа гармонических составляющих,

практически оказалось целесообразным рассматривать зависимость, реакции цепи от частоты. Для чего были введены так называемые частотные характеристики схемной функции $F(\rho)$ или просто схемы.

Частотной характеристикой схемы называют совокупность значений функции $F(j\omega)$ на отрезке положительной полуоси $j\omega$, соответствующем некоторому заданному диапазону изменения частот $\omega - \Delta\omega$.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) схемы называют соответствующую совокупность значений модулей $F(\omega)$ в заданном диапазоне изменения частот $\Delta\omega$.

Фазово-частотной, или фазовой характеристикой (ФЧХ) схемы называют соответствующую совокупность значений фазовых углов $\varphi(\omega)$ в заданном диапазоне частот $\Delta\omega$.

Амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ), или частотным годографом называют частотную характеристику $F(j\omega)$, построенную в полярных координатах $Re F(j\omega)$ и $Im F(j\omega)$

$$F(j\omega) = Re F(j\omega) + j Im F(j\omega), \quad (3.17)$$

$$где \quad Re F(j\omega) = [F(j\omega) + F(-j\omega)] / 2 = |F(j\omega)| \cos \varphi(\omega), \quad (3.18)$$

$$j Im F(j\omega) = [F(j\omega) - F(-j\omega)] / 2 = j |F(j\omega)| \sin \varphi(\omega). \quad (3.19)$$

Частотный годограф (АФХ) на комплексной плоскости значений $F(j\omega)$ представляет собой кривую, являющуюся геометрическим местом точек конца вектора $F(j\omega)$ для всех значений ω , как правило, в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ (рис.3.3,а). АФХ объединяет амплитудно- и фазо-частотные характеристики в одну кривую (рис.3.3,а). АЧХ определяется длиной вектора, проведенного из начала координат, а ФЧХ - углом этого вектора с горизонтальной осью комплексной плоскости.

Вещественная амплитудно-частотная характеристика определяется как вещественная часть функции $F(j\omega)$ $F_R(\omega) = Re F(j\omega)$.

По известным АЧХ $F(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ вещественную АЧХ можно определить так

$$F_R(\omega) = F(\omega) \cos \varphi(\omega). \quad (3.20)$$

При малых значениях φ вещественная АЧХ мало отличается от АЧХ $F(\omega)$ (рис.3.3,г).

Мнимая амплитудно-частотная характеристика определяется как

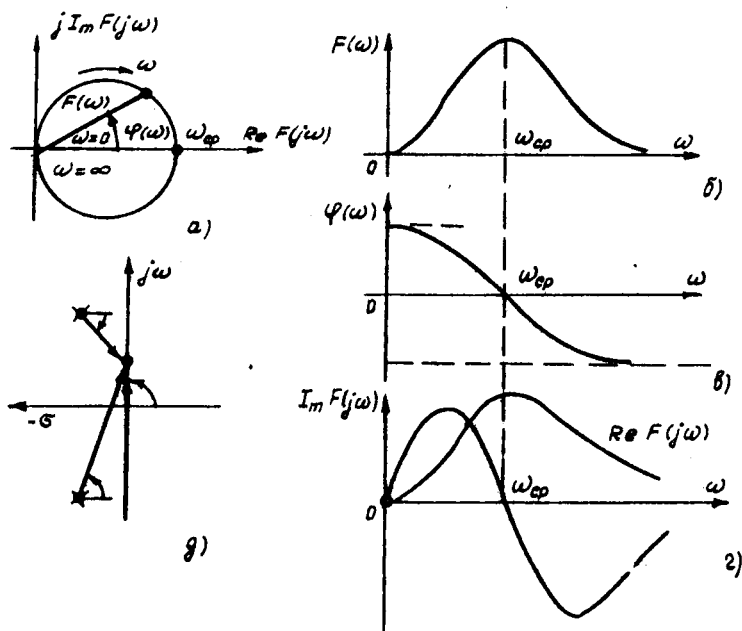


Рис.3.3

мнимая часть функции $F(j\omega)$

$$F_I(\omega) = \text{Im } F(j\omega),$$

или

$$F_I(\omega) = F(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

(3.21)

Широкое применение в практике описания радиоэлектронных устройств (усилители, активные фильтры, преобразователи) находят из числа перечисленных в основном АЧХ и ФЧХ. Последние легко снимаются экспериментально при исследовании, аттестации и проверке радиоэлектронных устройств. При этом на вход линейного устройства подает от генератора гармонический сигнал

$$U_{вх}(t) = U_{вх} \sin \omega t$$

. По окончании переходного процесса реакция цепи будет также гармонической функцией той же частоты, но может отличаться от входного сигнала амплитудой и

фазы колебаний, т.е.

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Снимая зависимости $\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при постоянном $U_{\text{вх}}$, находят искомые частотные характеристики АЧХ и ФЧХ.

Широко распространено в практике построение АЧХ и ФЧХ в логарифмическом масштабе по оси частот, чем достигается компактность их изображения в более широком диапазоне частот. Для упрощения пользования частотными характеристиками, кроме того, логарифмирует модуль $F(\omega)$, что позволяет избежать многообразия в масштабах и размерностях. Отсчет $F(\omega)$ производится в этом случае в децибеллах (дБ) или неперях (нп):

$$F_{\text{дБ}}(\omega) = 20 \lg_{10} F(\omega) \quad (3.22)$$

или $F_{\text{нп}}(\omega) = \ln F(\omega). \quad (3.23)$

При этом полезно знать соотношение

$$1 \text{ дБ} = \frac{20}{\ln 10} = 8,685 \text{ нп}. \quad (3.24)$$

Удобство перевода АЧХ в АЛЧХ состоит, кроме того, и в том, что при этом можно свести операции умножения и деления к операциям сложения и вычитания характеристик. Так, для многокаскадной схемы суммарные АЧХ и ФЧХ находятся из соотношений

$$F = F_1 F_2 \dots F_n,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Переходим к АЛЧХ, тогда

$$F_{\text{дБ}} = F_{1 \text{ дБ}} + F_{2 \text{ дБ}} + \dots + F_{n \text{ дБ}}.$$

Получение аналитических выражений рассмотренных частотных характеристик осуществляется достаточно просто путем замены в выражении соответствующей схемной функции комплексной переменной p на мнимую ее часть $j\omega$. При полюсно-нулевом задании схемной функции $F(p)$ зависимости АЧХ, ФЧХ и АЛЧХ легко строить с помощью формул (3.12) или (3.13), определяя графически значение модуля и фазы для точек, лежащих на заданном

отрезке положительной полуоси $j\omega$. Последний способ построения применяют для качественной или приближенной оценки хода кривых частотных характеристик. Аналитические выражения используют, естественно, в численных способах получения частотных характеристик, в том числе и с применением ЭЕМ.

При большом требуемом числе расчетных точек алгоритмы вычисления АЧХ состоят в переходе к таким формам $F(p)$, которые исключают операции над комплексными числами. Так, например, от $F(p)$ в форме (3.6) переходят к $F^2(\omega) = [F(p)F(-p)]_{p=j\omega}$. Пусть имеем [27]

$$F(p) = \frac{p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

тогда

$$F^2(\omega) = \frac{\omega^{2n-2} + c_{n-2} \omega^{2n-4} + \dots + c_1 \omega^2 + c_0}{\omega^{2n} + d_{n-1} \omega^{2n-2} + \dots + d_1 \omega^2 + d_0}. \quad (3.25)$$

Коэффициенты a_i и b_i связаны с c_i и d_i формулами

$$\left. \begin{aligned} d_{n-k} &= 2 \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-k} b_{n-(2k-j)} b_{n-j} \right] + b_{n-k}^2, \\ c_{n-k} &= 2 \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-k} a_{n-(2k-j)} a_{n-j} \right] + a_{n-k}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Например, для разных значений k

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}b_n, \\ d_{n-2} &= b_{n-2}^2 - 2b_{n-3}b_{n-1} + 2b_{n-4}b_n, \\ &\vdots \\ d_2 &= b_2^2 - 2b_3b_1 + 2b_4b_0, \\ d_1 &= b_1^2 - 2b_2b_0, \\ d_0 &= b_0^2. \end{aligned}$$

Пример: $F(p) = (2p + 10)/(p^2 + 5p + 5)$. Для нее $F^2(\omega) =$

$$= \frac{C_1 \omega^2 + C_0}{\omega^4 + d_1 \omega^2 + d_0} = \frac{2^2 \omega^2 + 10^2}{\omega^4 + (5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5) \omega^2 + 5^2} = \frac{4 \omega^2 + 100}{\omega^4 + 15 \omega^2 + 25}$$

Другой алгоритм основан на представлении $F(j\omega)$ в форме (3.14):

$$F(j\omega) = \frac{A_R(\omega) + jA_I(\omega)}{B_R(\omega) + jB_I(\omega)} = F_R(\omega) + jF_I(\omega), \text{ где}$$

$$\left. \begin{aligned} A_R(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots, \quad A_I(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots, \\ B_R(\omega) &= b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots, \quad B_I(\omega) = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} F_R(\omega) &= \frac{A_R(\omega)B_R(\omega) + A_I(\omega)B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)} \\ F_I(\omega) &= \frac{A_I(\omega)B_R(\omega) - A_R(\omega)B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Отсюда АЧХ

$$F(\omega) = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}$$

3.4. Временные характеристики

Работа радиоэлектронных устройств в импульсном режиме (генераторы и усилители импульсных сигналов, импульсные преобразователи и т.п.) удобнее всего описывается реакциями на простейшие импульсные воздействия. В теории электронных схем известно целое семейство так называемых единичных функций [16]. Они приведены в табл. 3.2. Каждая единичная функция в таблице связана с соседней нижней через операцию дифференцирования, а с соседней верхней через интегрирование, т.е. $\frac{d}{dt} 1_1(t) = 1_0(t) = \int_{-\infty}^t 1_1(t) dt$. Точное определение этих функций зависит от принятого определения импульсной функции $1_0(t)$.

Единичная импульсная функция (единичный импульс) или функция Дирака (δ -функция) $1_0(t)$ определяется так

$$\left. \begin{aligned} i_0(t) = \delta(t) = 0 & \quad \text{при } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i_0(t) dt = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

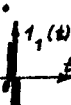
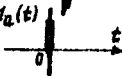
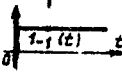
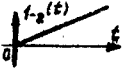
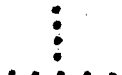
и физически единичный импульс представляется бесконечно большой амплитуды (теоретически) и бесконечно малой длительности ($t_n = 0$) с площадью, равной единице.

Единичная ступенчатая функция (единичная ступень) $i_{-1}(t)$ была использована Хевисайдом для исследования переходных процессов в электрических цепях

$$\left. \begin{aligned} i_{-1}(t) &= 0 & \text{при } t < 0, \\ i_{-1}(t) &= 1/2 & \text{при } t = 0, \\ i_{-1}(t) &= 1 & \text{при } t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Таблица 3.2

Семейство единичных функций

Операция перехода	Обозначение	Изображение	Название единичной функции	Условное графическое изображение
Направление дифференцирования ↑ ↓ Направление интегрирования	$i_n(t)$	ρ^n		
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$i_2(t)$	ρ^2	единичный тройной импульс	
	$i_1(t)$	ρ	единичный двойной импульс	
	$i_0(t)$ ($\delta(t)$)	1	единичный импульс (дельта-функция)	
	$i_{-1}(t)$	$1/\rho$	единичная ступень	
	$i_{-2}(t)$	$1/\rho^2$	единичный наклон	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$i_{-n}(t)$	$1/\rho^n$		

Физически единичная ступень представляет собой резкий скачок напряжения или тока, достигающий единичного значения за $t=0$, поэтому определение значения $1/2$ при $t=0$ имеет лишь теоретическое значение.

Импульсной характеристикой (функцией) схемы называют реакцию схемы на единичный импульс и находят как обратное преобразование Лапласа от выражения схемной функции

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [1 \cdot F(p)] \quad (3.31)$$

Переходной характеристикой (функцией) схемы называют реакцию схемы на единичную ступень и находят путем обратного преобразования Лапласа также от произведения изображения единичной ступени на изображение схемной функции

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} F(p) \right] \quad (3.32)$$

Из определений временных характеристик следует, что для линейных схем их изображения связаны между собой соотношениями

$$g(p) = p h(p) \text{ или } h(p) = g(p)/p, \text{ а их оригиналы - } g(t) = \partial h(t)/\partial t \text{ или } h(t) = \int_0^t g(t) dt.$$

С учетом разложения $F(p)$ на простые дроби (3.9) и формулой (3.10) для расчета коэффициентов разложения при простых полюсах можно записать реакцию схемы на единичную ступень

$E 1_{-1}(t)$ в более развернутом виде

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ [(p-p_i)F(p)]_{p=p_i} \frac{E}{p} e^{p_i t} \right\} 1_{-1}(t) + F(0)E 1_{-1}(t) \quad (3.33)$$

Слагаемое $F(0)E = \kappa_0 E$ является реакцией схемы в установившемся режиме ($p=0$), соответствующей постоянному входному воздействию E . Присутствие множителя $1_{-1}(t)$

в обоих слагаемых реакции определяет начало отсчета времени (в данном случае начало отсчета $t=0$). В более общем случае, когда имеется простой полюс в бесконечности

$$h(t) = \left(\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i e^{p_i t} \right) 1_{-1}(t) + \kappa_0 1_{-1}(t) + \kappa_{\infty} 1_0(t) \quad (3.34)$$

Реакция на единичный импульс ищется путем дифференцирования

$$g(t) = h'(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} [(p-p_i)F(p)]_{p=p_i} e^{p_i t} \right\} 1_{-1}(t) +$$

$$+ \left\{ \sum_{i=0}^{\ell} [(\rho - \rho_i) F(\rho) \frac{1}{\rho}]_{\rho=\rho_i} \right\} 1_0(t) + \kappa_0 1_1(t), \quad (3.35)$$

$$\text{или } g(t) = \left(\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i e^{\rho_i t} \right) 1_{-1}(t) + \left(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\kappa_i}{\rho_i} + \kappa_0 \right) 1_0(t) + \kappa_0 1_1(t),$$

где $\left(\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i e^{\rho_i t} \right) 1_{-1}(t)$ — экспоненциальные составляющие реакции;

$\left(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\kappa_i}{\rho_i} + \kappa_0 \right) 1_0(t)$ — единичный импульс реакции;

$\kappa_0 1_1(t)$ — двойной импульс реакции.

Аналогично находят реакции на единичный наклон и любую комбинацию известных единичных функций.

Связь между частотными и временными характеристиками для одной схемной функции определяется прямым и обратным преобразованием Фурье [5]. Так,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.36)$$

$$\text{а } g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.37)$$

$$\text{или } g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_R(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (3.38)$$

$$\text{и } g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_I(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (3.39)$$

Путем интегрирования импульсной характеристики найдем переходную

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (3.40)$$

Существует ряд методов упрощенного (приближенного) решения этих уравнений [27].

Для численных расчетов временных характеристик часто используют ЭВМ. При этом возникает необходимость табулировать значения отдельных составляющих оригинала схемной функции (3.34) и затем суммировать их в выбранные моменты времени. С увеличением порядка схемной функции указанная процедура заметно усложняется. В этой связи разработан ряд алгоритмов, реализующих специальные численные методы определения временных характерис-

тик, удобных для постановки на ЭВМ. Некоторые из них будут рассмотрены в последующих главах.

3.5. Параметры частотных и временных характеристик

С целью упрощения процедуры анализа и расчета схем иногда достаточно ограничиться вычислением отдельных параметров частотных или временных характеристик, упуская трудоемкие операции по полному расчету и построению этих характеристик.

Выражение передаточной функции неискажающей (идеальной) схемы имеет вид при $p = j\omega$: $F(j\omega) = \kappa_0 e^{-j\tau\omega}$,

откуда выразим АЧХ $\kappa(\omega) = |F(j\omega)| = \kappa_0$,

ФЧХ $\varphi(\omega) = \arg F(j\omega) = -\tau\omega$.

Таким образом, видно, что АЧХ для неискажающей (идеальной) функции передачи схемы не зависит от частоты, а ФЧХ пропорциональна частоте сигналов воздействия (рис.3.4).

Мерой отличия частотных характеристик реальных цепей от идеальных (неискажающих) являются следующие параметры: коэффициент неравномерности амплитудно-частотной характеристики M , определяемой отношением $F(\omega)/\kappa_0 = M \pm 1$ (допустимое значение коэффициента неравномерности $M_{\text{доп}}$ выбирается из разных соображений), полоса пропускания схемы определяется диапазоном частот $\Delta\omega = \omega_g - \omega_n$, внутри которого $M \geq M_{\text{доп}}$; частоты ω_g , ω_n , ограничивающие полосу пропускания, называются верхней и нижней граничной частотой полосы пропускания.

Обычно выбирают $M_{\text{доп}} = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Полоса пропускания, внутри которой $M \geq M_{\text{доп}} = 0,707$, называется условной. Здесь исходят из того, что мощность, отдаваемая в нагрузку сигналом на граничных частотах условной полосы, в два раза меньше мощности, отдаваемой сигналом той же величины на средней частоте этой полосы.

В случае резонансных выбросов (см.рис.3.4,б) на АЧХ, вводят коэффициент $M_{\text{рез}} = \kappa_{\text{рез}}/\kappa_0 > 1$. Для описания избирательных схем, имеющих форму АЧХ и ФЧХ, показанную на рис.3.5, вводят дополнительные параметры. При этом $F(p) = \kappa_0 p / (p^2 + 2\xi\omega_{\text{рез}}p + \omega_{\text{рез}}^2)$, т.е. имеется нуль в начале координат и комплексно-сопряженные полюсы.

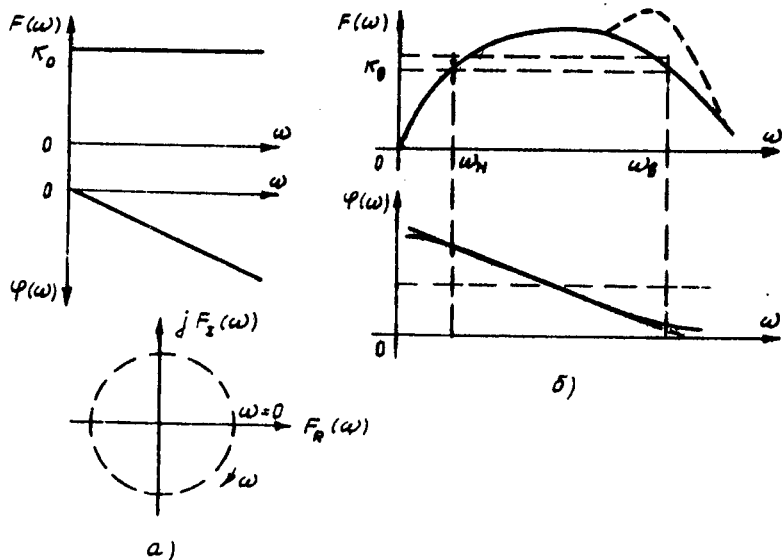


Рис.3.4

Резонансная частота $\omega_{рез}$ — это частота, на которой АЧХ достигает максимума $F(\omega_{рез}) = K_{рез}$. Для избирательных характеристик $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_H \omega_B}$ (рис.3.6). Полоса пропускания $\Delta\omega$ определяется удвоенным расстоянием комплексно-сопряженных полюсов до мнимой оси $\Delta\omega = 2 \frac{1}{Q} \omega_{рез}$. Добротность Q избирательных схем характеризует крутизну спада АЧХ

$$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}, \quad (3.4I)$$

т.е. чем выше добротность, тем уже полоса пропускания схемы. Добротность определяет обратно пропорционально расстоянию комплексно-сопряженных полюсов до мнимой оси ($\frac{1}{Q} \omega_{рез}$), т.е.

$$Q = \omega_{рез} \left(\frac{1}{2 \frac{1}{Q} \omega_{рез}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{Q}}$$

Коэффициент широкополосности схемы определяется площадью

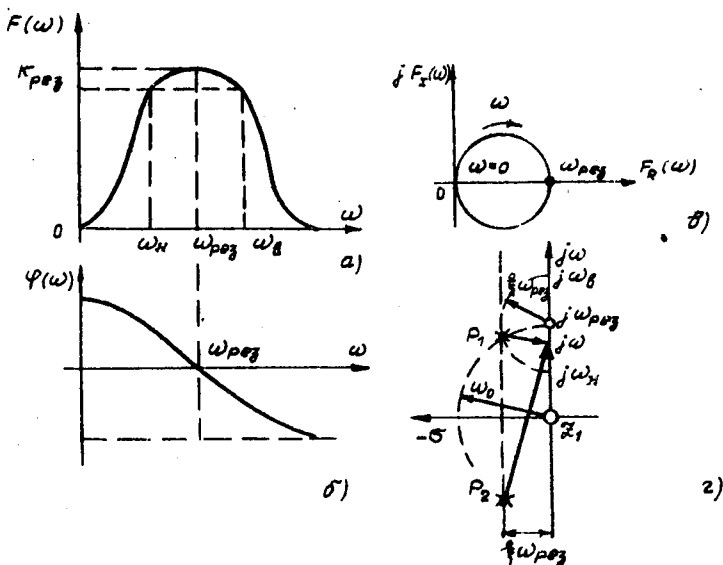


Рис.3.5

под кривой АЧХ, которая для данной схемы остается величиной постоянной

$$K_{ш} = K_{рез} \Delta \omega = \frac{K_0}{2 \xi \omega_{рез}} \cdot \frac{\omega_{рез}}{Q} = K_0 \quad (3.42)$$

При сужении полосы пропускания $\Delta \omega$ увеличивается соответственно коэффициент передачи на резонансной частоте и наоборот. Типичная форма переходной характеристики показана на рис.3.6.

Время нарастания (t_H) или длительность фронта (t_F) общепринято определять как меру времени, требуемого для нарастания характеристики $R(t)$ от 0,1 до 0,9 своего конечного (среднего, установившегося) значения.

Для упрощения определения времени нарастания иногда пользуются соотношением, не требующим полного расчета и построения переходной характеристики

$$t_H = \frac{1}{\left| \frac{dR_H(t)}{dt} \right|_{max}} \quad (3.43)$$

где $\left| \frac{d\hat{h}_H(t)}{dt} \right|_{\max}$ - максимальная крутизна нормированной переходной характеристики. При этом исходят из того, что t_H - это время, за которое реакция схемы достигла бы установившегося значения, если бы скорость ее роста была постоянной, согласно выражению (3.43).

Время задержки t_z - это среднее значение времени в процессе установления, обычно определяется на уровне 0,5 от установившегося значения.

Выброс определяется относительным превышением мгновенного максимального значения реакции схемы над установившимся значением

$$\gamma = \left(\frac{\hat{h}_{\max}}{\hat{h}_0} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (3.44)$$

Коэффициент нелинейности переходной характеристики является мерой отклонения скорости изменения реакции от начального или среднего значения

$$K_{нлх} = \frac{d\hat{h}(0)/dt - d\hat{h}(t)/dt}{d\hat{h}(0)/dt} \quad (3.45a)$$

или

$$K_{нлх} = \left(\left| \frac{d\hat{h}}{dt} \right|_{\max} - \left| \frac{d\hat{h}}{dt} \right|_{\min} \right) / \left| \frac{d\hat{h}}{dt} \right|_{cp} \quad (3.45b)$$

Значением коэффициента нелинейности $K_{нлх}$ оценивается качество имп. уснх устройств (генераторов импульсов пилообразной формы, интеграторов и др.), в основе формирования сигналов на выходе которых лежит непосредственное использование переходной характеристики (реакции или функции).

Аналогично выражениям (3.45) оценивает нелинейность так называемой амплитудной характеристики усилителей, а также преобразователей типа аналог-цифра, цифра-аналог, аналог-частота и т.п. Так, для снятия характеристики усилителя или усилительного тракта $U_{\text{вых}} = f(U_{\text{вх}})$ в качестве воздействия используют единичный наклон $i_2(t)$: $U_{\text{вх}} = E i_2(t)$. Величиной E определяется динамический диапазон линейного усиления, внутри которого коэффициент нелинейности $K_{нл} < K_{нл \text{ доп}}$. При этом

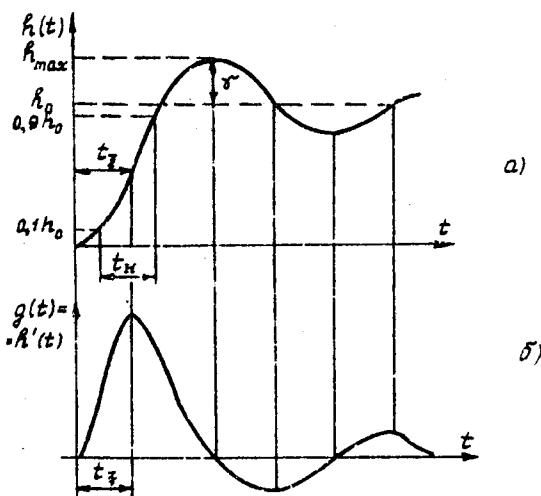


Рис.3.6

$$K_H = \left(\left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{max} - \left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{min} \right) / \left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{max}$$

или

$$K_H = \left(\left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{max} - \left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{min} \right) / \left| \frac{dU_{\theta_{max}}}{dU_{\theta x}} \right|_{cp} \quad (3.45в)$$

3.6. Обратная связь и чувствительность

Кроме рассмотренных ранее электрических воздействий в реальных условиях эксплуатации на электронную цепь оказывает нежелательное воздействие внешние факторы различной природы: время, определяющее старение (необратимое изменение параметров) компонентов цепи, климатические, механические, химичес-

кие и другие воздействия, определяющие обратимые вариации параметров компонентов цепи. Таким образом, видим, что реальная цепь является нестационарной. Уход параметров компонентов цепи под влиянием внешних факторов вызывает неустойчивость ее схемных функций, т.е. приводит к вариации параметров частотных и временных характеристик, положений нулей и полюсов. Одним из универсальных средств борьбы с неустойчивостью параметров компонентов, а следовательно и схемных функций, является введение в схемы обратных связей. Ею охватывается неустойчивый компонент схемы.

Обратная связь имеет место при наличии цепи передачи части выходного сигнала схемы на ее вход. В результате, в схеме образуется замкнутая цепь (кольцо), в состав которой входит та самая неустойчивая компонента, влияние которой на величину схемной функции должно быть снижено.

Пусть величина прямой передачи (от входа схемы к ее выходу) есть $F_{пр}$, а обратная передача (от выхода ко входу) — $F_{обр}$, тогда передача всей рассматриваемой замкнутой цепи равна $L_k = F_{пр} \cdot F_{обр}$ и называется петлевой (контурной) передачей или возвратным отношением. Исключим из схемы источник сигнала, разорвем цепь обратной связи (элемент g) и приложим единичный импульс к одному из концов разрыва: так, чтобы сигнал распространялся в направлении от входа к выходу схемы. Очевидно, сигнал, возвращающийся к другому концу разрыва цепи, будет иметь величину $1 - F_{пр} \cdot F_{обр}$. Тогда разность между приложенным и вернувшимся сигналами

$$F_g = 1 - F_{пр} \cdot F_{обр} \quad (3.46)$$

Полученная таким образом величина F_g получила название обратной (возвратной) разности или просто обратной связи для параметра g .

На основании изложенного в схеме с обратной связью входной сигнал $X_{вх}$ можно рассматривать как разность составляющей $X_{вх.п}$, не зависящей от передачи сигнала по цепи обратной связи, и составляющей $X_{вх.о}$, поступающей с выхода на вход по цепи обратной связи. Тогда $X_{вх.о} = X_{вых} \cdot F_{обр} = X_{вх.п} \cdot F_{пр} \cdot F_{обр}$ и выражение для функции передачи при некоторых допущениях от входа схемы к ее выходу с учетом выделенной нами обратной связи примет широко известный в теории усилителей вид

$$r = - \frac{x_{\delta n x}}{x_{\delta x}} = - \frac{x_{\delta n x}}{x_{\delta x 1} - x_{\delta x 2}} = \frac{F_{np}}{1 - F_{np} F_{dp}}$$

Если сигнал, возвращающийся ко входу по цепи обратной связи, меняет свой знак, то такую обратную связь называют отрицательной (ООС), в другом случае она называется положительной (ПОС).

Обратная связь широко используется в технике и в природе, а поэтому ее теория имеет универсальное значение. Введение в схему обратных связей существенно влияет на ее свойства. С помощью обратных связей (стрижательных) повышают стабильность электронных устройств, увеличивают помехоустойчивость, снижают нелинейность передаточных функций (характеристик) схемы, повышают устойчивость. Исследование свойств схем с обратными связями удобнее всего вести методом сигнального графа (см. гл. 4). Нестабильность схемных параметров (схемных функций, параметров частотных и временных характеристик, отдельных токов и напряжений и т.д.) оценивается их чувствительность к вариациям значений параметров компонентов схемы.

Чувствительность (относительная) определяется как отношение относительного изменения $\Delta \kappa / \kappa$ схемного параметра (схемной функции и др.) к относительному изменению $\Delta g_i / g_i$ одного из параметров компоненты схемы

$$S_{g_i}^{\kappa_j} = \frac{\Delta \kappa_j / \kappa_j}{\Delta g_i / g_i} = \frac{\Delta \kappa_j}{\Delta g_i} \cdot \frac{g_i}{\kappa_j} \quad (3.47)$$

При малых изменениях g_i , когда можно считать, что $\Delta g_i \rightarrow 0$ и значит $\Delta g_i = dg_i$, можно перейти к дифференциальной или логарифмической форме записи чувствительности

$$S_{g_i}^{\kappa_j} = \frac{d\kappa_j / \kappa_j}{dg_i / g_i} = \frac{d(\ln \kappa_j)}{d(\ln g_i)} = \frac{g_i}{\kappa_j} \cdot \frac{d\kappa_j}{dg_i} = \frac{g_i}{\kappa_j} \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial g_i} \quad (3.48)$$

Из последнего выражения ясен способ вычисления чувствительности по известному выражению для $\kappa_j = \kappa_j(g_i)$. Он основан на вычислении частных производных от схемных параметров (схемных функций и др.).

Для нулевого схемного параметра (например, для выходного напряжения уравновешенного моста) необходимо перейти к определению так называемой полуотносительной чувствительности

$$S_{g_i}^{U_j} = g_i \frac{\Delta U_j}{\Delta g_i} \approx g_i \frac{\partial U_j}{\partial g_i} \quad (3.49)$$

На основе (3.49) можно определить нулевую и полюсную чувствительность

$$S_{g_i}^{x_j} = g_i \frac{\partial x_j}{\partial g_i}, \quad S_{g_i}^{p_j} = g_i \frac{\partial p_j}{\partial g_i}, \quad (3.50)$$

характеризующие изменение полюсно-нулевого изображения схемной функции при вариации параметров компонентов схемы.

Чувствительность к изменению обратной величины $z_i = 1/g_i$ параметра компоненты определяется так

$$S_{z_i}^{\kappa_j} = \frac{z_i}{\kappa_j} \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial z_i} = \frac{1}{g_i \kappa_j} \cdot \frac{\partial \kappa_j}{(-\partial g_i / g_i^2)} = -\frac{g_i}{\kappa_j} \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial g_i} = -S_{g_i}^{\kappa_j}.$$

Вычисление относительной чувствительности через полиномы схемной функции и обратную связь

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{\Delta(p)} = \frac{A_0(p) + g_i A_1(p)}{\Delta_0(p) + g_i \Delta_1(p)},$$

$$S_{g_i}^{F(p)} = \frac{g_i}{A/\Delta} \cdot \frac{\partial (A/\Delta)}{\partial g_i} = \frac{g_i \Delta}{A} \cdot \frac{A_1' \Delta - A \Delta_1'}{\Delta^2} = \frac{(A - A_0) \Delta - A (\Delta - \Delta_0)}{A \Delta} =$$

$$= \frac{A \Delta_0 - A_0 \Delta}{A \Delta} = \frac{\Delta_0}{\Delta} - \frac{A_0}{A} \quad (\text{формула Линча}) \quad (3.51)$$

$$\text{и } S_{g_i}^{F(p)} = \frac{A \Delta_0 - A_0 \Delta}{A \Delta} = \frac{1 - A_0 \Delta / A \Delta_0}{\Delta / \Delta_0} = \frac{1 - F_0(p) / F(p)}{\Delta / \Delta_0} =$$

$$= \frac{1 - F_0(p) / F(p)}{F_{g_i}} \quad (\text{формула Боде}),$$

где $g_i A' = A - A_0$, $g_i \Delta' = \Delta - \Delta_0$, $\Delta / \Delta_0 = F_{g_i} = 1 - F_{np} F_{odp} = 1 - L_{\kappa}$.

Вычисление псч чувствительности можно проводить по формуле, полученной аналогично

$$s_{g_i}^{u_j} = -\frac{A_0}{\Delta} = -\frac{A_0 \Delta_0}{\Delta_0 \Delta} = -\frac{F_0(\rho)}{\Delta/\Delta_0} = -\frac{F_0(\rho)}{F_{g_i}} \quad (3.53)$$

Вычисление относительной нестабильности схемных параметров (схемных функций) по известным значениям чувствительности можно осуществить в соответствии с определением (3.47), из которого

$$\delta K_j = \frac{\Delta K_j}{K_j} = (s_{g_i}^{K_j}) \cdot \left(\frac{\Delta g_i}{g_i} \right) = s_{g_i}^{K_j} \cdot \delta g_i$$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

4.1. Построение топологических моделей электронных схем

Под топологической моделью электронной цепи понимают удобное для анализа изображение входящих в нее компонентов и их взаимные соединения. Как известно, в принципиальных схемах электронных цепей (устройств) каждый компонента имеет свое условное изображение (рисунок, чертеж), определяемое соответствующим ГОСТом. Такое изображение удобно для функционального анализа работы цепи, например, с успехом используется для монтажа или поиска неисправностей (диагностики). Для математического анализа представление каждой компоненты цепи своим особым рисунком не имеет никакого значения, но загромождает изображение. Здесь важна лишь его функция, т.е. коэффициент связи между током и напряжением на его зажимах, а также взаимные соединения компонентов цепи (топология). Если обозначить все двухполюсные пассивные компоненты одинаково, например отрезками непрерывных линий, концы которых соответствуют узлам двухполюсника, то такие схемы будут отличаться в общем случае только числом элементов и способом их соединения между собой. Такое упрощенное представление анализируемой цепи совпадает с известным понятием графа, введенным в математику еще в XVIII веке (Эйлер, 1736г.) и впервые использованным в теории цепей Кирхгофом в его знаменитой статье, опубликованной более ста лет спустя (1857 г.). Общность исходной цепи, ее принципиальной схемы и, наконец, графа этой цепи состоит в их топологической эквивалентности, хотя во всех других отношениях они различны.

На рис. 4.1 показаны примеры топологических моделей электрического моста: его принципиальная схема (рис. 4.1,а) и граф (рис. 4.1,б). Как видим, граф схемы моста отличается предельной простотой. В качестве весов его ветвей взяты в данном случае проводимости соответствующих ветвей схемы. В теории графов, однако, применяют свою терминологию, считая, что граф состоит из ребер (вместо ветвей) и вершин (вместо узлов в схеме). Каждой ветви (ребру) графа иногда дают (стрелочкой) направление, совпадающее с выбранным положительным направлением тока в ней.

Многополюсную компоненту схемы отображают в виде полюсного графа или другими способами, рассмотренными ниже.

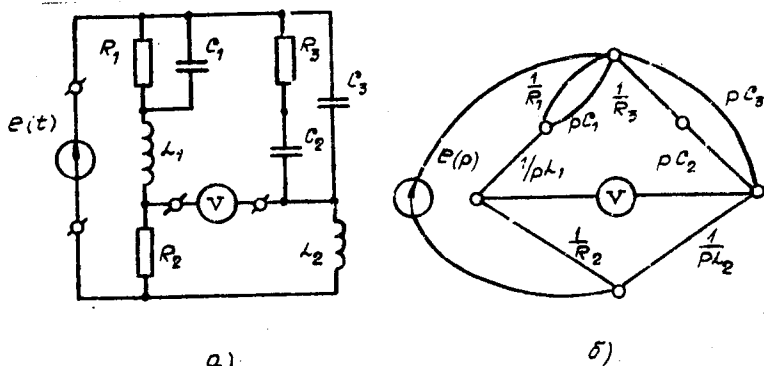


Рис. 4.1

Сложностью математической модели электронной схемы определяется трудоемкость анализа. Отчего зависит сложность модели и как ее можно уменьшить? Очевидно, что сложность моделей зависит от топологии анализируемой схемы, т.е. от числа входящих в нее компонентов и способа их соединения, а точнее от числа узлов и ветвей между ними. Так, если под сложностью линейной схемы понимать число уравнений в системе, описывающей ее, то можно утверждать, что сложность прямо пропорциональна числу узлов (или контуров) схемы цепи. Сложность же моделей нелинейных схем определяется кроме того, еще и видом нелинейных зависимостей электронных и других компонентов, входящих в анализируемое устройство. Для уменьшения сложности математической модели естественно прибегнуть к упрощению (сокращению) топологической модели цепи. Здесь уместно заметить, что анализ цепи проводится, разумеется, не по самой цепи, а по ее топологическому представлению в виде схемы или графа. Вот здесь-то при составлении схемы или графа цепи и следует использовать все возможные резервы по их упрощению путем пренебрежения несущественными компонентами и их связями. Способы, направление и глубина упрощения схемы при создании топологической модели зависят, в первую очередь, от поставленной задачи анализа и от целей анализа, затем от требуемой точности и других специфических условий и требований. Рассмотрим известные типичные приемы упрощения.

Составление нескольких топологических моделей для решения задачи анализа. В этом приеме исходят из известного факта, что лучше решить две простые системы уравнений, чем одну сложную. В этом случае и результаты анализа представляются более наглядно и естественно.

Топологическая модель цепи по постоянному току (в статике).

Анализ цепи обычно разделяют на две независимых задачи: анализ цепи по постоянному току (в статике) и анализ цепи по переменному току (в динамике). Смысл такого разделения состоит в том, что наличие в цепи электронных (оптоэлектронных) компонентов требует для обеспечения правильного режима работы запитать их постоянными токами или напряжениями, прикладываемыми к полюсам. В зависимости от требуемого режима работы каждой электронной компоненты (линейный, нелинейный — A, B, C, D и др.) выбирается соответствующая рабочая точка на ее выходных (входных, переходных) характеристиках. Рекомендации по выбору рабочей точки и сама процедура выбора рассматриваются в курсах, посвященных изучению конкретных классов цепей (усилители, генераторы, преобразователи и др.), поскольку являются специфичными, что затрудняет их рассмотрение с общих позиций. Задача анализа цепи по постоянному току состоит в получении математических выражений, связывающих токи или напряжения на полюсах электронных компонентов с параметрами пассивных компонент и величинами источников напряжения (тока) питания. Далее по этим выражениям проводится расчет параметров пассивных компонентов (резисторов), что и обеспечивает заданный режим работы каждой электронной компоненты. Топологические модели цепи по постоянному току, т.е. в статике получаются путем исключения из полной схемы цепи конденсаторов, закорачивания индуктивностей, если последние по своим параметрам близки к идеальным, т.е. имеют сравнительно очень большое (для конденсатора) или очень малое (для индуктивности) сопротивления постоянному току. При анализе измерительных цепей иногда приходится с целью тщательного исследования погрешностей, вносимых цепями, учитывать паразитные сопротивления реактивных компонентов. В общем случае топологические модели цепей по постоянному току получаются довольно простыми. Математические модели таких схем представляются в виде системы алгебраических уравнений.

Топологическую модель по переменному току, т.е. в динамике составляют для той же электронной цепи с учетом переменных составляющих токов и напряжений. При этом ориентируются на ту область частот, в которой находится спектр входного сигнала. Процедура составления топологической модели по переменному току состоит в упрощении исходной схемы цепи путем закорачивания источников напряжения питания электронной цепи, поскольку, благодаря их большой выходной емкости, сопротивление источников переменному току предполагается очень низким. При наличии в цепи источников тока, не имеющих переменной составляющей, их также можно удалить из схемы, но путем разрыва соответствующей цепи, т.к. сопротивление источника тока предполагается очень высоким. Для упрощения схемы можно также закорачивать межкаскадные развязывающие конденсаторы, конденсаторы фильтров и другие, из назначения которых известно, что емкость должна выбираться сравнительно большой, дабы они имели сравнительно низкое сопротивление переменному току во всем диапазоне рабочих частот. При наличии в цепи заградительных индуктивностей (дресселей) и других, из назначения которых следует, что их индуктивность должна выбираться достаточно большой, чтобы оказывать высокое сопротивление переменному току на рабочих частотах, их следует исключить из схемы путем разрыва соответствующих соединительных цепей.

В некоторых случаях прибегают к составлению нескольких топологических моделей, соответствующих режиму работы на низких, средних и высоких частотах, что также оправдывается целью упрощения анализа.

Топологические модели для цепей импульсного действия. При анализе импульсного устройства (генератор пилообразного напряжения, мультивибратор, триггер, компаратор, инвертор и т.п.) также идут по пути использования несколько топологических моделей. Каждая из таких моделей должна соответствовать определенному состоянию ключей устройства во времени, т.е. этапу (интервалу) работы устройства со всеми вытекающими отсюда упрощениями его исходной схемы. Таким образом, исходная схема устройства разбивается на ряд подсхем с постоянной структурой,

соответствующей определенному состоянию всех ключевых элементов. Затем для каждой подсхемы с постоянной структурой составляется своя топологическая модель. Например, работа генератора пилообразного напряжения разделяется на три этапа: формирование прямого хода, формирование обратного хода и этап ожидания. При составлении трех топологических моделей учитывается состояние ключей, начальные условия на реактивных компонентах, режим работы по постоянному или переменному току на каждом этапе.

Пример 4.1. Составить топологические модели в виде эквивалентных схем усилителя, принципиальная электрическая схема которого показана на рис. 4.2, а. Эквивалентная схема по постоянному току показана на рис. 4.2, б, где R_i — внутреннее сопротивление источника питания. Оно включается в схему очевидно тогда, когда его величина сравнима с сопротивлением резисторов R_1 , R_2 , R_3 , что встречается весьма редко. Эквивалентная схема усилителя по переменному току приведена на рис. 4.2, в.

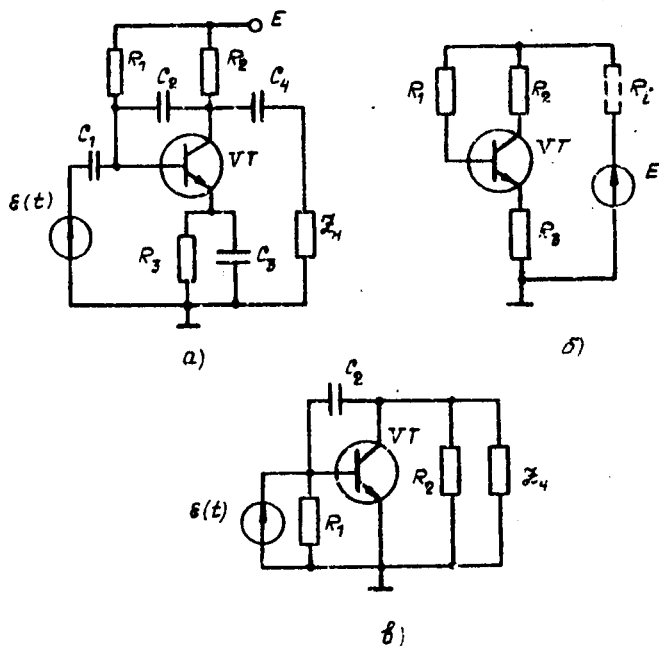


Рис. 4.2

При ее составлении учитывалось, что сопротивление переменному току конденсаторов C_1 , C_3 и C_4 в сравнении с сопротивлениями других компонент цепи достаточно мало. Так, конденсаторы C_1 и C_4 считаются здесь межкаскадными (разделительными), а C_3 - фильтрующим. Его емкость, как известно из теории усилителей, выбирается так, чтобы он полностью шунтировал резистор R_3 в диапазоне рабочих частот усилителя.

Пример 4.2. Составить топологическую модель генератора пилообразного напряжения с последовательной положительной обратной связью, принципиальная электрическая схема которого показана на рис. 4.3,а. На рис. 4.3,б показана эквивалентная схема генератора на этапе формирования прямого хода, т.е. линейной части пилообразного напряжения. На этом этапе работы генератора ключи на транзисторе V_{T1} и диодах $VD2$, $VD4$ закрыты, поэтому из схемы исключены, источник питания E замкнут. Он в этот момент питает только эмиттерный повторитель на транзисторе V_{T3} . Заряд формирующего конденсатора осуществляется от напряжения, накопленного к этому моменту на конденсаторе C_2 . На рис. 4.3,в и г показаны эквивалентные схемы, соответствующие этапу формирования обратного хода, который, как видим, разбивается в свою очередь на два периода. По схеме на рис. 4.3,в происходит разряд конденсатора через сопротивление $r_{кл}$ открытого транзистора V_{T1} . При этом транзистор V_{T3} продолжает находиться в активном режиме, конденсатор C_2 по-прежнему разряжается небольшим током через резистор R_1 и т.д. По окончании разряда C_1 открывается диод $VD2$ и эквивалентная схема изменяется (рис.4.3,г). Теперь запирается транзистор эмиттерного повторителя V_{T3} и начинается период восстановления заряда на конденсаторе C_2 от источника E через сопротивления открытых диодов r_{d2} , r_{d4} и открытого транзистора V_{T1} - $r_{кл}$. На рис.4.3,д показана эквивалентная схема, соответствующая короткому начальному периоду в формировании прямого хода. Здесь транзистор V_{T1} , управляемый внешним импульсным генератором, уже закрыт (поэтому из схемы исключен), а отключающий диод $VD2$ еще находится в проводящем состоянии, также как и диод $VD4$. В закрытом состоянии остается и транзистор V_{T3} , поэтому положительная обратная связь, обеспечивающая высокую линейность заряда конденсатора C_1 , пока не действует. Заряд конденсатора C_1 ,

проходит через резисторы R_1 и Z_{A2} . Как только напряжение на C_2 увеличится до напряжения отпирания транзистора $VT3$, включается в работу эмиттерный повторитель и на выходе генератора появляется выходное напряжение, которое приводит к запираннию диода $VD2$. С этого момента работа генератора снова происходит по эквивалентной схеме, показанной на рис.4.3,б.

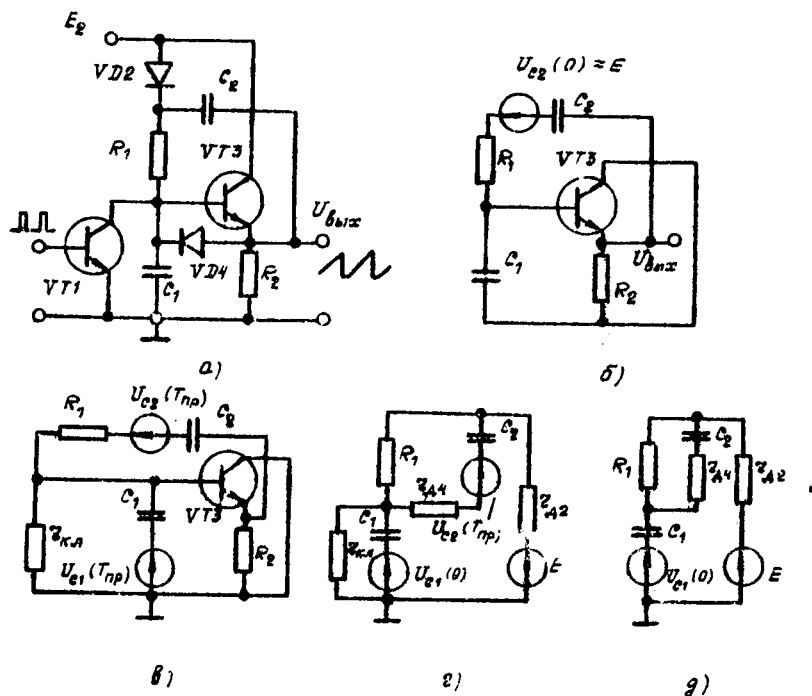


рис.4.3

4.2. Анализ методом унисторных и УНИТных графов

В настоящем разделе рассмотрим методы унисторных и УНИТных графов, которые, как правило, строятся непосредственно по выбранной топологической модели электронной цепи путем представления электронных компонентов топологическими моделями с управляемыми (зависимыми) источниками. В следующем разделе кратко рассмотрим метод сигнальных графов, которые в принципе строятся по системе уравнений для выбранной топологической модели электронной цепи. Разработаны также и методы непосредственного построения сигнальных графов по топологической модели, имеющие, однако, более сложный алгоритм.

4.2.1. Унисторные модели источников тока

Унистор — направленный элемент графа, представляет собой идеальный источник тока, управляемый напряжением, отсчитанным от опорного (нулевого, базисного) узла графа (схемы) к его входному узлу (рис.4.4).

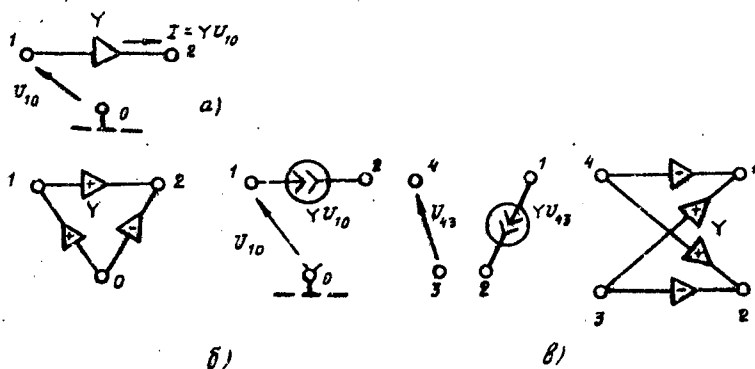


Рис. 4.4

Унисторные модели электронных компонентов приведены во втором разделе настоящей книги. Они строятся либо по правилам эквивалентной замены источников тока, показанным на рис.4.4, либо по матрицам проводимости электронных компонентов. Тогда проводимость унистора, направленного от узла a в узел b , определяется недиагональным элементом W_{ba} ($b \neq a$) неопределенной матрицы проводимости электронной компоненты $Y_{ab} = -W_{ba}$.

Эквивалентные преобразования в графе с унисторами показаны на рис. 4.5.

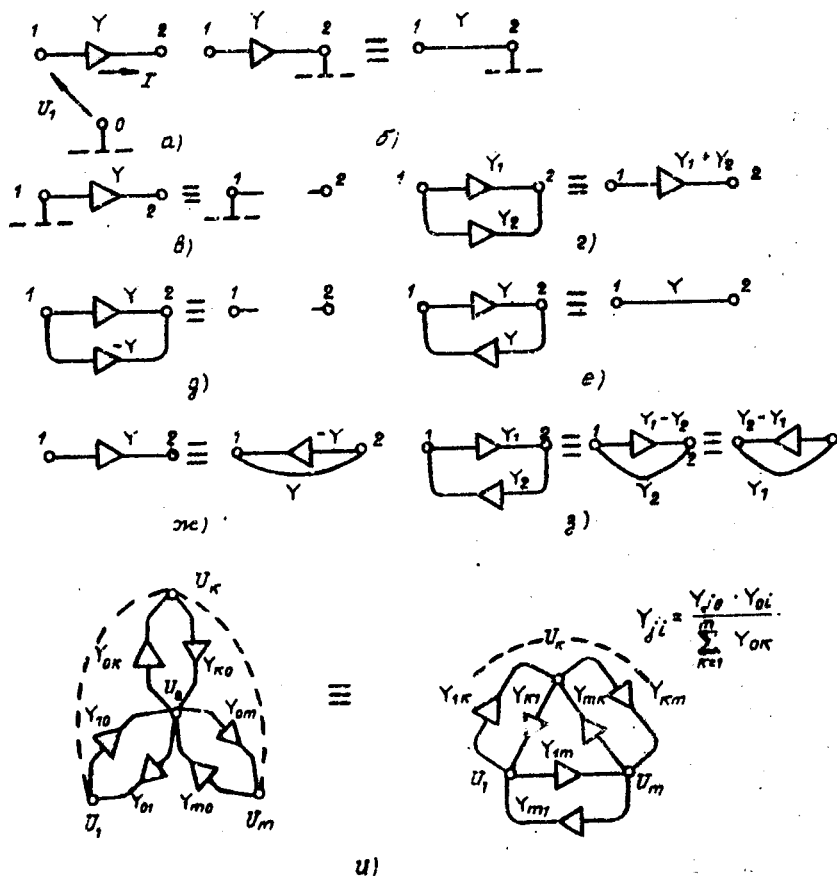


Рис. 4.5

4.2.2. Вычисление схемных функций в ненаправленных графах (пассивных схемах)

Согласно формулам Крамера, определение схемной функции сводится к вычислению определителя и его дополнений, поэтому прежде всего необходимо связать топологию графа с процедурой

вычисления определителя. Применительно к пассивным схемам Максвелл еще в конце прошлого века показал, что определитель схемы (матрицы Y) равен сумме величин всех деревьев ее графа

$$\Delta = \sum_i d_i. \quad (4.1)$$

где d_i - величина i -го дерева графа, определяемая произведением проводимостей его ребер (ветвей схемы):

$$d_i = Y_{\alpha} Y_{\beta} \dots Y_{\gamma}.$$

Определитель, как известно, не зависит от источников, действующих в схеме, поэтому формула (4.1) применяется к графу, в котором все ветви с источниками напряжения (идеальными) закорочены, а ветви с источниками тока (идеальными) разомкнуты. В графе с числом узлов v число ребер, входящих в каждое дерево, равно $v-1$.

Формула Максвелла, как известно, минимальна

$$\Delta = \sum_{i=1}^S \prod_{z=1}^{v-1} Y_{i,z} = \sum_i d_i, \quad (4.2)$$

где S - число деревьев графа схемы;
 v - число вершин графа;
 $Y_{i,z}$ - вес z -го ребра i -го дерева;
 $d_i = \prod_{z=1}^{v-1} Y_{i,z}$ - величина i -го дерева графа.

Симметричные алгебраические дополнения Δ_{aa} , как известно, вычисляются по матрице проводимости схемы путем вычеркивания a -й строки и a -го столбца. На графе это соответствует закорачиванию a -й вершины с общей (нулевой). Для полученного после такого небольшого преобразования "закороченного" графа вычисляют определитель по формуле Максвелла. Его значение и даст нам искомое алгебраическое дополнение, т.е.

$$\Delta_{aa} = \Delta',$$

где Δ' - определитель графа с закороченными вершинами a и 0 .

Деревья преобразованного таким образом графа, входящие в выражение Δ' , содержат $v-2$ элемента, т.к. закороченный граф имеет уже $v-1$ вершину. Если рассмотреть эти новые $v-2$ деревья, перенести их в исходный граф, то обнаружим, что по

отношению к нему они представляются в виде несвязного графа, состоящего из двух отдельных частей, не включающих в себя ни одного контура. Такая топологическая конфигурация получила название двойного дерева. Таким образом, для получения Δ_{aa} по исходному графу достаточно, не производя в нем никаких преобразований, просто найти все его 2-дерева, которые содержали бы общую (базисную) вершину o и вершину a в отдельных своих частях, что соответствует разрыву всех путей между вершинами o и a . Тогда

$$\Delta_{aa} = \sum_{i=1}^m \prod_{z=1}^{k-2} Y_i^z = \sum_{i=1}^m d_{(a,o)i} \quad (4.3, a)$$

где $d_{(a,o)i}$ - обозначение величины i -го 2-дерева, содержащего вершины a и o в своих отдельных частях.

Построить 2-дерева для Δ_{aa} можно из основных деревьев графа посредством удаления одного ребра так, чтобы прервать путь между a -й и o -й (базисной) вершинами. На рис.4.6, а и б показан граф и его 2-дерева $d_{1,o}$ для определения Δ_{11} .

Для получения асимметричных алгебраических дополнений Δ_{ab} необходимо выбрать такие 2-дерева $d_{ab,o}$, в которых базисная вершина o находилась бы в одной части, а вершины a и b в другой, изолированной от первой части графа, т.е.

$$d_{ab,o} = d_{a,o} \cap d_{b,o}$$

На рис. 4.6, в показаны 2-дерева $d_{13,o}$ для Δ_{13} . В этом случае

$$\Delta_{ab} = \sum_{i=1}^m d_{(ab,o)i} \quad (4.3, б)$$

С учетом формул (4.2) и (4.3) можно записать общие топологические формулы передачи графа, т.е. формулы для любой схемной функции [17]

$$F_{ab}^i = \frac{x_b}{x_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} = \sum_{i=1}^m d_{(ab,o)i} / \sum_{i=1}^n d_i \quad (4.3, в)$$

$$и \quad F_{ab}^v = \frac{x_b}{x_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} = \sum_{i=1}^m d_{(ab,o)i} / \sum_{i=1}^n d_{(a,o)i} \quad (4.3, г)$$

Найдем для графа, приведенного на рис.4.6, а, схемную функцию передачи $K_{31} = U_3 / U_1$ и функцию входного сопротивления $Z_{bx} = U_1 / I_1$. Из формул Крамера $Z_{bx} = \Delta_{11} / \Delta$, $K_{31} = \Delta_{13} / \Delta_{11}$.

Находим все деревья графа и записываем по формуле (4.1) определитель:

$$\Delta = \sum_i d_i' = y_a y_b y_c + y_b y_d y_c + y_a y_c y_e + y_a y_b y_e +$$

$$+ y_a y_d y_e + y_d y_b y_c + y_a y_b y_d + y_b y_e y_d ;$$

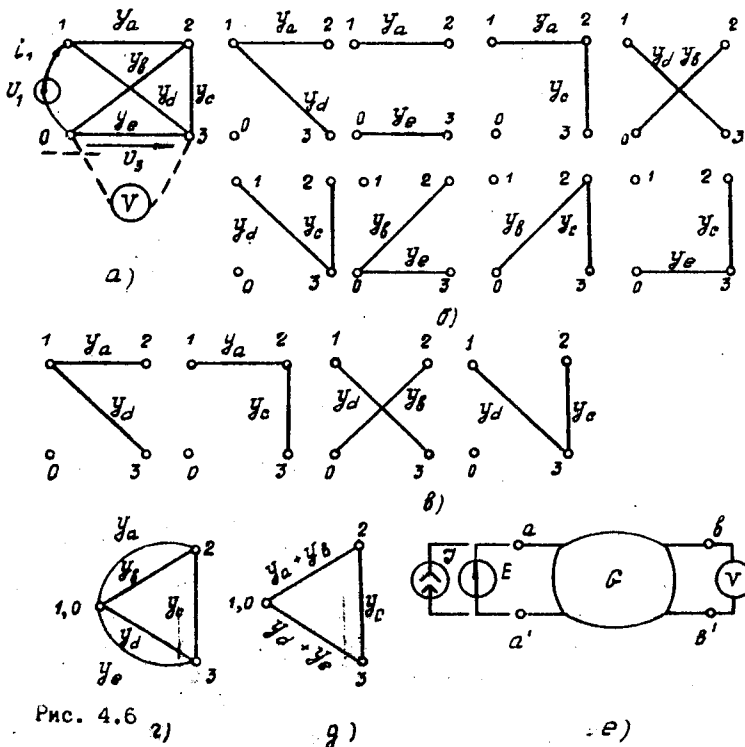
$$\Delta_{11} = \sum d_{1,0} = y_a y_d + y_a y_e + y_a y_c + y_d y_b + y_d y_e + y_b y_e + y_b y_c + y_e y_c ;$$

$$\Delta_{13} = \sum d_{13,0} = y_a y_d + y_a y_e + y_b y_d + y_d y_c .$$

Вес изолированной вершины берется равным единице. В результате

$$\kappa_{31} = \frac{y_a (y_d + y_e) + y_d (y_b + y_c)}{y_a (y_d + y_e + y_c) + y_b (y_d + y_e + y_c) + y_c (y_d + y_e)} ;$$

$$\bar{x}_{bx} = \frac{y_a (y_d + y_e + y_c) + y_b (y_d + y_e + y_c) + y_c (y_d + y_e)}{y_a (y_b y_c + y_c y_e + y_b y_e + y_d y_e + y_b y_d) + y_d (y_e y_c + y_b y_c) + y_e y_d y_b}$$



В общем случае, когда входные и выходные вершины графа схемы (мостовые цепи) не имеют общей вершины (см. рис.4.7,а) поиск 2-деревьев $d_{a\beta, a'\beta'}$ усложняется. Кроме того, требуется определить знак величины каждого 2-дерева. Двойное дерево типа $d_{a\beta, a'\beta'}$ должно удовлетворять условию отсутствия путей между вершинами a и a' , β и β' . Другими словами, вершины a и a' должны находиться в различных изолированных частях графа, также как и вершины β и β' . Для графа, приведенного на рис.4.7,б, имеем два 2-дерева типа $d_{a\beta, a'\beta'}$ (рис.4.7,в): $d_{(a\beta, a'\beta')_1} = Y_1 Y_2$ и $d_{(a\beta, a'\beta')_2} = -Y_3 Y_4$.

Причем, величина 2-дерева берется со знаком плюс, если a и β находятся в одной части дерева и со знаком минус в противном случае. Тогда и формула для определения асимметричного суммарного дополнения соответственно усложняется [17]:

$$\Delta_{(a+a')(\beta+\beta')} = \sum_{i=1}^{m-1} d_{(a\beta, a'\beta')_i} - \sum_{i=1}^n d_{(a\beta', a'\beta)_i} \quad (4.3,4)$$

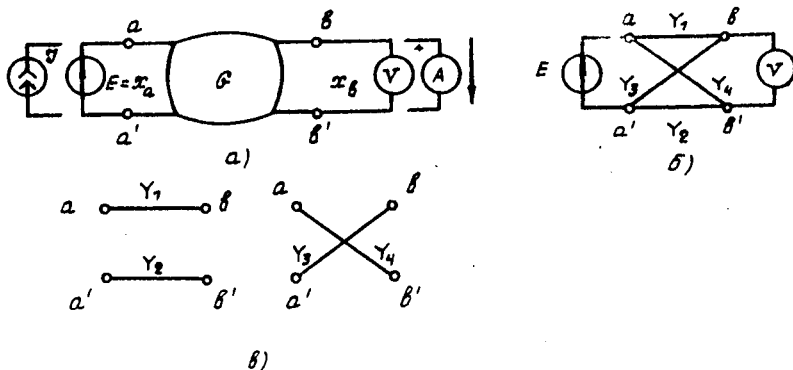


Рис. 4.7

Из приведенных примеров видны достоинства и недостатки рассмотренных топологических формул. Их главные достоинства состоят в непосредственной связи формул для определения схемных функций с топологическими фрагментами (деревьями или контурами) графа схемы, в отсутствии избыточности модели и минимальности топологических формул. Видимым недостатком процедуры составления топологических формул является известная трудность поиска всех деревьев графа, а затем формирования из них 2-деревьев. Ради отмеченных достоинств метода упорно делаются попытки найти способы ослабления указанных его недостатков. И вот, спустя ровно 90 лет после рождения метода, появилась в 1953 году практически очень удобная модернизация топологического расчета - формула Мэсона (см. рис.4.7,а) [18]:

$$F_{a\beta} = \frac{x_\beta}{x_a} = \frac{\sum_{\kappa=1}^q \rho_\kappa \Delta_\kappa}{\Delta}, \quad (4.4)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n d_i$ - определитель, вычисляемый по правилу Максвелла (4.2) после замыкания источников напряжения $\mathcal{E}$ и удаления источника тока $\mathcal{I}$ и всех измерительных приборов;

ρ_κ - величина κ -го прямого пути графа от одного a -го зажима (вершины) задающего источника ($\mathcal{E}$ или $\mathcal{I}$) к другому его a' -му зажиму (вершине), проходящего через измерительный прибор с зажимами (вершинами) β - β' ($\mathcal{V}$ - вольтметр или $\mathcal{A}$ - амперметр). При этом прямым путем называют последовательность ребер графа, в которой все вершины и ветви различны. Величина пути ρ_κ определяется произведением передач (проводимостей или сопротивлений) ребер пути. Знак величины пути ρ_κ определяется по направлению пути (обычно выбирают по направлению источника) относительно выбранного направления искомой величины x_β . Если указанные направления совпадают, величина пути положительна, в противном случае - отрицательна. Проводимость измерительных приборов считается равной единице

$$Y_{\mathcal{V}} = Y_{\mathcal{A}} = 1;$$

Δ_K - алгебраическое дополнение пути P_K . Вычисляется как определитель подграфа, получаемого из исходного графа после закорачивания пути P_K (когда передачи ребер - проводимости ветвей схемы);

q - число всех возможных прямых путей между указанными вершинами.

Таким образом, удалось обойти необходимость поиска 2-деревьев за счет использования топологических преобразований графа. С целью упрощения процедуры поиска деревьев графа предложен ряд способов разложения определителя непосредственно по графу: 1) разложение по двум вершинам; 2) разложение по одной вершине; 3) разложение по ребру. Алгоритмы названных разложений рассмотрим несколько позже.

Пример. Найдем по графу на рис. 4.6, а κ_{31} с помощью формулы Мэсона (4.4):

$$\kappa_{31} = U_3 / U_1 = \sum_{i=1}^q P_i \Delta_i / \Delta.$$

Определяем величины прямых путей из одной вершины 1 источника к другой его вершине 0, проходящих непременно через измерительный прибор (в данном случае вольтметр V):

$$P_1 = Y_a Y_c, \quad P_2 = Y_d.$$

Закорачиваем поочередно эти пути и определяем их дополнения:

$\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = Y_a + Y_b + Y_c$. В первом случае граф превратился в одну вершину, во втором - в параллельное соединение трех ребер Y_a , Y_b , Y_c . Как и в обычной электрической схеме параллельное соединение ветвей можно заменить одним ребром с проводимостью, равной сумме проводимостей этих ветвей. Для вычисления определителя закорачиваем входной источник напряжения U_1 , исключаем вольтметр. Граф преобразуется, как показано на рис. 4.6, г. Затем объединяем параллельные ребра и получаем граф, показанный на рис. 4.6, д. В нем три дерева:

$$\Delta = (Y_a + Y_b) Y_c + (Y_a + Y_b) (Y_d + Y_e) + Y_c (Y_d + Y_e).$$

И окончательно получим

$$\kappa_{31} = \frac{U_3}{U_1} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{Y_a Y_c \cdot 1 + Y_d (Y_a + Y_b + Y_c)}{(Y_a + Y_b) (Y_c + Y_d + Y_e) + Y_c (Y_d + Y_e)}.$$

А теперь рассмотрим определители элементарных графов на рис. 4.8. Определитель графа, состоящего из одной вершины (рис. 4.8, а), равен единице. Определитель несвязного графа, состоящего из двух и более изолированных частей (рис. 4.8, в), равен нулю. Определитель графа, состоящего из частей, объединенных в одной вершине (рис. 4.8, ж), равен произведению определителей этих частей.

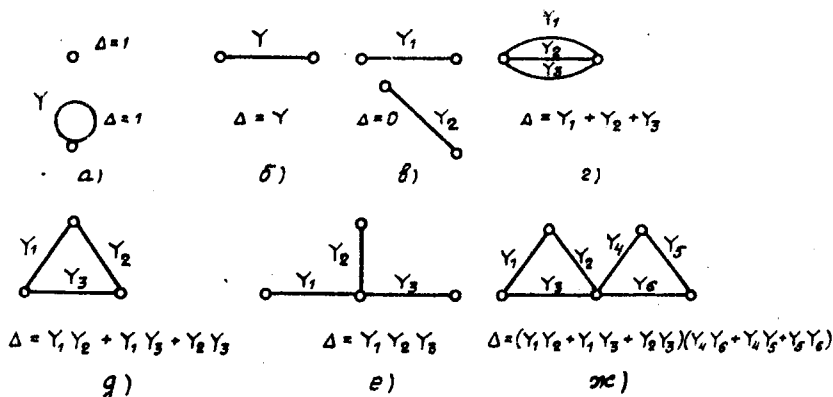


Рис. 4.8

4.2.3. Применение топологических формул в графе с унисторами

Здесь, очевидно, требуется учитывать направленность и другие свойства унисторов. На примере формулы Мезона покажем особенности ее применения в графе с унисторами:

- 1) перед вычислением числителя $\mathcal{N}$ топологической формулы ($\mathcal{N} = \sum_{\kappa=1}^{\mathcal{K}} P_{\kappa} \Delta_{\kappa}$) необходимо условно заземлить одну из вершин измерительно прибора;
- 2) величина пути или дерева считается равной нулю, если в их составе имеется унистор, направленный в сторону от условно заземленной вершины, т.е. учитываются только пути и деревья направленные в „корень“;

- 3) при вычислении определителя графа Δ (знаменатель топологической формулы) условно заземлять можно любую вершину. С целью упрощения графа рациональней заземлять вершину, которой инцидентно наибольшее число исходящих унисторов.

4.2.4. Способы разложения определителя графа

Разложение по двум вершинам.

1. Выбирают на графе (напомним, в графе закорочены все источники напряжения и разомкнуты источники тока) две любые вершины, одна из которых должна быть условно заземленной. Рациональней выбирать наиболее удаленные друг от друга вершины.
2. Определитель ищется посредством рассмотрения прямых путей между выбранными вершинами по формуле

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{q'} \rho'_\kappa \Delta'_\kappa, \quad (4.5)$$

где ρ'_κ - величина κ -го прямого между выбранными вершинами;

Δ'_κ - определитель подграфа, полученного из исходного после закорачивания κ -го пути;

q' - число всех возможных прямых путей между выбранными вершинами.

Пример 4.3. Найдем определитель для унисторного графа операционного усилителя (рис.4.9).

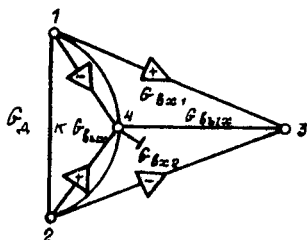


Рис. 4.9

- 1) выбираем вершину 2 для условного заземления;
- 2) упрощаем граф путем удаления унисторов $\kappa G_{вх1}$ и $\kappa G_{вх2}$ (рис. 4.10, а);

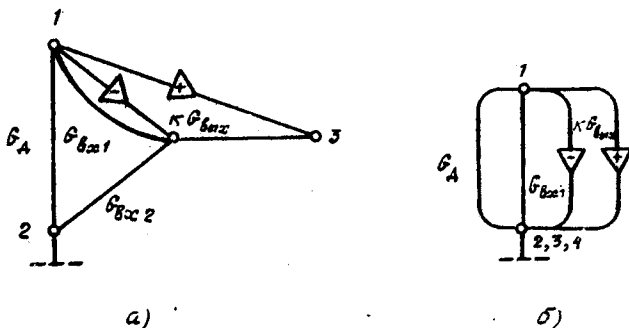


Рис. 4.10

- 3) выбираем вершины разложения 2 и 3 как наиболее удаленные друг от друга;
- 4) перебираем все прямые пути между вершинами 2 и 3

$$\rho'_1 = G_{bnx} G_{bx2}, \quad \rho'_2 = G_A G_{bx1} G_{bnx}$$

(пути через унисторы равны нулю, т.к. унисторы в них направлены в сторону от условно заземленной вершины);

- 5) закорачиваем путь ρ'_1 и получаем подграф, показанный на рис. 4.10,б; для него $\Delta'_1 = G_A + G_{bx1}$; при закорачивании второго пути граф превращается в одну вершину: $\Delta'_2 = 1$;
- 6) в результате получаем

$$\Delta = \rho'_1 \Delta'_1 + \rho'_2 \Delta'_2 = G_{bx2} G_{bnx} (G_A + G_{bx1}) + G_A G_{bx1} G_{bnx} \cdot 1.$$

Разложение по вершине.

1. Выбираем в графе вершину ρ . В ненаправленном графе любую, в графе с унисторами разложение ведется по условно заземленной вершине. В первом случае рационально выбрать вершину, которой инцидентно наибольшее число ребер. Во втором случае это еще и такая, от которой направлено наибольшее число унисторов.
2. Определитель ищется путем закорачивания одних и одновременно разрыва других ребер инцидентных выбранной вершине ρ по формуле

$$\Delta = \sum_i Y_i \Delta_i + \sum_{i \neq j} Y_i Y_j \Delta_{ij} + \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} Y_i Y_j Y_k \Delta_{ijk} + \dots, \quad (4.6)$$

где Y_i, Y_j, Y_κ - проводимости ребер (унисторов) инцидентных выбранной вершине ρ и соответственно вершинам $i, j, \kappa, \dots$;

Δ_i - определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребра Y_i и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине ρ ;

Δ_{ij} - определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребер Y_i и Y_j и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине ρ ;

$\Delta_{ij\kappa}$ - определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребер Y_i, Y_j, Y_κ и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине ρ и т.д.

Пример 4.4. Найдем определитель графа, приведенного на рис. 4.II, а.

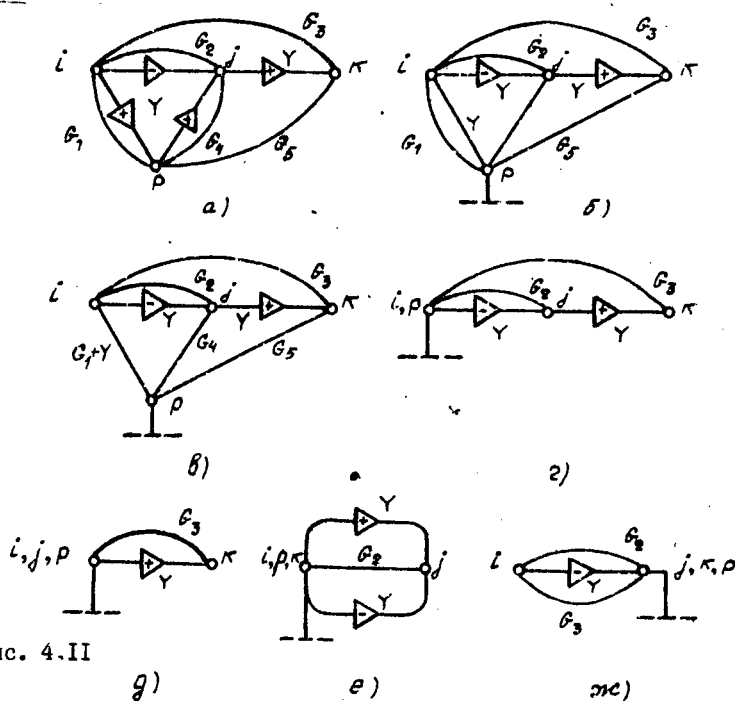


Рис. 4.II

- 1) выбираем вершину разложения ρ и условно заземляем ее (рис.4.II,б);
- 2) упрощаем граф (рис.4.II,б,в);
- 3) закорачиваем по одному ребру $\mathcal{C}_1 + \gamma$, удаляем одновременно ребра $\mathcal{C}_4$ и $\mathcal{C}_5$ (рис.4.II,г) и находим определитель полученного подграфа $\Delta_i = \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_3 \gamma$ ($\mathcal{C}_2 \gamma = 0$, т.к. унистор γ в этом дереве направлен в сторону от условно заземленной вершины ρ . i); при закорачивании $\mathcal{C}_4$ и затем $\mathcal{C}_5$ подграф получается того же вида (рис.4.II,г), однако $\Delta_j = \mathcal{C}_3(\mathcal{C}_2 - \gamma)$; $\Delta_k = \gamma(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 - \gamma) + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3$;
- 4) закорачиваем по два ребра: $\gamma + \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_4$, а $\mathcal{C}_5$ удаляем, получаем подграф на рис.4.II,д, его определитель $\Delta_{ij} = \mathcal{C}_3$; закорачиваем $\gamma + \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_5$, удаляем $\mathcal{C}_4$, находим $\Delta_{ik} = \gamma + \mathcal{C}_2$ (рис. 4.II,е); закорачиваем $\mathcal{C}_4$ и $\mathcal{C}_5$, удаляем $\gamma + \mathcal{C}_1$, находим $\Delta_{jk} = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 - \gamma$;
- 5) закорачиваем по три ребра: $\gamma + \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_4$ и $\mathcal{C}_5$, граф превращается в вершину, его определитель $\Delta_{ijk} = 1$;
- 6) поскольку вершине ρ инцидентны три ребра, переходим к записи определителя по формуле (4.8):

$$\Delta = [\mathcal{C}_4 \mathcal{C}_3 (\mathcal{C}_2 - \gamma) + \mathcal{C}_5 (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 - \gamma) \gamma + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3] (\gamma + \mathcal{C}_1) (\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_3 \gamma) + [(\gamma + \mathcal{C}_1) \mathcal{C}_4 \mathcal{C}_3 + (\gamma + \mathcal{C}_1) \mathcal{C}_5 (\gamma + \mathcal{C}_2) + \mathcal{C}_4 \mathcal{C}_5 (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 - \gamma)] + [(\gamma + \mathcal{C}_1) \mathcal{C}_4 \mathcal{C}_5 \cdot 1] .$$

Разложение определителя по ребру.

1. Выбираем в графе ребро, одна из вершин которого является условно заземленной.
2. Путем закорачивания и удаления этого ребра находят определитель по формуле

$$\Delta = \Delta_0 + \gamma_k \Delta_k, \quad (4.7)$$

где γ_k - проводимость выбранного ребра разложения;
 Δ_k - определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребра γ_k ;
 Δ_0 - определитель подграфа, получаемого после удаления ребра γ_k .

Настоящее разложение очень простое, но, как правило, его приходится применять к графу неоднократно (методом вложения).

Пример 4.5. Для графа, приведенного на рис.4.II,а найдем определитель разложением по ребру.

- 1) выбираем ребро разложения θ_4 , исходя из того, чтобы при его удалении граф максимально упростился (условно заземленный узел оставим тот же);
- 2) закорачиваем ребро θ_4 , полученный подграф показан на рис.4.12,а, найдем для него определитель

$$\Delta_{\theta_4} = (\theta_1 + \gamma - \gamma + \theta_2) \theta_5 + (\theta_1 + \gamma - \gamma + \theta_2) \theta_3 + \theta_5 \theta_3;$$
- 3) для поиска Δ_0 удаляем ребро θ_4 , получаем подграф, показанный на рис.4.12,б, но он не является элементарным, поэтому к нему применяем разложение по другому ребру, например $\theta_1 + \gamma$, тогда $\Delta_0 = \Delta'_0 + (\theta_1 + \gamma) \Delta'_{\theta_1 + \gamma};$
- 4) закорачиваем ребро $\theta_1 + \gamma$, получаем подграф, показанный на рис.4.12,в и находим $\Delta'_{\theta_1 + \gamma} = \theta_2 (\theta_3 + \theta_5) + (\theta_3 + \theta_5) \gamma;$
- 5) удаляем ребро $\theta_1 + \gamma$ и находим $\Delta'_0 = \theta_5 [\theta_3 \gamma + \gamma (\theta_2 - \gamma) + \theta_2 \theta_3];$
- 6) Записываем $\Delta_0 = \theta_5 [\theta_3 \gamma + \gamma (\theta_2 - \gamma) + \theta_2 \theta_3] + (\theta_1 + \gamma) \times$
 $\times [\theta_2 (\theta_3 + \theta_5) + \gamma (\theta_3 + \theta_5)];$
- 7) Записываем искомый определитель исходного графа

$$\Delta = (\Delta'_0 + (\theta_1 + \gamma) \Delta'_{\theta_1 + \gamma}) + \theta_4 \Delta_{\theta_4} = \theta_5 [\theta_3 \gamma + \gamma (\theta_2 - \gamma) + \theta_2 \theta_3] + (\theta_1 + \gamma) [\theta_2 (\theta_3 + \theta_5) + \gamma (\theta_3 + \theta_5)] + \theta_4 [(\theta_1 + \theta_2) (\theta_5 + \theta_3) + \theta_3 \theta_5].$$

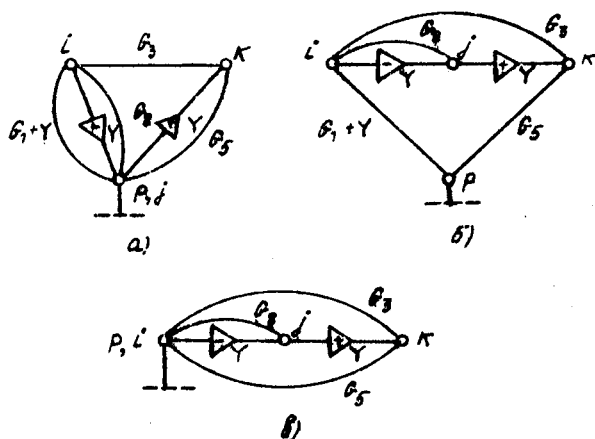


Рис. 4.12

4.2.5. Порядок анализа электронных схем методом унитарных (смешанных) графов

1. Постановка задачи анализа.
2. Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.
3. Составление топологической модели для анализа схемы по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.
4. Подбор наиболее подходящих по режиму работы и задачам анализа матриц проводимости или схем замещения электронных компонентов схемы. Составление по выбранным моделям унитарных графов электронных компонентов (или выбор из числа известных унитарных моделей).
5. Составление графа схемы с учетом унитарных моделей электронных компонентов.
6. Подключение к графу с учетом вида искомой схемной функции измерительного прибора и условное заземление одного из его зажимов (вершин).
7. Построение выражений для требуемых схемных функций по формуле Мэсона. Начинают с выбора направления тока в выходном ребре, поиске всех прямых путей от одной вершины источника сигнала к другой его вершине через измерительный прибор, затем вычисляются их дополнения. Последним этапом является вычисление (запись) определителя графа.
8. Построение частотных или временных характеристик.
9. Вычисление чувствительностей.
10. Анализ схемы на устойчивость и т.д.

Пример 4.6. Найти схемные функции $K_D = U_{\text{вых}} / E(p)$, $Y_{\text{пер}} = I_{\text{вых}} / E(p)$, $Y_{\text{вх}} = I_{\text{вх}} / E(p)$, $Z_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} / I_{\text{вх}}$ для схемы инвертирующего усилителя на операционном усилителе (ОУ), представленной на рис.4.13,а.

1. Составляем граф схемы, включая в него унитарную модель операционного усилителя из рис.4.9,б. На рис. 4.13,б показан получившийся при этом граф. Поскольку в схеме используется инвертирующее, а не дифференциальное включение ОУ, необходимо вершины 2 и 4 объединить. В результате получаем граф, показанный на рис.4.13,в. Упрощаем его, объединяя параллельные ребра (рис.4.13,г).

2. Включаем измерительные приборы V и A в соответствии с видом искомым схемных функций и условно заземляем сначала одну из вершин ("0") вольтметра V . Упрощаем граф путем удаления унистора - $\kappa \sigma_{\text{внх } 03}$, направленного от заземленной вершины, и объединения унистора - $\kappa \sigma_{\text{внх } 20}$ с параллельным ему ребром.
3. По полученному в результате этих действий графу на рис.4.13,д начинаем построение схемной функции K_U :

$$K_U = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{U_{\text{внх}}}{E(\rho)}$$

Путь начинается в вершине 1 и заканчивается в вершине 0

$$\rho_1 = \sigma_1 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}}), \quad q = 1.$$

После закорачивания ρ_1 граф стягивается в одну вершину

$$\Delta_1 = 1.$$

4. Вычисляем определитель после закорачивания источника $E(\rho)$ и удаления измерительных приборов (рис. 4.13,е, вершину условного заземления оставляем прежней):

$$\Delta = (\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} + \sigma_1 - \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) + (\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} + \sigma_1 - \kappa \sigma_{\text{внх}}) \sigma_2 + (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}}).$$

Тогда

$$K_U = \frac{\sigma_1 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}})}{(\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} + \sigma_1 - \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}} + \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}})}$$

Найдем $Y_{\text{пер}}$: $\rho_1 = \sigma_1 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}}) \sigma_3$, $q = 1$, $\Delta_1 = 1$.

Определитель тот же, тогда

$$Y_{\text{пер}} = \frac{\sigma_1 \sigma_3 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}})}{(\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} + \sigma_1 - \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}} + \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}})}$$

Для определения входной проводимости $Y_{\text{вх}}$ включаем амперметр последовательно с источником $E(\rho)$ (показан на рис.4.13,д).

Вершину условного заземления оставляем прежней. Тогда

$$\rho_1 = \sigma_1 (\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} - \kappa \sigma_{\text{внх}});$$

$$\rho_2 = \sigma_1 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}).$$

Закорачиваем ρ_1 , находим $\Delta_1 = \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}$, закорачиваем ρ_2 , находим $\Delta_2 = 1$. В результате (определитель тот же):

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\sigma_1 (\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} - \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) + \sigma_1 (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}})}{(\sigma_4 + \sigma_{\text{вх}1} + \sigma_1 - \kappa \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}} + \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_{\text{внх}}) (\sigma_2 + \kappa \sigma_{\text{внх}})}$$

Для определения выходного сопротивления схемы подключаем к выходному ребру дополнительный источник тока (показан штрихом), а источник напряжения на входе закорачиваем. Тогда $\rho_1 = 1$, т.к.

он проходит только через вольтметр, $\Delta_1 = G_1 + G_2 + G_{2x1} - \kappa G_{2nx} + \kappa G_{2nx} + G_2$.
 Определитель тот же, поскольку источник тока J при этом уда-
 ляем. В результате получим

$$\mathcal{Z}_{G_{2nx}} = \frac{1 (G_1 + G_2 + G_A + G_{2x1})}{(G_A + G_{2x1} + G_1 - \kappa G_{2nx})(G_3 + G_{2nx} + G_2) + (G_3 + G_{2nx})(G_2 + \kappa G_{2nx})}$$

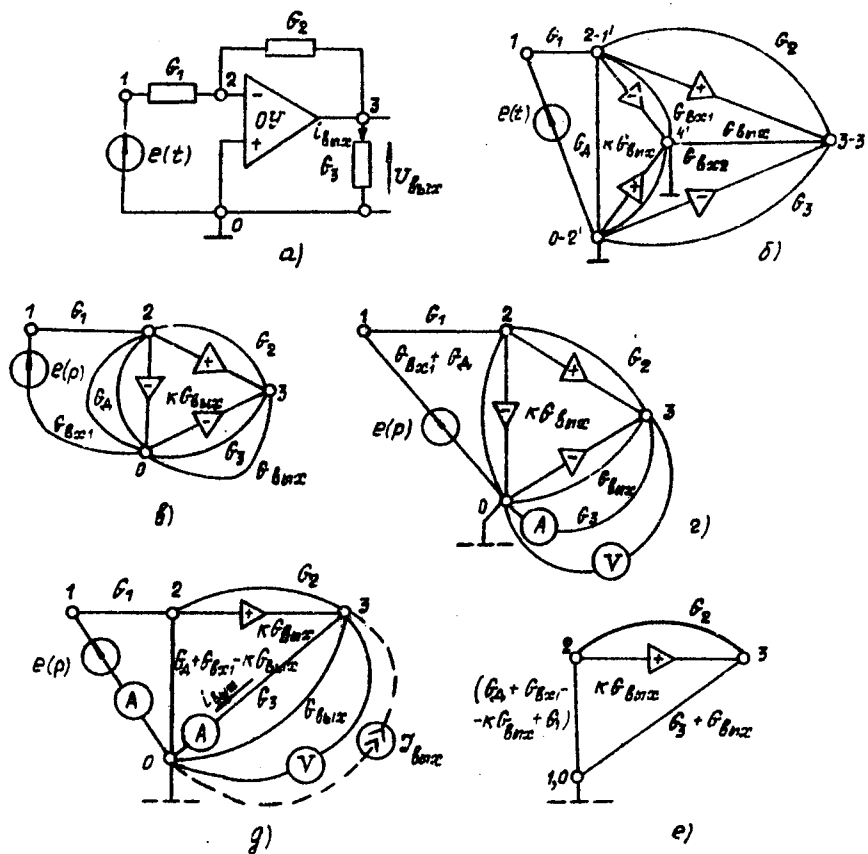


Рис. 4.13

Пример 4.7. Для схемы усилителя, представленной на рис.4.14,а (эквивалентная схема по переменному току), найти передачу по напряжению $K_v = U_{вых} / e(p)$.

1. Составляем граф схемы, включая в него унисторную модель транзистора.
2. Заземляем вершину 0 как один из зажимов вольтметра V . Удаляем унисторы, исходящие из нулевой вершины, объединяем параллельные ребра и получаем граф на рис. 4.14,в, готовый для проведения анализа.
3. Приступаем к построению схемной функции, начиная с определения прямых путей из вершины 1 в вершину 0 через вольтметр V :

$$P_1 = g_1 (-g'_{21} + g'_{12} - g'_{12}) (-g'_{21} + g'_{12} - g'_{12}) = g_1 g'_{21} g'_{12} - \text{вершины } 1, 2, 3, 5, 0;$$

$$P_2 = g_1 (-g'_{21}) (g'_{12} + g'_{22}) g_0 - 1, 2, 3, 4, 5, 0;$$

$$P_3 = g_1 (g'_{11} + g'_{21}) (g'_{21} - g'_{12} + g'_{12} + g'_{22}) (-g'_{21} + g'_{12} - g'_{12}) = -g_1 (g'_{11} + g'_{21}) (g'_{21} + g'_{22}) g'_{21} - 1, 2, 4, 3, 5, 0;$$

$$P_4 = g_1 (g'_{11} + g'_{21}) g_0 - 1, 2, 4, 5, 0.$$

Унисторы, направленные в сторону от условно заземленной вершины, не включаем в пути P_2 (унистор между вершинами 43), P_3 , P_4 (унистор 42). Закорачивая пути, определяем их дополнения

$$\Delta_1 = g_2 + g'_{11} + g'_{12} + g'_{21} + g'_{22} + G_0$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1$$

(подграф на рис.4.14,г)

$$\Delta_4 = g'_{22} + g'_{12} - g'_{12} + g'_{11} + g'_{21} + g_3 - g'_{12} - g'_{21} + g'_{12} = g'_{22} + g'_{11} + g_3.$$

4. Приступаем к вычислению определителя Δ . Закорачиваем источник напряжения $e(p)$. Выбираем в качестве условно заземленной другую вершину 3, т.к. граф при этом заметней упрощается (остается только два унистора - рис.4.14,е). Ради сокращения последующих записей введем однобуквенные обозначения проводимостей ребер графа и изобразим его без пересечения ребер, как показано на рис.4.14,ж. Начнем, поскольку граф довольно сложный, с разложения по двум вершинам $\Delta = \sum_k P'_k \Delta'_k$. Выбираем вершины: 3 (условно заземленная) и 2. Запишем величины всех прямых путей между ними P'_k : $P'_1 = -d$; $P'_2 = cd$, $P'_3 = ctk$, $P'_4 = cb(l+y'')k$, $P'_5 = ek$, $P'_6 = emg$, $P'_7 = elbg$,

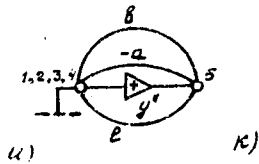
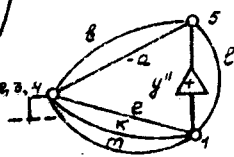
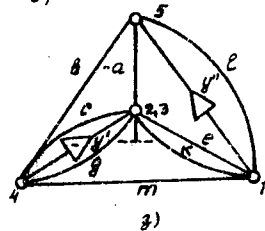
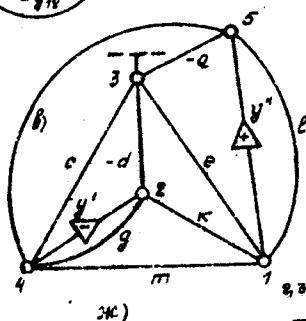
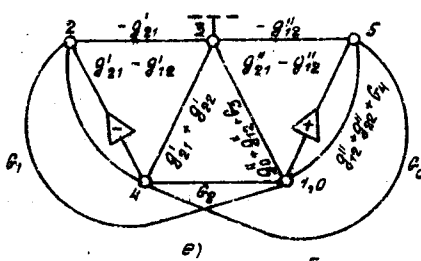
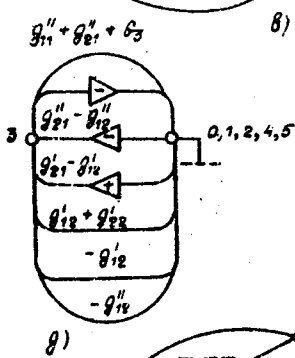
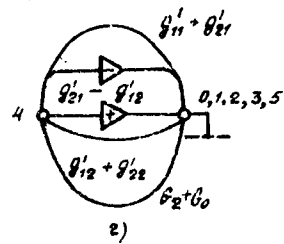
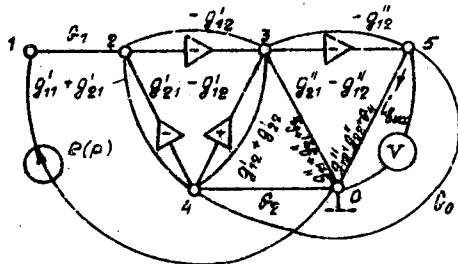
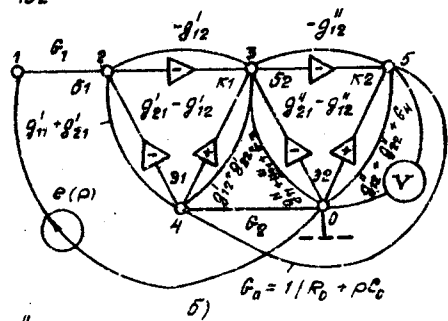
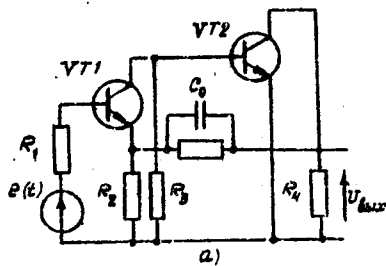


Рис. 4, I4

$$\rho'_8 = -\alpha(y'' + \ell)\kappa, \quad \rho'_9 = -\alpha(y'' + \ell)mg, \quad \rho'_{10} = -abg,$$

$$\rho'_{11} = -ab\tau\kappa.$$

Переходим к записи дополнений этих путей Δ'_κ . После закорачивания пути ρ'_1 получаем подграф, показанный на рис.4.14,з. Он также не является элементарным, поэтому применим разложение по одной условно заземленной вершине 3,2: $\Delta'_1 = [-a\Delta_a + (c+g-y')\Delta_{cgy} + (\kappa+e)\Delta_{\kappa e}] + [-a(c+g-y')\Delta_a(cgy) - a(\kappa+e)\Delta_a(\kappa e) + (c+g-y')(\kappa+e)\Delta_{cgy}(\kappa e)] + [-a(c+g-y')(\kappa+e)\Delta_a(cgy)(\kappa e)] = -a[\bar{b}(\ell+y'') + \bar{m} + m(y'' + \ell) + (c+g-y')[(\bar{b} + \ell)m + \bar{b}(y'' + \ell)] + (\kappa+e)[\bar{b}(\bar{m} + \ell) + m\bar{\ell}] - a(c+g-y')(m+y'' + \ell) - a(\kappa+e)(\bar{b} + m) + (c+g-y')(\kappa+e)(\bar{b} + \ell - a)]$. Далее находим Δ'_2 , закорачивая соответственно путь ρ'_2 (подграф показан на рис.4.14,и):

$$\Delta'_2 = (\bar{b} - a)(\bar{m} + \kappa + e) + (\bar{b} - a)(y'' + \ell) + (\bar{m} + \kappa + e)\bar{\ell}.$$

После закорачивания пути ρ'_3 получаем подграф, показанный на рис.4.14,к

$$\Delta'_3 = \bar{b} - a + \bar{\ell},$$

и далее закорачиваем путь ρ'_4 , граф преобразуется в одну вершину

$$\Delta'_4 = 1$$

Закорачиваем путь ρ'_5 , граф преобразуется в трехвершинный аналогично рис.4.14,и: $\Delta'_5 = \bar{b}(c+g-y'' + m) + \bar{b}(\bar{\ell} - a) + (c+g-y'' + m)(\bar{\ell} - a)$,

$$\Delta'_6 = \bar{b} - a + \bar{\ell}, \quad \Delta'_7 = 1, \quad \Delta'_8 = \bar{b} + c + g - y'' + m, \quad \Delta'_9 = 1,$$

$$\Delta'_{10} = m + \kappa + e + y'' + \bar{\ell}, \quad \Delta'_{11} = 1.$$

В результате $\Delta = \sum_{\kappa} \rho'_\kappa \Delta'_\kappa = -d\{-a[\bar{b}(\ell+y'' + m) + m(y'' + \bar{\ell})] + (\bar{\ell} + g - y')[\bar{b}(m + y'' + \bar{\ell}) + m\bar{\ell}] + (\kappa+e)[\bar{b}(\bar{m} + \bar{\ell}) + m\bar{\ell}] - a(c+g-y')(\bar{m} + y'' + \bar{\ell}) - a(\kappa+e)(\bar{b} + m) + (c+g-y')(\kappa+e)(\bar{b} + \bar{\ell}) - a(c+g-y')(\kappa+e)] + cg[(\bar{b} - a)(\bar{m} + \kappa + e + y'' + \bar{\ell}) + \bar{\ell}(\bar{m} + \kappa + e)] + \epsilon\tau\kappa(\bar{b} - a + \bar{\ell}) + c\bar{b}(\bar{\ell} + y'')\kappa + 1 + \epsilon\kappa[(c+g-y'' + m) + (\bar{b} + \bar{\ell} - a) + \bar{b}(\bar{\ell} - a)] + \epsilon\tau g(\bar{b} - a + \bar{\ell}) + \bar{\ell}\bar{b}g \cdot 1 - a(y'' + \bar{\ell})\kappa(\bar{b} + c + g - y'' + m) - a(y'' + \bar{\ell})\tau g \cdot 1 - abg(\bar{m} + \kappa + e + y'' + \bar{\ell}) - ab\tau\kappa \cdot 1$.

Запишем окончательное выражение для κ_σ , делая обратную подстановку и преобразовывая полученные ранее выражения для числителя и знаменателя схемной функции:

$$\kappa_\sigma = \sum_{\kappa} \rho'_\kappa \Delta'_\kappa / \Delta = G_1 \frac{g'_{21} g'_{21} (G_2 + g'_{11} + g'_{12} + g'_{21} + g'_{22}) - G_2 g'_{21} (g'_{12} + g'_{22}) - (g'_{11} + g'_{21})(g'_{21} + g'_{22})g'_{21} + G_2 (g'_{11} + g'_{21})(g'_{22} + g'_{11} + G_3)}{g'_{21} [-g'_{12} (g'_{22} + g'_{21} + G_4 + G_2) (G_2 + g'_{21} + g'_{22} + g'_{11} + g'_{12}) + g'_{21} (g'_{21} + g'_{22})g'_{21} + G_2 (g'_{11} + g'_{21})(g'_{22} + g'_{11} + G_3) + G_2 (g'_{22} + g'_{21} + G_4) + (G_1 + g'_{11} + g'_{12} + G_3) (G_2 + G_2 + g'_{21} + G_3) (G_2 + G_2 + g'_{21} + g'_{22} + g'_{11} + g'_{12})] +$$

$$\begin{aligned}
 & (g'_{21} + g'_{22} + g''_{11} + g''_{12}) [C_0 (C_2 + g''_{22} + g''_{21} + C_4) + C_2 (g''_{12} + g''_{22} + C_4) + (C_1 + g''_{11} + g''_{12} + C_3) (C_0 + \\
 & + g''_{12} + g''_{22} + C_4)] + (C_1 + g''_{11} + g''_{12} + C_3) [C_0 (C_2 + g''_{12} + g''_{22} + C_4) + C_2 (g''_{12} + g''_{22} + \\
 & + C_4)] + (g'_{21} + g'_{22}) \{ (g'_{11} + g'_{21}) [(C_0 - g'_{12}) (C_2 + C_1 + g''_{11} + g''_{12} + C_3 + g''_{22} + g''_{21} + \\
 & + C_4) + (g''_{12} + g''_{22} + C_4) (C_2 + C_1 + g''_{11} + g''_{12} + C_3)] + C_1 [C_2 (C_0 - g'_{12} + g''_{12} + \\
 & + g''_{22} + C_4) + C_0 (g''_{22} + g''_{21} + C_4)] \} + (g''_{11} + g''_{12} + C_3) \{ (g'_{21} + g'_{22} + g''_{11} + g'_{12} + \\
 & + C_2) (C_0 + g''_{22} + C_4) + C_0 (g''_{22} + C_4) + C_2 (g'_{11} + g'_{21}) (C_0 + g''_{22} + C_4) + \\
 & + C_0 (g'_{11} + g'_{21}) (g''_{12} + g''_{22} + C_4) \} - g''_{12} \{ (g''_{22} + C_4 + g''_{21}) [C_4 (C_0 + g'_{21} + g'_{22} + \\
 & + g'_{11} + g'_{12} + C_2) + C_2 (g'_{11} + g'_{21})] + C_0 [(g'_{11} + g'_{21}) (C_2 + C_1 + g''_{11} + g''_{12} + \\
 & + C_3 + g''_{22} + g''_{21} + C_4) + C_2 C_1] \}
 \end{aligned}$$

Получившееся выражение, как видим, довольно сложное. Оно с трудом поддается анализу и годится только для численных расчетов (построения частотных и временных характеристик и т.д.). Необходимо проявить выдержку, известную изобретательность и хорошее понимание задачи анализа, чтобы правильно упростить получившееся выражение для τ_{ν} . Например, во многих задачах анализа и расчета вполне допустимо пренебречь обратной связью в самих транзисторах (эффект Эрли), т.е. считать $g'_{12} = 0$, в некоторых случаях пренебрегают входным сопротивлением транзистора. Так, при подстановке в полученное выражение для τ_{ν} $g'_{12} = g''_{12} = 0$ оно заметно сокращается. Однако рациональнее подобные упрощающие допущения делать вначале при составлении топологическо-математической модели схемы. Тогда граф упрощается и легче осуществлять перебор всех путей и деревьев.

Из приведенных примеров видно, что с усложнением схем довольно быстро выражения схемных функций, а следовательно, временных и частотных характеристик, становятся недоступными для аналитического обозрения. Найти приемлемые их упрощения становится проблематичным и не всегда возможным за ограниченное время. В этой связи в последнее время одним из мощных средств решения задач анализа и расчета считается применение ЭВМ. Поскольку метод уни-

сторных (смешанных) графов является принципиально минимальным, его и следует положить в основу машинного анализа (расчета) линейных (квазилинейных) электронных схем. При этом будет достигаться экономия машинного времени, являющегося одним из основных критериев оптимальности программного обеспечения анализа и расчета сложных электронных схем. В то же время топологическая модель схемы и топологические методы ее анализа не отвечают другому столь же важному критерию оптимальности, а именно языковой совместимости математической модели с ЭВМ. В этой связи на базе рассмотренных графов разработаны методы, основанные на теоретико-множественных моделях схем [19,20].

4.2.6. Метод структурных чисел

Приспособить топологические формулы передачи для эффективной их машинной обработки в символьном виде, значит применять кодирование элементов схемы или ее графа (топологической модели) числами. Например, запись $Y(i, j, n, a) = 2165$ означает: i - номер 2 вершины исхода ветви или ребра; j - номер 1 вершины захода ветви (ребра); n - порядковый номер 6 ветви схемы (ребра); a - проводимость 5 ребра (нормированное значение).

В основе метода лежит математический аппарат теории множеств. При этом схема или ее граф представляются совокупностью неупорядоченных или частично упорядоченных множеств. В качестве последних принимают так называемые базисные подграфы $\beta_i(W_i)$, образованные матрицами Y, Z , а также звездными или контурными таблицами графа. Элементами множества Ω базисного подграфа являются коды ребер, входящих в него:

$$\beta_{36}(\alpha) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn-1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Например, для графа на рис.4.6,а множества ребер подграфов звезд при высе общей вершины "0" составляются произвольным перечислением кодов ребер, инцидентных i -й вершине и записываются в виде таблицы базисных звезд (частично упорядоченное множество) или в виде однострочных звездных сомножителей (для ввода в ЭВМ):

$$\beta_{36}(y) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{a1} & y_a & y_d \\ y_b & y_a & y_c \\ y_e & y_d & y_c \end{bmatrix}$$

или $\beta_{33}(y) = [\Omega_1] [\Omega_2] [\Omega_3] = [10, 12, 13], [20, 21, 23], [30, 31, 32]$.

Таковы исходные математические модели схемы (графа) в теоретико-множественном представлении.

Разработанная С.Беллертом и Г.Возняки алгебра структурных чисел основана на введенном ими понятии структурного числа. Возь-
мем неупорядоченную систему множеств $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, в которой

$$a_i \neq a_j, \quad (i \neq j), \quad (4.9a)$$

причем, в свою очередь, a_k представляет собой неупорядоченное множество элементов α_{ik} :

$$a_k = [\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}], \quad \alpha_{ik} \neq \alpha_{jk}, \quad (i \neq j). \quad (4.9b)$$

Удобно изобразить структурное число A в виде таблицы, состоящей из столбцов a_k :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

Столбцы считаются равными, если они содержат одинаковые элементы одного множества. Структурным числом называется система элементов α_{ik} вида (4.9b) с учетом (4.9a) и (4.9b), удовлетворяющая следующим определениям:

- структурное число не содержит одинаковых столбцов (множеств a_k);
- два структурных числа равны, если содержат только одинаковые столбцы, независимо от порядков элементов в столбцах и порядка расположения самих столбцов;
- суммой структурных чисел является структурное число, содержащее все столбцы суммируемых чисел кроме одинаковых

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

- произведением структурных чисел A и B является структурное число C , столбцы которого представляют собой все возможные комбинации столбцов A и B , за исключением наибольшего четного числа одинаковых столбцов и столбцов с повторяющимися элементами

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве элементов множества каждого столбца a_k принять веса ребер соответствующего дерева графа G , тогда топологическим изображением структурного числа будет граф G .

Структурное число A с одинаковым $n-1$ числом элементов в столбцах получается из графа G с вершинами $W_1, W_2, \dots, W_n$ путем перемножения по $\text{mod } 2$ $n-1$ простых однострочных сомножителей (вершинных множеств или звезд графа) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$,

$$A[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}]_{\text{mod } 2}, \quad (4.10)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$ составляются из значений весов ребер, инцидентных вершинам $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$ (одна из вершин выбирается в качестве базисной). Так, для ненаправленного графа на рис. 4.15, а

$$\Omega_1 = [a, b, c] = [10, 12, 13], \quad \Omega_2 = [g, b, d] = [20, 21, 23], \\ \Omega_3 = [e, c, d] = [30, 31, 32],$$

$$A_{\rho-1} = [\Omega_1][\Omega_2][\Omega_3]_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 \end{bmatrix}_{\text{mod } 2} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 23 & 23 & 20 & 20 & 20 & 23 & 23 & 20 & 20 & 21 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 32 & 30 & 32 & 30 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a & a & a & b & b & b & b & c & c & c & c \\ g & g & g & b & b & b & a & a & g & g & g & d & g & g & b & d \\ e & c & d & e & c & d & e & c & e & c & d & e & e & c & d & e \end{bmatrix},$$

где $[\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3] = \beta_{38}$ - звездная матрица графа.

Операция перемножения по $\text{mod } 2$ в данном случае соответствует составлению столбцов из элементов, взятых по одному из каждого однострочного сомножителя Ω_i . При этом согласно операции над полем $\text{mod } 2$ исключаются столбцы, содержащие одинаковые элементы (a_{ik} и $a_{\pi k}$), а также столбцы - дубликации (повторяющиеся четное число раз) с одинаковым набором элементов независимо от порядка их расположения в столбце.

Топологическое представление структурного числа неоднозначно, что позволит в задачах синтеза организовать поиск оптимальной топологии схемы. В то же время для заданного графа G существует только одно его структурное число A_G .

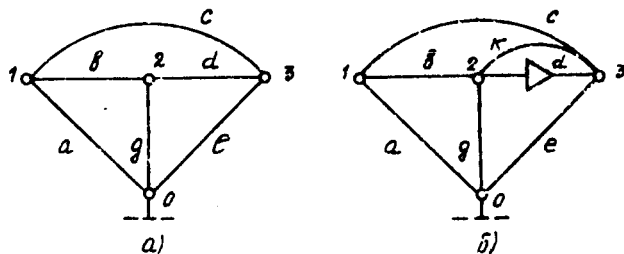


Рис. 4.15

вующий номеру звезды 52 и т.д.

Процедура поиска путей из корня. Среди вторых j' -х индексов элементов столбца ищутся сначала нулевые. Если их нет — это не дерево и столбец из структурного числа исключается [21]. При обнаружении элементов с нулевым индексом j' необходимо запомнить их первые ($i - e$) индексы, а сами элементы исключить из рассмотрения. Затем запомненные индексы исключенных элементов сравниваются со вторыми ($j' - и$) индексами оставшихся элементов столбца. Если найдутся элемент с искомыми индексами, то теперь их первые ($i - e$) индексы запоминаются (а сами элементы исключаются) и сравниваются со вторыми ($j' - и$) индексами оставшихся элементов. Процедура поиска путей продолжается до тех пор, пока все элементы столбца не будут исключены из рассмотрения. Тогда этот столбец соответствует дереву, т.к. имеются пути из корня во все вершины. Если число оставшихся элементов отлично от нуля, то данный столбец не соответствует дереву и его исключают из структурного числа. Два оставшихся элемента образуют дубликацию типа $i j'$ и $j' i$ (12 и 21), три и более соответствуют ребрам, образующим цикл (контур). Например: для столбца [10, 23, 31, 43] порядок исключения таков: $10 \rightarrow 31 \rightarrow 23 \rightarrow 43$, $n_{det} = 0$; для столбца [13, 20, 34, 41], $n_{det} = 3$.

Алгебраические дополнения Δ_{ab} , $\Delta_{a'b'}$, Δ_{ab} , Δ_{aa} и др. можно получить, как и раньше, через сумму соответствующих 2-деревьев (формулы 4.3). Поскольку 2-дерево содержит $l-2$ элемента, необходимо построить структурное $l-2$ число — A_{l-2} и определять алгебраические дополнения через детерминанты соответствующих структурных чисел:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{aa} &= \det A_{l-2; a, 0}, \\ \Delta_{ab} &= \det A_{l-2, ab, 0}, \\ \Delta_{(a+a')(b+b')} &= \det A_{l-2, ab, a'b'} \end{aligned} \right\} \quad (4.12) \quad \text{и т.д.}$$

Для получения A_{l-2} необходимо отобрать такие столбцы из A_{l-1} , исключение из которых одного элемента достаточно, чтобы разорвать пути из a в a' или из b в b' .

По Мэзону операция нахождения суммы 2-деревьев, определяющей алгебраическое дополнение, сводится к нахождению путей от вершин источника к вершинам измерительного прибора согласно правилу разложения определителя графа на пути $\Delta = \sum_{\kappa=1}^m \rho_{\kappa} \cdot \Delta'_{\kappa} = \det A_{l-1}$ независимо от выбранной пары вершин, между которыми ищутся пути ρ_{κ} . Это означает, что каждый столбец в A_{l-1} содержит путь между любыми интересующими нас вершинами. Задача, таким образом,

состоит в выборе нужных путей - столбцов. Пусть источник включен между вершинами a и a' , а измерительный прибор - между вершинами b и b' . Для вычисления $\Delta_{(a,a')(b,b')} = \sum_{i=1}^m \alpha_{(a,b,a',b'),i}$ необходимо выбрать в структурном числе $A_{\nu-1}$ столбцы, содержащие пути из вершины a в a' и проходящие через вершины b и b' . Можно для этой цели предложить несколько алгоритмов. Рассмотрим один из них. Выделим в $A_{\nu-1}$ столбцы, содержащие пути между вершинами источника a и a' . При этом исключаем из рассмотрения столбцы, содержащие элементы $\alpha_{aa'}$ (путь через ребро aa' нас не интересует, т.к. заведомо не включает ребро bb') и столбцы, не содержащие элемента $\alpha_{bb'}$. Тогда оставшиеся $\nu-2$ столбца будут содержать либо искомые пути, либо пути, непроходящие через вершины b и b' (при этом элемент $\alpha_{bb'}$ входит в дополнение пути). Для отбора нужных столбцов необходимо провести анализ индексов элементов на наличие пути из a в b (или b') и из a' в b' (или b). Если в столбце путь обнаружен из a в b и из a' в b' , то этот столбец образует положительный член детерминанты $A_{\nu-2}$, если путь проходит из a в b' и из a' в b , то столбец образует отрицательный член детерминанты $A_{\nu-2}$.

Пример 4.8. Составим выражение для суммарного алгебраического дополнения $\Delta_{(a,a')(b,b')}$ по графу, приведенному на рис. 4.16, а. Согласно правилу Мэсона для графа с унитарными условно заземлим одну из вершин измерительного прибора V . В нашем примере $a=1$, $a'=4$, $b=3$, $b'=0$. Значит по формулам (4.12) $\Delta_{(a,a')(b,b')} = \Delta_{(1+4)(3+0)} = \Delta_{(1+4)3} = \det A_{\nu-2, 13, 40}$. Составим звездную матрицу исхода графа

$$\bar{\beta}_{3b \nu-1} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 20 & 21 & \bar{23} \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 41 & 43 \end{bmatrix},$$

где $\bar{23} = 23 + \bar{23}$.

Для сокращения записи и экономии использования объема памяти ЭВМ обычно стараются описывать выше манипуляции со столбцами структурного $\nu-1$ числа перенести на звездную матрицу $\beta_{3b \nu-1}$, тогда не нужно хранить в памяти все столбцы $A_{\nu-1}$. Чтобы не было столбцов, содержащих $\alpha_{aa'}$, т.е. код 14, вычеркиваем его из матрицы. Чтобы не было столбцов, не содержащих $\alpha_{bb'}$, т.е.

код 30, вычеркиваем все элементы в третьей строке. В результате переходим к укороченной звездной матрице

$$\bar{A}_{\bar{\nu}-2; 14,30} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & \cancel{14} \\ 20 & 21 & 23 \\ \cancel{30} & \cancel{31} & \cancel{32} & \cancel{34} \\ 40 & \cancel{41} & 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 40 & 43 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_{\bar{\nu}-2} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 40 & 43 \end{bmatrix} \bmod 2 = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & 23 & 23 & 20 & 20 & 21 & 21 & 23 & 23 \\ 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 \end{bmatrix}$$

Анализируем первый столбец: $12 \rightarrow 20$, 40 (нет пути из 4 в 3); второй столбец: $12 \rightarrow 20$, $4 \rightarrow 3$ (есть путь из 1 в 0 и из 4 в 3, знак отрицательный); третий столбец: $12 \rightarrow 23$, $4 \rightarrow 0$ (искомые пути также есть, знак положительный) и т.д. В результате получаем всего пять столбцов, содержащих искомые пути из 1 в 4 через вершины 3 и 0, включающие в том числе унитары, направленные в сторону условно заземленной (нулевой) вершины

$$\bar{A}_{\bar{\nu}-2; 13,40} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 23 & 20 & 21 & 23 \\ 43 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

и окончательно $\Delta_{(1+4)2} = \det \bar{A}_{\bar{\nu}-2; 13,40} = -Y_{12} Y_{20} Y_{43} + Y_{12} Y_{23} \times$
 $\times Y_{40} + Y_{13} Y_{20} Y_{40} + Y_{13} Y_{21} Y_{40} + Y_{13} Y_{23} \cdot Y_{40} = a(-ed + (b+c)n) +$
 $+ gn(e + a + b + c)$

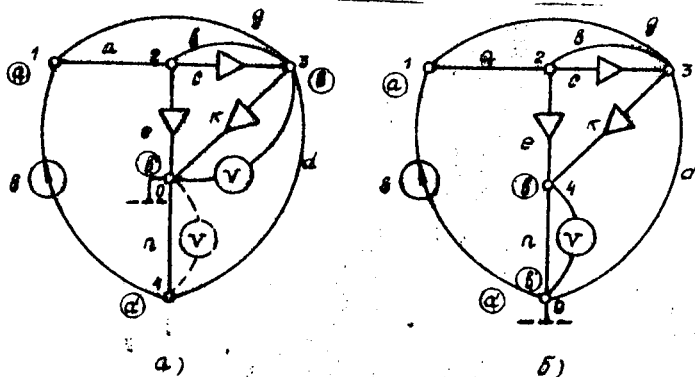


Рис. 4.16

Можно отбор столбцов вести, используя свойства 2-деревьев, запрещающее пути между вершинами, указанными в искомом алгебраическом дополнении (в индексах 2-дерева). Для нашего примера не должно быть в столбцах - претендентах пути из I в 4.

В ручных методах эта задача решается достаточно просто путем последовательного сравнения индексов i, j элементов столбца, в результате чего выясняется имеется ли запрещенный путь между вершинами a и a' .

Рассмотрим машинный алгоритм поиска запретного пути из I в 4. Выделим первый столбец из $A_{\nu-2}$, полученный в нашем примере: 12, 20, 40. Обращаясь к коду первого элемента 12, выделяем его второй индекс 2 и ищем его среди индексов кодов других элементов столбца. Во втором элементе 20 выделяем его второй индекс 0 и ищем его среди индексов кодов остальных элементов 40. Если вычеркнуть все повторяющиеся индексы, то останутся индексы начала и конца пути. В данном примере это I и 4: $12, 20, 40 = 14$; для второго столбца: $12, 20, 43 = 10, 43$, как видно, здесь уже нет пути из I в 4; для восьмого столбца: $16, 21, 43 = 14, 21$ и т.д. Необходимым, но недостаточным признаком прохождения путей через измерительный прибор в анализируемых столбцах структурного $\nu-2$ числа является наличие хотя бы двух элементов, соответствующих кодам ребер, инцидентных вершинам δ и δ' , к которым прибор подключен. В столбце, соответствующем 2-дереву $d_{13,40}$, должен быть хотя бы один из элементов с индексом 3: 13, $23 + 25, 43$ и хотя бы один из элементов с индексом 0: 20, 40. В этом легко убедиться, анализируя столбцы $A_{\nu-2}$, $A_{\nu-2,13,40}$ рассмотренного примера. Использование указанного признака существенно сокращает число столбцов, проверяемых на наличие заданных путей.

По виду структурного числа $A_{\nu-2,13,40}$ легко сформулировать простое правило определения знака произведения элементов каждого столбца по очередности расположения в них элементов с индексами δ и δ' (3 и 0) при условии, что $a < \delta$, a' и $\delta' = 0$. Если первым сверху встречается элемент с индексом 3, а затем с индексом 0, то это означает, что путь P_k проходит через измерительный прибор в направлении от вершины δ к δ' (от 3 к 0) и произведение элементов этого столбца следует брать со знаком плюс. Если первым сверху встречается элемент с индексом $\delta'(0)$, а затем с индексом $\delta(3)$, то это

означает, что путь проходит в обратном направлении от δ' к δ (от 0 к 3) и произведение элементов этого столбца берется со знаком минус. Для того же графа на рис.4.16,а найдем Δ_{ab} относительно ребра π (вольтметр V , показан штрихом). У входного и выходного ребер здесь уже имеется общая вершина. Перерисуем граф (рис.4.16,б), сменив условно заземленную вершину, тогда $\Delta_{ab} = \Delta_{14} = \sum_{i=1}^m d_{(14,0)} i$ и знак у всех 2-деревьев положителен. В качестве исходной модели графа берем также звездную матрицу исхода $\beta_{\delta\delta} v$, вычеркивая из нее элемент кода ребра источника I0 и строку 4, соответствующую незаземленной вершине измерительного прибора

$$\beta_{\delta\delta v-2; 14,0} = \begin{bmatrix} \cancel{12} & 12 & 13 \\ 21 & \cancel{23} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ \cancel{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 21 & \cancel{23} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{v-2} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 21 & \cancel{23} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cancel{12} 12 12 12 12 12 13 13 13 13 13 13 13 \\ 23 \cancel{23} 23 24 24 24 24 21 21 21 23 \cancel{23} 24 24 24 \\ 30 31 34 30 31 32 34 30 32 34 30 34 30 32 34 \end{bmatrix}_{mod 2}.$$

Из столбцов полученного структурного $v-2$ числа удалим дубликации, не являющиеся деревьями (2-й и 9-й столбцы), а также столбцы, в которых нет элементов 24 и 34, т.е. нет пути через ребра инцидентные 4-й вершине вольтметра V . Из оставшихся столбцов удаляем те, в которых обнаружено наличие запрещенного пути из I в 0 (восьмой столбец) и оставляем те, в которых есть путь из I в 4.

$$\bar{A}_{v-2; 14,0} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ \cancel{23} & 24 & 24 & 24 & 24 & 21 & \cancel{23} & 24 & 24 & 24 \\ 34 & 30 & 31 & 32 & 34 & 34 & 34 & 30 & 32 & 34 \end{bmatrix}$$

Все столбцы $\bar{A}_{v-2; 14,0}$, таким образом, являются 2-деревьями $d_{14,0}$, они содержат в себе путь из I в 4. В результате

$$\Delta_{14} = \sum_{i=1}^m \bar{a}_{(14,0)} i = \det \bar{A}_{v-2; 14,0} = y_{12} y_{23} \cdot y_{34} + y_{12} y_{24} y_{30} + y_{12} y_{24} y_{31} + y_{12} y_{24} y_{32} + y_{12} y_{24} y_{34} + y_{13} y_{21} y_{34} + y_{13} y_{23} \cdot y_{34} + y_{13} y_{24} y_{32} + y_{13} y_{24} y_{34} = a[(b+c)\kappa + e(d+g+\kappa+\delta)] + g[a\kappa + (b+c)\kappa + e\delta + e\kappa].$$

Найдем для того же примера симметричное дополнение $\Delta_{aa} = \Delta_{11}$.
По формуле (4.3a)

$$\Delta_{aa} = \sum_{i=1}^m \bar{d}_{(a,0)i} = \det \bar{A}_{\nu-2; a,0}$$

Структурное $\nu-2$ число также получаем из звездной матрицы исхода, в которой вычеркнута строка a (строка с элементом $a0$ (10)):

$$\bar{A}_{\nu-2} = \begin{bmatrix} \overline{10} & \overline{12} & \overline{13} \\ 21 & 2\bar{3} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 2\bar{3} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_{\nu-2} = \begin{bmatrix} 21 & 2\bar{3} & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 \end{bmatrix} \underset{\text{mod } 2}{=} \begin{bmatrix} 21 & 21 & 21 & 21 & 2\bar{3} & 2\bar{3} & 2\bar{3} & 24 & 24 & 24 & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 & 30 & 31 & 34 & 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

При вычислении симметричных дополнений типа Δ_{aa} , Δ_{gg} не используется процедура дополнительного анализа столбцов структурного $\nu-2$ числа, т.е. $\bar{A}_{\nu-2,1,0} = \bar{A}_{\nu-2}$, т.к. здесь берутся все деревья, не содержащие путь из 1 в 0. В результате получаем:

$$\Delta_{11} = \det \bar{A}_{\nu-2,1,0} = n[a(d+g+b+n) + (b+c)(d+g+\kappa) + e(g+b+d+\kappa)]$$

Основываясь на рассмотренных способах вычисления определителя графа и его алгебраических дополнений составим теоретико-множественную формулу определения схемной функции

$$F = \frac{\det A_{\nu-2}}{\det A_{\nu-1}} \quad (4.13)$$

для передаточных функций

$$F_{ab,0} = \frac{x_1}{x_a} = \frac{\det A_{\nu-2; ab,0}}{\det A_{\nu-1; a,0}} \quad (4.14a)$$

или

$$F_{ab,a'b'} = \frac{x_{gg'}}{x_{aa'}} = \frac{\det A_{\nu-2; ab, a'b'}}{\det A_{\nu-1; aa'}} \quad (4.14b)$$

и для входных (выходных) функций

$$F_{aa} = \frac{x_a}{\xi_a} = \frac{\det A_{\nu-2; a,0}}{\det A_{\nu-1}} \quad (4.15a)$$

$$F_{ss} = \frac{I_s}{I_g} = \frac{\det A_{p-2, s, 0}}{\det A_{p-1}} \quad (4.156)$$

Если измеряется (на выходе) ток $I_s = I_g$, т.е. последовательно с ребром ss' включается амперметр, функция $F_{ab, 0}(F_{ab, a'b'})$ умножается на проводимость выходного ребра $Y_{ss'}$, например

$$Y_{пер} = \frac{I_{ss'}}{E_{aa'}} = Y_{ss'} F_{ab, a'b'} = Y_{ss'} \cdot \frac{\det A_{p-2, ab, a'b'}}{\det A_{p-1, aa'}}$$

При вычислении определителя графа необходимо, как утверждалось ранее, закоротить источники напряжения и удалить (разомкнуть) источники тока. В методе структурных чисел не желательно осуществлять топологические операции, потому что это требует обращения снова к графу. Можно заметить, что закорачивание источника соответствует вычеркиванию соответствующего элемента и строки в звездной матрице. При этом Δ становится равным $\Delta_{aa} = \sum_{i=1}^n d_{(a, 0) i}$. Удаление ребра источника соответствует вычеркиванию из звездной матрицы соответствующего элемента.

В этой связи формулы для определения схемных функций в отличие от формулы Мезона получаются несколько различными в зависимости от вида источника и рода выходной величины. Так,

$$Z_{lx} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}; \quad Y_{lx} = \frac{I_a}{E_a} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}; \quad (4.16)$$

$$Z_{lpx} = \frac{U_g}{I_g} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta}; \quad Y_{lpx} = \frac{I_g}{U_a} = \frac{\Delta}{\Delta_{gg}}; \quad (4.17)$$

$$\kappa_v = \frac{U_g}{E_a} = \frac{\Delta_{ag}}{\Delta_{aa}}; \quad \kappa_I = \frac{I_g}{I_a} = \frac{Y_n \Delta_{ag}}{\Delta}; \quad (4.18a), (4.18b)$$

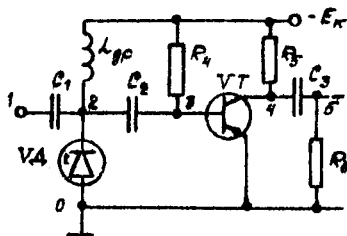
$$Z_{пер} = \frac{U_g}{I_a} = \frac{\Delta_{ag}}{\Delta}; \quad Y_{пер} = \frac{I_g}{E_a} = \frac{Y_n \Delta_{ag}}{\Delta_{aa}}. \quad (4.19a), (4.19b)$$

Формулы очень просты, легко синтезируются по номерам вершин, к которым приложены токи и напряжения, входящие в искомую схемную функцию. Если задающим является ток I_a , в знаменателе формулы помещается определитель Δ , если задающим является напряжение E_a , в знаменателе формулы — дополнение Δ_{aa} [15].

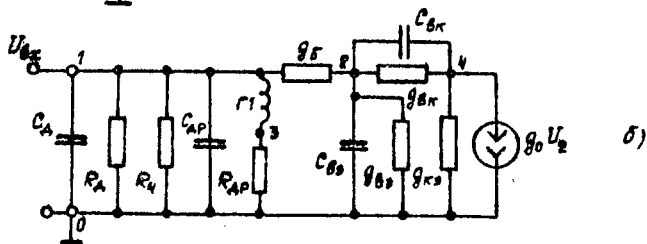
Порядок анализа электронных схем методом структурных чисел.

1. Постановка задачи анализа.
2. Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.
3. Составление топологической модели для анализа по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.
4. Подбор для электронных компонентов наиболее подходящих по режиму работы и задачам анализа унитарных графов или матриц проводимости, или схем замещения с зависимыми источниками тока, управляемыми напряжением. Построение по последним моделям унитарных графов.
5. Составление графа схемы с учетом унитарных моделей электронных компонентов.
6. Задание координат. Присвоение вершинам графа порядковых номеров. Выделение нулевой - условно заземленной вершины, связанной с измерительным прибором, место включения которого определяется видом искомой схемной функции.
7. Составление звездной матрицы исхода графа $\bar{A}_{\mu-1}$.
8. Построение структурного $\mu-1$ числа, вычисление определителя $\Delta = \det A_{\mu-1}$.
9. Построение структурного $\mu-2$ числа, вычисление требуемых алгебраических дополнений, как суммы величин соответствующих двойных деревьев или через детерминанту структурного $\mu-2$ числа.
10. Запись выражений для искоемых схемных функций.
11. Построение частотных или временных характеристик.
12. Вычисление чувствительностей.
13. Анализ схемы на устойчивость.

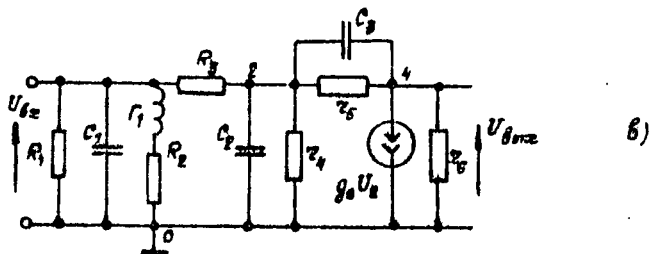
Пример 4.9. Получить выражение коэффициента передачи напряжения K_U в области средних и высоких частот для усилителя, схема которого приведена на рис. 4.17, а.



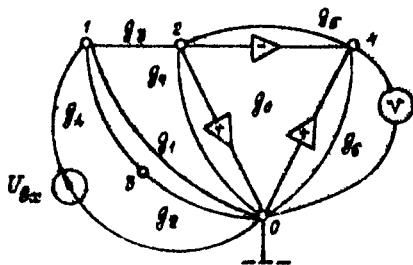
a)



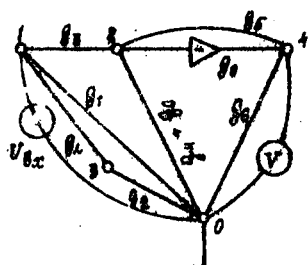
b)



c)



d)



e)

Рис. 4.17

В рассматриваемой области частот анализируемый усилитель с туннельным диодом заменяем эквивалентной схемой, показанной на рис.4.17,б. После упрощения получаем схему, показанную на рис.4.17,в, где $R_1 = R_A \parallel R_4$, $C_1 = C_A + C_{AP}$, $R_3 = 1/g_5$, $C_2 = C_{B2}$,

$$Z_4 = 1/g_{B2}, \quad Z_5 = Z_{B\kappa}, \quad C_3 = C_{B\kappa}, \quad Z_6 = 1/g_{\kappa\beta}.$$

Переходим к другой топологической модели - графу (рис.4.17,г), где $g_1 = 1/R_1 = 1/R_A + 1/R_4$, $g_L = 1/R_{LAP}$, $g_2 = 1/R_3 = 1/R_{AP}$,

$$g_3 = 1/R_3 = g_5, \quad g_4 = pC_{B2} + g_{B2}, \quad g_5 = pC_{B\kappa} + g_{B\kappa}, \quad g_6 = g_{\kappa\beta}.$$

Осуществим задание координат, пронумеровав вершины графа и выбрав нулевую - условно заземленную (см.рис.4.17,г). Упростим граф, исключая унистор g_0 , направленный от условно заземленной вершины и объединяя унистор, направленный к условно заземленной вершине с ребром g_4 (см. рис.4.17,д).

Составим звездную матрицу исхода графа

$$\bar{A}_{0-1} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \\ 40 & 42 \end{bmatrix},$$

где $10 \equiv g_1$, $12 \equiv g_3$, $13 \equiv g_L$, $20 \equiv g_0 + g_4$, $24 \equiv g_0 + g_5$,

$$30 \equiv g_2, \quad 40 \equiv g_6, \quad 42 \equiv g_5.$$

Искомая функция

$$K_U = \frac{U_{B\pi x}}{U_{B\pi}} = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}}.$$

Найдем дополнение Δ_{14} . Поскольку на графе условно заземленный узел является общим для источника и вольтметра

$$\Delta_{14} = \sum_{i=1}^m d_{(14,0)i} = \det \bar{A}_{0-2,14,0}; \quad \Delta_{11} = \det \bar{A}_{0-2,1,0};$$

$$\det \bar{A}_{0-2,14,0} = \det [\bar{A}_{0-2}(\beta_{14,0}) \cap \bar{A}_{0-2}(\beta_{14,0})];$$

$$\bar{A}_{0-2,14,0} = \begin{bmatrix} \cancel{10} & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \\ 40 & 42 \end{bmatrix} \text{ mod } 2; \quad \bar{A}_{0-2,1,0} = \begin{bmatrix} \cancel{10} & \cancel{12} & \cancel{13} \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \\ \cancel{40} & 42 \end{bmatrix} \text{ mod } 2;$$

$$\bar{A}_{0-2,14,0} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \\ 42 \end{bmatrix} \text{ mod } 2 = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \bigg|_{\text{mod } 2} \cap \left(\begin{bmatrix} 21 \\ 30 & 31 \\ 42 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 30 & 31 \\ 42 \end{bmatrix} \right) \bigg|_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \bigg|_{\text{mod } 2} \cap$$

$$\cap \begin{bmatrix} 21 \\ 30 & 31 \\ 42 \end{bmatrix} \bigg|_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \bigg|_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 24 & 24 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} ;$$

$$\Delta_{14} = \det A_{\nu-2, 14, 0} = y_{12} \bar{y}_{24} (y_{30} + y_{31}) = g_3 (g_5 - g_0) (g_2 + g_4) .$$

Найдем симметричное дополнение Δ_{11} по структурному числу

$$\bar{A}_{\nu-2, 1, 0} (\beta_{10, 10}) :$$

$$\bar{A}_{\nu-2, 1, 0} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 \\ 40 & 42 \end{bmatrix} \bigg|_{\text{mod } 2} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & 24 & 24 \\ 30 & 30 & 31 & 31 & 30 & 30 & 31 & 31 & 30 & 31 \\ 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (g_2 + g_4) [(g_4 + g_0)(g_4 + g_5) + g_3 (g_4 + g_5)] + (g_2 + g_4)(g_5 - g_0)g_6 = (g_2 + g_4) [(g_6 + g_5)(g_3 + g_4 + g_0) + (g_5 - g_0)g_6]$$

И окончательно получаем

$$K_{\nu} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}} = \frac{\det \bar{A}_{\nu-2, 14, 0}}{\det \bar{A}_{\nu-2, 1, 0}} = \frac{\det [\bar{A}_{\nu-2} (\beta_{14, 14}) \cap \bar{A}_{\nu-2} (\beta_{10, 10})]}{\det \bar{A}_{\nu-2} (\beta_{10, 10})} =$$

$$= \frac{g_3 (g_5 - g_0) (g_2 + g_4)}{(g_2 + g_4) [(g_5 + g_6)(g_0 + g_3 + g_4) + g_6 (g_5 - g_0)]}$$

После подстановки выражение для K_{ν} примет следующий вид:

$$K_{\nu} = g_6 \frac{\rho C_{6\kappa} + g_{6\kappa} - g_0}{\rho^2 C_{6\kappa} C_{30} + \rho [C_{6\kappa} (g_0 + g_5 + g_{50}) + C_{30} (g_{6\kappa} + g_{\kappa 0}) + C_{6\kappa} g_{\kappa 3}] + g_{\kappa 3} (g_{6\kappa} - g_0) + (g_{6\kappa} + g_{\kappa 3}) (g_0 + g_5 + g_{50})}$$

4.2.7. Вычисление схемных функций по графу схемы с управляемыми напряжением источниками тока - УИИТами

По сравнению с ненаправленными графами унисторные обладают известной избыточностью. Так, управляемый напряжением источник тока представляется тремя-четырьмя унисторами, имеющими различные знаки проводимостей (см. рис. 4.4). В результате увеличивается исходное число деревьев за счет появления одинаковых по величине и противоположных по знаку деревьев с унисторами. Они затем при алгебраическом суммировании в определителе взаимно сокращаются. Число лишних деревьев, а значит и затраты на их поиск резко возрастают по мере увеличения в схеме электронных компонентов и при усложнении их топологических моделей. Так, для фрагмента цепи с одним транзистором, графы которой показаны на рис. 4.18, число лишних деревьев с унисторами 10 (более 70% от общего их числа); для фрагмента цепи с компонентой типа оптрона или операционного усилителя, граф которой показан на рис. 4.19, число лишних унисторных деревьев уже 54 (90% от общего числа) и т.д.

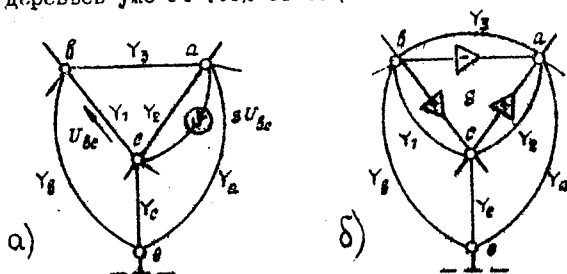


Рис. 4.18

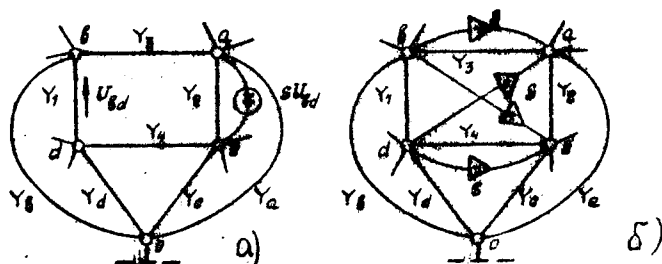


Рис. 4.19

Идея, обосновывающая практически важную модернизацию рассмотренных методов и алгоритмов, состоит в предложении применить безызыточные формулы вычисления детерминантных функций (определителей и их дополнений) и хорошо себя зарекомендовавшие в унисторных моделях быстродействующие алгоритмы поиска деревьев графа по звездной матрице [20, 21] к безызыточным, в свою очередь, топологическим моделям, содержащим УНИТы.

Для реализации этой идеи необходимо найти логический путь селекции детерминантной части деревьев с УНИТами. Дело в том, что при генерации деревьев по звездной матрице графа с УНИТами также появляются лишние деревья, число которых, правда, значительно меньше, чем в унисторных графах. Анализ показал, что можно предложить наиболее общий и, как оказалось, достаточно простой для компьютерной реализации признак идентификации детерминантных деревьев графа, а именно, наличие в них так называемых управляющих путей, проходящих через УНИТ и его управляющую ветвь. Для общности заметим, что любую пассивную ветвь схемы можно представить источником тока, управляемым падением напряжения на этой же ветви. В унисторных детерминантных деревьях наличие управляющих путей обеспечивается требованием направленности всех унисторов в корень (условно-заземленную вершину), а также свойством унисторов (согласно определению) управляться напряжением, отсчитанным от условно-заземленной вершины графа. Исчерпывающий материал для доказательства указанного общего свойства детерминантности деревьев графа можно найти в [19].

Разработанный на основе вышеизложенного алгоритм предполагает, во-первых, построение звездной матрицы по графу или непосредственно по эквивалентной схеме (с УНИТами) анализируемой цепи. Составление звездной матрицы осуществляется при этом обычным для ненаправленного графа способом, лишь кодирование УНИТов необходимо провести так, чтобы был одновременно указан и код их управляющих ветвей. Например: $acsb$ или $acsb$; $acbd$, где ac - код УНИТа, составленный из номеров его узлов a и c ; индекс sb (или bd) - код управляющей ветви, составленный также из номеров ее узлов s и b (или b и d). Во-вторых, путем перемножения по модулю 2 строк этой матрицы генерируются выборки, из которых по любой из известных процедур отбираются деревья. В-третьих, все деревья с УНИТами проверяются на наличие в них управляющих путей. Затем, в-четвертых, отсеleetированные детерминантные деревья используются для вычисления детерминантных фун-

кий. Рассмотрим несколько характерных примеров. Для графа, приведенного на рис.4.18,а, звездную матрицу $\beta_{3,8}$ в виде однострочных сомножителей запишем так: $a[a_0 \ ab \ a_{ss}b]$,

$$b[b_0 \ b_a \ b_c], \ c[c_0 \ c_b \ c_{ss}b],$$

где $a_{ss}b = c_{ss}b = Y_{aa} + a$.

Вычислим произведение однострочных сомножителей матрицы $\beta_{3,8}$ по модулю 2 и выделим деревья, содержащие УНИТ $a_{ss}b (= c_{ss}b)$:

... $a_0 \ b_0 \ c_{ss}b$; $a_0 \ b_a \ c_{ss}b$; $a_0 \ b_c \ c_{ss}b$; $a_b \ b_0 \ c_{ss}b$;

$a_{ss}b \ b_0 \ c_0$; $a_{ss}b \ b_0 \ c_b$; $a_{ss}b \ b_a \ c_0$;

$a_{ss}b \ b_c \ c_0$...

В соответствии с предложенным признаком идентификации детерминантных деревьев удобно разделить процесс на два этапа. В первую очередь удаляются деревья, содержащие саму управляющую ветвь $sb (= bc)$

(3-й, 6-й и 8-й столбцы), так как в этом случае управляющего пути уже быть не может (иначе был бы контур, а не дерево). Разработчики алгоритмов и программ генерации деревьев по звездным матрицам, как правило, используют процедуры исключения (предварительно или в процессе генерации) выборок, содержащих одну и ту же ветвь с индексами типа ab и ba . Поскольку в код УНИТа входят индексы управляющей ветви, то упомянутые процедуры исключают аналогичным образом деревья с УНИТом, содержащие и управляющую ветвь. Таким образом, первый этап легко вписывается в уже существующие процедуры.

На втором этапе проверяем в оставшихся деревьях (столбцах) наличие управляющего пути из b в c через УНИТ $a_{ss}b$, т.е. пути из b в c через a . В результате проверки устанавливаем, что только в 5-м дереве (столбце) нет искомого пути. Тогда в определитель графа (рис.4.18,а) войдут величины детерминантных деревьев с УНИТ такие: $A_{\mu, \mu} = [... \ a_0 \ b_0 \ c_{ss}b; \ a_0 \ b_a \ c_{ss}b;$

$a_b \ b_0 \ c_{ss}b; \ a_{ss}b \ b_a \ c_0; \ ...]$.

В результате часть определителя, зависящая от управляющего параметра S УНИТа $\Delta_S = S Y_3 (Y_8 + Y_0 + Y_a) + S Y_a Y_8$. Процедура второго этапа также легко автоматизируется. Именно в таком виде она уже применяется при вычислении, например, алгебраических дополнений.

По звездной матрице исхода, составленной для того же примера, по графу с унисторами (рис.4.18,б) генерируется 14 унисторных деревьев (против 5 деревьев с УНИТ). Из них пять имеют отрицательную величину. В процессе сложения в определителе они, естественно,

взаимно сокращаются.

Для другого примера, соответствующего схеме с электронной компонентой с высоким входным сопротивлением, по ее унисторному графу подобному на рис.4.18,б (ветви Y_1 и Y_2 отсутствуют) получается 5 деревьев с унисторами, 4 из которых взаимно сокращаются в определителе. По графу с УНИТОм, также удалив деревья с δc , получаем 2 дерева с УНИТОм: $ac \delta a c b c$; $a c b c \delta a c c$. Второе из них исключаем, как не содержащее управляющего пути $\delta - a - c$. Тогда $\Delta = Y_a Y_b S$.

На рис. 4.19 приведены графы для схемы с управляемым источником, не имеющим общего узла с его управляющей ветвью. Структурное число, составленное по унисторному графу (рис.4.19,б), содержит 60 деревьев с унисторами, из которых после взаимного сокращения в определителе остается лишь 6 членов с параметром S . По графу с УНИТОм получаем лишь 12 деревьев с УНИТОм. После исключения деревьев, не содержащих управляющих путей $\delta - \dots ac - \delta$, остаются те же 6 деревьев, включающих параметр S . В подобных примерах с "оторванной" от УНИТа управляющей ветвью возникает проблема определения знака величины дерева с УНИТОм. Для выбранных при составлении графа направлений управляющего напряжения и самого УНИТа знак величины дерева положителен (отрицателен), если в управляющем пути эти направления взаимно одинаковы (противоположны).

Сопоставляя предложенную здесь процедуру с алгоритмами вычисления определителя схемы, описанными выше, обнаруживаем их однородность в отношении необходимости поиска определенных путей в генерируемых деревьях. Это означает, что в целом предложенный алгоритм и его программная реализация практически усложняется незначительно. Применение предложенного метода, как видно из примеров, удобно и в компьютерной и в ручной реализациях.

В случае попадания в дерево двух и более УНИТов поиск управляющих путей необходимо проводить с учетом всех указанных в индексах УНИТов их управляющих ветвей. Например, в выборке [232I 4030 10 24] находим управляющие пути из 3 в 1 (через 2): 23-30-01-12, и из 3 в 4 (через 0): 03-32-24-40 - это управляющие пути обоих УНИТов.

Определение алгебраических дополнений для схемных функций отличается тем, что кроме управляющих путей УНИТов в выделенных 2-деревьях должны быть также и пути от источника сигнала схемы к выходной ветви (через измерительный прибор) т.е. от aa' до bb' .

или от a_0 до b_0 . Так, для графа на рис.4.19 2-деревья с УНИТОм показаны на рис.4.20. При этом в зависимости от конфигурации графа управляющие пути могут в отдельных случаях распадаться на касющиеся пары и т.д. Пример такого 2-дерева показан на рис.4.20.

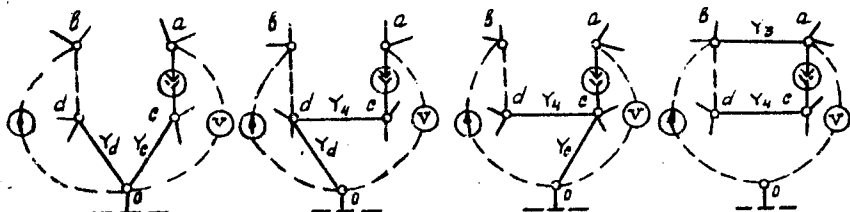


Рис. 4.20

Если условно вывести (как в [19]) УНИТЫ из рассмотренных 2-деревьев, то получим на рис.4.20 уже 3-деревья. В этой связи можно для общности дать следующую интерпретацию определителя. При наличии в графе с ν узлами n УНИТОВ определитель включает прежде всего величины всех $m_1, \nu-1$ - деревьев, не содержащих УНИТОВ, всех $m_2, \nu-2$ - деревьев, содержащих по одному УНИТУ, всех $m_3, \nu-3$ - деревьев, содержащих по два УНИТА и т.д. Здесь $\nu-1, \nu-2, \nu-3$ и т.д. - число ветвей дерева, так что $\nu-2$ - дерево, например, соответствует по определению 2-дереву и т.д. Тогда

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m_1} d_{1i} - \left(\sum_j S_j \sum_{i=1}^{m_2} d_{2ji} + \sum_{j \neq p} S_j S_p \sum_{i=1}^{m_3} d_{3jpi} + \dots \right); \quad (4.20)$$

$$\Delta_{ab} = \sum_{i=1}^{m_2} d_{2i} + \sum_j S_j \sum_{i=1}^{m_3} d_{3ji} + \sum_{j \neq p} S_j S_p \sum_{i=1}^{m_4} d_{4jpi} + \dots,$$

где $d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, d_{4i}$ - соответственно величины дерева, 2-дерева, 3-дерева, 4-дерева и т.д.; S_j, S_p - управляющие параметры соответствующих УНИТОВ.

Подводя итоги изложенному, заметим, что в рассмотренных характерных примерах принципиально и существенно уменьшается число лишних деревьев генерируемых по звездной матрице графа с УНИТОм. По сравнению с унитарными графами - в 3-10 раз, а их доля по отношению ко всем унитарным (УНИТным) деревьям - соответственно на 30...50%. При этом важно, что в предложенном методе лишние, т.е. неэтерминентные деревья исключаются логическим путем еще на этапе анализа выборок, генерируемых по звездным матрицам. Благодаря использованию предложенного признака идентификации, поиск

детерминантных деревьев оказалось возможным совместить с основной процедурой отбора деревьев графа, основанной на поиске в выборках путей из корня во все остальные вершины. В результате, вычисление величин недетерминантных деревьев перемножением соответствующих проводимостей не осуществляется, что также существенно снижает время анализа схем. Необходимо учитывать и то, что соответственно снижаются затраты на подготовку схемы (графа) к анализу, так как отпадает надобность в составлении униформных графов.

4.3. Анализ методом сигнальных (направленных) графов

4.3.1. Построение сигнальных графов электронных схем

Сигнальные графы обычно строят по системе линейных уравнений. При этом в качестве вершин графа выбирают множество переменных исходной системы уравнений $x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_m$, а построение самого графа использует одну из форм записи уравнений, приписывая дугам графа передачи, равные соответствующим коэффициентам при переменных в уравнениях. В зависимости от выбранной формы записи уравнений строят так называемые графы С.Мэзона, К.Коутса, В.И.Анисимова, А.Г.Остапенко и др.

Граф Мэзона наиболее распространен. Для его построения необходимо составить систему уравнений схемы в причинно-следственной форме, где каждая зависимая переменная в одном уравнении явно выражена через другие переменные [18].

Правило построения графа Мэзона: в качестве множества берется множество всех переменных в уравнениях и считается, что x_i отображается на x_j , если в выражении x_j входит x_i с отличным от нуля коэффициентом $\pm K_{ij}$. В графе соответствующие вершины x_i и x_j соединяются дугой, направленной от x_i к x_j , с передачей, равной $\pm K_{ij}$ (независимо от знака последнего). Пусть, например, имеется система уравнений, записанная в явной форме

$$x_1 = a x_2 - b x_3;$$

$$x_2 = c x_1 - d x_2 + e x_3;$$

$$x_4 = x_2.$$

В заданной системе имеем четыре переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , значит в графе будет четыре вершины и шесть дуг по числу коэффициентов: $a, -b, c, -d, e, 1$ (рис.4.21,а). Из графа видно, что перемен-

ные x_1, x_2, x_3 являются зависимыми, а x_3 - независимой переменной - источником графа.

Направленный граф, составленный по системе уравнений для электронной схемы, называют сигнальным, поскольку в этом случае переменные (токи и напряжения) в уравнениях представляют собой сигналы схемы в различных ее узлах, контурах или ветвях. Уравнения, составленные для схем в узловом базисе (т.е. по методу узловых напряжений) или в контурном базисе имеют в обобщенной форме следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 &= F_1; \\ -a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - a_{23} x_3 &= F_2; \\ -a_{31} x_1 - a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= F_3; \end{aligned}$$

Для построения графа Мезона необходимо перейти от неявной формы записи к явной, т.е. причинно-следственной форме. Для этого можно разделить каждое уравнение системы на коэффициенты типа a_{ij} , тогда получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} F_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3; \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} F_2 + \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3; \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}} F_3 + \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2; \end{aligned}$$

Граф показан на рис.4.21,б. Такой граф иногда называют нормализованным, т.к. в нем отсутствуют петли.

Другой прием перехода к явной (причинно-следственной) форме записи уравнений состоит в добавлении к левой и правой его частям одной из переменных:

$$x_1 + a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 = F_1 + x_1,$$

тогда

$$x_1 = F_1 + (1 - a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

(или

$$x_1 = -F_1 + (1 + a_{11}) x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3).$$

Аналогично

$$x_2 = F_2 + a_{21} x_1 + (1 - a_{22}) x_2 + a_{23} x_3;$$

$$x_3 = F_3 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (1 - a_{33}) x_3.$$

Граф для полученной явной формы показан на рис.4.19,в. Этот граф называют ненормализованным. В нем есть петли в каждой зави-

симой вершине, но в отличие от нормализованного передачи дуг не являются относительными (дробными) величинами. Они совпадают с взаимными проводимостями узлов или взаимными сопротивлениями контуров схемы, а передачи петель соответствуют собственным проводимостям (сопротивлениям) узлов (контуров) схемы.

Более тесную связь со структурой схемы имеет граф Коутса - Анисимова, для построения которого необходимо исходную систему уравнения представить в виде

$$a_{11} x_1 = F_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 ;$$

$$a_{22} x_2 = F_2 + a_{21} x_1 + a_{23} x_3 ;$$

$$a_{33} x_3 = F_3 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2 .$$

В левой части уравнений по существу сосредоточены петли. Коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} можно считать также весами вершин x_1 , x_2 , x_3 . Тогда граф представляется в виде совокупности взвешенных вершин (вместо петель в них) и дуг их соединяющих. На рис. 4.21, г показан граф Коутса-Анисимова с принятым обозначением зависимых вершин в виде увеличенных кружочков.

Уравнения, составленные в однородном (узловом или контурном) базисе, имеют значительную избыточность. Как в разрешении их матричными методами, так и в сигнальных графах это приводит к неоправданному усложнению в расчетах. С целью упрощения графа схемы используют возможность составления уравнений схемы причинно-следственным способом в неоднородном базисе. Этот способ приемлем для небольших схем, широко используется для описания систем автоматизации, а также функциональных схем больших электронных устройств.

4.3.2. Порядок составления уравнений схемы по причинно-следственному принципу

1. Составляется эквивалентная схема по переменному току - топологическая модель устройства.
2. Выбираются направления токов и напряжений на всех элементах схемы, вводятся их обозначения.
3. Выбирается какая-то переменная, как правило, выходной ток или напряжение ($x_{вых}$).
4. Выходная переменная $x_{вых}$ как следствие выражается применением законов Ома или Кирхгофа через другие переменные - причины: x_1 , x_2 и т.д.
5. Получившиеся на предыдущем этапе промежуточные переменные x_1 , x_2 ,... последовательно выражаются уже как следствия через другие причины: x_i , x_{i+1} ,... . Затем это повторяется для образу-

щихся новых промежуточных переменных и т.д.

6. Заканчивается процесс составления уравнений, когда при выражении очередной промежуточной переменной не образовывалось ни одной новой промежуточной переменной, кроме задающих переменных, а все ранее полученные уже выражены.

Правила составления причинно-следственных зависимостей.

1. Любую переменную можно выражать только один раз.
2. Любое конкретное соотношение (закон Ома или Кирхгофа для рассматриваемого участка схемы) может быть использовано только один раз.
3. Чтобы получить граф, соответствующий данной схеме, задающие переменные (источники сигналов схемы) должны быть источниками графа. В противном случае правильный граф можно получить только при условии, что число источников графа равно числу источников схемы (затем обычно используют правило инверсии (обращения графа)).

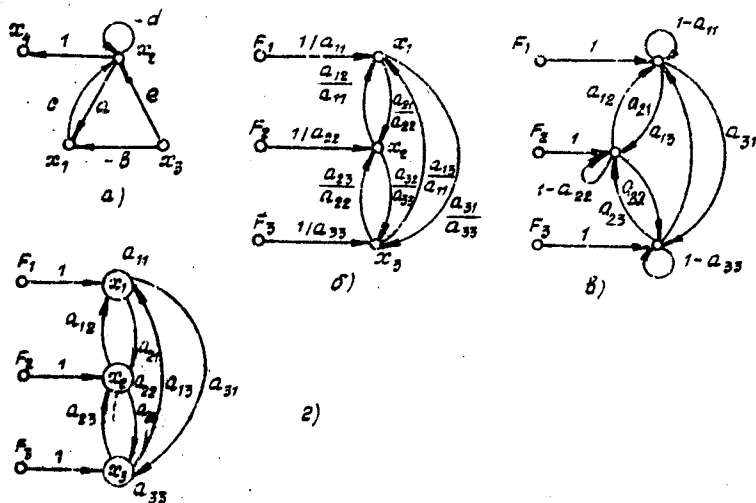


Рис. 4.21

Пример 4.10. Составить сигнальный граф для схемы, приведенной на рис.4.22, а.

Начинаем составлять уравнения с переменной $U_{\delta_{01x}}$, записывая в скобках получающиеся промежуточные переменные:

по з-ну Ома	$U_{\delta n x} = \dot{I}_{\delta n x} R_3 = (\dot{I}_{\delta} - \dot{I}_{\kappa}) R_3$;
по з-ну Кирхгофа I	$\dot{I}_{\delta n x} = \dot{I}_{\delta} - \dot{I}_{\kappa} = (\dot{I}_{\delta}, \dot{I}_{\kappa})$;
из ур-ний транзистора	$\begin{cases} \dot{I}_{\kappa} = g_{212} U_{\delta 2} + g_{222} U_{\kappa 2} & (U_{\delta 2}, U_{\kappa 2}); \\ \dot{I}_{\delta} = g_{112} U_{\delta 2} + g_{122} U_{\kappa 2} & (U_{\delta 2}, U_{\kappa 2}); \end{cases}$
по з-ну Кирхгофа II	$U_{\kappa 2} = U_{\delta n x} - U_2 = (U_2)$;
по з-ну Ома	$U_2 = \dot{I}_2 R_2 = (\dot{I}_{\delta} + \dot{I}_{\kappa}) R_2$;
по з-ну Кирхгофа II	$U_{\delta 2} = \delta - U_1 - U_2 = (U_1)$;
по з-ну Ома	$U_1 = \dot{I}_{\delta x} R_1 = (\dot{I}_{\delta x})$;
по з-ну Кирхгофа I	$\dot{I}_{\delta x} = \dot{I}_{\delta} + \dot{I}_{\delta}$ — $(\dot{I}_{\delta})$;
по з-ну Ома	$\dot{I}_{\delta} = U_{\delta} \rho C = (U_{\delta})$;
по з-ну Кирхгофа II	$U_{\delta} = U_{\delta 2} - U_{\kappa 2}$

Из практических соображений целесообразно с целью упрощения графа сократить число полученных уравнений, используя простейшие подстановки. В результате получим

$$\begin{aligned} U_{\delta n x} &= (\dot{I}_{\delta} - \dot{I}_{\kappa}) R_3; \\ \dot{I}_{\kappa} &= g_{212} U_{\delta 2} + g_{222} U_{\kappa 2}; \\ \dot{I}_{\delta} &= g_{112} U_{\delta 2} + g_{122} U_{\kappa 2}; \\ U_{\kappa 2} &= U_{\delta n x} - (\dot{I}_{\delta} + \dot{I}_{\kappa}) R_2; \\ U_{\delta 2} &= \delta - (\dot{I}_{\delta} + \dot{I}_{\delta}) R_1 - (\dot{I}_{\delta} + \dot{I}_{\kappa}) R_2; \\ \dot{I}_{\delta} &= U_{\delta} \rho C; \\ U_{\delta} &= U_{\delta 2} - U_{\kappa 2}. \end{aligned}$$

Граф, построенный по последней системе уравнений, показан на рис. 4.22, б.

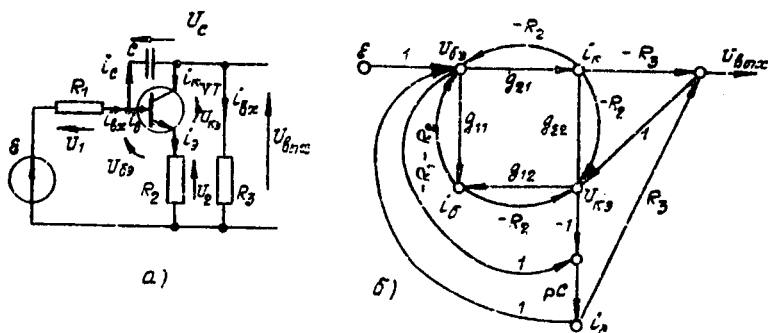


Рис. 4.22

Пример 4.II. Составить сигнальный граф для схемы интегрирующего усилителя, показанной на рис.4.23,а.

$$\begin{aligned}
 U_{\text{внх}} &= \dot{I}_H R_H & \text{---} & (\dot{I}_H); \\
 \dot{I}_H &= \dot{I}_C + \dot{I}_{\text{внх}} & \text{---} & (\dot{I}_C, \dot{I}_{\text{внх}}); \\
 \dot{I}_C &= U_C \cdot pC & \text{---} & (U_C); \\
 U_C &= U_{\text{вх}} - U_{\text{внх}} & \text{---} & (U_{\text{вх}}); \\
 \dot{I}_{\text{внх}} &= -(\kappa_A U_{\text{вх}} + U_{\text{внх}}) G_{\text{внх.А}}; \\
 U_{\text{вх}} &= \dot{I}_{\text{вх}} R_{\text{вх.А}} & \text{---} & (\dot{I}_{\text{вх}}); \\
 \dot{I}_{\text{вх}} &= \dot{I}_R - \dot{I}_C & \text{---} & (\dot{I}_R); \\
 \dot{I}_R &= U_R / R & \text{---} & (U_R); \\
 U_R &= \delta - U_{\text{вх}} & \text{---} &
 \end{aligned}$$

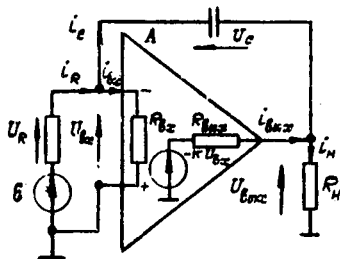
Сократим полученную систему уравнений, сделав простейшие подстановки:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{внх}} &= (\dot{I}_C + \dot{I}_{\text{внх}}) R_H; \\
 \dot{I}_C &= U_C \cdot pC; \\
 U_C &= \dot{I}_{\text{вх}} R_{\text{вх.А}} - U_{\text{внх}}; \\
 \dot{I}_{\text{внх}} &= -(\kappa_A \dot{I}_{\text{вх}} R_{\text{вх.А}} G_{\text{внх.А}} - U_{\text{внх}} G_{\text{внх.А}}); \\
 \dot{I}_{\text{вх}} &= U_R / R - \dot{I}_C; \\
 U_R &= \delta - \dot{I}_{\text{вх}} R_{\text{вх.А}}.
 \end{aligned}$$

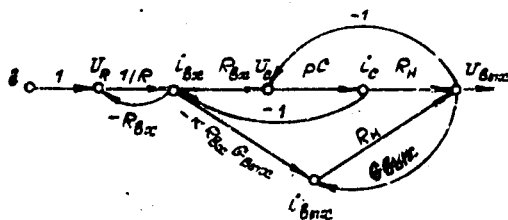
Граф, составленный по последней системе уравнений, показан на рис. 4.23,б. Для контроля правильности построения графа необходимо убедиться, что число и вид его источников точно соответствуют исходной схеме. Поскольку подавляющее число схем не имеет положительных обратных связей, можно ориентироваться только на отрицательные передачи всех контуров в графе. Выявление контуров с положительной передачей в этом случае свидетельствует о допущенной ошибке в выборе направления тока (напряжения) в схеме или в определении знака при составлении причинно-следственных зависимостей.

Рассмотренный причинно-следственный способ составления системы уравнений схемы очень удобен для анализа небольших схем (1-2 электронных компонентов). Он позволяет построить граф, наиболее удачно с точки зрения исследователя, сочетающий движение сигналов с математическим их описанием. Эта возможность способствует довольно быстрому и более глубокому пониманию особенностей работы исследуемой системы.

дуемой схемы. Однако более сложные схемы требуют иного подхода. Особенности их работы в целом обычно анализируют по функциональным схемам, что по сути дела соответствует их разбиению на небольшие, как правило, типовые узлы. Для расчета больших схем, т.е. для получения аналитических выражений их схемных параметров применяют способы построения сигнального графа непосредственно по схеме, исключая этап составления уравнения. Этот способ основан на установлении прямой связи между структурой графа и системой уравнений схемы в узловом базисе. В этом случае вершины графа соответствуют задающим источникам и узловым напряжениям схемы (рис.4.21,з,г), т.е. узлам исходной схемы. Базисный (нулевой) узел в графе отсутствует. Между вершинами графа в соответствии с исходной схемой размещаются по две противоположно направленных дуги с передачами, соответствующими проводимости пассивной ветви, включенной в схему между соответствующими узлами. Кроме того, в каждую вершину вводится петля (см.рис.4.21,в) с передачей, равной сумме проводимостей ветвей, сходящихся к соответствующему узлу в схеме или используются взвешенные вершины (рис.4.21,г). В [22] рассмотрен способ составления графа без петель — ориентированный беспетлевой граф (ОБГ).



а)



б)

Рис. 4.23

4.3.3. Порядок составления сигнального графа непосредственно по схеме

1. Составляются графы по непосредственным матрицам проводимостей электронных компонентов заданной схемы (или берутся из соответствующих справочных таблиц, например, табл.2.5, рис.2.14 [4]). Пассивным ветвям схемы соответствуют две противоположно нап-

равленных дуги с одинаковыми положительными передачами, соответствующими проводимости ветви. Вершинам присваивается вес (чтобы не рисовать петли), равный собственным проводимостям узлов схемы.

2. Полученные графы компонентов схемы соединяются между собой согласно заданной схеме. При этом суммируются параллельные дуги.
3. Выбирается базисный узел схемы (базисная вершина графа) и удаляются из исходного графа все инцидентные ей дуги. Выбирая базисный узел схемы заранее, можно при определенном навыке упростить построение графа, не вычеркивая дуги графов компонентов схемы, инцидентные базисному узлу схемы.
4. Задающие источники тока подсоединяются к соответствующей вершине, согласно исходной схеме, направленной дугой с единичной передачей. Задающие или зависимые источники напряжения с конечным значением внутреннего сопротивления (проводимости Y_0) или с последовательно соединенной проводимостью Y_0 подсоединяются к соответствующей вершине одной дугой с передачей, равной Y_0 . Если источник напряжения идеальный ($Y_0 = \infty$), соединительная дуга имеет также единичную передачу. Таким образом, если к узлу схемы подсоединен источник напряжения (зависимый или независимый), то в соответствующую вершину графа из других вершин дуги уже не заходят, за исключением дуги с весом зависимого источника [4].
5. Зависимые источники отображаются дугой, которая выходит из вершины, соответствующей управляющей переменной и направляется к вершине, соответствующей узлу подключения источника. Вес такой дуги равен коэффициенту передачи источника. Если в схеме зависимый источник направлен от заземленного (общего) узла, то знак коэффициента передачи изменяется на противоположный.
6. Если считать весом вершины передачу ее петли, то такой граф называют обобщенным сигнальным графом (ОСГ) [23]. При этом петли можно не показывать (см. рис. 4.24, в). Вершинам без петель присваивается единичный вес.

Пример. Для схемы, приведенной на рис. 4.22, а, построить граф непосредственным методом. На рис. 4.24, а построен граф с петлями в каждой вершине (кроме вершины источника δ). На том же рис. 4.24, б показан граф без петель. Здесь передачи дуг усложнились за счет их деления на величину собственной проводимости узла (вершины), к которой она направлена. На следующих рис. 4.24, в и г показаны возможные способы упрощенного изображения этого же графа. Причем, граф

на рис.4.24, в соответствии с обобщенным сигнальным графом (ОСГ), введенным В.И.Анисимовым [23]. На рис.4.25 показаны графы, построенные по схеме усилителя на ОУ, приведенной на рис.4.23, а.

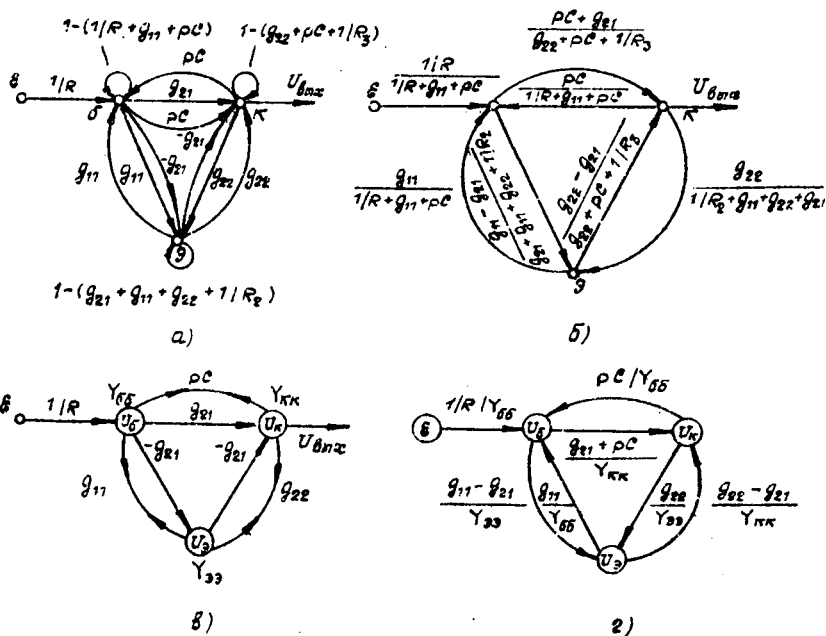


Рис. 4.24

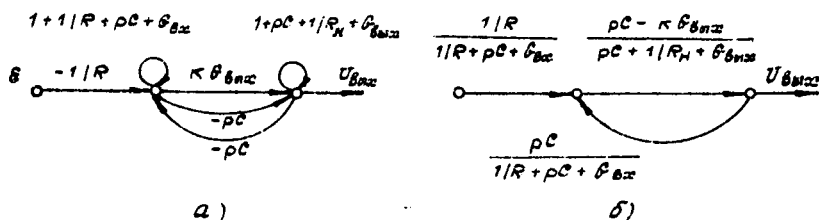


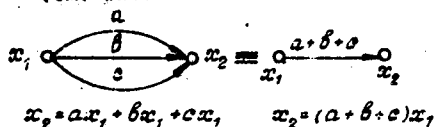
Рис. 4.25

4.3.4. Эквивалентные преобразования сигнального графа

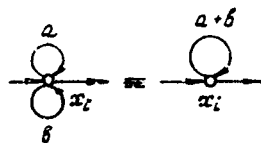
Одним из возможных способов нахождения выражения схемной функции по сигнальному графу является его свертка до одной дуги,

соединяющей вершину источника с выходной вершиной - стоком графа. Передача такой дуги и будет искомой схемной функцией. Процедура свертки графа состоит из последовательного исключения всех зависимых (промежуточных) вершин по определенным правилам - эквивалентным преобразованиям сигнального графа. Рассмотрение их и вывод производится методом преобразования соответствующих графу уравнений.

1. Параллельное соединение одинаково направленных дуг эквивалентно одной дуге с передачей, равной сумме передач исходных дуг (см. рис. 4.26)



a)



б)

Рис. 4.26

2. Последовательное соединение одинаково направленных дуг эквивалентно одной дуге с передачей, равной произведению передач исходных дуг (см. рис. 4.27)

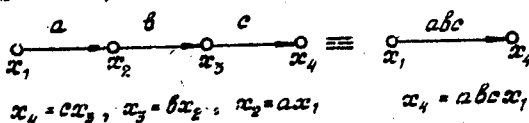
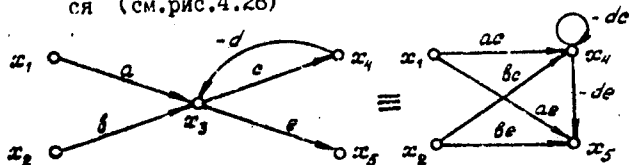


Рис. 4.27

3. Исключение вершины (зависимой) приводит к следующим изменениям в графе: все заходящие в исключаемую вершину дуги направляются по направлению каждой из выходящих, а их передачи перемножаются (см. рис. 4.28)



$x_4 = cx_3, \quad x_5 = ex_3,$
 $x_3 = ax_1 + bx_2 - dx_4$

a)

$x_4 = c(ax_1 + bx_2 - dx_4) = cax_1 + cbx_2 - cdx_4$
 $x_5 = e(ax_1 + bx_2 - dx_4) = eax_1 + ebx_2 - edx_4$

б)

Рис. 4.28

4. Исключение петли приводит к изменению передач всех входящих в данную вершину дуг путем деления их на единицу минус передача исключаемой петли (рис.4.29).

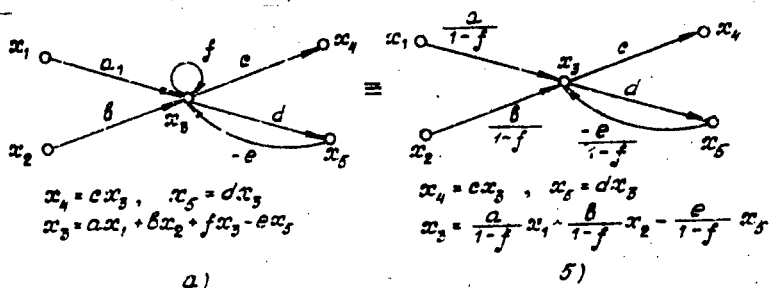


Рис.4.29

5. Инверсия дуги, пути или контура возможна в случае, когда они начинаются в источнике графа. При этом начальная вершина инверсируемой дуги становится конечной (стрелка изменяет направление) и в нее переносятся концы всех не принадлежащих инверсируемому пути дуг, которые были направлены к конечной вершине инверсируемой дуги до инверсии. Передачи инверсируемых дуг заменяются на обратные величины, а передача переносимой дуги делится на передачу соответствующей ей инверсируемой дуги с обратным знаком (см.рис.4.30).

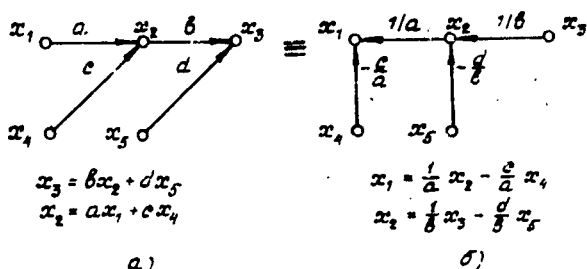


Рис.4.30

Пример решения сигнального графа методом свертки (эквивалентных преобразований) показан на рис.4.31, где за исходный выбран граф схемы, приведенный на рис.4.23.

На рис.4.31,а приведен исходный граф. На рис.4.31,б - граф после исключения из исходного вершин U_P и $U_{\beta\alpha x}$. На

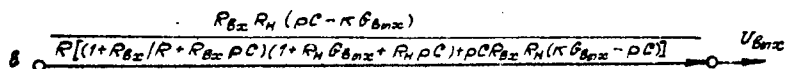
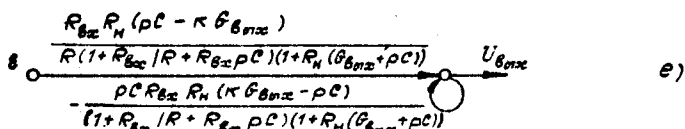
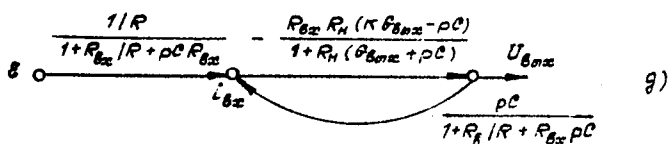
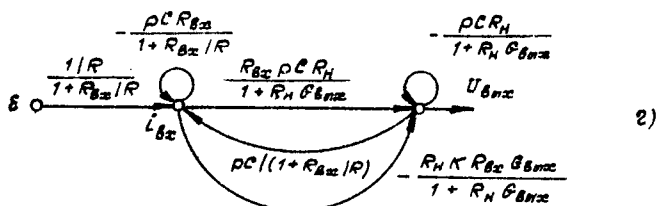
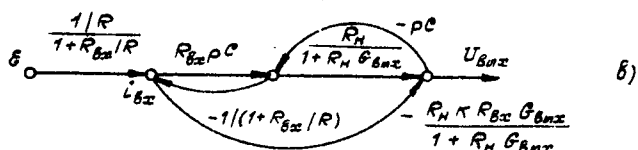
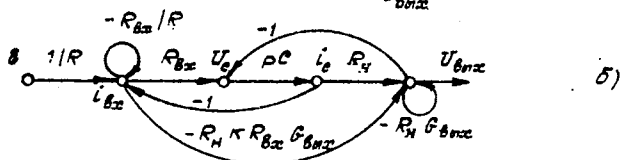
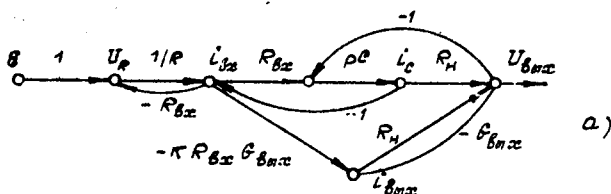


рис.4.3I,в - граф после исключения из предыдущего петель и вершины U_c . На рис.4.3I,г - граф после исключения из предыдущего вершины i_c . На рис.4.3I,д - граф после преобразования в предыдущем параллельных дуг и исключения петель. На рис.4.3I,е - граф после исключения из предыдущего вершины $i_{\beta x}$. Исключая теперь последнюю петлю, получаем граф (рис.4.3I,ж) в виде одной дуги, стягивающей вершины источника β и стока $U_{\beta x}$ графа, передача которой есть искоемое κ_c для исходной схемы.

Рассмотренный пример показывает, что решение методом свертки достаточно громоздко, требует предельного внимания и, как показывают исследования, с трудом поддается постановке на ЭВМ.

В том случае когда сигнальный граф составляется по системе уравнений, более удобным, как показывает опыт, является понижение порядка системы (уменьшение числа вершин графа) путем подстановки и замены одних переменных другими. Когда же граф составляется непосредственно по схеме рационально частичное его упрощение с обязательным исключением всех петель. При различных расчетах рационально сочетать метод расчета путем частичной свертки графа с применением далее общей формулы передачи графа. Оптимальным считают из практики граф, состоящий из 6-8 вершин.

4.3.5. Формула общей передачи сигнального графа

Основным способом нахождения выражения схемной функции любого типа по сигнальному графу схемы являются формулы общей передачи графа. Для графов, построенных по причинно-следственному принципу, наиболее удобной считается формула Мэсона для сигнального графа (1953 год):

$$F_{ab} = \frac{x_b}{x_a} = \frac{x_{\beta x}}{x_{\delta x}} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \mathcal{D}_k^m}{\mathcal{D}^m}, \quad [18] \quad (4.21)$$

где $\mathcal{D}^m$ - определитель сигнального графа Мэсона. Он вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}^m = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \dots + (-1)^m \sum_{i_1, \dots, i_m} L_{i_1} L_{i_2} \dots L_{i_m}, \quad (4.22)$$

в которой $\sum_i L_i$ - сумма передач всех контуров графа; $\sum_{i,j} L_i L_j$ - сумма всех возможных сочетаний попарных произведений передач контуров, не касающихся друг друга; $\sum_{i,j,k} L_i L_j L_k$ - сумма всех возможных сочетаний по три не касающихся друг друга контура; $\sum_{i_1, \dots, i_m} L_{i_1} L_{i_2} \dots L_{i_m}$ - сумма произведений передач максимального числа и контуров, не касающихся друг друга;

- P_K - передача K -го прямого пути из вершины x_a (x_{ax}) источника в вершину x_j (x_{jnx}) стока графа;
 n - число всех возможных прямых путей из x_a в x_j ;
 D_K^m - дополнение K -го пути ищется для части графа, не касающейся этого пути по формуле (4.22), в которую должны включаться только контуры, не касающиеся K -го пути, т.е.

$$D_K^m = 1 - \sum_i L_i + \sum_j L_j - \sum_k L_k + \dots + (-1)^m \sum_m L_m \quad (4.25)$$

(Здесь все L_i не касаются K -го пути).

Для определения передачи между внутренними вершинами графа i и j (не являющимися источниками графа), необходимо найти сигналы в этих вершинах от источника графа, а затем взять их отношения. В результате получим формулу

$$F_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{\sum_j P_j D_j^m}{\sum_i P_i D_i^m} \quad (4.24)$$

где P_i и P_j - передачи путей из вершины источника графа в вершины x_i и x_j соответственно;

D_i^m, D_j^m - алгебраические дополнения этих путей.

По формуле (4.24) можно определять входные и выходные функции и т.п.

4.3.6. Обратные связи и чувствительность

Петлевая (контурная) передача L_K по графу определяется через дугу g как

$$L_K = g \frac{B}{D_{g=0}}$$

где $D_{g=0}$ - т.е. часть определителя, не зависящая от параметра, выделенной нами дуги g ;

gB - часть определителя D , зависящая от g . Она вычисляется по формулам общей передачи графа, когда дуга g разрывается, как показано на рис.4.32, а Обратная связь для параметра g

$$F_g = 1 - L_K = 1 - g \frac{B}{D_{g=0}} \quad (4.25)$$

Пример. Для графа, приведенного на рис.4.32,б, найти обратную связь F_a, F_b, F_d, F_c :

$$F_a = 1 - \frac{ac\kappa}{1-d}; \quad F_b = 1 - 0 = 1; \quad F_d = 1 - \frac{d}{1-ac\kappa};$$

$$F_c = 1 - \frac{c\kappa a}{1-d}.$$

Формула (4.25) может быть заменена более общей формулой

$$F_g = \frac{D}{D_{g=0}}. \quad (4.26)$$

Ее легко проверить на предыдущем примере. Чувствительности определяются по формулам, для которых F_{g_i} можно вычислять по (4.25) или (4.26).

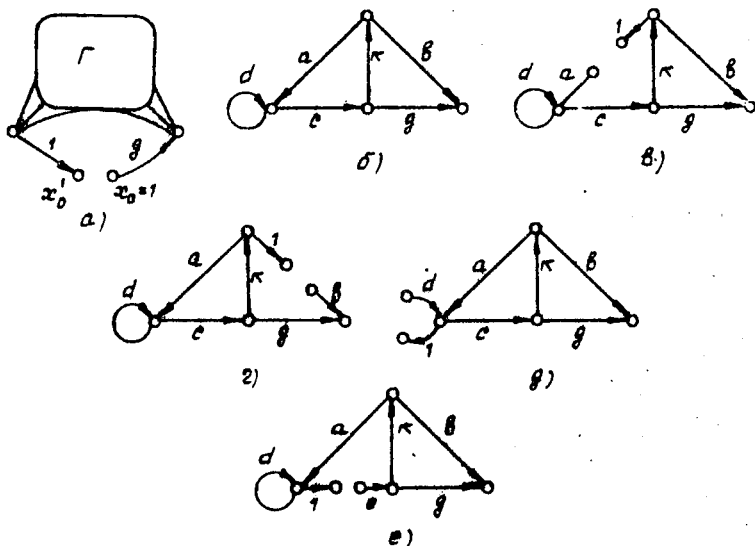


Рис.4.32

Пример 4.12. Найдем передачу графа, приведенного на рис. 4.31, а, $\kappa_U = U_{\text{вх}} / \delta$ по формуле Мэсона. Передача первого прямого пути из вершины δ в вершину $U_{\text{вх}}$: $P_1 = \frac{1}{R} R_{\text{вх}} R C R_H$; второго пути $P_2 = \frac{1}{R} (-\kappa R_{\text{вх}} G_{\text{вх}}) R_H$. Алгебраические дополнения этих путей $D_1' = D_2' = 1$, т.к. на графе нет контуров, не касающихся этих путей. Отметим, что на графе пять кон-

туров: $L_1 = -R_{\delta x} / R$; $L_2 = -R_{\delta x} \rho C$; $L_3 = -\rho C R_H$; $L_4 = -R_H \sigma_{\delta \pi x}$;
 $L_5 = -\kappa R_{\delta x} \sigma_{\delta \pi x} R_H \rho C$.

Выделим не-касающиеся пары: $L_1 L_3 = R_{\delta x} R_H \rho C / R$;

$L_1 L_4 = R_{\delta x} R_H \sigma_{\delta \pi x} / R$; $L_2 L_4 = R_{\delta x} R_H \sigma_{\delta \pi x} \rho C$.

Теперь запишем выражение для определителя по формуле (4.22):

$$\mathcal{D}^M = 1 + R_{\delta x} / R + R_{\delta x} \rho C + \rho C R_H + R_H \sigma_{\delta \pi x} + \kappa R_{\delta x} \sigma_{\delta \pi x} R_H \rho C + \\ + R_{\delta x} R_H \rho C / R + R_{\delta x} R_H \sigma_{\delta \pi x} / R + R_{\delta x} R_H \sigma_{\delta \pi x} \rho C.$$

По формуле (4.21) запишем выражение для κ_V

$$\kappa_V = \frac{\frac{1}{2} R_{\delta x} R_H (\rho C - \kappa \sigma_{\delta \pi x})}{(1 + R_{\delta x} + R_{\delta x} \rho C)(1 + R_H \sigma_{\delta \pi x}) + R_H \rho C (1 + R_{\delta x} / R + \kappa R_{\delta x} \sigma_{\delta \pi x})}$$

Можно показать, что оно тождественно выражению, полученному в примере на рис.4.31, ж.

Пример 4.13. Для графа, приведенного на рис.4.22,б, найдем передачу по напряжению $\kappa_V = U_{\delta \pi x} / \delta$ по формуле Мезона

$$R_1 = -g_{E1} R_3; \mathcal{D}_1 = 1 - g_{12} R_2; R_4 = g_{11} R_2 \rho C R_3; \mathcal{D}_4 = 1;$$

$$R_2 = g_{E1} R_2 \rho C R_3; \mathcal{D}_2 = 1; R_5 = \rho C R_3; \mathcal{D}_5 = 1 + R_2 g_{22} + g_{12} R_2;$$

$$R_3 = g_{11} R_2 g_{22} R_3; \mathcal{D}_3 = 1;$$

$$L_1 = -g_{E1} R_2; L_2 = g_{E1} R_2 g_{12} (R_1 + R_2); L_3 = g_{21} g_{12} R_3 (R_1 + R_2);$$

$$L_4 = -g_{E1} R_2 R_3 \rho C; L_5 = -g_{21} R_1 R_3 \rho C; L_6 = R_2 g_{11} R_2 g_{22};$$

$$L_7 = -R_2 \rho C R_3 g_{22}; L_8 = -g_{11} (R_1 + R_2); L_9 = -R_2 g_{22};$$

$$L_{10} = -g_{12} R_2; L_{11} = -\rho C R_1; L_{12} = -R_3 \rho C; L_{13} = -g_{22} R_3;$$

$$L_{14} = -\rho C R_3 g_{12} (R_1 + R_2); L_{15} = -\rho C R_1 g_{11} R_2;$$

не касающиеся пары контуров: $L_1 L_{10}, L_1 L_{12}, L_8 L_9, L_8 L_{12}, L_8 L_{13},$

$L_9 L_{11}, L_{10} L_{11}, L_{11} L_{13};$

$$\kappa_V = \frac{R_1 \mathcal{D}_1 + R_2 \mathcal{D}_2 + R_3 \mathcal{D}_3 + R_4 \mathcal{D}_4 + R_5 \mathcal{D}_5}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 + L_{10} + L_{11} + L_{12} + L_{13} + \\ + L_{14} + L_{15} + (L_1 L_{10} + L_1 L_{12} + L_8 L_9 + L_8 L_{12} + L_8 L_{13} + L_9 L_{11} + L_{10} L_{11} + L_{11} L_{13}))}.$$

Для графов, построенных непосредственно по схеме цепи, применение формулы Мезона (4.21) приводит к неоправданно большому числу взаимно сокращающихся членов из-за присутствия в каждой вершине петель. Поэтому от них надо сразу же избавляться, как показано на рис.4.24,б,г, 4.25,б, т.е. по известному правилу исключения петли.

Следует заметить, что с точки зрения анализа электрических процессов, протекающих в цепи, построение сигнального графа непосредственно по схеме не дает преимуществ относительно направленного графа, который, как известно, также строится непосредственно по схеме цепи. Однако возникают лишь дополнительные элементы в обозначении, необходимость исключения петель, дробные передачи дуг и другие сложности.

Несколько более рационален в этом отношении способ решения по так называемому обобщенному сигнальному графу (ОСГ), основанный на другой формуле расчета определителя графа — формуле К.Коутса (C. Coates). Для ОСГ используется несколько измененный ее вариант [4], который мы здесь и рассмотрим

$$F_{ad} = \frac{x_d}{x_a} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k D_k^o}{D^o}; \quad (4.27a)$$

$$D_i^o = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}, \quad (4.27b)$$

где δ_{ij} — определитель элементарного графа (фактора графа), получаемый как произведение передач, входящих в него некасающихся контуров (взятых с обратным знаком) и петель (взвешенных вершин). При этом петли (вершины) должны иметь передачи, равные собственным проводимостям соответствующих узлов схемы Y_{ii} .

Суммирование осуществляется по всем элементарным δ_{ij} графам — факторам. Веса вершин, связанных с источником, т.е. не имеющих петель, считаются равными единице.

Алгебраическое дополнение D_k^o пути ρ_k из источника x_a в сток x_b определяется как определитель D^o для части графа, не касающейся пути ρ_k .

Пример 4.14. Найдем передачу графа (см. рис. 4.24, в). При вычислении определителя вершины источники можно удалить из графа.

Определители элементарных δ_{ij} графов (факторов):

$$\delta_1 = Y_{ss} Y_{\kappa\kappa} Y_{zz}; \quad \delta_2 = Y_{ss} (-1) g_{12} (g_{22} - g_{21}); \quad \delta_3 = Y_{\kappa\kappa} (-1) g_{11} (g_{11} - g_{21});$$

$$\delta_4 = Y_{zz} (-1) \rho C (\rho C + g_{21}); \quad \delta_5 = (-1) (\rho C + g_{21}) g_{22} g_{11};$$

$$\delta_6 = (-1) \rho C (g_{11} - g_{21}) (-g_{21} + g_{22}).$$

Определитель графа

$$D^o = Y_{ss} Y_{\kappa\kappa} Y_{zz} - Y_{ss} (g_{22} - g_{21}) g_{22} - Y_{\kappa\kappa} g_{11} (g_{11} - g_{21}) -$$

$$-Y_{22} \rho C (\rho C + g_{21}) - g_{11} g_{22} (\rho C + g_{21}) - \rho C (g_{11} - g_{21}) (-g_{21} + g_{22}) .$$

Передачи путей: $P_1 = \frac{1}{K} (\rho C + g_{21}) ;$

$$P_2 = \frac{1}{K} (g_{21} - g_{11}) (g_{21} - g_{22}) .$$

Дополнения путей:

$$\mathcal{D}_1^C = Y_{22} , \quad \mathcal{D}_2^C = 1 .$$

В результате

$$K_U = \frac{\frac{1}{K} [(\rho C + g_{21}) Y_{22} + (g_{21} - g_{11}) (g_{21} - g_{22})]}{Y_{55} Y_{KK} Y_{22} - Y_{55} g_{22} (g_{22} + g_{21}) - Y_{KK} g_{11} (g_{11} + g_{21}) - Y_{22} \rho C (\rho C - g_{21}) - g_{11} g_{22} (\rho C - g_{21}) - \rho C (g_{11} + g_{21}) (g_{21} + g_{22})}$$

Для графов Мэсона применение формулы Коутса не приводит ни к каким выгодам, выражения для определителей полностью совпадают. В этом можно убедиться, записав определитель $\mathcal{D}^C$ для графа, показанного на рис. 4.31, а, и сравнив его с $\mathcal{D}^M$, полученным в предыдущем примере 4.12. При этом надо полагать вес всех вершин равным 1, т.к. в них нет петель.

Пример 4.15. Для сравнения найдем определитель $\mathcal{D}^M$ для графа на рис. 4.24, а по формуле Мэсона (в предыдущем примере 4.14 для этого графа уже найден определитель $\mathcal{D}^C$ по формуле Коутса). Передачи петель считаем равными $1 - Y_{55}$, $1 - Y_{KK}$ и $1 - Y_{22}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^M = & 1 - [(1 - Y_{55}) + (1 - Y_{KK}) + (1 - Y_{22}) + (g_{21} + \rho C) \rho C + (g_{11} - g_{21}) g_{11} + \\ & + (g_{22} - g_{21}) g_{22} + (g_{11} - g_{21}) (g_{22} - g_{21}) \rho C + (g_{21} + \rho C) g_{22} g_{11}] + [(1 - Y_{55}) \times \\ & \times (1 - Y_{KK}) + (1 - Y_{55}) (1 - Y_{22}) + (1 - Y_{55}) (g_{22} - g_{21}) g_{22} + (1 - Y_{KK}) \times \\ & \times (1 - Y_{22}) + (1 - Y_{KK}) g_{11} (g_{11} - g_{21}) + (1 - Y_{22}) (g_{21} + \rho C) \rho C] - \\ & - (1 - Y_{55}) (1 - Y_{KK}) (1 - Y_{22}) ; \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^M = & 1 - 1 - Y_{55} - 1 - Y_{KK} - 1 - Y_{22} + 1 - Y_{55} - Y_{KK} + Y_{55} Y_{KK} + 1 - Y_{55} - Y_{22} + \\ & + Y_{55} Y_{22} + 1 - Y_{KK} - Y_{22} + Y_{KK} Y_{22} - 1 + Y_{55} + Y_{KK} - Y_{55} Y_{KK} + Y_{22} - \\ & - Y_{55} Y_{22} - Y_{KK} Y_{22} + Y_{55} Y_{KK} Y_{22} - (g_{21} + \rho C) \rho C - g_{11} (g_{11} - g_{21}) - \\ & - (g_{22} - g_{21}) g_{22} - (g_{11} - g_{21}) (g_{22} - g_{21}) \rho C - g_{22} g_{11} (\rho C + g_{21}) + \\ & + (g_{22} - g_{21}) g_{22} - Y_{55} (g_{22} - g_{21}) g_{22} + g_{11} (g_{11} - g_{21}) - Y_{KK} g_{11} (g_{11} - \\ & - g_{21}) + \rho C (g_{21} + \rho C) - Y_{22} \rho C (g_{21} + \rho C) = Y_{55} Y_{KK} Y_{22} - \\ & - Y_{55} g_{22} (g_{22} - g_{21}) - Y_{KK} g_{11} (g_{11} - g_{21}) - Y_{22} \rho C (\rho C + g_{21}) - \\ & - g_{11} g_{22} (\rho C + g_{21}) - \rho C (g_{11} - g_{21}) (g_{22} - g_{21}) . \end{aligned}$$

Таким образом, из 38 слагаемых в выражении для определителя по формуле Мэзона после приведения подобных членов и сокращения в окончательном результате остается только 6 слагаемых. В предыдущем примере 4.14 при решении этой задачи по формуле Коутса тот же результат получен без приведения подобных членов и их сокращения. Это говорит о рациональности применения формулы Коутса в графах с петлями (взвешенными вершинами), построенных непосредственно по схеме электронной цепи.

4.3.7. Порядок анализа электронных схем методом сигнальных графов

1. Постановка задачи анализа.
2. Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.
3. Составление топологической модели для анализа схемы по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.
4. Подбор для электронных компонентов наиболее подходящих по режиму их работы и задачам анализа математических (уравнения) или топологических (эквивалентные схемы, сигнальные графы) моделей.
5. Составление сигнального графа схемы (по Мэзону или Коутсу) по принципу причина-следствие или непосредственным способом.
6. Упрощение сигнального графа до вида, определяемого возможностью не очень сложного применения формул общей передачи графа.
7. Выбор формулы общей передачи для записи выражения схемных функций – если в графе много петель, рекомендуется применение формулы Коутса.
8. На графе ищутся и записываются передачи всех контуров, затем составляются комбинации из некасающихся контуров.
9. Определяются пути между вершинами, определяемыми искомой схемой функций.
10. Записываются выражения схемных функций по выбранной формуле общей передачи графа.
11. Построение частотных или временных характеристик.
12. Вычисление чувствительностей.
13. Анализ схемы на устойчивость.

4.4. Предварительный расчет электронных схем

4.4.1. Предварительный выбор компонентов и расчет их параметров

Является неотъемлемой частью процесса проектирования. В современных схемотехнических САПР нет пакета программ для предварительного расчета схем. Объясняется это в основном трудностями создания общего универсального подхода к расчету схем, имеющих самое разное назначение, т.е. любой набор функций логических и электрических. Широко распространенные САПР решают в основном задачи анализа схем и их оптимизацию, для чего в систему необходимо представить расчетный вариант схемы. Чем точнее проведен предварительный расчет представленного варианта, тем более достоверными получаются результаты его автоматизированного анализа и значительно ускоряются процессы оптимизации. Перспективно развитие специализированных схемотехнических САПР, рассчитанных на определенные классы схем, сгруппированных по их назначению и другим специфическим особенностям. В этом случае возможно создание программ предварительного расчета схем, ориентированных на те же классы схем. Необходимые алгоритмы расчета схем можно найти в учебной литературе по соответствующим курсам. Так, схемы усилителей – в курсе электронные цепи или усилительные устройства; схемы формирователей импульсных сигналов – в курсе электронные цепи или импульсные устройства; схемы преобразователей электрической энергии (выпрямители, инверторы и др.) – в курсе преобразовательная техника – и т.д. Возможность использования разработанных методик расчета без труда реализуется по отношению к известным хорошо изученным схемам. Однако новые задачи требуют разработки новых порой оригинальных схемных решений тех же известных устройств, отвечающих уже повышенным требованиям или отличающихся расширенными функциональными возможностями. В этом случае известные методики расчета не всегда могут быть применены непосредственно, они, как правило, требуют либо модернизации, либо практически полной замены. Дальнейшее изложение этого раздела как раз и ориентировано на подобные и более трудные случаи, готовый ответ на которые не найти в учебной и другой литературе.

Независимо от специфических особенностей отдельных классов схем имеются и общие положения, которые могут быть использованы при составлении алгоритма расчета схем. Основным из них является необходимость формирования аналитической расчетной модели схемы

(АРМ), Последняя должна содержать: 1) уравнения (аналитические выражения) для отдельных токов и напряжений, имеющих функциональное значение, и для электрических параметров компонентов схемы (сопротивлений резисторов, емкостей конденсаторов, индуктивностей катушек и т.д.); 2) условия-ограничения на выбор указанных токов, напряжений и параметров компонентов схем; 3) формулы определения необходимых по ТЗ схемных параметров (коэффициенты передач, неустойчивости, искажений, нелинейности, потребляемая мощность и др.)

Способов составления уравнений схемы существует немало, однако наиболее пригодным для формирования их в виде именно аналитических выражений является причинно-следственный подход. Он, как мы видели ранее, используется для составления сигнального графа схемы. Оличительной особенностью уравнений для АРМ является, очевидно, то, что в качестве искомых переменных наряду с выделенными отдельными токами и напряжениями, должны быть электрические параметры компонентов схемы. В уравнениях для сигнальных графов последние выступали в качестве коэффициентов, т.к. в задаче анализа они должны быть известными величинами. В качестве исходной топологической модели схемы для составления уравнений, выбирают её статическую или динамическую модель. Наиболее просто это делается для различных усилительных устройств. Для нелинейных и ключевых устройств может быть несколько статических и динамических моделей в зависимости от состояния ключей. Их выбор в качестве исходной модели определяется функциональной значимостью и наибольшим числом параметров компонентов, входящих в модель АРМ. Формирование условий-ограничений на выбор компонентов схем и их параметров представляется наиболее трудно решаемой задачей. Именно в этом процессе необходимо глубоко познать и учитывать в полной мере специфику рассчитываемой схемы, связанной с её: 1) функциональным назначением; 2) принципом работы, обеспечивающим функционирование заданным образом, стабилизацию выходных параметров в диапазоне температур и других дестабилизирующих факторов, заданную помехоустойчивость и надежность в работе.

Формулы для определения необходимых по ТЗ схемных параметров выписываются согласно принятым для данного класса устройств определениям. Например, коэффициент передачи низкой частоты на ОУ $K_{oc} = 1 + R_2 / R_1$, где R_2 - сопротивление резистора обратной связи; коэффициент его неустойчивости $\delta_K = \sqrt{\delta K_{техн}^2 + \delta K_{темпер}^2}$; коэффициент неустойчивости тока коллектора транзистора $S(I_c) = \Delta I_c / I_c$; коэффициент нелинейности пилообразного напряжения

(ГПН и другие устройства) $K_H = [(U'_{\text{внх}})_{\text{max}} - (U'_{\text{внх}})_{\text{min}}] / U'_{\text{внх. ср.}} \cdot 100$
 $U'_{\text{внх. ср.}} = [(U'_{\text{внх}})_{\text{max}} + (U'_{\text{внх}})_{\text{min}}] / 2$ и т.д.
 $U'_{\text{внх. ср.}} = U_{\text{внх. max}} / T_{\text{np}} = U_m / T_{\text{np}}$;
 коэффициент неравномерности АЧХ $M = K(\omega) / K_0$; выходное напряжение на выходе многокаскадного усилителя $U_{\text{внх}} = K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n \cdot U_{\text{вх}}$;
 амплитуда напряжения на выходе интегратора $U_m = I_a \cdot T / C$; коэффициент нелинейных искажений усилителя $K_r = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + \dots} / U_{1m}$ и др.

Анализ отмеченных факторов и определений схемных параметров довольно глубоко проведен в специальной литературе по отдельным классам электронных устройств и их схемам. Наиболее доступно результаты этих исследований изложены в соответствующей учебной литературе, что и необходимо уметь использовать при формировании условий-ограничений на выбор компонентов схем и их параметров.

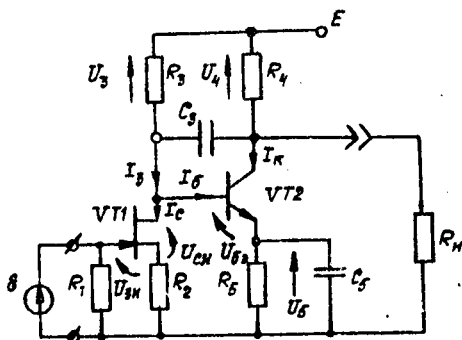
Наиболее общими для всех схем могут быть, пожалуй, вопросы выбора электронных компонентов. Как правило, стремятся начать расчет с выбора конкретных типов транзисторов, диодов, операционных усилителей и других микросхем, пользуясь при этом известными рекомендациями. Последние, кстати, и формулируются в виде условий-ограничений на выбор электронных компонентов: по допустимым электрическим параметрам (напряжение, ток); диапазону частот (времени включения, выключения); коэффициенту передачи; шумовым характеристикам; термостабильности; допустимой мощности рассеивания и др. Решение о выборе типа электронной компоненты принимается путем составления в основном данных ТЗ и некоторых расчетных соотношений. После выбора электронных компонентов часть искомых параметров в АРМ определяется их паспортными данными и типовыми параметрами номинального режима эксплуатации. При необходимости эксплуатации электронной компоненты в режиме отличном от номинального чаще всего требуется проведение экспериментальных исследований для получения необходимых параметров этого режима. Последующее разрешение системы АРМ связано с определением параметров пассивных компонентов схемы. Для чего необходимо, пользуясь данными ТЗ, определить ещё одну часть переменных. Тогда они будут выступать как задающие (независимые) в системе уравнений АРМ. Далее рассмотрим наиболее типичные примеры расчета.

4.4.2. Линейный усилитель

ТЗ: активная мощность нагрузки P_H ; сопротивление нагрузки R_H ; коэффициент усиления по напряжению K_{oc} ; допустимая неста-

бильность δK_{oc} ; допустимый уровень частотных искажений M_H, M_B ; диапазон усиливаемых частот от f_H до f_B ; диапазон рабочих температур ΔT° ; допустимый коэффициент нелинейных искажений K_r ; входное сопротивление $R_{вх}$ и др. Рассмотрим двухкаскадный усилитель, показанный на рис. 4.33. Составим систему уравнений равновесия по принципу причина-следствие, руководствуясь обозначениями статических составляющих токов и напряжений, показанными на схеме. За основу берем статическую модель усилителя, исключая из его схемы конденсаторы.

рис. 4.33



$$U_{K3} = E - U_5 - U_4 ;$$

$$U_5 = I_3 R_5 ;$$

$$U_4 = I_K R_4 ;$$

$$I_K = h_{212} I_B ;$$

$$I_3 = I_B + I_K ;$$

$$I_B = I_3 - I_C ;$$

$$I_C \approx \beta U_{BE} ;$$

$$U_{BE} = I_C R_2 ;$$

$$I_3 = U_3 / R_3 ;$$

$$U_3 = E - U_{CE} - U_{BE} ;$$

$$U_{CE} = -U_{BE} + U_{BC} + U_5 .$$

Анализируя в традиционном духе полученную систему, замечаем, что всего переменных 19, из них независимых $\delta - E, R_5, R_4, h_{213}, S, R_2, R_3, U_{B3}$, самих уравнений - 11. С учетом предполагаемого выбора транзисторов преобразуем систему в АРМ путем перевода искоемых R_5, R_4, R_2, R_3 из независимых в зависимые переменные

$$R_5 = U_5 / I_K ;$$

$$R_4 = U_4 / I_K = \frac{E - U_5 - U_{K3}}{I_K} ;$$

$$R_2 = U_{3U} / I_C ;$$

$$R_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{U_3}{I_C + I_B} = \frac{E - U_{CU} - U_{3U}}{I_C + I_B} ,$$

$$U_{CU\text{ доп}}, U_{K3\text{ доп}} > E > U_m + U_{CU} + U_{3U} + U_3, U_{K3} + U_5 + U_4 + U_m ;$$

$$I_B = I_K / h_{213} .$$

В результате получаем 6 уравнений (аналитических выражений) для искоемых параметров резисторов и 9 независимых переменных, которые для разрешимости полученной системы уравнений необходимо доопределить. Для этой цели используются данные ТЗ, формулируются условия-ограничения и дополнительные расчетные соотношения, о которых упоминалось выше. В этот момент необходимо от общего подхода подойти к рассмотрению конкретного назначения в устройстве отдельных компонентов и цепей. Так, необходимо выбрать конкретный тип транзисторов, отвечающих следующим условиям-ограничениям:

$$U_{K3\text{ доп}} > U_{K3} + U_{Km}, E ;$$

$$I_{K\text{ max доп}} > I_K + I_{Km} ,$$

где U_{Km}, I_{Km} - амплитудные значения переменных составляющих напряжения и тока на коллекторе;

U_{K3}, I_K - напряжение и ток рабочей точки покоя (в статике) транзистора;

$$h_{213} \geq h_{213\text{ ТЗ}} ,$$

где $h_{213\text{ ТЗ}}$ - значение коэффициента передачи, определенное в ТЗ или из каких-либо дополнительных соображений (это условие не обязательное);

$$I_{K3R} \leq I_{K3R\text{ ТЗ}} ,$$

где $I_{K3R\text{ ТЗ}}$ - значение обратного тока в цепи коллектор-эмиттер при заданном напряжении U_{K3} и при заданном сопротивлении в цепи

базы, определяемых в ТЗ или из дополнительных соображений, если они есть;

$$f_{гр} > f_{в\text{ тз}},$$

где $f_{гр}$ - граничная частота коэффициента передачи тока в схеме с общим эмиттером, при которой его модуль экстраполируется к единице;

$f_{в\text{ тз}}$ - значение верхней частоты определяемой в ТЗ полосы пропускания проектируемого усилителя;

$$P_K, P_{K\text{ max}} > P_{K\text{ тз}},$$

где $P_{K\text{ тз}}$ - постоянная мощность рассеяния коллектора определяется из ТЗ или других соображений.

Наряду с приведенными можно вводить дополнительные условия-ограничения, определяемые спецификой конкретной схемы. Аналогично формируются условия-ограничения для выбора униполярного транзистора.

Когда выбор транзисторов схемы произведен из справочника, выписываются его паспортные данные необходимые для расчета:

$$h_{21э}, S \text{ и } g_p.$$

Исходя из требуемого линейного режима усиления, необходимо определить (выбрать) оставшиеся параметры: $U_{кз}$, I_K , $U_{сз}$, $U_{зс}$, I_c и U_s, E . Параметры $U_{кз}$ и I_K определяются выбором рабочей точки, которая должна находиться на пересечении нагрузочной линии со статическими выходными характеристиками транзистора (рис. 4.34).

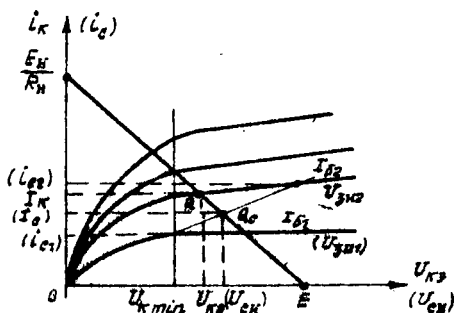


Рис. 4.34

Выбор положения рабочей точки (точки покоя) Q определяется :

1) назначением схемы; 2) режимом работы; 3) температурными условиями; 4) типом связи с нагрузкой (трансформаторная, безтрансформаторная и др.); 5) заданными коэффициентами усиления и нелинейных искажений; 6) к.п.д. и др. Так, если входной сигнал схемы с общим эмиттером или общим истоком биполярный и симметричный, то рабочая точка выбирается примерно в центре используемой части линии нагрузки. Если входной сигнал положительной полярности, рабочая точка

Q выбирается в нижней части линии нагрузки для униполярного транзистора с правой входной характеристикой (положительным питанием) и биполярного транзистора типа $n-p-n$ (т.е. в области больших отрицательных смещений или малых базовых токов соответственно) и в верхней части линии нагрузки (при больших базовых токах) - для транзистора типа $p-n-p$, работающего в этом случае на запирающие. Иногда для схем линейного усиления в предварительных расчетах с целью их максимального упрощения выбирают

I_K и $U_{KЭ}$, ориентируясь на типовой номинальный режим, при котором измеряются его основные h параметры и др. (они, как правило, всегда приводятся в справочниках). Точнее координаты рабочей точки определяют так: $U_{KЭ} \approx U_{Kтн} + U_{Kтнл} + U_{KЭ}^T$,

$I_K = I_{Kтнл} + U_{Kтн} / R_H + U_{Kтн} / R_4$, где $U_{Kтн}$ - напряжение, ограничивающее линейный участок выходной характеристики транзистора снизу (см. рис.4.34); $\Delta U_{KЭ}^T$ - ожидаемое температурное изменение напряжения рабочей точки; $I_{Kтнл}$ - ток, ограничивающий линейный участок характеристики снизу. Сопротивление резистора R_4 выбирается из условия $R_4 \approx R_H \sqrt{F}$ при емкостной развязке на выходе усилителя. Для униполярных транзисторов данные линейного режима усиления даются в справочниках весьма редко, поэтому координаты рабочей точки следует выбирать на нагрузочной линии, как показано на рис.4.34. При автосмещении униполярных транзисторов рекомендуется находить рабочую точку Q на пересечении нагрузочной линии с линией смещения. Так, если нагрузочная линия определяется уравнением

$$U_{cu} = E - I_c (R_c + R_u),$$

то линия смещения определяется уравнением

$$U_{ju} = -I_c R_u$$

и строится в тех же координатах I_c , U_{cu} . Для этого выбирают хотя бы пару разных значений тока стока I_c и находят при заданном сопротивлении в истоке R_u значение $U_{Ru} = |U_{ju}| = I_c R_u$.

В результате получают прямую $I_{c1} - I_{c2}$ (см.рис.4.34), а на пересечении с линией нагрузки - рабочую точку Q . Такой способ, как видим, требует предварительно выбрать величину резистора R_H (в нашем случае R_2), поэтому его чаще используют на этапе проверки правильности расчета. Возможен другой подход, который требует сначала выбрать рабочую точку $Q(U_{BE}, I_C)$ на нагрузочной линии в соответствии с вышеуказанными рекомендациями, т.е. по характеру входного сигнала. Затем из передаточной характеристики транзистора $I_C = f(U_{BE})$ (рис.4.35) находят соответствующее выбранной рабочей точке Q по току I_C значение U_{BE} . Для более быстрого определения напряжения смещения U_{BE} можно воспользоваться упрощенной процедурой, не требующей обращаться к передаточной характеристике, которую, кстати, приводят не во всех справочниках и не для всех транзисторов. Для этой цели необходимо воспользоваться грубой аппроксимацией передаточной характеристики прямой линией с наклоном, определяемым крутизной передачи S . Тогда $U_{BE} \approx (I_{C\text{ макс}} - I_C) / S$.

В результате проделанной работы (выбор рабочей точки, расчет напряжения смещения) могут быть определены I_K , $U_{KЭ}$, I_C , U_{CE} .

U_{BE} при условии предварительно выбранного или заданного в ТЗ напряжения питания усилителя E . Для нашего примера (рис. 4.33) величину E можно определить после выбора I_K и $U_{KЭ}$ по справочным данным как величин типового линейного режима

$$E \approx U_{KЭ} + U_m + U_H + U_F,$$

где принимают $U_H = I_C R_H$, $U_F \approx (5 \div 10) U_{BE}$. При этом напомним, что у германиевых транзисторов $U_{BE} = 0,1 \div 0,3$ В, у кремниевых $U_{BE} \approx 0,6 \div 0,8$ В. При ёмкостной связи с нагрузкой R_H $R_4 \approx \sqrt{2} R_H$, при непосредственном включении $R_4 \approx R_H$.

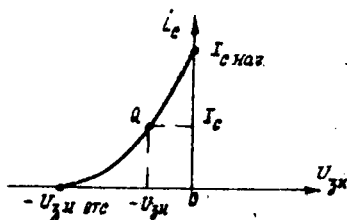


Рис.4.35

Часто задаются при расчетах коэффициентом неустойчивости рабочей точки и с учетом его значения определяют величину эквивалентного базового сопротивления R_B по формуле [5]:

$$R_B = \frac{(S(I_{K0}) - 1) R_3}{1 - (1 - \alpha) S(I_{K0})},$$

где $R_B = R_3 \cdot R_{i0} / (R_3 + R_{i0})$; R_{i0} - статическое выходное сопротивление транзистора VT1 в рабочей точке; $R_{i0} = U_{ce} / I_c$. На основании этих формул достаточно провести проверку полученной величины R_B по величинам R_3 и R_{i0} и заданному значению $S(I_{K0}) = \Delta I_K / \Delta I_{K0}$, где ΔI_K - допустимое отклонение от I_K в рабочей точке; ΔI_{K0} - изменение обратного тока коллектора в заданном диапазоне температур. Проверка возможна и по удовлетворительности полученной величины $S(I_{K0})$ по формуле

$$S(I_{K0}) = \frac{R_B + R_3}{(1 - \alpha) R_B + R_3} = \frac{R_B + R_5}{(1 - \alpha_{VT2}) R_B + R_5}.$$

Если $S(I_{K0})$ не задано, его можно выбирать в пределах от 2 до 10.

Заметим, что этот и последующие примеры приводятся здесь лишь с целью иллюстрации подхода к осуществлению предварительного расчета различных схем устройств и не следует поэтому стремиться их копировать как готовые методики.

4.4.3. Формирователь импульсов пилообразного напряжения (ПН)

На рис.4.3.6 показана схема, и ее топологические и динамические модели. Первая отражает только процесс заряда формирующего конденсатора C , соответствующий интервалу времени T_{np} , в течении которого происходит формирование линейно растущей части импульса (ключевой разрядный транзистор VT1 закрыт, так как на входе отпирающий импульс отсутствует). Вторая отражает процесс разряда конденсатора C . Приведем типовое ТЗ на формирователь импульсов ПН: амплитуда импульсов ПН - U_m ; длительность прямого хода - T_{np} ; длительность обратного хода - T_{ox} ; величина сопротивления нагрузки - R_H ; коэффициент нелинейности - κ_H ; коэффициент неустойчивости амплитуды - σU_m ; потребляемая мощность - P и др.

Составим уравнения равновесия по причинно-следственному принципу

$$U_{Bnx} = I_{B3} R_3 = (I_{K3} + I_{B3}) R_3 = -U_{K33};$$

$$I_{B3} = g_{11 K3} U_{B33} + g_{12 K3} U_{K33};$$

$$I_{K3} = g_{21 K3} U_{B33} + g_{22 K3} U_{K33} = g_{21 K3} U_{B33} - g_{22 K3} U_{B32} ;$$

$$U_{B33} = U_C - U_{B32} ;$$

$$U_C = I_C T_{np} / C ;$$

$$I_C^* = I_{K2}^* - I_{K1} - I_{B3} = I_{K2}^* - I_{B3} - U_C / R_{K3X1} ;$$

$$I_{K2}^* = -g_{21 B2} U_{B32} - g_{22 B2} U_{K32}^* ;$$

$$U_{K32}^* = E - U_C - U_{R1}^* ;$$

$$U_{B32}^* = U_{CT} - U_{R1}^* ;$$

$$U_{R1}^* = I_{32}^* R_1 = (I_{K2}^* + I_{B2}) R_1 ;$$

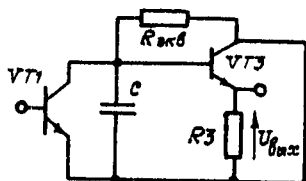
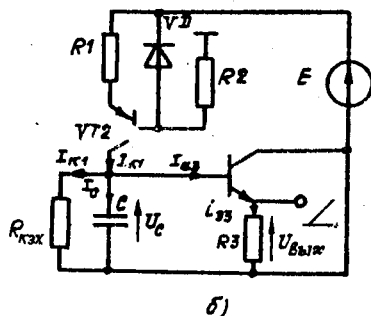
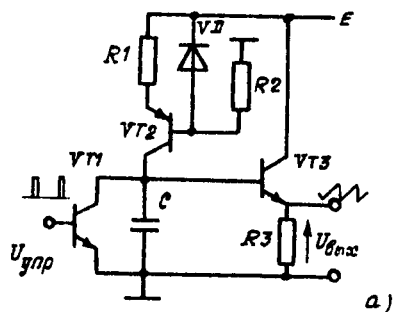
$$I_{B2} = -g_{11 B2} U_{B32} - g_{12 B2} U_{K32}^* ;$$

$$U_{CT} = E - U_{R2} ;$$

$$U_{R2} = I_{R2} R_2 ;$$

$$I_{R2} = I_{B2} + I_{CT} ;$$

$I_{CT} \gg 10 I_{B2}$ и определяется типовым режимом выбранного стабилизатора V_D .



б)

Рис. 4.36

Переменные, обозначенные звездочкой, содержат постоянную и переменную составляющие: $i_c^* = I_c - \Delta I_c$, $i_{k2}^* = I_{k2} - \Delta I_{k2}$, $U_{R1}^* = U_{R1} - \Delta U_{R1}$, где $\Delta I_c \ll I_c$, $\Delta I_{k2} \ll I_{k2}$, $\Delta U_{R1} \ll U_{R1}$, $U_{k32} = U_{k32} - \Delta U_{k32}$, где $\Delta U_{k32} \gg U_{k32}$.

Такова особенность динамического моделирования схем ГПН, облегчающая их последующий расчет. Путем выбора типов транзисторов и стабилитрона, основанном на использовании данных ТЗ, уменьшаем часть искоемых переменных в составленных уравнениях. Теперь сформулируем АРМ, продолжая использовать данные ТЗ для уменьшения числа переменных $R_3 \leq R_H$;

$C \approx (I_{k2} - I_{B3 \max} - U_{mc} / R_{k3x1}) T_{np} / U_{mc} \approx [I_{k2} - (1/h_{2153} R_3 + 1/R_{k3x1})] T_{np} / U_{mc}$,
или при условии $I_{k2} \gg 1/h_{2153} R_3 + 1/R_{k3x1}$, которое
при малых заданных значениях K_H всегда должно выполняться

$$C \approx I_{k2} T_{np} / U_m, \text{ т.к. } U_m \approx h_{2153} U_{mc} \approx U_{mc};$$

$$I_{k2} \approx g_{2152} U_{B32} = g_{2152} (U_{cT} - U_{R1}) \approx g_{2152} (U_{cT} - I_{k2} R_1),$$

отсюда

$$I_{k2} \approx g_{2152} U_{cT} / (1 + g_{2152} R_1) \approx U_{cT} / R_1.$$

В соответствии с ТЗ, поскольку $K_H = \Delta I_c / I_c$,

$$I_{k2} \geq \Delta I_c / K_H \approx U_m (1/h_{2153} R_3 + 1/R_{k3x1}) / K_H.$$

Ограничение сверху на I_{k2} определяется значением заданной мощности P , потребляемой от источника коллекторного питания E

$$I_{k2} \leq P - (I_{cT} + I_{k3}) E.$$

Из второй модели определяем ток разряда конденсатора C .

В ключевом режиме транзистор V_{T1} во время обратного хода пилообразного напряжения насыщается. Обычно поэтому значение тока разряда C I_{k1} определяют из ТЗ по заданной длительности обратного хода T_{ox} .

$$I_{k1} \approx \frac{I_{k2} T_{np}}{T_{ox}} \leq I_{k \max} \text{ по л. умл. VT1.}$$

Правила и приемы для предварительного расчета усилительных и других схем можно также позаимствовать из литературы. Наиболее простое изложение правил, приемов и рекомендаций по упрощенному расчету типовых подсхем дано в [14].

4.5. Моделирование и анализ функциональных схем

4.5.1 Составление функциональных схем

Как правило, анализу или расчету, а также схемотехническому синтезу предшествует этап синтеза функциональной схемы (ФС) устройства. Она отражает идею работы устройства во многих её деталях на функциональном, т.е. информационном уровне. По моделям этого уровня решаются задачи анализа правильности функционирования устройства (идеология и логика), рассчитываются метрологические характеристики (погрешности измерения, преобразования, трансформации с одного информативного языка на другой), помехоустойчивость, надежность, стабильность и т.п., в целом, для всего проектируемого устройства. Возможны два подхода к синтезу функциональных схем. В основу первого положен алгоритм функционирования, составляемый, в свою очередь, по предложенному ТЗ с учетом выбранного или изобретенного нового способа решения поставленной в ТЗ задачи. Основу второго подхода составляет выбранная ранее или заданная электронная схема устройства. Эти подходы очевидно определяют сразу и возможные задачи по исследованию полученных ФС. В первом случае исследование преследует цель последующей разработки принципиальной электронной схемы для реализации выбранной ФС. Во втором случае задача исследования – анализ обобщенных функциональных характеристик устройства на информационном уровне, как уже указывалось выше. Кроме того, по результатам последнего анализа может быть оптимизирован выбор тех или иных подсхем, каскадов, ранее принятых в общей принципиальной схеме устройства.

Рассмотрим примеры построения ФС по готовым принципиальным схемам устройств.

1. Устройство автоматической регулировки усиления (АРУ) [6]
(рис.4.37) состоит из усилителя с регулируемым коэффициентом усиления по входу 2, детектора и фильтра. Последние преобразуют амплитуду низкочастотных колебаний в напряжение управления коэффициентом усиления усилителя. Здесь усилитель и детектор представлены каждый линейным и нелинейным безынерционными звеньями. Нелинейное звено (блок) f_1 реализует зависимость $\kappa_{\omega} = f(U_{\varphi})$ – коэффициент усиления на частоте ω от управляющего напряжения на выходе фильтра. Блок f_2 реализует нелинейную функцию детектора (диодной схемы).

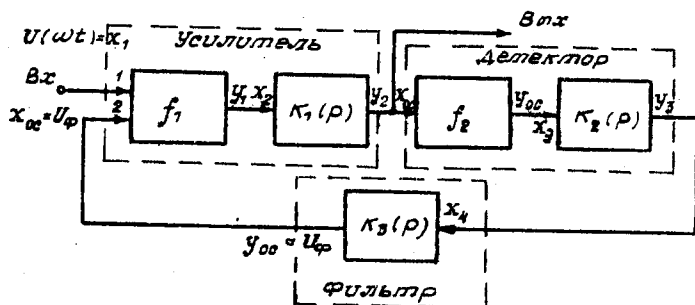


Рис.4.37

2. Преобразователь (рис.4.38) цифрового двоично-десятичного кода Y в частоту F состоит из генератора тактовых импульсов, управляемого кодом делителя частоты 2; схемы ИЗ; счетчика импульсов 4, управляемого кодом делителя частоты 5; схемы тайлера, содержащего делитель частоты 6; триггер 7 и схемы И8.

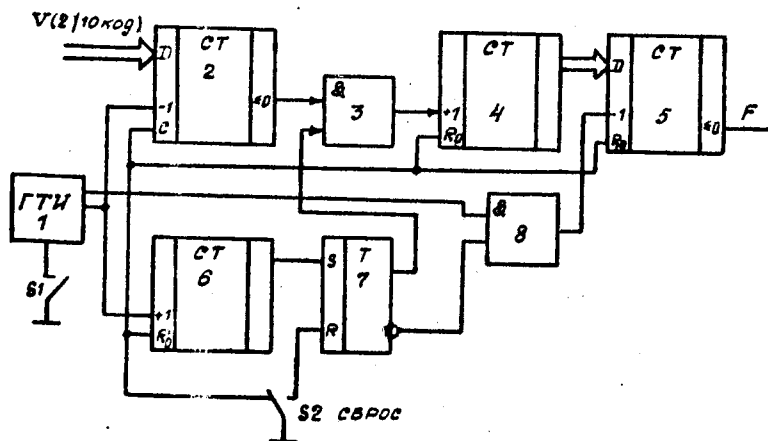


Рис.4.38

После записи на входе усилителя частоты 2 двоично-десятичного кода V и пуска преобразователя кнопкой $S1$ на информационном выходе счетчика 4 и соответственно на входе D усилителя 5 накапливается через определенное время преобразования T_n код числа $\kappa = F_0 T_n / V$, где F_0 — частота импульсов на выходе генератора 1. По окончании преобразования на вход делителя 5 подается последовательность импульсов с частотой F_0 через схему И 8, на его выходе частота импульсов $F = F_0 / \kappa$. Время преобразования определяется в таймера выбранным коэффициентом деления M делителя 6. Тогда $T_n = M / F_0$. В результате $F = F_0 / \kappa = F_0 V / F_0 T_n = V / (F_0 T_n)$. При $T_n = 1$ $F = V$, т.е. осуществляется пропорциональное преобразование цифрового кода V в частоту F .

4.5.2. Математическое моделирование функциональных схем (ФС)

Есть два подхода: формальный и причинно-следственный (имитационный). Для ФС, не содержащих логических (т.е. недифференцируемых) переменных наиболее часто применяют формальный подход. Он состоит в описании ФС уравнениями двух типов: уравнениями связей блоков (топологические уравнения) и уравнениями самих функциональных блоков (компонентными уравнениями). При этом не учитывается особенность ФС, заключающаяся в свойствах взаимной развязки блоков и их однонаправленности.

Составим уравнение для ФС на рис.4.37.

Компонентные уравнения	Топологические уравнения
$Y_1 = f_1(U(\omega t), U_{\varphi}) = f_1(x_1, x_4);$	$x_2 = y_1;$
$y_2 = \kappa_1(x_2(\rho)) = \kappa_1(x_2);$	$x_{oc} = y_2;$
$y_{oc} = f_2(x_{oc});$	$x_3 = y_{oc};$
$y_3 = \kappa_2(x_3(\rho)) = \kappa_2(x_3);$	$x_4 = y_3;$
$y_4 = \kappa_3(x_4(\rho)) = \kappa_3(x_4)$	$x_{oc}^* = y_{oc}^*$

Далее путем очевидных подстановок число уравнений можно сократить вдвое.

По причинно-следственному принципу уравнения составляются аналогично рассмотренным ранее процедурам составления уравнений по сигнальному графу, так, для той же ФС

$$y_2 = \kappa_1 (f_1(x_1, \kappa_3(\kappa_2(f_2(y_2))))).$$

Полученное уравнение можно решать методом простых итераций

$$y_2^{(\kappa+1)} = \kappa_1 (f_1(x_1, \kappa_3(\kappa_2(f_2(y_2^{(\kappa)}))))).$$

Сходимость решения одиночного уравнения методом простых итераций можно обеспечить, применяя вспомогательные приемы, например

$$y_2^{(\kappa+1)} = y_2^{(\kappa)} - \lambda (y_2^{(\kappa)} - \kappa_1(f_1(x_1, \kappa_3(\kappa_2(f_2(y_2^{(\kappa)}))))),$$

и принимая достаточно малым значение λ .

Отсюда видно, что каждая петля обратной связи порождает уравнение вида $x = f(x)$. Для линейных схем когда все элементы петли обратной связи линейные, т.е. $Y_i = \kappa X_i$, уравнения решаются аналитически, в общем случае имеем нелинейные уравнения, которые решаются численными методами.

Если в ФС имеется n петель обратных связей, то её модель содержит n уравнений типа $x = f(x)$. Допустим, что петли обратных связей включены последовательно, как показано на рис. 4.39, а. Тогда уравнения модели можно решать последовательно и независимо друг от друга

$$y_1^{(\kappa+1)} = f_1(x, f_{oc,1}(y_1^{(\kappa)}));$$

$$y_2^{(\kappa+1)} = f_2(y_1, f_{oc,2}(y_2^{(\kappa)})).$$

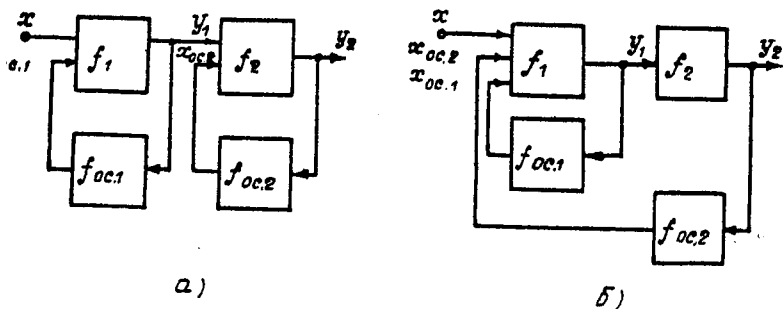


Рис. 4.39

Здесь y_1 во втором уравнении есть результат решения первого уравнения. Допустим теперь, что в ФС одна петля обратной связи охватывает собой другую, как показано на рис.4.39,б. Тогда модель представляется системой связанных уравнений:

$$y_1^{(p+1, \rho)} = f_1(x, f_{02p}(y_2^{(\rho)}), f_{0c,1}(y_1^{(\rho)}));$$

$$y_2^{(\rho+1)} = f_2(y_1^{(\rho)}).$$

Здесь первое уравнение решается до оходимости (получение $y_1^{(\rho)}$) на каждой итерации (при каждом ρ) второго уравнения, т.е. получается алгоритм типа "цикл в цикле". Как видим, $y_2^{(\rho)}$ выступает как параметр в первом уравнении. Если последовательность значений $y_1^{(\rho)}$ ($\rho = 1, 2, \dots$) при этом сходится, то для итерации по y_2 также обеспечивается сходимость.

Возможны другие способы организации итераций (метод простых итераций, метод Зейделя) [6].

По ФС проводят расчет статических временных диаграмм (СВД) и переходных характеристик (ПХ). Первую определяют при условии, что на вход ФС подан медленно изменяющийся сигнал $x(t)$, так что инерционностью элементов ФС можно заведомо пренебречь. Зависимости $y(t)$ на выходе и в любых внутренних точках схемы называются СВД. Способ расчета СВД и ПХ рассмотрен в [6].

Заметим, что принцип независимости (развязки) блоков ФС позволяет применять при моделировании разные способы математического описания блоков. Допустим, для ФС, состоящей из трех последовательно соединенных блоков, первый блок представлен дифференциальным уравнением, второй – переходной характеристикой, третий – коэффициентом передачи $K(\rho)$ или $K(j\omega)$. В этом случае реализация модели может быть проведена последовательно. Сначала численно решается дифференциальное уравнение первого блока и находится полный сигнал на его выходе в виде множества дискретных значений $y_i = y(t_i)$, $i = 1, n$. Затем по формуле дискретной свертки вычисляется полный сигнал на выходе второго блока ФС и далее рассчитывается сигнал на выходе третьего блока (выход ФС) $y_{вых}$ на основе рекуррентных уравнений

$$y_n = \sum_{i=0}^n a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^m b_i y_{n-i},$$

где новое значение y_n находится по известной старой m – предистории (m точек) для y и κ – предистории для x .

4.5.3. Математическое моделирование функциональных схем цифровой аппаратуры (микропроцессоров и микро-ЭВМ)

В ΦC указанного типа в качестве отдельных блоков рассматриваются такие устройства, как регистры, счетчики, сумматоры, блоки памяти, триггеры управления и т.п. Сигналы здесь выступают в форме машинных слов, соответствующих разрядности регистров, запоминающих блоков и арифметико-логического устройства. Анализ ΦC обычно в этом случае выполняется на ЭВМ путем моделирования на так называемом регистровом уровне (уровне регистровых передач), другими словами это пример применения имитационной модели, когда полностью имитируется работа устройства. Посредством такого моделирования решаются задачи: а) проверки правильности функционирования устройства в целом; б) отладки программы; в) оптимальность выбранной структуры; г) то же для отдельных блоков ΦC на логическом уровне.

Блоки ΦC на регистровом уровне представляются чисто информационными моделями, которые не учитывают особенности внутреннего строения, временные характеристики, токи, напряжения, пороги срабатывания, нагрузочные способности и т.д. Сигналы (переменные модели) представляются списками, состоящими из нулей и единиц. Они отражают состояние регистров, счетчиков, информационных шин. Объект моделирования всегда представляется в виде двух частей: операционной и управляющей, работа которых осуществляется по тактам. В каждом рабочем такте управляющая часть формирует сигналы, в ответ на которые операционная часть откликается определенными действиями (совершает определенные операции). Порядок и характер совершаемых операций задается, в свою очередь, программой, хранящейся в запоминающем устройстве (ЗУ). Здесь необходимо вспомнить, что операционная часть ЭВМ выполняет такие элементарные операции для передачи, запоминания и преобразования информации, как перезапись информации из одного регистра в другой, чтение и запись в процессе обмена с ОЗУ, установка триггеров управления в определенное состояние, сдвиг информации в регистрах на один и более разрядов и другие так называемые микрооперации. Каждой микрооперации в операционной части ЭВМ соответствует свой инициирующий сигнал - микрокоманда. Выполнение команды программы происходит за несколько тактов, в каждом из которых выполняется определенная микрооперация, составляющая заданную команду. Число

микроопераций в каждой ЭВМ свое и может составлять десятки - сотни единиц. Длительность такта выбирается с учетом самой продолжительной микрооперации, тогда все остальные заведомо укладываются в отведенное время. Определенная часть микроопераций выполняется параллельно.

Моделирование ФС на регистровом уровне заключается в составлении моделирующей программы, выполняющей покомандную имитацию выполнения машинной программы, записанной в ЗУ моделированной ЭВМ. Далее осуществляется анализ преобразований информации, представленной в двоичном коде. Машинная программа представляет собой исходные данные (сигналы) для моделирующей программы.

Запуск и работа моделирующей программы управляется с помощью директив. При составлении модели необходимо включить описание структуры ФС ЭВМ (регистры, счетчики, АЛУ и т.п.) и операционное описание.

Моделирование может быть выполнено по структурной схеме, приведенной в [6] (рис.4.40). Описание модели переводится в трансляторе с алгоритмического языка на машинный. Управляющая программа организует процесс моделирования с помощью директив - специальных операторов. Основные из них следующие: трансляция; ввод исходной информации в модель (программы в ЗУ модели, установка исходных состояний всех логических блоков); задание точек, в которых должна контролироваться информация в процессе моделирования; задание режимов работы; продолжительность моделирования и др. Результаты моделирования в каждом рабочем такте выводятся (печать, дисплей) и представляют собой двоичные, восьмеричные и шестнадцатеричные коды содержимого регистров, ячеек ОЗУ, триггеров управления и т.п. Анализируя выводимую информацию, сопоставляют ее с ожидаемыми результатами и определяют правильность функционирования ЭВМ по моделируемой ФС, её эффективность и т.п.

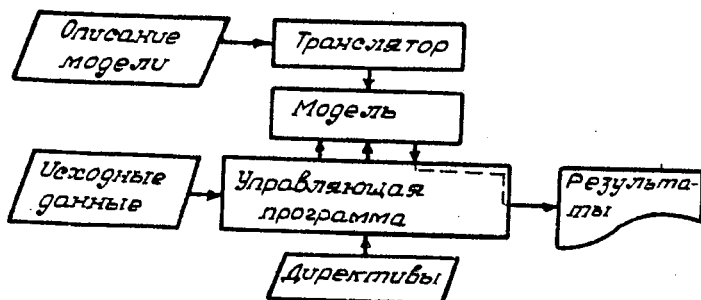


Рис. 4.40

4.5.1. Математическое моделирование логических функциональных схем

Логические функциональные схемы, т.е. схемы, составленные из логических элементов (И, НЕ, ИЛИ и т.п.), как правило, сопровождаются алгоритмом работы в виде связанных друг с другом логических процедур. Цель моделирования: проверка правильности функционирования устройства по ЦС, путем сравнения с заданным алгоритмом; анализ переходных процессов в ЦС; анализ надежности функционирования; расчет вероятности сбоев; анализ критических состязаний; генерация тестов для проверки работы устройства и др. Метод логического моделирования выбирается в зависимости от выбранной цели анализа. Существующие методы отличаются: способом учета времени распространения сигналов в схеме (синхронные, асинхронные); способом кодирования сигналов (двоичные, многозначные); способом построения модели в ЭВМ (компилятивный, интерпретативный) и очередностью моделирования. Классификация методов дана в [6] (рис. 4.41).

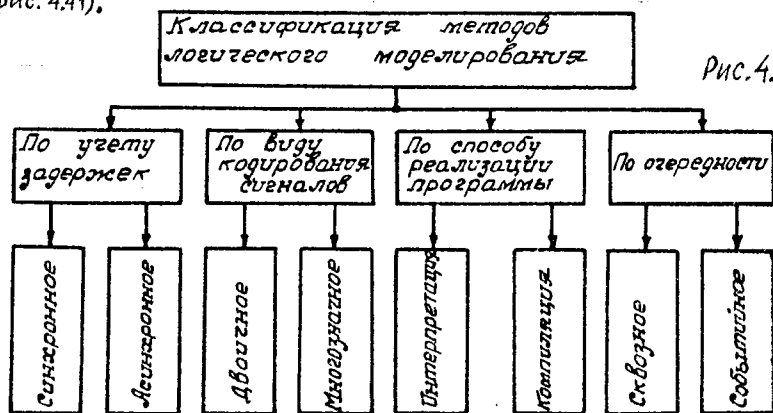


Рис. 4.41

Синхронное логическое моделирование применяется для проверки правильности функционирования схемы без учета временных задержек в каждом элементе схемы. Синхронное моделирование состоит в последовательном решении логических уравнений элементов схемы $y = f(x_1, x_2, \dots)$, т.е. вычисление логического значения выходной величины y по заданным значениям входных: $x_1, x_2, \dots$. Порядок в последовательности решаемых уравнений определяется схемой соединения элементов. Для определения порядка в программах модели вводят

ранжирование, чтобы к моменту решения очередного уравнения $y = f(x_1, x_2, \dots)$, значения переменных $x_1, x_2, \dots$ были известны.

Пример [6] Для схемы, приведенной на рис.4.42, порядок решения уравнения будет таким

$$\left. \begin{aligned} C_5 &= C_2 \ \& \ C_3 \\ C_6 &= C_3 \ \& \ C_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & z=1, \\ & z=1, \end{aligned} \quad \begin{aligned} C_7 &= C_5 \ \& \ C_6 \quad z=2, \\ C_8 &= C_1 \ \& \ C_7 \quad z=3, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - входные сигналы схемы; C_5, C_6, C_7, C_8 - выходные сигналы элементов; z - ранг элементов схемы. Ранжирование выполняется автоматически по разработанным стандартным программам, включаемым в систему моделирования.

Для схем с обратными связями в цепь OC вводят элемент задержки, имитирующий реальную задержку сигнала в элементах петли обратной связи. Процесс моделирования описан в [3,6] .

Результат синхронного моделирования: временная диаграмма, в которой для каждого такта моделирования приводятся значения входных воздействий и значений сигналов на выходах элементов схемы. Правильность работы модели устройства определяют по результатам тестовых воздействий, для которых известна эталонная реакция.

Асинхронное логическое моделирование позволяет провести анализ переходных процессов, т.к. учитывается время распространения сигналов в элементах (время задержки) и соединительных цепях.

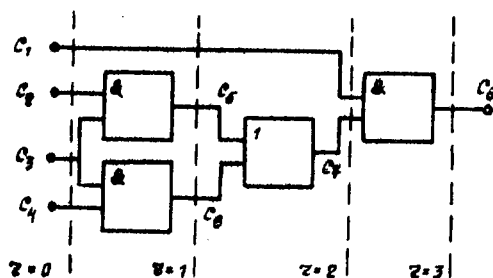


Рис. 4.42

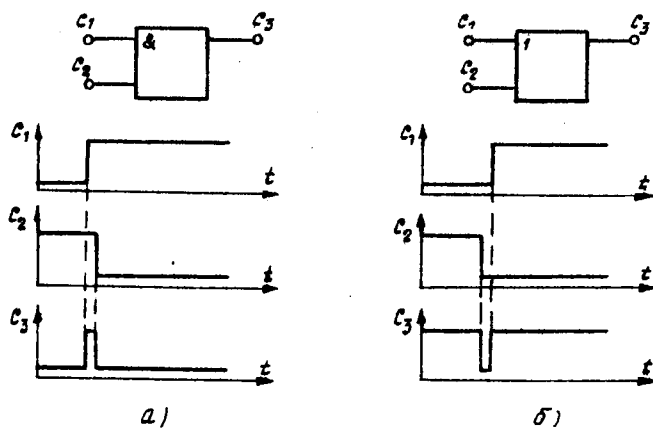


Рис.4.43

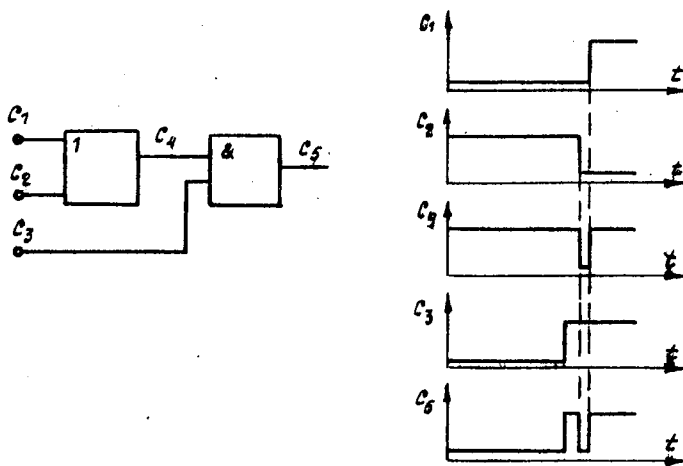


Рис.4.44

С его помощью возможно определение риска сбоев, и критические состязания. Временное рассогласование входных сигналов из-за различных по величине задержек в предыдущих элементах может привести к появлению ложного сигнала на выходе анализируемого элемента. Это и есть риск сбоя. Различают статический риск сбоя - возможность однократного появления ложного сигнала на выходе элемента, динамический риск сбоя - возможность многократного изменения ложного сигнала на выходе элемента (см. рис.4.43 и 4.44 [6]).

В логических схемах с памятью, т.е. в схемах с обратными связями окончательное состояние схемы в некоторых случаях зависит от очередности переключения элементов памяти. Тогда имеет место состязание сигналов обратных связей или просто состязание сигналов.

Асинхронная модель логического элемента представляется последовательным соединением безынерционного логического элемента f и элемента задержки τ .

Само моделирование по сути также имитационное. Оно состоит в поочередном по мере продвижения сигналов вычисления их значений на выходах логических элементов и времени их возникновения (изменения). При этом многократно просчитываются состояние элементов схемы через интервал времени Δt , который выбирают как наибольший общий делитель временных задержек всех элементов схемы. Так, для временных задержек 15, 27, 21 и 30 нс $\Delta t = 3$ нс.

В тактируемых схемах или моделях время такта T выбирается при этом равным Δt и моделирование сводится к многократному решению логических уравнений, описывающих схему. По сравнению с синхронным моделированием здесь существенно возрастают затраты на вычисление. Для сокращения их переходят к так называемому событийному синхронному моделированию. Из анализа работы больших логических схем известно, что одновременно находятся в активном состоянии лишь 1-2,5% всех элементов схемы. В системах событийного моделирования время вычисления нового состояния изменяется не постепенно с шагом Δt , а лишь в моменты возникновения событий. Последние же определяются задержками в логических элементах, различие которых фиксируется заранее. Процесс моделирования описан подробно в [3, 6].

Более экономичным методом моделирования считаются методы многозначного моделирования. Их быстродействие всего в 4-6 раз ниже, чем методов синхронного моделирования. Наиболее часто используют троичное моделирование, когда сигнал имеет три возможных состояния 1, 0, X. Здесь для выявления рисков сбоя, наличия критического состязания нет необходимости вводить в модели

элементов временные задержки, они считаются равными нулю. Сама модель элемента представляется таблицей истинностей, в которой каждый входной сигнал может иметь три значения. Моделирование работы логических схем осуществляется на каждом значении входных сигналов и на их промежуточном (переходном) значении x . Подробнее с этим методом можно познакомиться в [6, 24].

В системах компилирующего типа исходное описание моделируемой схемы представляется на специальном входном языке. Затем оно транслируется специальной программой-транслятором в машинные коды и оформляется в объектный модуль. Работают эти системы быстро.

В системах интерпретирующего типа каждый оператор входного описания выполняется с помощью специальной подпрограммы.

5. ФОРМИРОВАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ФОРМЕ

5.1. Математическое моделирование и САПР электронных схем

Под математическим моделированием (ММ) имеют в виду создание некоторого абстрактного аналога реального объекта (схемы замещения и математической модели) и получение той или иной информации об этом идеализированном объекте (реализация модели). Разумеется, имеет смысл рассматривать идеализированный объект, если он достаточно адекватен реальному объекту. В то же время судить о степени адекватности заранее не всегда представляется возможным. Обычно это выверяется в процессе практической деятельности, то есть материализации идеального объекта. Поэтому, чем сложнее реальный объект и его модель, тем большую степень риска приходится допускать с точки зрения затрат ресурсов и труда. Многократная реализация модели позволяет получить всю необходимую информацию об объекте, т. е. провести анализ. Обычно под анализом понимают получение информации при фиксированном наборе параметров объекта. Поскольку проектируемый объект должен удовлетворять требованиям технического задания, параметры следует подбирать так, чтобы информация об объекте соответствовала определенным условиям. Эти условия формируют в виде целевых функций, а сам процесс подбора параметров называют параметрической оптимизацией.

Возможность автоматизации формирования математических моделей электронных устройств естественно привела к идее автоматизации всего процесса проектирования, которая нашла свое воплощение в концепции САПР [3, 25], включающей в себя комплекс средств автоматизации проектирования. Процесс проектирования на основе ММ, осуществляемый в САПР, в самом общем виде можно представить в виде блок-схемы рис. 5.1. Выбор структуры, наиболее творческая и наиболее трудно формализуемая часть проектирования, обычно осуществляется разработчиком на основе технического задания и анализа готовых структур, накопленных в процессе практической и изобретательской деятельности. После формирования модели, с точки зрения проектирования важной представляется та часть блок-схемы рис. 5.1, которая связана с оптимизацией. Роль анализа заключается в предварительном исследовании объекта и подборе начальных значений параметров. После оптимизации, естественно, может возник-

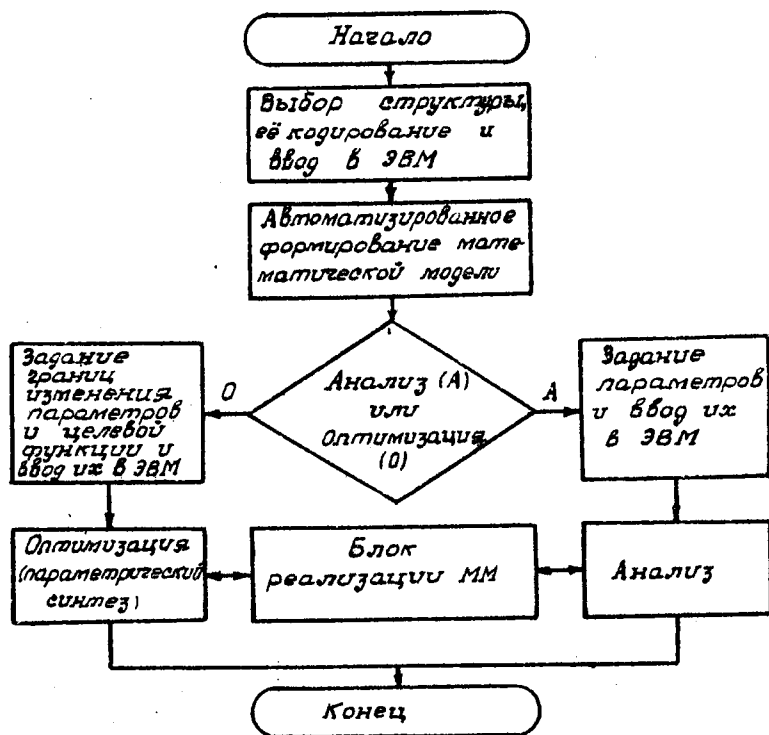


Рис.5.1

нута необходимость получения дополнительной информации об объекте, для чего также используется блок анализа.

Реализация математической модели предполагает следующую последовательность действий:

- 1) выбор цели реализации;
- 2) выбор метода расчета;
- 3) выбор численной схемы;
- 4) составление алгоритма и программы;
- 5) счёт и обработка результатов.

Выбор цели определяет направленность действий, а её реализация (достижение) доставляет определенную информацию об объекте. Все указанные этапы реализации должны осуществляться в блоке реализации математических моделей автоматически.

В настоящее время уже создано большое количество систем автоматизированного анализа и параметрической оптимизации (см. например, [26, 27, 28]). Их развитие прежде всего связано с развитием блока реализации математических моделей. В частности, из-за узости возможностей методов расчета, заложенных в этот блок, естественно занимаются и возможности указанных систем. В [25] вводится понятие надежности методов и алгоритмов заложенных в САПР. Оценкой надежности является вероятность P успешного применения метода в оговоренном заранее классе задач. Если говорить о достоинствах САПР с точки зрения их надежности, то в настоящее время она не велика, хотя нет оснований сомневаться в том, что по мере развития методов реализации математических моделей она будет возрастать. Но, по-видимому, создание высоконадежных САПР-дело далекого будущего. Именно поэтому несколько не теряют своего значения традиционные методы формирования и реализации математических моделей, позволяющие более гибко подходить к преодолению трудностей в нестандартных ситуациях.

5.2. Формализация процесса формирования математических моделей

Существующие методы формализации процесса формирования математических моделей электрических цепей широко используют понятия теории графов [27]. Здесь будет применен подход, в котором нет необходимости предварительного изучения теории графов. Для простоты ограничимся формированием математических моделей цепей состоящих из двухполюсных элементов, представленных на рис. 5.2.

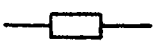
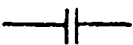
Символ элемента	Тип элемента	Характеризую- щий его параметр
	Резистор	R
	Индуктивность	L
	Емкость	C
	Источник напряжения	U
	Источник тока	I

Рис. 5.2

В качестве примера для формирования модели выберем цепь, представленную на рис.5.3,а. Соотношения на индуктивных элементах:

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = U_{L1} ; \quad L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = U_{L2} .$$

На емкостных элементах:

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = i_{C1} ; \quad C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = i_{C2} .$$

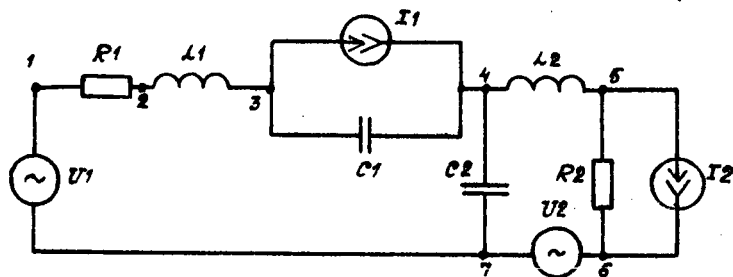
Закон Ома на резистивных элементах:

$$R_1 i_{R1} = U_{R1} ; \quad R_2 i_{R2} = U_{R2} .$$

И закон Кирхгофа выпишем для узлов 2,3,4,5; причем условимся за положительное направление тока через элементы выбирать направление от узла с меньшим номером к узлу с большим номером

$$i_{R1} - i_{L1} = 0 ; \quad i_{L1} - i_{C1} = I_1 ;$$

$$i_{C1} - i_{C2} - i_{L2} = -I_1 ; \quad i_{L2} - i_{R2} = I_2 .$$



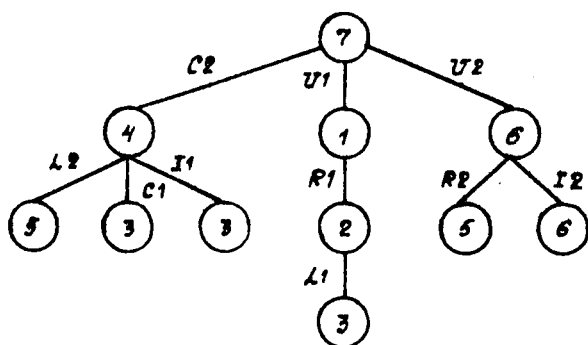
a)

2	4	3	4	1	5	3	5	1	7
L_1	L_2	C_1	C_2	R_1	R_2	I_1	I_2	U_1	U_2
3	5	4	7	2	6	4	6	7	6

b)

2	4	4	4	1	6	6	7	7	7
L_1	L_2	C_1	I_1	R_1	R_2	I_2	C_2	U_1	U_2
3	5	3	3	2	5	5	4	1	6

b)



2)

3 - L_1 - 2 - R_1 - 1 - U_1 - 7 - C_2 - 4 - C_1 - 3
 5 - L_2 - 4 - C_2 - 7 - U_2 - 6 - R_2 - 5

g)

Выберем контуры

$$1 - R_1 - 2 - L_1 - 3 - C_1 - 4 - C_2 - 7 - U_1 - 1$$

$$4 - L_2 - 5 - R_2 - 6 - U_2 - 7 - C_2 - 4$$

и выпишем для них II закон Кирхгофа:

$$U_{R_1} + U_{L_1} + U_{C_1} + U_{C_2} = U_1,$$

$$U_{L_2} + U_{R_2} - U_{C_2} = -U_2$$

Из уравнений для токов и закона Ома находим

$$I_{R_1} = I_{L_1}; \quad I_{R_2} = I_{L_1} - I_1; \quad I_{C_2} = I_{L_2} - I_{L_1};$$

$$I_{R_2} = I_{L_2} - I_2; \quad U_{R_1} = R_1 I_{L_1}; \quad U_{R_2} = R_2 (I_{L_2} - I_2).$$

Используя соотношения, полученные на основании II закона Кирхгофа, найдем

$$U_{L_1} = -R_1 I_{L_1} - U_{C_1} - U_{C_2} + U_1,$$

$$U_{L_2} = -R_2 I_{L_2} + U_{C_2} + R_2 I_2 - U_2$$

Окончательно математическая модель принимает вид

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_{L_1} - \frac{1}{L_1} U_{C_1} - \frac{1}{L_1} U_{C_2} + \frac{1}{L_1} U_1, \quad (5.1)$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_{L_2} + \frac{1}{L_2} U_{C_2} + \frac{1}{L_2} (R_2 I_2 - U_1),$$

$$\frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} I_1,$$

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} - \frac{1}{C_2} i_{L_2}.$$

Компактно эту модель можно представить в матрично-векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = AX + BX_{\text{вх}}, \quad (5.2.)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ U_{C_1} \\ U_{C_2} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad X_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В общем случае математическую модель при заданной топологии цепи (фиксированная структура) представляется в виде системы матрично-векторных уравнений

$$L \frac{dI_L}{dt} = U_L ; \quad (5.3)$$

$$C \frac{dU_C}{dt} = I_C ; \quad R I_R = U_R ;$$

$$E_L I_L + E_C I_C + E_R I_R = E_I I ;$$

$$D_L U_L + D_C U_C + D_R U_R = D_U U .$$

Здесь $I_L (NL)$, $I_C (NC)$, $I_R (NR)$, $U_L (NL)$, $U_C (NC)$, $U_R (NR)$ - вектора токов и напряжений на соответствующих элементах; NL , NC , NR - число индуктивных, емкостных и резистивных элементов, определяющих размерность векторов;

$L(NL, NL)$, $C(NC, NC)$, $R(NR, NR)$ - диагональные матрицы из индуктивностей, емкостей и сопротивлений; $I(NI)$, $U(NU)$ - вектора входных токов и напряжений; NI , NU - число источников тока и напряжения; $E_L(N\mathcal{Z}, NL)$, $E_C(N\mathcal{Z}, NC)$, $E_R(N\mathcal{Z}, NR)$, $E_I(N\mathcal{Z}, NI)$, $D_L(NK, NL)$, $D_C(NK, NC)$, $D_R(NK, NR)$,

$D_U(NK, NU)$ - топологические матрицы; $N\mathcal{Z}$ - число узлов, для которых записывается I закон Кирхгофа; NK - число контуров, для которых записывается II закон Кирхгофа.

Для рассмотренного примера

$$NL, NC, NR, NI, NU = 2, \quad N\mathcal{Z} = 4, \quad NK = 2.$$

$$I_L = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix}; \quad I_C = \begin{bmatrix} I_{C1} \\ I_{C2} \end{bmatrix}; \quad I_R = \begin{bmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \end{bmatrix}; \quad U_L = \begin{bmatrix} U_{L1} \\ U_{L2} \end{bmatrix};$$

$$U_C = \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \end{bmatrix}; \quad U_R = \begin{bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Задача формирования модели состоит, во-первых, в нахождении элементов топологических матриц и, во-вторых, в преобразовании модели к некоторому удобному для реализации виду.

Преобразуем модель (5.3) к виду (5.2),

$$X = \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix},$$

а матрицы A и B следует найти.

Обозначим

$$L^{-1}U_L = A_{11}I_L + A_{12}U_C + B_{11}I + B_{12}U;$$

$$C^{-1}I_C = A_{21}I_L + A_{22}U_C + B_{21}I + B_{22}U;$$

$$I_R = A_{31}I_L + A_{32}U_C + B_{31}I + B_{32}U.$$

Размерность введенных матриц и векторов

$$A_{11}(NL, NL), A_{12}(NL, NC), B_{11}(NL, NI), B_{12}(NL, NU);$$

$$A_{21}(NC, NL), A_{22}(NC, NC), B_{21}(NC, NI), B_{22}(NC, NU);$$

$$A_{31}(NR, NL), A_{32}(NR, NC), B_{31}(NR, NI), B_{32}(NR, NU).$$

Подставляя U_R из третьей группы уравнений (5.3) в последние, представим две последние группы уравнений (5.3), с учетом введенных обозначений, в виде

$$(E_L + E_C CA_{21} + E_R A_{31})I_L + (E_C C A_{22} + E_R A_{32})U_C + (E_C CB_{21} + E_R B_{31} - E_I)I + (E_C CB_{22} + E_R B_{32})U = 0;$$

$$(D_L LA_{11} + D_R RA_{31})I_L + (D_L LA_{12} + D_R RA_{32} + D_C)U_C + (D_L LB_{12} + D_R RB_{32} - D_U)U + (D_L LB_{11} + D_R RB_{31})I = 0.$$

Поскольку элементы векторов I, U, U_C могут принимать совершенно произвольные значения, следует приравнять нулю выражения в круглых скобках; присоединяя к ним оставшиеся уравнения, получим

$$E_C CA_{21} + E_R A_{31} = -E_L; \quad E_C CB_{21} + E_R B_{31} = E_I;$$

$$E_C CA_{22} + E_R A_{32} = 0; \quad E_C CB_{22} + E_R B_{32} = 0;$$

$$D_L LA_{11} + D_R RA_{31} = 0; \quad D_L LB_{11} + D_R RB_{31} = 0;$$

$$D_L LA_{12} + D_R RA_{32} = -D_C; \quad D_L LB_{12} + D_R RB_{32} = D_U.$$

Компактная запись этой системы

$$W \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_L & 0 \\ 0 & D_C \end{bmatrix}; \quad (5.4)$$

$$W \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_I & 0 \\ 0 & E_U \end{bmatrix}.$$

Обе группы уравнений (5.4) имеют одну и ту же матрицу

$$W = \begin{bmatrix} 0 & E_C C & E_R \\ D_L L & 0 & D_R R \end{bmatrix},$$

размерность которой

$$(NL + NC + NR) \times (NZ + NK).$$

Определение. Если выполнено условие

$$NL + NC + NR = NZ + NK$$

и

$$\det |W| \neq 0,$$

то цепь называется невырожденной и вырожденной, если эти условия не выполнены.

В случае невырожденной цепи системы уравнений (5.4) разрешимы, причем

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{bz} = \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix}.$$

Если же цепь вырождена, необходимо преобразовать системы (5.4) в соответствии с рангом матрицы W .

Методологию формирования топологических матриц лучше всего проследить на примере цепи рис. 5.3, а. Матрицы группы E можно сразу выписать

$$E_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad E_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Первые строки этих матриц формируются на основе 2-го узла цепи.

Ток через элемент R_1 втекает в этот узел. Поэтому в матрице элемент первой строки и первого столбца равен 1. Ток через элемент

L_1 вытекает из этого узла. Поэтому в матрице E_L элемент первой строки и первого столбца равен -1. Все остальные элементы первых строк равны нулю, поскольку другие элементы цепи с узлом не связаны. Аналогично формируются элементы других строк матриц группы E .

Прежде чем формировать матрицы группы D , необходимо построить методологию выделения контуров цепи. Структура цепи рассматриваемого примера представлена на рис. 5.3, б в виде трех массивов. Один из этих массивов характеризует тип элемента. Два других массива из целых чисел содержат номера узлов соответствующих элементов. Массивы 5.3, в формируются следующим образом. Выбираем все элементы, имеющие узлы с каким-то одним номером (выбран узел 7).

Эти элементы располагают так, чтобы узлы 7 находились в одной строке (вверху). Так, формируется первый уровень. Второй уровень образуют элементы с узлами расположенными в нижней строке первого уровня (узлы 4,1,6). Причем эти узлы располагаются в верхней строке. Узлы нижней строки второго уровня служат основой для формирования элементов третьего уровня и т.д. Структура массива рис. 5.3,в представляется в виде корневого дерева рис. 5.3,г. Пусть m_n - число повторяющихся узлов с номером n на всех уровнях дерева. Для рассматриваемого примера имеем

$m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$, $m_4 = 1$, $m_5 = 3$, $m_6 = 1$
общее число контуров, для которых записывается П закон Кирхгофа

$$N_K = \sum_{n=1}^{N_Y-1} (m_n - 1) - m_T,$$

где N_Y - число всех узлов, m_T - число контуров, содержащих источники тока.

Формирование контура начинается с узла, расположенного на самом низком уровне движением вверх, до корня дерева, а затем движением вниз до узла с тем же номером. Для рассматриваемой цепи из четырех возможных контуров два содержат источники тока ($m_T = 2$). Два других выписаны на рис.5.3,д. Топологические матрицы группы D имеют вид

$$D_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, как формируются первые строки этих матриц. Для этого используем первый контур. Поскольку он содержит единственный индуктивный элемент L_1 и знак напряжения на этом элементе будет положителен (противоположен знаку тока), то $D_L(1,1) = 1$,

$D_L(1,2) = 0$. Контур содержит 2 емкостных элемента с положительным напряжением на них, поэтому $D_C(1,1)$, $D_C(1,2) = 1$. Аналогично формируются другие элементы матриц группы D .

Рассмотренную методику формирования математической модели можно реализовать на ЭВМ и тем самым автоматизировать процесс формирования модели. В принципе эта методика не изменится, если к элементам рис. 5.2 добавить ключевые (управляемый ключ, диод). Если же цепь содержит транзисторы, тиристоры, трансформаторы и т.д., то можно использовать схемы замещения этих элементов из 2 полюсных компонент.

5.3. Методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Получение информации относительно переходного или стационарного процесса в электронном устройстве с помощью математического моделирования предполагает интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором временном интервале. Пусть математическая модель записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x), \quad (5.5)$$

где вектор - функция $G(t, x)$ удовлетворяет условию периодичности по времени

$$G(t + T, x) = G(t, x).$$

Поскольку система (5.5) имеет одну и ту же форму в любом из временных интервалов

$$T(m-1) < t < Tm, \quad m = 1, 2, \dots,$$

то естественно рассматривать её решение только в области

$$0 \leq t \leq T, \quad (5.6)$$

а решение на временном интервале кратном периоду T заменить последовательностью решений в указанной области, меняя лишь условия при $t = 0$.

Следует заметить, что существует класс моделей, когда время не входит явно в правую часть (5.5). Это так называемые автономные системы, для которых нельзя заранее указать период установившегося решения. Но подобные системы здесь не рассматриваются.

Выбору схемы интегрирования предшествует дискретизация области, в которой отыскивается решение. Непрерывной области (5.8) изменения переменной t ставится в соответствие дискретная (или сеточная) область

$$0 \leq t_k \leq T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M, \quad t_0 = 0, \quad t_M = T,$$

где M - число узлов, а разность

$$h_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, M-1$$

называется шагом интегрирования. Вообще говоря, шаг интегрирования может быть переменным. Но мы ограничимся равномерной сеткой, когда

$$h_k = h = \text{const}, \quad h = T/M.$$

Существует множество вариантов дискретизации уравнений (5.5). Мы рассмотрим самые простые из них - явные и неявные схемы

Эйлера [29]. Это одношаговые схемы с порядком аппроксимации $O(h)$, или, как ещё говорят, с первым порядком аппроксимации. В случае явной схемы Эйлера процесс пошагового интегрирования системы (5.5) осуществляется по формуле

$$x_{k+1} = x_k + h \theta(t_k, x_k) . \quad (5.7)$$

Поскольку в процессе интегрирования приходится иметь дело с конечным числом разрядов чисел, то точное решение системы (5.7), которое обозначим $\bar{x}_k$, будет отличаться от решения получаемого по (5.7) с округлением чисел. Таким образом, приходится иметь дело фактически с некоторым возмущённым решением x_k . И это возмущённое решение имеет смысл рассматривать, если оно достаточно близко к точному. Пусть

$$x_k = \bar{x}_k + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.8)$$

где ε_k - возмущение, ε_0 - задано. Подставляя (5.8) в (5.7) и учитывая, что $\bar{x}_k$ удовлетворяет уравнению (5.7), находим

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h [\theta(t_k, \bar{x}_k + \varepsilon_k) - \theta(t_k, \bar{x}_k)] .$$

Если ε_k с ростом k неограниченно нарастает, то схема (5.7) будет неустойчива. Полученное уравнение для ε_k невозможно исследовать в общем случае, поскольку $\bar{x}_k$ неизвестно. Поэтому его представляют в виде

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h [\partial \theta(t_k, \bar{x}_k) / \partial x] \varepsilon_k + O(\varepsilon_k^2),$$

предполагая возможность дифференцирования правой части (5.5) по переменной x . Здесь матрица

$$\partial \theta(t, x) / \partial x$$

носит название матрицы Якоби.

Отбрасывая слагаемое $O(\varepsilon_k^2)$, получим

$$\varepsilon_{k+1} = [E + h \partial \theta(t_k, \bar{x}_k) / \partial x] \varepsilon_k, \quad (5.9)$$

E - единичная матрица.

Решение этой системы можно найти в явном виде. Но для его оценки нужна информация о матрице Якоби. Для линейных систем вида (5.2)

$$\partial \theta(t, x) / \partial x = A$$

и уравнение (5.9) упрощается

$$\varepsilon_{k+1} = (E + h A) \varepsilon_k .$$

Решение этого уравнения

$$\varepsilon_k = (E + h A)^k \varepsilon_0 .$$

Для различных собственных чисел матрицы A имеет место представление

$$A = S \Lambda S^{-1}, \quad (5.10)$$

где $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ - собственные числа; N - порядок матрицы A , S - матрица из собственных векторов. Используя представление (5.10), получим

$$\varepsilon_{\kappa} = S(E + hA)^{\kappa} S^{-1} \varepsilon_0,$$

и условием $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |\varepsilon_{\kappa}| = 0$ является требование

$$|\lambda + 1/h| < 1/h. \quad (5.11)$$

В комплексной λ - плоскости неравенство (5.11) означает внутренность круга с центром в точке $\lambda = -1/h$ и радиусом $1/h$ (рис. 5.4, а).

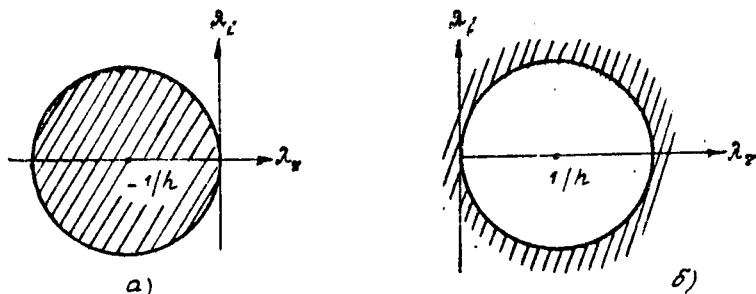


Рис. 5.4

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости λ - плоскости, то всегда можно подобрать h таким, чтобы неравенство (5.11) выполнялось. Таким образом, явная схема Эйлера оказалась условно устойчивой. Большие ограничения на шаг интегрирования будут иметь место при больших $|\lambda_r|$ (быстрые движения) или при больших λ_i (сильно осциллирующие движения). Для неявной схемы Эйлера

$$X_{\kappa+1} = X_{\kappa} + h G(t_{\kappa+1}, X_{\kappa+1})$$

линеаризованное уравнение для возмущения (аналог уравнения 5.9) примет вид

$$\varepsilon_{\kappa+1} = \left[E - h \frac{\partial G(t_{\kappa+1}, \bar{X}_{\kappa+1})}{\partial X} \right]^{-1} \varepsilon_{\kappa}.$$

В случае линейных систем с постоянной матрицей условие затухания возмущения

$$|\lambda - 1/h| > 1/h.$$

Это неравенство означает внешность круга с центром в точке $\lambda = 1/h$ и радиусом $1/h$ (рис. 5.4, б). Если все собственные числа лежат в левой полуплоскости, неявная схема Эйлера будет устойчива при любых шагах h . Эта схема относится к разряду абсолютно устойчивых, или A - устойчивых. Известно, что A - устойчивой является и схема трапеций

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = \frac{1}{2} \{ G(t_{k+1}, x_{k+1}) + G(t_k, x_k) \},$$

которая имеет второй порядок аппроксимации $O(h^2)$.
Относительно A - устойчивых схем в [29] приведены следующие результаты:

- 1) никакой явный линейный многошаговый метод не может быть A - устойчивым;
 - 2) не существует A - устойчивого неявного линейного многошагового метода с порядком аппроксимации $O(h^v)$, $v > 2$.
- Свойством A - устойчивости не обладают и явные методы Рунге-Кутты.

Назовем штриховые области рис. 5.4 областями устойчивости. Для A - устойчивых схем область устойчивости включает всю левую полуплоскость при любых h . Возможно построение высокоточных, т. е. с достаточно большими v , неявных многошаговых методов и неявных методов Рунге-Кутты, которые, не обладая свойством A - устойчивости, имеют достаточно широкие области устойчивости с приемлемой с точки зрения затрат времени ЭВМ величиной шага интегрирования h . Но при этом возникают сложные проблемы решения систем трансцендентных уравнений на каждом шаге.

Возможен ещё один подход к пошаговому интегрированию, в основе которого лежит возможность записать решение линейных систем в аналитической форме. Методы, основанные на этом подходе, в [29] названы системными.

Пусть математическая модель имеет вид (5.2) и пусть известно решение этой системы в момент времени $t = t_k$. Решение этой системы в момент времени $t = t_{k+1}$ имеет вид

$$x_{k+1} = e^{Ah} x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp[A(t_{k+1} - \tau)] B(\tau) d\tau.$$

Для взятия интеграла используется разложение вектора $B(\tau)$ в ряд Тейлора

$$B(\tau) = B_{\kappa} + B'_{\kappa}(\tau - t_{\kappa}) + B''_{\kappa} \frac{(\tau - t_{\kappa})^2}{2!} + \dots \quad (5.12)$$

Используя первый член разложения (5.12), находим

$$\int_{t_{\kappa}}^{t_{\kappa+1}} \exp[A(t_{\kappa+1} - \tau)] B(\tau) d\tau = \left\{ \int_{t_{\kappa}}^{t_{\kappa+1}} \exp[A(t_{\kappa+1} - \tau)] d\tau \right\} B_{\kappa} = \omega(A, h),$$

где

$$\omega(A, h) = A^{-1}(e^{Ah} - E).$$

Рекуррентная формула для пошагового интегрирования примет вид

$$X_{\kappa+1} = X_{\kappa} + \omega(A, h)(AX_{\kappa} + B_{\kappa}). \quad (5.13)$$

Матрицу $\omega(A, h)$ можно представить в виде ряда

$$\omega(A, h) = h \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} (Ah)^i = h \left[E + \frac{1}{2!} Ah + \frac{1}{3!} (Ah)^2 + \dots \right].$$

Но считать её с помощью суммирования этого ряда при произвольных h не представляется возможным из-за медленной сходимости ряда.

Поэтому используем прием для расчета экспоненциальных матриц, предложенный в [29] и примененный для расчета $\omega(A, h)$ в [30]. Суть этого приема заключается, во-первых, в подборе величины s такой, чтобы ряд

$$\omega(A, \frac{h}{2^s}) = \frac{h}{2^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} \left(A \frac{h}{2^s} \right)^i = \frac{h}{2^s} \sum_{i=0}^{\infty} x_{i+1},$$

$$x_{i+1} = \frac{h}{(i+1)2^s} A x_i, \quad x_1 = E$$

достаточно быстро сходилась. Величину s можно выбрать, например из условия

$$\frac{\|A\| h}{2^s} = 10^{-1},$$

отсюда

$$s = \lg[10 \cdot \|A\| \cdot h] / \lg 2.$$

Поскольку не исключен вариант, когда вычисленное по этой формуле s будет отрицательно, то лучше выбирать

$$s = \max\{1, \lg(10 \cdot \|A\| \cdot h) / \lg 2\}$$

и положить, как в [30]

$$\omega(A, \frac{h}{2^s}) \approx \frac{h}{2^s} \sum_{i=0}^s \frac{1}{(i+1)!} \left(\frac{A \cdot h}{2^s} \right)^i.$$

Далее, используя равенства

$$e^{Ah} = e^{A \frac{h}{2^s}} e^{A \frac{h}{2^{s-1}}} \dots e^{A \frac{h}{2}}, \quad e^{Ah} = E + A \omega(A, h),$$

находим

$$\omega(A, h) = \omega\left(A, \frac{h}{2}\right) \left[2E + A \omega\left(A, \frac{h}{2}\right) \right].$$

Эта зависимость, после того как будет найдено $\omega(h/2^s)$, позволяет построить итерационный процесс для вычисления $\omega(A, h)$ по формуле

$$\omega\left(A, \frac{h}{2^{s-\kappa}}\right) = \omega\left(A, \frac{h}{2^{s-\kappa+1}}\right) \left\{ 2E + A \omega\left(A, \frac{h}{2^{s-\kappa+1}}\right) \right\}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, s.$$

Если в разложении (5.12) взять 2 слагаемых, т. е. положить

$$B(\tau) = B_\kappa + B'_\kappa(\tau - \tau_\kappa),$$

то формула для пошагового интегрирования примет вид

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \omega(A, h)(A X_\kappa + B_\kappa) + \omega_1(A, h) B'_\kappa, \quad (5.14)$$

где

$$\omega_1(A, h) = h^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} (Ah)^{i-2} = h^2 \left[\frac{1}{2!} E + \frac{1}{3!} Ah + \dots \right].$$

Между $\omega(A, h)$ и $\omega_1(A, h)$ существует связь

$$\omega(A, h) = hE + A \omega_1(A, h).$$

Для нахождения $\omega_1(A, h)$ можно использовать тот же прием дробления шага h и последующих итераций, который использован для нахождения $\omega(A, h)$.

Можно построить формулы пошагового интегрирования, используя дальнейшие слагаемые в разложении $B(\tau)$.

Схему (5.13) можно представить в виде

$$X_{\kappa+1} = e^{Ah} X_\kappa + \omega(A, h) B_\kappa.$$

Исследование устойчивости этой схемы приводит к урвнению для возмущения

$$\delta_{\kappa+1} = e^{Ah} \delta_\kappa,$$

решение которого

$$\delta_\kappa = (e^{Ah})^\kappa \delta_0.$$

Используя представление (5.10), получим

$$\delta_\kappa = s(e^{Ah})^\kappa s^{-1} \delta_0.$$

Если собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости

λ - плоскости, то элементы матрицы $\exp(Ah)$ по модулю меньше единицы, следовательно, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |\delta_\kappa| = 0$ независимо от величины h . Таким образом, оказалось, что схемы (5.13) обладает свойством A - устойчивости. Аналогичным свойством обладает схема (5.14) и все другие схемы получаемые учётом других слагаемых в (5.12).

Покажем, что пошаговое интегрирование с использованием схем (5.13), (5.14) возможно для широкого класса моделей.

1) Математические модели структур, содержащих кроме указанных на рис. 5.2. элементов ещё и управляемые ключи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$$

имеют кусочно-постоянную матрицу $A(t)$. В каждом из интервалов постоянства этой матрицы можно вести интегрирование по схеме (5.13). При этом надо иметь в виду, что для каждого из этих интервалов матрицу $\omega(A, h)$ следует рассчитывать при соответствующем значении $A(t)$.

2) Если структура содержит неуправляемые ключи (диоды), то математическая модель имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + B(t)$$

Матрица $A(x)$ будет постоянна в межкуммуационные интервалы. Интегрирование также можно вести по схеме (5.13). При этом надо следить за состоянием ключей. В случае их смены надо определять $A(x)$ и пересчитывать $\omega(A, h)$.

3) Предположим, что в общей записи математической модели (5.5) правая часть дифференцируема по своим переменным. В окрестности точки (t_k, x_k) имеем

$$G(t, x) = G(t_k, x_k) + \frac{\partial G(t_k, x_k)}{\partial t} (t - t_k) + \frac{\partial G(t_k, x_k)}{\partial x} (x - x_k) + O((t - t_k)^2, (x - x_k)^2)$$

Если отбросить в этом разложении слагаемые 2-го порядка малости, то систему (5.5) можно представить в виде

$$\frac{d(x - x_k)}{dt} = A_k(x - x_k) + G(t_k, x_k) + \frac{\partial G(t_k, x_k)}{\partial t} (t - t_k),$$

где символом A_k обозначена матрица Якоби.

Схема интегрирования, соответствующая (5.13), имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \omega(A_k, h) \cdot G(t_k, x_k)$$

Если же использовать схему (5.14), то

$$x_{k+1} = x_k + \omega(A_k, h) G(t_k, x_k) + \omega_1(A_k, h) \frac{\partial G(t_k, x_k)}{\partial t}$$

Пошаговое интегрирование по формулам (5.13), (5.14) имеет преимущество по сравнению со схемами Эйлера и трапеций. Это преимущество, во-первых, связано с точностью. Схема (5.13) дает точное решение, если $B(t) = \text{const}$. Если же $B(t) \neq \text{const}$, то как показано на примере схемы (5.14), можно построить сколь угодно точную схему. Другое преимущество указанных схем связано с

явлением жёсткости. Проблема жёсткости достаточно хорошо отражена в литературе [29,31]. С точки зрения физики протекаемых в устройствах процессов, жёсткость возникает в том случае, если в них, рассматриваемых как целостные системы, имеются подсистемы, в которых характерное время протекаемых процессов существенно, на несколько порядков различно. На модели типа (5.2) жёсткость проявляется в большом разбросе по порядку величин модулей собственных чисел матрицы A . Количественной мерой жёсткости является величина

$$\sigma_A = \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|},$$

которая называется коэффициентом жёсткости. Рассмотрим неявную схему Эйлера для модели (5.2):

$$(E - hA)X_{k+1} = X_k + hB_k.$$

На каждом шаге интегрирования по этой схеме приходится решать систему линейных алгебраических уравнений относительно X_{k+1} . Матрица этой системы $E - hA$ имеет коэффициент жёсткости

$$\sigma_{E-hA} = \frac{\max |1 - h\lambda_A|}{\min |1 - h\lambda_A|},$$

причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_{E-hA} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_{E-hA} = \sigma_A.$$

Последние пределы указывают на то, что если h мало, то разброс собственных чисел матрицы $E - hA$ будет невелик. Если же h велико, то, в случае больших σ_A , будет велико и σ_{E-hA} . В свою очередь, большая величина σ_{E-hA} свидетельствует, как показано в [30] о плохой обусловленности системы уравнений относительно X_{k+1} . А для плохо обусловленных систем относительная величина погрешности расчета X_{k+1} может принимать недопустимо большие значения. Поэтому для увеличения точности расчета X_{k+1} надо выбирать шаг h настолько малым, что это вступает в противоречие с возможностями ЭВМ.

Проблема жёсткости не исчезает и при использовании схемы (5.13) и проявляется на точности счета матрицы $\omega(A, h)$. Точность счета этой матрицы связана с величиной S , которая определяется величиной нормы матрицы A . Как показывает практика использования схемы (5.13), её возможности в отношении жёсткости намного выше, чем у неявных схем Эйлера и трапеции.

5.4. Поиск периодических решений

Проблема поиска периодических решений является центральной в системе реализации математической модели. Если говорить о реализации математической модели как процессе извлечения информации об объекте, то львиная доля этой информации как раз связана с периодическим решением. Это объясняется тем, что обычное состояние функционирования устройства - это установившееся состояние. Поэтому и наиболее важная информация об объекте получается на основе периодического решения его математической модели. Знание периодического решения позволяет получить информацию и о переходном процессе. В связи с этим разработка методов поиска периодических решений приобретает большое значение.

Решение задачи Коши $x(t)$ системы (5.5) с условием $x(0) = x_0$ будем обозначать $x(t, x_0)$:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow x(t, x_0)$$

Пусть $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ - вектор начальных условий для периодического решения; n - порядок системы (5.5).
Условие периодичности представляется в виде

$$q = x(T, q) \quad (5.15)$$

Таким образом, поиск периодического решения системы (5.5) можно свести к системе трансцендентных уравнений (5.15).

Самый естественный путь решения этой системы - простая итерация

$$q^{(s+1)} = x(T, q^{(s)}) ; \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

В качестве начального приближения можно, например, выбрать

$$q^{(0)} = 0$$

Простая итерация (5.16) эквивалентна решению задачи Коши для системы (5.5) до тех пор, пока не выполнится условие

$$|q_k^{(s+1)} - q_k^{(s)}| < \epsilon, \quad k = \overline{1, n}$$

где δ — наперед заданное достаточно малое число. Выполнение этого неравенства означает, что периодическое решение установилось. Поэтому простую итерацию нахождения Q называют методом установления. Достоинства этого метода заключаются в том, что вместе с периодическим решением находятся все характеристики переходного процесса. Задание величины δ в общем случае затруднительно, поскольку информация о порядке величин компонент вектора Q заранее неизвестна. Поэтому лучшее условие окончания итераций заменить условием относительной близости компонент

$$\frac{|q_{\kappa}^{(s+1)} - q_{\kappa}^{(s)}|}{\frac{1}{2} |q_{\kappa}^{(s+1)} + q_{\kappa}^{(s)}|} < \delta$$

В процессе итераций не исключено обращение в нуль знаменателя в левой части последнего неравенства. Поэтому лучше его представить в виде

$$|q_{\kappa}^{(s+1)} - q_{\kappa}^{(s)}| - \frac{\delta}{2} |q_{\kappa}^{(s+1)} + q_{\kappa}^{(s)}| < 0 \quad (5.17)$$

Здесь δ — относительная близость компонент векторов $Q^{(s)}$ и $Q^{(s+1)}$, причем $0 < \delta < 1$. В практических расчетах можно выбирать, например, $\delta = 0,01$.

Если (5.5) линейная система, т. е.

$$\dot{G}(t, X) = A(t)X + B(t),$$

то известно аналитическое решение системы

$$X(t, Q) = F(t) Q + X(t, 0).$$

Здесь $F(t)$ — фундаментальная матрица, удовлетворяющая системе матричных уравнений

$$\frac{dF}{dt} = A(t) F, \quad F(0) = E,$$

а $F(T)$ носит название основной матрицы. Система (5.15) принимает вид

$$[E - F(T)] Q = X(T, 0). \quad (5.18)$$

Таким образом, для линейных систем существует возможность найти вектор начальных условий прямым методом. Для этого надо сначала найти основную матрицу $F(\tau)$ и решение задачи Коши $x(t, 0)$ при $t = \tau$. Затем находится периодическое решение $x(t, \tau)$. Такой метод нахождения $x(t, \tau)$ называется методом непосредственного нахождения периодического решения. Основная матрица $F(\tau)$ особенно просто находится, если $A(t) = A = \text{const}$. В этом случае

$$F(\tau) = e^{A\tau}.$$

Если же $A(t)$ кусочно-постоянна, то

$$A(t) = A_\kappa, \quad t_{\kappa-1} < t < t_\kappa, \quad \kappa = \overline{1, m}, \quad t_0 = 0, \quad t_m = \tau,$$

то нетрудно найти

$$\begin{aligned} F(\tau) &= e^{A_m(\tau - t_{m-1})} e^{A_m(t_{m-1} - t_{m-2})} \dots e^{A_1 t_1} \\ &= \prod_{\kappa=0}^{m-1} e^{A_{m-\kappa}(t_{m-\kappa} - t_{m-\kappa-1})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим метод установления на примере линейной модели

$$\dot{Q}^{(s+1)} = F(\tau) Q^{(s)} + x(\tau, 0).$$

Полагая $Q^{(0)} = 0$, последовательно находим

$$Q^{(1)} = x(\tau, 0);$$

$$Q^{(2)} = [E + F(\tau)] x(\tau, 0);$$

$$Q^{(3)} = [E + F(\tau) + F^2(\tau)] x(\tau, 0);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Q^{(m)} = \left[\sum_{\kappa=0}^m F^\kappa(\tau) \right] x(\tau, 0).$$

Предположим, что собственные числа $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ матрицы $F(\tau)$ различны. В этом случае имеет место представление, аналогичное (5.10):

$$F(\tau) = S R S^{-1}, \quad R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n).$$

Используя это представление, находим

$$Q^{(m)} = S \left[\sum_{k=0}^m R^k \right] S^{-1} X(\tau, 0).$$

Любой элемент матрицы в квадратных скобках имеет вид

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^m = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho}.$$

Если $|\rho| < 1$, т. е. периодическое решение устойчиво, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^{(m)} = S \begin{bmatrix} (1 - \rho_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 - \rho_2)^{-1} \\ 0 & (1 - \rho_3)^{-1} \end{bmatrix} S^{-1} X(\tau, 0).$$

Очевидно, чем ближе $|\rho|$ к единице, тем больше потребуется итераций для нахождения вектора Q . Таким образом, сходимость простой итерации или метода установления будет медленной, если система обладает малым запасом устойчивости (близость $|\rho|$ к единице). Подобные системы называют слабо-демпфированными.

Медленная сходимость простой итерации при некоторых параметрах цепи может стать непреодолимым препятствием на пути использования этого метода.

Возможно использование других методов для решения системы (5.15). Мы рассмотрим два из них, рекомендуемые, например в [32], с точки зрения возникающих при этом проблем. Один из этих методов основан на использовании метода Ньютона для решения систем трансцендентных уравнений [30]. Пусть система уравнений относительно компонент вектора Q представлена в виде

$$W(Q) = Q - X(\tau, Q) = 0. \quad (5.19)$$

Пусть известно некоторое приближение $Q^{(s)}$. Уравнение (5.19), используя разложение вектор-функции $W(Q)$ в ряд Тейлора в окрестности $Q = Q^{(s)}$, преобразуем

$$\begin{aligned} W(Q) &= W[Q^{(s)} + (Q - Q^{(s)})] = W(Q^{(s)}) + \frac{\partial W(Q^{(s)})}{\partial Q} (Q - Q^{(s)}) + \\ &+ O[(Q - Q^{(s)})^2] = 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая в этом разложении слагаемые второго порядка малости, получим относительно Q линейное уравнение

$$W(Q^{(s)}) + \frac{\partial W(Q^{(s)})}{\partial Q} (Q - Q^{(s)}) = 0.$$

Поскольку это уравнение приближенное, то его решение даст следующее приближение

$$Q^{(s+1)} = Q^{(s)} - \left[\frac{\partial W(Q^{(s)})}{\partial Q} \right]^{-1} W(Q^{(s)}).$$

Это и есть итерационная формула метода Ньютона. Подставив сюда $W(Q)$ из (5.19), получим

$$Q^{(s+1)} = Q^{(s)} - \left\{ E - \frac{\partial X(\tau, Q^{(s)})}{\partial X} \right\}^{-1} [Q^{(s)} - X(\tau, Q^{(s)})].$$

Хотя переходный процесс при использовании этой итерационной схемы не получается, сходимость здесь, если она имеется, более быстрая, чем в методе установления. Сложность применения этого метода заключается, во-первых, в том, что на каждом шаге необходимо считать матрицу в фигурных скобках, а, во-вторых, в процессе итерации она может оказаться вырожденной.

Другой, рекомендуемый в [32], подход основан на построении некоторой целевой функции $\mathcal{F}(W(Q))$, удовлетворяющей условиям

$$1) \quad \mathcal{F}(W(Q)) \geq 0,$$

$$2) \quad \mathcal{F}(0) = 0.$$

В частности, можно взять

$$\mathcal{F}(W) = |W| = |Q - X(\tau, Q)|.$$

Поиск вектора начальных условий при этом сводится к поиску глобального минимума $\mathcal{F}$ в пространстве компонент вектора Q . Однако использование этого метода связано с принципиальными трудностями. Во-первых, целевая функция может иметь локальные минимумы. По этой причине поиск глобального минимума будет зависеть от выбора начального приближения $Q^{(0)}$. Во-вторых, на расчет целевой функции затрачивается много времени, поскольку для расчета ее значения в каждой точке пространства

компонент вектора Q требуется решать систему (5.5) на величине одного периода, чтобы найти $X(\tau, Q)$.

5.5. Этапы подготовки модели к численной реализации. Некоторые алгоритмы реализации

После того, как математическая модель сформирована, порядок ее реализации следующий.

1. Выписать все параметры модели.
2. Выписать формируемые параметры.
3. Выбрать цель реализации.
4. Выбрать метод расчета.
5. Выбрать численную схему.
6. Составить необходимые процедуры и управляющую программу.
7. Занести программу на внешние носители ЭВМ (перфокарты, магнитные диски и т.д.).
8. Отладка и счет.
9. Обработка результатов.

Процессу составления процедур и управляющей программы может предшествовать процесс формирования алгоритма в виде блок-схем.

Пример I. Рассмотрим математическую модель (5.1). Предположим, что источники тока I_1, I_2 и напряжений U_1, U_2 заданы.

I. Параметры модели:

- а) $L_1, L_2, C_1, C_2, R_1, R_2$ - параметры цепи;
- б) параметры внешнего воздействия (источников тока и напряжения);
- в) TT - период входного воздействия *);
- г) N - порядок системы (в рассматриваемом случае $N=4$);
- д) M - число узлов дискретизации временного интервала $[0, TT]$.

* Замечание. При реализации математических моделей в блок-схемах процедур и управляющей программы обозначено:
 TT - период, T - время. Во всех остальных случаях
 T - период, t - время.

Величина M может не входить в число внешних параметров, а формироваться в процессе расчета. При этом существует различные подходы для нахождения M . Например, при интегрировании по заданной точности число узлов формируется автоматически. Можно реализовывать цель на последовательности сеток с возрастающей последовательностью узлов $M_1, M_2, \dots$, пока конечные результаты на разных сетках будут мало отличаться.

2. Формируемые параметры:

- а) элементы матрицы A ;
- б) формируемые параметры источников тока и напряжения (если имеются);
- в) $H = \tau \tau / M$ - шаг интегрирования;
- г) $\omega(A, H)$ - матрица для пошагового интегрирования по (5.13).

3. Цель реализации: получить периодическое решение.

4. Метод расчета - установлением.

5. Численная схема - (5.13).

6. Список процедур:

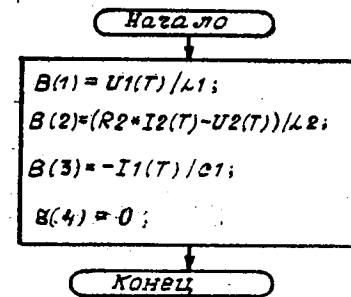
- $I1(T)$; $BK(T, B)$;
- $I2(T)$; $XK(T, X)$;
- $U1(T)$; $ZM(A, H, OM, N)$;
- $U2(T)$; $YMB(A, X, Y, N)$.

Процедуры $I1, I2, U1, U2$ составляются в соответствии с заданными выражениями входных токов и напряжений; T - время.

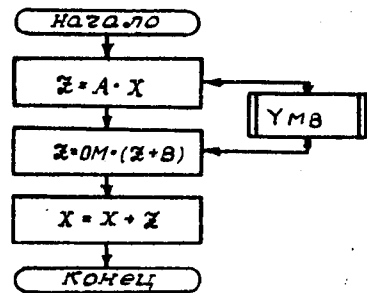
Процедура ZM имеет своими входными параметрами матрицу системы A , шаг интегрирования H и порядок системы N . Результатом работы этой процедуры будет матрица ω , используемая для интегрирования по (5.13) и размещаемая в OM .

Процедура YMB умножает произвольную матрицу размерностью $N \times N$ на вектор X размерности N . Результатом является вектор Y . Процедуры ZM и YMB будем считать стандартными.

Блок-схемы управляющей программы, процедур BK и XK приведены на рис.5.5. Операция умножения скалярных величин обозначается символом $*$, а матричных - символом $\circ$. Результатом действия процедуры BK является вектор B , а процедуры XK - вектор X . Причем, размерность этих векторов, естественно, равна N . В управляющей программе в XI (вектор размерности N)



Блок-схема процедуры ВК



Блок-схема процедуры ХК

Блок-схема управляющей программы

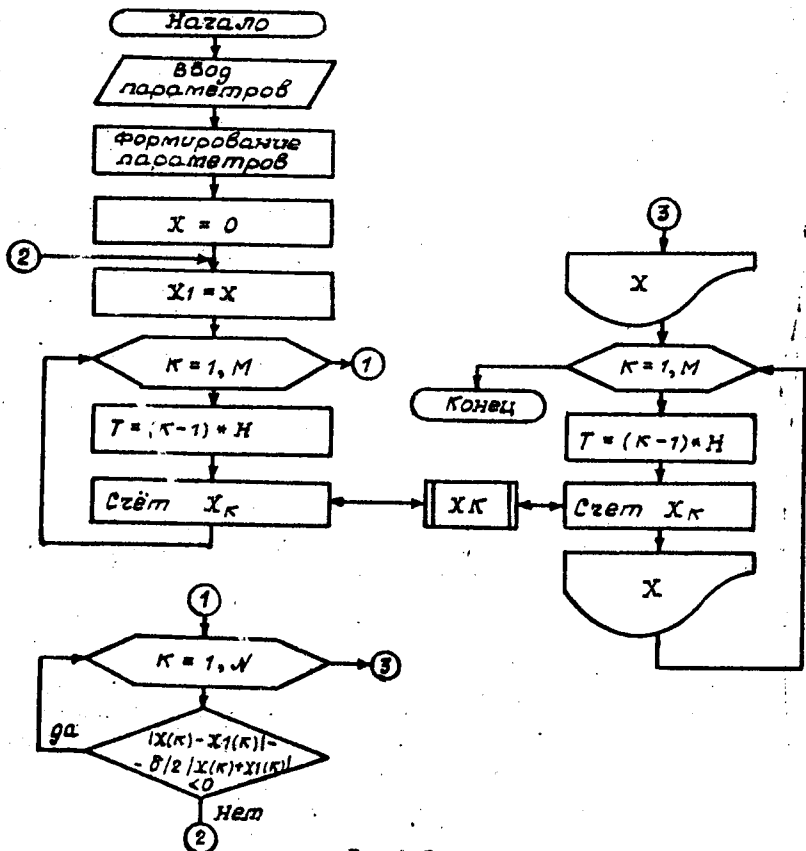


Рис. 5.5

запоминается решение в начале периода. После того, как будет осуществлено интегрирование на одном периоде (первый цикл по κ), покомпонентно проверяется критерий установления согласно (5.17) (второй цикл по κ). Если этот критерий не выполнен хотя бы для одной компоненты, осуществляется переход на метку 2 и процесс интегрирования продолжается дальше. Если же критерий установления выполняется для всех компонент, осуществляется переход на метку 3, с которой начинается процесс расчета и вывода на печать периодического решения (третий цикл по κ).

После составления программы для ЭМ на основе разработанных в виде блок-схем рис.(5.5) алгоритмов осуществляются остальные этапы реализации модели.

Пример 2. Рассматривается та же модель, что и в предыдущем примере. Цель реализации оставим ту же - получить периодическое решение. Исполняем лишь другой метод - непосредственное нахождение. Для вектора начальных условий периодического решения, согласно (5.18) имеем уравнение

$$[E - F(\tau\tau)] Q = X(\tau\tau, 0),$$

где

$$F(\tau\tau) = e^{A \cdot \tau\tau}.$$

Из всех этапов реализации рассмотрим лишь те, в которые, по сравнению с этапами предыдущего примера, вносятся коррективы.

2. К формируемым параметрам следует добавить еще матричную экспоненту $e^{A \cdot \tau\tau}$, которую можно вычислить с помощью матрицы $\omega(A, \tau\tau)$:

$$e^{A \cdot \tau\tau} = E + A \cdot \omega(A, \tau\tau).$$

4. Метод расчета - непосредственный.

6. К процедурам, рассмотренным ранее, добавляются еще две

$$YMM(A1, A2, AR, N),$$

$$LAEQ(A, B, X, N).$$

Первая из них осуществляет умножение двух квадратных матриц $A1$ и $A2$ размерности $N \times N$; результатом будет матрица AR . Необходимость использования этой процедуры возникает при вы-

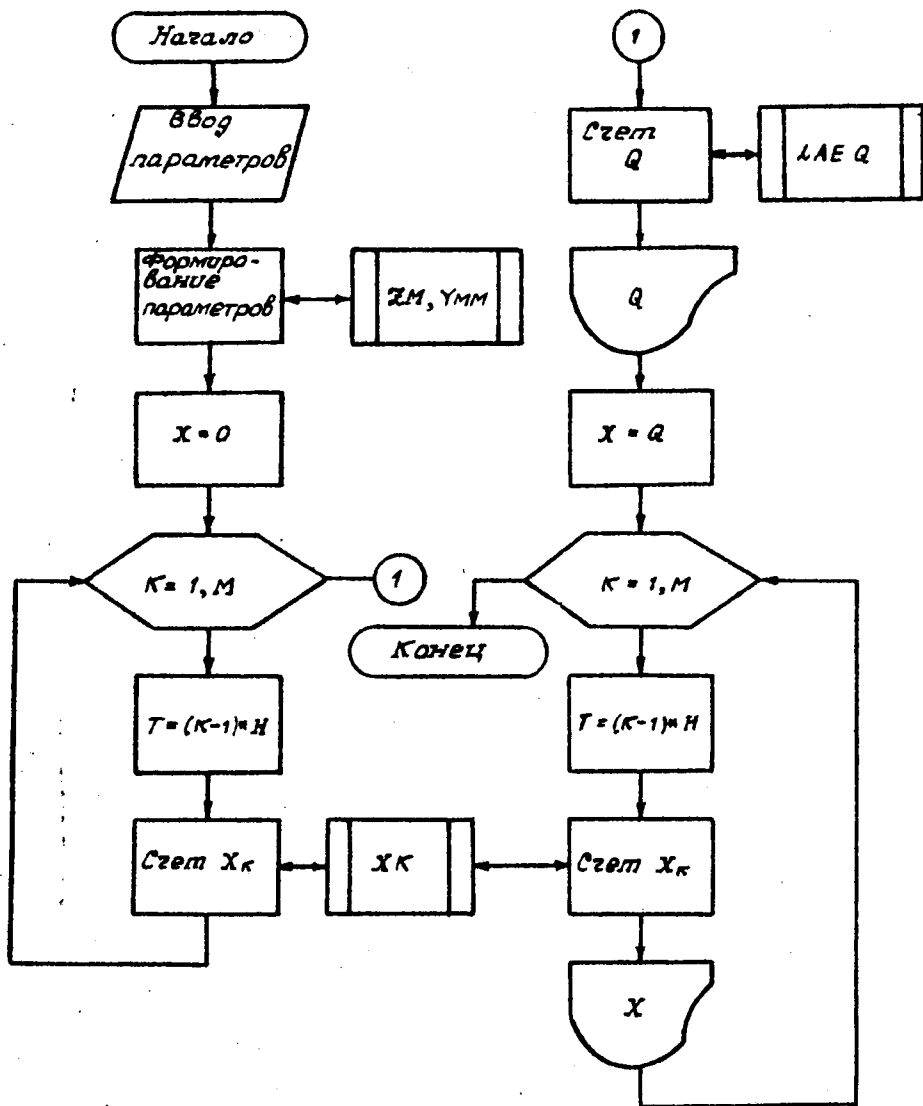


Рис.5.6

числении основной матрицы $F(TT)$. Вторая процедура решает систему линейных уравнений

$$AX = B$$

С матрицей A размерности $N \times N$, вектором B размерности N ; результатом будет вектор X . Необходимость использования этой процедуры возникает при нахождении вектора Q . Блок-схема управляющей программы представлена на рис.(5.6). Первый цикл по κ осуществляет пошаговое интегрирование с целью нахождения $X(TT, 0)$. После определения вектора начальных условий Q находится периодическое решение (второй цикл по κ).

5.6. Формирование и реализация математических моделей схем с ключевыми элементами

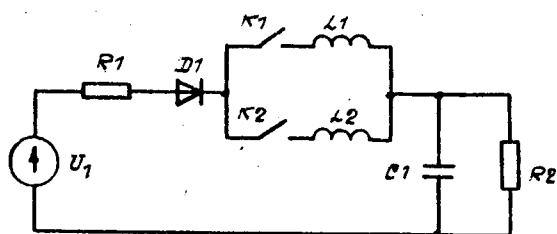
Наличие ключевых элементов в схемах замещений реальных устройств представляет широко распространенное явление. Поэтому важно остановиться на специфике формирования математических моделей таких схем и их реализации. Прежде чем переходить к обобщенной записи математических моделей схем с ключевыми элементами, полезно обратиться к простому примеру. На рис.5.7,а представлена схема замещения RLC -фильтра с диодом $D1$ и управляемыми ключами $K1, K2$. Электронный ключ можно заменить резистором

$$R_{K1}, R_{K2} = \begin{cases} R_0, & \text{ключ работает (замкнут)} \\ R_z, & \text{ключ не работает (разомкнут)}, \end{cases}$$

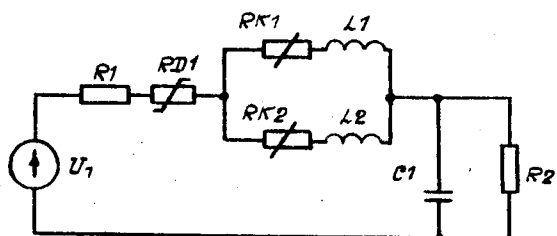
где $R_0 \ll 1$, $R_z \gg 1$. Связь между током и напряжением на диоде задается вольт-амперной характеристикой. Простейшая аппроксимация этой характеристики

$$U_D = \begin{cases} R_{0D} i_D, & i_D > 0 \\ R_{zD} i_D, & i_D < 0 \end{cases},$$

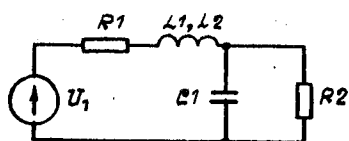
где R_{0D} , R_{zD} будут зависеть от типа диода. Для простоты ограничимся случаем, когда $R_{0D} = R_0$, $R_{zD} = R_z$.



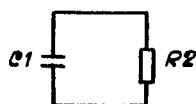
a)



б)



в)



г)

Рис. 5.7

На основании такой упрощенной вольт-амперной характеристики можно представить диод резистором

$$R_{D1} = \begin{cases} R_0 & , \quad i_{D1} > 0 \\ R_z & , \quad i_{D1} < 0 \end{cases}$$

и схема замещения рис.5.7,а принимает вид рис.5.7,б. В отличие от управляемых ключей диод называют неуправляемым ключом с естественной коммутацией. Для формирования математической модели можно использовать методологию, рассмотренную в п.5.2. Опуская промежуточные выкладки, сразу запишем модель

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{1}{L_1} (R_{K1} + R_{D1} + R_1) i_{L1} - \frac{1}{L_1} (R_{D1} + R_1) i_{L2} - \frac{1}{L_1} U_{C1} + \frac{1}{L_1} U_1 ; \quad (5.20)$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{1}{L_2} (R_{D1} + R_1) i_{L1} - \frac{1}{L_2} (R_{K2} + R_{D1} + R_1) i_{L2} - \frac{1}{L_2} U_{C1} + \frac{1}{L_2} U_1 ;$$

$$\frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{L1} + \frac{1}{C_1} i_{L2} - \frac{1}{C_1 R_2} U_{C1} ;$$

$$i_{D1} = i_{L1} + i_{L2} .$$

Идеальные ключи получаются, если

$$R_0 \rightarrow 0 , \quad R_z \rightarrow \infty .$$

Считая, что ключи R_{K1} , R_{K2} работают в противотакте, т. е. не могут быть одновременно замкнутыми или разомкнутыми, рассмотрим трансформацию модели и схемы замещения для идеальных ключей.

$$I) \quad R_{D1} = 0 , \quad R_{K1} = 0 , \quad R_{K2} = \infty .$$

Схема замещения имеет вид рис.5.7,в (с индуктивностью L_1), а математическую модель можно получить предельным переходом из (5.20):

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + R_1 i_{L1} + U_{C1} = U_1 ;$$

$$i_{L2} = 0 ;$$

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = i_{L1} - \frac{1}{R_2} U_{C1} .$$

Аналогично находим

$$2) \quad R_{D1} = 0, \quad R_{K1} = \infty, \quad R_{K2} = 0.$$

Схема замещения 5.7, в с индуктивностью L_2 . Математическая модель

$$\begin{aligned} i_{L1} &= 0 \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + R_1 i_{L2} + U_{C1} &= U_1; \\ C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} &= i_{L2} - \frac{1}{R_2} U_{C1}. \end{aligned}$$

$$3) \quad R_{D1} = \infty, \quad R_{K1} = 0, \quad R_{K2} = \infty; \\ R_{D1} = \infty, \quad R_{K1} = \infty, \quad R_{K2} = 0.$$

Схема замещения 5.7, г, а модель

$$\begin{aligned} i_{L1} &= 0; \\ i_{L2} &= 0; \\ C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} &= - \frac{1}{R_2} U_{C1}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждому состоянию ключей соответствует своя структура и своя модель.

Рассмотрим теперь в общем виде класс моделей ключевых схем о представленных в виде резисторов ключами (резистивными ключами):

$$\frac{dX}{dt} = A(t, X)X + B(t, X). \quad (5.2I)$$

Здесь $A(t, X)$ — кусочно-постоянная матрица; $B(t, X)$ — кусочно-непрерывный вектор, определяемые состоянием ключей. Для идеальных ключей цепь представляется переменной структурой, меняющейся в момент коммутации ключей. Для каждой структуры вектор переменных состояния распадается на 2

$$X \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} Y \\ Z \end{matrix},$$

а система (5.2I) распадается на 2 подсистемы:

$$\frac{dY}{dt} = A_y \cdot Y + B_y(t) ; \quad (5.22)$$

$$\dot{X} = A_x Y + B_x(t) .$$

Матрицы A_y , A_x постоянны для каждой структуры, но имеют в общем случае разную размерность. В частности, для первого случая идеальных ключей рассмотренного примера

$$X = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ U_C \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ U_{C1} \end{bmatrix} = Y ;$$

$$\begin{bmatrix} i_{L2} \end{bmatrix} = \dot{X} ;$$

$$A_y = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & -1/L_1 \\ 1/C_1 & -1/C_1 R_2 \end{bmatrix} ; \quad B_y = \begin{bmatrix} U_1/L_1 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} ; \quad B_x = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} .$$

Пусть t_* - момент смены структур, причем

$$X_- = X(t_* - 0) , \quad X_+ = X(t_* + 0) .$$

В общем случае

$$X_+ = P \cdot X_- , \quad (5.23)$$

где P - матрица пересчета. Если $P = E$, то решение непрерывно. В принципе возможны такие структуры, когда $P \neq E$ и необходимо P находить.

Таким образом, математическая модель схемы с ключевыми элементами может иметь вид (5.22) с условиями (5.23) в момент смены структуры (для идеальных ключей), либо вид (5.21) для резистивных ключей. Модель для идеальных ключей экономичнее в реализации хотя бы потому, что система дифференциальных уравнений в (5.22) имеет меньший порядок, чем в (5.21). Но здесь требуется сложный алгоритм для формирования уравнений (5.22), а также для определения матрицы пересчета в (5.23). Система (5.21) отражает неиз-

менную структуру, но из-за больших величин R_z может быть жесткой.

Поскольку системные методы интегрирования позволяют считать уравнения с большим коэффициентом жесткости, мы в дальнейшем выберем модель (5.2I).

Рассмотрим реализацию модели (5.2I). Цель реализации - периодическое решение. В качестве метода поиска периодического решения используем метод установления. Пошаговое интегрирование осуществляется по схеме (5.I3).

В блок-схеме управляющей программы рис.5.8 использованы следующие процедуры:

$PKL(T, X, RR);$

$ABOM(T, RK, A, BR, OM);$

$BK(T, BR, B);$

$XK(T, X)$.

Входными параметрами процедуры PKL являются время T и массив вектора переменных состояния X . Результатом действия процедуры является массив RR , размерность которого равна числу ключей. Каждому элементу RR поставлен в соответствие определенный ключ. Состояние ключа определяется числом R_0 или R_z , записанным в соответствующий элемент RR .

Входные параметры процедуры $ABOM$:

T - время; RK - массив состояния ключей.

Результат действия процедуры:

A - матрица системы (5.2I), соответствующая состоянию ключей RK ;

BR - составляющие величины вектора $B(t, X)$, определяемые состоянием ключей RK ;

OM - матрица для пошагового интегрирования, вычисляемая с помощью процедуры XM (см. п.5.5, пример I).

Входные параметры процедуры:

T - время; BR - массив, формируемый предыдущей процедурой.

Выходной параметр процедуры BK - массив B , соответствующий $B(t, X)$ в (5.2I). Процедура пошагового интегрирования та же, что и в схеме рис.5.5.

Рассмотрим теперь последовательность операторов блок-схемы

рис.5.8. Состояние ключей отражено в двух массивах PK и PKT . В массиве PKT отражено текущее состояние ключей в зависимости от времени T . В массиве PK отражено состояние ключей в межкоммутационные интервалы времени. После формирования параметров в блок-схеме следует последовательность операторов задания начальных данных: $X = 0, T = 0$ и формирование PK , A, BK, OM . Затем в $X1$ запоминается начальное состояние вектора X . Следующий далее цикл по K осуществляет пошаговое интегрирование на величине одного периода. Внутри этого цикла считается текущее состояние ключей PKT , а затем делается покомпонентное сравнение с вектором PK (цикл по J , NK - число ключей). Если хотя бы одна компонента не совпадает, то в PK записывается новое состояние ключей и делается пересчет A, BK, OM . После окончания первого цикла по K (выход на метку 2), делается покомпонентное сравнение векторов $X1$ и X (проверка критерия установления). Если хотя бы для одной компоненты не выполнен критерий установления, счет продолжается на следующем периоде (выход на метку 3). Если же критерий установления выполнен для всех компонент, делается переход на метку 4, с которой начинается расчет и вывод периодического решения.

Моменты коммутации ключей в рассмотренной блок-схеме определяются с точностью заданного шага интегрирования H , но, в принципе, можно сделать их уточнение. В заключение заметим, что к перечисленным процедурам, при рассмотрении конкретной модели, следует добавить процедуры внешнего воздействия (источники тока и напряжения), а размерность массива BK определяется конкретным видом вектора $B(t, x)$ в (5.21).

5.7. Параметрическая оптимизация

Как уже упоминалось в п.5.1, анализ объекта, т. е. извлечение некоторой совокупности информации о нем, с точки зрения проектирования играет ограниченную роль. Обычно после того, как выбрана структура, необходимо подобрать ее параметры так, чтобы она функционировала согласно требованиям технического задания. Эти требования формируются в виде так называемых целевых функций.

Пример. Подобрать параметры L_1, L_2, C , цепи рис.5.3,а

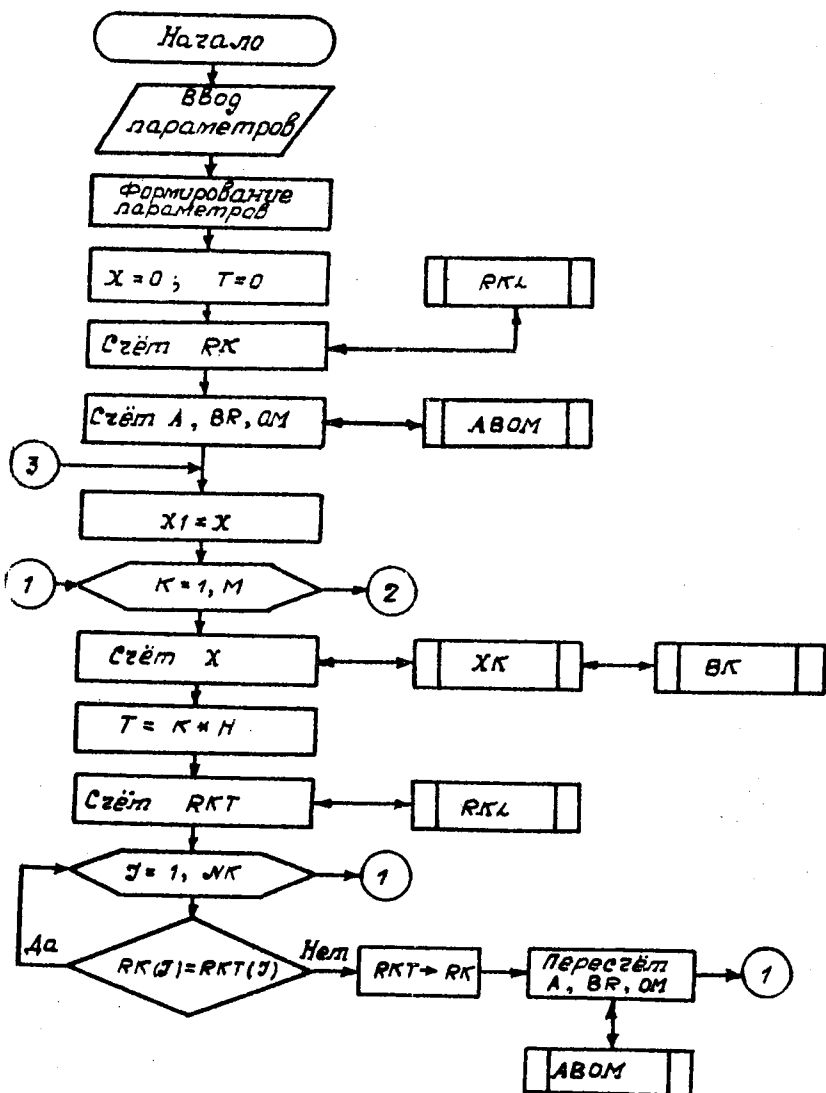


Рис. 5.8 (начало)

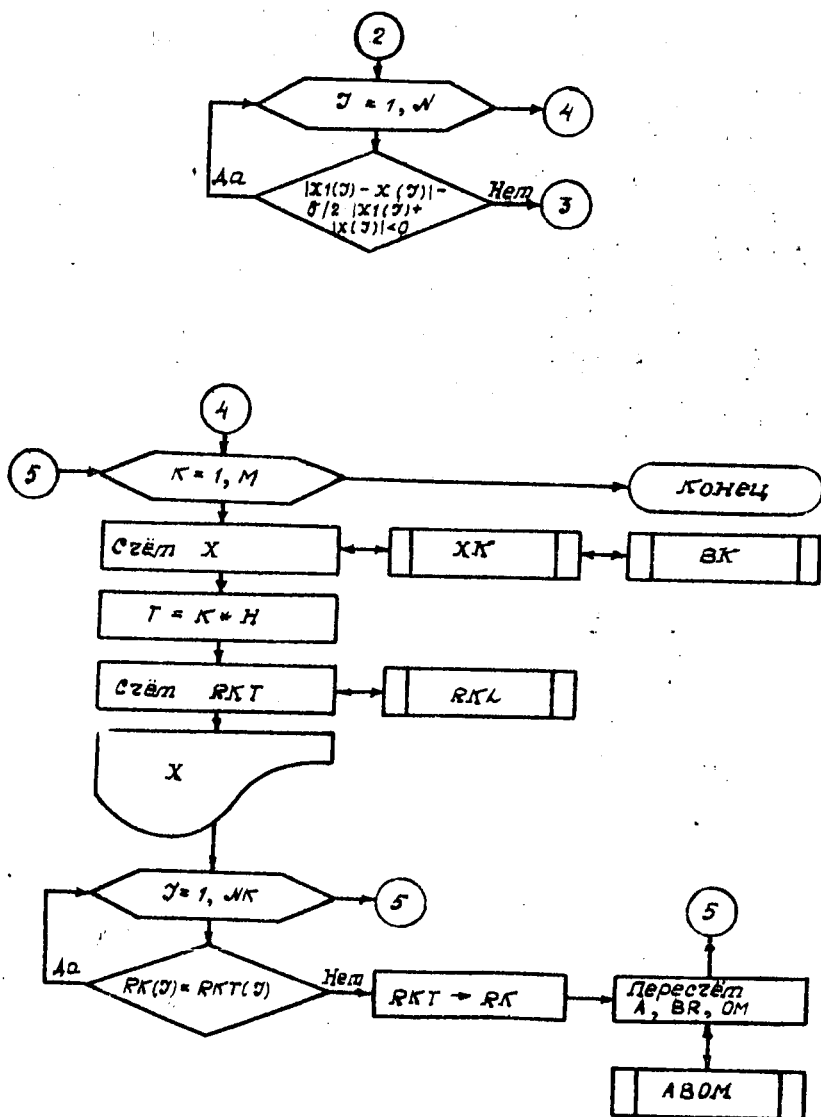


Рис. 5.8 (окончание)

так, чтобы в установившемся режиме отклонение напряжения U_{R2} от U_{R2} было минимальным; напряжение U_{C2} было равно U_{C22} ; напряжение U_{C1} не превосходило U_{C21} . Указанные параметры меняются в заданных пределах; U_{R2} , U_{C21} , U_{C22} заданы; все другие параметры фиксированы.

Формализация постановки задачи подбора параметров приводит к следующим соотношениям:

$$W = \max_{0 \leq t \leq T} |U_{R2} - U_{R2}|; \quad (5.24)$$

$$U_{C2} = U_{C22}; \quad (5.25)$$

$$U_{C1} \leq U_{C21}; \quad (5.26)$$

$$L_{11} \leq L_1 \leq L_{12}; \quad (5.27)$$

$$L_{21} \leq L_2 \leq L_{22};$$

$$C_{11} \leq C_1 \leq C_{12}.$$

Граничные значения L_{11} , L_{12} , L_{21} , L_{22} , C_{11} , C_{12} заданы. В области параметров (5.27) требуется найти такую точку (набор параметров), в которой W принимает наименьшее значение и выполнены ограничения (5.25), (5.26).

Теперь обобщим постановку задачи оптимизации. Пусть D - область параметров $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ и пусть в этой области определена функция $W(\mathcal{P})$, удовлетворяющая условию

$$W(\mathcal{P}) \geq 0$$

при ограничениях типа равенств

$$\varphi_k(\mathcal{P}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \quad (5.28)$$

и типа неравенств

$$\psi_k(\mathcal{P}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.29)$$

Требуется найти минимум $W(\mathcal{P})$ в области D при указанных ограничениях.

Для рассматриваемой конкретной задачи область D определена неравенствами (5.27), причем

$$m = 3, \quad n = 1, \quad l = 1;$$

$$\varphi_1(\mathcal{P}) = U_{c22} - U_{c22};$$

$$\varphi_1(\mathcal{P}) = U_{cx1} - U_{cx1}.$$

Наиболее простая задача оптимизации получается при отсутствии ограничений (5.28), (5.29). Для задач с ограничениями используются различные приемы (например, метод Лагранжа, метод штрафных функций), позволяющие свести исходную задачу к задаче оптимизации без ограничений, но с числом переменных больше, чем m [33].

Возвращаясь к рассматриваемому примеру, предположим, что ограничения (5.25), (5.26) отсутствуют, а для нахождения минимума W имеется процедура

$$OPT(P_1, P_2, P, FC, W, NP).$$

Входные параметры этой процедуры:

- NP - число варьируемых переменных ($= 3$);
- $P_1(NP)$ - массив левых границ области $\mathcal{D}$;
- $P_2(NP)$ - массив правых границ области $\mathcal{D}$;
- $P(NP)$ - массив, содержащий координаты начальной точки $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$;
- $FC(\mathcal{P})$ - имя процедуры-функции, считающей целевую функцию (5.24).

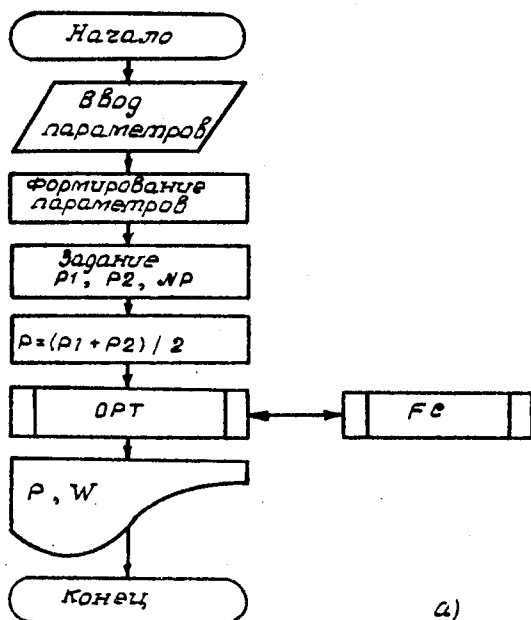
Выходные параметры:

- $P(NP)$ - точка минимума целевой функции;
- W - минимальное значение целевой функции.

Блок-схема управляющей программы представлена на рис.5.9,а. Массивы P_1 и P_2 формируются, соответственно, из левых и правых частей неравенств (5.27). Блок-схема процедуры расчета целевой функции представлена на рис.5.9,б. Установившееся периодическое решение находится непосредственным методом. Поэтому в основу блок-схемы процедуры FC положена блок-схема рис.5.6. В процедуре FC формируются только те параметры, которые зависят от L_1, L_2, C_1 . Остальные параметры формируются в управляющей программе. Первый цикл по K в FC служит для нахождения вектора начальных условий периодического решения. Второй цикл по K находит периодическое решение и одновременно величину W согласно (5.24).

В практике проектирования существует два термина, связанные

Блок - схема управляющей программы



Блок - схема процедуры FC

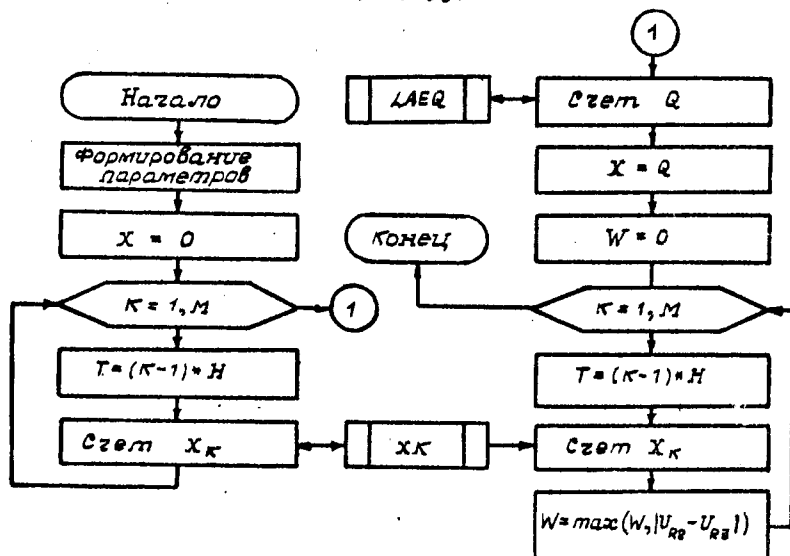


Рис. 0.9

тоды поиска их оптимума. Если с помощью указанных упрощений удастся найти некоторый набор допустимых параметров (что можно выяснить с помощью анализа), то эти параметры и являются результатом расчета.

Таким образом, расчет — это нахождение некоторой точки в области допустимых параметров данной структуры с помощью упрощенных моделей. Как правило, эта точка далека от точки оптимального набора параметров. Поэтому после того, как устройство будет материализовано, необходимым этапом является процесс настройки, т. е. экспериментальный поиск оптимального набора параметров. Необходимо заметить, что оптимизация, в силу неабсолютной адекватности модели и реального устройства, тоже может дать неоптимальный набор параметров. Поэтому процесс настройки и здесь необходим, но делать его проще из-за близости реальной и теоретической оптимальных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизация поискового конструирования (искусственный интеллект в машинном проектировании)/ А.И.Половинкина, Н.К.Бобков, Г.Я.Бух и др.; под ред. А.И.Половинкина. М.: Радио и связь, 1981. 344 с.
2. Штейн М.Е. Методы машинного проектирования цифровой аппаратуры. М.: Сов.радио, 1973. 294 с.
3. Теоретические основы САПР: учебник для вузов/ В.П.Корячко, В.М.Курейчик, И.П.Норенков. М.: Энергоатомиздат, 1987. 400 с.
4. Захаров В.К., Лыпарь Ю.И. Электронные устройства автоматики и телемеханики: Учебник для вузов. 3-е изд., перераб.и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр.отд-ние, 1984. 432 с.
5. Сигорский В.П., Петренко А.И. Основы теории электронных схем. Киев: Техника, 1967. 609 с.
6. Автоматизация схемотехнического проектирования: Учеб.пособие для вузов/ В.И.Ильин, В.Т.Фролкин, А.И.Бутко и др.; Под ред. В.Н.Ильина. М.: Радио и связь, 1987. 368 с.
7. Крик Э. Введение в инженерное дело: Пер. с англ. М.: Энергия, 1970. 176 с.
8. Методы синтеза технических решений/ Дворянкин А.М., Половинкина А.И., Соболев А.Н. М.: Наука, 1977. 103 с.
9. Алгоритмы автоматизации проектных решений/ Под ред. А.И.Половинкина. М.: Энергия, 1976. 264 с.
10. Чахмахсаян Е.А., Мозговой Г.П., Силин В.Д. Математическое моделирование и макро моделирование биполярных элементов электронных схем. М.: Радио и связь, 1985. 144 с.
11. Ильин В.Н., Коган В.Л. Разработка и применение программ автоматизации схемотехнического проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 368 с.
12. Диалоговые системы схемотехнического проектирования/ В.И.Анисимов, Г.Д.Дмитриевич, К.Б.Скобелевич и др.; Под ред.В.И.Анисимова. М.: Радио и связь, 1988. 288 с.
13. Добкин И.Р., Лебедев В.В., Татур Т.А. Моделирование тиристорных при машинном проектировании преобразовательных устройств. М.: Информэлектрон, 1984. 48 с.
14. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники: В 2 т.: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. Т.1. 598 с.
15. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. М.: Сов.радио, 1972. 212 с.

16. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей: Пер. с англ. под ред. Т.В.Микуцкого. М.-Л.: Энергия, 1964. 480 с.
17. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи: Пер. с англ. под ред. П.А.Ионкина: Учеб.пособие для вузов специальности радиотехн., электронная техн., электроприборостр. и автоматика. М.: Высш.школа, 1971. 448 с.
18. Мэзон С. и Цеммерман Ю. Электронные цепи, сигналы и системы: Пер. с англ. под ред. А.А.Соколова. М.: Инстр.лит., 1963. 619 с.
19. Белларт С., Возняки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел: Пер. с польского под ред.П.А.Ионкина. М.: Мир, 1972. 332 с.
20. Бондарь В.А., Баушев В.С., Кобзев А.В. Методы анализа и расчета электронных схем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. 307 с.
21. Бондарь В.А., Ватанов В.С. Алгоритм формирования структурного (обобщенного) числа по графу с унитарными. Радиоэлектроника. Изв.вузов СССР, 1982, № 6, С.78.
22. Остапенко А.Г. Анализ и синтез линейных радиоэлектронных цепей с помощью графов. Аналоговые и цифровые фильтры. М.: Радио и связь, 1985. 280 с.
23. Анисимов В.И. Топологический расчет электронных схем. Л.: Энергия, 1977. 240 с.
24. Автоматизированное проектирование цифровых устройств/ С.С.Бадудин, Ю.М.Барнаулов, В.А.Бердильев и др.; Под ред. С.С.Бадудина. М.: Радио и связь, 1981. 240 с.
25. Норенков И.П. САПР, I. Принципы построения и структура. М.: Высшая школа, 1986. 127 с.
26. Волков И.В., Шлапак В.А. Машинные методы расчета систем стабилизированного тока. Киев: Наук. думка, 1978. 152 с.
27. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. М.: Сов.радио, 1976. 608 с.
28. Моделирование и оптимизация на ЭВМ радиоэлектронных устройств/ З.М.Бененсон, М.Р.Елистратов, Л.К.Ильин и др.; Под ред. З.М.Бененсона. М.: Радио и связь, 1981. 272 с.
29. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
30. Бахвалов Н.С., Идков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

31. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высш.школа, 1988. 335 с.
32. Скељбоз С. Временной стационарный анализ нелинейных электрических систем. ТИИЭР, Т.70, № 10, 1982, С.89-III.
33. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
I. Содержание процесса схемотехнического проектирования	5
I.1. Формирование целей проектирования	5
I.2. Поиск схемотехнического решения	8
I.3. Проблемы автоматизации поиска схемотехнического решения и пути их реализации	18
I.4. Проблемы и задачи анализа схемотехнических решений	33
2. Топологические и математические модели компонентов электронных схем	39
2.1. Задача построения моделей компонентов	39
2.2. Топологические модели компонентов электронных схем	41
2.2.1. Выбор моделей компонентов	41
2.2.2. Математические модели элементов схем ...	43
2.2.3. Обобщенные сигнальные графы линейных электронных компонентов	69
2.3. Математические информационные модели компонентов (базовых блоков) функцио- нальных схем	77
2.3.1. Генераторы сигналов	77
2.3.2. Безынерционные статические элементы	79
2.3.3. Безынерционные динамические элементы ...	79
2.3.4. Инерционные линейные элементы, заданные переходной характеристикой по временной области — $h(t)$	80
2.3.5. Инерционные линейные элементы, заданные обыкновенным дифферен- циальным уравнением (ОДУ)	82
2.3.6. Инерционные линейные элементы, заданные операторным коэффициентом передачи $F(p)$ или номинальным $F(j\omega)$ в частотной области	83
2.3.7. Математические информационные (функциональные) модели логических элементов	84

2.4. Определение параметров математических моделей электронных компонентов	86
3. Схемные функции, частотные и временные характеристики и их параметры	96
3.1. Определение схемных функций	96
3.2. Формы представления схемных функций	103
3.3. Частотные характеристики	108
3.4. Временные характеристики	114
3.5. Параметры частотных и временных характеристик	118
3.6. Обратная связь и чувствительность	122
4. Аналитические методы анализа линейных электронных схем в операторной форме	127
4.1. Построение топологических моделей электронных схем	127
4.2. Анализ методом унисторных и УНИТных графов	134
4.2.1. Унисторные модели источников тока	134
4.2.2. Вычисление схемных функций в ненаправленных графах (пассивных схемах)	135
4.2.3. Применение топологических формул в графе с унисторами	142
4.2.4. Способы разложения определителя графа	143
4.2.5. Порядок анализа электронных схем методом унисторных (смешанных) графов	148
4.2.6. Метод структурных чисел	155
4.2.7. Вычисление схемных функций по графу схемы с управляемыми напряжением источниками тока - УНИТами	170
4.3. Анализ методом сигнальных (направленных) графов	175
4.3.1. Построение сигнальных графов электронных схем	175
4.3.2. Порядок составления уравнений схемы по причинно-следственному принципу	177
4.3.3. Порядок составления сигнального графа непосредственно по схеме	181

4.3.4. Эквивалентные преобразования сигнального графа	183
4.3.5. Формула общей передачи сигнального графа	187
4.3.6. Обратные связи и чувствительность	188
4.3.7. Порядок анализа электронных схем методом сигнальных графов	193
4.4. Предварительный расчет электронных схем	194
4.4.1. Предварительный выбор компонентов и расчет их параметров	194
4.4.2. Линейный усилитель	196
4.4.3. Формирователь импульсов пилообразного напряжения (ПН)	208
4.5. Моделирование и анализ функциональных схем	205
4.5.1. Составление функциональных схем	205
4.5.2. Математическое моделирование функциональных схем (ФС)	207
4.5.3. Математическое моделирование функциональных схем цифровой аппаратуры (микропроцессоров и микро-ЭВМ)	210
4.5.4. Математическое моделирование логических функциональных схем	212
Формирование и реализация математических моделей линейных и нелинейных электронных схем во временной форме	217
5.1. Математическое моделирование и САПР электронных схем	217
5.2. Формализация процесса формирования математических моделей	219
5.3. Методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений	227
5.4. Поиск периодических решений	235
5.5. Этапы подготовки модели к численной реализации. Некоторые алгоритмы реализации	240
5.6. Формирование и реализация математических моделей схем с ключевыми элементами	245
5.7. Параметрическая оптимизация	251
Литература	259

Валерий Семенович
Баушев

Владимир Антонович
Бондарь

Николай Степанович
Легоostaев

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Г.В.Астапенко

ИБ 2301

Формат 60X84/16 Подписано в печать 15.03.90 КЗ 09115
Бумага типографская № 3.
Печать офсетная. Печ.л. 16,5 Усл.печ.л. 15,4 Уч.-изд.л.12,68
Тираж 1000 экз. Заказ 505 Цена 40 к.

Издательство ТТУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4

Ротапринт ТИАСУРа, 634050, Томск, пр. им.Ленина, 40

