С. И. БАСКАКОВ

# Радиотехнические цепи и сигналы

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве экспериментального учебника для студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений

Москва «Высшая школа» 1983

ББК 32.841
Б 27
УДК 621.396.1

Рецензенты:
кафедра теоретических основ радиотехники МИРЭА;
засл. деят. науки и техники РСФСР, проф., д-р техн. наук Н. И. Чистяков

**Баскаков С. И.**
Б 27 Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. — М.: Высш. школа., 1983. — 536 с., ил.

В пер.: 1 р. 50 к.

Учебник содержит систематическое изложение разделов теоретической радиотехники, входящих в программу курса «Радиотехнические цепи и сигналы».

Рассматриваются вопросы общей теории сигналов и их спектральных представлений. Приводятся элементы статистической радиотехники и методы анализа прохождения сигналов через линейные, нелинейные и параметрические системы. Излагаются теории цепей с обратной связью, автоколебательных систем, устройств цифровой обработки сигналов, оптимальных линейных фильтров.

Для студентов радиотехнических специальностей вузов. Может быть использован радиоинженерами и лицами, повышающими квалификацию в области теоретической радиотехники.

Б $\dfrac{2402020000-086}{001(01)-83}$ КБ—40—4—81

ББК 32.841
6Ф2

## Оглавление

# Предисловие

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» в настоящее время занимает одно из центральных мест среди фундаментальных дисциплин, определяющих своим содержанием профессиональную подготовку радиоинженеров. Следуя за направлением научно-технического прогресса, отражая тенденции развития элементной базы радиоэлектроники и ее теоретического арсенала, этот курс объединяет и систематизирует наиболее важные принципы в области радиотехники.

Содержание данной книги соответствует программе курса «Радиотехнические цепи и сигналы», утвержденной МВ и ССО СССР. Предполагается, что читатель, приступающий к изучению книги, прослушал ряд предшествующих курсов, а именно: «Введение в специальность», «Высшая математика», «Физика», «Основы теории цепей» и «Электронные приборы».

Работая над текстом, автор придерживался концепции возможно более тесного сближения излагаемого материала с практикой учебной работы в вузе. Это в первую очередь определило принцип отбора материала и степень детальности освещения: на страницы книги вынесено лишь то, что, как показывает практический опыт преподавания, может быть полностью усвоено студентами за отведенное на это время. Изучение конкретных схемотехнических решений, их сравнительный анализ — все это относится уже к специальным инженерным дисциплинам, изучаемым позднее.

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» отличается разнообразием содержания, обилием понятий и методов, с которыми учащиеся сталкиваются впервые. Большую роль в этом курсе играют математические приемы исследования. Прочное овладение ими совершенно обязательно, поскольку они служат логическим фундаментом построения последующих радиотехнических дисциплин. Для связи теоретических положений и радиотехнической практики в главах книги содержится много примеров, раскрывающих характерные приемы инженерного анализа.

**Содержание и структура книги.** Книга состоит из двух частей. Первая часть РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ знакомит читателя с методами, принятыми в настоящее время для описания и изучения свойств сигналов. Рассматриваются вопросы классификации сигналов, фундаментальный принцип геометрической трактовки пространства сигналов, спектральный и корреляционный анализ детерминированных колебаний, теория модулированных радиосигналов, а также дискретное представление непрерывных сигналов с ограниченным спектром. Подробно излагаются методы описания и измерения характеристик случайных сигналов.

Во второй части РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ, УСТРОЙСТВА И СИСТЕМЫ читатель найдет систематическое изложение принципов анализа и расчета явлений прохождения разнообразных сигналов, как детерминированных, так и случайных, через линейные и нелинейные радиотехнические цепи. Особо подчеркнута роль узкополосных частотно-избирательных цепей. Рассмотрены приемы синтеза линейных четырехполюсников и двухполюсников с заданными частотными характеристиками, а также вопросы прохождения сигналов через линейные параметрические цепи. Изучая безынерционные нелинейные цепи, читатель знакомится с важнейшими видами преобразований сигналов — модуляцией, детектированием, умножением и преобразованием частоты. Рассмотрена теория автогенераторов гармонических колебаний. Изложены направления, возникшие в радиотехнике сравнительно недавно под влиянием успехов микроэлектронной технологии. Сюда относятся активные фильтры для обработки аналоговых сигналов и как одно из наиболее перспективных направлений — цифровая фильтрация сигналов. Наконец, приведены элементы теории оптимальной линейной фильтрации детерминированных и случайных сигналов.

Открыв эту книгу, читатель, безусловно, обратит внимание на принцип оформления ее страниц. Здесь наряду с основным текстом имеются поля, на которые вынесена вспомогательная, дополнительная и наглядно-графическая информация. В частности, на полях сосредоточены:

1. НАПОМИНАНИЯ, относящиеся к ранее пройденным учебным курсам, например к курсам основ теории цепей и физики.

2. СВЕДЕНИЯ СПРАВОЧНОГО ХАРАКТЕРА, такие, как значения фундаментальных физических констант, табличные интегралы и т. д.

3. КРАТКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ, цель которых — показать наличие межпредметных связей, обратить внимание на общность методов, принятых в радиотехнике и других, порой далеких, областях научной и прикладной деятельности.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РИСУНКИ, которые в тексте, как правило, не упоминаются, однако служат неотъемлемыми элементами излагаемого учебного материала. Наличие этих рисунков, помимо сокращения объема книги, дает возможность в известной мере приблизить стиль книжного изложения к стилю живой лекторской речи.

5. УКАЗАНИЯ, помогающие организовать работу читателя с текстом. На полях книги в соответствующих местах появляются следующие сигнальные значки:

■ — в данном месте текста описан некоторый принцип, имеющий первостепенное значение для радиотехники;

● — указание на то, что в тексте сформулировано новое понятие, которое читателю предлагается запомнить;

▲ — читателю рекомендуется решить соответствующую задачу из числа приведенных в конце главы; данная задача иллюстрирует положения, изложенные в основном тексте.

В настоящее время учебный процесс в вузе характеризуется высокой интенсивностью. Это требует от учащегося четкого планирования своего времени. Стремясь помочь студентам в этом важном деле, автор уделил особое внимание оптимальной дозировке материала, предлагаемого для усвоения и повторной проработки.

Каждая глава книги отвечает отдельной большой теме лекционного курса. Основной структурной единицей главы является параграф, приближенный по своему объему к отдельной лекции. Самая мелкая структурная единица — раздел параграфа, в котором содержится некоторый завершенный вопрос.

В конце каждой главы помещены РЕЗУЛЬТАТЫ, прочное знание которых является обязательным.

Следующей, более активной фазой самоконтроля являются ответы на ВОПРОСЫ. Особенно большую пользу эта работа может принести студентам в ходе подготовки к экзаменам.

Желательно, чтобы читатель по мере изучения курса постоянно обращался к разделу ЗАДАЧИ. Здесь собран материал для самостоятельной работы, по тематике и уровню сложности отвечающий содержанию той или иной главы.

В методический аппарат каждой главы включен факультативный раздел БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАНИЯ. Работа над этими заданиями рекомендуется студентам, которые глубоко интересуются методами теоретической радиотехники и имеют склонность к научным исследованиям.

В основу данной книги положен материал лекций, читаемых автором на радиотехническом факультете Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетического института. Автор признателен своим коллегам и в особенности проф. Н. Н. Федорову, проф. Г. Д. Лобову, доц. А. М. Николаеву, доц. В. П. Жукову и доц. В. Г. Карташеву за неизменную поддержку и ценные советы. Большую помощь при подготовке рукописи книги оказали критические замечания и рекомендации рецензентов проф. Н. И. Чистякова и проф. К. А. Самойло. Автор благодарит проф. И. С. Гоноровского, любезно согласившегося ознакомиться с окончательным вариантом рукописи.

Отзывы о книге направляйте по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, изд-во «Высшая школа».

*Автор*

# Введение

В решениях XXVI съезда КПСС существенное значение придается ускорению научно-технического прогресса. К числу важных областей науки и техники, достижения которых непосредственно способствуют росту материального и культурного уровня нашего общества, принадлежит радиотехника.

*Радиотехника* — научно-техническая область, задачами которой являются:

1) изучение принципов генерации, усиления, излучения и приема электромагнитных колебаний и волн, относящихся к радиодиапазону;

2) практическое использование этих колебаний и волн для целей передачи, хранения и преобразования информации.

На первоначальном этапе своего развития, вслед за изобретением радио А. С. Поповым в 1895 г., радиотехника решала преимущественно проблемы электросвязи, используя электромагнитные колебания с длинами волн в несколько сотен или тысяч метров. В настоящее время круг применений радиотехники необычайно расширился. Радиосвязь, телевидение, радиоуправление, радиолокация, радионавигация, радиотехнические методы в биологии, медицине, геофизике — таков далеко не полный перечень отраслей радиотехники.

Науку, занимающуюся физическими основами радиотехники, называют *радиофизикой*. Радиофизика — ветвь прикладного естествознания, тесно связанная с такими фундаментальными областями, как квантовая механика, физика твердого тела и др.

Проникновение радиотехники в смежные области (электронику, вычислительную технику) обусловило возникновение широкой научно-технической области, получившей собирательное название *радиоэлектроники*.

Радиотехника и радиоэлектроника получили всестороннее развитие в нашей стране. Большой общепризнанный вклад в фундаментальные основы радиотехники внесли советские ученые — академики Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, В. А. Фок, А. И. Берг, В. А. Котельников и многие другие.

Как известно читателю из материала курса «Введение в специальность», передача сообщения от источника к получателю с помощью радиотехнических методов осуществляется по *радиоканалу*. Основные элементы радиоканала — передатчик, приемник и та физическая среда, в которой происходит распространение электромагнитных волн. Средой распространения может быть как свободное пространство, так и специальные технические устройства — волноводы, кабели и другие линии передачи.

*Сигнал*, поступающий от первичного источника сообщений, на передающей стороне радиоканала с помощью микрофона, телевизионной камеры или других подобных устройств преобразуется в электрические колебания. Эти колебания не могут быть непосредственно использованы для возбуждения электромагнитных волн по причине их относительной низкочастотности. Поэтому в радиотехнике применяют способы передачи сигналов, основанные на том, что низкочастотные колебания, содержащие исходное сообщение, с помощью специальных устройств управляют параметрами достаточно мощного *несущего колебания,* частота которого лежит в радиодиапазоне. Процесс подобного преобразования сигналов называют *модуляцией* несущего колебания.

Модулированный сигнал излучается антенной передатчика. Возбужденные при этом электромагнитные волны вызывают появление в антенне приемника радиосигнала, уровень которого обычно весьма мал. После частотной фильтрации и усиления принятый сигнал должен быть подвергнут *демодуляции* (*детектированию*) — операции, обратной по отношению к модуляции. В результате на выходе приемника возникает колебание, являющееся копией переданного исходного сообщения.

Приведенное описание принципа функционирования простейшего радиоканала подчеркивает, что передача сообщений по радиоканалу сопровождается разнообразными *преобразованиями сигналов.* Эти преобразования осуществляются посредством соответствующих физических систем — *радиотехнических цепей.* Каждая радиотехническая цепь выполняет определенную операцию над сигналами; характер этой операции целиком зависит от внутренней структуры данной физической системы. Так, принято различать усилители, фильтрующие частотно-избирательные системы, преобразователи формы электрических колебаний, модуляторы, детекторы и многие другие виды радиотехнических цепей, рассматриваемые в данном курсе.

В любом реальном радиоканале помимо полезного сигнала неизбежно присутствуют *помехи*, возникающие по многим причинам — из-за хаотического теплового движения электронов в элементах цепей, несовершенства контактов в аппаратуре, влияния соседних радиоканалов с близкими несущими частотами, наличия в пространстве шумового космического радиоизлучения и т. д. Способность радиотехнических средств передачи информации противодействовать вредному влиянию помех и обеспечивать высокую верность передачи называют *помехоустойчивостью.* В современной радиотехнике задача создания помехоустойчивых систем является одной из центральных. Отдельная отрасль, получившая название *статистической радиотехники* и базирующаяся на вероятностных методах, занимается теорией и практикой построения таких систем. Одним из наиболее действенных путей достижения высокой помехоустойчивости является использование совершенных видов модуляции сигналов, в частности *помехоустойчивого кодирования* сообщений.

Итак, в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» изучаются следующие основные вопросы:

1. Свойства разнообразных сигналов и помех, а также принципы их математического описания.

2. Свойства физических систем, выполняющих роль радиотехнических цепей.

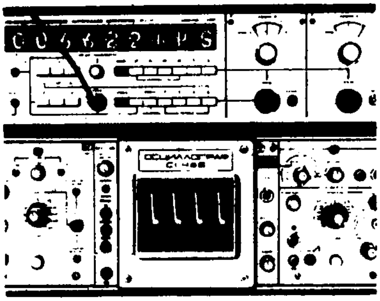
3. Методы анализа преобразований сигналов в радиотехнических цепях, способы построения основных видов цепей.

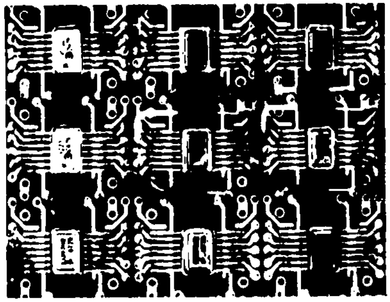
4. Приемы синтеза радиотехнических цепей с заданными свойствами.

В наши дни радиотехника является бурно развивающейся научно-прикладной областью. Говоря о перспективах ее ближайшего развития, следует сказать о тенденции перехода ко все более высокочастотным диапазонам электромагнитных колебаний и волн. Так, колебания сверхвысокочастотного диапазона (СВЧ), ранее применявшиеся в основном в радиолокации, стали широко использоваться в телевизионных, связных и телеметрических радиоканалах. Достигнуты большие успехи в создании лазерных линий связи с несущими частотами, лежащими в световом и инфракрасном диапазонах.

Быстрыми темпами идет развитие *элементной базы* радиотехники и радиоэлектроники. Если традиционные радиотехнические цепи представляют собой почти исключительно комбинации линейных и нелинейных электрических цепей, то сейчас интенсивно исследуются и внедряются в практику *функциональные устройства и системы*, производящие обработку сигналов за счет специфических волновых и колебательных явлений в твердых телах — в полупроводниках, диэлектриках и магнитных материалах. Огромную роль в современной радиотехнике играют изделия микроэлектронной технологии. Доступные, надежные и быстродействующие *интегральные схемы* оказали большое влияние на многие области радиотехники. Микроэлектроника обусловила возможность широкого перехода к принципиально новым *цифровым способам* обработки и преобразования радиотехнических сигналов.

Есть все основания считать, что отрасли радиотехники будут и впредь расширяться и развиваться на базе прогресса во многих смежных областях науки и техники.





# 1.
# Радиотехнические сигналы

## Глава 1
## Элементы общей теории радиотехнических сигналов

Термин «сигнал» часто встречается не только в областях науки и техники, но и в повседневной жизни. Не задумываясь о строгости терминологии, мы иногда отождествляем такие понятия, как *сигнал, сообщение, информация*. Обычно это не приводит к недоразумениям, поскольку слово «сигнал» ведет свое происхождение от латинского термина «*signum*» — «знак», имеющего широкий смысловой диапазон. Тем не менее, приступая к систематическому изучению теоретической радиотехники, следует по возможности уточнить содержательный смысл понятия сигнала. В соответствии с принятой традицией сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений. В практике человеческой деятельности сообщения неразрывно связаны с заключенной в них информацией.

**Информация наряду с веществом и полем относится к важнейшим категориям естествознания**

Круг вопросов, базирующихся на понятиях «сообщение» и «информация», весьма широк. Они являются объектом пристального внимания инженеров, математиков, лингвистов, философов. В 40-х годах К. Шеннон завершил первоначальный этап разработки нового научного направления — теории информации.

Затрагиваемые в теории информации проблемы, как правило, далеко выходят за рамки курса «Радиотехнические цепи и сигналы», поэтому в данной книге не будет излагаться связь между физическим обликом сигнала и смыслом заключенного в нем сообщения. Тем более не обсуждается вопрос о ценности информации, заключенной в сообщении и, в конечном счете, в сигнале.

## 1.1 Классификация радиотехнических сигналов

Приступая к изучению каких-либо новых объектов или явлений, всегда стремятся провести их предварительную классификацию. Наша основная цель на данном этапе — выработка критериев классификации сигналов, а также, что очень важно для последующего, установление определенной терминологии.

**Сигнал и его математическая модель.** Сигналы как некоторые физические процессы можно наблюдать с помощью различных приборов и устройств — электронных осциллографов, вольтметров, приемников. Такой эмпирический подход имеет существенный недостаток. Явления, изучаемые экспериментатором, всегда выступают как частные, единичные проявления, лишенные той степени обобщенности, которая позволила бы судить об их фундаментальных свойствах, предсказывать результаты в изменившихся условиях.

Для того чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчетов, следует указать способ их математического описания, или, говоря языком современной науки, создать *математическую модель* исследуемого сигнала.

математическая модель

Математическая модель сигнала представляет собой функциональную зависимость, в которой аргументом является время. Как правило, в дальнейшем математические модели сигналов будут обозначаться символами латинского алфавита $s(t)$, $u(t)$, $f(t)$ и т. д.

Выбор модели (в данном случае физического сигнала) является первым важным шагом на пути к систематическому изучению явления. Прежде всего математическая модель позволяет абстрагироваться от конкретной природы носителя сигнала. В радиотехнике одна и та же математическая модель с равным успехом описывает ток, напряжение, напряженность электромагнитного поля и т. д.

В большинстве случаев носителями радиотехнических сигналов являются электромагнитные колебания

Вторая существенная сторона метода, базирующегося на понятии математической модели, заключена в том, что представляется возможным описывать именно те свойства сигналов, которые объективно выступают как наиболее важные. При этом игнорируется большое число второстепенных, малосущественных признаков. Например, в подавляющем большинстве случаев было бы крайне затруднительно подобрать точные функциональные зависимости, которые соответствовали бы электрическим колебаниям, наблюдаемым экспериментально. Тем не менее исследователь, руководствуясь всей совокупностью сведений, которые ему доступны о системе в целом, выбирает из наличного арсенала математических моделей сигналов те, которые в конкретной ситуации наилучшим образом описывают физический процесс при наибольшей простоте. Итак, выбор модели — процесс в той или иной степени творческий.

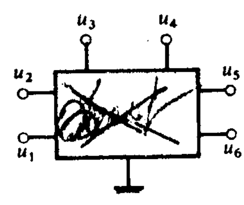
Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения, поэтому в дальнейшем мы часто будем говорить о вещественных и комплексных моделях сигналов. Использование одного или другого способа — исключительно дело математического удобства.

**вещественные и комплексные сигналы**

Знание математических моделей сигналов дает возможность сравнивать их между собой, устанавливать тождество и различие и в конечном счете проводить их классификацию.

**Одномерные и многомерные сигналы.** Типичным для радиотехники сигналом является напряжение на зажимах какой-либо цепи или ток, протекающий в ветви. Такой сигнал, описываемый одной функцией времени, принято называть *одномерным*. В этой книге мы чаще всего будем изучать именно одномерные сигналы. Тем не менее иногда удобно вводить в рассмотрение *многомерные сигналы* вида

$$\vec{V}(t) = \{v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_N(t)\},$$




образованные некоторым множеством одномерных сигналов. Целое число $N$ называют *размерностью* такого сигнала (терминология заимствована из линейной алгебры).

Понятие многомерного сигнала иллюстрируется, например, системой напряжений на зажимах многополюсника.

Важно отметить, что многомерный сигнал — упорядоченная совокупность одномерных сигналов. Поэтому в общем случае сигналы с различным порядком следования компонент не равны друг другу:

$$\{v_1,\ v_2\} \neq \{v_2,\ v_1\}.$$

Применение многомерных моделей сигналов особенно целесообразно в тех случаях, когда функционирование сложных систем анализируется с помощью ЭВМ.

**Детерминированные и случайные сигналы.** Другой принцип классификации радиотехнических сигналов основан на возможности или невозможности точного предсказания их мгновенных значений в любые моменты времени.

Если математическая модель сигнала позволяет осуществить такое предсказание, то сигнал называется *детерминированным*. Способы его задания могут быть разнообразными — математическая формула, вычислительный алгоритм, наконец, даже словесное описание.

$u(t) = U_0 \cos \omega_0 t$

— формула как модель детерминированного сигнала

Строго говоря, детерминированных сигналов в природе не существует. Неизбежное и точно не предсказуемое взаимодействие источника сообщений с окружающими физическими объектами, наличие хаотических тепловых флуктуаций — все это заставляет рассматривать реальные сигналы как случайные функции времени и говорить, таким образом, о *случайных сигналах*.

▲

решите задачи 13 и 14


Осциллограмма типичного случайного сигнала

В радиотехнике случайные колебания часто проявляют себя как помехи, препятствующие извлечению интересующей информации из принятого колебания. Проблема борьбы с помехами, повышение помехоустойчивости радиоприема — одна из центральных проблем радиотехники.

Может показаться, что понятие «случайный сигнал» противоречиво. Однако это не так. Например, сигнал на выходе приемника радиотелескопа, направленного на источник космического излучения, представляет собой случайные флуктуации, несущие, однако, разнообразную информацию о природном объекте.

Между детерминированными и случайными сигналами нет непреодолимой границы. Очень часто в условиях, когда уровень помех значительно меньше уровня полезного сигнала с известной формой, более простая детерминированная модель оказывается вполне адекватной поставленной задаче.

Методы статистической радиотехники, развитые в последние десятилетия для анализа свойств случайных сигналов, имеют много специфических черт и базируются на математическом аппарате теории вероятностей и теории случайных процессов. Этому кругу вопросов будут целиком посвящены гл. 6 и 7.

●

импульс

**Импульсные сигналы.** Очень важный для радиотехники класс сигналов представляет собой импульсы, т. е. колебания, существующие лишь в пределах конечного отрезка времени. При этом различают видеоимпульсы (рис. 1.1, *а*) и радиоимпульсы

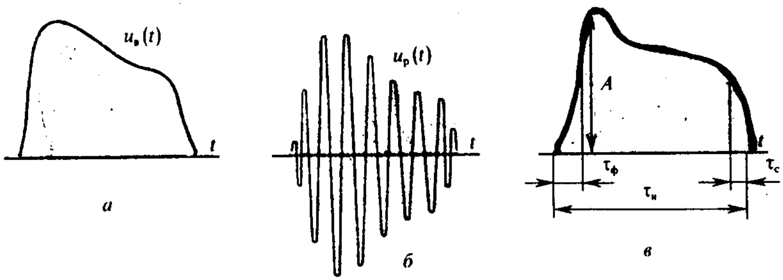



Рис. 1.1. Импульсные сигналы и их характеристики:
*а* — видеоимпульс; *б* — радиоимпульс; *в* — определение числовых параметров импульса

(рис. 1.1, *б*). Различие между этими двумя основными видами импульсов состоит в следующем. Если $u_в(t)$ — видеоимпульс, то соответствующий ему радиоимпульс $u_р(t) = u_в(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (частота $\omega_0$ и начальная фаза $\varphi_0$ произвольны). При этом $u_в(t)$ называется *огибающей* радиоимпульса, а функция $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ — его *заполнением*.

**видеоимпульс и радиоимпульс**

Часто, особенно в технических расчетах, вместо полной математической модели, которая учитывает подробности «тонкой структуры» импульса, пользуются числовыми параметрами, дающими упрощенное представление о его форме. Так, для видеоимпульса, близкого по форме к трапеции (рис. 1.1, *в*), целесообразно определить его *амплитуду* (высоту) $A$. Из временны́х параметров импульса самый важный — *длительность* $\tau_и$. Помимо этого, зачастую необходимо знать *длительность фронта* $\tau_ф$ и *длительность среза* $\tau_с$ импульса.

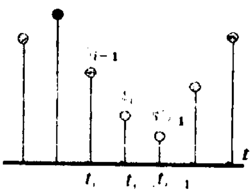
**Происхождение термина «видеоимпульс» связано с тем, что впервые такие колебания стали применяться в технике телевидения**

В радиотехнике приходится иметь дело с импульсами напряжения, амплитуды которых изменяются от долей микровольта до нескольких киловольт, а длительности доходят до долей наносекунды.

**Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.** Заканчивая краткий обзор принципов классификации радиотехнических сигналов, отметим следующее. Обычно физический процесс, порождающий сигнал, развивается во времени таким образом, что значения сигналов можно измерять в любые моменты времени. Сигналы этого класса принято называть *аналоговыми* (континуальными). Термин «аналоговый сигнал» почерпнут из вычислительной техники, где созданы аналоговые вычислительные устройства для решения дифференциальных уравнений.

Одномерный аналоговый сигнал наглядно представляется своим графиком (осциллограммой), причем этот график может быть как непрерывным, так и содержащим точки разрыва.

Первоначально в радиотехнике использовались сигналы исключительно аналогового типа. Свойства этих сигналов позволяли с успехом решать ряд технических задач (радиосвязь, телевидение и т. д.). К тому же аналоговые сигналы было просто генерировать, принимать и обрабатывать с помощью доступных в те годы средств.



Модель дискретного сигнала

Возросшие требования к радиотехническим системам, разнообразие применений заставили искать новые принципы их построения. На смену аналоговым в ряде случаев пришли импульсные системы, работа которых основана на использовании *дискретных сигналов*. Простейшая математическая модель дискретного сигнала $s_д(t)$ — это счетное множество точек $\{t_i\}$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ на оси времени, в каждой из которых определено отсчетное значение сигнала $s_i$. Как правило, *шаг дискретизации* $\Delta = t_{i+1} - t_i$ для каждого сигнала постоянен.

Одно из преимуществ дискретных сигналов по сравнению с аналоговыми — отсутствие необходимости воспроизводить сигнал непрерывно во все моменты времени, что позволяет по одной и той же радиолинии передавать сообщения от разных источников различным потребителям, организуя многоканальную связь с разделением каналов по времени.

Ясно, что быстро изменяющиеся во времени аналоговые сигналы для их дискретизации требуют малого шага $\Delta$. В гл. 5 этот фундаментально важный вопрос будет подробно исследован.

Особой разновидностью дискретных сигналов являются *цифровые сигналы*. Они характерны тем, что отсчетные значения представлены в форме чисел. По соображениям технических удобств реализации и обработки используют числа в двоичной системе с ограниченным и, как правило, не слишком большим числом разрядов. В последнее время наметилась тенденция к самому широкому внедрению систем с цифровыми сигналами. Она обеспечивается значительными успехами, достигнутыми микроэлектроникой и интегральной схемотехникой.

. . . .

111001011
101110010
010011000
100110011

. . . .

Последовательные отсчеты цифрового сигнала

Следует иметь в виду, что, в сущности, любой дискретный или цифровой сигнал (речь идет о сигнале — физическом процессе, а не о математической модели) является сигналом аналоговым. Так, медленно изменяющемуся во времени аналоговому сигналу $s(t)$ можно сопоставить его дискретный образ, имеющий вид последовательности прямоугольных видеоимпульсов одинаковой длительности (рис. 1.2, *а*); высота этих импульсов пропорциональна значению $s(t)$ в отсчетных точках. Однако можно поступить и по-иному, сохраняя высоту импульсов постоянной, но изменяя их длительность в соответствии с текущими отсчетными значениями (рис. 1.2, *б*).

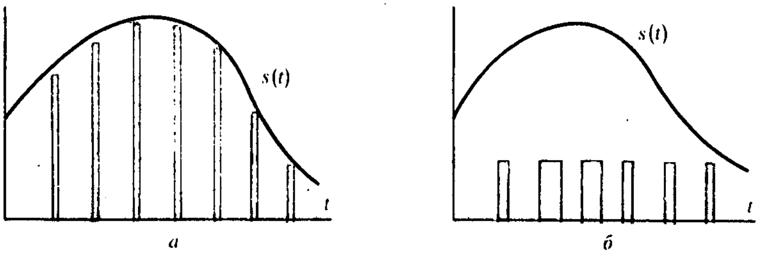
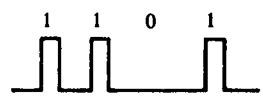



Рис. 1.2. Дискретизация аналогового сигнала:
*а* — при изменении высоты; *б* — при изменении длительности отсчетных импульсов

Важно отметить следующее: оба представленных здесь способа дискретизации аналогового сигнала становятся совершенно эквивалентными, если положить, что значения аналогового сигнала в точках дискретизации пропорциональны площади отдельных видеоимпульсов.

Фиксирование отсчетных значений в виде чисел осуществляется также путем отображения последних последовательностью видеоимпульсов. Двоичная система счисления идеально приспособлена для этой процедуры. Можно, например, сопоставить единице высокий, а нулю — низкий уровень потенциала. Дискретные сигналы и их свойства будут детально изучаться в гл. 15.




## 1.2 Динамическое представление сигналов

Многие задачи радиотехники требуют специфической формы представления сигнала. Необходимо не только располагать информацией о его мгновенном значении «сейчас», но и знать его поведение на всей временно́й оси, как «в прошлом», так и «в будущем».

**Принцип динамического представления.** Приближенно опишем реальный сигнал суммой некоторых элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени. Если длительность отдельных элементарных сигналов стремится к нулю, то, естественно, в пределе будет получено точное представление исходного сигнала. Будем называть этот способ описания *динамическим представлением*, подчеркивая тем самым развивающийся во времени характер процесса.

Выбор элементарных сигналов произволен, однако широкое применение нашли два способа динамического представления. Согласно первому из них, в качестве элементарных сигналов используются ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени $\Delta$ (рис. 1.3, *а*). Высота каждой ступеньки равна при этом приращению сигнала на интервале времени $\Delta$.

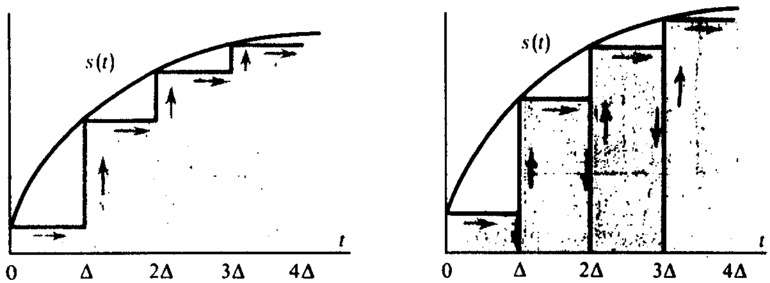
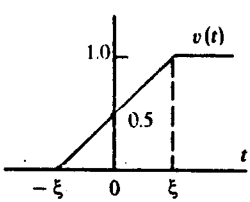



Рис. 1.3. Способы динамического представления сигналов (стрелками показаны пути изменения во времени отдельных элементарных слагаемых)

При втором способе динамического представления элементарными сигналами служат прямоугольные импульсы. Эти импульсы непосредственно примыкают друг к другу и образуют последовательность, вписанную в кривую или описанную вокруг нее (рис. 1.3, *б*).

Рассмотрим более подробно свойства элементарного сигнала, используемого для динамического представления по первому способу.

**Функция включения.** Пусть математическая модель сигнала задается системой равенств




$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < -\xi, \\ 0.5(t/\xi + 1), & -\xi \leq t \leq \xi, \\ 1, & t > \xi. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Такая функция описывает процесс перехода некоторого физического объекта из «нулевого» в «единичное» состояние, причем этот переход совершается по линейному закону за время $2\xi$. Если параметр $\xi$ устремить к нулю, то в пределе переход из одного состояния в другое будет совершаться мгновенно. Математическая модель этого предельного сигнала получила название *функции включения* или *функции Хевисайда*

функция включения или функция Хевисайда

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0.5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Оливер Хевисайд (1850–1925) – английский физик

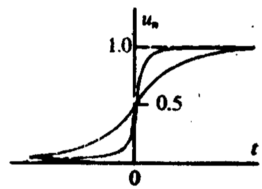
С помощью функции $\sigma(t)$ удобно описывать разнообразные процессы коммутации в электрических цепях.

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину $t_0$. Запись смещенной функции такова:

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 0.5, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

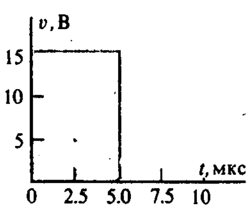
Приведенный здесь способ определения функции включения не является единственно возможным. Например, функции, образующие последовательность

$$u_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)},$$




как нетрудно проверить, с ростом номера $n$ все более точно аппроксимируют собой разрывный сигнал, претерпевающий скачок на единицу при $t=0$.

В теоретической радиотехнике функции включения очень широко используются для описания разрывных, в частности импульсных, сигналов.




**Пример 1.1.** *Имеется импульсный сигнал $v$ прямоугольной формы длительностью* 5 мкс *и амплитудой* 15 В. *Начало отсчета времени совпадает с фронтом импульса. Записать аналитическое выражение этого сигнала.*

Эффект скачка уровня при $t=0$ описывается фунцией $v = 15\sigma(t)$. Для того чтобы импульс окончился при $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ с, необходимо вычесть такой же импульс включения, запаздывающий на этот отрезок времени, так что

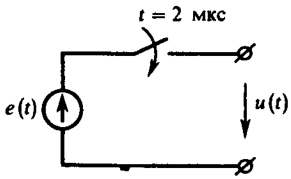
$$v(t) = 15\sigma(t) - 15\sigma(t - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ В}.$$

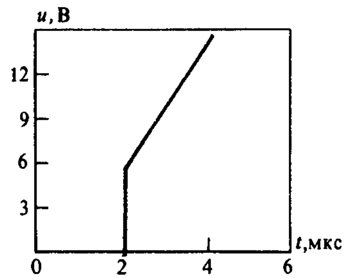
**Пример 1.2.** *Источник э.д.с., линейно изменяющийся во времени по закону* $e(t) = 3.0 \cdot 10^6 t$ В, *подключается к внешним цепям идеальным коммутатором, срабатывающим в момент времени* $t_0 = 2$ мкс. *Записать математическую модель для напряжения на выходе такой системы.*

▲ решите задачи 1 и 2

При временах, меньших 2 мкс. напряжение на выходе источника равно нулю, поэтому очевидно, что

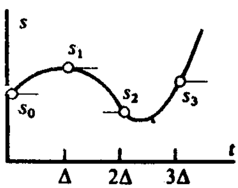
$$u(t) = 3.0 \cdot 10^6 t \cdot \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}) \text{ В}.$$




Этот процесс можно записать и по-иному, представив его как сумму импульса включения, возникающего в момент срабатывания коммутатора, и линейно нарастающего импульса:

$u(t) = [6 + 3 \cdot 10^6 (t - 2 \cdot 10^{-6})]\, \sigma (t - 2 \cdot 10^{-6})$ В.




**Динамическое представление произвольного сигнала с помощью функций включения.** Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, причем для определенности положим, что $s(t)=0$ при $t<0$. Пусть $\{\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots\}$ — последовательность моментов времени и $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ — соответствующая им последовательность значений сигнала. Если $s_0 = s(0)$ — начальное значение, то, как видно из построения, текущее значение сигнала при любом $t$ приближенно равняется сумме ступенчатых функций:

$$s(t) \approx s_0 \sigma(t) + (s_1 - s_0)\, \sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1)\, \sigma(t - 2\Delta) + \ldots =$$

$$= s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\, \sigma(t - k\Delta).$$

Если теперь шаг $\Delta$ устремить к нулю, то дискретную переменную $k\Delta$ можно будет заменить непрерывной переменной $\tau$. Малые приращения $(s_k - s_{k-1})$ превратятся в дифференциалы $ds = (ds/d\tau)d\tau$, и мы приходим к форме динамического представления произвольного сигнала:

$$\boxed{s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau}\, \sigma(t - \tau)\, d\tau.} \tag{1.4}$$

**Пример 1.3.** *Сигнал $s(t)$ равен нулю при $t<0$ и изменяется по закону квадратичной параболы $s(t) = At^2$ при $t>0$. Найти динамическое представление этого сигнала.*

Здесь $s_0=0$, $ds/d\tau=2A\tau$,
поэтому

$$s(t)=2A\int\limits_0^\infty \tau\sigma(t-\tau)\,d\tau.$$

Смысл последней формулы в том, что высота элементарных ступенек, из которых складывается сигнал, линейно нарастает во времени.

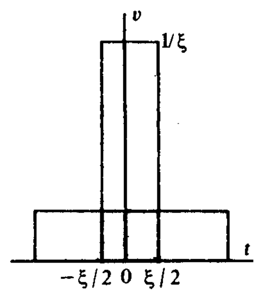
Переходя ко второму способу динамического представления сигналов, когда элементами разложения служат короткие импульсы, следует ввести новое важное понятие.

**Дельта-функция.** Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы, заданный следующим образом:

$$v(t;\,\xi)=\frac{1}{\xi}\left[\sigma\left(t+\frac{\xi}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{\xi}{2}\right)\right]. \tag{1.5}$$

Этот импульс характерен тем, что при любом выборе параметра $\xi$ его площадь равна единице:

$$\Pi_v=\int\limits_{-\infty}^{\infty} v\,dt=1.$$



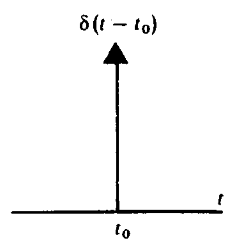

Например, если $v$ — напряжение, то $\Pi_v=1$ В·с.

Пусть теперь величина $\xi$ стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел последовательности таких функций при $\xi\to 0$ носит название *дельта-функции* или *функции Дирака*:

$$\delta(t)=\lim_{\xi\to 0} v(t;\,\xi). \tag{1.6}$$

Дельта-функция — весьма интересный математический объект. Будучи равной нулю всюду, за исключением точки $t=0$ (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), эта функция тем не менее обладает единичным интегралом

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1.} \tag{1.7}$$




**Символическое изображение дельта-функции**

Функция Дирака с точки зрения математики является *обобщенной функцией*. В настоящее время теория обобщенных функций получила самое широкое развитие. Она позволила во многих областях науки изучать разрывные процессы, описание которых средствами классического анализа затруднительно.

В данном курсе аппарат дельта-функций будет использован постоянно. Основная причина популярности дельта-функции во многих физических задачах связана со следующим. Напомним известное положение механики: если на материальную точку массой $m$ в интервале времени $[t_1, t_2]$ действует переменная сила $F(t)$, то изменение количества движения точки

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt.$$

▲ решите задачу 15

Таким образом, *существенно важна не сама сила, а ее импульс*, фигурирующий в правой части последнего равенства. Дельта-функция как раз и является математической моделью короткого внешнего воздействия с единичным импульсом (площадью).

В математике показано, что свойства дельта-функции присущи многим последовательностям обычных классических функций. Приведем два характерных примера [1]:

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n/(2\pi)}\, \exp(-nt^2/2); \tag{1.8}$$

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nt}{\pi t}. \tag{1.9}$$

**Динамическое представление сигналов с помощью дельта-функций.** Вернемся к задаче описания аналогового сигнала посредством суммы примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (рис. 1.3, *б*). Если $s_k$ — значение сигнала на $k$-м отсчете, то элементарный импульс с номером $k$ представляется так:

$$\eta_k(t) = s_k[\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)]. \tag{1.10}$$

По принципу динамического представления исходный сигнал $s(t)$ должен рассматриваться как сумма таких элементарных слагаемых:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \tag{1.11}$$

В этой сумме при любом $t$, отличном от нуля, будет только один член, отвечающий тому номеру $k$, который удовлетворяет неравенству

$$t_k < t < t_{k+1}.$$

Если подставить (1.10) в (1.11), предварительно разделив и умножив на величину шага $\Delta$, то

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\sigma(t-t_k) - \sigma(t-t_k-\Delta)]\, \Delta.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, мы должны заменить суммирование операцией интегрирования по формальной переменной $\tau$, дифференциал которой $d\tau$ будет аналогичен величине $\Delta$. Поскольку

$$\lim_{\Delta \to 0} [\sigma(t-\tau) - \sigma(t-\tau-\Delta)] \frac{1}{\Delta} = \delta(t-\tau),$$

получим искомую формулу динамического представления сигнала

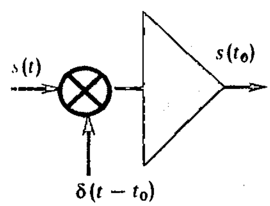
$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\,\delta(t-\tau)\, d\tau.} \tag{1.12}$$

Отметим важное свойство дельта-функции: *ее физическая размерность такая же, как и размерность частоты.*

Итак, если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен $\delta$-импульс. Принято говорить, что в этом состоит *фильтрующее свойство дельта-функции.*

фильтрующее свойство дельта-функции

В частности, отсюда вытекает структурная схема системы, осуществляющей измерение мгновенных значений некоторого сигнала $s(t)$. Система должна состоять из двух звеньев: перемножителя и интегратора. Ясно, что измерение величины $s(t_0)$ будет тем точнее, чем короче реальный сигнал (например, прямоугольный видеоимпульс), приближенно представляющий дельта-функцию.




## 1.3 Геометрические методы в теории сигналов

При решении многих теоретических и прикладных задач радиотехники возникают такие вопросы: 1) в каком смысле можно говорить о величине сигнала, утверждая, например, что один сигнал значительно превосходит другой? 2) можно ли объективно оценивать, насколько два неодинаковых сигнала «похожи» друг на друга?

В XX в. в математике были разработаны мощные методы функционального анализа, обобщающие наши интуитивные представления о геометрической структуре пространства. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию сигналов, в основе которой лежит концепция сигнала как вектора в специальным образом сконструированном бесконечномерном пространстве.

**Линейное пространство сигналов.** Пусть $M=\{s_1(t), s_2(t), \ldots\}$ — некоторое множество сигналов. Причина объединения этих объектов — наличие у каждого сигнала некоторых свойств, общих для всех элементов множества $M$.

**Пример 1.4.** *Множество $M$ образовано всевозможными аналоговыми сигналами, отличными от нуля в интервале времени* [0,15 мкс] *и равными нулю вне этого интервала.*

**Пример 1.5.** *Множество $M$ состоит из сигналов вида $s_j(t) = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ — гармонических колебаний, отличающихся своими амплитудами, частотами и начальными фазами.*

Исследование свойств сигналов, образующих такие множества, возможно в случаях, когда удается проследить взаимосвязь между отдельными сигналами. Принято говорить, что при этом множество сигналов наделено определенной *структурой.* Выбор той или иной структуры в множестве диктуется физическими соображениями. Так, применительно к электрическим колебаниям известно, что они могут складываться, а также умножаться на произвольный масштабный коэффициент. Это позволяет для некоторых множеств вводить структуру *линейного пространства.*

Для того чтобы множество сигналов $M$ образовывало вещественное линейное пространство, должны выполняться следующие условия (аксиомы):

■ структура линейного пространства

1. Любой сигнал $u \in M$ при любых $t$ принимает лишь вещественные значения.

2. Для любых $u \in M$ и $v \in M$ существует их сумма $w=u+v$, причем $w$ также содержится в $M$. При этом операция суммирования коммутативна:

$$u+v=v+u$$

и ассоциативна:

$$u+(v+x)=(u+v)+x.$$

3. Для любого сигнала $s \in M$ и любого вещественного числа $\alpha$ определен сигнал $f=\alpha s \in M$.

4. Множество $M$ содержит особый нулевой элемент $\varnothing$ такой, что $u+\varnothing=u$ для всех $u \in M$.

Если рассматривать математические модели сигналов, принимающих комплексные значения, а также допустить в аксиоме 3 умножение на комплексное число, то приходим к понятию комплексного линейного пространства.

Введение структуры линейного пространства является первым шагом на пути к геометрической трактовке сигналов. Элементы линейных пространств часто называют векторами, чтобы подчеркнуть аналогию свойств этих объектов и обычных трехмерных векторов.

● векторы

Ограничения, налагаемые аксиомами линейного пространства, весьма жестки. Далеко не каждое множество сигналов является линейным пространством.

---

**Пример 1.6.** *Множество M образовано прямоугольными видеоимпульсами напряжения, существующими на интервале времени* [0, 20 мкс], *причем амплитуды этих импульсов не превосходят* 10 В. *Можно ли считать данное множество линейным пространством?*

Сложив, например, импульсы с амплитудами 6 и 8 В, получаем импульс, не содержащийся в множестве $M$. Поэтому $M$ не образует линейное пространство.

---

**Понятие координатного базиса.** Как и обычное трехмерное пространство, линейное пространство сигналов может быть снабжено специальной структурой, играющей роль системы координат. Говорят, что совокупность векторов $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, принадлежащих $M$, является *линейно независимым координатным базисом*, если равенство

● линейная независимость

$$\sum_i \alpha_i e_i = \varnothing \tag{1.13}$$

возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов $\alpha_i$.

Если дано разложение некоторого сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) = \sum_i c_i e_i,$$

то числа $\{c_1, c_2, \dots\}$ являются *проекциями* сигнала $s(t)$ относительно выбранного базиса.

В задачах теории сигналов число базисных векторов, как правило, неограниченно велико. Такие линейные пространства называют *бесконечномерными*.

---

**Пример 1.7.** *Если линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка:*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n$$

*(такие функции называются аналитическими), то координатным базисом в этом пространстве служит система одночленов*

$\{e_0=1;\quad e_1=t;\quad e_2=t^2;\ \ldots\}$.

**Нормированное линейное пространство. Энергия сигнала.** Для того чтобы продолжить и углубить геометрическую трактовку теории сигналов, необходимо ввести новое понятие, которое по своему смыслу соответствовало бы длине вектора. Это позволит не только придать точный смысл высказыванию вида «первый сигнал больше второго», но и указать, насколько он больше.

Аналог длины вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов $L$ является нормированным, если каждому вектору $s(t) \in L$ однозначно сопоставлено число $\|s\|$ — норма этого вектора, причем должны быть выполнены следующие аксиомы нормированного пространства:

● норма сигнала

1. Норма неотрицательна, т. е. $\|s\| \geqslant 0$, причем $\|s\|=0$ тогда и только тогда, если $s=\varnothing$.

2. Для любого числа $\alpha$ справедливо равенство

$$\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|.$$

3. Если $s(t)$ и $p(t)$ — два вектора из $L$, то выполняется неравенство треугольника

$$\|s+p\| \leqslant \|s\| + \|p\|.$$

Норма сигналов может вводиться различными способами. В радиотехнике чаще всего полагают, что вещественные сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt} \tag{1.14}$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное). Для комплексных сигналов

● энергия сигнала

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s s^* dt}\ , \tag{1.15}$$

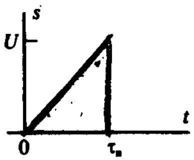
где * — символ комплексно-сопряженной величины.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*:

**Если сигнал отображает напряжение, то размерность его энергии $В^2 \cdot с$**

$$\boxed{E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt.} \tag{1.16}$$

Именно такая энергия будет выделена в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его зажимах будет действовать напряжение $s(t)$.




**Пример 1.8.** *Вычислить энергию и норму сигнала $s(t)$, представляющего собой импульс напряжения; форма импульса треугольная с высотой $U$ и длительностью $\tau_и$.*

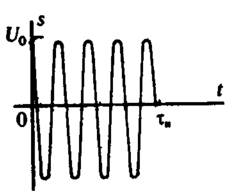
В интервале времени $[0, \tau_и]$ сигнал описывается функцией $s(t) = Ut/\tau_и$.

Энергия сигнала

$$E_s = (U^2/\tau_и^2)\int\limits_0^{\tau_и} t^2 dt = U^2\tau_и/3.$$

Норма

$$\|s\| = \sqrt{E_s} = U\sqrt{\tau_и}/\sqrt{3}.$$




**Пример 1.9.** *Вычислить энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей. Импульс существует на отрезке времени $[0, \tau_и]$ и описывается функцией*

$$s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В соответствии с (1.16)

$$E_s = U_0^2 \int\limits_0^{\tau_и} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\, dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int\limits_0^{\omega_0\tau_и + \varphi_0} \cos^2\eta d\eta =$$

$$= \frac{U_0^2}{4\omega_0} [2(\omega_0\tau_и + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0\tau_и + \varphi_0)].$$

Если длительность импульса много больше периода заполняющего высокочастотного колебания, т. е. $\omega_0\tau_и \gg 1$, то

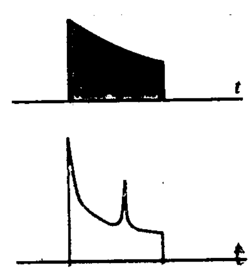
$$E_s \approx U_0^2\tau_и/2$$

независимо от значений $\omega_0$ и $\varphi_0$.

Определять норму сигнала посредством формулы (1.15) целесообразно по следующим соображениям:

1. В радиотехнике о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например количества теплоты, выделяемой в резисторе.

2. Вводимая таким образом энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, может быть, и значительным, но происходящим на относительно малых отрезках времени.




Энергии этих сигналов отличаются незначительно

Линейное нормирование пространства с конечной величиной нормы всех векторов носит название пространства функций с интегрируемым квадратом и кратко обозначается $\mathfrak{L}_2$.

**Метрическое пространство.** Введем еще одно фундаментальное понятие, которое обобщит наше обычное представление о расстоянии между точками в пространстве.

**метрика**

Говорят, что линейное пространство $L$ становится *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $u$, $v \in L$ сопоставлено неотрицательное число $\rho(u, v)$, называемое *метрикой* или *расстоянием* между этими элементами. Метрика независимо от способа ее определения должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

1. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ (рефлексивность метрики).
2. $\rho(u, u) = 0$ при любых $u \in L$.
3. Каков бы ни был элемент $w \in L$, всегда

$$\rho(u, v) \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v).$$

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:

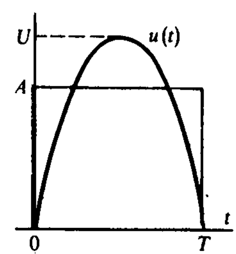
$$\rho(u, v) = \| u - v \| . \tag{1.17}$$

Норма, в свою очередь, может пониматься как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом:

$$\| u \| = \rho(u, \varnothing).$$

Понятие метрики дает возможность судить, например, о том, насколько хорошо один из сигналов аппроксимирует другой.

**Пример 1.10.** *Сигнал $u(t)$ представляет собой отрезок синусоиды, обращающейся в нуль на концах интервала* $[0, T]$. *Высота импульса $U$ известна. Выбрать амплитуду $A$ прямоугольного импульса $v(t)$ той же длительности, чтобы обеспечить минимальное расстояние между этими двумя сигналами.*




Сигнал $u(t)$ представляется формулой

$$u(t) = U \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 < t < T.$$

Квадрат расстояния между сигналами

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T \left(U \sin \frac{\pi t}{T} - A\right)^2 dt = \frac{U^2 T}{2} - \frac{4AUT}{\pi} + A^2 T.$$

Исследование этого выражения на экстремум показывает, что минимум расстояния будет достигаться, если $A = 2U/\pi \approx 0.637\,U$. При этом

$$\rho^2_{\min} = U^2 T \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) \approx 0.095 U^2 T; \quad \rho_{\min} \approx 0.308 U \sqrt{T}.$$

▲ решите задачу 9

Заметим, что энергия синусоидального импульса

$$E_v = U^2 \int\limits_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T}\, dt = \frac{U^2 T}{2};$$

его норма

$$\| u \| \approx 0.707 U \sqrt{T}.$$

Итак, в рамках выбранной нами метрики минимально достижимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.

## 1.4 Теория ортогональных сигналов

Введя в множестве сигналов структуру линейного пространства, определив норму и метрику, мы тем не менее лишены возможности вычислить такую характеристику, как угол между двумя векторами. Это удается сделать, введя понятие скалярного произведения элементов линейного пространства.

**Скалярное произведение сигналов.** Напомним, что если в обычном трехмерном пространстве известны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, то квадрат модуля их суммы

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\left(\vec{A}\vec{B}\right), \tag{1.18}$$

где $(\vec{A}\vec{B}) = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\psi$ — скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла $\psi$ между ними.

Действуя по аналогии, вычислим энергию суммы двух сигналов $u$ и $v$:

$$E_\Sigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2\, dt = E_u + E_v + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} uv\, dt. \tag{1.19}$$

В отличие от самих сигналов их *энергии неаддитивны — энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую взаимную энергию*

● взаимная энергия

$$E_{uv} = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} uv\, dt.$$

Сравнивая формулы (1.18) и (1.19), определим *скалярное произведение сигналов* $u$ и $v$:

● скалярное произведение

$$\boxed{(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, v(t)\, dt,} \tag{1.20}$$

а также косинус угла между ними:

$$\cos\psi_{uv} = \frac{(u,\ v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \tag{1.21}$$

Скалярное произведение обладает следующими очевидными свойствами:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & (u,\ u) \geqslant 0, \\ 2) & (u,\ v) = (v,\ u), \\ 3) & (\lambda u,\ v) = \lambda (u,\ v), \quad \text{где} \quad \lambda \text{ — число}, \\ 4) & (u + v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w). \end{array}\right\} \tag{1.22}$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение (1.20), причем справедливы условия (1.22), называется *вещественным гильбертовым пространством* $\mathcal{H}$.

гильбертово пространство

Давид Гильберт (1862—1943) — известный немецкий математик

В математике доказывается, что в гильбертовом пространстве справедливо фундаментальное неравенство Коши — Буняковского

$$\boxed{|(u,\ v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|.} \tag{1.23}$$

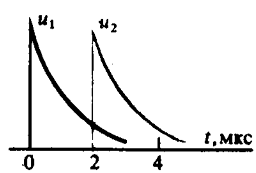
Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в него скалярное произведение по формуле

$$(u,\ v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, v^*(t)\, dt. \tag{1.24}$$

**Пример 1.11.** *Имеются два смещенных во времени экспоненциальных импульса напряжения* (В):

$u_1(t) = 5 \exp(-10^5 t)\, \sigma(t)$;

$u_2(t) = 5 \exp(-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6}))\, \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6})$.




*Найти скалярное произведение данных сигналов, а также угол между ними.*

Энергия этих сигналов одинакова:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 1.25 \cdot 10^{-4}\ \text{В}^2 \cdot \text{с}.$$

Скалярное произведение

$$(u_1,\ u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} \cdot e^{-10^5 (t + 2 \cdot 10^{-6})}\, dt = 1.023 \cdot 10^{-4}\ \text{В}^2 \cdot \text{с}.$$

Отсюда $\cos\psi_{u_1, u_2} = 0.819$ и $\psi_{u_1, u_2} = 35°$.

**Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.** Два сигнала $u$ и $v$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u,\ v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = 0. \qquad (1.25)$$

принцип ортогональности

Образно говоря, ортогональные сигналы предельно «непохожи» друг на друга.

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены в промежутке времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же интервале задана бесконечная система функций $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$, попарно ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i u_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases} \qquad (1.26)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал $s(t) \in \mathscr{H}$ в ряд:

ортонормированный базис

$$\boxed{s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(t).} \qquad (1.27)$$

Представление (1.27) называется *обобщенным рядом Фурье* сигнала $s(t)$ в выбранном базисе.

Коэффициенты этого ряда находят следующим образом. Возьмем базисную функцию $u_k$ с произвольным номером $k$, умножим на нее обе части равенства (1.27) и затем проинтегрируем результаты по интервалу времени, в котором заданы сигналы:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} s(t)\, u_k(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int\limits_{t_1}^{t_2} u_i u_k \mathrm{d}t. \qquad (1.28)$$

Ввиду ортонормированности базиса в правой части (1.28) остается только член суммы с номером $i=k$, поэтому

алгоритм вычисления коэффициентов обобщенного ряда Фурье

$$\boxed{c_k = \int\limits_{t_1}^{t_2} s(t)\, u_k(t)\, \mathrm{d}t = (s,\ u_k).} \qquad (1.29)$$

Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом большого принципиального значения. Вместо того, чтобы изучать функциональную зависимость в несчетном множестве точек, мы получаем возможность характеризовать эти сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье $c_k$, которые представляют собой проекции вектора $s(t)$ в гильбертовом пространстве на базисные направления.

**Примеры ортонормированных базисов.** Способы построения бесконечных систем взаимно ортогональных функций подробно изучены в математике (см., например, [2]). Здесь в качестве примеров будут приведены два наиболее важных и распространенных случая.

*Ортонормированная система гармонических сигналов.* Читатель может самостоятельно убедиться в том, что на интервале $[0, T]$ система тригонометрических функций с кратными частотами, дополненная постоянным во времени сигналом:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 1/\sqrt{T}\,, \\
u_1 &= \sqrt{2/T}\sin 2\pi t/T, \\
u_2 &= \sqrt{2/T}\cos 2\pi t/T, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{2m-1} &= \sqrt{2/T}\sin 2\pi m t/T, \\
u_{2m} &= \sqrt{2/T}\cos 2\pi m t/T\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

образует ортонормированный базис.

Разложение периодических функций в ряды по этой системе будет подробно рассмотрено в следующей главе.

*Система функций Уолша.* В последнее время под влиянием методов обработки дискретных сигналов широкое распространение получила ортонормированная система функций Уолша Эти функции характерны тем, что на интервале своего существования $[-T/2, T/2]$ они принимают лишь значения $\pm 1$, которые отличаются лишь знаками.

**Сигналы, соответствующие функциям Уолша, легко генерируются с помощью микроэлектронных переключательных устройств**

Введем безразмерное время $\vartheta = t/T$ и будем обозначать $k$-ю функцию Уолша, как это принято, символом $\mathrm{wal}(k, \vartheta)$. Способ аналитического задания этих функций несколько сложен (см. Приложение 1). Однако идею образования их легко усмотреть из рис. 1.4, на котором изображены графики нескольких первых функций Уолша.

Интересно отметить, что номер функции $k$ равен числу перемен знака на интервале ее существования.

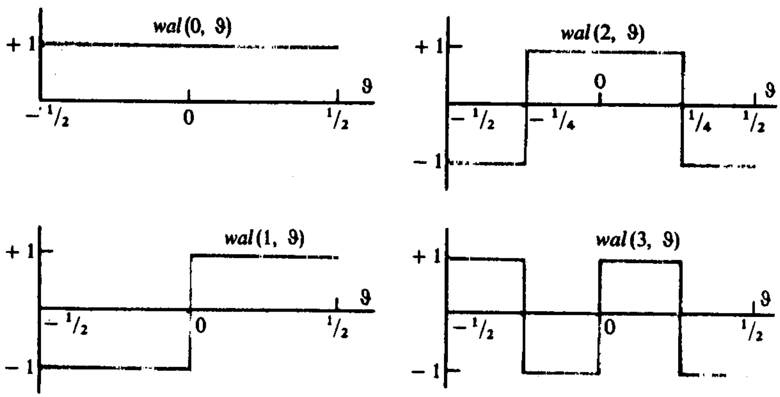



Рис. 1.4. Графики нескольких первых функций Уолша

Очевидно условие нормировки функций Уолша при любом значении $k$:

▲ решите задачу 11

$$\| \mathrm{wal}\,(k,\ \vartheta) \|^2 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \mathrm{wal}^2 (k,\ \vartheta)\, d\vartheta = 1.$$

Ортогональность этих функций обеспечивается принципом их построения и может быть проверена непосредственно. Например,

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \mathrm{wal}\,(1,\ \vartheta)\, \mathrm{wal}\,(2,\ \vartheta)\, d\vartheta = \int\limits_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2 d\vartheta + \int\limits_{-1/4}^{0} (-1)\cdot 1 d\vartheta + \int\limits_{0}^{1/4} 1^2 d\vartheta + \int\limits_{1/4}^{1/2} 1\,(-1)\, d\vartheta = 0.$$

Разложение сигнала с конечной энергией, заданного на интервале времени $[-T/2,\ T/2]$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид

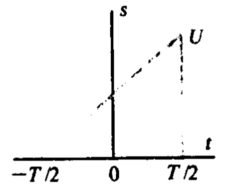
$$s(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \mathrm{wal}\,(k,\ \vartheta); \quad \vartheta = t/T. \tag{1.31}$$

**Пример 1.12.** *Найти первые два коэффициента в разложении импульса треугольной формы по системе функций Уолша.*

В интервале времени $[-T/2,\ T/2]$ разлагаемый сигнал описывается функцией

$$s(t) = U\,(t/T + {}^1/_2).$$

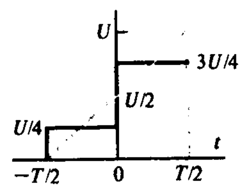
Вычисляем коэффициенты обобщенного ряда Фурье:




$$c_0 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta)\,\mathrm{wal}(0,\ \vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = U \int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta = \frac{U}{2};$$

$$c_1 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta)\,\mathrm{wal}(1,\ \vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = -U \int\limits_{-1/2}^{0}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta +$$

$$+ U\int\limits_{0}^{1/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta = \frac{U}{4}.$$




Итак, при аппроксимации колебания треугольной формы двумя первыми членами ряда по системе функций Уолша мы получаем приближенное представление ступенчатой формы. Интересно отметить, что с точки зрения введенной выше энергетической нормы уже такая грубая аппроксимация является удовлетворительной. Действительно, энергия исходного сигнала

$$E_s = U^2 \int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}\vartheta = \frac{U^2}{3},$$

в то время как энергия разности

$$\| s(\vartheta) - c_0\,\mathrm{wal}(0,\ \vartheta) - c_1\,\mathrm{wal}(1,\ \vartheta)\|^2 = 4U^2\int\limits_0^{1/4}\xi^2\mathrm{d}\xi = \frac{U^2}{3\cdot 16}$$

составляет лишь $^1/_{16}$, или 6.25% от энергии аппроксимируемого сигнала.

**Энергия сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье.** Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, разложенный в ряд по ортонормированной базисной системе:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(t),$$

и вычислим его энергию:

$$E_s = \int\limits_{t_1}^{t_2} s^2\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(c_i c_j)\,u_i u_j\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(c_i c_j)\int\limits_{t_1}^{t_2} u_i u_j\mathrm{d}t. \quad (1.32)$$

Поскольку базисная система функций ортонормирована, то в сумме (1.32) отличны от нуля только члены с $i=j$. В итоге получаем замечательный результат:

Данная формула обобщает теорему Пифагора для случая бесконечномерного пространства

$$\boxed{E_s = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.} \quad (1.33)$$

Смысл полученного выражения: энергия сигнала равна сумме энергий всех компонент, из которых складывается обобщенный ряд Фурье.

**Оптимальность разложения сигнала по ортогональному базису.** Для сигнала $s(t)$ введем конечномерную аппроксимацию

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k(t)$$

с неизвестными коэффициентами $c_k$ и потребуем, чтобы эти коэффициенты были выбраны из условия минимальности энергии ошибки аппроксимации:

$$\mu = \| s - \tilde{s} \|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ s - \sum_k c_k u_k \right]^2 \mathrm{d}t = \min. \qquad (1.34)$$

Необходимое условие минимума состоит в том, что коэффициенты $c_m$ должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\frac{\partial \mu}{\partial c_m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, N. \qquad (1.35)$$

В развернутой форме ошибка аппроксимации

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} \left[ s^2 - 2s \sum_{k=1}^{N} c_k u_k + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_i c_j u_i u_j \right] \mathrm{d}t.$$

Поскольку рассматриваемая базисная система функций ортогональна, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \int_{t_1}^{t_2} [c_m^2 u_m^2 - 2 s c_m u_m] \, \mathrm{d}t = 0.$$

Приняв во внимание единичную норму базисных функций, приходим к выводу, что равенства (1.35) будут выполняться при следующем выборе коэффициентов разложения:

$$c_m = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \, u_m(t) \, \mathrm{d}t;$$

это полностью совпадает с выражением (1.29) для коэффициентов обобщенного ряда Фурье.

Более тщательный анализ, когда рассматривается не только первая, но и вторая производная энергии ошибки, показывает, что принцип разложения сигнала в обобщенный ряд Фурье обеспечивает не просто экстремум, а именно минимум ошибки аппроксимации.

Заметим в заключение, что гильбертово пространство сигналов *по определению* обладает важным свойством *полноты*, которое заключается в следующем. Если предельное значение суммы вида

● полнота пространства

$$s(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i u_i(t)$$

существует, то этот предел сам всегда является некоторым элементом гильбертова пространства. Важным свойством полных пространств является то, что здесь норма ошибки аппроксимации представляет собой монотонно убывающую функцию от $N$ — числа учитываемых членов ряда. Выбирая $N$ достаточно большим, всегда можно снизить ошибку до любой приемлемо малой величины.

**Аппаратурная реализация ортогонального разложения сигнала.** Рассмотрим структурную схему устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения произвольного сигнала в обобщенный ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций (рис. 1.5).

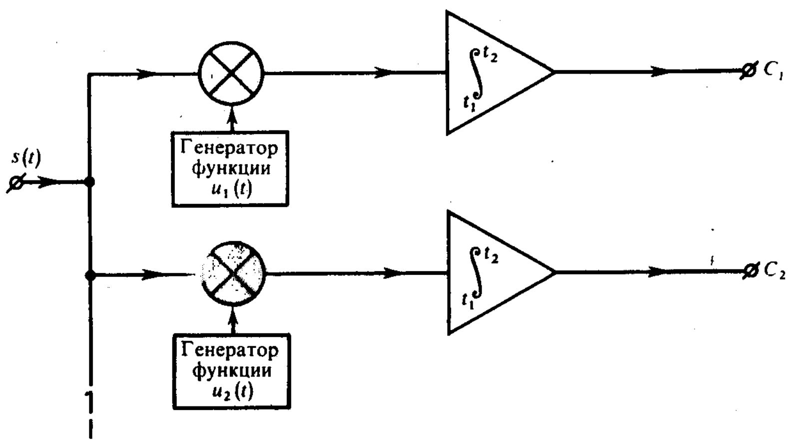



Рис. 1.5. Структурная схема устройства аппаратурного анализа сигналов

Основные элементы устройства — генераторы базисных функций, по которым проводится разложение. Анализируемый сигнал одновременно подается на совокупность множительных звеньев, осуществляющих перемножение этого сигнала и соответствующей базисной функции. С выходов перемножителей соответствующие сигналы поступают на интеграторы.

При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени сигнал, величина которого в соответствии с формулой (1.29) в точности равна тому или иному коэффициенту обобщенного ряда Фурье.

Ясно, что работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удается воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования перемножителей и интеграторов.

Система, изображенная на рис. 1.5, важна не только в прикладном, но и в теоретическом смысле. Анализируя ее, мы убеждаемся, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел.

### Результаты

- *Для теоретического исследования сигналов необходимо построить их математические модели.*
- *Классификация сигналов осуществляется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей. Принято различать одномерные и многомерные, детерминированные и случайные, аналоговые и дискретные сигналы. Разновидностью последних являются цифровые сигналы.*
- *Принцип динамического представления позволяет описывать сигналы, учитывая их поведение как «в прошлом», так и «в будущем».*
- *Для динамического представления используются два элементарных сигнала — функция включения и дельта-функция Дирака.*
- *Путем введения особых структур некоторые множества сигналов могут быть превращены в линейные функциональные пространства.*
- *Система линейно независимых векторов образует координатный базис, по которому может быть разложен произвольный элемент, принадлежащий линейному пространству.*
- *Аналогом длины вектора в линейном пространстве сигналов выступает его норма. Квадрат нормы называется энергией сигнала.*
- *Линейное пространство сигналов становится метрическим пространством, если можно определить расстояние (метрику) между двумя векторами.*
- *Для нахождения угла между двумя элементами линейного пространства вводится понятие их скалярного произведения, пропорционального взаимной энергии сигналов. Если скалярное произведение равно нулю, то сигналы называются ортогональными.*
- *Представление сигнала в виде разложения его по ортонормированному базису носит название обобщенного ряда Фурье. Коэффициенты такого ряда равны скалярным произведениям разлагаемого сигнала и соответствующих базисных векторов.*

◇◇ *Важнейшими примерами ортонормированных базисных систем служат гармонические функции с кратными частотами, а также функции Уолша.*

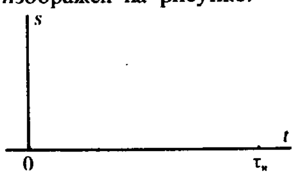
◇◇ *Энергия сигнала равна сумме энергий всех составляющих, из которых образуется обобщенный ряд Фурье.*

◇◇ *Разложение сигнала по ортонормированному базису характеризуется минимальной среднеквадратичной ошибкой аппроксимации.*

◇◇ *Процесс извлечения полезной информации, содержащейся в сигнале, можно представить себе как аппаратурное определение числовых значений коэффициентов обобщенного ряда Фурье этого сигнала.*

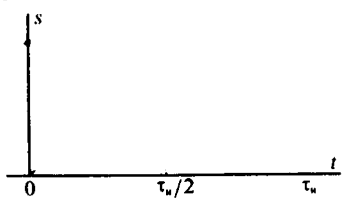
1. Приведите два-три примера физических процессов, требующих для своего описания случайных математических моделей.
2. Какие характеристики применяются для описания моделей импульсных сигналов?
3. В чем заключена разница между видеоимпульсом и радиоимпульсом?
4. При каких условиях замена аналогового сигнала дискретным неадекватна?
5. Как формулируется принцип динамического представления сигнала?
6. Перечислите основные свойства дельта-функции.
7. В чем заключаются важнейшие аксиомы линейного пространства?
8. Каков физический смысл квадрата нормы сигнала?
9. Как следует понимать геометрический смысл неравенства Коши—Буняковского?
10. Изобразите графически несколько примеров ортогональных сигналов.
11. Какие функциональные пространства называют гильбертовыми?
12. В чем заключено удобство разложения сигналов по ортогональной системе функций Уолша?

1. Импульс напряжения треугольной формы изображен на рисунке:

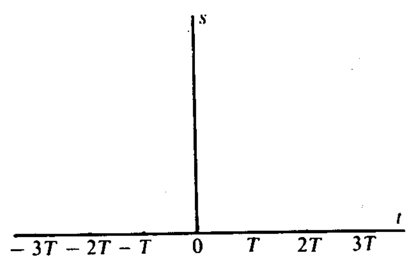



Составьте математическую модель этого сигнала, используя комбинацию функций включения.

2. Решите задачу 1 применительно к симметричному треугольному импульсу:




3. Составьте математическую модель для описания бесконечной последовательности одинаковых импульсов треугольной формы:




4. В соответствии с формулой (1.4) найдите динамическое представление экспоненциального видеоимпульса, описываемого функцией

$u(t) = U \exp(-\alpha t)\sigma(t)$.

5. По условиям предыдущей задачи найдите динамическое представление гауссового видеоимпульса

$u(t) = U \exp(-\beta t^2)$,

определенного на всей бесконечной оси времени. Обратите внимание на ту модификацию, которой должна быть подвергнута формула (1.4).

6. Покажите, что дельта-функция может пониматься как производная от функции включения:

$\delta(t) = d\sigma/dt$.

Указание. Вычислите производную от функции $v(\xi, t)$, представляемой формулой (1.1), и перейдите к пределу при $\xi \to 0$.

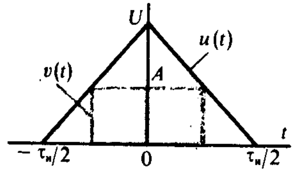
7. Найдите энергию и норму сигнала, описываемого математической моделью вида

$u(t) = U_0 \exp(-\alpha|t|)$.

8. Вычислите энергию и норму импульса косинусоидальной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \omega_0 t < -\pi/2; \\ U \cos \omega_0 t, & -\pi/2 < \omega_0 t < \pi/2; \\ 0, & \omega_0 t > \pi/2. \end{cases}$$

9. Сигнал $u(t)$ представляет собой симметричный треугольный импульс; сигнал $v(t)$ — вписанный в него импульс прямоугольной формы:




Определите амплитуду прямоугольного импульса таким образом, чтобы минимизировать расстояние между этими двумя импульсами.

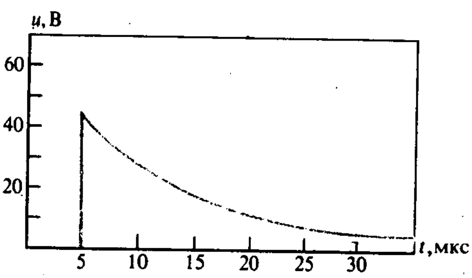
10. Используя принцип ортогональности, на основании рис. 1.4 постройте график функции wal (4, $\vartheta$).

11. Покажите, что взаимные расстояния между любыми двумя функциями из совокупности wal (0, $\vartheta$), wal (1, $\vartheta$) и wal (2, $\vartheta$) одинаковы и равны $\sqrt{2}$.

12. Проведите такой же анализ для ортонормированной системы тригонометрических функций (см. формулу (1.30)). Сравните полученные результаты. Можно ли здесь провести аналогию с обычной теоремой Пифагора?

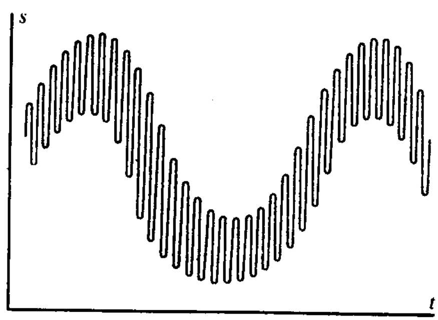
## Более сложные задания

13. В ходе эксперимента была зафиксирована следующая осциллограмма сигнала:

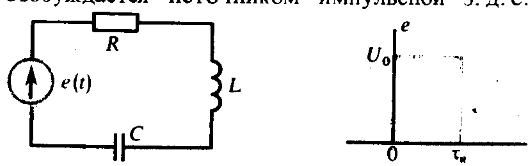



Есть предположение, что этот сигнал описывается экспоненциальной функцией времени. Предложите по возможности простой графический способ для проверки этой гипотезы.

14. Предложите математическую модель для аналитического описания сигнала следующего вида:




15. Последовательный колебательный контур возбуждается источником импульсной э. д. с.



Параметры системы: $R=5$ Ом, $L=10$ мкГн, $C=2$ нФ. Длительность импульса $\tau_и=0.5$ мкс, его амплитуда $U_0=12$ В.

Покажите, что в данном случае реальный импульс можно заменить математической моделью вида $A\delta(t)$. Каков должен быть при этом коэффициент $A$?

Перечислите несколько простых физических ситуаций, относящихся к повседневному опыту, когда фактически возникающее воздействие на какую-либо систему можно приближенно заменить дельта-импульсом.

16. Докажите, что дельта-функция может рассматриваться как предел вида

$$\delta(t) = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin qt}{t}\right).$$

17. Обобщите понятия энергии и нормы на векторные сигналы с произвольной размерностью $N$.

18. Докажите, что если $\mathscr{H}$ — вещественное гильбертово пространство, содержащее сигналы $u$ и $v$, то имеет место равенство параллелограмма:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2.$$

19. Докажите, что в комплексном гильбертовом пространстве справедливо тождество

$$4(u, v) = \|u+v\|^2-\|u-v\|^2+j\|u+jv\|^2-j\|u-jv\|^2.$$

20. Пусть $\{u_k(t),\ k=1, 2, \ldots\}$ — ортонормированный базис в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Покажите, что для произвольных $s_1, s_2 \in \mathscr{H}$ выполняется равенство Парсеваля

$$(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^{\infty}(s_1, u_k)\,(s_2, u_k).$$

# Глава 2 Спектральные представления сигналов

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисных для представления радиотехнических сигналов, особое место занимают гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Важность гармонических сигналов для радиотехники обусловлена рядом причин. В частности, гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований, осуществляемых линейными электрическими цепями. Если на входе линейной цепи действуют гармонические колебания, то сигнал на ее выходе также остается гармоническим, отличаясь от входного лишь амплитудой и начальной фазой. Кроме того, техника генерирования гармонических сигналов относительно проста.

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено *спектральное разложение* этого сигнала в базисе гармонических функций. Сумма отдельных гармонических компонент сигнала образует его *спектр*.

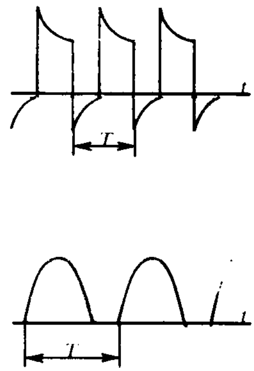
## 2.1. Периодические сигналы и ряды Фурье

Математической моделью процесса, циклически повторяющегося во времени является периодический сигнал $s(t)$, обладающий свойствами

$$s(t) = s(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.1}$$

($T$ — период сигнала).

Спектральное представление сигнала можно получить, используя разложение в ряд Фурье.



Примеры периодических сигналов

**Ряд Фурье.** Зададим на интервале времени $[-T/2, T/2]$ уже рассмотренный в предыдущей главе ортонормированный базис, образованный гармоническими функциями с кратными частотами:

$$u_0 = 1/\sqrt{T}, \quad u_1 = \sqrt{2/T}\sin 2\pi t/T,$$
$$u_2 = \sqrt{2/T}\cos 2\pi t/T, \quad u_3 = \sqrt{2/T}\sin 4\pi t/T, \tag{2.2}$$
$$u_4 = \sqrt{2/T}\cos 4\pi t/T, \ldots$$

Любая функция $u_m$, принадлежащая этому базису, удовлетворяет условию периодичности (2.1). Выполнив разложение сигнала $s(t)$ в этом базисе, т. е. вычислив коэффициенты

$$c_m = (s, u_m), \tag{2.3}$$

получаем его спектральное представление

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(t). \tag{2.4}$$

Разложение справедливо на всей бесконечной оси времени. Ряд вида (2.4) называется *рядом Фурье.*

Введем *основную частоту* $\omega_1 = 2\pi/T$ последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения по формуле (2.3), ряд Фурье для периодического сигнала можно записать в виде

● основная частота

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \tag{2.5}$$

где коэффициенты

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t dt, \qquad (2.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t dt.$$

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит в себе не зависящую от времени *постоянную составляющую* и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых *гармоник* с частотами $\omega_n = n\omega_1$, $n=1, 2, 3, \ldots$, кратными основной частоте последовательности.

● гармоники

Любая гармоника ряда Фурье характеризуется амплитудой $A_n$ и начальной фазой $\varphi_n$. Для этого коэффициенты ряда следует записать в виде

$$a_n = A_n \cos\varphi_n; \quad b_n = A_n \sin\varphi_n,$$

так что

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}(b_n/a_n).$$

Подставив эти выражения в (2.5), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \qquad (2.7)$$

которая иногда оказывается удобнее.

**Спектральная диаграмма периодического сигнала.** Так принято называть графическое построение, наглядно интерпретирующее коэффициенты ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают амплитудные и фазовые диаграммы (рис. 2.1).

На рисунке горизонтальной оси в некотором масштабе отложены дискретные частоты гармоник.

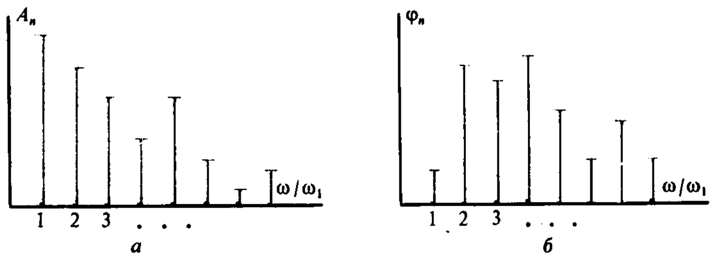



Рис. 2.1. Спектральные диаграммы некоторого периодического сигнала: *а* — амплитудная; *б* — фазовая

▲ решите задачи 1 и 2

Чаще всего интересуются информацией, содержащейся в амплитудной диаграмме, которая позволяет судить о процентном содержании тех или иных гармоник в спектре периодического сигнала.

---

**Пример 2.1.** *Разложение в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов с известными параметрами* ($\tau$, $T$, $A$), *четной относительно точки* $t=0$.

В радиотехнике отношение

● скважность последовательности

$$q = T/\tau$$

принято называть *скважностью последовательности*. По формулам (2.6) находим:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q},$$

$$a_n = \frac{2A}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos n\omega_1 t\,dt = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1\tau}{2}.$$

Отсюда приходим к следующему ряду Фурье:

$$s(t) = \frac{A}{q}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{q}\right)}{\frac{n\pi}{q}}\cos n\omega_1 t\right]. \qquad (2.8)$$

На рис. 2.2 представлен характерный вид амплитудной диаграммы рассматриваемой последовательности в двух предельных случаях.

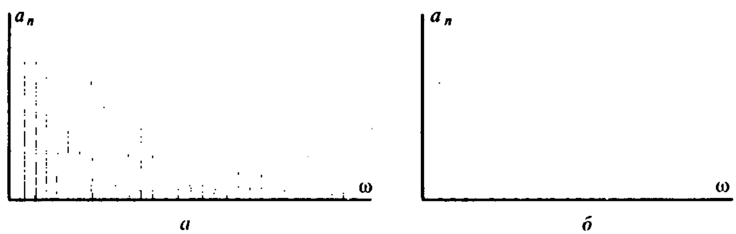
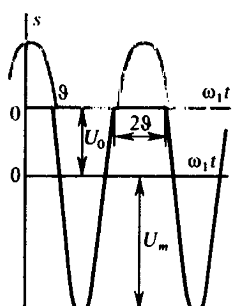



Рис. 2.2. Амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов:

*а* — при большой скважности; *б* — при малой скважности




Важно отметить, что последовательность коротких импульсов, следующих друг за другом достаточно редко ($q \gg 1$), обладает богатым спектральным составом.

Принято говорить, что спектральная диаграмма рассмотренного вида обладает *лепестковой структурой.*

**Пример 2.2.** *Разложение в ряд Фурье периодической последовательности импульсов, образованной гармоническим сигналом вида* $U_m \cos\omega_1 t$, *ограниченным на уровне* $U_0$ *(предполагается, что* $|U_0| < U_m$*).*

Для характеристики сигнала такого вида вводят специальный параметр — *угол отсечки* $\vartheta$, определяемый из соотношения

$$U_m \cos\vartheta = U_0,$$

откуда

$$\vartheta = \arccos(U_0/U_m).$$

угол отсечки

В соответствии с этим величина $2\vartheta$ равна длительности одного импульса, выраженной в угловой мере.

Аналитическая запись импульса, порождающего рассматриваемую последовательность, имеет вид

$$s(t) = U_m \cos\omega_1 t - U_0, \quad -\vartheta < \omega_1 t < \vartheta .$$

Постоянная составляющая последовательности

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int\limits_{-\vartheta/\omega_1}^{\vartheta/\omega_1} (U_m \cos\omega_1 t - U_0)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos\omega_1 t - U_0)\,d(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta).$$

Амплитудный коэффициент первой гармоники

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos\omega_1 t - U_0)\cos\omega_1 t\,d(\omega_1 t) =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta).$$

Аналогично вычисляют амплитуды $a_n$ гармонических составляющих при $n=2, 3, \ldots$ :

$$a_n = \frac{2U_m}{\pi}\,\frac{\sin n\vartheta\cos\vartheta - n\cos n\vartheta\sin\vartheta}{n(n^2-1)} .$$

Полученные результаты обычно записывают так:

$$a_0/2 = U_m\gamma_0(\vartheta); \quad a_n = U_m\gamma_n(\vartheta),$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — так называемые функции Берга:

Академик Аксель Иванович Берг (1893—1979) — крупный советский ученый в области радиотехники

$$\gamma_0(\vartheta) = \frac{1}{\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta),$$

$$\gamma_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi}(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta), \qquad (2.9)$$

$$\gamma_n(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin n\vartheta\cos\vartheta - n\cos n\vartheta\sin\vartheta}{n(n^2-1)}$$

при $n=2, 3, \ldots$

Графики функций $\gamma_0$, $\gamma_1$ и $\gamma_2$ приведены на рис. 2.3.

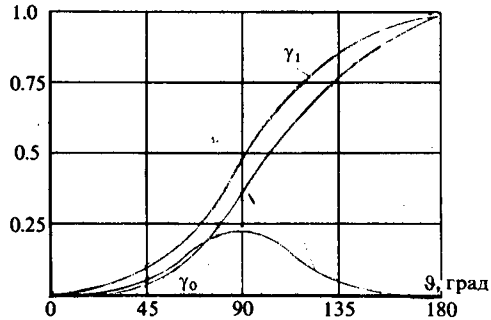



Рис. 2.3. Графики нескольких первых функций Берга

Поскольку эти функции часто встречаются в инженерных расчетах, в приложениях к книге даны их таблицы, а также соответствующая программа для ЭВМ на ФОРТРАНе.

**Комплексная форма ряда Фурье.** Основной формуле спектрального анализа периодических сигналов (2.5) можно придать изящный симметричный вид, если воспользоваться представлением гармонических функций в виде суммы экспонент с мнимыми показателями. Применив формулы Эйлера, перепишем ряд (2.5):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} + b_n\,\frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j}\right). \tag{2.10}$$

Введем вместо $a_n$ и $b_n$ новые коэффициенты $C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Величины $C_n$ можно определить и при отрицательных индексах $n$, причем $C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \overset{*}{C}_n$, поскольку коэффициенты $a_n$ четны, а $b_n$ нечетны относительно индексов. Таким образом, суммирование в (2.10) можно распространить на все значения $n$, положительные и отрицательные:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}} \tag{2.11}$$

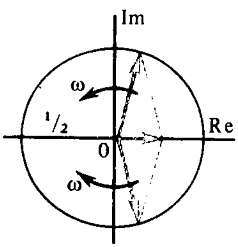
Формула (2.11) является рядом Фурье в комплексной форме. Как легко видеть, коэффициенты такого ряда

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_1 t}\,\mathrm{d}t.} \qquad (2.12)$$

**Понятие отрицательных частот.** Спектральная диаграмма периодического сигнала, представленного в форме (2.11), будучи симметричной относительно начала отсчета частоты, содержит компоненты на отрицательной полуоси частот.

Понятие отрицательной частоты нуждается в некотором обсуждении. Рассмотрим тождество

$$\cos\omega_1 t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega_1 t} + \mathrm{e}^{-j\omega_1 t}}{2}.$$




В соответствии с методом комплексных амплитуд слагаемое $(1/2)\exp(j\omega_1 t)$ на комплексной плоскости отображается вектором длины $^1/_2$, который вращается с угловой скоростью $\omega_1$ в направлении увеличения полярного угла $\omega t$. Вектор, соответствующий слагаемому $(1/2)\exp(-j\omega_1 t)$, отличается противоположным направлением вращения. Складываясь, эти два комплексных числа образуют вещественное число.

В ряде (2.11) слагаемые с положительными и отрицательными частотами образуют пары. Например,

$$C_n\mathrm{e}^{jn\omega_1 t} + C_{-n}\mathrm{e}^{-jn\omega_1 t} = |C_n|\,\mathrm{e}^{j(n\omega_1 t+\varphi_n)} +$$
$$+ |C_n|\,\mathrm{e}^{-j(n\omega_1 t+\varphi_n)} = 2\,|C_n|\cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Итак, отрицательная частота — понятие не физическое, а математическое, обусловленное способом представления комплексных чисел.

**Изображение периодического сигнала на комплексной плоскости.** Структура ряда Фурье (2.11) дает возможность изобразить периодический сигнал посредством бесконечной суммы векторов, вращающихся на комплексной плоскости (рис. 2.4).

Это построение осуществляется следующим образом. Из начала координат комплексной плоскости (точка 0) строится вещественный вектор $C_0$, который отображает член с номером $n=0$. Затем в формуле (2.11) полагают $t=0$ и строят суммы векторов

$$C_+ = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots,$$
$$C_- = C_{-1} + C_{-2} + C_{-3} + \ldots,$$

отвечающие вкладу слагаемых с положительными и отрицательными частотами. Для сходящегося ряда Фурье каждая из сумм отображается вектором конечной длины.

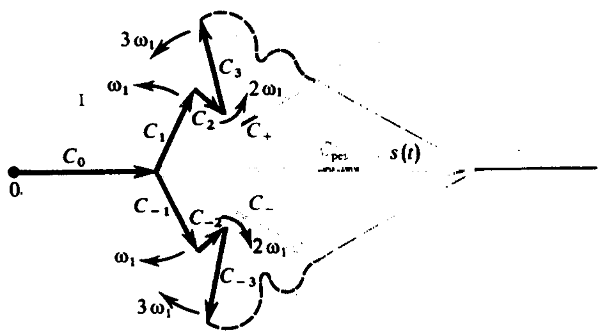



Рис. 2.4. Графическое отображение ряда Фурье в комплексной форме

Как уже указывалось, коэффициенты ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами комплексно-сопряжены, поэтому вектор $C_+ + C_-$ всегда веществен. Будучи сложенным с постоянной составляющей $C_0$, он образует вектор, длина которого $s(0)$ равна мгновенному значению сигнала в начальный момент времени.

В дальнейшем картина трансформируется — векторы $C_1$, $C_2, \dots$, соответствующие положительным частотам, будут вращаться с угловыми скоростями $\omega_1, 2\omega_1, \dots$ в сторону увеличения фазового угла, а векторы $C_{-1}, C_{-2}, \dots$ будут вращаться в противоположном направлении. Конец результирующего вектора будет определять текущее значение сигнала.

Приведенная наглядная картина иногда бывает очень полезной. Так, мы воспользуемся такой интерпретацией в следующем параграфе.

## 2.2 Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье

Метод рядов Фурье допускает глубокое и плодотворное обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Среди последних наибольший интерес для радиотехники представляют сигналы вида одиночных импульсов.

**Периодическое продолжение импульса.** Пусть $s(t)$ — импульсный сигнал, длительность которого конечна. Дополнив мысленно его такими же сигналами, периодически следующими через некоторые интервалы времени $T$, мы получаем изученную ранее

Одиночный сигнал


периодическую последовательность $s_{\text{пер}}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье

$$s_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \tag{2.13}$$

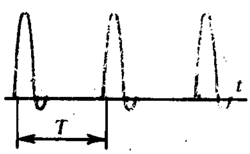
с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\text{пер}}(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt. \tag{2.14}$$

Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, следует устремить к бесконечности период повторения $T$. При этом:

1. Частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах (2.13) и (2.14) дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить на непрерывную переменную $\omega$ — текущую частоту.

и периодическая последовательность




2. Амплитудные коэффициенты $C_n$ становятся неограниченно малыми из-за наличия величины $T$ в знаменателе формулы (2.14).

Наша задача сводится к нахождению предельного вида формулы (2.13) при $T \to \infty$.

**Понятие спектральной плотности сигнала.** Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_n e^{j\varphi_n}; \ C_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}.$$

Каждая пара коэффициентов отображает гармоническое колебание

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

с комплексной амплитудой $2A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$.

Рассмотрим малый интервал физических частот $\Delta\omega$ в окрестности некоторой частоты $\omega_0$. В пределах этого интервала содержится

$$N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$$

пар спектральных компонент. *Поскольку их частоты отличаются сколь угодно мало, мы можем складывать их так, как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами*

В физике принято говорить, что при этом наблюдается когерентное сложение гармонических колебаний

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt.$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных компонент, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}\,\mathrm{d}t. \qquad (2.15)$$

Величина

$$\boxed{S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t} \qquad (2.16)$$

носит название *спектральной плотности сигнала* $s(t)$. Формула (2.16) называется *преобразованием Фурье* данного сигнала.

**Физический смысл спектральной плотности.** Интерпретацию полученных результатов удобнее всего провести, перейдя от круговой частоты $\omega$ к циклической частоте $f = \omega/(2\pi)$. При этом формула (2.15) приобретет вид

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0)\,\Delta f. \qquad (2.17)$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ есть масштабный множитель, связывающий малую длину интервала частот $\Delta f$ и отвечающую ему комплексную амплитуду $\Delta A_{f_0}$ гармонического сигнала на центральной частоте $f_0$.

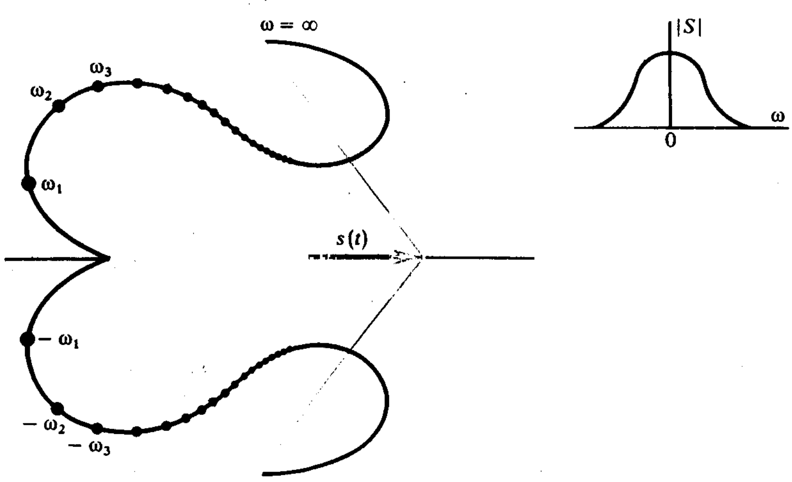



Рис. 2.5. Векторная диаграмма непериодического сигнала (справа изображена зависимость модуля спектральной плотности от частоты)

Принципиально важно, что спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. На векторной диаграмме непериодического сигнала (рис. 2.5) длины элементарных векторов бесконечно малы и поэтому вместо ломаных линий ($T$ конечно) получаются гладкие кривые ($T \to \infty$). Если на оси частот взять некоторую совокупность равноотстоящих точек $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$, то модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ устанавливает линейный масштаб вдоль кривых: чем больше модуль спектральной плотности в заданной области частот, тем реже будут располагаться частотные точки на векторной диаграмме.

**Форма сигнала зависит как от модуля, так и от фазы спектральной плотности**

Данная диаграмма построена для некоторого фиксированного момента времени; с течением времени конфигурация кривых будет изменяться весьма сложным образом, поскольку чем выше частота, тем с большей угловой скоростью будут вращаться соответствующие участки кривых. Однако фактически важна не форма кривой, а лишь проекция на горизонтальную ось ее конечной точки.

**Обратное преобразование Фурье.** Решим теперь обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной.

Положим вновь, что непериодический сигнал получается из периодической последовательности, когда ее период устремляется к бесконечности. Воспользовавшись формулами (2.13) и (2.14), запишем

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}.$$

Коэффициент $1/T$ пропорционален разности между частотами соседних гармоник:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,(n\omega_1 - (n-1)\,\omega_1)$$

при любом целом $n$. Таким образом,

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}\,(n\omega_1 - (n-1)\,\omega_1).$$

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками при возрастании периода последовательности неограниченно сокращаются, то последнюю сумму можно заменить интегралом:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (2.18)$$

Эта важная формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала $s(t)$.

● обратное преобразование Фурье

Таким образом, приходим к фундаментальному выводу: *сигнал* $s(t)$ *и его спектральная плотность* $S(\omega)$ *взаимно-однозначно связаны прямым* и *обратным преобразованиями Фурье*:

$$\boxed{\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\omega t}\,dt,\\ s(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \end{aligned}} \qquad (2.19)$$

Аппарат спектральных разложений чрезвычайно обогащает теорию сигналов. Например, часто математическая модель сигнала, представленная функцией $s(t)$, т. е. во временно́й области, сложна и недостаточно наглядна. Однако описание этого сигнала в частотной области посредством функции $S(\omega)$ может оказаться простым. Однако гораздо важнее другое: спектральное представление сигналов открывает прямой путь к анализу прохождения сигналов через широкий класс радиотехнических цепей, устройств и систем. Эти методы будут подробно изучены в гл. 8 и 9.

▲ решите задачу 3

**Условие существования спектральной плотности сигнала.** В математике детально исследован вопрос о том, какими свойствами должна обладать функция $s(t)$ для того, чтобы ее преобразование Фурье действительно существовало.

Опуская доказательства и те достаточно тонкие соображения, которые приходится вкладывать в само понятие существования математического объекта, сформулируем окончательный результат: для того чтобы сигналу $s(t)$ можно было бы сопоставить его спектральную плотность $S(\omega)$, необходимо потребовать, чтобы сигнал был абсолютно интегрируем, т. е. чтобы существовал интеграл

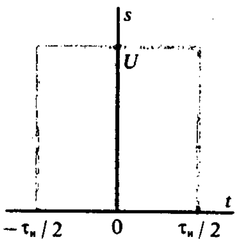
■ абсолютная интегрируемость сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,s(t)\,|\,dt < +\infty.$$

Подобное условие значительно сужает класс допустимых сигналов. Так, в указанном классическом смысле невозможно говорить о спектральной плотности гармонического сигнала $s(t) = A\cos\omega_0 t$, определенного на всей бесконечной оси времени.

Однако в современной математике разработаны приемы, позволяющие разумным образом вычислять спектральные плотности неинтегрируемых сигналов. Правда, при этом оказывается, что такие спектральные плотности будут уже не обычными, классическими, а обобщенными функциями. Вопрос о спектральном представлении неинтегрируемых сигналов будет рассмотрен несколько позже.

А теперь проиллюстрируем на конкретных примерах технику вычисления спектральных плотностей.




**Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса.** Пусть данный сигнал $s(t)$ характеризуется амплитудой $U$, имеет длительность $\tau_и$ и располагается симметрично относительно начала отсчета времени. На основании (2.16)

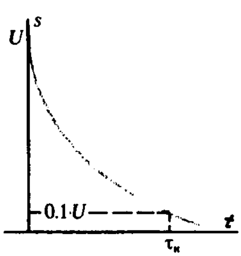
$$S(\omega) = U\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e^{-j\omega t}\,dt = U\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}(\cos\omega t - j\sin\omega t)\,dt =$$

$$= 2U\int_0^{\tau_и/2}\cos\omega t\,dt = \frac{2U}{\omega}\sin\frac{\omega\tau_и}{2}.$$

Итак, спектральная плотность рассматриваемого сигнала есть вещественная функция частоты. Удобно ввести безразмерную переменную $\xi = \omega\tau_и/2$ и окончательно представить результат так:

$$\boxed{S(\omega) = U\tau_и\,\frac{\sin\xi}{\xi}.} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Интересно и важно отметить, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса: $S(0) = U\tau_и$. На рис. 2.6 изображен график функции (2.20).




**Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса.** Рассмотрим сигнал, описываемый функцией

$$s(t) = U\exp(-\alpha t)\,\sigma(t)$$

при положительном вещественном значении параметра $\alpha$.

Такой сигнал, строго говоря, лишь условно может быть назван импульсом из-за своего поведения при $t \to \infty$. Однако усло-

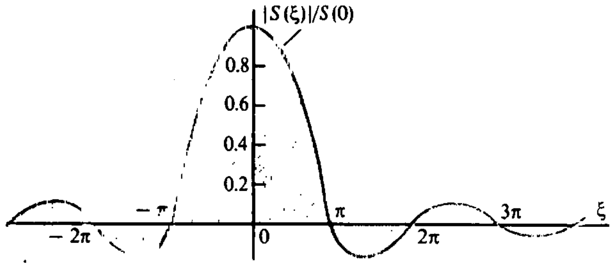



Рис. 2.6. График относительной величины спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функции параметра $\xi=\omega\tau_и/2$

вие $\alpha>0$ обеспечивает достаточно быстрое (экспоненциальное) уменьшение мгновенных значений сигнала с ростом времени. Практическая длительность таких импульсов в радиотехнике обычно определяется из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала:

$$\exp(-\alpha\tau_и)=0.1,$$

откуда

$$\tau_и=2.3026/\alpha.$$

Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса

$$S(\omega)=U\int_0^\infty e^{-(\alpha+j\omega)t}\,dt=$$

$$=-\frac{U}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{U}{\alpha+j\omega}. \qquad (2.21)$$

▲ решите задачи 5 и 6

Можно отметить две принципиальные особенности, отличающие спектральную плотность экспоненциального колебания от спектра импульса прямоугольной формы:

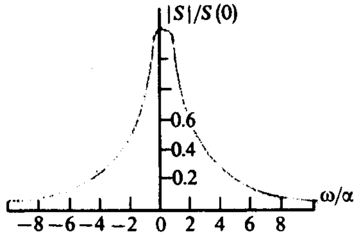
1. В соответствии с формулой (2.21) величина $S(\omega)$ не обращается в нуль ни при каком конечном значении частоты.

2. Спектральная плотность экспоненциального импульса есть комплекснозначная функция.

$$S(\omega)=|S(\omega)|\exp(j\psi(\omega))$$

с модулем $|S(\omega)|=U/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ и аргументом $\psi(\omega)=-\mathrm{arctg}\,(\omega/\alpha)$.

Соответствующие графики представлены на рис. 2.7 и 2.8.



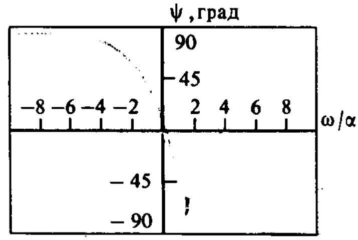
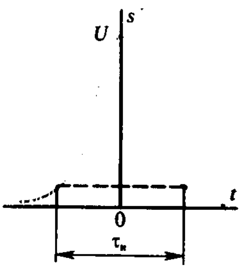




Рис. 2.7. Модуль спектральной плотности экспоненциального импульса

Рис. 2.8. Аргумент спектральной плотности экспоненциального импульса

**Спектральная плотность гауссова видеоимпульса.** Рассматриваемый сигнал описывается функцией вида

$$s(t) = U \exp(-\beta t^2).$$




Такую математическую модель часто используют в тех случаях, когда исследуемый импульс обладает большой степенью «гладкости». Эффективная длительность гауссова импульса может быть определена из условия десятикратного уменьшения мгновенного значения сигнала. Обратившись к чертежу, видим, что длительность $\tau_и$ должна удовлетворять соотношению

$$\exp[-\beta(\tau_и/2)^2] = 0.1;$$

преобразуя его, получаем

$$\tau_и = 2\sqrt{-\ln 0.1}/\sqrt{\beta} = 3.035/\sqrt{\beta}. \qquad (2.22)$$

Для получения спектральной плотности вычислим интеграл:

$$S(\omega) = U \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt. \qquad (2.23)$$

Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы можно было воспользоваться табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Для этого из показателя экспоненты в (2.23) выделим полный квадрат:

$$\beta t^2 + j\omega t = \beta t^2 + j\omega t - \omega^2/(4\beta) + \omega^2/(4\beta) =$$

$$= (\sqrt{\beta}\, t + j\omega/(2\sqrt{\beta}))^2 + \omega^2/(4\beta).$$

Поэтому

$$S(\omega) = U e^{-\omega^2/(4\beta)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\beta}\, t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\beta}}\right)^2} dt.$$

Введем новую переменную $\xi = \sqrt{\beta} t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\beta}}$ так что $dt = d\xi/\sqrt{\beta}$. В итоге искомая спектральная плотность принимает вид

$$S(\omega) = \frac{U e^{-\omega^2/(4\beta)}}{\sqrt{\beta}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2)\, d\xi,$$

откуда окончательно

$$S(\omega) = U \sqrt{\pi/\beta}\; e^{-\omega^2/(4\beta)}. \tag{2.24}$$

Итак, спектральная плотность гауссова импульса вещественна и описывается гауссовой же функцией частоты.

**Спектральная плотность дельта-функции.** Пусть сигнал $s(t)$ представляет собой короткий импульс, сосредоточенный в точке $t=0$ и имеющий площадь $A$. Математическая модель такого сигнала

$$s(t) = A\delta(t).$$

Для нахождения спектральной плотности этого сигнала нужно вычислить интеграл

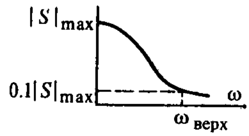
$$S(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t)\, \delta(t)\, dt.$$

В гл. 1 мы познакомились с фильтрующим свойством дельта-функции: данный интеграл будет равен значению классической функции в той точке, где сосредоточена обобщенная функция. Поэтому

$$\boxed{S(\omega) = A = \text{const.}} \tag{2.25}$$

Такое поведение спектра дельта-функции есть следствие исходной идеализации

Итак, $\delta$-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах. Интересно интерпретировать этот результат на векторной диаграмме (рис. 2.5). В момент возникновения импульса $(t=0)$ все элементарные гармонические составляющие, которые отвечают различным частотам, складываются когерентно, поскольку в соответствии с (2.25) спектральная плотность вещественна. Амплитуды этих составляющих при увеличении частоты не убывают (ср. с предыдущими примерами). Таким образом, при $t=0$ наблюдается бесконечно большое значение сигнала. Во все другие моменты времени векторная сумма указанных составляющих будет обращаться в нуль.




**Связь между длительностью импульса и шириной его спектра.** Если проанализировать частные случаи, изученные выше, можно сделать очень важный вывод: *чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.*

● ширина спектра

Под шириной спектра здесь и в дальнейшем будет пониматься частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например изменяется в пределах от $|S|_{max}$ до $0.1|S|_{max}$.

Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс и будем полагать, что верхняя граничная частота спектра — это частота, соответствующая первому нулю спектральной плотности. Эту частоту легко найти из условия

$$\omega_в\tau_и/2=\pi, \text{ или } f_в\tau_и=1.$$

▲ решите задачу 4

В случае экспоненциального видеоимпульса можно условно положить, что на верхней граничной частоте модуль спектральной плотности уменьшается в 10 раз по отношению к максимальному значению. Отсюда следует (см. (2.20) и далее), что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_в}{\alpha}\right)^2}}=0.1, \text{ или } \omega_в=\sqrt{99}\,\alpha,$$

а значит,

$$f_в=\omega_в/(2\pi)=1.584\alpha.$$

Поскольку эффективная длительность экспоненциального импульса $\tau_и=2.303/\alpha$, то произведение

$$f_в\tau_и=3.647.$$

■ Говорят, что ширина спектра и длительность импульса связаны соотношением неопределенности (термин, заимствованный из квантовой механики)

Наконец, спектр $\delta$-импульса, имеющего бесконечно малую длительность, неограниченно протяжен вдоль оси частот.

Итак, произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы:

$$f_в\tau_и=O(1).$$

Это соотношение имеет первостепенное значение для радиотехники. Оно определяет требования к полосе пропускания радиотехнического устройства при заданной длительности сигналов. Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего усилителя. Из него же следует, что короткие импульсные помехи, обладающие широким спектром, могут ухудшать условия радиоприема в значительной полосе частот.

## 2.3 Основные свойства преобразования Фурье

В предыдущем параграфе была показана техника нахождения преобразований Фурье, вычислены спектральные плотности достаточно простых, но часто встречающихся импульсных сигналов. Рассмотрим теперь свойства преобразования Фурье.

**Линейность преобразования Фурье.** Если имеется некоторая совокупность сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., то их взвешенная сумма преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\boxed{\sum_i r_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i r_i S_i(\omega).} \tag{2.26}$$

Здесь $r_i$ — произвольные числовые коэффициенты. Доказательство формулы (2.26) осуществляется прямой подстановкой суммы сигналов в преобразование Фурье (2.16).

**Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности.** Пусть $s(t)$ — сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t \mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t \mathrm{d}t = A(\omega) - jB(\omega).$$

Подставим это выражение в формулу обратного преобразования Фурье (2.18):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)]\,[\cos\omega t + j\sin\omega t]\,\mathrm{d}\omega.$$

Для того чтобы сигнал, полученный путем такого двукратного преобразования, оставался вещественным, необходимо потребовать, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t \mathrm{d}\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos\omega t \mathrm{d}\omega = 0.$$

Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах всегда равен нулю

Это возможно лишь при следующем условии: *вещественная часть $A(\omega)$ спектральной плотности сигнала есть четная, а мнимая часть $B(\omega)$ — нечетная функция частоты*:

$$A(\omega) = A(-\omega); \quad B(\omega) = -B(-\omega). \tag{2.27}$$

**Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени.** Предположим, что для сигнала $s(t)$ известен закон соответствия $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на $t_0$ секунд позднее. Принимая точку $t_0$ за новое начало отсчета времени, будем обозначать этот смещенный сигнал как $s(t - t_0)$. Покажем, что

$$\boxed{s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega)\,\mathrm{e}^{-j\omega t_0}.} \tag{2.28}$$

Действительно,

Замена переменной $t - t_0 = x$

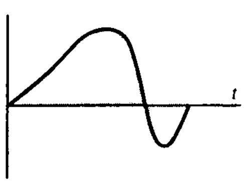
$$s(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\mathrm{e}^{-j\omega t_0}\,\mathrm{e}^{-j\omega x}\,\mathrm{d}x = S(\omega)\,\mathrm{e}^{-j\omega t_0}.$$

Комплексное число $\exp(-j\omega t_0)$ при любых $t_0$ имеет единичный модуль, поэтому амплитуды элементарных гармонических составляющих, из которых складывается сигнал, не зависят от его положения на оси времени. Информация об этой характеристике сигнала заключена в фазовом угле его спектральной плотности.

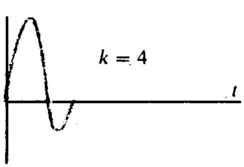
**Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени.** Предположим, что исходный сигнал $s(t)$ подвергнут преобразованию, связанному с изменением масштаба времени. Это означает, что роль времени $t$ будет играть новая независимая переменная $kt$ ($k$ — некоторое вещественное число). Если $k > 1$, то происходит «сжатие» исходного сигнала во времени; если же $0 < k < 1$, то имеет место временнóе «растяжение» сигнала.

Исходный сигнал




Оказывается, что если $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$\boxed{s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right).} \tag{2.29}$$




Сжатый сигнал

Действительно,

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\mathrm{e}^{-j\frac{\omega}{k}x}\,\mathrm{d}x,$$

откуда следует формула (2.29).

Итак, для того чтобы, например, сжать сигнал во времени, сохраняя его форму, необходимо распределить те же спектральные составляющие в более широком интервале частот при соответствующем пропорциональном уменьшении их амплитуд.

Интересным частным случаем преобразования временно́го масштаба является обращение направления времени, чему соответствует $k=-1$. По формуле (2.29) находим спектральную плотность обращенного во времени сигнала:

$$\boxed{s(t_{\text{обр}}) \leftrightarrow -S(-\omega).} \tag{2.30}$$

При обращении времени модуль спектральной плотности не изменяется, однако области спектра, соответствующие положительным и отрицательным частотам, взаимно меняются местами, а начальные фазы всех гармонических компонент получают сдвиг на 180°.

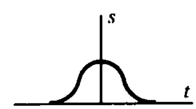
Физически ясно, что течение времени в природе имеет однонаправленный характер. Поэтому рассуждения, приведенные выше, надо понимать как математический прием, позволяющий, зная спектр сигнала, сразу находить спектр его «зеркальной копии».

**Спектральная плотность производной и интеграла.** Пусть сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ заданы. Будем изучать новый сигнал, получаемый из исходного путем дифференцирования, и поставим цель найти его спектр. Оказывается, что справедлива формула

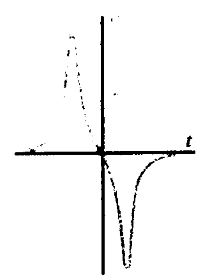
$$\boxed{\frac{ds}{dt} \leftrightarrow j\omega S(\omega).} \tag{2.31}$$

Для доказательства вычислим преобразование Фурье от производной непосредственно:

Сигнал




и его производная




$$\frac{ds}{dt} \leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{dt} e^{-j\omega t} dt = se^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} se^{-j\omega t} dt.$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль, поскольку $s \to 0$ при $t \to \pm\infty$ (условие интегрируемости сигнала). В результате получаем выражение (2.31).

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени обычно возрастает. Как следствие, спектр производной имеет бо́льшие значения в области высоких частот по сравнению со спектром исходного сигнала. •

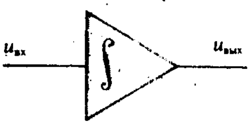
Формула (2.31) обобщается на случай спектра производной $n$-го порядка. Легко увидеть, что

**При дифференцировании происходит обострение сигнала**

$$\frac{d^n s}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n S(\omega). \qquad (2.32)$$

Итак, дифференцирование сигнала во временнóй области эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ играет роль оператора дифференцирования, действующего в частотной области.

Во многих радиотехнических устройствах находят применение так называемые *интеграторы* — физические системы, работающие по следующему принципу: мгновенное значение сигнала на их выходе равно интегралу от функции, описывающей входное воздействие. Если $u_{вх}$ и $u_{вых}$ — соответственно сигналы на входе и на выходе идеального интегратора, то



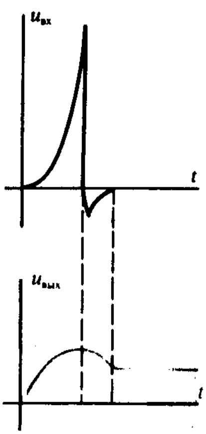

**Интегратор**

$$u_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{вх}(\xi)\, d\xi.$$

Между спектральной плотностью сигнала $s(t)$ и значением его определенного интеграла с переменным верхним пределом существует связь:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} s(\xi)\, d\xi \leftrightarrow S(\omega)/(j\omega).} \qquad (2.33)$$

Для доказательства заметим, что




**На выходе интегратора происходит сглаживание сигнала**

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} s(\xi)\, d\xi = s(t),$$

и затем воспользуемся формулой (2.31).

Таким образом, множитель $1/(j\omega)$ выступает как оператор интегрирования в частотной области.

**Спектральная плотность произведения сигналов.** Если известно, что при суммировании сигналов их спектры складываются, то спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — два сигнала, для которых установлены соответствия $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$; $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$.

Образуем произведение этих сигналов:

$$s(t) = u(t)\,v(t)$$

и вычислим его спектральную плотность:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,v(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \tag{2.34}$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $v(t)$ через его спектр и подставим результат в (2.34):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\,e^{j\xi t}\,d\xi\right]e^{-j\omega t}\,dt.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{-j(\omega-\xi)t}\,dt\right)d\xi,$$

откуда спектр произведения двух сигналов

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\,U(\omega-\xi)\,d\xi.} \tag{2.35}$$

Интеграл, стоящий здесь в правой части, называют *сверткой функции* $V$ и $U$. В дальнейшем будем символически обозначать операцию свертки так:

● **свертка**

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\,U(\omega-\xi)\,d\xi = V(\omega) * U(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$\boxed{u(t)\,v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\,V(\omega) * U(\omega).} \tag{2.36}$$

Читатель легко убедится, что операция свертки коммутативна, т. е. допускает изменение порядка следования преобразуемых функций:

$$V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega).$$

Доказанная выше теорема о свертке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представима в виде произведения:

▲ решите задачи 7 и 8

$$S(\omega) = S_1(\omega)\,S_2(\omega),$$

причем $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$ и $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$, то сигнал $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ является сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, но уже не в частотной, а во временно́й области:

$$S_1(\omega) S_2(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\xi) s_2(\xi) \, d\xi. \tag{2.37}$$

Доказательство этой формулы читатель может выполнить самостоятельно.

## 2.4 Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

Многие математические модели сигналов, широко используемые в радиотехнике, не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, и поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним неприменим. Однако, как уже указывалось, о спектральных плотностях таких сигналов тем не менее можно говорить, если допустить, что эти плотности могут описываться обобщенными функциями.

**Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.** Простейший неинтегрируемый сигнал — это постоянная величина $U_0 = \text{const}$. Предположим, что такой сигнал может быть представлен обратным преобразованием Фурье

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

с неизвестной пока спектральной плотностью $S(\omega)$. Если вспомнить фильтрующие свойства дельта-функции, то легко прийти к выводу о том, что для тождественного выполнения этого равенства нужно положить $S(\omega) = 2\pi U_0 \delta(\omega)$. Тогда

$$\boxed{U_0 \leftrightarrow 2\pi U_0 \delta(\omega).} \tag{2.38}$$

Физический смысл этого результата нагляден: постоянный во времени сигнал имеет спектральную компоненту только на нулевой частоте.

**Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала.** Пусть $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ — комплексный экспоненциальный сигнал с известной частотой $\omega_0$. Легко видеть, что этот сигнал не обладает свойством абсолютной интегрируемости, поскольку при $t \to \pm\infty$ функция $s(t)$ не стремится ни к какому пределу.

Осуществим фурье-преобразование данного сигнала:

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

и подберем спектральную плотность $S(\omega)$ так, чтобы равенство стало тождеством. Используя фильтрующее свойство дельта-функции, немедленно получаем важный результат:

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0).} \tag{2.39}$$

Отметим:

1. Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала равна нулю всюду, кроме точки $\omega=\omega_0$, где она имеет $\delta$-особенность.

2. Спектр данного сигнала несимметричен относительно точки $\omega=0$ и сосредоточен либо в области положительных, либо отрицательных частот.

**Спектральная плотность гармонических колебаний.** Пусть $s(t) = \cos\omega_0 t$. По формуле Эйлера,

$$s(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

Полученный ранее спектр комплексного экспоненциального сигнала и свойство линейности преобразования Фурье позволяют сразу записать спектральную плотность косинусоидального сигнала:

$$\boxed{\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].} \tag{2.40}$$

Читатель легко проверит самостоятельно, что для синусоидального сигнала справедливо соотношение

$$\boxed{\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].} \tag{2.41}$$

Оба рассмотренных сигнала задаются вещественными функциями времени, и поэтому их спектральные плотности есть четные или нечетные функции частоты.

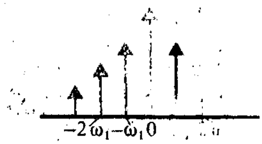
**Спектральная плотность произвольного периодического сигнала.** Ранее периодические сигналы исследовались методами теории рядов Фурье. Теперь мы получили возможность расширить наши представления об их спектральных свойствах и описать периодические сигналы с помощью преобразований Фурье.

Пусть

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

— периодический сигнал, заданный своим рядом Фурье в комплексной форме. На основании формулы (2.39), принимая во внимание свойство линейности преобразования Фурье, сразу получаем спектральную плотность такого сигнала:

$$\boxed{S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1).} \tag{2.42}$$




Соответствующий график спектральной плотности по своей конфигурации повторяет обычную спектральную диаграмму периодического сигнала. График образован $\delta$-импульсами в частотной области с координатами $\pm n\omega_1$.

**Спектральная плотность функции включения.** В качестве последнего примера вычисления спектра неинтегрируемого сигнала рассмотрим спектральную плотность функции включения $\sigma(t)$, которую для простоты определим во всех точках, кроме точки $t=0$ (ср. с (1.2)):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Заметим прежде всего, что функция включения может быть получена путем предельного перехода из экспоненциального видеоимпульса:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} e^{-\alpha t}, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Используется выражение спектра экспоненциального импульса

Поэтому для нахождения спектра функции включения следует выполнить предельный переход при $\alpha \to 0$:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Непосредственный переход к пределу, согласно которому

$$\sigma(t) \leftrightarrow 1/(j\omega),$$

справедлив при всех частотах, кроме значения $\omega=0$. Этот случай должен быть рассмотрен особо.

Прежде всего выделим в спектральной плотности экспоненциального сигнала вещественную и мнимую части:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Предельное значение первого слагаемого при любых $\omega \neq 0$ обращается в нуль и в то же время

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi$$

независимо от величины $\alpha$, откуда следует

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi\delta(\omega).$$

Итак, между функцией включения и ее спектральной плотностью существует связь

$$\boxed{\sigma(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.} \qquad (2.43)$$

Иногда встречается неточная запись формулы вида (2.43), содержащая лишь второе слагаемое

Наличие $\delta$-особенности в таком спектре при $\omega = 0$ говорит о присутствии в данном сигнале постоянной составляющей, равной $^1/_2$.

▲ решите задачу 16

**Спектральная плотность радиоимпульсов.** Как известно, радиоимпульс $u_р(t)$ задается в виде произведения некоторого видеоимпульса $u_в(t)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания:

$$u_р(t) = u_в(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (2.44)$$

Для нахождения спектральной плотности радиоимпульса будем полагать известной функцию $S_в(\omega)$ — спектр его огибающей. Спектр косинусоидального сигнала с произвольной начальной фазой получается путем обобщения формулы (2.40):

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi_0}\right]. \qquad (2.45)$$

Спектр радиоимпульса является сверткой спектров двух сигналов: $u_в(t)$ и гармонического колебания $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$:

$$S_р(\omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega - \xi)\left[\delta(\xi - \omega_0)e^{j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0)e^{-j\varphi_0}\right]d\xi.$$

Учитывая фильтрующие свойства дельта-функции, получаем

$$\boxed{S_р(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}S_в(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}S_в(\omega + \omega_0).} \qquad (2.46)$$

На рис. 2.9 показана трансформация спектра видеоимпульса при его умножении на высокочастотное гармоническое колебание.

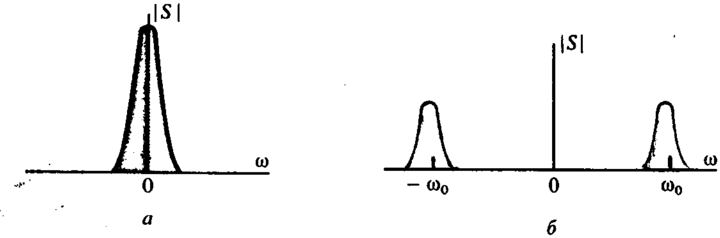


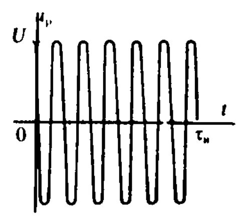

Рис. 2.9. Частотные зависимости модуля спектральной плотности:
*а* — видеоимпульса; *б* — радиоимпульса

▲ решите задачу 10

Таким образом, переход от видеоимпульса к радиоимпульсу на спектральном языке означает *перенос спектра видеоимпульса в область высоких частот*: вместо единственного максимума спектральной плотности при $\omega=0$ наблюдаются два максимума при $\omega=\pm\omega_0$; абсолютные значения максимумов сокращаются вдвое.

Отметим, что графики на рис. 2.9 отвечают ситуации, когда частота $\omega_0$ значительно превосходит эффективную ширину спектра видеоимпульса (именно такой случай обычно и реализуется на практике). При этом не наблюдается сколь-либо ощутимого «перекрытия» спектров, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Однако может оказаться, что ширина спектра видеоимпульса столь велика (при коротком импульсе), что выбранное значение частоты $\omega_0$ не обеспечивает устранения эффекта «перекрытия». Как следствие, профили спектров видеоимпульса и радиоимпульса перестают быть подобными.

**Пример 2.3.** *Найти спектральную плотность прямоугольного радиоимпульса.*




Для простоты положим начальную фазу в выражении (2.44) нулевой, тогда математическая модель радиоимпульса принимает вид

$$u_{р}(t)=U\,[\sigma(t)-\sigma(t-\tau_и)]\cos\omega_0 t.$$

Зная спектр соответствующего видеоимпульса (см. (2.20)), на основании (2.46) находим искомый спектр:

$$S_{р}(\omega)=\frac{U\tau_и}{2}\left[\frac{\sin\dfrac{(\omega-\omega_0)\tau_и}{2}}{\dfrac{(\omega-\omega_0)\tau_и}{2}}+\frac{\sin\dfrac{(\omega+\omega_0)\tau_и}{2}}{\dfrac{(\omega+\omega_0)\tau_и}{2}}\right]. \qquad (2.47)$$

На рис. 2.10 изображены результаты расчета по формуле (2.47) для двух характерных случаев. В первом случае импульс огибающей содержит 10 периодов высокочастотного заполнения ($\omega_0\tau_и=20\pi$); частота $\omega_0$

здесь достаточно высока для того, чтобы избежать уже упомянутого явления «перекрытия». Во втором случае радиоимпульс состоит всего лишь из одного периода заполнения ($\omega_0\tau_и = 2\pi$). Наложение составляющих, принадлежащих областям положительных и отрицательных частот, ведет к характерной асимметрии лепестковой структуры спектральной плотности радиоимпульса.

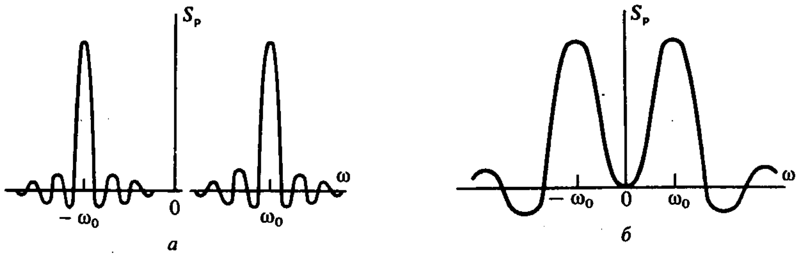



Рис. 2.10. Спектральные плотности радиоимпульса с прямоугольной огибающей:
*а* — при $\omega_0\tau_и = 20\pi$; *б* — при $\omega_0\tau_и = 2\pi$

## 2.5 Преобразование Лапласа

Наряду с преобразованием Фурье в радиотехнике для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов, широко используется еще один вид интегральных преобразований — преобразование Лапласа.

**Понятие комплексной частоты.** Как мы выяснили, спектральные методы анализа сигналов основаны на том, что исследуемый сигнал представляется в виде суммы неограниченно большого числа элементарных слагаемых, каждое из которых периодически изменяется во времени по закону $\exp(j\omega t)$.

Естественное обобщение этого принципа состоит в том, что вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимыми показателями вводят в рассмотрение экспоненциальные сигналы вида $\exp(pt)$, где $p$ — комплексное число,

$$p = \sigma + j\omega,$$

получившее название *комплексной частоты*.

● комплексная частота

Из двух таких комплексных сигналов всегда можно составить вещественный сигнал, например, по следующему правилу:

$$s(t) = \frac{1}{2}\left[e^{pt} + e^{\overset{*}{p}t}\right], \tag{2.48}$$

где $\overset{*}{p} = \sigma - j\omega$ — комплексно-сопряженная величина.

Действительно, при этом

$$s(t) = e^{\sigma t}\,\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t}\cos\omega t. \tag{2.49}$$

В зависимости от выбора вещественной и мнимой частей комплексной частоты можно получать разнообразные вещественные сигналы. Так, если $\sigma=0$, но $\omega \neq 0$, получаем обычные гармонические колебания вида $\cos \omega t$. Если же $\omega=0$, то в зависимости от знака $\sigma$ будем получать либо нарастающие, либо убывающие во времени экспоненциальные колебания. Более сложную форму такие сигналы приобретают, когда $\omega \neq 0$; в этом случае множитель $\exp(\sigma t)$ играет роль огибающей, экспоненциально изменяющейся во времени. Некоторые характерные случаи описанных сигналов изображены на рис. 2.11.

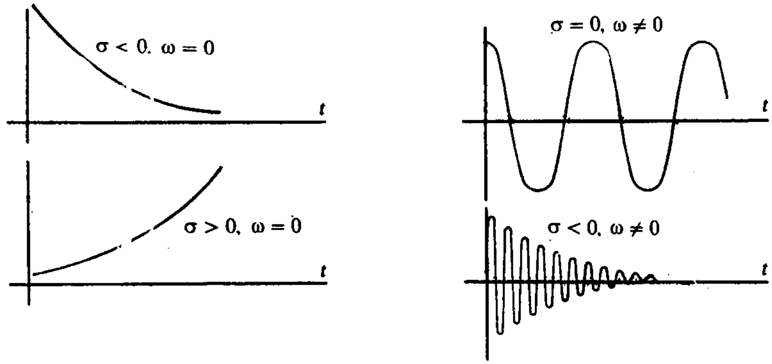



Рис. 2.11. Вещественные сигналы, отвечающие различным значениям комплексной частоты

Введение понятия комплексной частоты весьма плодотворно, прежде всего потому, что появляется возможность, не прибегая к обобщенным функциям, получать спектральные представления сигналов, математические модели которых неинтегрируемы. Более существенным оказывается другое соображение: экспоненциальные сигналы вида (2.49) служат «естественным» средством исследования колебаний в разнообразных линейных системах. Эти вопросы будут изучены в гл. 8.

Следует обратить внимание на то, что истинная физическая частота играет роль мнимой части комплексной частоты.

**Основные соотношения.** Пусть $f(t)$ — некоторый сигнал, вещественный или комплексный, определенный при $t>0$ и тождественно равный нулю при отрицательном значении времени. Преобразование Лапласа $F(p)$ этого сигнала задается интегралом:

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.} \tag{2.50}$$

Сигнал $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(p)$ — его *изображением по Лапласу* (для краткости, просто изображением).

Условие существования интеграла (2.50) заключается в следующем: сигнал $f(t)$ должен иметь не более чем экспоненциальную степень роста при $t>0$, т. е. должен удовлетворять неравенству

условие существования преобразования Лапласа

$$|f(t)| \leqslant k e^{at}, \tag{2.51}$$

где $k$, $a$ — положительные числа.

При выполнении этого неравенства функция $F(p)$ существует в том смысле, что интеграл (2.50) абсолютно сходится для всех комплексных чисел $p$, у которых $\mathrm{Re}(p)>a$. Число $a$ называется *абсциссой абсолютной сходимости*.

Переменная $p$ в основной формуле (2.50) может быть отождествлена с комплексной частотой $p=\sigma+j\omega$. Действительно, в случае чисто мнимой комплексной частоты, когда $\sigma=0$, формула (2.50) переходит в формулу (2.16), определяющую Фурье-преобразование сигнала, обращающегося в нуль при $t<0$. Таким образом, преобразование Лапласа должно рассматриваться как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот.

связь между преобразованиями Лапласа и Фурье

Подобно тому, как это делается в теории преобразования Фурье, можно, зная изображение, восстановить оригинал. Для этого в формуле обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

следует выполнить аналитическое продолжение, перейдя от мнимой переменной $j\omega$ к комплексному аргументу $(\sigma+j\omega)$. На плоскости комплексной частоты интегрирования принято проводить по неограниченно протяженной вертикальной оси, располагающейся правее абсциссы абсолютной сходимости. Поскольку при $\sigma=\mathrm{const}$ дифференциал $d\omega=(1/j)dp$, то формула обратного преобразования Лапласа приобретает вид

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp.} \tag{2.52}$$

В теории функций комплексного переменного показывается, что изображения по Лапласу обладают «хорошими» свойствами с точки зрения гладкости; такие изображения во всех точках комплексной плоскости $p$, за исключением счетного множества так называемых особых точек, являются аналитическими функциями. Особые точки, как правило, полюсы, однократные или многократные. Для вычисления интегралов вида (2.52) можно использовать методы теории вычетов [11].

На практике широко используют таблицы преобразований Лапласа, в которых собраны сведения о соответствии между оригиналами и изображениями. В Приложении 4 приводится такая таблица, позволяющая решать достаточно широкий круг задач.

**Примеры вычисления преобразований Лапласа.** Поскольку в способах вычисления изображений есть много общего с тем, что уже изучалось применительно к преобразованию Фурье, ограничимся наиболее характерными случаями.

---

**Пример 2.4.** *Изображение обобщенного экспоненциального импульса.* Пусть $f(t)=\exp(p_0t)\sigma(t)$, где $p_0=\sigma_0+j\omega_0$ — фиксированное комплексное число. Наличие σ-функции обусловливает равенство $f(t)=0$ при $t<0$. Используя формулу (2.50), получаем

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}\,dt=-\left.\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0}\right|_0^\infty.$$

Если $\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$, то числитель при подстановке верхнего предела обращается в нуль и в итоге получаем соответствие

$$\boxed{e^{p_0t}\sigma(t)\doteqdot\frac{1}{p-p_0}.} \tag{2.53}$$

Как частный случай формулы (2.53) можно получить изображение вещественного экспоненциального видеоимпульса:

$$\boxed{e^{-\alpha t}\sigma(t)\doteqdot\frac{1}{p+\alpha},} \tag{2.54}$$

и комплексного экспоненциального сигнала:

$$\boxed{e^{j\omega_0t}\sigma(t)\doteqdot\frac{1}{p-j\omega_0}.} \tag{2.55}$$

Наконец, положив в (2.54) $\alpha=0$, находим изображение функции Хевисайда:

$$\boxed{\sigma(t)\doteqdot 1/p.} \tag{2.56}$$

**Пример 2.5.** *Изображение дельта-функции.*

Если δ-импульс возникает в момент времени $t_0>0$, то нужно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0)\, e^{-pt} dt = e^{-pt_0}.$$

Таким образом, изображение дельта-функции принимает вид

$$\boxed{\delta(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0}.} \qquad (2.57)$$

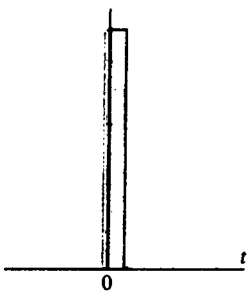
Это изображение определено во всех точках комплексной плоскости $p$. Оно нигде не имеет особенностей, кроме бесконечно удаленной точки.

Некоторую сложность может представить вычисление изображения δ-импульса, сосредоточенного при $t=0$, поскольку неясно, как надо учитывать вклад от обобщенной функции, сосредоточенной на одном из концов области интегрирования. Дело в том, что дельта-функция определяется (см. гл. I) как предел последовательности импульсов, симметричных относительно точки $t=0$. Если поступать формально, то в пределах области интегрирования окажется лишь половина такого импульса, а это приведет к двукратному уменьшению величины интеграла. Для того чтобы этого не произошло, изображение функции $\delta(t)$ определяется как предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0-\varepsilon}^{\infty} \delta(t)\, e^{-pt} dt = 1,$$

не зависящий от параметра ε. При таком подходе функция $\delta(t)$ всегда целиком принадлежит области интегрирования и имеет единичное изображение:

$$\boxed{\delta(t) \doteqdot 1.} \qquad (2.58)$$




**Дельта-импульс принадлежит области $t>0$**

## 2.6 Основные свойства преобразования Лапласа

Большинство свойств преобразования Лапласа совпадает с аналогичными свойствами преобразования Фурье. Поэтому в дальнейшем доказательства будут проводиться лишь там, где в этом возникает необходимость.

**Линейность.** Преобразование Лапласа — линейное интегральное преобразование, и поэтому взвешенная сумма сигналов преобразуется следующим образом:

$$\boxed{\sum_i r_i f_i(t) \doteqdot \sum r_i F_i(p).} \qquad (2.59)$$

Это свойство позволяет без труда находить изображения таких сигналов, которые могут быть представлены суммами относительно простых слагаемых с уже известными изображениями. Например, используя формулу Эйлера и принимая во внимание соответствие (2.55), получаем, что

$$\boxed{\cos\omega_0 t\sigma(t) \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega_0^2};} \tag{2.60}$$

$$\boxed{\sin\omega_0 t\sigma(t) \doteqdot \frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}.} \tag{2.61}$$

**Изображение сигнала, смещенного во времени.** Если имеется соответствие $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0}F(p). \tag{2.62}$$

В качестве примера вычислим изображение прямоугольного видеоимпульса единичной амплитуды с длительностью $\tau_и$, начинающегося при $t=0$. Для этого достаточно заметить, что такой импульс является разностью двух функций включения, смещенных во времени на величину $\tau_и$. Используя формулу (2.56), получаем

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau_и}\right). \tag{2.63}$$

**Теорема смещения.** Сущность ее заключена в следующем: если $f(t) \doteqdot F(p)$, то изображение сигнала, умноженного на экспоненциальную функцию времени, получается путем смещения аргумента изображения:

$$f(t)e^{-at} \doteqdot F(p+a). \tag{2.64}$$

Доказательство теоремы проводится прямой подстановкой функции $f(t)\exp(-at)$ в основную формулу (2.50).

Это свойство преобразования Лапласа дает возможность, например, получать изображения экспоненциальных сигналов с гармоническим заполнением. Так, на основании (2.60) и (2.61) получаем:

$$e^{-at}\cos\omega_0 t \doteqdot \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}, \tag{2.65}$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t \doteqdot \frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}. \tag{2.66}$$

**Изображение производных от сигнала.** Нахождение изображения первой производной сигнала осуществляется путем интегрирования по частям

$$\frac{df}{dt} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(t)\, e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt .$$

Легко видеть, что изображение производной содержит значение самого сигнала в начальной точке:

$$\boxed{\frac{df}{dt} \risingdotseq pF(p) - f(0),} \tag{2.67}$$

По индукции доказывается формула для изображения производной $n$-го порядка:

$$\frac{d^n f}{dt^n} \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) -$$

$$- \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{2.68}$$

То, что в изображения включают начальные состояния сигнала при $t=0$, позволяет применять метод преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с известными начальными условиями [11].

**Изображение интеграла.** Если при $t=0$ сигнал обращается в нуль, то

$$\boxed{\int_0^t f(\xi)\, d\xi \risingdotseq F(p)/p.} \tag{2.69}$$

В качестве примера использования этого правила найдем изображение линейно нарастающей функции:

$$f(t) \risingdotseq t\sigma(t).$$

Прежде отметим, что $f(t)$ есть интеграл от функции включения:

$$t\sigma(t) = \int_0^t \sigma(\xi)\, d\xi,$$

а поскольку $\sigma(t) \risingdotseq 1/p$, то

$$t\sigma(t) \risingdotseq 1/p^2. \tag{2.70}$$

**Изображение свертки двух сигналов.** Подобно преобразованию Фурье, преобразование Лапласа обладает следующим свойством: свертке двух сигналов отвечает произведение их изображений:

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)\, F_2(p),} \tag{2.71}$$

▲ решите задачу 11

где

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\, d\xi.$$

Это соотношение открывает удобный путь к вычислению изображения того сигнала, который может быть *факторизован*, т. е. представлен как произведение двух сигналов с известными изображениями.

**Связь предельных значений оригиналов и изображений.** Пусть $F(p)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$. Тогда справедливо следующее утверждение: поведение изображения в окрестности начала координат плоскости комплексных частот определяет собой характер оригинала при $t \to \infty$:

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t). \qquad \textbf{(2.72)}$$

Если сигнал $f(t)$ не содержит $\delta$-особенностей в нуле, то справедлива также формула

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0). \qquad \textbf{(2.73)}$$

## Результаты

◇◇ *Спектральное представление сигнала — разложение его на сумму, конечную или бесконечную, элементарных гармонических сигналов с различными частотами.*

◇◇ *Периодические сигналы можно представить с помощью рядов Фурье, которые образуются суммированием, вообще говоря, бесконечного числа гармоник с частотами, кратными основной частоте повторения последовательности.*

◇◇ *Спектральное представление непериодических, в частности импульсных, сигналов осуществляется путем разложения их в интеграл Фурье.*

◇◇ *В частотной области сигнал характеризуется своей спектральной плотностью.*

◇◇ *Сигнал и его спектральная плотность взаимно связаны парой преобразований Фурье.*

◇◇ *Для существования спектральной плотности в классическом смысле необходимо, чтобы соответствующий сигнал был абсолютно интегрируем.*

◇◇ *Спектральная плотность неинтегрируемого сигнала содержит в себе особенность типа дельта-функции.*

◇◇ *Экспоненциальное изменение амплитуды колебаний во времени описывается с помощью понятия комплексной частоты.*

◇◇ *Переход к комплексной частоте в преобразовании Фурье приводит к новому виду линейных интегральных преобразований — преобразованию Лапласа.*

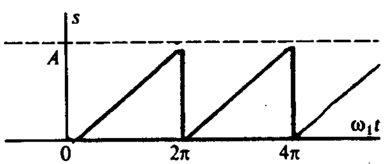
◇◇ *Сигналы, к которым применимо преобразование Лапласа, должны обращаться в нуль при $t<0$.*

## Вопросы

1. Почему простое гармоническое колебание $\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ играет особо важную роль в радиотехнике?
2. Дайте точное определение понятия периодического сигнала. Назовите несколько физических процессов, для которых модель периодического сигнала является достаточно точным способом описания.
3. Определите понятие угла отсечки гармонического колебания.
4. Дайте определение понятия отрицательной частоты. Поясните содержание этого понятия.
5. В чем заключается эффект когерентного сложения гармонических колебаний?
6. Какими свойствами должна обладать спектральная плотность вещественного сигнала?
7. Как принято определять длительность импульсных сигналов?
8. В чем состоит характерная особенность спектра дельта-импульса?
9. Как связаны между собой длительность импульса и ширина его спектра?
10. Как в частотной области отображаются операции дифференцирования и интегрирования сигнала?
11. Как связаны между собой спектральные плотности видеоимпульса и радиоимпульса?
12. В чем заключен смысл введения понятия комплексной частоты?
13. Какой эффект оказывает перекрытие частотных областей в спектре радиоимпульса?
14. Каким условиям должен удовлетворять сигнал для того, чтобы можно было применять метод преобразования Лапласа?
15. Как вычисляется преобразование Лапласа от произведения двух сигналов?
16. Каким образом, зная преобразование Лапласа сигнала, можно судить об асимптотическом поведении этого сигнала при $t\to\infty$?

## Задачи

1. Покажите, что ряд Фурье пилообразного колебания




дается формулой

$$s(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\left[\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\ldots\right].$$

2. Найдите амплитудный коэффициент 25-й гармоники пилообразного сигнала, если $A=30$ В.
3. Покажите, что если периодическая последовательность образована повторением импульса $s_0(t)$ с известной спектральной плотностью $S_0(\omega)$, то комплексная амплитуда $n$-го члена ряда Фурье

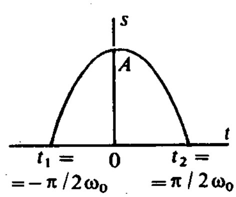
$$C_n=(2/T)S_0(n\omega_1),$$

где $T$ — период последовательности.

4. Дан двусторонний экспоненциальный видеоимпульс

$$s(t)=U_0\exp(-\alpha|t|).$$

Найдите выражение для его спектральной плотности. Определите длительность сигнала и ширину спектра.
5. Вычислите спектральную плотность экспоненциального видеоимпульса (см. (2.21)) с амплитудой 20 В и параметром $\alpha=10^6$ 1/с на частоте $\omega_0=2\cdot10^5$ 1/с.
6. На какой частоте спектральная плотность импульса, рассмотренного в задаче 5, будет иметь фазовый угол —45°?
7. Убедитесь, что спектральная плотность одиночного косинусоидального импульса

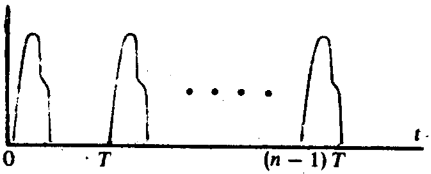


$$s(t) = \begin{cases} 0, & t<t_1 \\ A\cos\omega_0 t, & t_1<t<t_2, \\ 0, & t>t_2 \end{cases}$$

вычисляется по формуле

$$S(\omega) = A\left[\frac{\sin\frac{\pi(\omega_0+\omega)}{2\omega_0}}{\omega_0+\omega} + \frac{\sin\frac{\pi(\omega_0-\omega)}{2\omega_0}}{\omega_0-\omega}\right].$$

8. Решите задачу о вычислении спектральной плотности группы (пачки), состоящей из $n$ одинаковых видеоимпульсов:




Покажите, что спектральная плотность группы

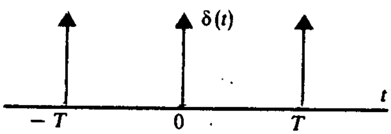
$$S_\Sigma(\omega) = S_0(\omega)\,\frac{1-e^{-j(n+1)\omega T}}{1-e^{-j\omega T}},$$

где $S_0(\omega)$ — спектр одиночного импульса.

Указание. Воспользуйтесь формулой суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

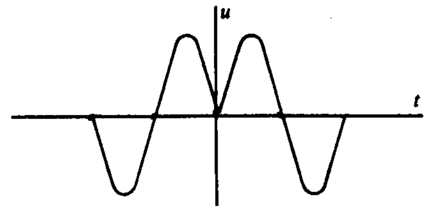
9. Группа образована тремя одинаковыми δ-импульсами:



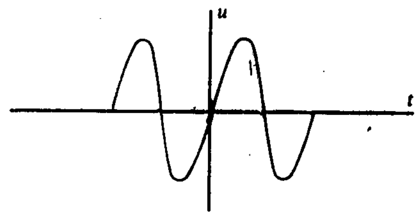

Покажите, что частотная зависимость модуля спектральной плотности группы дается формулой

$$|S_\Sigma(\omega)| = [(1+\cos\omega T+\cos 2\omega T)^2 + (\sin\omega T+\sin 2\omega T)^2]^{1/2}.$$

10. График импульсного сигнала, образованного отрезками гармонического колебания, приведен на рисунке:




Докажите, что спектральная плотность этого сигнала равна нулю как на нулевой частоте, так и на частоте высокочастотного заполнения. Как изменится спектр этого сигнала, если он приобретет такую форму:




11. Используя теорему о свертке, найдите сигнал, изображение которого равно

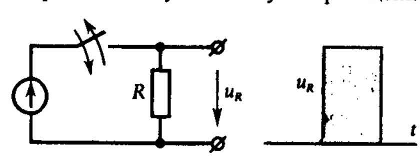
$$F(p) = \frac{U_0}{(p+\alpha)(p+\beta)}.$$

## Более сложные задания

12. Пусть периодический сигнал описывается функцией времени, которая содержит скачкообразные изменения уровня (разрывы 1-го рода). Покажите, что коэффициенты ряда Фурье такого сигнала с ростом их номера имеют асимптотику $O(1/n)$ независимо от вида функции.

13. В условиях предыдущей задачи рассмотрите сигнал, у которого разрывы испытывает первая производная, а значение функции непрерывно. Покажите, что в этом случае асимптотика коэффициентов ряда Фурье имеет вид $O(1/n^2)$.

14. Обсудите следующий «парадокс»: если на некоторое время замкнуть коммутатор в цепи




то на нагрузке будет наблюдаться прямоугольный импульс $u_R(t)$. Этот импульс складывается из гармонических составляющих, существующих во все моменты времени, в том числе и до начала импульса. Как это согласуется с предположением, что импульс может и не быть создан, хотя гармонические составляющие уже существуют?

15. Используя метод преобразования Фурье, найдите интегральные представления производных любого порядка от δ-функции.

16. Покажите, что спектральная плотность σ-функции (см. (2.43) ), будучи подставленной в обратное преобразование Фурье, обеспечивает при $t=0$ значение сигнала $\sigma(0)$, равное $^1/_2$. Указание. Считайте частоту ω комплексной переменной и вычислите интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]d\omega$$

методами теории вычетов.

# Глава 3 Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа

Представление сигналов их спектральными плотностями позволяет значительно упростить вычисление энергии сигналов и, что еще более важно, наглядно интерпретировать полученные результаты. Эти физические представления полезны в самых разнообразных теоретических и прикладных областях радиотехники. В данной главе будут отражены вопросы связи спектральных и энергетических характеристик сигналов.

## 3.1 Взаимная спектральная плотность сигналов. Энергетический спектр

В гл. 1 была введена фундаментальная характеристика системы двух сигналов $u(t)$ и $v(t)$ — их скалярное произведение

$$(u,\ v)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,v(t)\,dt, \tag{3.1}$$

пропорциональное взаимной энергии этих сигналов. Если сигналы тождественно совпадают, т. е. $u(t)=v(t)$, то скалярное произведение переходит в энергию сигнала

$$E_u=(u,\ u)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Попытаемся найти связь между скалярным произведением сигналов и их спектральными плотностями.

**Обобщенная формула Рэлея.** Предположим, что оба сигнала $u(t)$ и $v(t)$, фигурирующие в (3.1), заданы своими спектральными плотностями:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (3.3)$$

Воспользовавшись записью сигнала $v(t)$ из (3.3), подставим ее в формулу (3.1):

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt,$$

а затем изменим порядок следования операций интегрирования по времени и по частоте, так что

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_v(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt.$$

Теперь заметим, что внутренний интеграл в последней формуле есть спектральная плотность сигнала $u(t)$, вычисленная при отрицательном значении аргумента:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = S_u(-\omega).$$

Дж. В. Стретт (Рэлей) (1842—1919) — крупнейший английский физик, известный своими работами в области теории колебаний и волн

Будем в дальнейшем считать, что рассматриваемые сигналы описываются вещественными функциями времени. Тогда, как легко видеть,

$$\boxed{(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) S_u^*(\omega) d\omega.} \qquad (3.4)$$

Полученное соотношение называется *обобщенной формулой Рэлея*. Трактовке этой формулы можно придать легко запоминающуюся форму: *скалярное произведение двух сигналов пропорционально скалярному произведению спектральных плотностей.*

В формуле (3.4), конечно, можно изменить порядок следования операции комплексного сопряжения и писать ее так:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) S_v^*(\omega) d\omega. \qquad (3.5)$$

Подынтегральные выражения в (3.4) и (3.5) являются в общем случае комплексными, хотя левые части этих равенств заведомо вещественны. Указанные формулы можно так преобразовать, чтобы под знаком интеграла оказалась вещественная функция частоты. Для этого следует обратить внимание на то, что интегрирование ведется в симметричных пределах и при этом подынтегральные выражения, отвечающие двум симметричным точкам $\pm\omega$, комплексно-сопряжены друг другу. Действительно,

**Обобщенную формулу Рэлея называют также равенством Парсеваля**

$$S_u(-\omega)\, S_v^*(-\omega) = S_u^*(\omega)\, S_v(\omega) = \left[S_u(\omega)\, S_v^*(\omega)\right]^* .$$

▲ решите задачу 1

Поскольку для любого комплексного числа $z$

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z,$$

то мы можем ввести вещественную функцию

$$W_{uv}(\omega) = \mathrm{Re}\left(S_u(\omega)\, S_v^*(\omega)\right), \qquad (3.6)$$

которая позволит выразить скалярное произведение сигналов $u$ и $v$ следующим образом:

● взаимный энергетический спектр

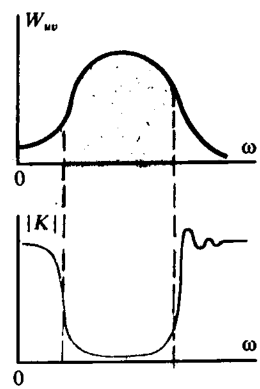
$$\boxed{(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega)\, d\omega.} \qquad (3.7)$$

(6.26)

Функцию $W_{uv}(\omega)$ называют *взаимным энергетическим спектром* сигналов $u$ и $v$.

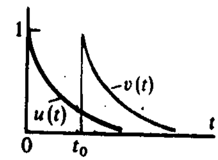
Формула (3.7) вскрывает «тонкую структуру» связи двух сигналов. Оказывается, что в формировании взаимной энергии сигналов различные участки их спектра играют в общем случае неодинаковую роль. Наибольший вклад обеспечивают те частотные области, в которых спектры сигналов перекрываются.

Более того, обобщенная формула Рэлея, представленная в виде (3.7), позволяет определить путь уменьшения степени связи между сигналами, добиваясь в пределе их ортогональности. Для этого один из рассматриваемых сигналов необходимо преобразовать к особой физической системе, называемой *частотным фильтром.* К этому фильтру предъявляется требование: не пропускать на выход те спектральные компоненты сигналов, которые находятся в пределах частотного интервала, где взаимный энергетический спектр максимален. Частотная зависимость коэффициента передачи такого ортогонализирующего фильтра будет обладать резко выраженным минимумом в пределах указанной области частот.




**Частотная зависимость коэффициента передачи ортогонализирующего фильтра**

Изложенный подход к вычислению скалярного произведения, основанный на понятии взаимного энергетического спектра, непосредственно связан с результатами, которые были получены в гл. 1, когда вычислялось скалярное произведение сигналов, разложенных по элементам ортогонального базиса. Различие, однако, состоит в том, что теперь использовалось не дискретное, а непрерывное Фурье-представление.




**Пример 3.1.** *Взаимный энергетический спектр двух экспоненциальных видеоимпульсов одинаковой формы, следующих друг за другом с интервалом времени* $t_0$.

Положив, что оба импульса имеют единичную амплитуду, запишем выражения их спектральных плотностей:

$$u(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t) \leftrightarrow S_u(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

$$v(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}\sigma(t - t_0) \leftrightarrow S_v(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}.$$

Затем находим произведение:

$$S_u(\omega)\overset{*}{S_v}(\omega) = \frac{e^{j\omega t_0}}{\alpha^2 + \omega^2}$$

и, наконец, взаимный энергетический спектр:

$$W_{uv}(\omega) = \frac{\cos \omega t_0}{\alpha^2 + \omega^2}. \qquad (3.8)$$

Если зафиксировать параметр $\alpha$, определяющий форму сигналов, то частотные свойства взаимного энергетического спектра будут целиком зависеть от временно́го сдвига между сигналами. На рис. 3.1 изображены два характерных графика функции $W_{uv}(\omega)$.

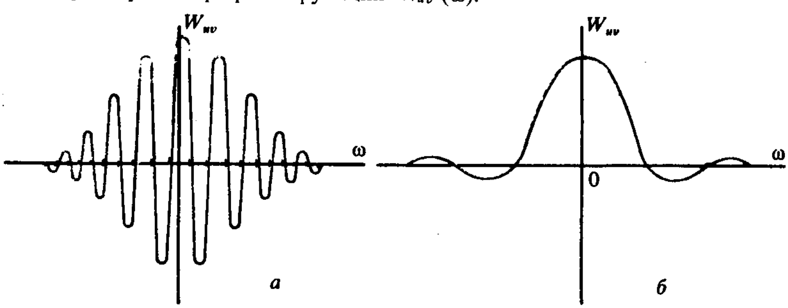
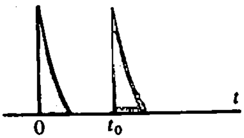



Рис. 3.1. Взаимный энергетический спектр двух экспоненциальных видеоимпульсов:

$a$ — при $\alpha t_0 \gg 1$; $б$ — при $\alpha t_0 \ll 1$

Особый интерес представляет случай, когда произведение $\alpha t_0$ мало, т. е. импульсы сильно перекрываются во времени. Формула (3.8) и график рис. 3.1, $б$ свидетельствуют о том, что взаимный энергетический спектр имеет выраженный низкочастотный характер. Отсюда следует вывод: для того чтобы уменьшить величину скалярного произведения таких сигналов и сделать их лучше различимыми, следует воспользоваться *фильтром верхних частот* (ФВЧ), который подавляет все колебания с частотами, меньшими некоторой граничной частоты $\omega_{гр}$.




Ортогонализация импульсов

Быстро изменяющийся фронт импульса образуется за счет сложения высокочастотных компонент спектра, которые беспрепятственно проходят на выход ФВЧ. В то же время при фильтрации низкочастотных составляющих спектра длительность импульса на выходе будет существенно сокращена. Как следствие этого, эффект перекрытия импульсов может быть доведен до любой приемлемо малой величины, так что импульсы на выходе ФВЧ оказываются весьма близкими к ортогональным.

**Энергетический спектр сигнала.** Спектральное представление энергии сигнала легко получить как частный случай обобщенной формулы Рэлея, если в ней сигналы $u(t)$ и $v(t)$ считать одинаковыми. Формула (3.6), выражающая спектральную плотность энергии, приобретает вид

$$W_u(\omega) = S_u(\omega) S_u^*(\omega) = |S_u(\omega)|^2. \tag{3.9}$$

Величина $W_u(\omega)$ носит название *спектральной плотности энергии сигнала* или, короче, *его энергетического спектра*. Формула (3.7) при этом запишется так:

● энергетический спектр

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega)\, d\omega. \tag{3.10}$$

● формула Рэлея

Соотношение (3.10) известно в различных областях физики как *формула Рэлея* (в узком смысле). Эта формула констатирует важный результат: *энергия любого сигнала может быть представлена как результат суммирования вкладов от различных интервалов частотной оси*. Каждый малый интервал физических частот $\Delta\omega$ обеспечивает вклад в общую энергию сигнала, равный

$$\Delta E_u = \frac{1}{\pi} W_u(\omega') \Delta\omega,$$

где $\omega'$ — некоторая внутренняя точка данного интервала частот (имеются в виду положительные частоты).

▲ решите задачи 3 и 4

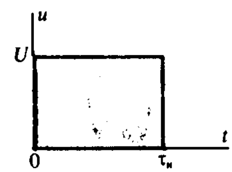
Подход, основанный на спектральном представлении энергии сигнала, выгодно отличается своей относительной простотой. Действительно, энергии, отвечающие различным областям частотной оси, складываются так же, *как и вещественные числа*. В то же время метод преобразования Фурье применительно к самим сигналам основан на том, что комплексные амплитуды, описывающие вклады малых частотных участков, складываются *как комплексные числа,* характеризующиеся модулями и фазами.

Изучая сигналы с помощью их энергетических спектров, мы неизбежно теряем информацию, которая заключена в фазовом спектре сигнала, поскольку энергетический спектр (см. (3.9) ) есть квадрат модуля спектральной плотности и не зависит от ее фазы. В частности, при энергетическом подходе все сигналы, одинаковые по форме, но различающиеся своим расположением на оси времени, выступают как совершенно равноправные и неразличимые.

Тем не менее понятие энергетического спектра оказывается очень полезным с точки зрения различных инженерных оценок, устанавливающих реальную ширину спектра того или иного сигнала

---

**Пример 3.2.** *Энергетический спектр прямоугольного видеоимпульса.* Для получения ответа необходимо возвести в квадрат спектральную плотность (2.20):




$$W_u(\omega) = U^2\tau_и^2 \frac{\sin^2 \dfrac{\omega\tau_и}{2}}{\left(\dfrac{\omega\tau_и}{2}\right)^2} . \tag{3.11}$$

Соответствующий график приведен на рис. 3.2.

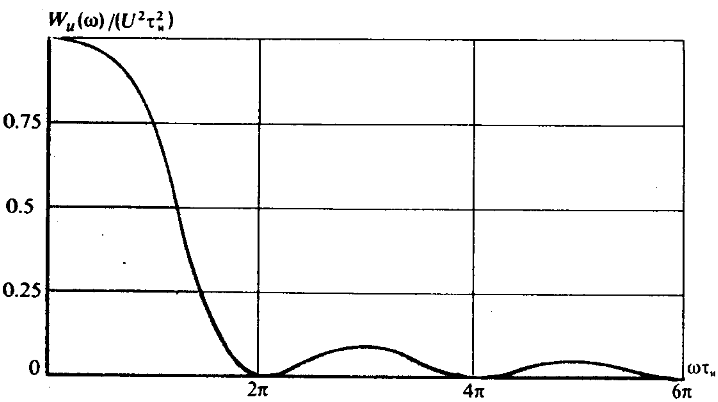



Рис. 3.2. Нормированная величина энергетического спектра прямоугольного видеоимпульса в зависимости от безразмерной частотной переменной $\omega\tau_и$

Рисунок наглядно показывает, что энергетический спектр данного сигнала имеет наибольшую величину в области низких частот. С ростом частоты вклад от соответствующих спектральных составляющих имеет немонотонный, колеблющийся характер, однако общая тенденция — уменьшение энергетического спектра по закону обратного квадрата:

$$W_u(\omega) = O(1/\omega^2) \text{ при } \omega \to \infty$$

(а не обратно пропорционально первой степени частоты, как это имеет место для обычной спектральной плотности рассматриваемого сигнала).

Формула (3.11) позволяет проверить формулу Рэлея. Прежде всего во временной области без труда находим энергию видеоимпульса (см. гл. I):

$$E_u = U^2\tau_и. \tag{3.12}$$

Для того чтобы определить энергию в частотной области, необходимо вычислить интеграл:

$$E_u = \frac{U^2\tau_и^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau_и}{2}}{\frac{\omega^2\tau_и^2}{4}} d\omega. \tag{3.13}$$

Несложная замена переменной сразу приводит к формуле (3.12).

**Распределение энергии в спектре прямоугольного видеоимпульса.** Интересно и для многих прикладных задач важно знать, какая доля общей энергии содержится в пределах одного, двух, трех и т. д. лепестков спектральной диаграммы, изображенной на рис. 3.2. Обозначим символом $E_{(k)}$ энергию прямоугольного видеоимпульса, которая заключена в $k$ последовательных лепестках. По формуле Рэлея.

$$E_{(k)} = \frac{2}{\pi} U^2\tau_и \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi. \tag{3.14}$$

Данный интеграл, к сожалению, не вычисляется аналитически, но может быть легко найден численным интегрированием. Ниже приводится таблица, в которую сведены результаты расчета относительной доли энергии в зависимости от числа учитываемых лепестков.

Таблица 3.1

| $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $E_{(k)}/E$ | 0.902 | 0.950 | 0.973 |

Итак, если прямоугольный видеоимпульс подать на идеальный фильтр нижних частот, равномерно и без ослабления пропускающий все частоты от 0 до $2\pi/\tau_и$ 1/с (граница первого лепестка), то на выходе будет получен сигнал, энергия которого составит 90.2% от энергии колебания на входе.

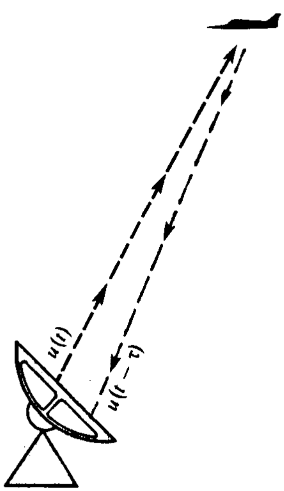
Уже говорилось о том, что такой подход к оценке реальной ширины спектра сигнала не раскрывает всей картины явления. Так, на данном этапе неизвестна степень искажения формы сигнала. Однако там, где сведения о форме колебания отступают на второй план, а величина энергии приобретает первостепенное значение (изучая статистическую радиотехнику, мы неоднократно встретимся с такой ситуацией), энергетическая оценка ширины спектра становится особенно целесообразной.

▲ решите задачу 5

Например, из табл. 3.1 видно, что переход от $k=1$ к значению $k=2$, т. е. двукратное расширение полосы частот того устройства, через которое проходит видеоимпульс, увеличивает энергию полезного сигнала всего лишь на 4,8%. Наряду с этим ясно, что помехи, если таковые имеются, могут увеличить от этого свою энергию, например, вдвое, если их энергетический спектр имеет равномерный характер в интересующем нас диапазоне частот. Поэтому неоправданное расширение полосы пропускания нежелательно.

## 3.2 Корреляционный анализ сигналов

На ранних этапах развития радиотехники вопрос о выборе наилучших сигналов для тех или иных конкретных применений был не очень острым. Это обусловливалось, с одной стороны, относительной простотой структуры передаваемых сообщений (телеграфные посылки, радиовещание). С другой стороны, практическая реализация сигналов сложной формы в комплексе со всем оборудованием для их кодирования, модуляции и обратного преобразования в сообщение оказывалась трудно осуществимой.




В настоящее время ситуация в корне изменилась. В современных радиоэлектронных комплексах выбор используемых сигналов диктуется прежде всего не техническими удобствами их генерирования, преобразования и приема, а возможностью на базе этих сигналов оптимально, т. е. с наибольшей эффективностью, решать задачи, предусмотренные при проектировании системы. Для того чтобы понять, как возникает потребность в сигналах со специально выбранными свойствами, рассмотрим следующий пример.

**Сравнение сигналов, сдвинутых во времени.** Обратимся к весьма упрощенной идее работы импульсного радиолокатора, предназначенного для измерения дальности до цели. Здесь информация об объекте измерения заложена в величине $\tau$ — задержке по времени между зондирующим и принятым сигналами. Характерно, что формы зондирующего сигнала $u(t)$ и принятого сигнала $u(t-\tau)$ одинаковы при любых задержках.

Структурная схема устройства обработки радиолокационных сигналов, предназначенного для измерения дальности, может выглядеть так, как это изображено на рис. 3.3.

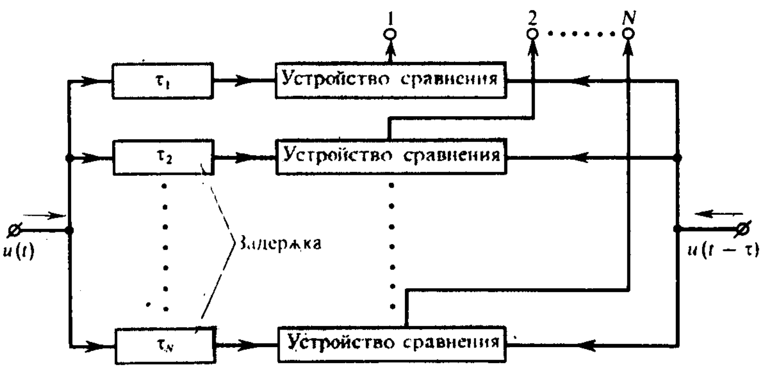



Рис. 3.3. Устройство для измерения времени задержки

Система состоит из набора элементов, осуществляющих задержку «эталонного» передаваемого сигнала на некоторые фиксированные отрезки времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$. Задержанные сигналы вместе с принятым сигналом подаются на устройства сравнения, действующие в соответствии с принципом: сигнал на их выходе появляется лишь при условии, что оба входных колебания являются «копиями» друг друга. Зная номер того канала, в котором происходит указанное событие, можно измерить задержку, а значит, и дальность до цели.

Подобное устройство будет работать тем точнее, чем в большей степени разнятся друг от друга сигнал и его «копия», смещенная во времени. Действительно, если такое отличие невелико, то можно ожидать, например, неоднозначности отсчета, когда сигналы будут появляться одновременно на выходе нескольких соседних схем сравнения.

Мы получили, таким образом, качественное представление о том, какие сигналы можно считать «хорошими» для данного применения.

Перейдем теперь к точной математической формулировке поставленной проблемы и покажем, что весь этот круг вопросов имеет самое непосредственное отношение к теории энергетических спектров сигналов.

**Функция автокорреляции сигнала.** Для количественного определения степени отличия сигнала $u(t)$ и его сдвинутой копии $u(t-\tau)$ принято вводить функцию автокорреляции $K_u(\tau)$, равную скалярному произведению этих двух сигналов:

$$\boxed{K_u(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\,u(t-\tau)\,\mathrm{d}t.} \tag{3.15}$$

В дальнейшем будем предполагать, что исследуемый сигнал имеет локализованный во времени импульсный характер, так что интеграл вида (3.15) заведомо существует.

Непосредственно из (3.15) следует, что при $\tau=0$ функция автокорреляции становится равной энергии сигнала:

$$K_u(0)=E_u. \tag{3.16}$$

К числу простейших свойств функции автокорреляции можно отнести ее *четность*:

■ свойства функции автокорреляции

$$K_u(\tau)=K_u(-\tau). \tag{3.17}$$

Действительно, если в (3.15) сделать замену переменных $x=t-\tau$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\,u(t-\tau)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x+\tau)\,u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Наконец, важное свойство функции автокорреляции состоит в следующем: *при любом значении временно́го сдвига* $\tau$ *модуль функции автокорреляции не превосходит энергии сигнала:*

$$|\,K_u(\tau)\,|\leqslant K_u(0)=E_u. \tag{3.18}$$

Доказательство этого факта основывается на прямом использовании неравенства Коши — Буняковского, с которым мы познакомились в гл. 1:

$$|\,(u,\,u_\tau)\,|\leqslant \|\,u\,\|\cdot\|\,u_\tau\,\|=E_u. \tag{3.19}$$

Итак, функция автокорреляции $K_u(\tau)$ представляется симметричной кривой с центральным максимумом, который всегда положителен. При этом в зависимости от вида сигнала $u(t)$ функция автокорреляции может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

**Пример 3.3.** *Функция автокорреляции прямоугольного видеоимпульса.*

На рис. 3.4, *а* изображен прямоугольный видеоимпульс с амплитудой $U$ и длительностью $\tau_и$. Здесь же представлена его «копия», сдвинутая

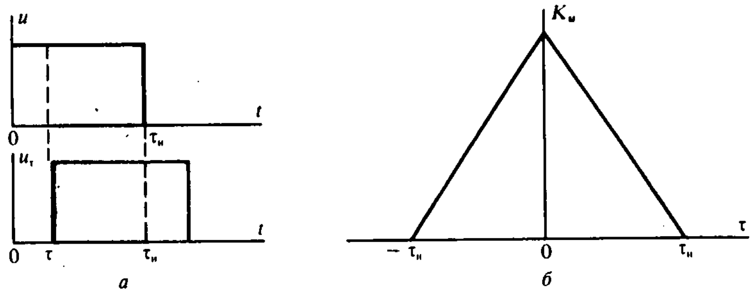



Рис. 3.4. Нахождение функции автокорреляции прямоугольного видеоимпульса

во времени в сторону запаздывания на $\tau$ секунд. Интеграл (3.15) вычисляют здесь элементарно, исходя из графического построения. Действительно, произведение $u(t)u(t-\tau)$ отлично от нуля лишь в пределах того отрезка времени, когда наблюдается наложение сигналов. Из рис. 3.4, *а* видно, что этот временной интервал равен $\tau_и - |\tau|$, если сдвиг не превосходит длительности импульса. Для исследуемого сигнала

$$K_u(\tau)=\begin{cases} U^2\tau_и\left(1-\dfrac{|\tau|}{\tau_и}\right), & |\tau|<\tau_и, \\ 0, & |\tau|>\tau_и. \end{cases} \tag{3.20}$$

График такой функции — треугольник, изображенный на рис. 3.4, *б*. Ширина основания треугольника в два раза превосходит длительность импульса.

**Пример 3.4.** *Функция автокорреляции прямоугольного радиоимпульса.* Будем рассматривать радиосигнал вида

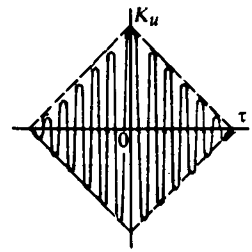
$$u(t)=\begin{cases} 0, & (t<-\tau_и/2), \\ U\cos\omega t, & (-\tau_и/2<t<\tau_и/2), \\ 0, & (t>\tau_и/2). \end{cases}$$

Зная заранее, что функция автокорреляции обладает свойством четности, вычислим интеграл (3.15), полагая, что $0<\tau<\tau_и$. При этом

$$K_u(\tau)=U^2\int\limits_{-\frac{\tau_и}{2}+\tau}^{\frac{\tau_и}{2}}\cos\omega t\cos\omega(t-\tau)\,dt=\frac{U^2}{2}(\tau_и-\tau)\cos\omega\tau+$$

$$+\frac{U^2}{2}\int\limits_{-\frac{\tau_и}{2}+\tau}^{\frac{\tau_и}{2}}\cos(2\omega t-\tau)\,dt.$$

Последний тригонометрический интеграл легко находится, и мы получаем




$$K_и(\tau) = \frac{U^2}{2}(\tau_и - |\tau|)\left[\cos\omega\tau + \frac{\sin 2\omega(\tau_и - |\tau|)}{2\omega(\tau_и - |\tau|)}\right]. \qquad (3.21)$$

Естественно, что при $\tau = 0$ величина $K_и(0)$ становится равной энергии этого импульса (см. пример 1.9). Формула (3.21) описывает функцию автокорреляции прямоугольного радиоимпульса при всех сдвигах $\tau$, лежащих в интервале $-\tau_и < \tau < \tau_и$. Очевидно, что если абсолютная величина сдвига превосходит длительность импульса, то значение функции автокорреляции будет тождественно обращаться в нуль.

График функции автокорреляции рассматриваемого импульса имеет характерный осциллирующий вид.

**Пример 3.5.** *Функция автокорреляции последовательности прямоугольных видеоимпульсов.*

В радиолокации широко используются сигналы, представляющие собой «пачки» из одинаковых по форме импульсов, следующих друг за другом через одинаковый интервал времени. Задача обнаружения такой «пачки», а также измерения ее параметров, например положения во времени, решается путем создания устройств, которые аппаратурным образом реализуют алгоритм вычисления функции автокорреляции такого сигнала.

В качестве примера на рис. 3.5, *а* изображена пачка, состоящая из трех одинаковых видеоимпульсов прямоугольной формы. Здесь же представлена ее функция автокорреляции, вычисленная по формуле (3.15) (рис. 3.5, *б*).

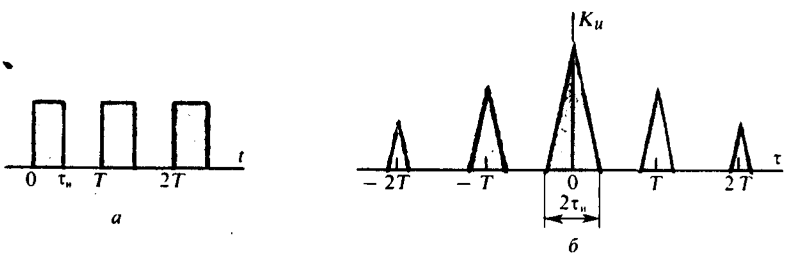



Рис. 3.5. Функция автокорреляции для пачки из трех одинаковых видеоимпульсов:
*а* — пачка трех видеоимпульсов; *б* — функция автокорреляции

Подробности вычисления не приводятся, поскольку способ расчета полностью повторяет тот, который был использован в примере 3.3.

Хорошо видно, что максимум функции автокорреляции достигается при $\tau = 0$. Однако если задержка $\tau$ оказывается кратной периоду последовательности (при $\tau = \pm T$, $\pm 2T$ в нашем случае), наблюдаются побочные лепестки функции автокорреляции, сравнимые по высоте с главным лепестком. Поэтому можно говорить об известном несовершенстве корреляционной структуры данного сигнала.

**Функция автокорреляции неограниченно протяженного сигнала.** Если требуется рассматривать неограниченно протяженные во времени периодические последовательности, то подход к изучению корреляционных свойств сигналов должен быть несколько видоизменен. Будем считать, что такая последовательность получается из некоторого локализованного во времени, т. е. импульсного, сигнала, когда длительность последнего $\tau_и$ стремится к бесконечности.

▲ решите задачу 8

Для того чтобы избежать расходимости получаемых выражений, определим новую функцию автокорреляции как *среднее значение* скалярного произведения сигнала и его копии:

$$\widetilde{K}_u(\tau) = \lim_{\tau_и \to \infty} \frac{1}{\tau_и} \int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} u(t)\, u(t-\tau)\, dt. \qquad (3.22)$$

При таком подходе функция автокорреляции $\widetilde{K}_u$ становится равной средней взаимной мощности этих двух сигналов.

Например, желая найти такую функцию автокорреляции для неограниченной во времени косинусоиды

$$u(t) = U \cos \omega t, \quad -\infty < t < \infty,$$

можно воспользоваться формулой (3.21), полученной для радиоимпульса длительностью $\tau_и$, а затем перейти к пределу при $\tau_и \to \infty$, учитывая определение (3.22). В результате получим

$$\widetilde{K}_u(\tau) = \frac{U^2}{2} \cos \omega\tau. \qquad (3.23)$$

Эта функция автокорреляции сама является периодической; ее значение при $\tau = 0$, равное $U^2/2$, представляет собой среднюю (эффективную) мощность, которую данный сигнал будет выделять на активной нагрузке величиной в 1 Ом.

**Связь между энергетическим спектром сигнала и его автокорреляционной функцией.** При изучении материала настоящей главы читатель может подумать, что методы корреляционного анализа выступают как некоторые особые приемы, не имеющие прямой связи с принципами спектральных разложений. Однако это совсем не так. Легко показать, что существует тесная связь между функцией автокорреляции и энергетическим спектром сигнала.

Действительно, в соответствии с (3.15) функция автокорреляции есть скалярное произведение:

$$K_u(\tau) = (u, u_\tau).$$

Здесь символом $u_\tau$ обозначена смещенная во времени копия сигнала $u(t-\tau)$.

Если теперь обратиться к обобщенной формуле Рэлея (3.4), то можно записать равенство

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega)\, S^*_{u_\tau}(\omega)\,d\omega.$$

Спектральная плотность смещенного во времени сигнала $S_{u_\tau} = S_u \exp(-j\omega\tau)$, и поэтому

$$S^*_{u_\tau} = S^*_u \exp(j\omega\tau).$$

Таким образом, приходим к важному результату:

$$\boxed{K_u(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_u|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.} \tag{3.24}$$

**связь между функцией автокорреляции и энергетическим спектром**

Квадрат модуля спектральной плотности, как известно, представляет энергетический спектр сигнала. Итак, энергетический спектр и функция автокорреляции связаны преобразованием Фурье:

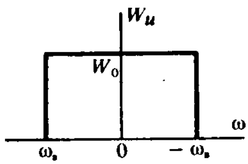
$$K_u(\tau) \leftrightarrow |S_u(\omega)|^2 = W_u(\omega). \tag{3.25}$$

Из (3.24) следует и обратное соотношение:

$$\boxed{|S_u(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_u(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau.} \tag{3.26}$$

Выражения принципиально важны по двум причинам. Во-первых, они дают возможность оценивать корреляционные свойства сигналов, исходя из распределения их энергии по спектру. Принцип неопределенности (см. гл. 2) указывает на то, что чем в более широкой полосе частот распределены спектральные компоненты сигнала, тем у́же основной лепесток автокорреляционной функции и тем совершеннее сигнал с точки зрения возможности точного измерения момента его возникновения.

Во-вторых, формулы (3.24) и (3.26) указывают путь экспериментального определения энергетического спектра. Часто удобнее вначале получить автокорреляционную функцию, а затем, используя преобразование Фурье, найти энергетический спектр сигнала. Такой прием получил широкое распространение при исследовании свойств сигналов с помощью быстродействующих ЭВМ в реальном масштабе времени.




**Пример 3.6.** *Функция автокорреляции сигнала с равномерным и ограниченным по частоте энергетическим спектром.*

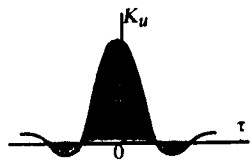
Пусть сигнал $u(t)$ характеризуется энергетическим спектром вида

$$W_u(\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\omega_в,\\ W_0, & -\omega_в<\omega<\omega_в,\\ 0, & \omega>\omega_в.\end{cases}$$

По формуле (3.24) находим функцию автокорреляции:

$$K_u(\tau)=\frac{W_0}{2\pi}\int\limits_{-\omega_в}^{\omega_в} e^{j\omega\tau}\,d\omega=\frac{W_0}{\pi}\int\limits_{0}^{\omega_в}\cos\omega\tau\,d\omega=$$

$$=\frac{W_0\omega_в}{\pi}\,\frac{\sin\omega_в\tau}{\omega_в\tau}. \qquad (3.27)$$




Таким образом, автокорреляционная функция рассматриваемого сигнала имеет лепестковый вид.

● интервал корреляции

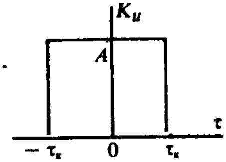
Часто вводят удобный числовой параметр — *интервал корреляции* $\tau_к$, представляющий собой оценку ширины основного лепестка автокорреляционной функции. Легко видеть, что в рассматриваемом случае величина $\tau_к$ должна находиться из соотношения $\omega_в\tau_к=\pi$, откуда следует, что

$$\tau_к=\pi/\omega_в=1/(2f_в) \qquad (3.28)$$

оказывается тем меньше, чем выше верхняя граничная частота энергетического спектра сигнала.

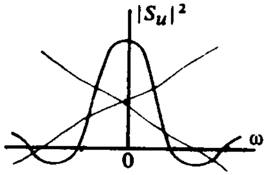
**Ограничения, накладываемые на вид автокорреляционной функции сигнала.** Связь между автокорреляционной функцией и энергетическим спектром представляет возможность установить интересный и на первый взгляд совсем не очевидный критерий существования сигнала с заданными корреляционными свойствами. Дело в том, что энергетический спектр $W_u(\omega)$ любого сигнала, по определению, должен быть положительным (см., например, (3.25)). Данное условие будет выполняться далеко не при любом выборе функции автокорреляции. Например, если взять

▲ решите задачи 6 и 7




$$K_u(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<-\tau_к,\\ A, & -\tau_к<\tau<\tau_к,\\ 0, & \tau>\tau_к\end{cases}$$

и вычислить соответствующее преобразование Фурье, то




$$|S_u|^2 = 2A\int_0^{\tau_к} \cos\omega\tau d\tau = \frac{2A}{\omega}\sin\omega\tau_к$$

Эта знакопеременная функция не может представлять собой энергетический спектр какого-либо сигнала.

## 3.3 Функция автокорреляции дискретных сигналов

Изучая пример функции автокорреляции пачки прямоугольных видеоимпульсов, читатель, безусловно, обратил внимание на то, что соответствующий график имел специфический лепестковый вид. С практической точки зрения, имея в виду использование функции автокорреляции для решения задачи обнаружения такого сигнала или измерения его параметров, несущественно, что отдельные лепестки имели треугольную форму. Важен лишь их относительный уровень по сравнению с центральным максимумом при $\tau=0$.

Наша ближайшая задача — изменить определение автокорреляционной функции таким образом, чтобы извлечь из нее всю полезную информацию, абстрагируясь от второстепенных подробностей. Основной для этого должна послужить идея математической модели дискретного сигнала (см. гл. 1).

**Описание сложных сигналов с дискретной структурой.** Пачка одинаковых прямоугольных видеоимпульсов — простейший представитель класса сложных сигналов, построенных в соответствии со следующим принципом. Весь интервал времени существования сигнала разделен на целое число $M>1$ равных промежутков, называемых *позициями*. На каждой из таких позиций сигнал может находиться в одном из двух физических состояний.

Рис. 3.6 поясняет различные способы формирования многопозиционного сложного сигнала. Для определенности здесь и в

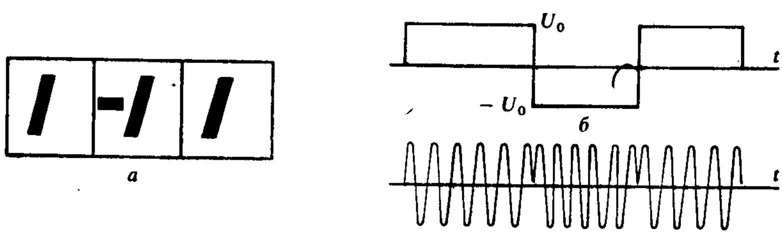



Рис. 3.6. Трехпозиционный дискретный сигнал и его реализация за счет изменения амплитуды и фазы:

*а* — символическое изображение; *б* — амплитудное кодирование; *в* — фазовое кодирование дальнейшем положено, что возможные состояния сигнала отвечают числам $+1$ и $-1$.

Из рисунка следует, что физический облик дискретного сигнала может быть весьма различным. В первом случае (*б*) символ $+1$ соответствует положительному значению $+U_0$ высоты видеоимпульса, передаваемого на соответствующей позиции; символу — 1 отвечает отрицательное значение $-U_0$. Говорят, что при этом реализован *амплитудный принцип кодирования* дискретного сигнала.

**принципы кодирования дискретных сигналов**

Во втором случае (*в*) происходит *фазовое кодирование* сигнала. Для передачи символа $+1$ на соответствующей позиции генерируется отрезок гармонического сигнала с некоторой начальной фазой, например нулевой. Чтобы отобразить символ —1, используется отрезок синусоиды такой же длительности и с той же частотой, но его начальная фаза получает дополнительный сдвиг на 180°.

Несмотря на очевидное различие осциллограмм этих двух сигналов, между ними, в сущности, можно установить полное тождество с точки зрения их математических моделей. Действительно, модель любого такого сигнала — это последовательность

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\},$$

в которой каждый символ $u_j$ принимает одно из двух возможных значений $\pm 1$. Из соображений удобства договоримся в дальнейшем дополнять такую последовательность нулями на всех позициях, где сигнал не определен. При этом, например, развернутая форма записи дискретного сигнала $\{1, 1, -1, 1\}$ будет иметь вид

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ {-1}\ 1\ 0\ 0\ \ldots$$

Важнейшая операция, выполняемая при обработке дискретных сигналов, состоит в сдвиге такого сигнала на некоторое число позиций относительно исходного положения. Ниже представлен исходный сигнал (первая строка) и его копии, сдвинутые на 1, 2 и 3 позиции в сторону запаздывания:

...0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0...

...0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0...

...0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0...

...0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0...

**Дискретная функция автокорреляции.** Постараемся так обобщить формулу (3.15), чтобы иметь возможность вычислить дискретный аналог автокорреляционной функции применительно к сигналам рассматриваемого класса. Ясно, что операция интегрирования должна быть здесь заменена суммированием, а вместо переменной $\tau$ следует использовать целое число $n$, положительное или отрицательное, указывающее, на сколько позиций копия сдвинута относительно исходного сигнала. Принимая во внимание соглашение о том, что в «пустых» позициях математическая модель сигнала содержит нули, запишем дискретную функцию автокорреляции в виде

Данная формула применима к дискретному сигналу самого общего вида

$$\boxed{\hat{\hat{K}}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}.} \tag{3.29}$$

Эта функция целочисленного аргумента $n$, переносящая на дискретный случай основные идеи скалярного произведения двух сигналов, естественно, обладает многими уже известными свойствами скалярного произведения и обычной автокорреляционной функции. Так, легко видеть, что дискретная функция автокорреляции четна:

$$\hat{\hat{K}}_u(n) = \hat{\hat{K}}_u(-n). \tag{3.30}$$

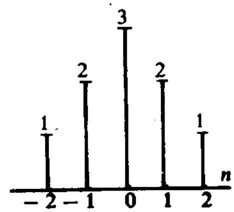
При нулевом сдвиге функция автокорреляции превращается в энергию дискретного сигнала:

$$\hat{\hat{K}}_u(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^2 = \hat{E}_u. \tag{3.31}$$

**Некоторые примеры.** В качестве иллюстрации сказанного вычислим дискретную функцию автокорреляции трехпозиционного сигнала с одинаковыми значениями на каждой позиции: $u = \{1, 1, 1\}$. Выпишем этот сигнал вместе со своими копиями, сдвинутыми на 1, 2 и 3 позиции:

$$\begin{array}{l}
\ldots 0\,0\,0\;\;1\,1\,1\;\;0\,0\,0 \ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\;\;1\,1\,1\;\;0\,0 \ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,0\;\;1\,1\,1\;\;0 \ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,0\,0\;\;1\,1\,1 \ldots
\end{array}$$

Мы видим, что уже при $n=3$ сигнал и копия перестают накладываться друг на друга, так что произведения, входящие в (3.29), становятся равными нулю при $n \geqslant 3$. Вычисляя суммы, получаем:




$$\hat{\hat{K}}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\hat{\hat{K}}_u(1) = 1 + 1 = 2,$$

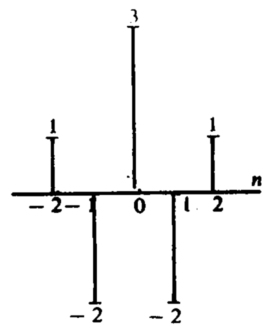
$$\hat{\hat{K}}_u(2) = 1.$$

Боковые лепестки автокорреляционной функции здесь линейно спадают с ростом номера $n$, подобно тому, как это было найдено для случая автокорреляционной функции трех аналоговых видеоимпульсов. Ясно, что одна и таже дискретная функция автокорреляции будет отвечать разнообразным последовательностям из любых аналоговых сигналов при условии, что интервалы времени между импульсами одинаковы.

Рассмотрим теперь дискретный сигнал, отличающийся от предыдущего знаком отсчета во второй позиции:

$$u = \{1, \ -1, \ 1\}.$$

Поступая аналогичным образом, вычислим для этого сигнала значения дискретной автокорреляционной функции:




$$\hat{\hat{K}}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\hat{\hat{K}}_u(1) = -1 - 1 = -2,$$

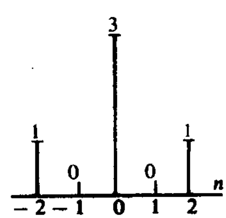
$$\hat{\hat{K}}_u(2) = 1.$$

Мы обнаруживаем, что первый боковой лепесток здесь изменяет свой знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине.

Наконец, рассмотрим трехпозиционный дискретный сигнал со следующей математической моделью:

$$u = \{1, \ 1, \ -1\}.$$

Его автокорреляционная функция такова:




$$\hat{\hat{K}}_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\hat{\hat{K}}_u(1) = 1 - 1 = 0,$$

$$\hat{\hat{K}}_u(2) = 1.$$

Безусловно, что из всех трех изученных дискретных сигналов именно третий случай является наиболее благоприятным с точки зрения корреляционных свойств, поскольку при этом реализуется наименьший уровень боковых лепестков автокорреляционной функции.

**Сигналы Баркера.** Поиск дискретных сигналов с наилучшей структурой автокорреляционной функции явился в 50-е и 60-е годы объектом интенсивных исследований специалистов в области теоретической радиотехники и прикладной математики [21]. Были найдены целые классы сигналов с весьма совершенными корреляционными свойствами. Среди этих сигналов наибольшую известность получили так называемые сигналы Баркера. Эти сигналы обладают следующим уникальным свойством: независимо от числа позиций $M$ значения их функции автокорреляции, вычисляемые по формуле (3.29), при всех $n \neq 0$ не превосходят единицы. В то же время энергия этих сигналов, т. е. величина $\hat{K}_u(0)$, численно равна $M$.

Оказалось, что сигналы Баркера можно реализовать лишь при числе позиций $M=2$, 3, 4, 5, 7, 11 и 13. Случай $M=2$ является тривиальным. Сигнал Баркера при $M=3$ только что был исследован нами в конце предыдущего раздела. Математические модели сигналов Баркера и отвечающие им автокорреляционные функции приведены в табл. 3.2.

При М — 4 возможны сигналы двух видов

Таблица 3.2

**Модели сигналов Баркера**

| $M$ | Модель сигнала | Функция автокорреляции |
|---|---|---|
| 3 | 1, 1, —1 | 3, 0, —1 |
| 4 | 1, 1, 1, —1 | 4, 1, 0, —1 |
| | 1, 1, —1, 1 | 4, —1, 0, 1 |
| 5 | 1, 1, 1, —1, 1 | 5, 0, 1, 0, 1 |
| 7 | 1, 1, 1, —1, —1, 1, —1 | 7, 0, —1, 0, —1, 0, —1 |
| 11 | 1, 1, 1, —1, —1, —1, 1, —1, —1, 1, —1 | 11, 0, —1, 0, —1, 0, —1, 0, —1, 0, —1 |
| 13 | 1, 1, 1, 1, 1, —1, —1, 1, 1, —1, 1, —1, 1 | 13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 |

Для иллюстрации на рис. 3.7 приведен вид наиболее часто используемого 13-позиционного сигнала Баркера при двух способах кодирования, а также графическое представление его функции автокорреляции.

▲ решите задачу 9

Исследования показали, что не существует сигналов Баркера с нечетным числом позиций, большим 13. Однако до сих пор остается неизвестным, можно ли построить сигнал Баркера с четным $M$, большим четырех.

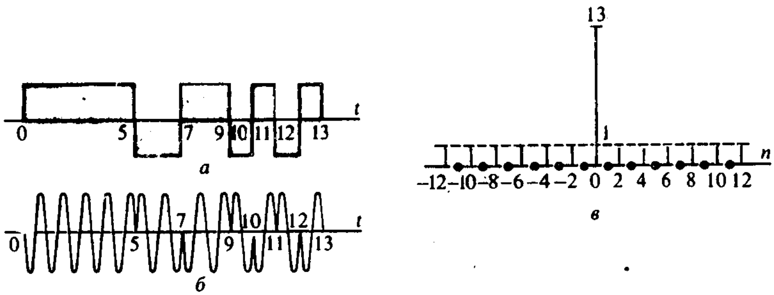



Рис. 3.7. Сигнал Баркера при $M=13$:

*а* — амплитудное кодирование; *б* — фазовое кодирование; *в* — функция автокорреляции

Отметим в заключение, что исследование некоторых свойств дискретных сигналов и их автокорреляционных функций, проведенное в этой главе, имеет предварительный, вводный характер. Систематическое изучение этого круга вопросов будет предпринято в гл. 15.

## 3.4 Взаимная функция корреляции двух сигналов

В некоторых теоретических и прикладных задачах радиотехники удобно ввести особую характеристику системы двух сигналов — их *взаимную корреляционную функцию*, которая единым образом описывает как различие в форме сигналов, так и их взаимное расположение на оси времени.

**Принцип определения взаимной функции корреляции.** Обобщая формулу (3.15), назовем взаимной функцией корреляции двух вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ и скалярное произведение следующего вида:

$$K_{uv}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)v(t-\tau)\,dt. \tag{3.32}$$

Целесообразность подобной интегральной характеристики сигналов видна из следующего примера. Пусть, например, сигналы $u(t)$ и $v(t)$ в исходном состоянии ортогональны, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(t)v(t)\,dt=0.$$

При прохождении этих сигналов через некоторые устройства возможна ситуация, когда сигнал $u(t)$ будет опережать $v(t)$ или, наоборот, запаздывать на некоторое время $\tau$. Ясно, что взаимная функция корреляции $K_{uv}(\tau)$ служит мерой «устойчивости» ортогонального состояния относительно сдвига сигналов во времени.

**Некоторые свойства взаимной функции корреляции.** Если в формуле (3.32) произвести замену переменной интегрирования, введя $\xi = t - \tau$, так что $dt = d\xi$, то, очевидно, возможна и такая запись:

$$K_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi + \tau) v(\xi) \, d\xi. \tag{3.33}$$

Причина, согласно которой результаты расчета по формулам (3.32) и (3.33) совпадают, ясна: одно и то же взаимное положение сигналов $u(t)$ и $v(t)$ будет достигнуто как при сдвиге сигнала $v(t)$ в сторону запаздывания, так и при сдвиге сигнала $u(t)$ в сторону опережения на одно и то же время $\tau$. Поэтому

$$K_{uv}(\tau) = K_{vu}(-\tau). \tag{3.34}$$

В отличие от автокорреляционной функции одного сигнала взаимная корреляционная функция, описывающая свойства системы двух сигналов, не является четной функцией аргумента $\tau$:

$$K_{uv}(\tau) \neq K_{uv}(-\tau).$$

Рассматривая сигналы с конечной энергией, можно обнаружить факт ограниченности взаимной корреляционной функции. Это утверждение следует из неравенства Коши — Буняковского:

$$|K_{uv}(\tau)| = |(u, v_\tau)| < \|u\| \cdot \|v_\tau\|,$$

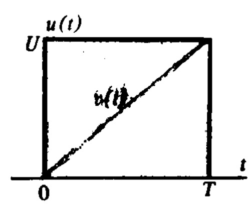
откуда

$$|K_{uv}(\tau)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \tag{3.35}$$

поскольку сдвиг сигнала во времени не влияет на величину его нормы. Следует обратить внимание на то, что при $\tau = 0$ функция взаимной корреляции вовсе не обязана достигать абсолютного максимума.

---

**Пример 3.7.** *Вычисление функции $K_{uv}(\tau)$. Сигнал $u(t)$ — прямоугольный, а сигнал $v(t)$ — треугольный видеоимпульс. Их амплитуды $U$ и длительности $T$ одинаковы; в исходном состоянии (при отсутствии задержки) сигналы существуют на общем интервале времени* $[0, T]$.

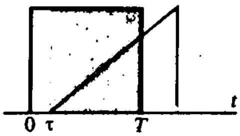



При $(0 < t < T)$ рассматриваемые сигналы описываются так:

$$u(t) = U; \quad v(t) = Ut/T.$$

Если $\tau > 0$, т. е. сигнал $v(t)$ задержан во времени относительно $u(t)$, то

$$K_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_{\tau}^{T} (t - \tau) \, dt.$$




Случай $\tau > 0$

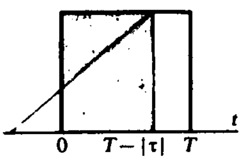
Вводя безразмерный параметр $\eta = \tau/T$ и проводя элементарные выкладки, получаем

$$K_{uv}(\tau) = U^2 T \left[\frac{1}{2} - \eta + \frac{1}{2}\eta^2\right] \text{ при } \tau > 0. \qquad (3.36)$$

Если же $\tau < 0$, т. е. треугольный импульс опережает прямоугольный, то

$$K_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int\limits_0^{T-|\tau|} (t - |\tau|)\,dt = \frac{U^2 T}{2}(1 - \eta^2). \qquad (3.37)$$

Функция взаимной корреляции, вычисленная по формулам (3.36) и (3.37), изображена на рис. 3.8.




Случай $\tau < 0$

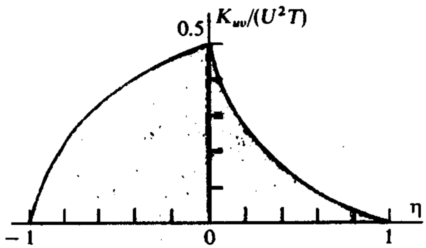



Рис. 3.8. График функции взаимной корреляции прямоугольного и треугольного импульсов

Асимметрия графика вызвана тем, что площадь «перекрытия» двух рассматриваемых импульсов изменяется с разной скоростью в зависимости от направления сдвига.

**Связь с взаимной спектральной плотностью.** Выразим взаимную функцию корреляции двух сигналов через их спектральные характеристики. Методика рассуждений полностью повторяет ту, которая применялась ранее при спектральном представлении автокорреляционной функции одного сигнала. На основании обобщенной формулы Рэлея

$$K_{uv}(\tau) = (u, v_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) S^*_{v_\tau}(\omega)\,d\omega,$$

и поскольку спектр смещенного во времени сигнала

$$S_{v_\tau}(\omega) = S_v(\omega)\,e^{-j\omega\tau},$$

то

$$K_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) S^*_v(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega. \qquad (3.38)$$

Учитывая, что величина

$$W_{uv}(\omega) = S_u(\omega) S_v^*(\omega) \qquad (3.39)$$

есть взаимная спектральная плотность сигналов $u(t)$ и $v(t)$, определенная в бесконечном интервале частот $-\infty < \omega < \infty$, приходим к выводу: *взаимная функция корреляции и взаимный энергетический спектр двух сигналов связаны парой преобразований Фурье.*

Интересно отметить, что взаимный энергетический спектр в отличие от энергетического спектра одиночного сигнала содержит некоторую информацию о фазе спектральных компонент на различных частотах. Так, если спектры сигналов

$$S_u(\omega) = |S_u(\omega)| e^{\psi_u(\omega)},$$

$$S_v(\omega) = |S_v(\omega)| e^{j\psi_v(\omega)},$$

то на основании (3.39) аргумент взаимного энергетического спектра определяется разностью аргументов спектральных плотностей сигналов:

$$W_{uv}(\omega) = |S_u(\omega)| \cdot |S_v(\omega)| e^{j(\psi_u(\omega) - \psi_v(\omega))}.$$

**Обобщение на случай дискретных сигналов.** Пусть сигналы $u(t)$ и $v(t)$ заданы в дискретной форме как совокупности отсчетов

$$u = \{\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\},$$

$$v = \{\ldots, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \ldots\},$$

следующих во времени с одинаковыми интервалами $T$. По аналогии с автокорреляционной функцией одиночного сигнала определим взаимную функцию корреляции двух дискретных сигналов по формуле

взаимная функция корреляции дискретных сигналов

$$\boxed{\hat{\hat{K}}_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}} \qquad (3.40)$$

где $n$ — целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Продемонстрируем способ вычисления этой функции на примере двух четырехпозиционных сигналов Баркера:

$$u = \{1, 1, 1, -1\},$$

$$v = \{1, 1, -1, 1\}.$$

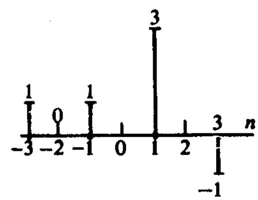
Если $n > 0$, то сигнал $v$ запаздывает относительно сигнала $u$. Подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе, составим таблицу, содержащую сигнал $u$ и последовательность сдвинутых копий сигнала $v$:

$$\begin{array}{l}
\ldots 0\,0\,0\,0\,1\;1\;1\;-1\;\;0\;\;0\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,1\;1\;-1\;\;1\;\;0\;\;0\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,0\,1\;\;1\;-1\;\;1\;\;0\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,0\,0\;\;1\;\;1\;-1\;\;1\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\,0\,0\,0\;\;0\;\;1\;\;1\;-1\;1\,0\,0\ldots
\end{array}$$

Вычисляя по формуле (3.40), получаем

$$\hat{\hat{K}}_{uv}(0) = 0,\quad \hat{\hat{K}}_{uv}(1) = 3,\quad \hat{\hat{K}}_{uv}(2) = 0,\quad \hat{\hat{K}}_{uv}(3) = -1.$$

Взаимная функция корреляции двух сигналов Баркера




Аналогично строим таблицу, отражающую сдвиги сигнала $v(t)$ в сторону опережения:

$$\begin{array}{l}
\ldots 0\,0\,0\;\;0\;\;1\;\;1\;\;1\;-1\;0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\;\;0\;\;1\;\;1\;-1\;\;1\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,0\;\;1\;\;1\;-1\;\;1\;\;0\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,0\,1\;\;1\;-1\;\;1\;\;0\;\;0\,0\,0\,0\ldots \\
\ldots 0\,1\,1\;-1\;\;1\;\;0\;\;0\;\;0\,0\,0\,0\ldots
\end{array}$$

и находим:

$$\hat{\hat{K}}_{uv}(-1) = 1,\quad \hat{\hat{K}}_{uv}(-2) = 0,\quad \hat{\hat{K}}_{uv}(-3) = 1.$$

Диаграмма, представляющая функцию взаимной корреляции этих двух сигналов, имеет резко несимметричный вид; максимум функции взаимной корреляции достигается при сдвиге сигнала $v(t)$ на одну позицию в сторону запаздывания.

▲ решите задачу 10

### Результаты

- ◇◇ *Скалярное произведение двух сигналов может быть выражено посредством скалярного произведения их спектральных плотностей (обобщенная формула Рэлея).*
- ◇◇ *Распределение взаимной энергии по частотам описывается взаимным энергетическим спектром двух сигналов.*
- ◇◇ *Путем фильтрации соответствующих спектральных составляющих можно добиться приближенной ортогонализации сигналов.*
- ◇◇ *Распределение энергии сигнала во всем бесконечном интервале частот устанавливает его энергетический спектр, равный квадрату модуля спектральной плотности.*
- ◇◇ *Степень сходства сигнала и его копии, смещенной во времени, описывается автокорреляционной функцией сигнала.*

◇◇ *Энергетический спектр сигнала и его функция автокорреляции взаимно связаны парой преобразований Фурье.*

◇◇ *Понятие функции автокорреляции обобщается на случай многопозиционных дискретных сигналов.*

◇◇ *Считается, что сигнал обладает хорошими корреляционными свойствами, если уровень боковых лепестков функции автокорреляции значительно меньше уровня центрального лепестка.*

◇◇ *Преобразованием Фурье от взаимного энергетического спектра является взаимная функция корреляции двух сигналов.*

## Вопросы

1. Каков физический смысл взаимного энергетического спектра двух сигналов?

2. Каким условиям должна удовлетворять функция, описывающая взаимный энергетический спектр двух сигналов, для того чтобы эти сигналы были ортогональными?

3. Может ли быть реализована ситуация, когда спектральные плотности двух сигналов перекрываются и тем не менее эти сигналы ортогональны?

4. Играет ли роль фаза спектральной плотности сигнала при определении его энергетического спектра?

5. Могут ли два нетождественных сигнала обладать одним и тем же энергетическим спектром?

6. Какая доля общей энергии прямоугольного видеоимпульса содержится в пределах первого (основного) лепестка спектральной диаграммы?

7. Каковы физические предпосылки введения понятия функции автокорреляции?

8. Перечислите основные свойства автокорреляционной функции.

9. Каким должен быть энергетический спектр сигнала, обладающего узким основным лепестком функции автокорреляции?

10. Какие ограничения можно наложить на вид функции автокорреляции физически осуществимого сигнала?

11. В чем заключается основной принцип построения многопозиционного дискретного сигнала?

12. Каким образом вводится дискретная функция автокорреляции многопозиционного сигнала?

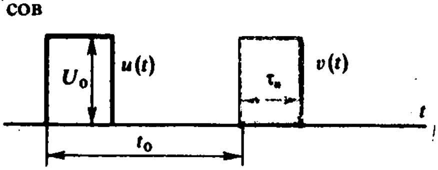
13. Назовите основное свойство сигналов Баркера. В чем заключается преимущество этих сигналов по сравнению с другими возможными многопозиционными сигналами?

14. Можно ли реализовать сигналы Баркера с произвольно большим числом позиций?

## Задачи

1. Докажите, что если $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные сигналы, то мнимая часть произведения $S_u(\omega)S_v^*(\omega)$ есть нечетная функция частоты.

2. Исследуйте взаимный энергетический спектр двух одинаковых прямоугольных видеоимпульсов




в зависимости от сдвига $t_0$ между ними.

3. Найдите формулу, описывающую энергетический спектр экспоненциального видеоимпульса вида

$u(t) = U_0 \exp(-\alpha t)\sigma(t)$.

4. Видеоимпульс гауссова типа задан функцией

$u(t) = U_0 \exp(-6 \cdot 10^{17} t^2)$.

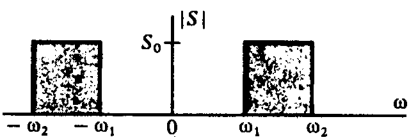
Определите, какая доля от общей энергии этого импульса заключена в полосе частот от 0 до 1.5 МГц.

5. Найдите эффективную ширину спектра экспоненциального видеоимпульса (см. задачу 3), определив ее как полосу частот, в пределах которой сосредоточено 90% энергии сигнала.

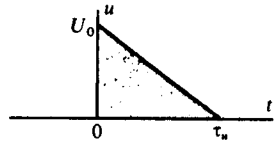
6. Докажите, что функция автокорреляции экспоненциального видеоимпульса (см. задачу 3) описывается формулой

$$K_u(\tau) = \frac{U_0^2}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

7. Найдите функцию автокорреляции сигнала $s(t)$, спектральная плотность которого вещественна и сосредоточена в пределах интервала частот $[\omega_1, \omega_2]$:




8. Вычислите функцию автокорреляции видеоимпульса треугольной формы:




9. Найдите функцию автокорреляции дискретного сигнала $\{1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\}$. Сравните полученный результат с функцией автокорреляции семипозиционного сигнала Баркера.

10. Вычислите функцию взаимной корреляции двух сигналов Баркера со значениями $M=5$ и $M=7$.

## Более сложные задания

11. Проведите экспериментальное исследование функции автокорреляции шестипозиционного дискретного сигнала, у которого значения на каждой из позиций являются случайными числами, с равной вероятностью принимающими значения $+1$ или $-1$. В качестве «датчика» случайного числа используйте результаты бросания монеты.

Изучите полученную функцию автокорреляции, сравнивая ее с той, которая характерна для сигналов Баркера.

Повторите эксперимент, взяв число позиций достаточно большим (15—20). Сделайте вывод о возможных путях создания сложных сигналов с хорошими корреляционными свойствами при большом числе позиций.

12. Найдите и исследуйте взаимную функцию корреляции двух экспоненциальных сигналов

$u(t) = \exp(-\alpha_1 t) \cdot \sigma(t)$
и $v(t) = \exp(-\alpha_2 t) \cdot \sigma(t)$
при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

# Глава 4 Модулированные сигналы

Сигналы, поступающие из источника сообщений (микрофона, передающей телевизионной камеры, датчика телеметрической системы), как правило, не могут быть непосредственно переданы по радиоканалу. Дело заключается не только в том, что эти сигналы недостаточно велики по амплитуде. Гораздо более существенное обстоятельство заключено в их относительной низкочастотности. Для того чтобы осуществить эффективную передачу сигналов в какой-либо среде с помощью радиоволн, необходимо перенести спектр этих сигналов из низкочастотной области в диапазон достаточно высоких частот. Данная процедура, получившая в радиотехнике название *модуляции*, будет изучаться в настоящей главе.

## 4.1 Сигналы с амплитудной модуляцией

Перед тем как изучать этот простейший по своим свойствам вид модулированных сигналов, рассмотрим кратко некоторые вопросы, касающиеся принципов модуляции любого вида.

**Понятие несущего колебания.** Идея способа, позволяющего переносить спектр сигнала в область высоких частот, заключается в следующем. Прежде всего в передатчике формируется вспомогательный высокочастотный сигнал, называемый *несущим колебанием.* Его математическая модель

$$u_{нес}(t) = f(t;\ a_1, a_2, \dots, a_m)$$

такова, что можно выделить некоторую совокупность параметров $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, определяющих собой форму этого колебания. Пусть $s(t)$ — низкочастотное сообщение, подлежащее передаче по радиоканалу. Если по крайней мере один из параметров $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ изменяется во времени в такт передаваемому сообщению, то несущее колебание приобретает новое свойство— это колебание несет в себе информацию, которая первоначально была заключена в сигнале $s(t)$.

● модуляция

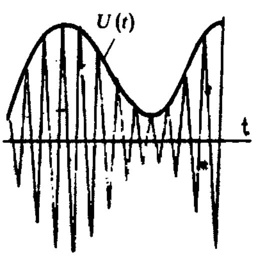
Физический процесс управления параметрами несущего колебания и является модуляцией.

В радиотехнике широкое распространение получили системы модуляции, использующие в качестве несущего простое гармоническое колебание

$$u_{нес}(t) = U\cos(\omega t + \varphi). \qquad (4.1)$$

В гармоническом колебании возможно изменение трех свободных параметров $U$, $\omega$, $\varphi$ по закону передаваемого сообщения.

Изменяя тот или иной параметр во времени, можно получать различные виды модуляции.



АМ-сигнал и его огибающая

**Принцип амплитудной модуляции.** Если переменной во времени оказывается амплитуда сигнала $U(t)$, причем два остальных параметра $\omega$ и $\varphi$ неизменны, то имеет место *амплитудная модуляция* несущего колебания. Форма записи амплитудно-модулированного, или, короче, АМ-сигнала, такова:

$$\boxed{u_{АМ}(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,.} \qquad (4.2)$$

Осциллограмма АМ-сигнала имеет характерный вид. Прежде всего обращает на себя внимание симметрия графика относительно горизонтальной оси. В соответствии со структурой формулы (4.2) АМ-сигнал есть произведение *огибающей* $U(t)$ и *гармонического заполнения* $\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$. В большинстве практически интересных случаев огибающая изменяется во времени гораздо медленнее, чем высокочастотное заполнение.

**огибающая и заполнение**

При амплитудной модуляции связь между огибающей $U(t)$ и модулирующим полезным сигналом $s(t)$ принято определять следующим образом:

$$\boxed{U(t)=U_0[1+Ms(t)].} \tag{4.3}$$

Здесь $U_0$ — постоянный коэффициент, определяющий амплитуду несущего колебания в отсутствие модуляции, $M$ — так называемый *коэффициент модуляции.*

**коэффициент модуляции**

Величина $M$ характеризует собой *глубину* амплитудной модуляции. Смысл этого термина поясняется примерами осциллограмм АМ-сигнала, изображенными на рис. 4.1.

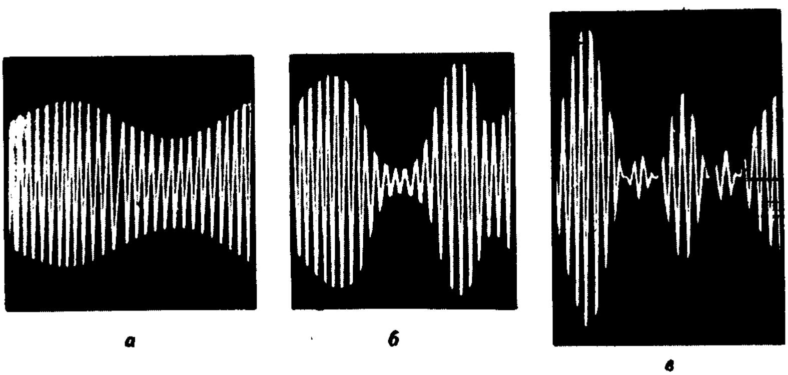


Рис. 4.1. АМ-сигналы при различных глубинах модуляции:
*а* — малый коэффициент модуляции; *б* — глубокая модуляция; *в* — перемодуляция

При малой глубине модуляции относительное изменение величины огибающей невелико, т. е.

**На принципах амплитудной модуляции построено большинство радиовещательных систем**

$$|Ms(t)|\ll 1$$

во все моменты времени независимо от формы сигнала $s(t)$.

Если же в те моменты времени, когда сигнал $s(t)$ достигает экстремальных значений, имеют место приближенные равенства

$$Ms_{\max}(t)\approx 1 \text{ или } Ms_{\min}(t)\approx -1,$$

то говорят о глубокой амплитудной модуляции. Иногда глубину модуляции измеряют в процентах и вводят *относительный коэффициент модуляции вверх*

$$M_в = \frac{U_{max}(t) - U_0}{U_0} 100\%$$

и *относительный коэффициент модуляции вниз*

▲ решите задачу 3

$$M_н = \frac{U_0 - U_{min}(t)}{U_0} 100\%.$$

Использование в радиоканалах АМ-сигналов с малой глубиной модуляции нецелесообразно по причине неполного использования мощности передатчика. В то же время уже 100-процентная модуляция вверх в два раза повышает амплитуду колебаний при пиковых значениях модулирующего сообщения. Дальнейший рост этой амплитуды, как правило, ведет к нежелательным искажениям из-за перегрузки выходных каскадов передатчика.

● перемодуляция

Не менее опасной может стать слишком глубокая амплитудная модуляция вниз. Следует обратить внимание на рис. 4.1, *в*, отображающий так называемую *перемодуляцию* (случай, отвечающий $M_н > 100\%$). Здесь форма огибающей перестает повторять форму модулирующего сигнала.

**Однотональная амплитудная модуляция.** Простейший АМ-сигнал будет получен в случае, когда модулирующим низкочастотным сигналом является гармоническое колебание с частотой $\Omega$. При этом сигнал

$$u_{АМ}(t) = U_0(1 + M\cos(\Omega t + \Phi_0))\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.4}$$

называется *однотональным АМ-сигналом*. Легко видеть, что однотональная модуляция симметрична, т. е. $M_в = M_н = M$.

Как известно, $\cos\alpha\cos\beta = {}^1/_2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

Выясним, можно ли такой сигнал представить в виде суммы простых гармонических колебаний. Используя известную тригонометрическую формулу для произведения косинусов, немедленно получаем

$$U_{АМ}(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0 M}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \frac{U_0 M}{2}\cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \tag{4.5}$$

Формула (4.5) устанавливает спектральный состав однотонального АМ-сигнала. Здесь:

$\omega_0$ — *несущая частота,*
$\omega_0 + \Omega$ — *верхняя боковая частота,*
$\omega_0 - \Omega$ — *нижняя боковая частота.*

Строя по формуле (4.5) спектральную диаграмму однотонального АМ-сигнала, следует прежде всего обратить внимание на равенство амплитуд верхнего и нижнего боковых колебаний, а также на симметрию расположения этих спектральных компонент относительно частоты несущего колебания.

▲ решите задачу 1

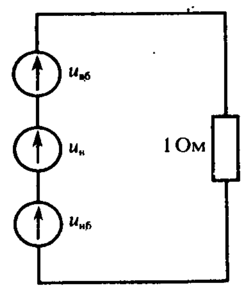
**Энергетические характеристики АМ-сигнала.** Интересен вопрос о распределении мощности между несущим и боковыми колебаниями. Источник однотонального АМ-сигнала эквивалентен сумме трех гармонических источников:

$$u_н(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$u_{в.б}(t) = \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0],$$

$$u_{н.б}(t) = \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0].$$

Положим для определенности, что это идеальные источники э. д. с., соединенные последовательно и нагруженные на единичный резистор. Тогда мгновенная мощность АМ-сигнала будет численно равна квадрату суммарного напряжения:




$$p(t) = u^2_{АМ}(t) = u^2_н + u^2_{в.б} + u^2_{н.б} + \\ + 2u_н u_{в.б} + 2u_н u_{н.б} + 2u_{в.б} u_{н.б}. \quad (4.6)$$

Характерно, что в выражении (4.6) присутствуют как собственная мощность источников, так и их взаимные мощности, пропорциональные попарным произведениям мгновенных значений.

Для вычисления средней мощности сигнала величину $p(t)$ необходимо усреднить по достаточно большому отрезку времени $T$:

$$\bar{p} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dT.$$

Легко убедиться в том, что при усреднении все компоненты взаимной мощности обратятся в нуль и поэтому средняя мощность АМ-сигнала окажется равной сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$\overline{P} = \overline{P}_{\text{н}} + \overline{P}_{\text{в.б}} + \overline{P}_{\text{н.б}} = \frac{U_0^2}{2} + \frac{U_0^2 M^2}{8} + \frac{U_0^2 M^2}{8}. \tag{4.7}$$

Отсюда можно прийти к выражению

$$\boxed{(\overline{P}_{\text{в.б}} + \overline{P}_{\text{н.б}})/\overline{P}_{\text{н}} = M^2/2.} \tag{4.8}$$

▲ решите задачу 5

Так, даже при 100-процентной модуляции ($M = 1$) доля мощности обоих боковых колебаний составляет всего лишь 50% от мощности немодулированного несущего колебания. Поскольку информация о передаваемом сообщении заключена в боковых колебаниях, можно отметить известную неэффективность использования мощности при передаче АМ-сигнала.

**Амплитудная модуляция при сложном модулирующем сигнале.** На практике однотональные АМ-сигналы используются редко. Гораздо более реальным представляется случай, когда модулирующий низкочастотный сигнал обладает сложным спектральным составом. В качестве математической модели такого сигнала принято рассматривать тригонометрическую сумму

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i). \tag{4.9}$$

Здесь частоты $\Omega_i$ образуют упорядоченную возрастающую последовательность $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_N$, в то время как амплитуды $\alpha_i$ и начальные фазы $\Phi_i$ произвольны.

Подставив (4.9) в (4.3), получим

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{N} M\alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i)\right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{4.10}$$

● парциальные коэффициенты модуляции

Введем совокупность *парциальных* (частичных) *коэффициентов* модуляции

$$M_i = M\alpha_i \tag{4.11}$$

и запишем аналитическое выражение сложномодулированного (многотонального) АМ-сигнала в форме, которая обобщает выражение (4.4):

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{N} M_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i)\right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{4.12}$$

Спектральное разложение проводится совершенно так же, как и для однотонального АМ-сигнала:

$$u_{AM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{U_0 M_i}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i) t +$$

$$+ \varphi_0 + \Phi_i] + \sum_{i=1}^{N} \frac{U_0 M_i}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i) t + \varphi_0 - \Phi_i]. \qquad (4.13)$$

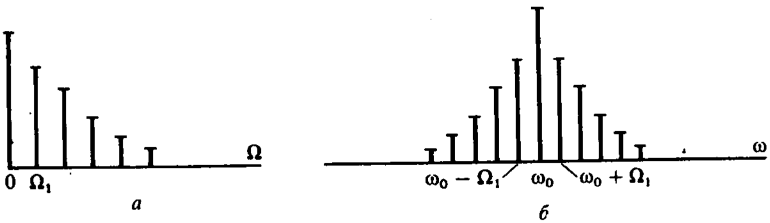



Рис. 4.2. Спектральные диаграммы:
*а* — модулирующего сигнала; *б* — АМ-сигнала при многотональной модуляции

На рис. 4.2, *а* изображена спектральная диаграмма модулирующего сигнала $s(t)$, построенная в соответствии с формулой (4.9). Рис. 4.2, *б* воспроизводит спектральную диаграмму многотонального АМ-сигнала, отвечающего этому модулирующему колебанию.

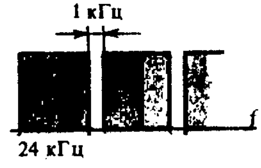
Итак, в спектре сложномодулированного АМ-сигнала помимо несущего колебания содержится группа верхних и группа нижних боковых колебаний. При этом спектр верхних боковых колебаний является масштабной копией спектра модулирующего сигнала, сдвинутой в область высоких частот на величину $\omega_0$. Нижние боковые колебания также повторяют спектральную диаграмму сигнала $s(t)$, но располагаются в зеркальном порядке относительно несущей частоты $\omega_0$.

■ структура спектра сигнала с амплитудной модуляцией

Из сказанного делаем важный вывод: *ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наиболее высокой частоты в спектре модулирующего низкочастотного сигнала.*

**Пример 4.1.** *Оценить число радиоканалов вещательных станций, которые можно разместить в диапазоне частот от* 0.5 *до* 1.5 МГц *(примерные границы средневолнового вещательного диапазона).*

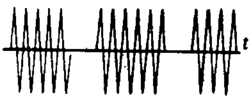
Для удовлетворительного воспроизведения сигналов радиовещания необходимо воспроизводить звуковые частоты от 100 Гц до 12 кГц. Таким образом, полоса частот, отводимая одному АМ-каналу, равна 24 кГц. Для ликвидации перекрестных помех между каналами следует предусмотреть защитный интервал, например шириной в 1 кГц. Поэтому допустимое число каналов




$$N = (1.5 - 0.5)\,10^6/25 \cdot 10^3 = 40.$$

● манипулированные сигналы

**Амплитудно-манипулированные сигналы.** Важным классом многотональных АМ-сигналов являются так называемые *манипулированные сигналы*. В простейшем случае они представляют последовательность радиоимпульсов, отделенных друг от друга паузами, в течение которых несущее колебание отсутствует. Такие сигналы характерны для радиотелеграфии и других систем передачи дискретной информации по радиоканалам.




Осцилограмма амплитудно-манипулированного сигнала

Амплитудно-манипулированные сигналы находят применение в импульсной радиолокации. Для получения высокой разрешающей способности здесь используют весьма короткие импульсы с длительностью порядка долей микросекунды.

Если $s(t)$ — функция, в каждый момент времени принимающая значение либо 0, либо 1, то амплитудно-манипулированный сигнал представляют в виде

$$u_{\text{ман}}(t) = U_0 s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (4.14)$$

Пусть, например, функция $s(t)$ отображает периодическую последовательность видеоимпульсов, рассмотренную в примере 2.1 (см. гл. 2). Считая, что амплитуда этих импульсов $A = 1$, на основании (4.14) имеем

$$u_{\text{ман}}(t) = \frac{U_0}{q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \times$$

$$\times \cos[(\omega_0 + n\omega_1) t + \varphi_0] + \frac{U_0}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos[(\omega_0 -$$

$$- n\omega_1) t + \varphi_0]. \qquad (4.15)$$

Рассматривая это выражение, убеждаемся, что амплитудно-манипулированному сигналу присущи все особенности АМ-сигнала со сложной модуляцией. Отличие заключено в том, что, по крайней мере теоретически, спектр такого сигнала простирается неограниченно широко.

**Векторная диаграмма АМ-сигнала.** В некоторых случаях полезным может оказаться графическое представление АМ-сигнала суммой векторов, вращающихся на комплексной плоскости.

Для простоты ограничимся случаем однотональной модуляции. Мгновенное значение несущего колебания

$$u_{\text{нес}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

есть проекция неподвижного во времени комплексного вектора $\dot{U}_{\text{нес}} = U_0 \exp(j\varphi_0)$ на ось отсчета углов, которая вращается вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega_0$ в направлении часовой стрелки (рис. 4.3).

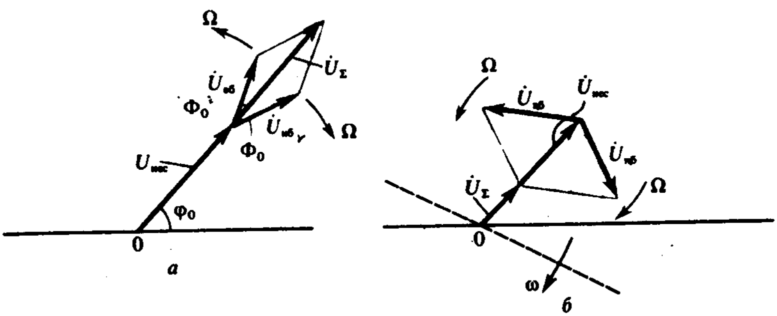


Рис. 4.3. Векторные диаграммы однотонального АМ-сигнала:
*а* — при $t=0$; *б* — при $t>0$

Верхнее боковое колебание отображается на диаграмме как вектор с длиной $U_0M/2$, причем его фазовый угол при $t=0$ равен сумме начальных фаз несущего и модулирующего сигналов (см. формулу (4.5) ). Такой же вектор для нижнего бокового колебания отличается лишь знаком в выражении для его фазового угла. Итак, мы должны на комплексной плоскости построить сумму трех векторов:

$$\dot{U}_{\text{нес}} = U_0 e^{j\varphi_0}; \quad \dot{U}_{\text{в.б}} = \frac{MU_0}{2} e^{j(\varphi_1+\Phi_0)}; \quad \dot{U}_{\text{н.б}} = \frac{MU_0}{2} e^{j(\varphi_0-\Phi_0)}.$$

Легко видеть, что эта сумма будет ориентирована вдоль вектора $\dot{U}_{\text{нес}}$. Мгновенное значение АМ-сигнала при $t=0$ окажется равным проекции конца результирующего вектора на горизонтальную ось.

С течением времени помимо уже отмеченного вращения оси отсчета углов (рис. 4.3, *б*): 1) вектор $\dot{U}_{\text{вб}}$ будет вращаться вокруг точки своего приложения с угловой скоростью $\Omega$ в направлении против часовой стрелки, поскольку полная фаза верхнего бокового колебания $(\omega_0+\Omega)t+\varphi_0+\Phi_0$ должна возрастать быстрее полной фазы несущего сигнала; 2) вектор $\dot{U}_{\text{н.б}}$ будет вращаться также с угловой скоростью $\Omega$, но в противоположном направлении.

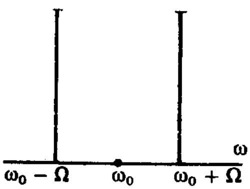
▲ решите задачи 2 и 4

Строя вектор $\dot{U}_\Sigma$ и проецируя его на ось отсчета углов, можно определить мгновенные значения $u_{\text{АМ}}(t)$ в любой момент времени.

Векторная диаграмма АМ-сигнала в многотональном случае совершенно аналогична по смыслу, однако графические построения могут оказаться в этом случае очень громоздкими.

**Балансная амплитудная модуляция.** Ранее мы убедились в том, что значительная доля мощности обычного АМ-сигнала сосредоточена в несущем колебании. Для более эффективного использования мощности передатчика можно формировать АМ-сигналы с подавленным несущим колебанием, реализуя так называемую *балансную амплитудную модуляцию*. На основании формулы (4.4) представление АМ-сигнала с балансной модуляцией для однотонального случая таково:

$$u_{БМ}(t) = U_0 M \cos(\Omega t + \Phi_0)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= \frac{U_0 M}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] +$$
$$+ \frac{U_0 M}{2}\cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \tag{4.16}$$




Спектр однотонального сигнала с балансной модуляцией

● биения

В итоге можно наблюдать перемножение двух сигналов — модулирующего и несущего. Колебания вида (4.16) с физической точки зрения являются *биениями* двух гармонических сигналов с одинаковыми амплитудами $U_0 M/2$ и частотами, равными верхней и нижней боковым частотам.

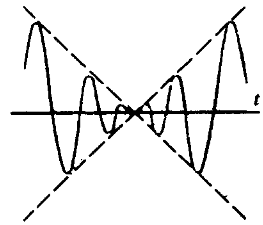
При многотональной балансной модуляции аналитическое выражение сигнала принимает вид

$$u_{БМ}(t) = U_0 \sum_{i=1}^{N} M_i \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] +$$
$$+ U_0 \sum_{i=1}^{N} M_i \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i]. \tag{4.17}$$

Как и при обычной амплитудной модуляции, здесь наблюдаются две симметричные группы верхних и нижних боковых колебаний.

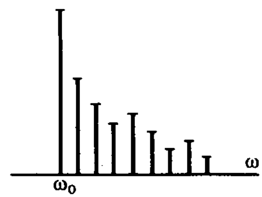
Если рассмотреть осциллограмму биений, может показаться неясным, почему в спектре этого сигнала нет несущей частоты, хотя налицо присутствие высокочастотного заполнения, изменяющегося во времени именно с этой частотой.

Объяснение этому факту следующее: при переходе огибающей биений через нуль фаза высокочастотного заполнения скачком изменяется на 180°, поскольку функция $(\cos \Omega t + \Phi_0)$ имеет разные знаки слева и справа от нуля. Если такой сигнал подать на высокодобротную колебательную систему (например, $LC$-кон-




тур), настроенную на частоту $\omega_0$, то выходной эффект будет очень мал, стремясь к нулю при неограниченном возрастании добротности. Колебания в системе, возбужденные одним периодом биений, будут гаситься последующим периодом. Именно так с физических позиций принято рассматривать вопрос о реальном смысле спектрального разложения сигнала. К этой проблеме мы вернемся вновь в гл. 9.

Балансная амплитудная модуляция, несмотря на свои очевидные достоинства, не нашла широкого применения в технике радиовещания и связи, поскольку при демодуляции такого сигнала несущее колебание обязательно должно быть восстановлено на приемном конце радиолинии. Это обстоятельство ведет к значительному усложнению схемы приемника.




Спектр однополосного сигнала

**Однополосная амплитудная модуляция.** Интересное усовершенствование принципа обычной амплитудной модуляции связано с формированием сигнала с подавленной верхней или нижней боковой полосой частот. Основное преимущество таких сигналов — двукратное сокращение полосы занимаемых частот, что очень существенно для частотного уплотнения радиоканалов, например при связи на коротких волнах в условиях предельной загруженности частотного диапазона.

Сигналы *с одной боковой полосой* (ОБП-, или SSB-сигналы — от англ. *single side band*) по внешним характеристикам весьма напоминают обычные АМ-сигналы. Например, ОБП-сигнал однотонального вида с подавленной нижней боковой полосой записывается в виде

$$u_{\text{ОБП}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0 M}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0].$$

Проводя очевидные тригонометрические преобразования, получим

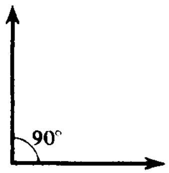
$$u_{\text{ОБП}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0 M}{2}\cos(\Omega t + \Phi_0)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) -$$

$$-\frac{U_0 M}{2}\sin(\Omega t + \Phi_0)\sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= U_0\left(1 + \frac{M}{2}\cos(\Omega t + \Phi_0)\right)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) -$$

$$-\frac{U_0 M}{2}\sin(\Omega t + \Phi_0)\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Последние слагаемые — произведения двух функций, одна из которых изменяется во времени медленно. Принимая во внимание, что «быстрые» сомножители находятся по отношению




Векторная диаграмма двух сигналов, находящихся в квадратуре

друг к другу во временно́й квадратуре, вычисляем медленно изменяющуюся огибающую ОБП-сигнала:

$$U(t) = U_0 \sqrt{\left(1 + \frac{M}{2}\cos(\Omega t + \Phi_0)\right)^2 + \frac{M^2}{4}\sin^2(\Omega t + \Phi_0)} =$$

$$= U_0 \sqrt{1 + M\cos(\Omega t + \Phi_0) + \frac{M^2}{4}}. \qquad (4.18)$$

График огибающей ОБП-сигнала, рассчитанный по формуле (4.18) при $M=1$, изображен на рис. 4.4. Здесь же для сравнения построена огибающая обычного однотонального АМ-сигнала с тем же самым коэффициентом модуляции.

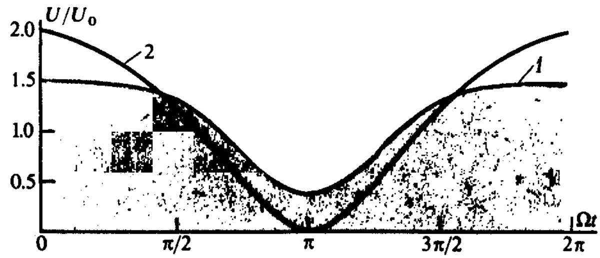
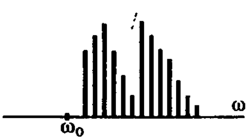



Рис. 4.4. Огибающая однотонального сигнала:
1 — однотональный ОБП-сигнал; 2 — обычный АМ-сигнал при $M=1$




Спектр однополосного сигнала с подавленной несущей

Сравнение двух приведенных кривых показывает, что непосредственная демодуляция ОБП-сигнала по его огибающей будет сопровождаться значительными искажениями.

Дальнейшим усовершенствованием систем ОБП является частичное или полное подавление несущего колебания. При этом достигается наилучшее использование мощности передатчика.

## 4.2 Сигналы с угловой модуляцией

Рассмотрим модулированные радиосигналы, характеризующиеся тем, что в несущем гармоническом колебании

$$u_{\text{нес}}(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

передаваемое сообщение $s(t)$ изменяет либо частоту $\omega$, либо начальную фазу $\varphi$; амплитуда $U_0$ остается неизменной. Поскольку аргумент гармонического колебания

$$\psi(t) = \omega t + \varphi,$$

называемый *полной фазой*, определяет текущее значение фазового угла, то такие сигналы получили название *сигналов с угловой модуляцией*.

● полная фаза

**Принципы угловой модуляции.** Предположим вначале, что полная фаза $\psi(t)$ связана с сигналом $s(t)$ зависимостью вида

$$\psi(t) = \omega_0 t + ks(t), \tag{4.19}$$

где $k$ — некоторый коэффициент пропорциональности, $\omega_0$ — значение частоты, имеющее место при отсутствии полезного сигнала. Модуляцию, при которой выполняется (4.19), принято называть *фазовой модуляцией* (ФМ):

фазовая модуляция

$$\boxed{u_{ФМ}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + ks(t)).} \tag{4.20}$$

Если сигнал $s(t)=0$, то ФМ-колебание является простым гармоническим. С увеличением сигнала $s(t)$ полная фаза $\psi(t)$ растет во времени быстрее, чем по линейному закону. При уменьшении модулирующего сигнала происходит спад скорости роста $\psi(t)$ во времени. На рис. 4.5 изображен пример ФМ-сигнала.

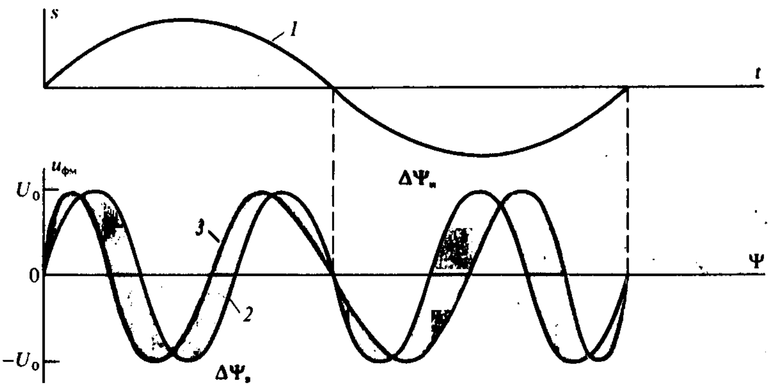



Рис. 4.5. Фазовая модуляция:

1 — модулирующий низкочастотный сигнал; 2 — немодулированное гармоническое колебание; 3 — сигнал с фазовой модуляцией

В те моменты времени, когда $s(t)$ достигает экстремальных значений, абсолютная величина фазового сдвига между ФМ-сигналом и немодулированным гармоническим колебанием оказывается наибольшей. Предельное значение этого фазового сдвига называют *девиацией фазы* $\Delta\psi$, причем в общем случае, когда сигнал $s(t)$ изменяет свой знак, принято различать *девиацию фазы вверх*

девиация фазы

$$\Delta\psi_в = ks_{max}$$

и *девиацию фазы вниз*

$$\Delta\psi_{н} = ks_{min}.$$

Если отобразить ФМ-сигнал на векторной диаграмме, то можно заметить, что изображающий вектор постоянной длины будет совершать вращение с непостоянной угловой скоростью. *Мгновенная частота* $\omega(t)$ сигнала с угловой модуляцией определяется как первая производная от полной фазы по времени:

**мгновенная частота**

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}, \tag{4.21}$$

так что

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(\tau)\,d\tau + \text{const}. \tag{4.22}$$

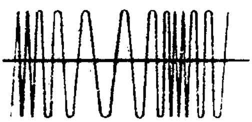
Если между величинами $s(t)$ и $\omega(t)$ имеется связь вида

$$\omega(t) = \omega_0 + ks(t), \tag{4.23}$$

имеет место *частотная модуляция* сигнала (ЧМ). Поэтому

**частотная модуляция**

$$u_{ЧМ}(t) = U_0 \cos\left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau\right]. \tag{4.24}$$



Осциллограмма типичного сигнала с угловой модуляцией

Естественными параметрами ЧМ-сигнала общего вида в соответствии с (4.23) являются *девиация частоты вверх*

$$\Delta\omega_{в} = ks_{max}$$

и *девиация частоты вниз*

$$\Delta\omega_{н} = ks_{min}.$$

Если $s(t)$ — достаточно гладкая функция времени, то внешних различий между осциллограммами ФМ- и ЧМ-сигналов нет. Однако между ними есть принципиальная разница: фазовый сдвиг ФМ-сигнала по отношению к немодулированному (отсчетному) колебанию пропорционален $s(t)$, в то время как для ЧМ-сигнала этот сдвиг пропорционален интегралу от передаваемого сообщения.

**Однотональные сигналы с угловой модуляцией.** Анализ ФМ- и ЧМ-сигналов с математической точки зрения гораздо сложнее, чем исследование АМ-колебаний. По этой причине основное внимание будет уделено однотональным сигналам, промодулированным единственной низкой частотой.

В случае однотонального ЧМ-сигнала мгновенная частота

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega\cos(\Omega t + \Phi_0),$$

где $\Delta\omega$ — девиация частоты сигнала. На основании (4.22) полная фаза такого сигнала

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0.$$

Отсюда видно, что величина

$$m = \Delta\omega/\Omega, \qquad (4.25)$$

носящая название *индекса однотональной частотной модуляции,* отображает собой девиацию фазы сигнала, выраженную в радианах.

● индекс угловой модуляции

В дальнейшем для сокращения записи положим, что неизменные во времени фазовые углы $\varphi_0 = \Phi_0 = 0$, и запишем мгновенное значение ЧМ-сигнала в виде

▲ решите задачи 6 и 7

$$u(t) = U_0\cos(\omega_0 t + m\sin\Omega t). \qquad (4.26)$$

Аналитическая форма записи однотонального ФМ-сигнала будет совершенно той же, однако нужно иметь в виду следующее: ЧМ- и ФМ-сигналы ведут себя по-разному при изменении частоты модуляции и амплитуды модулирующего сигнала.

При частотной модуляции величина девиации частоты $\Delta\omega$ пропорциональна амплитуде низкочастотного сигнала. В то же время $\Delta\omega$ не зависит от частоты модулирующего сигнала. В случае фазовой модуляции ее индекс $m$ оказывается пропорциональным амплитуде низкочастотного сигнала независимо от его частоты. Как следствие этого, девиация частоты при ФМ в соответствии с (4.25) линейно увеличивается с ростом частоты $\Omega$.

■ отличие между ЧМ- и ФМ-сигналами

**Пример 4.2.** *Радиостанция, работающая в УКВ-диапазоне с несущей частотой* $f_0 = 80$ МГц, *излучает ФМ-сигнал, промодулированный частотой* $F = 15$ кГц. *Индекс модуляции* $m = 12$. *Найти пределы, в которых изменяется мгновенная частота сигнала.*

Математическая модель сигнала имеет вид

$$u(t) = U_0\cos[2\pi\cdot 8\cdot 10^7 t + 12\sin 2\pi\cdot 1.5\cdot 10^4 t].$$

Девиация частоты составит

$$\Delta f = mF = 1.8\cdot 10^5 = 180 \text{ кГц}.$$

Таким образом, при модуляции мгновенная частота сигнала изменяется в пределах от

$$f_{min} = 80 - 0.18 = 79.82 \text{ МГц}$$

до

$$f_{max} = 80 + 0.18 = 80.18 \text{ МГц}.$$

**Спектральное разложение ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции.** Задачу о представлении сигналов с угловой модуляцией посредством суммы гармонических колебаний относительно просто решить, если ограничиться случаем $m \ll 1$. Для этого преобразуем формулу (4.26) следующим образом:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = U_0 \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_0 \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \tag{4.27}$$

Предположение о малости индекса угловой модуляции позволяет воспользоваться приближенными равенствами

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1;$$

$$\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t.$$

На основании этого из (4.27) получаем

$$u(t) \approx U_0 \cos \omega_0 t + \frac{mU_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t - \frac{mU_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t. \tag{4.28}$$

**Колебания, характеризуемые условием $m \ll 1$, принято называть узкополосными ЧМ- или ФМ-сигналами**

Таким образом, при $m \ll 1$ в спектре сигнала с угловой модуляцией содержатся несущее колебание и две боковые составляющие, верхняя и нижняя, на частотах $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Индекс $m$ играет здесь такую же роль, как коэффициент амплитудной модуляции $M$ (ср. с (4.5)). Однако можно обнаружить и существенное отличие спектров АМ-сигнала и колебания с угловой модуляцией. Спектральная диаграмма (рис. 4.6, *а*), построенная по формуле (4.28), характерна тем, что нижнее боковое колебание здесь имеет дополнительный фазовый сдвиг на 180°.

Как следствие этого, сумма векторов, отображающих оба боковых колебания (рис. 4.6, *б*), всегда перпендикулярна вектору $\dot{U}_{нес}$. С течением времени вектор $\dot{U}_{\Sigma}$ будет «качаться» около центрального положения. Незначительные изменения длины этого вектора связаны с приближенным характером на-

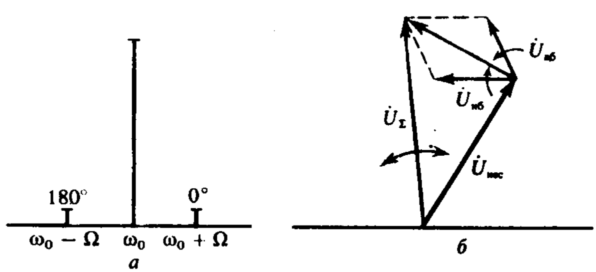



Рис. 4.6. Диаграммы сигнала с угловой модуляцией при $m \ll 1$:
*а* — спектральная; *б* — векторная

шего анализа; при очень малых $m$ ими можно обоснованно пренебречь.

**Более точный анализ спектрального состава сигналов с угловой модуляцией.** Можно попытаться уточнить полученный выше результат, воспользовавшись двумя членами ряда в разложении гармонических функций малого аргумента. При этом формула (4.27) примет вид

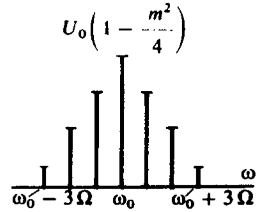
$$u(t) \approx U_0 \cos \omega_0 t \left(1 - \frac{m^2 \sin^2 \Omega t}{2}\right) -$$
$$- U_0 \sin \omega_0 t \left(m \sin \Omega t - \frac{m^3 \sin^3 \Omega t}{6}\right).$$

Несложные тригонометрические преобразования приводят к следующему результату:

▲ решите задачу 11

$$u(t) = U_0 \left(1 - \frac{m^2}{4}\right) \cos \omega_0 t + U_0 m \left(1 - \frac{m^2}{8}\right) \times$$
$$\times [\cos(\omega_0 + \Omega) t - \cos(\omega_0 - \Omega) t] + U_0 \frac{m^2}{8} [\cos(\omega_0 + 2\Omega) t +$$
$$+ \cos(\omega_0 - 2\Omega) t] + \frac{U_0 m^3}{48} [\cos(\omega_0 + 3\Omega) t -$$
$$- \cos(\omega_0 - 3\Omega) t]. \quad (4.29)$$

Эта формула весьма примечательна: она говорит о том, что в спектре сигнала с однотональной угловой модуляцией помимо уже известных компонент содержатся также верхние и нижние боковые колебания, отвечающие гармоникам частоты модуляции. Поэтому спектр такого сигнала по структуре сложнее, чем спектр аналогичного АМ-сигнала. Отметим также, что возникновение новых спектральных составляющих ведет к перераспределению энергии по спектру. Так, из (4.29) видно, что с ростом $m$ амплитуда боковых составляющих увеличивается, в то время как амплитуда несущего колебания уменьшается пропорционально множителю $(1 - m^2/4)$.




Более точная форма спектральной диаграммы

**Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольной величине индекса.** Для простейшего случая однотонального ФМ- или ЧМ- сигнала можно найти общее выражение спектра, справедливое при любой величине индекса модуляции $m$.

В разделе курса математики, посвященном специальным функциям, доказывается важная формула, касающаяся разложения в ряд Фурье, экспоненты с мнимым показателем специального вида:

$$e^{-ja\sin x} = \cos(a\sin x) - j\sin(a\sin x) =$$

$$= J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a)\cos 2kx -$$

$$-j2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)x, \qquad (4.30)$$

где $J_k(a)$ — функция Бесселя $k$-го индекса от аргумента $a$. Сравнивая (4.30) и (4.27), перепишем последнюю формулу так:

$$u(t) = U_0\cos\omega_0 t\,(J_0(m) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m)\cos 2k\Omega t) -$$

$$-U_0\sin\omega_0 t\,(2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(m)\sin(2k-1)\Omega t). \qquad (4.31)$$

Поскольку

$$\cos\omega_0 t\cos 2k\Omega t = {}^1/_2\cos(\omega_0 - 2k\Omega)t + {}^1/_2\cos(\omega_0 + 2k\Omega)t;$$

$$\sin\omega_0 t\sin(2k-1)\Omega t = {}^1/_2\cos(\omega_0 - (2k-1)\Omega)t -$$

$$-{}^1/_2\cos(\omega_0 + (2k-1)\Omega)t,$$

то формулу (4.31) можно представить в более компактном виде:

$$\boxed{u(t) = U_0\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m)\cos(\omega_0 + k\Omega)t.} \qquad (4.32)$$

■ **характер спектра однотонального сигнала с угловой модуляцией**

Итак, спектр однотонального сигнала с угловой модуляцией в общем случае содержит бесконечное число составляющих, частоты которых равны $\omega_0 \pm k\Omega$: амплитуды этих компонент пропорциональны значениям $J_k(m)$.

В теории функций Бесселя доказывается, что функции с положительными и отрицательными индексами связаны между собой:

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m).$$

Поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k\Omega$ и $\omega_0 - k\Omega$ совпадают, если $k$ — четное, и отличаются на 180°, если $k$ — нечетное число.

Для детального анализа и построения спектральных диаграмм необходимо знать поведение функций $J_k(m)$ при различных $m$ в зависимости от $k$. На рис. 4.7 приведены графики двух

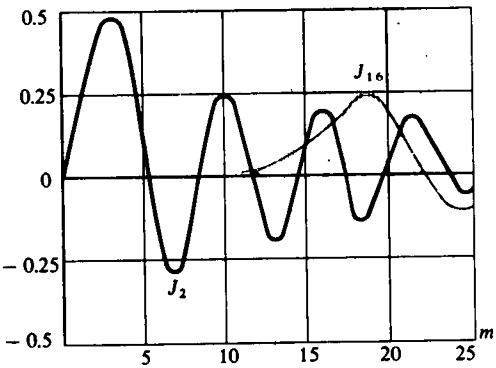



Рис. 4.7. Графики функций Бесселя $J_2(m)$ и $J_{16}(m)$

функций Бесселя, существенно отличающихся своими индексами.

Можно проследить следующую тенденцию: чем больше индекс функции Бесселя, тем протяженнее оказывается область аргументов, при которых эта функция оказывается очень малой. Более точно этот факт отображается табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Значения функций Бесселя $J_k(m)$**

| $k$ \ $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.765 | 0.224 | – 0.260 | – 0.397 | – 0.178 |
| 1 | 0.440 | 0.577 | 0.339 | – 0.066 | – 0.328 |
| 2 | 0.115 | 0.353 | 0.486 | 0.364 | 0.047 |
| 3 | 0.020 | 0.129 | 0.309 | 0.430 | 0.365 |
| 4 | 0.002 | 0.034 | 0.132 | 0.281 | 0.391 |
| 5 | $2\cdot10^{-4}$ | 0.007 | 0.043 | 0.132 | 0.261 |
| 6 | $2\cdot10^{-5}$ | 0.001 | 0.011 | 0.049 | 0.131 |
| 7 | $1\cdot10^{-6}$ | $2\cdot10^{-4}$ | 0.003 | 0.015 | 0.053 |

В выделенной области функции Бесселя становятся пренебрежимо малыми

Табл. 4.1 совместно с формулой (4.32) дает возможность строить типичные спектральные диаграммы сигнала с однотональной угловой модуляцией при не слишком больших значениях индекса $m$ (рис. 4.8).

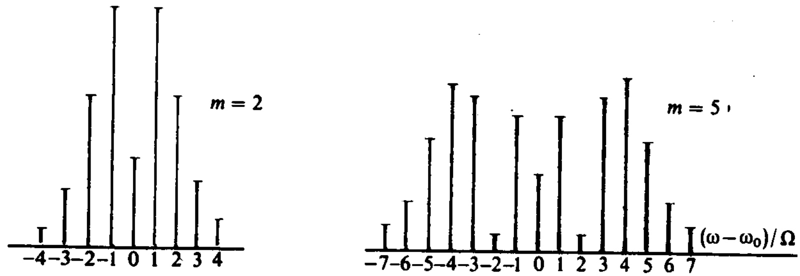



Рис. 4.8. Спектральные диаграммы сигналов с угловой модуляцией при двух значениях индекса $m$ (амплитуды представлены в относительном масштабе)

Интересно отметить, что с ростом индекса модуляции наблюдается расширение полосы частот, занимаемой сигналом. Обычно полагают, что допустимо пренебречь всеми спектральными составляющими, номера которых $k>m+1$. Отсюда следует оценка практической ширины спектра сигнала с угловой модуляцией:

$$\Pi_{\text{практ}} = 2(m+1)\Omega. \tag{4.33}$$

■ практическая ширина спектра ЧМ- и ФМ-сигналов

Как правило, реальные ЧМ- и ФМ-сигналы характеризуются условием $m \gg 1$. В этом случае

$$\boxed{\Pi_{\text{практ}} \approx 2m\Omega = 2\Delta\omega.} \tag{4.34}$$

▲ решите задачу 12

Итак, *сигнал с угловой модуляцией занимает полосу частот, приблизительно равную удвоенной девиации частоты.*

Сигналы с угловой модуляцией часто используются в системах высококачественного радиовещания УКВ-диапазона

Как уже известно, АМ-сигнал для своей передачи требует полосы частот, равной $2\Omega$, т. е. в $m$ раз меньшей. Большая широкополосность ЧМ- и ФМ-сигналов обусловливает их применимость для целей радиосвязи лишь на очень высоких частотах, в диапазонах метровых и более коротких волн. Однако именно это свойство — широкополосность — ведет к гораздо большей помехоустойчивости сигналов с угловой модуляцией по сравнению с АМ-сигналами.

Уже отмечалось, что с ростом индекса угловой модуляции наблюдается перераспределение мощности в спектре такого сигнала. В частности, если величина $m$ выбрана такой, что

$$J_0(m) = 0, \tag{4.35}$$

то несущее колебание с частотой $\omega_0$ в спектре будет отсутствовать. Значения $m$, являющиеся корнями уравнения (4.35), образуют бесконечно возрастающую последовательность чисел $m_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$ — номер корня). Приведем для справок табл. 4.2.

Таблица 4.2

**Корни уравнения $J_0(m) = 0$**

| $\nu$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_\nu$ | 2.405 | 5.520 | 8.654 | 11.792 | 14.931 | 18.071 | 21.212 |

**Пример 4.3.** *Однотональный ЧМ-сигнал имеет девиацию частоты* $\Delta f = 240$ кГц. *Найти частоты модуляции $F$, при которых несущее колебание в спектре сигнала будет отсутствовать.*

Индекс модуляции $m = \Delta\omega/\Omega = \Delta f/F$, т. е. частота модуляции $F = \Delta f/m$. Обращаясь к табл. 4.2, находим последовательность частот, удовлетворяющую поставленному условию:

$$F_1 = 240/2.405 = 99.792 \text{ кГц},$$

$$F_2 = 240/5.520 = 43.478 \text{ кГц},$$

$$F_3 = 240/8.654 = 27.732 \text{ кГц},$$

. . . . . . . . . . . . . . .

**Угловая модуляция при негармоническом модулирующем сигнале.** Интересная особенность колебаний с угловой модуляцией может быть отмечена при изучении случая, когда модулирующий сигнал не является гармоническим. Рассмотрим для простоты сигнал, промодулированный лишь двумя низкими частотами:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \sin\Omega_1 t + m_2 \sin\Omega_2 t) = \\ &= U_0 \cos\omega_0 t \cos(m_1 \sin\Omega_1 t + m_2 \sin\Omega_2 t) - \\ &- U_0 \sin\omega_0 t \sin(m_1 \sin\Omega_1 t + m_2 \sin\Omega_2 t). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Положим, что парциальные индексы модуляции $m_1$ и $m_2$ малы настолько, что можно пользоваться приближенными выражениями для косинуса и синуса:

$$\cos x \approx 1 - x^2/2; \quad \sin x \approx x.$$

Выполнив несколько громоздкие, но совершенно элементарные тригонометрические преобразования, можно представить исходный сигнал в виде суммы:

$$u(t) = U_0\left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4}\right)\cos\omega_0 t + \frac{m_1 U_0}{2}[\cos(\omega_0 + \Omega_1)t -$$

$$- \cos(\omega_0 - \Omega_1)t] + \frac{m_2 U_0}{2}[\cos(\omega_0 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t] +$$

$$+ \frac{m_1^2 U_0}{8}[\cos(\omega_0 + 2\Omega_1)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_1)t] +$$

$$+ \frac{m_2^2 U_0}{8}[\cos(\omega_0 + 2\Omega_2)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_2)t] +$$

$$+ \frac{m_1 m_2}{2}U_0[\cos(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t + \cos(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t -$$

$$- \cos(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t]. \qquad (4.37)$$

Эскиз спектральной диаграммы такого многотонального сигнала изображен на рис. 4.9.

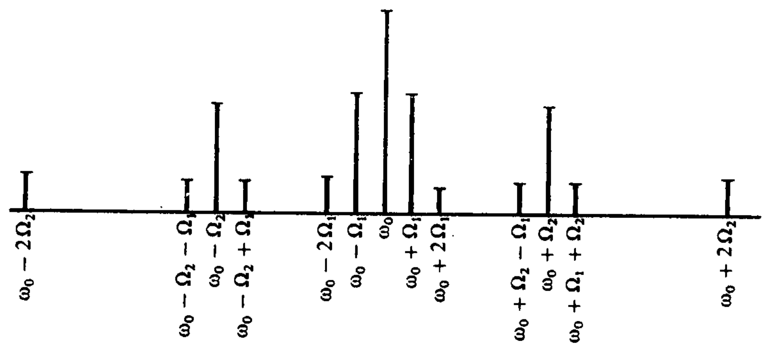



Рис. 4.9. Спектральная диаграмма сигнала с двухтональной угловой модуляцией при малых значениях парциальных индексов $m_1$ и $m_2$

Следует обратить внимание на принципиальный факт: в спектре рассматриваемого сигнала помимо частот $\omega_0 \pm \Omega_1$, $\omega_0 \pm \Omega_2$, $\omega_0 \pm 2\Omega_1$ и $\omega_0 \pm 2\Omega_2$ присутствуют *комбинационные* частоты вида $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$ со всеми четырьмя возможными знаками. Амплитуды этих составляющих зависят от произведения обоих парциальных индексов модуляции.

Если отказаться от условия малости индекса, а также допустить, что модуляция осуществляется целой группой низкочастотных колебаний с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, то спектр сигнала, промодулированного по фазе или по частоте, будет состоять из всевозможных колебаний с частотами вида $\omega_0 \pm n_1 \Omega_1 \pm \ldots \pm \pm n_N \Omega_N$, где $n_1, \ldots, n_N$ — всевозможные целые числа, включая нуль. Таким образом, при прочих равных условиях спектр ФМ- и ЧМ-сигналов оказывается гораздо богаче спектра сигналов, промодулированных по амплитуде.

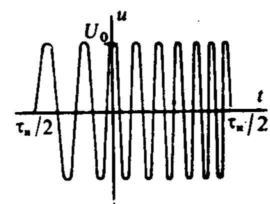
▲ решите задачу 18

Подчеркивая явление взаимодействия отдельных компонент модулирующего сигнала, угловую модуляцию в отличие от амплитудной иногда называют *модуляцией нелинейного типа.*

Не следует смешивать термины «нелинейная модуляция» и «нелинейная электрическая цепь»

## 4.3 Сигналы с внутриимпульсной частотной модуляцией

Перейдем к рассмотрению спектральных и корреляционных свойств некоторого особого класса модулированных сигналов, получивших в последнее время широкое распространение в радиолокации. Эти сигналы отличаются от простых радиоимпульсов тем, что у них высокочастотное заполнение имеет переменную частоту. Чаще всего используется внутриимпульсная частотная модуляция, характеризующаяся линейным законом изменения мгновенной частоты во времени.




**Принцип линейной частотной модуляции (ЛЧМ).** Рассмотрим радиоимпульс с огибающей прямоугольной формы и будем полагать, что высокочастотное заполнение этого импульса имеет частоту, линейно нарастающую со временем. Конкретизируя математическую модель этого сигнала, предположим, что его длительность равна $\tau_и$, причем точка $t=0$ соответствует середине импульса, а мгновенная частота изменяется во времени по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t, \tag{4.38}$$

где $\omega_0$ — несущая частота, $\mu$ — параметр с размерностью $1/с^2$, устанавливающий скорость изменения частоты во времени.

Легко увидеть, что девиация частоты за время, равное длительности импульса, составит

$$\Delta\omega = \mu\tau_и. \tag{4.39}$$

Полная фаза сигнала

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}. \tag{4.40}$$

Сюда, вообще говоря, следовало бы добавить постоянный фазовый сдвиг $\varphi_0$, однако наличие его несущественно.

Итак, будем называть *радиоимпульсом с линейной частотной модуляцией* или, короче, ЛЧМ-импульсом сигнал, представляемый следующей математической моделью:

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<-\tau_и/2,\\ U_0\cos\left[\omega_0 t+\dfrac{\mu t^2}{2}\right], & -\tau_и/2<t<\tau_и/2,\\ 0, & t>\tau_и/2.\end{cases} \qquad (4.41)$$

Подобные устройства называются дисперсионными линиями задержки

Замечательное свойство ЛЧМ-сигналов, определяющее их практическую значимость, состоит в следующем. Предположим, что в нашем распоряжении имеется некоторое физическое устройство, осуществляющее задержку сигналов, подаваемых на его вход. Если время задержки $t_{зад}$ зависит от частоты сигнала, причем с ростом частоты это время уменьшается, то при определенных условиях, подавая на вход такого устройства ЛЧМ-импульс большой длительности, можно добиться существенного «сжатия» его во времени. Этот эффект обусловлен тем, что на выходе системы задержки практически одновременно будут появляться как более низкочастотные компоненты, относящиеся к началу импульса, так и более высокочастотные составляющие, наблюдаемые в его конце.


Легко понять, что при малости собственных потерь в устройстве сжатия амплитуда выходного сигнала будет существенно повышаться и может значительно превысить уровень шумов. Это повышает надежность обнаружения радиолокационным приемником слабых отраженных сигналов.

Описанный здесь механизм сжатия ЛЧМ-сигнала указывает лишь на принцип действия подобных систем. Подробный анализ, позволяющий оценивать количественную сторону явления, будет проведен в гл. 16 при обсуждении методов оптимального выделения сигналов на фоне помех.

**Спектр прямоугольного ЛЧМ-импульса.** В предыдущем параграфе, изучая спектральные характеристики ЧМ-сигнала, промодулированного двумя колебаниями низкой частоты, мы убедились, что спектр такого сигнала имеет сложную структуру из-за перекрестного влияния отдельных спектральных компонент. Все это в полной мере относится и к спектру ЛЧМ-импульса. При дальнейшем изложении этого вопроса будем в основном придерживаться обозначений, принятых в [21].

На основании (4.41) запишем спектральную плотность одиночного ЛЧМ-импульса:

$$U(\omega)=U_0\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}\cos\left[\omega_0 t+\frac{\mu t^2}{2}\right]e^{-j\omega t}\,dt=$$

$$= \frac{U_0}{2} \int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} \exp\left[j\left\{(\omega_0 - \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right\}\right] dt +$$

$$+ \frac{U_0}{2} \int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} \exp\left[-j\left\{(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right\}\right] dt. \qquad (4.42)$$

Анализируя это соотношение, заметим, что первый интеграл описывает ту часть спектральной плотности, которая имеет резко выраженный максимум в области положительных частот, близких к $\omega_0$. Соответственно второй интеграл отвечает той части спектральной плотности, которая сосредоточена в основном при $\omega < 0$. На практике интересуются исключительно тем случаем, когда эффект перекрытия спектров, концентрирующихся при положительных и отрицательных частотах, пренебрежимо мал. Это связано с тем, что полная девиация частоты за время длительности импульса составляет лишь очень малую долю несущей частоты:

$$\boxed{\Delta\omega = \mu\tau_и \ll \omega_0.}$$

Поэтому в формуле (4.42) следует вычислять лишь первый интеграл, дающий спектральную плотность при $\omega > 0$. Спектр в области отрицательных частот может быть получен при этом на основании известных свойств преобразования Фурье для вещественных сигналов (см. гл. 2).

Как известно, $U(-\omega) = U^*(\omega)$

С учетом сказанного, дополнив аргумент экспоненциальной функции в (4.42) до полного квадрата, будем иметь

$$U(\omega) = \frac{U_0}{2} \exp\left[-j\left(\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right)\right] \times$$

$$\times \int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} \exp\left[j\frac{\mu}{2}\left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu}\right)^2\right] dt. \qquad (4.43)$$

Удобно перейти от переменной $t$ к новому аргументу $x$, выполнив замену переменной по формуле

$$\sqrt{\mu}\left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu}\right) = \sqrt{\pi}\, x.$$

Проведя вычисления, находим

$$U(\omega) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp\left[-j\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right] \int\limits_{-X_1}^{X_2} \exp\left[j\frac{\pi x^2}{2}\right] dx, \qquad (4.44)$$

где пределы интегрирования определяются следующим образом:

$$X_1 = \frac{\frac{\mu\tau_и}{2} + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}; \quad X_2 = \frac{\frac{\mu\tau_и}{2} - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}. \tag{4.45}$$

Интегралы Френеля широко используются в физике при решении задач дифракции волн

Интеграл, фигурирующий в выражении (4.44), сводится к комбинации хорошо изученных специальных функций, носящих название *интегралов Френеля*:

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi\xi^2}{2}\,d\xi; \quad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi\xi^2}{2}\,d\xi.$$

В результате получаем окончательную формулу для спектральной плотности рассматриваемого ЛЧМ-сигнала:

При $x \gg 1$ имеет место

$$C(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi x};$$

$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi x}$$

$$\boxed{U(\omega) = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\exp\left[-j\left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}\right)\right] \times [C(X_1) + C(X_2) + j(S(X_1) + S(X_2))].} \tag{4.46}$$

Если представить спектральную плотность в показательной форме:

$$U(\omega) = |U(\omega)| \exp[j\Phi(\omega)],$$

то можно заметить, что модуль

$$|U(\omega)| = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\sqrt{(C(X_1) + C(X_2))^2 + (S(X_1) + S(X_2))^2}, \tag{4.47}$$

в то время как фазовый спектр состоит из квадратичного слагаемого

$$\Phi_1(\omega) = -\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu} \tag{4.48}$$

и так называемого остаточного фазового члена

$$\Phi_2(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{S(X_1) + S(X_2)}{C(X_1) + C(X_2)}. \tag{4.49}$$

**ЛЧМ-сигналы с большой базой.** Численный анализ полученных формул говорит о том, что характер частотной зависимости модуля и фазы спектральной плотности прямоугольного ЛЧМ-импульса полностью зависит от безразмерного числа

$$\boxed{B = \Delta\omega\tau_и = \mu\tau_и^2,} \tag{4.50}$$

равного произведению девиации частоты на длительность импульса и получившего название *базы ЛЧМ-сигнала*.

● база сигнала

В практически интересных случаях выполняется условие $B \gg 1$. Спектр таких ЛЧМ-сигналов с большой базой обладает рядом специфических особенностей. Во-первых, модуль спектральной плотности здесь практически постоянен в пределах полосы частот шириной $\Delta\omega$ с центром в точке $\omega_0$. Соответствующие графики, рассчитанные по формулам (4.47) и (4.49), представлены на рис. 4.10.

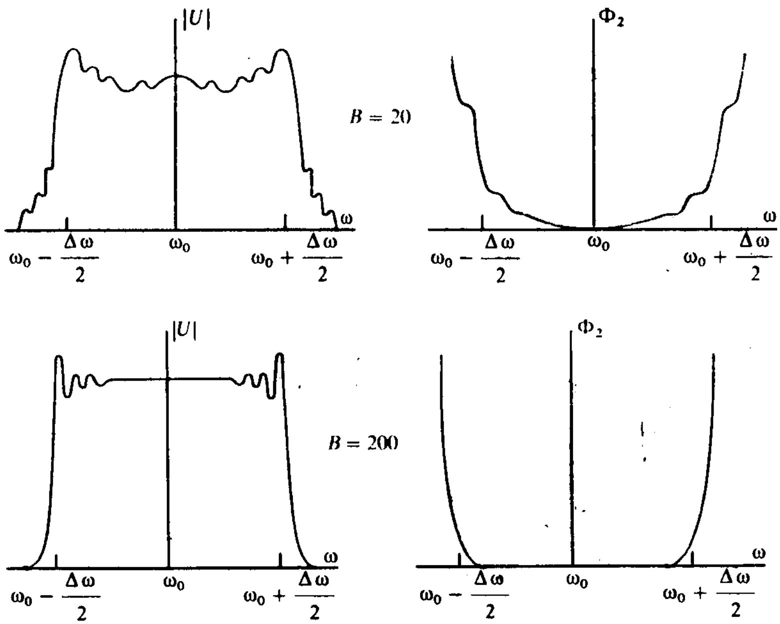



Рис. 4.10. Частотные зависимости модуля и остаточного фазового члена спектральной плотности прямоугольного ЛЧМ-импульса при различных значениях базы сигнала

Во-вторых, обращает внимание явление постепенного исчезновения осцилляций модуля с ростом величины базы. Анализируя формулу (4.47), можно убедиться, что на центральной частоте спектра

$$\boxed{|U(\omega_0)| = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\,.} \tag{4.51}$$

▲ решите задачу 14

Таким образом, ЛЧМ-сигнал с большой базой приблизительно описывается модулем спектральной плотности

$$|U(\omega)| = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}, \\ U_0\sqrt{\dfrac{\pi}{2\mu}}, & \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, & \omega > \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}. \end{cases} \tag{4.52}$$

Энергетический спектр такого сигнала

$$W_u = \pi U_0^2/(2\mu) \tag{4.53}$$

также постоянен в интервале частот $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2},\ \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ и обращается в нуль вне указанной полосы.

**Пример 4.4.** *Прямоугольный ЛЧМ-импульс имеет амплитуду* $U_0 = 20$ В, *несущую частоту* $f_0 = 10$ ГГц *и длительность* $\tau_и = 2$ мкс. *Девиация частоты за время импульса* $\Delta f = 0.1$ ГГц. *Определить основные параметры спектра такого сигнала.*

Прежде всего находим базу сигнала: $B = 6.28 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 12.56 \cdot 10^3$. Скорость нарастания частоты $\mu = 2\pi\Delta f/\tau_и = 6.28 \cdot 10^8/(2 \cdot 10^{-6}) = 3.14 \times 10^{14}$ 1/с$^2$. По формуле (4.53), спектральная плотность энергии $W_u = 0.5 \cdot 10^{-12}$. Поскольку база сигнала велика, его спектр практически заключен в пределах полосы частот от $f_0 - \Delta f/2 = 9.95$ ГГц до $f_0 + \Delta f/2 = 10.05$ ГГц.

**Функция автокорреляции ЛЧМ-сигнала.** Для нахождения этой характеристики, столь важной при решении задач обнаружения сигнала, целесообразно воспользоваться результатами, полученными в гл. 3, где было показано, что связь между функцией автокорреляции и энергетическим спектром сигнала устанавливается парой интегральных преобразований Фурье.

Будем полагать, что база ЛЧМ-сигнала $B$ велика настолько, что энергетический спектр сигнала равномерен и сосредоточен лишь в интервале частот шириной $\Delta\omega$ вокруг несущей частоты. Тогда функция автокорреляции ЛЧМ-сигнала (см. формулу (4.53)

$$K_{ЛЧМ}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{U_0^2}{2\mu}\int_{\omega_0 - \frac{\mu\tau_и}{2}}^{\omega_0 + \frac{\mu\tau_и}{2}} \cos\omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{U_0^2\tau_и}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\mu\tau_и}{2}\tau\right)}{\frac{\mu\tau_и}{2}\tau}\cos\omega_0\tau. \tag{4.54}$$

График нормированной функции автокорреляции

$$r_{\text{лчм}}(\tau) = K_{\text{лчм}}(\tau)/K_{\text{лчм}}(0)$$

изображен на рис. 4.11. Здесь же представлена огибающая этой функции, имеющая лепестковую структуру.

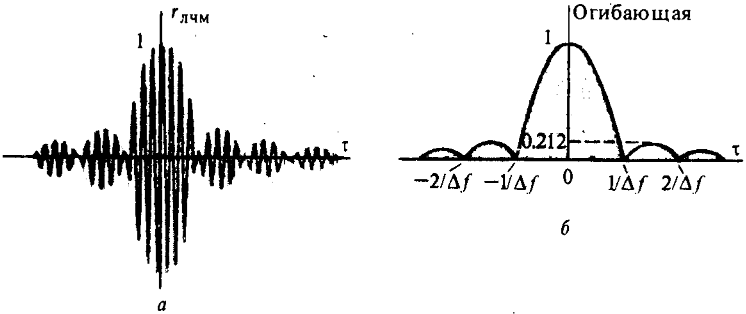



Рис. 4.11. Корреляционные свойства ЛЧМ-импульса:
*а* — нормированная функция автокорреляции; *б* — ее огибающая

Формула (4.54) устанавливает важное свойство ЛЧМ-сигнала: ширина главного лепестка огибающей функции автокорреляции обратно пропорциональна девиации частоты в импульсе. Действительно, огибающая первый раз обратится в нуль при сдвиге сигнала относительно его копии на интервал времени $\tau = 2\pi/(\mu\tau_и) = 1/\Delta f$. Применяемые в радиолокации сигналы характеризуются значительной девиацией частоты, и поэтому главный лепесток функции автокорреляции получается весьма узким. Например, для сигнала, изученного в примере 4.4, сдвиг, обеспечивающий обращение в нуль огибающей функции автокорреляции, составит всего лишь 0.01 мкс, или 0.5% от длительности самого импульса.

Однако с точки зрения корреляционных свойств ЛЧМ-импульсам присущ известный недостаток: высота двух первых симметричных боковых лепестков функции автокорреляции достаточно велика и составляет 0.212 от высоты центрального лепестка. В неблагоприятных условиях (значительный уровень шумов) это может приводить к ошибочному определению временно́го положения импульса.

**Результаты**

◇◇ *Процесс модуляции связан с переносом спектра сигнала из области низких в область высоких частот.*

◇◇ *При амплитудной модуляции огибающая сигнала связана с мгновенным значением низкочастотного модулирующего колебания.*

◇◇ *Спектр АМ-сигнала образуется несущим колебанием и двумя симметричными группами боковых колебаний.*

◇◇ *Полоса частот, необходимая для передачи АМ-сигнала, равна удвоенному значению наивысшей частоты в спектре модулирующего колебания.*

◇◇ *Возможна балансная амплитудная модуляция с подавлением несущего колебания, а также модуляция с одной боковой полосой частот.*

◇◇ *При угловой модуляции передаваемое сообщение определяет изменение во времени фазового угла несущего колебания. Различают частотную и фазовую модуляции.*

◇◇ *Основной параметр модулированных сигналов этих видов — индекс угловой модуляции, равный девиации фазы.*

◇◇ *Теоретически ширина спектра сигнала с угловой модуляцией неограниченно велика.*

◇◇ *При малых индексах модуляции ширина спектра сигнала практически равна удвоенной верхней частоте модуляции.*

◇◇ *При больших индексах полоса частот, занимаемая сигналом, составляет удвоенное значение девиации частоты.*

◇◇ *Сигналы с линейной частотной модуляцией имеют практически равномерный спектр в пределах ограниченной полосы частот при условии, что база сигнала достаточно велика.*

◇◇ *Функция автокорреляции ЛЧМ-сигнала характерна своей лепестковой структурой; ширина главного лепестка падает с ростом внутриимпульсной девиации частоты.*

## Вопросы

1. Какими параметрами принято характеризовать глубину амплитудной модуляции?
2. Поясните причину возникновения искажений в передаче сообщений, наблюдаемых при перемодуляции.
3. Чем определяется распределение мощности в спектре однотонального АМ-сигнала?
4. В каком соотношении находятся между собой частоты несущего и модулирующего колебаний?
5. Опишите принцип построения векторной диаграммы однотонального АМ-сигнала.
6. В чем принципиальное отличие осциллограмм сигналов с балансной амплитудной модуляцией и обычных АМ-сигналов?
7. Почему непосредственная демодуляция ОБП-сигнала приводит к искажению передаваемого сообщения?
8. Укажите сходства и различия между сигналами с частотной и фазовой модуляцией.
9. Как связаны между собой частота модуляции, ее индекс и девиация частоты?
10. Каков спектральный состав ЧМ- и ФМ-сигналов при малых значениях индекса модуляции?
11. Объясните различие между спектрами АМ-сигнала и ЧМ-колебания с малым индексом модуляции.
12. Какое свойство функций Бесселя позволяет говорить об ограниченности полосы частот, занимаемой сигналами с угловой модуляцией?
13. Как следует выбирать индекс угловой модуляции, чтобы в спектре сигнала отсутствовало несущее колебание?
14. Чем характерны спектры ЧМ- и ФМ-сигналов при негармоническом модулирующем колебании?
15. Изобразите осциллограмму прямоугольного импульса с линейной частотной модуляцией.

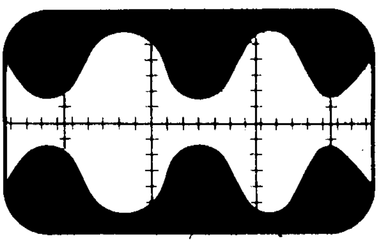
16. Поясните физический принцип, позволяющий осуществлять сжатие ЛЧМ-импульса во времени.
17. Изобразите примерный вид графика частотной зависимости модуля спектральной плотности ЛЧМ-колебания.
18. Каким образом вводится понятие базы ЛЧМ-сигнала?
19. Опишите основные характеристики фазового спектра такого сигнала.
20. Как выглядит график автокорреляционной функции ЛЧМ-сигнала с прямоугольной формой огибающей?
21. В чем заключено несовершенство ЛЧМ-сигнала с точки зрения структуры его функции автокорреляции?

## Задачи

1. Амплитудно-модулированное колебание описывается формулой

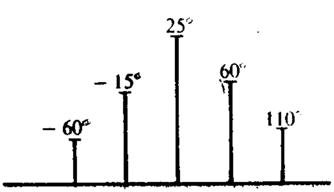
$$u(t) = 130[1 + 0.25\cos(10^2 t + 30°) + 0.75\cos(3\cdot 10^2 t + 45°)] \times \cos(10^5 t + 60°).$$

Изобразите спектральную диаграмму этого сигнала, вычислив как амплитуды, так и начальные фазы всех спектральных составляющих.
2. Постройте векторную диаграмму сигнала, рассмотренного в задаче 1. Построение выполните для момента времени $t=0$.
3. На экране осциллографа получено изображение однотонального АМ-сигнала:



Предложите способ экспериментального определения коэффициента модуляции $M$ по осциллограмме.

Указание. Обратите внимание на мгновенные значения амплитуды сигнала в экстремальных точках.
4. По спектральной диаграмме АМ-сигнала




вычислите начальные фазы каждой из составляющих модулирующего колебания.
5. Амплитудно-модулированный ток (А)

$$i(t) = 200(1 + 0.8\cos 4\cdot 10^3 t)\cos 6\cdot 10^6 t$$

протекает по резистивной нагрузке в 75 Ом. Определите: а) пиковую мощность, развиваемую источником; б) среднюю мощность в нагрузке; в) относительную долю мощности, сосредоточенную в несущем колебании.
6. ЧМ-сигнал с амплитудой 2.7 В характеризуется мгновенной частотой, изменяющейся во времени по закону

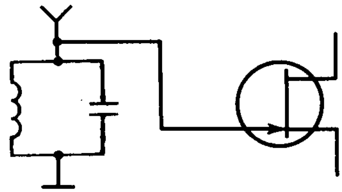
$$\omega(t) = 10^9(1 + 10^{-4}\cos 2\cdot 10^3 t).$$

Найдите индекс модуляции и запишите математическую модель такого сигнала.
7. Определите индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала, промодулированного низкой частотой $F = 7$ кГц, если несущая частота $f_0 = 180$ МГц, а максимальное значение частоты $f_{max} = 182.5$ МГц.
8. Изобразите спектральную и векторную диаграммы сигнала с угловой модуляцией, у которого несущая частота 45 МГц, девиация частоты 0.3 кГц, а частота модуляции 4.5 кГц.
9. Имеется фазово-модулированный сигнал однотонального типа с частотой модуляции $\Omega = 10^4$ 1/с. При какой девиации частоты в спектре этого сигнала будут отсутствовать составляющие на частотах $\omega_0 \pm \Omega$?
10. Постройте спектральную диаграмму ЧМ-сигнала с амплитудой 35 В и индексом $m=3$.
11. Выходной сигнал ЧМ-передатчика в отсутствие модулирующего колебания равен 250 В.

Измерения показали, что при подаче однотонального модулирующего напряжения выходной сигнал становится равным 244 В. Определите индекс частотной модуляции. Можно ли полагать, что в описываемых условиях реализована узкополосная ЧМ?

12. Радиовещательная станция с фазовой модуляцией имеет предельное значение индекса модуляции (при наиболее громком передаваемом сигнале), равное 30. Полагая, что спектр низкочастотного модулирующего сигнала ограничен верхней частотой 16 кГц, определите число радиоканалов, которое можно без перекрестных помех разместить в УКВ-диапазоне (на частотах от 30 до 300 МГц).

13. Входная цепь радиоприемного устройства содержит колебательный контур, настроенный на несущую частоту $f_0=64$ МГц. Добротность контура $Q=30$. Можно ли использовать эту



схему для приема ЧМ-сигнала, частота которого изменяется по закону

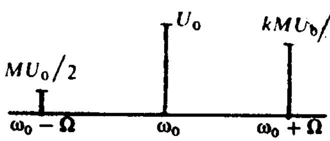
$f(t)=f_0(1+0.015\cos 2.8\cdot 10^3 t)$ ?

14. ЛЧМ-сигнал с огибающей прямоугольной формы имеет амплитуду $U_0=10$ В, длительность $\tau_и=15$ мкс и девиацию частоты за время импульса 40 МГц.

Определите: 1) базу сигнала; 2) квадратичное слагаемое фазового спектра на границе полосы частот, занимаемой сигналом; 3) энергетический спектр сигнала.

## Более сложные задания

15. Исследуйте эффект влияния неодинаковости амплитуд верхнего и нижнего боковых колебаний на характер огибающей АМ-сигнала. Рассмотрите однотональный сигнал со спектральной диаграммой вида




полагая, что коэффициент $k\neq 1$.

16. Проанализируйте, как сказывается на огибающей АМ-сигнала неточное соблюдение условий, налагаемых на частоты верхних и нижних боковых составляющих. Амплитуды обоих боковых колебаний считайте равными. Рассмотрите случай однотонального сигнала, у которого нижняя боковая частота $\omega_н=\omega_0-\Omega$, в то время как верхняя $\omega_в=\omega_0+\Omega+\delta$, где $\delta \ll \Omega$.

17. Проведите спектральный анализ огибающей однотонального ОБП-сигнала, представляемой выражением (4.18). Предложите числовую оценку степени искажения огибающей такого сигнала.

18. Полная фаза ЧМ-сигнала с двухтональной модуляцией изменяется по закону

$\Psi(t)=2\pi\cdot 10^8 t+0.12\sin 2\pi\cdot 10^4 t+0.08\sin 4\pi\cdot 10^4 t.$

Амплитуда немодулированной несущей $U_0=75$ В. Определите, насколько изменится амплитуда несущего колебания после включения модулирующих сигналов.

19. Известно, что одним из способов улучшения корреляционных свойств сигналов с внутриимпульсной частотной модуляцией является переход от линейной к нелинейной модуляции. Изучите по [21], гл. 3 особенности спектра подобных сложных сигналов.

# Глава 5 Сигналы с ограниченным спектром

Как известно (см. гл. 2), для полного восстановления сигнала по его спектру необходимо учитывать все составляющие с частотами, лежащими в интервале от нуля до бесконечности. С физической точки зрения такая процедура неосуществима. К тому же вклад, вносимый спектральными компонентами при $\omega \to \infty$, становится пренебрежимо мал в силу свойств самих сигналов, энергия которых конечна. Наконец, любое реальное устройство, предназначенное для передачи и обработки сигналов, обладает конечной шириной полосы пропускания. Особенно ярко это проявляется в тех случаях, когда рассматриваются устройства типа частотных фильтров.

Настоящая глава посвящена особому классу радиотехнических сигналов, спектральная плотность которых не равна нулю лишь в пределах некоторого интервала конечной протяженности. Подобные сигналы называются *сигналами с ограниченным спектром.*

## 5.1 Некоторые математические модели сигналов с ограниченным спектром и их свойства

Пусть $Д$ — конечный частотный интервал. В этом случае спектральная плотность сигнала с ограниченным спектром запишется в виде

$S(\omega) \neq 0$, если $\omega \in Д$;

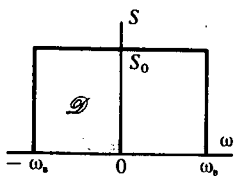
$S(\omega) = 0$ при всех других значениях частоты.

Наиболее общая математическая модель сигнала с ограниченным спектром получается из формулы обратного преобразования Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{Д} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{5.1}$$

В зависимости от выбора интервала $Д$ и функции $S(\omega)$ можно получить самые разнообразные виды сигналов с ограниченным спектром.

**Идеальный низкочастотный сигнал.** Рассмотрим колебание, имеющее постоянное вещественное значение спектральной плотности в пределах частотного интервала, ограниченного некоторой верхней частотой $\omega_в$; вне этого интервала спектральная плотность сигнала обращается в нуль:



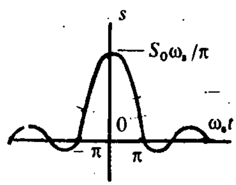

● идеальный низкочастотный сигнал

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_в, \\ S_0, & -\omega_в \leqslant \omega \leqslant \omega_в, \\ 0, & \omega > \omega_в. \end{cases} \quad (5.2)$$

Мгновенные значения такого сигнала

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0\omega_в}{\pi} \frac{\sin \omega_в t}{\omega_в t}. \quad (5.3)$$

Будем называть это колебание *идеальным низкочастотным сигналом* (ИНС), подчеркивая этим простейший вид его спектра по сравнению со спектрами других возможных сигналов подобного рода.




▲ решите задачу 1

График ИНС, построенный по формуле (5.3), имеет вид осциллирующей кривой, четной относительно начала отсчета времени. С увеличением верхней граничной частоты спектра возрастают как значение центрального максимума, так и частота осцилляций.

Идеальный низкочастотный сигнал несколько более общего вида можно получить, предположив в формуле (5.2) линейную зависимость фазы спектральной плотности от частоты:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_в, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_в \leqslant \omega \leqslant \omega_в, \\ 0 & \omega > \omega_в. \end{cases} \quad (5.4)$$

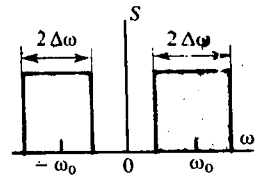
Здесь $t_0$ — параметр, определяющий сдвиг колебания во времени, так что спектральной плотности вида (5.4) соответствует низкочастотный сигнал

$$s(t) = \frac{S_0\omega_в}{\pi} \frac{\sin \omega_в (t - t_0)}{\omega_в (t - t_0)}.$$

Сигнал вида ИНС является идеализированным описанием выходной реакции фильтра нижних частот (ФНЧ), возбуждаемого на входе колебанием с равномерной по частоте спектральной плотностью, т. е. дельта-импульсом. При этом предполагается, что частотная характеристика ФНЧ достаточно точно аппроксимируется функцией прямоугольной формы с заданным значением верхней граничной частоты.

**Идеальный полосовой сигнал.** Исследуем математическую модель полосового сигнала, спектр которого ограничен полосой частот шириной $\Pi = 2\Delta\omega$ с центром на частоте $\pm\omega_0$. Если в пределах этой полосы спектральная плотность сигнала постоянна:

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ & \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & \text{вне полосы,} \end{cases} \quad (5.5)$$

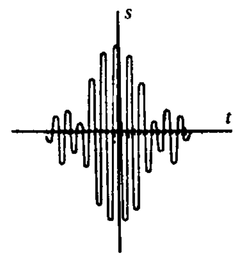



то по аналогии с предыдущим данный сигнал будем называть *идеальным полосовым сигналом* (ИПС).

Мгновенные значения ИПС найдем, используя обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \cos\omega t \, d\omega = \frac{2S_0\Delta\omega}{\pi} \, \frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos\omega_0 t. \quad (5.6)$$

● идеальный полосовой сигнал




Соответствующий график демонстрирует структуру ИПС. Здесь наряду с высокочастотными осцилляциями на частоте $\omega_0$ наблюдается также изменение во времени мгновенного значения их амплитуды. Функция $\sin(\Delta\omega t)/(\Delta\omega t)$ с точностью до масштабного коэффициента $2S_0\Delta\omega/\pi$ играет роль медленной огибающей ИПС. Если величина $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, т. е. относительная ширина спектра ИПС значительно меньше единицы, то огибающая изменяется во времени гораздо медленнее, чем высокочастотное заполнение.

Способ, хотя бы теоретически возможный, получения ИПС очевиден: на вход идеального полосового фильтра, пропускающего лишь колебания с частотами в пределах полосы $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$, должно быть подано широкополосное воздействие вида дельта-импульса.

▲ решите задачу 2

**Оценка некоторых параметров сигналов с ограниченным спектром.** Анализируя формулы, полученные в предыдущем разделе, можно обратить внимание на то, что амплитудные значения рассмотренных сигналов прямо пропорциональны ширине их полосы. Наряду с этим сокращение полосы частот сигнала ведет к тому, что эти сигналы (или их огибающие) изменяются во времени все более медленно.

Нетрудно получить числовые оценки, которые устанавливали бы предельные значения энергии, амплитуды и максимальной величины производной для сигналов с ограниченным спектром в общем виде.

Пусть, например, $s(t)$ — сигнал, спектр которого отличен от нуля лишь в интервале частот $-\omega_в \leqslant \omega \leqslant \omega_в$. Тогда очевидна следующая оценка энергии сигнала:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_в}^{\omega_в} S(\omega)\overset{*}{S}(\omega)\, d\omega \leqslant \frac{\omega_в}{\pi} S^2_{max}, \quad (5.7)$$

где $S_{max}$ — максимальное значение модуля спектральной плотности.

Найдем предельное значение амплитуды сигнала. В соответствии с Фурье-представлением

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

максимальное значение сигнала ограничено сверху величиной, равной сумме модулей всех комплексных амплитуд, отвечающих элементарным участкам оси частот. Поскольку на основании формулы (2.17) интервал частот шириной $\Delta\omega$, образующий окрестность выбранного значения частоты, характеризуется комплексной амплитудой

$$\Delta A_{\omega} = \frac{1}{\pi} \dot{S}(\omega)\, \Delta\omega,$$

то мгновенное значение сигнала рассматриваемого вида удовлетворяет неравенству

$$s_{max} \leqslant \frac{\omega_{в}}{\pi} S_{max}. \tag{5.8}$$

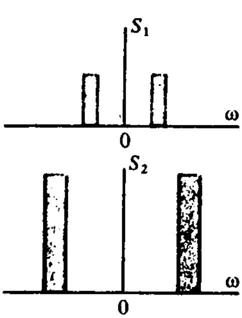
Знак равенства возможен лишь в том случае, если сигнал принадлежит типу ИНС: спектральная плотность его должна быть постоянной в пределах полосы и, кроме того, в некоторый момент времени все спектральные компоненты должны иметь возможность складываться когерентно.

Теперь нетрудно получить оценку производной по времени. Возьмем предел отношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\omega_{в}}^{\omega_{в}} S(\omega)\, [e^{j\omega\Delta t} - 1]\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

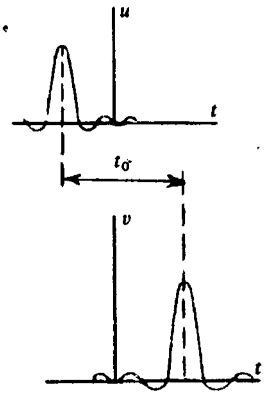
и учтем, что $[\exp(j\omega\Delta t) - 1] \approx j\dot{\omega}\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. По аналогии с предыдущим получаем неравенство

$$\left|\frac{ds}{dt}\right|_{max} \leqslant \frac{\omega_{в}^{2}}{\pi} S_{max}. \tag{5.9}$$




**Ортогональные сигналы с ограниченным спектром.** Ограничения, накладываемые на полосу частот сигнала, позволяют находить интересные и важные классы ортогональных сигналов. Простейший пример — ортогональность двух полосовых сигналов, области существования спектра которых не пересекаются. Равенство нулю скалярного произведения этих сигналов непосредственно следует из обобщенной формулы Рэлея.

Менее очевидный способ ортогонализации сигналов с ограниченным спектром заключается в сдвиге таких сигналов во времени.




Рассмотрим два идеальных низкочастотных сигнала $u(t)$ и $v(t)$. Оба сигнала имеют одинаковые параметры $S_0$ и $\omega_в$, но отличаются тем, что сигнал $v(t)$ запаздывает по отношению к сигналу $u(t)$ на время $t_0$, так что его спектральная плотность

$S_v(\omega) = S_u(\omega)\,e^{-j\omega t_0}$.

Скалярное произведение этих сигналов

$$(u, v) = \frac{S_0^2}{2\pi}\int\limits_{-\omega_в}^{\omega_в} e^{j\omega t_0}\,d\omega = \frac{S_0^2\omega_в}{\pi}\,\frac{\sin\omega_в t_0}{\omega_в t_0}. \tag{5.10}$$

Последняя формула говорит о том, что два одинаковых по форме ИНС оказываются ортогональными, если сдвиг между ними во времени удовлетворяет условию

$$\omega_в t_0 = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.11}$$

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при $k = \pm 1$ и равен

$$\boxed{t_0 = \pm\frac{\pi}{\omega_в} = \pm\frac{1}{2f_в}.} \tag{5.12}$$

Принципиально важно, что удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Построен бесконечный ортогональный базис, пригодный служить координатной системой для разложения произвольного сигнала, в спектре которого отсутствуют частоты выше $\omega_в$.

Графики рассматриваемых сигналов приведены на рис. 5.1.

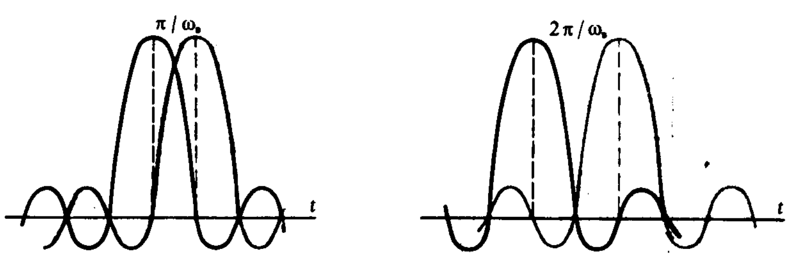



Рис. 5.1. Графики двух идеальных низкочастотных сигналов, сдвинутых во времени на $t_0 = \pi/\omega_в$ и $t_0 = 2\pi/\omega_в$

Важно следующее: в тот момент времени, когда один из сигналов достигает абсолютного максимума, все другие сигналы из данного семейства проходят через нуль.

## 5.2. Теорема Котельникова

Академик Владимир Александрович Котельников — известный советский ученый в области радиотехники и радиофизики

Данная теорема, доказанная В. А. Котельниковым в 1933 г., является одним из фундаментальных положений теоретической радиотехники. Теорема устанавливает возможность сколь угодно точного восстановления мгновенных значений сигнала с ограниченным спектром, исходя из отсчетных значений (выборок), взятых через равные промежутки времени.

**Построение ортонормированного базиса.** Выше было показано, что любые два сигнала с ограниченным спектром, принадлежащие семейству

$$u_k(t) = A\,\frac{\sin\omega_{\text{в}}\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)}{\omega_{\text{в}}\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5.13}$$

являются ортогональными. Путем соответствующего выбора амплитудного множителя $A$ можно добиться того, чтобы норма каждого из этих сигналов стала единичной. В результате будет построен ортонормированный базис, дающий возможность разложить произвольный сигнал с ограниченным спектром в обобщенный ряд Фурье.

Ограничимся рассмотрением функции

$$u_0(t) = A\,\frac{\sin\omega_{\text{в}}t}{\omega_{\text{в}}t},$$

поскольку норма любого сигнала $u_k$ одинакова вне зависимости от сдвига во времени. Поскольку

$$\| u_0 \|^2 = \frac{A}{\omega_{\text{в}}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega_{\text{в}}t}{t^2}\,dt = \frac{\pi A^2}{\omega_{\text{в}}},$$

то функции $u_k$ будут ортонормированными, если

$$A = \sqrt{\frac{\omega_{\text{в}}}{\pi}}.$$

Бесконечная совокупность функций

$$Sc_k(t;\ \omega_{\text{в}}) = \sqrt{\frac{\omega_{\text{в}}}{\pi}}\,\frac{\sin\omega_{\text{в}}\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)}{\omega_{\text{в}}\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)} \tag{5.14}$$

образует так называемый *базис Котельникова* в линейном пространстве низкочастотных сигналов с частотами, ограниченными сверху величиной $\omega_в$. Отдельная функция $Sc_k(t; \omega_в)$ называется *k-й отсчетной функцией*.

**базис Котельникова**

**Ряд Котельникова.** Если $s(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в интервале частот $-\omega_в < \omega < \omega_в$, то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова, т. е. представить в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k Sc_k(t; \omega_в). \qquad (5.15)$$

Коэффициентами этого ряда служат скалярные произведения разлагаемого сигнала и $k$-й отсчетной функции:

$$c_k = (s(t),\ Sc_k(t; \omega_в)). \qquad (5.16)$$

Удобный способ вычисления этих коэффициентов заключается в применении обобщенной формулы Рэлея. Легко проверить, что $k$-я отсчетная функция в пределах частотного интервала $-\omega_в \leqslant \omega \leqslant \omega_в$ имеет спектральную плотность, равную $\sqrt{\pi/\omega_в}\exp(-j\omega k\pi/\omega_в)$. Это видно из сравнения формул (5.3) и (5.14). Тогда если $S(\omega)$ — спектр изучаемого сигнала $s(t)$, то

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{\omega_в} S(\omega)e^{j\frac{k\pi}{\omega_в}\omega}\,d\omega\right\}. \qquad (5.17)$$

Выражение, стоящее здесь в фигурных скобках, есть не что иное, как мгновенное значение сигнала $s(t_k) = s_k$ в $k$-й отсчетной точке

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_в} = \frac{k}{2f_в}.$$

Таким образом,

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}}\, s_k,$$

откуда следует окончательная форма записи ряда Котельникова

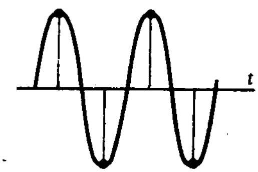
$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin \omega_в\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_в}\right)}{\omega_в\left(t - \dfrac{k\pi}{\omega_в}\right)}.} \qquad (5.18)$$

**формулировка теоремы Котельникова**

Теорема Котельникова на основании последней формулы высказывается так: *произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше* $f_в$ Гц, *может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени* $1/(2f_в)$ с.

**Пример 5.1.** *Пусть дан сигнал* $s(t)=\cos\omega_в t$. Значения этого сигнала в отсчетных точках

$$s_k=\cos(\omega_в t_k)=\cos(k\pi)=(-1)^k .$$




Отсюда видно, что гармоническое колебание с наивысшей частотой, допускаемой условиями теоремы Котельникова, описывается двумя отсчетами, приходящимися на каждый период. Если начальная фаза сигнала равна нулю, то отсчеты одинаковы по модулю, а знаки их чередуются. Теорема Котельникова позволяет записать здесь совсем не очевидное, на первый взгляд, представление гармонического сигнала:

$$\cos\omega t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin\omega\left(t-\dfrac{2k\pi}{\omega}\right)}{\omega\left(t-\dfrac{2k\pi}{\omega}\right)}-\frac{\sin\omega\left(t-\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}\right)}{\omega\left(t-\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}\right)}\right].$$


Если же условия теоремы Котельникова нарушаются и отсчеты во времени берутся недостаточно часто, то при восстановлении сигнала по формуле (5.18) возникает ошибка, порой значительная. Например, отсчеты сигнала могут оказаться равными $s_k=(-1)^k$, как в предыдущем случае, однако сигнал, содержащий в своем спектре частоты выше $\omega_в$, будет иметь гораздо более сложную форму, чем гармоническое колебание.

**Аппаратурная реализация синтеза сигнала, представленного в форме ряда Котельникова.** Замечательная особенность теоремы Котельникова состоит в ее конструктивном характере. Эта

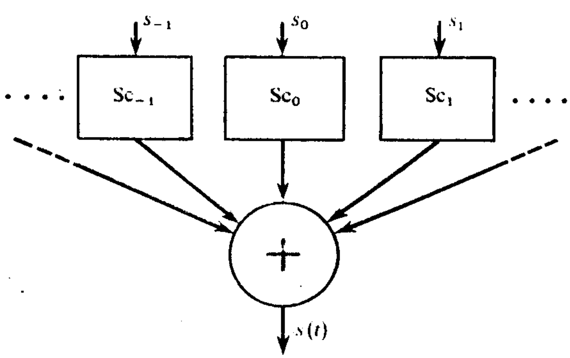


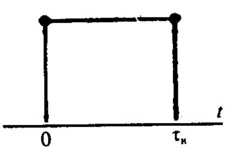

Рис. 5.2. Аппаратурная реализация синтеза сигнала по его ряду Котельникова

теорема не просто указывает на возможность разложения сигнала в соответствующий ряд, но и определяет способ восстановления непрерывного сигнала, заданного своими отсчетными значениями (рис. 5.2).

▲ решите задачу 6

Пусть имеется совокупность генераторов, создающих на своих выходных зажимах отсчетные функции $Sc_k(t;\ \omega_в)$. Генераторы являются управляемыми — амплитуда их сигналов пропорциональна отсчетным значениям $s_k$. Если теперь объединить колебания на выходах, подав их на сумматор, то с выхода сумматора в соответствии с формулой (5.18) будет получено мгновенное значение синтезируемого сигнала $s(t)$.

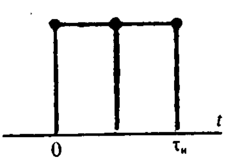
**Приближенное представление сигналов рядом Котельникова.** Возможны случаи, когда заранее известно, что бóльшая часть энергии сигнала с неограниченным спектром сосредоточена в низкочастотной области. При этом ряд Котельникова часто используют для приближенного описания такого сигнала.




Пример 5.2. *Прямоугольный видеоимпульс с единичной амплитудой и длительностью $\tau_и$ не принадлежит к числу сигналов с ограниченным спектром, но тем не менее модуль его спектральной плотности достаточно быстро (по закону $1/\omega$) уменьшается с ростом частоты.*

Если описать этот сигнал двумя отсчетами в начале и в конце импульса, то это будет означать учет в спектре этого колебания всех составляющих, ограниченных частотой $\omega_в=\pi/\tau_и$. По формуле (5.18) находим приближенное выражение математической модели этого сигнала:

$$s(t)=\frac{\sin\dfrac{\pi t}{\tau_и}}{\dfrac{\pi t}{\tau_и}}+\frac{\sin\dfrac{\pi}{\tau_и}(t-\tau_и)}{\dfrac{\pi}{\tau_и}(t-\tau_и)}. \tag{5.19}$$




Если же описать данный импульс тремя равноотстоящими отсчетами, то, как легко видеть, будут учтены все частоты вплоть до $\omega_в=2\pi/\tau_и$ и поэтому

$$s(t)=\frac{\sin\dfrac{2\pi t}{\tau_и}}{\dfrac{2\pi t}{\tau_и}}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{\tau_и}\left(t-\dfrac{\tau_и}{2}\right)}{\dfrac{2\pi}{\tau_и}\left(t-\dfrac{\tau_и}{2}\right)}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{\tau_и}(t-\tau_и)}{\dfrac{2\pi}{\tau_и}(t-\tau_и)}. \tag{5.20}$$

Соответствующие графики приведены на рис. 5.3.

Естественно, что с ростом числа учитываемых членов, т. е. с уменьшением временнóго интервала между выборками, точность аппроксимации будет расти.

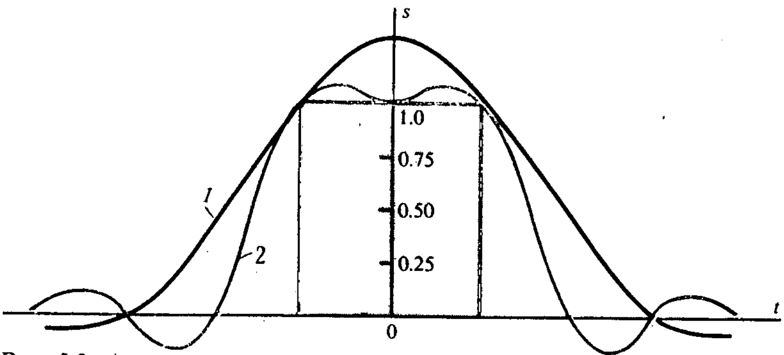
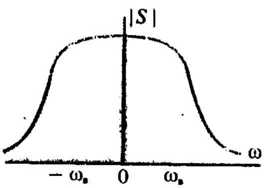



Рис. 5.3. Аппроксимация видеоимпульса:
*1* — двумя членами ряда Котельникова; *2* — тремя членами ряда Котельникова

**Оценка ошибки аппроксимации произвольного сигнала рядом Котельникова.** Если $s(t)$ — произвольный сигнал, то его можно представить суммой

$$s(t) = s_{\text{ос}}(t, \omega_{\text{в}}) + s_{\text{ош}}(t),$$

в которую входит сигнал $s_{\text{ос}}(t, \omega_{\text{в}})$ со спектром, ограниченным значением $\omega_{\text{в}}$, а также сигнал ошибки аппроксимации $s_{\text{ош}}(t)$ со спектром, занимающим бесконечную полосу частот $\omega > \omega_{\text{в}}$.




Спектры указанных сигналов не перекрываются, поэтому сигналы $s_{\text{ос}}$ и $s_{\text{ош}}$ ортогональны, а их энергии, т. е. квадраты норм, складываются:

$$\| s \|^2 = \| s_{\text{ос}} \|^2 + \| s_{\text{ош}} \|^2 .$$

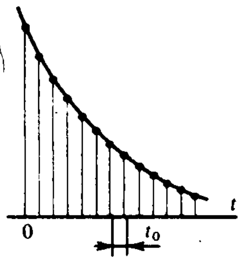
За абсолютную меру ошибки аппроксимации следует принять расстояние, равное норме сигнала ошибки. Если $W_s(\omega)$ — энергетический спектр сигнала $s(t)$, то по теореме Рэлея

$$\| s_{\text{ош}} \| = \left( \frac{1}{\pi} \int\limits_{\omega_{\text{в}}}^{\infty} W_s(\omega)\, d\omega \right)^{1/2} . \tag{5.21}$$

**Пример 5.3.** *Дан экспоненциальный видеоимпульс* $s(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)$, *характеризующийся энергетическим спектром* $W_s = 1/(\alpha^2 + \omega^2)$ *и энергией*

$$\| s \|^2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\alpha} .$$

Эффективная длительность этого импульса (см. гл. 2) $\tau_{\text{и}} = 2.3026/\alpha$.




Предположим, что скорость поступления отсчетных значений такова, что за время $\tau_и$ измеряются 10 отсчетов с интервалом времени между ними.

$$t_0 = \frac{2.3026}{9\alpha} = \frac{0.2558}{\alpha}\ \text{с}.$$

По теореме Котельникова это означает, что при такой процедуре учитываются все частоты вплоть до

$$\omega_в = \pi/t_0 = 12.281\alpha.$$

Норма сигнала ошибки при этом

$$\| s_{ош} \| = \left( \frac{1}{\pi} \int\limits_{\omega_в}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)^{1/2} = \left[ \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_в}{\alpha} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{0.1608}{\sqrt{\alpha}}.$$

Здесь речь идет о теоретически возможном минимуме ошибки

Поскольку $\|s\| = 0.7071/\sqrt{\alpha}$, то относительная ошибка аппроксимации $\| s_{ош} \| / \| s \| = 0.1608/0.7071 = 0.2274$.

▲ решите задачу 7

Видно, что выбранная в этом примере скорость взятия отсчетов недостаточно высока для получения достаточно точной аппроксимации.

**Размерность пространства сигналов, ограниченных по спектру и по длительности.** Примеры вычисления спектральных плотностей импульсных сигналов, приведенные в гл. 2, показывают, что теоретически любой сигнал конечной длительности обладает спектром, неограниченно протяженным по оси частот. Это положение в математике доказывается строго и в общем виде.

Однако из практических соображений принято рассматривать идеализированные модели сигналов, ограниченных как по длительности, так и по протяженности спектра. Подобные модели могут весьма точно описывать сигналы, наблюдаемые в реальных каналах связи.

Пусть $T$ — длительность такого сигнала, а $f_в$ — граничная частота его спектра, выраженная в герцах. При этом база сигнала (см. гл. 4) бдует иметь величину $B = Tf_в$. Для полного (хотя и приближенного в силу указанных причин) описания такого сигнала нужно иметь в распоряжении $N = T/t_0 = 2Tf_в$ независимых отсчетов. Это выражение определяет размерность пространства сигналов, ограниченных по длительности и по частоте.

Число $N$, как правило, весьма велико. Например, для описания сигнала в канале радиовещания с граничной частотой

12 кГц на протяжении 1 мин потребуется $2 \cdot 60 \cdot 1.2 \cdot 10^4 = 1.44 \cdot 10^6$ независимых чисел.

**В теории информации размерность пространства сигналов служит для оценки объема сообщений**

В свое время К. Шеннон предложил удобный способ интерпретации сигналов с конечными длительностью и полосой, заключающийся в том, что каждый такой сигнал отображается единственной точкой в конечномерном евклидовом пространстве с числом измерений $2Tf_в$. Отсчетное значение $s_k$ выступает при этом как проекция отображающей точки на $k$-ю координатную ось. Поскольку метрика пространства евклидова и координатные оси взаимно ортогональны, то длина вектора сигнала

$$r_s = \left(\sum_{k=1}^{2Tf_в} s_k^2\right)^{1/2}. \tag{5.22}$$

Величину $r_s$ можно выразить через энергию сигнала $E_s$ следующим образом. Так как

$$E_s = \sum_{k=1}^{2Tf_в} c_k^2 = \frac{1}{2f_в} \sum_{k=1}^{2Tf_в} s_k^2,$$

то

$$r_s = \sqrt{2E_s f_в} = \sqrt{2Tf_в P_{ср}}, \tag{5.23}$$

где $P_{ср}$ — средняя мощность сигнала. Отсюда следует, в частности, что любые сигналы с фиксированными параметрами $T$ и $f_в$, средняя мощность которых не превосходит уровня $P_0$, отображаются точками, лежащими внутри многомерной сферы, радиус которой

$$\rho(P_0) = \sqrt{2Tf_в P_0}. \tag{5.24}$$

Отметим в заключение, что формулировка теоремы Котельникова может быть несколько расширена [18]. Для конечномерного описания сигналов рассматриваемого вида, действительно, необходимо располагать числом отсчетов, равным $2Tf_в$. Однако не обязательно требовать, чтобы отсчеты были равноотстоящими во времени. Можно также вдвое сократить темп выдачи отсчетов, но в каждой точке измерять как мгновенное значение сигнала, так и величину его первой производной.

## 5.3 Узкополосные сигналы

В этом параграфе изучается особый класс радиотехнических сигналов с ограниченным спектром, которые возникают на выходе частотно-избирательных цепей и устройств. По определению, сигнал называется узкополосным в том случае, если его спектральная плотность отлична от нуля лишь в пределах частотных интервалов шириной П, образующих окрестности точек $\pm\omega_0$. При этом должно выполняться следующее условие: $\Pi/\omega_0 \ll 1$.

Предполагается, что $\omega_0 \neq 0$

Как правило, частоту $\omega_0$, называемую *опорной частотой сигнала*, можно считать совпадающей с центральной частотой спектра, однако в общем случае выбор ее достаточно произволен.

**опорная частота**

**Математическая модель узкополосного сигнала.** Прямой путь к формированию математической модели узкополосного сигнала состоит в следующем. Как известно (см. гл. 2), если $f_1(t)$ — низкочастотный сигнал, спектр которого сосредоточен в окрестности нулевой частоты, то колебание

$$s_1(t) = f_1(t)\cos\omega_0 t$$

будет обладать всеми необходимыми свойствами узкополосного сигнала, поскольку спектр его окажется сконцентрированным вблизи точек $\pm\omega_0$. В равной мере это относится и к сигналу

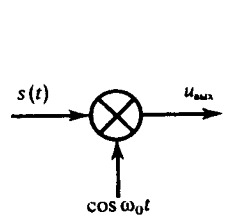
$$s_2(t) = f_2(t)\sin\omega_0 t,$$

отличающемуся лишь фазой «быстрого» сомножителя. Наиболее общее выражение математической модели узкополосного сигнала можно получить, рассмотрев линейную комбинацию вида

**синфазная и квадратурная амплитуды**

$$\boxed{s(t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t.} \tag{5.25}$$

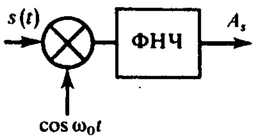
Обе входящие сюда функции времени $A_s(t)$ и $B_s(t)$ являются низкочастотными в том смысле, что их относительные изменения за период высокочастотных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ достаточно малы. Функцию $A_s(t)$ принято называть *синфазной амплитудой* узкополосного сигнала $s(t)$ при заданном значении опорной частоты $\omega_0$, а функцию $B_s(t)$ — его *квадратурной амплитудой.*




Мгновенные значения сигналов $A_s(t)$ и $B_s(t)$ можно определить экспериментально следующим образом. Если имеется перемножающее устройство, на один из входов которого подан узкополосный сигнал $s(t)$, а на другой — вспомогательное колебание, изменяющееся во времени по закону $\cos\omega_0 t$, то на выходе будет наблюдаться сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = A_s(t)\cos^2\omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t)\sin 2\omega_0 t =$$

$$= \frac{A_s(t)}{2} + \frac{A_s(t)}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{B_s(t)}{2}\sin 2\omega_0 t. \tag{5.26}$$




Подадим сигнал с выхода перемножителя на фильтр нижних частот (ФНЧ), подавляющий компоненты с частотами порядка $2\omega_0$. Ясно, что на выходе фильтра будет получено низкочастотное колебание, пропорциональное синфазной амплитуде $A_s$. Если на один из входов перемножителя подать вспомогательное колебание $\sin\omega_0 t$, то система будет выделять из узкополосного сигнала $s(t)$ его квадратурную амплитуду $B_s(t)$.

**Комплексное представление узкополосных сигналов.** Как известно, решение разнообразных задач теории линейных электрических цепей основано на методе комплексных амплитуд, согласно которому гармоническое колебание выражается как вещественная или мнимая часть комплексных функций:

$$U_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=\mathrm{Re}\,[U_0 e^{j\varphi_0}\cdot e^{j\omega_0 t}],$$

$$U_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=\mathrm{Im}\,[U_0 e^{j\varphi_0}\cdot e^{j\omega_0 t}].$$

Не зависящее от времени число $\dot U=U_0 e^{j\varphi_0}$ называется комплексной амплитудой гармонического колебания.

С физической точки зрения узкополосные сигналы представляют собой *квазигармонические колебания*. Поэтому естественно попытаться так обобщить метод комплексных амплитуд, чтобы иметь возможность описывать сигналы вида (5.25).

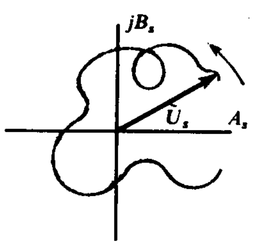
● комплексная огибающая

Введем комплексную низкочастотную функцию

$$\boxed{\tilde U_s(t)=A_s(t)+jB_s(t),} \tag{5.27}$$

называемую *комплексной огибающей узкополосного сигнала*. Легко проверить, что

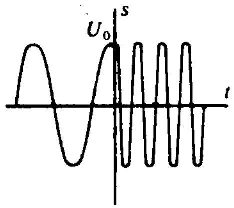
$$s(t)=A_s\cos\omega_0 t-B_s\sin\omega_0 t=\mathrm{Re}\left[\tilde U_s(t)\,e^{j\omega_0 t}\right]. \tag{5.28}$$




Таким образом, комплексная огибающая применительно к узкополосному сигналу играет ту же роль, что и комплексная амплитуда по отношению к простому гармоническому колебанию. Однако комплексная огибающая в общем случае зависит от времени, вектор $\tilde U_s(t)$ совершает на комплексной плоскости некоторое движение, изменяясь как по модулю, так и по положению.

**Пример 5.4.** *Некоторый узкополосный сигнал* $s(t)$ при $t<0$ *и при* $t>0$ *является гармоническим колебанием; в момент времени* $t=0$ *частота сигнала изменяется скачком:*

$$s(t)=\begin{cases}U_0\cos\omega_0 t, & t<0,\\ U_0\cos\omega_1 t, & t>0.\end{cases}$$




Беря в качестве опорной частоты $\omega_0$, получаем следующее выражение для комплексной огибающей сигнала:

$$\tilde{U}_s(t)=\begin{cases} U_0, & t<0, \\ U_0 e^{j(\omega_1-\omega_0)t}, & t>0. \end{cases}$$

Важно подчеркнуть, что *выбор опорной частоты в достаточной мере произволен* и обычно диктуется удобством расчета. Так, например, комплексная огибающая рассматриваемого сигнала относительно опорной частоты $(\omega_0+\omega_1)/2$ имеет вид

$$\tilde{U}_s(t)=\begin{cases} U_0 \exp\left(j\dfrac{(\omega_0-\omega_1)}{2}t\right), & t<0, \\ U_0 \exp\left(j\dfrac{(\omega_1-\omega_0)}{2}t\right), & t>0. \end{cases}$$

**Физическая огибающая, полная фаза и мгновенная частота.** Формулу (5.27), определяющую комплексную огибающую, можно записать также в показательной форме:

$$\boxed{\tilde{U}_s(t)=U_s(t)\exp(j\varphi_s(t)).} \qquad (5.29)$$

Здесь $U_s(t)$ — вещественная неотрицательная функция времени, называемая *физической огибающей* (часто, для краткости, просто *огибающей*), $\varphi_s(t)$ — медленно меняющаяся во времени начальная фаза узкополосного сигнала. Величины $U_s$ и $\varphi_s$ связаны с синфазными и квадратурными амплитудами:

Ранее, изучая модулированные сигналы, мы пользовались именно этим понятием огибающей

$$A_s(t)=U_s(t)\cos\varphi_s(t),$$
$$B_s(t)=U_s(t)\sin\varphi_s(t), \qquad (5.30)$$

откуда вытекает еще одна полезная форма записи математической модели узкополосного сигнала:

$$s(t)=U_s(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_s(t)). \qquad (5.31)$$

Подобно тому, как это делалось ранее при изучении радиосигналов с угловой модуляцией, введем *полную фазу* узкополосного колебания

▲ решите задачи 8—10

$$\psi_s(t)=\omega_0 t+\varphi_s(t)$$

и определим *мгновенную частоту* сигнала, равную производной по времени от полной фазы:

$$\omega_s(t)=\omega_0+\frac{d\varphi_s}{dt}. \qquad (5.32)$$

В соответствии с формулой (5.31) узкополосный сигнал в общем виде представляет сложное колебание, получающееся при одновременной модуляции несущего гармонического сигнала как по амплитуде, так и по фазовому углу.

**Физическая огибающая узкополосного сигнала и ее свойства.** На основании равенств (5.30) запишем формулу, связывающую физическую огибающую $U_s(t)$ с синфазной и квадратурной амплитудами:

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} \tag{5.33}$$

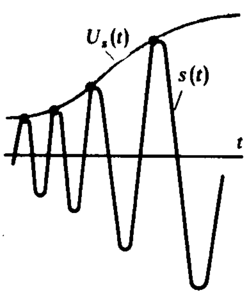
(берется арифметическое значение корня).

Как уже упоминалось, комплексная огибающая узкополосного сигнала определяется неоднозначно. Если вместо частоты $\omega_0$, входящей в формулу (5.28), взять некоторую другую частоту $\omega_0' = \omega_0 + \Delta\omega$, то сигнал $s(t)$ должен быть представлен так:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{U}_s(t)\, e^{-j\Delta\omega t}\, e^{j\omega_0' t}\right]$$

и новое значение комплексной огибающей

$$\boxed{\tilde{U}_s'(t) = \tilde{U}_s(t)\, e^{-j\Delta\omega t}.} \tag{5.34}$$



Узкополосный сигнал и его огибающая

Однако при этом физическая огибающая, являющаяся модулем комплексной огибающей, останется неизменной, поскольку выражение $\exp(-j\Delta\omega t)$ имеет единичный модуль.

Другое важное свойство физической огибающей состоит в том, что в каждый момент времени

$$|s(t)| \leqslant U_s(t).$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из формулы (5.31). Знак равенства здесь имеет место в те моменты времени, когда $\cos(\omega_0 t + \varphi_s(t)) = 1$. Но при этом производные сигналы и его огибающей совпадают:

$$s'(t) = U_s'(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_s(t)) -$$
$$-\left(\omega_0 + \varphi_s'(t)\right) U_s(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_s(t)).$$

Поэтому физическая огибающая действительно «огибает» узкополосный сигнал и имеет смысл мгновенной амплитуды такого колебания.

Большое значение понятия огибающей для радиотехники обусловлено тем, что на практике широко распространены специальные устройства — амплитудные детекторы (демодуляторы), способные с высокой точностью воспроизводить огибающую узкополосного сигнала.


**Свойства мгновенной частоты узкополосного сигнала.** Если комплексная огибающая сигнала представляется вектором, который вращается на комплексной плоскости с неизменной угловой скоростью $\Omega$, т. е.

$$\widetilde{U}_s(t) = U_s(t)\exp(\pm j\Omega t),$$

то в соответствии с (5.32) мгновенная частота узкополосного сигнала постоянна во времени:

$$\omega_s = \omega_0 \pm \Omega .$$

Можно утверждать, что подобный сигнал представляет собой гармоническое колебание, промодулированное только по амплитуде, но не по фазовому углу. В частности, если одна из амплитуд $A_s$ или $B_s$ тождественно обращается в нуль, то в любой момент времени мгновенная частота $\omega_s = \omega_0$.

▲ решите задачу 11

В общем же случае мгновенная частота изменяется во времени по закону

$$\boxed{\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{arctg}(B_s/A_s) = \omega_0 + \frac{B_s'A_s - A_s'B_s}{A_s^2 + B_s^2}\,.} \quad (5.35)$$

**Связь между спектрами сигнала и его комплексной огибающей.** Обозначим спектральную плотность комплексной огибающей узкополосного сигнала $s(t)$ как $G_s(\omega)$.

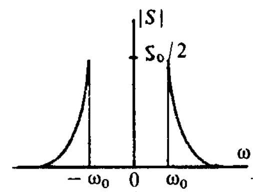
Спектр самого сигнала

$$\boxed{\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\widetilde{U}_s(t)\,\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= {}^1/_2 \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_s\,\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t + {}^1/_2 \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_s^{*}\,\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_0)t}\mathrm{d}t = \\ &= {}^1/_2\, G_s(\omega-\omega_0) + {}^1/_2\, G_s^{*}(-\omega-\omega_0). \end{aligned}} \quad (5.36)$$

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала может быть найдена путем переноса спектра комплексной огибающей из окрестности нулевой частоты в окрестности точек $\pm\omega_0$; амплитуды всех спектральных компонент сокращаются вдвое, а для получения спектра в области отрицательных частот используется операция комплексного сопряжения.

Формула (5.36) дает возможность по известному спектру узкополосного сигнала найти спектр его комплексной огибающей, а затем определить физическую огибающую и мгновенную частоту сигнала.

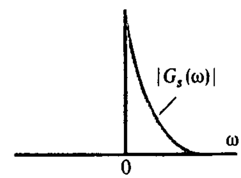
**Пример 5.5.** *Исследовать узкополосный сигнал* s(*t*), *имеющий спектральную плотность, несимметричную относительно частоты* $\omega_0$:




$$S(\omega)\Big|_{\omega>0} = \begin{cases} \dfrac{S_0}{2}\, e^{-b(\omega-\omega_0)}, & \omega > \omega_0, \\ 0, & 0 < \omega < \omega_0. \end{cases}$$

На основании (5.36) спектральная плотность комплексной огибающей

$$G_s(\omega) = \begin{cases} S_0 e^{-b\omega}, & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$




Используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-b + jt)\,\omega d\omega = \frac{S_0}{2\pi}\, \frac{1}{b - jt}.$$

Синфазная и квадратурная амплитуды данного сигнала равны соответственно

▲ решите задачу 12

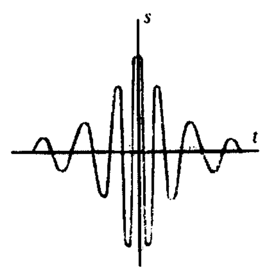
$$A_s(t) = \frac{S_0}{2\pi}\, \frac{b}{b^2 + t^2}; \quad B_s(t) = \frac{S_0}{2\pi}\, \frac{t}{b^2 + t^2}.$$

Находим физическую огибающую:

$$U_s(t) = \left|\tilde{U}_s(t)\right| = \frac{S_0}{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{b^2 + t^2}}.$$

Мгновенная частота рассматриваемого сигнала

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg}(t/b) = \omega_0 + \frac{b}{b^2 + t^2}$$




имеет наибольшее значение, равное $\omega_0 + 1/b$ в момент времени $t = 0$.

Осциллограмма рассматриваемого колебания представляет собой симметричный радиоимпульс с не постоянной во времени частотой заполнения.

## 5.4 Аналитический сигнал и преобразование Гильберта

Ниже будет описан еще один способ комплексного представления сигналов, часто применяемый в теоретических исследованиях. Замечательная особенность данного метода состоит в том, что он позволяет вводить понятия огибающей и мгновенной частоты сигнала без той степени неопределенности, которая свойственна методу комплексных огибающих.

**Аналитический сигнал.** Формула Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

представляющая гармоническое колебание в виде суммы двух комплексно сопряженных функций, наводит на мысль о том, что произвольный сигнал $s(t)$ с известной спектральной плотностью $S(\omega)$ может быть однозначно записан как сумма двух компонент, каждая из которых содержит только положительные или только отрицательные частоты:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{5.37}$$

Назовем функцию

$$\boxed{z_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega} \tag{5.38}$$

*аналитическим сигналом,* отвечающим вещественному колебанию $s(t)$.

Первый из интегралов в правой части (5.37) путем замены переменной $\xi = -\omega$ преобразуется так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{0} S(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} S(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi = {}^1/_2 z_s^* (t).$$

Поэтому формула (5.37) устанавливает следующую связь между сигналами $s(t)$ и $z_s(t)$:

$$s(t) = {}^1/_2 (z_s(t) + z_s^* (t)),$$

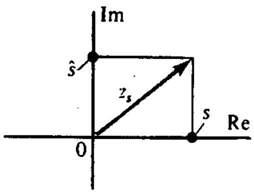
или, что то же самое,

$$\boxed{s(t) = \mathrm{Re}(z_s(t)).} \tag{5.39}$$

Мнимая часть аналитического сигнала

$$\boxed{\hat{s}(t) = \mathrm{Im}(z_s(t))} \tag{5.40}$$

● сопряженный сигнал




называется *сопряженным сигналом* по отношению к исходному колебанию $s(t)$. Итак, аналитический сигнал

$$z_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \tag{5.41}$$

на комплексной плоскости отображается вектором, модуль и фазовый угол которого изменяются во времени. Проекция аналитического сигнала на вещественную ось в любой момент времени равна исходному сигналу $s(t)$.

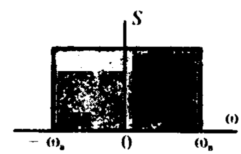
Введя аналитический и сопряженный сигналы, безусловно, нельзя получить каких-либо новых сведений, которые не содержались бы в математической модели сигнала $s(t)$. Однако эти новые понятия открывают прямой путь к систематизации методов исследования сигналов различных классов, в особенности узкополосных колебаний.

На конкретном примере покажем способ вычисления аналитического сигнала по известному спектру исходного сигнала.

**Пример 5.6.** *Пусть* $s(t)$ — *идеальный низкочастотный сигнал с известными параметрами* $S_0$ и $\omega_в$ (*см.* § 5.1).

В этом случае аналитический сигнал

$$z_s(t) = \frac{S_0}{\pi}\int_0^{\omega_в} e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{S_0}{j\pi t}\,[\,e^{j\omega_в t} - 1\,].$$




Выделяя вещественную и мнимую части, получим: $s(t) = \dfrac{S_0\omega_в}{\pi}\times\dfrac{\sin\omega_в t}{\omega_в t}$ (результат, известный ранее),

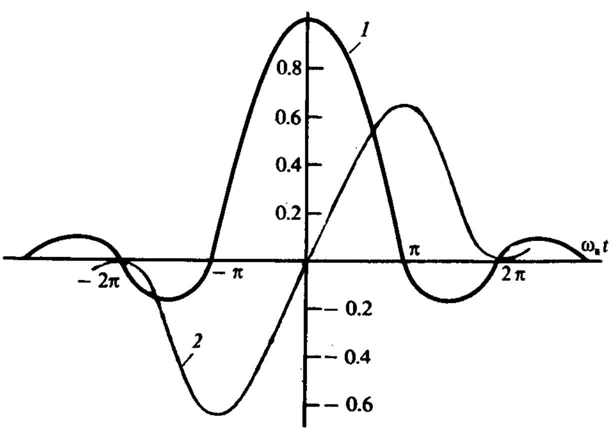



Рис. 5.4. Исходный и сопряженный сигналы:

*1* — идеальный низкочастотный сигнал; *2* — сопряженный к нему сигнал

$$\hat{s}(t) = \frac{S_0\omega_в}{\pi} \sin^2 \frac{\omega_в t}{2} \Big/ \left(\frac{\omega_в t}{2}\right).$$

Графики этих сигналов приведены на рис. 5.4.

**Спектральная плотность аналитического сигнала.** Исследуем спектральную плотность аналитического сигнала, т. е. функцию $Z_s(\omega)$, позволяющую находить $z_s(t)$, используя обратное преобразование Фурье:

$$z_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega.$$

На основании (5.38) можно утверждать, что эта функция отлична от нуля лишь в области положительных частот:

$$\boxed{Z_s(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}} \tag{5.42}$$

Если $\hat{S}(\omega)$ — спектральная плотность сопряженного сигнала, то в силу линейности преобразования Фурье

$$Z_s(\omega) = S(\omega) + j\hat{S}(\omega). \tag{5.43}$$

▲ решите задачи 13 и 14

Поэтому равенство (5.42) будет выполняться только в том случае, когда спектральные плотности исходного и сопряженного сигналов связаны между собой следующим образом:

$$\hat{S}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega) = \begin{cases} -jS(\omega), & \omega > 0, \\ jS(\omega), & \omega < 0. \end{cases} \tag{5.44}$$

Абстрактно можно представить себе такой способ получения сопряженного сигнала: исходное колебание $s(t)$ подается на вход некоторой системы, которая осуществляет поворот фаз всех спектральных компонент на угол —90° в области положительных частот и на угол 90° в области отрицательных частот, не изменяя их по амплитуде. Систему, обладающую такими свойствами, называют *идеальным квадратурным фильтром*.


**Преобразование Гильберта.** Формула (5.44) показывает, что спектральная плотность сопряженного сигнала есть произведение спектра $S(\omega)$ исходного сигнала и функции $-j \operatorname{sgn}(\omega)$. Поэтому сопряженный сигнал является сверткой двух функций: $s(t)$ и $f(t)$, которая служит обратным преобразованием Фурье по отношению к $-j \operatorname{sgn}(\omega)$.

Для удобства вычислений представим функцию $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$ в виде следующего предела:

$$-j\,\mathrm{sgn}(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-j\,\mathrm{sgn}(\omega)\exp(-\varepsilon\,|\,\omega\,|)).$$

Тогда

$$f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{j}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\varepsilon+jt)\,\omega}\,d\omega - \frac{j}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{(-\varepsilon+jt)\,\omega}\,d\omega\right] = \frac{1}{\pi t}.$$

В силу указанного выше сопряженный сигнал связан с исходным сигналом соотношением

Вычисляется свертка двух сигналов

$$\boxed{\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}\,d\tau.} \tag{5.45}$$

Можно поступить и по-иному, выразив сигнал $s(t)$ через $\hat{s}(t)$, который полагается известным. Для этого достаточно заметить, что из (5.44) вытекает следующее соотношение между спектральными плотностями:

$$S(\omega) = j\,\mathrm{sgn}(\omega)\,\hat{S}(\omega)$$

и поэтому соответствующая формула будет отличаться от (5.45) лишь знаком:

$$\boxed{s(t) = -\hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.} \tag{5.46}$$

Формулы (5.45) и (5.46) известны в математике под названием *прямого и обратного преобразований Гильберта*. Символическая запись их такова:

▲ решите задачи 15 и 16

$$\hat{s}(t) = \mathscr{H}[s(t)];$$

$$s(t) = \mathscr{H}^{-1}[\hat{s}(t)]. \tag{5.47}$$

● главное значение интеграла

Поскольку функция $1/(t-\tau)$, называемая ядром этих преобразований, имеет разрыв при $\tau = t$, то интегралы в (5.45) и (5.46) следует понимать в смысле главного значения. Например,

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\xi\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{t-\xi}\frac{s(\tau)}{t-\tau}\,d\tau + \int\limits_{t+\xi}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right].$$

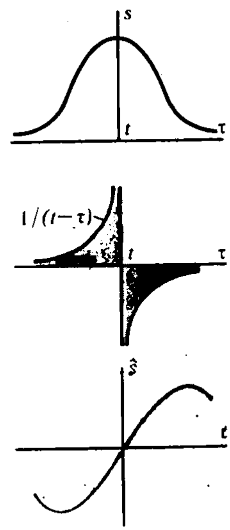
**Некоторые свойства преобразований Гильберта.** Простейшее свойство этих интегральных преобразований — их линейность:

$$\mathscr{H}[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)] = a_1 \mathscr{H}[s_1(t)] + a_2 \mathscr{H}[s_2(t)]$$

при любых постоянных $a_1$ и $a_2$, в чем можно убедиться непосредственно.

Поскольку ядро преобразования Гильберта есть нечетная функция аргумента $\tau$ относительно точки $\tau = t$, то сигнал, сопряженный к константе, тождественно равен нулю:

$$\mathscr{H}[\mathrm{const}] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{const}}{t - \tau} \mathrm{d}\tau = 0.$$




Очень важное свойство преобразования Гильберта состоит также в следующем: *если при каком-нибудь $t$ исходный сигнал $s(t)$ достигает экстремума (максимума или минимума), то в окрестности этой точки сопряженный сигнал проходит через нуль.* Чтобы убедиться в этом, следует на одном чертеже совместить графики $s(\tau)$ и ядра $1/(t - \tau)$. Пусть значение $t$ близко к той величине $\tau$, при которой $s(\tau)$ экстремально. При этом в силу четности сигнала и нечетности ядра будет наблюдаться компенсация площадей фигур, ограниченных горизонтальной осью и кривой, описывающей подынтегральную функцию преобразования Гильберта. Образно говоря, это означает, что если исходный сигнал изменяется во времени «подобно косинусу», то сопряженный к нему сигнал будет изменяться «подобно синусу».

Следует отметить, что преобразования Гильберта имеют *нелокальный характер:* поведение сопряженного сигнала в окрестности какой-либо точки зависит от свойств исходного сигнала на всей оси времени, хотя наибольший вклад дает, конечно, достаточно близкая окрестность рассматриваемой точки.

**Преобразование Гильберта от гармонических сигналов.** Для дальнейшего важно знать сигналы, сопряженные к простым гармоническим колебаниям вида $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Результаты могут быть получены прямым использованием формулы (5.45). Однако проще поступить следующим образом. Пусть некоторый произвольный сигнал $s(t)$ задан своим Фурье-представлением:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)(\cos \omega t + j \sin \omega t)\, \mathrm{d}\omega. \tag{5.48}$$

На основании (5.44) находим аналогичное представление сопряженного сигнала:

▲ решите задачу 17

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -j\,\mathrm{sgn}(\omega)\,S(\omega)\,[\cos\omega t + j\sin\omega t]\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\omega)\,S(\omega)\,[\sin\omega t - j\cos\omega t]\,\mathrm{d}\omega. \qquad (5.49)$$

Сравнение последнего результата с (5.48) приводит к следующим законам преобразования Гильберта:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathscr{H}[\cos\omega t] = \sin\omega t\,\mathrm{sgn}(\omega),\\ &\mathscr{H}[\sin\omega t] = -\cos\omega t\,\mathrm{sgn}(\omega).\end{aligned}} \qquad (5.50)$$

**Преобразование Гильберта от узкополосного сигнала.** Пусть узкополосный сигнал $s(t)$ задан посредством своих синфазной и квадратурной амплитуд, отвечающих некоторой произвольно выбранной опорной частоте:

$$s(t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t. \qquad (5.51)$$

Изучим свойства сигнала, сопряженного по отношению к $s(t)$. Для этого подставим выражение (5.51) в формулу (5.45), разложив медленно меняющиеся функции $A_s(t)$ и $B_s(t)$ в ряд Тейлора относительно точки $\tau = t$:

▲ решите задачу 18

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{t-\tau}\,[A_s(t) + A_s'(t)(t-\tau) + \cdots]\cos\omega_0\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{t-\tau}\,[B_s(t) + B_s'(t)(t-\tau) + \cdots]\sin\omega_0\tau.$$

Приняв во внимание малость производных $A_s'$, $B_s'$, $A_s''$, $B_s''$ и т. д., ограничимся учетом лишь первых членов этих разложений. Тогда приближенно

$$\hat{s}(t) = A_s(t)\mathscr{H}[\cos\omega_0 t] - B_s(t)\mathscr{H}[\sin\omega_0 t] =$$

$$= A_s(t)\sin\omega_0 t + B_s(t)\cos\omega_0 t. \qquad (5.52)$$

Итак, сопряженный сигнал в данном случае также является узкополосным. Последнее равенство означает, что если комплексная огибающая исходного сигнала

$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

то для сопряженного сигнала

$$\tilde{U}_{\hat{s}}(t) = B_s(t) - jA_s(t) = -j\tilde{U}_s(t).$$

Таким образом, комплексная огибающая сопряженного сигнала отличается от комплексной огибающей исходного колебания лишь наличием постоянного фазового сдвига на 90° в сторону запаздывания.

**Огибающая, полная фаза и мгновенная частота.** В рамках метода преобразований Гильберта огибающая $U_s$ произвольного сигнала $s(t)$ определяется как функция, описывающая изменение во времени модуля аналитического сигнала:

Согласно методу преобразований Гильберта, огибающая и мгновенная частота сигнала жестко связаны друг с другом и не могут выбираться произвольно

$$U_s(t) = |\,z_s(t)\,| = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)}\,. \tag{5.53}$$

Целесообразность такого определения может быть проверена на примере огибающей узкополосного сигнала. Здесь на основании (5.51) и (5.52) огибающая

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}\,.$$

Данная формула была получена ранее в § 5.3 из других соображений.

Полная фаза любого сигнала $s(t)$ по определению равна аргументу аналитического сигнала $z_s(t)$:

$$\psi_s(t) = \arg z_s(t) = \operatorname{arctg}\frac{\hat{s}(t)}{s(t)}\,. \tag{5.54}$$

Наконец, мгновенная частота $\omega_s(t)$ сигнала есть производная от полной фазы по времени:

$$\boxed{\omega_s(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{\hat{s}(t)}{s(t)} = \frac{\hat{s}'(t)s(t) - s'(t)\hat{s}(t)}{\hat{s}^2 + s^2}\,.} \tag{5.55}$$

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих вычисление указанных характеристик различных сигналов.

---

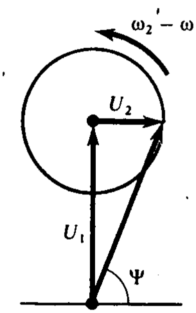
**Пример 5.7.** *Пусть дано простое гармоническое колебание* $s(t) = U_0\cos\omega_0 t$.

Сопряженный сигнал в данном случае $\hat{s}(t) = U_0\sin\omega_0 t$. Огибающая исходного сигнала

$$U_s = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)} = U_0,$$

естественно, не зависит от времени и равна его амплитуде.

Полная фаза $\psi_s(t)=\omega_0 t$ и, наконец, мгновенная частота $\omega_s=\omega_0$. Данный пример показывает, что, определяя огибающую, полную фазу и мгновенную частоту через преобразование Гильберта, мы получаем результаты, согласующиеся с нашими обычными представлениями о свойствах гармонических колебаний.




Скорость изменения фазы мала

**Пример 5.8.** *Колебание* $s(t)$ *представляет собой сумму двух гармонических составляющих с различными амплитудами и частотами*:

$$s(t)=U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t.$$

Поскольку

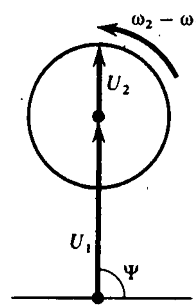
$$\hat{s}(t)=U_1\sin\omega_1 t+U_2\sin\omega_2 t,$$

то огибающая такого сигнала изменяется во времени по закону

$$U_s(t)=\sqrt{U_1^2+U_2^2+2U_1U_2\cos(\omega_2-\omega_1)t}.$$

Полная фаза сигнала

$$\psi_s(t)=\operatorname{arctg}\frac{U_1\sin\omega_1 t+U_2\sin\omega_2 t}{U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t}.$$




Скорость изменения фазы велика

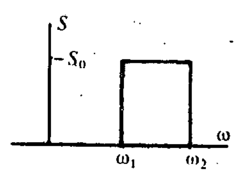
Для вычисления мгновенной частоты следует воспользоваться формулой (5.35), которая приводит к следующему результату:

$$\omega_s(t)=\frac{\omega_1U_1^2+\omega_2U_2^2+U_1U_2(\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_2-\omega_1)t}{U_1^2+U_2^2+2U_1U_2\cos(\omega_2-\omega_1)t}.$$

Непостоянство мгновенной частоты во времени связано с тем, что в данном случае фаза результирующего вектора, отображающего сумму двух гармонических колебаний, изменяется с различной скоростью в зависимости от того, как ориентированы по отношению друг к другу векторы слагаемых.

**Пример 5.9.** *Рассмотреть идеальный полосовой сигнал, спектр которого ограничен интервалом частот* $[\omega_1,\omega_2]$.

Соответствующий аналитический сигнал




$$z_s(t)=\frac{S_0}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{S_0}{\pi t}[(\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t)-j(\cos\omega_2 t-\cos\omega_1 t)].$$

Огибающая исходного полосового сигнала

$$U_s(t)=\frac{S_0}{\pi t}\sqrt{(\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t)^2+(\cos\omega_2 t-\cos\omega_1 t)}=$$

$$=\frac{S_0(\omega_2-\omega_1)}{\pi}\left|\frac{\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right|.$$

Наконец, мгновенная частота сигнала

$$\omega_s = \frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}\frac{-(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)}{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}\right].$$

Выполнив несложные проеобразования в соответствии с формулой (5.38), находим, что величина

$$\omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2$$

здесь не зависит от времени и равняется центральной частоте того интервала, в котором сосредоточен спектр.

---

Подводя итог, можно сказать, что понятие аналитического сигнала дает возможность однозначно вводить огибающую и мгновенную частоту узкополосных колебаний, не применяя несколько искусственного понятия опорной частоты, характерного для метода комплексной огибающей. Более того, формулы (5.53)—(5.55) сохраняют свой смысл применительно к сигналам произвольного вида, не обязательно удовлетворяющим условиям квазигармоничности (узкополосности). Однако здесь, естественно, уже нельзя требовать, чтобы огибающая и мгновенная частота обладали простым и наглядным физическим смыслом.

**Заключительные замечания.** Теория аналитического сигнала применительно к задачам теории колебаний и волн была развита в 40-х годах в работах Габора [17]. Однако преобразования Гильберта появились в математике еще раньше в связи с решением так называемой краевой задачи теории аналитических функций [10]. Сущность этой задачи состоит в следующем.

Пусть $\zeta=\xi+j\eta$ — комплексная переменная, $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости, т. е. при $\eta>0$. На вещественной оси, являющейся границей области аналитичности, функция $f(\xi)$ имеет как вещественную, так и мнимую части:

$$f(\xi) = f_1(\xi) + jf_2(\xi).$$

Требуется найти закон, связывающий между собой функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$. Решение задачи дается преобразованиями Гильберта:

$$f_2(\xi) = \mathscr{H}[f_1(\xi)]; \quad f_1(\xi) = \mathscr{H}^{-1}[f_2(\xi)].$$

Можно показать, что аналитический сигнал $z_s(t)$ как раз обладает свойством аналитичности в верхней полуплоскости, если его рассматривать как функцию комплексной переменной $t=t'+jt''$. Это свойство и определяет происхождение термина.

За последнее время методы аналитического сигнала и преобразования Гильберта прочно вошли в арсенал теоретической радиотехники. С некоторыми интересными проблемами в этой области можно ознакомиться в работе [24].

### Результаты

- *Сигналы с ограниченным спектром характеризуются неограниченной протяженностью во времени.*
- *Простейшие сигналы этого класса — идеальный низкочастотный и идеальный полосовой — наблюдаются на выходе соответствующих идеальных фильтров, возбуждаемых дельта-импульсами со стороны их входов.*
- *Два идеальных низкочастотных сигнала могут стать ортогональными при соответствующем выборе сдвига во времени.*
- *Ряд Котельникова представляет собой обобщенный ряд Фурье, дающий разложение сигнала по системе базисных функций, в спектре которых не содержится частот выше определенной граничной частоты* $f_в$. *Базисные функции здесь являются идеальными низкочастотными сигналами, сдвинутыми во времени друг относительно друга на интервал* $1/(2f_в)$.
- *Коэффициентами ряда Котельникова служат отсчеты разлагаемого сигнала, берущиеся через равные промежутки времени.*
- *Если в спектре сигнала отсутствуют компоненты с частотами выше* $f_в$, *то ряд Котельникова дает точное (в среднеквадратичном смысле) представление сигнала.*
- *Ширина спектра узкополосного сигнала должна быть значительно меньше, чем значение центральной частоты. Узкополосные сигналы характерны своей квазигармоничностью; их амплитуда и частота в общем случае медленно изменяются во времени.*
- *Понятие комплексной огибающей является обобщением понятия комплексной амплитуды на узкополосные сигналы.*
- *Физическая огибающая равна модулю комплексной огибающей. Ее вид не зависит от выбора опорной частоты сигнала.*
- *Мгновенная частота узкополосного сигнала есть сумма опорной частоты и производной по времени от аргумента комплексной огибающей.*
- *Спектр узкополосного сигнала получается из спектра его комплексной огибающей путем переноса последнего на величину опорной частоты.*
- *Каждому вещественному сигналу может быть сопоставлен комплексный аналитический сигнал, содержащий спектральные компоненты лишь в области положительных частот.*
- *Вещественная часть аналитического сигнала равна исходному сигналу. Мнимая часть его называется сопряженным сигналом.*
- *Связь между исходным и сопряженным сигналами устанавливается парой интегральных преобразований Гильберта.*

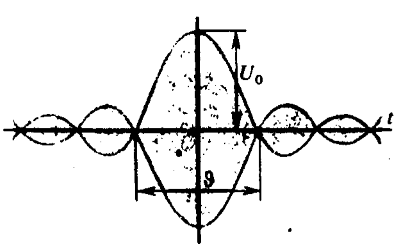
◇◇ *Огибающая произвольного сигнала равна модулю соответствующего аналитического сигнала. Мгновенная частота определяется как производная от аргумента аналитического сигнала .*

## Вопросы

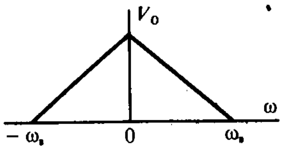
1. Почему сигналы с ограниченным спектром являются подходящими математическими моделями для описания реальных колебаний, наблюдаемых в радиотехнических устройствах?
2. Изобразите примерные осциллограммы идеального низкочастотного и идеального полосового сигналов.
3. Как объяснить тот факт, что с ростом верхней граничной частоты растет экстремальное значение ИНС, а также максимальное значение его производной?
4. Начертите графики нескольких функций, принадлежащих базису Котельникова. Перечислите их характерные свойства.
5. Напишите формулу ряда Котельникова и дайте словесную формулировку соответствующей теоремы.
6. Графически изобразите случай, когда отсчеты берутся недостаточно часто для того, чтобы можно было воспользоваться рядом Котельникова для точного отображения сигнала.
7. Чем определяется ошибка представления сигнала рядом Котельникова?
8. Каков наглядный смысл размерности пространства сигналов, ограниченных по спектру и по длительности?
9. Начертите характерную осциллограмму узкополосного сигнала.
10. Объясните способ аппаратурного нахождения синфазной и квадратурной амплитуд узкополосного сигнала.
11. Сформулируйте свойства физической огибающей узкополосного сигнала.
12. Поясните способ введения понятия аналитического сигнала.
13. Как связаны между собой спектральные плотности исходного и сопряженного сигналов?
14. Перечислите основные свойства преобразования Гильберта.
15. Поясните особенность вычисления преобразования Гильберта от узкополосного сигнала.
16. Почему метод аналитического сигнала обладает большей общностью по сравнению с методом комплексной огибающей?

## Задачи

1. Идеальный низкочастотный сигнал имеет модуль спектральной плотности, равный $5.5 \times 10^{-4}$ В·с в полосе частот от нуля до 25 кГц. Определите максимальную величину мгновенного значения такого сигнала.

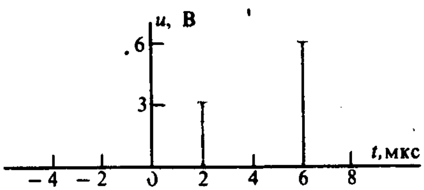



2. Измерения показали, что идеальный полосовой сигнал характеризуется следующими параметрами: $\vartheta = 20$ мкс, $U_0 = 15$ В. Найдите ширину полосы частот этого сигнала и модуль его спектральной плотности в пределах полосы.
3. Оцените максимальное значение производной идеального низкочастотного сигнала, рассмотренного в задаче 1.
4. Автоматическая метеостанция передает данные о состоянии атмосферы каждые два часа. Какова наивысшая частота в спектре передаваемого сигнала?
5. Сигнал с ограниченным спектром $v(t)$ имеет график спектральной плотности $V(\omega)$ треугольного вида:




Определите коэффициенты ряда Котельникова для этого сигнала, полагая, что отсчеты берутся через интервалы времени, равные $\pi/\omega_в$.

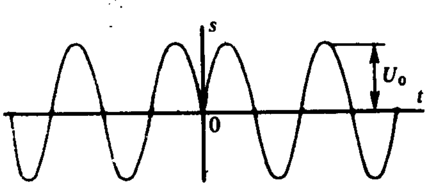
6. Сигнал с ограниченным спектром точно описывается двумя отличными от нуля отсчетами:




Чему равна верхняя частота в спектре этого сигнала? Найдите мгновенное значение сигнала в момент времени 17 мкс.

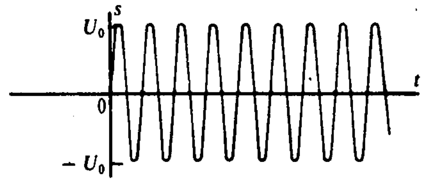
7. Как изменится величина ошибки аппроксимации сигнала, рассмотренного в примере 5.3, если темп выдачи отсчетов увеличить в 10 раз?

8. Сигнал $s(t)$ как при $t>0$, так и при $t<0$ представляет собой гармоническое колебание; в момент времени $t=0$ фаза сигнала испытывает скачок на 180°:




Напишите выражение для комплексной огибающей этого сигнала.

9. Найдите выражение для комплексной огибающей импульса включения гармонической э. д. с.:




Обратите внимание на величину начальной фазы сигнала.

10. Определите комплексную огибающую сигнала с однотональной угловой модуляцией:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin\Omega t).$$

11. Напишите выражение комплексной огибающей ЛЧМ-сигнала (см. гл. 4).

12. Узкополосный сигнал в окрестности опорной частоты $\omega_0$ имеет спектральную плотность гауссова вида

$$S(\omega) = \frac{S_0}{2} \exp\left[-b(\omega - \omega_0)^2\right].$$

Определите спектр комплексной огибающей этого сигнала. Найдите закон изменения во времени физической огибающей. Вычислите мгновенную частоту сигнала.

Полученные результаты сравните с теми, которые приведены в примере 5.5. Чем объясняется их принципиальное различие?

13. Найдите аналитические сигналы, соответствующие простым гармоническим колебаниям вида $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$.

14. Вычислите аналитический сигнал, отвечающий радиоимпульсу с прямоугольной огибающей

$$u(t) = U_0[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_и)] \cos \omega_0 t.$$

15. Вычислите сигнал, сопряженный с гармоническим колебанием $\cos \omega_0 t$ непосредственно, используя преобразование Гильберта в форме (5.45).

16. Решите задачу, аналогичную предыдущей, применительно к сигналу вида $s(t) = \sin \omega_0 t / (\omega_0 t)$.

17. Найдите сигнал, сопряженный по отношению к периодическому колебанию, заданному своим рядом Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k).$$

18. Покажите, что синфазная и квадратурная амплитуды узкополосного сигнала $s(t)$ связаны с компонентами аналитического сигнала следующим образом:

$$A_s(t) = s(t)\cos\omega_0 t + \hat{s}(t)\sin\omega_0 t,$$

$$B_s(t) = \hat{s}(t)\cos\omega_0 t - s(t)\sin\omega_0 t.$$

## Более сложные задания

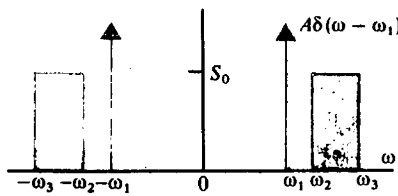
19. Докажите теорему Котельникова в частотном представлении, которая формулируется так: если сигнал $s(t)$ тождественно равен нулю вне интервала $t_1 < t < t_2$, то его спектральная плотность $S(\omega)$ однозначно определяется последовательностью ее значений в точках на оси частот, отстоящих друг от друга на $1/(t_2 - t_1)$ Гц друг от друга.

20. Обобщите теорему Котельникова на случай полосовых сигналов, спектр которых занимает полосу частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Найдите аналитические выражения базисных функций для таких сигналов.

21. Пусть узкополосный сигнал представлен в виде $s(t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t$. Проанализируйте те условия, которые надо наложить на медленно меняющиеся функции $A_s(t)$ и $B_s(t)$ для того, чтобы мгновенная частота процесса была неизменной во времени.

22. Определите и исследуйте огибающую, полную фазу и мгновенную частоту идеального низкочастотного сигнала, рассмотренного в примере 5.6.

23. Найдите аналитический сигнал для колебания, у которого спектральная плотность имеет как регулярную часть, так и составляющую с дельта-особенностью.




24. Методами теории аналитического сигнала изучите огибающую и мгновенную частоту однотонального ОБП-сигнала (см. гл. 4).

25. Используя обобщенную формулу Рэлея, докажите, что если $s(t)$ — сигнал с конечной энергией, то сопряженный по Гильберту сигнал $\hat{s}(t)$ ортогонален к нему.

26. Докажите, что сигналы $s(t)$ и $\hat{s}(t)$ имеют не только равные энергии, но и одинаковые функции автокорреляции.

27. Покажите, что для прямоугольного видеоимпульса

$$u(t) = \begin{cases} U_0, & -\tau_и/2 < t < \tau_и/2, \\ 0, & |t| > \tau_и/2 \end{cases}$$

сопряженный сигнал

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\tau_и + 2t}{\tau_и - 2t}\right|.$$

# Глава 6
# Основы теории случайных сигналов

В радиотехнике случайные сигналы чаще всего имеют вид *шумов*. Эти хаотически изменяющиеся во времени электромагнитные колебания возникают в разнообразных физических системах, когда носители заряда, например электроны, совершают беспорядочные движения.

Математическую модель случайного сигнала используют также и в теории информации для вероятностного описания закономерностей, присущих сообщениям, имеющим вид осмысленных текстов на том или ином языке.

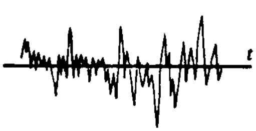
Наконец, случайную (статистическую) природу имеют сигналы в современных лазерных линиях связи. Сравнительно большая энергия кванта электромагнитного поля (фотона) делает здесь принципиально необходимым учет специфического *квантового шума*, который проявляет себя при регистрации и приеме слабых оптических сигналов.

## 6.1 Случайные величины и их характеристики

Напомним важнейшие понятия теории вероятностей, необходимые для решения задач статистической радиотехники. Более полное изложение этих вопросов можно найти в [3, 15].

**Вероятностные законы.** Отличительная черта случайного сигнала состоит в том, что его мгновенные значения не могут быть заранее предсказаны и вычислены. Однако, изучая такой сигнал, можно прийти к выводу, что ряд его свойств весьма точно описывается в вероятностном смысле. Например, напряжение на зажимах шумящего элемента электрической цепи состоит из некоторого среднего уровня и быстро меняющихся во времени случайных отклонений, называемых *флуктуациями*. Характер этих флуктуаций обычно таков, что чаще всего наблюдаются относительно небольшие отклонения от среднего уровня; чем больше эти отклонения по абсолютной величине, тем реже они наблюдаются. Уже в этом проявляется некоторая статистическая закономерность. Располагая сведениями о вероятностях флуктуаций различной величины, удается создать математическую модель случайного колебания, вполне приемлемую как в научном, так и в прикладном смысле.

● **флуктуация**




Большие отклонения редки

Вероятностные законы возникают всегда, если физическая система, порождающая случайный сигнал, представляет собой объединение очень большого числа более мелких подсистем, совершающих некоторые индивидуальные движения, в большей или меньшей степени независимые друг от друга. Так, хорошо известное из практики постоянство измеряемого тока, возникающего в цепи под действием источника постоянной э. д. с., есть следствие того, что для создания тока величиной, 'кажем, 1.6 мА через сечение проводника за 1 с должно пройти громадное число (порядка $10^{16}$) электронов, так что случайные флуктуации скоростей отдельных электронов весьма мало сказываются на средней величине тока.

Заряд электрона
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл

**Вероятность.** Современная теория вероятностей представляет собой аксиоматизированную ветвь математики, обобщившую обширный материал, накопленный наукой при изучении самых разнообразных случайных явлений.

В основе этой теории лежит понятие полного множества «элементарных исходов» или случайных событий $\Omega = \{A_1, A_2, \dots \dots A_n, \dots\}$. Символы $A_i$ отображают всевозможные исходы некоторого случайного эксперимента. Каждому событию $A_i \in \Omega$ сопоставляется вещественное число $P(A_i)$, которое называется *вероятностью* этого события.

Принимаются следующие аксиомы:

1. Вероятность неотрицательна и не превосходит единицы:

$$0 \leqslant P(A_i) \leqslant 1.$$

Аксиомы теории вероятностей были сформулированы в 30-х годах академиком А. Н. Колмогоровым

2. Объединение всех событий, содержащихся в $\Omega$, есть достоверное событие:

$$\sum_{A_i \in \Omega} P(A_i) = 1.$$

3. Если $A$ — некоторое сложное событие, то его вероятность равна сумме всех элементарных вероятностей:

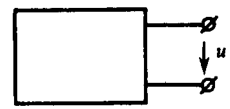
$$P(A) = \sum_{A_i \in A} P(A_i).$$

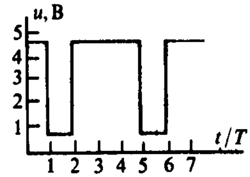
**Измерение вероятностей.** Математическое понятие вероятности случайного события является абстрактной характеристикой, присущей не самим интересующим нас объектам материального мира, а их теоретико-множественным моделям. Требуется некоторое дополнительное соглашение для того, чтобы можно было извлекать сведения о вероятностях из данных эксперимента.

Общепринято оценивать вероятность события относительной частотой благоприятных исходов. Если проведено $N$ независимых испытаний, причем в $n$ из них наблюдалось событие $A$, то *эмпирическая (выборочная) оценка вероятности* $P(A)$, которую можно получить из этой серии, такова:

$$\boxed{P_{\text{эмп}}(A) = n/N.} \tag{6.1}$$

**Пример 6.1.** *Сигнал u на выходе некоторого электронного устройства может принимать лишь два значения:* $u_1 = 4.5$ В *(«высокий потенциал», событие* $A_1$*) и* $u_2 = 0.5$ В *(«низкий потенциал», событие* $A_2$*). Через равные промежутки времени T случайным образом может происходить смена состояний системы. Эксперимент состоит в многократном измерении мгновенного значения сигнала на выходе. Моменты измерений произвольны, однако интервал времени между ними значительно превосходит T.*




Предположим, что проведя 100 независимых опытов, мы 43 раза наблюдали событие $A_1$ и 57 раз — событие $A_2$. В соответствии с (6.1) эмпирические оценки вероятностей $P_{\text{эмп}}(A_1) = 0.43$ и $P_{\text{эмп}}(A_2) = 0.57$. Из данных опыта отнюдь не следует, что именно такими должны быть и теоретические вероятности этих событий. Скорее всего, экспериментатор выскажет гипотезу о том, что эти события равновероятны: $P(A_1) = P(A_2) = 0.5$. Однако если такие же эмпирические оценки получаются в серии из 10 000 опытов, то эта гипотеза, по-видимому, должна быть отвергнута.

▲ решите задачу 1

**Функция распределения и плотность вероятности.** Пусть $X$ — случайная величина, т. е. всевозможные вещественные числа $x$, принимающие случайные значения из интервала $-\infty < x < +\infty$. Исчерпывающее описание статистических свойств $X$ можно получить, располагая неслучайной функцией $F(x)$ вещественного аргумента $x$, которая равна вероятности того, что случайное число из $X$ примет значение, равное или меньшее конкретного $x$:

$$\boxed{F(x) = P(X \leqslant x).}$$

Функция $F(x)$ называется *функцией распределения* случайной величины $X$. Если $X$ может принимать любые значения, то $F(x)$ является гладкой неубывающей функцией, значения которой лежат в интервале $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. Имеют место следующие предельные равенства: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Производная от функции распределения

$$p(x) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}x$$

есть *плотность распределения вероятности* (или, короче, *плотность вероятности*) данной случайной величины.

Очевидно, что

$$\boxed{p(x)\,\mathrm{d}x = P(x < X \leqslant x + \mathrm{d}x),}$$

т. е. величина $p(x)\mathrm{d}x$ есть вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал $(x, x+\mathrm{d}x)$.

Для непрерывной случайной величины $X$ плотность вероятности $p(x)$ представляет собой гладкую функцию. Если же $X$ — дискретная случайная величина, принимающая фиксированные значения $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$ с вероятностями $\{P_1, P_2, \dots, P_m, \dots\}$ соответственно, то для нее

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i).$$

Как в одном, так и в другом случае плотность вероятности должна удовлетворять условию неотрицательности

$$p(x) \geqslant 0$$

▲ решите задачу 2

и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

**Усреднение. Моменты случайной величины.** В результате эксперимента часто получают *средние значения* тех или иных функций от случайных величин. Если $\varphi(x)$ — заданная функция от $x$ (исхода случайного испытания), то, по определению, ее среднее значение

$$\boxed{\overline{\varphi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x.} \qquad (6.2)$$

Черта сверху означает операцию усреднения

Из этого выражения следует, что наибольший вклад в среднее значение дают те значения $x$, при которых одновременно велики как усредняемая функция $\varphi(x)$, так и плотность вероятности $p(x)$.

В любой статистической теории широко применяются особые числовые характеристики случайных величин, называемые их *моментами*. Момент $n$-го порядка случайной величины $X$ есть среднее значение $n$-й степени случайной переменной:

● моменты случайной величины

$$\overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3)$$

Простейшим является момент первого порядка, так называемое *математическое ожидание*

Математическое ожидание обобщает в вероятностном смысле понятие среднего арифметического

$$m_x = \overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx, \tag{6.4}$$

которое служит теоретической оценкой для среднего значения случайной величины, получаемого в достаточно обширных сериях испытаний.

Момент второго порядка определяется как усредненное значение квадрата случайной величины:

$$m_2 = \overline{x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx. \tag{6.5}$$

В теории вероятностей также используются *центральные моменты* случайных величин, которые определяются так:

$$\mu_n = \overline{(x-\overline{x})^n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^n p(x)\,dx. \tag{6.6}$$

● дисперсия

Важнейший центральный момент — *дисперсия*

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = \overline{(x-\overline{x})^2}. \tag{6.7}$$

Очевидно, что

$$\sigma_x^2 = \overline{(x^2 - 2x\overline{x} + \overline{x}^2)} = \overline{x^2} - \overline{x}^2. \tag{6.8}$$

● среднеквадратичное отклонение

Величина $\sigma_x$, т. е. квадратный корень из дисперсии, называется *среднеквадратичным отклонением*. Она служит для количественного описания меры разброса результатов отдельных случайных испытаний относительно выборочного среднего.

**Равномерное распределение.** Пусть некоторая случайная величина $X$ может принимать значения лишь из области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, причем вероятности попадания в любые внутренние подынтервалы одинаковой ширины $\Delta x$ равны. Тогда, очевидно, плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1/(x_2 - x_1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

Функция распределения найдется путем интегрирования:

▲ решите задачи 3 и 4

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_2 - x_1}{2},$$

естественно, совпадает с центром интервала $(x_1, x_2)$.

Равномерное распределение часто используется в теории погрешностей

Как легко проверить, дисперсия случайной величины с равномерным распределением

$$\sigma_x^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.$$

**Гауссово (нормальное) распределение.** В теории случайных сигналов фундаментальное значение имеет гауссова плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{6.9}$$

определяемая двумя числовыми параметрами $m$ и $\sigma$. Соответствующий график представляет собой колоколообразную кривую с единственным максимумом в точке $x=m$ (рис. 6.1).

Следует обратить внимание на то, что при уменьшении $\sigma$ график все более локализуется в окрестности точки $x = m$

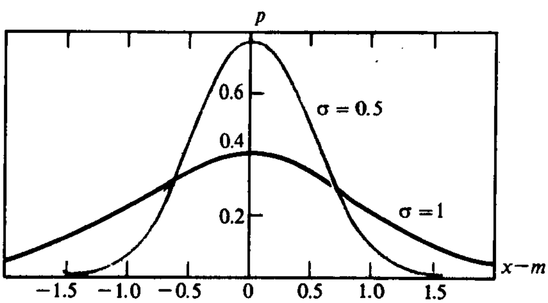



Рис. 6.1. График гауссовой плотности вероятности при различных значениях параметра $\sigma$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что параметры гауссова распределения имеют смысл соответственно математического ожидания и дисперсии:

$$\bar{x} = m; \quad \sigma_x^2 = \sigma^2.$$

Функция распределения гауссовой случайной величины

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right] d\xi.$$

Замена переменной $t=(\xi-m)/\sigma$ приводит ее к виду

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (6.10)$$

где интеграл вероятностей [40]

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

График функции (рис. 6.2) имеет вид монотонной кривой, изменяющейся от нуля до единицы.

В окрестности начала координат функция имеет практически линейный участок

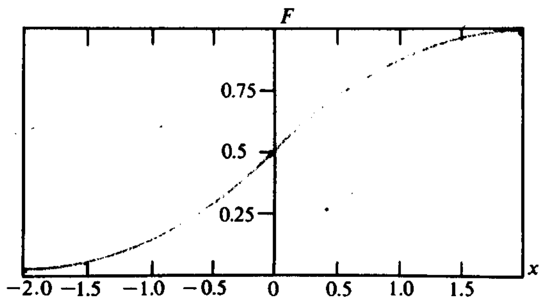
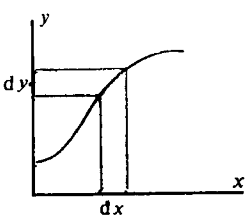



Рис. 6.2. График функции распределения гауссовой случайной величины

**Плотность вероятности функции от случайной величины.** Положим, что $Y$ — случайная величина, связанная с $X$ однозначной функциональной зависимостью вида $y=f(x)$. Попадание случайной точки $x$ в интервал шириной $dx$ и попадание случайной точки $y$ в отвечающий ему интервал шириной $|dy|=|f'(x)|dx$ являются событиями с одинаковой вероятностью $p_x(x)dx=|p_y(y)dy|$, откуда




$$p_y(y)=p_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=p_x(g(y))\left|\frac{dg}{dy}\right|, \quad (6.11)$$

где $g(y)=x$ — функция, обратная к $f(x)=y$.

Если функциональная связь между величинами $X$ и $Y$ неоднозначна, так что имеется несколько обратных функций $x_1=g_1(y)$, $x_2=g_2(y)$, ..., $x_N=g_N(y)$, то (6.11) обобщается следующим образом:

$$p_y(y)=\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right|. \quad (6.12)$$

**Пример 6.2.** *Линейное преобразование гауссовой случайной величины.*

Пусть $Y=aX+b$, причем плотность вероятности

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Поскольку $|dx/dy| = 1/|a|$, то на основании (6.11)

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\,|a|} \exp\left[-\frac{(y-b-ma)^2}{2a^2\sigma^2}\right]$$

▲ решите задачу 7

Итак, гауссов характер случайной величины сохраняется при линейном преобразовании. Величина, полученная в результате такого преобразования, имеет математическое ожидание $\overline{y}=b+ma$ и дисперсию $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$.

---

**Характеристическая функция.** В теории вероятностей большую роль играет статическое среднее вида

$$\boxed{\Theta(v) = \overline{e^{jvx}} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, e^{jvx}\, dx,} \tag{6.13}$$

называемое *характеристической функцией* случайной величины $X$. С точностью до коэффициента функция $\Theta(v)$ есть преобразование Фурье от плотности вероятности и поэтому

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v)\, e^{-jvx}\, dv. \tag{6.14}$$

Ясно, что одну и ту же случайную величину можно с равным успехом описывать как характеристической функцией, так и плотностью вероятности. Выбор того или иного варианта диктуется удобствами вычислений.

Опуская элементарные выкладки, приведем некоторые результаты:

для случайной величины с равномерным распределением на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$

$$\Theta(v) = [\exp(jav) - 1]/(jav), \tag{6.15}$$

для гауссовой случайной величины с заданными параметрами $(m, \sigma)$

$$\Theta(v) = \exp[jmv - \sigma^2 v^2/2]. \tag{6.16}$$

Характеристическая функция позволяет достаточно просто получать моменты случайных величин. Действительно,

$$\frac{d^n\Theta(v)}{dv^n} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\, e^{jvx}\, dx.$$

▲ решите задачу 6

Полагая здесь $v=0$ и сравнивая с (6.3), находим

$$m_n = j^{-n}\,\Theta^{(n)}(0). \tag{6.17}$$

С помощью характеристических функций удобно находить плотности вероятности случайных величин, подвергнутых функциональному преобразованию. Так, если $y=f(x)$, то $\Theta_y(v) = \overline{\exp(jvy)} = \overline{\exp(jvf(x))}$. Если удастся вычислить преобразование Фурье вида (6.14), то поставленная задача будет решена.

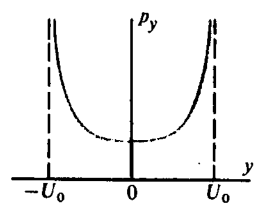
**Пример 6.3.** *Пусть* $y=U_0\cos x$, где $U_0=\mathrm{const}$, *в то время как* $x$ — *значение случайной величины, равномерно распределенной на интервале* $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Поскольку $p_x(x)=1/(2\pi)$, то

$$\Theta_y(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(jvU_0\cos x)\, dx = J_0(vU_0),$$

где $J_0$ — функция Бесселя первого рода с нулевым индексом. Используя табличный интеграл [40], получаем

$$p_y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_0(vU_0)\, e^{jvy}\, dv = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{U_0^2-y^2}}, & |y|<U_0, \\ 0, & |y|>U_0. \end{cases}$$




Характерный вид графика плотности вероятности говорит о том, что если выполнить большую серию опытов, каждый раз случайным образом выбирая значения $x$ из указанного интервала, то величина $U_0\cos x$ чаще всего будет принимать значения, близкие к $\pm U_0$.

## 6.2 Статистические характеристики систем случайных величин

Свойства случайных сигналов принято описывать, рассматривая не просто те величины, которые наблюдаются в какой-нибудь момент времени, а изучая совокупности этих величин, относящихся к различным фиксированным моментам. Ниже будут изложены некоторые вопросы теории подобных многомерных случайных величин.

**Функция распределения и плотность вероятности.** Пусть даны случайные величины $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, образующие $n$-мерный случайный вектор $\vec{X}$. По аналогии с одномерным случаем, функция распределения этого вектора

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Отвечающая ей $n$-мерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ удовлетворяет соотношению

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= P\{x_1 < X_1 \leqslant x_1 + dx_1, \ldots, x_n < X_n \leqslant x_n + dx_n\}.$$

Очевидно, что функция распределения может быть найдена путем интегрирования плотности вероятности:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1 \ldots d\xi_n .$$

Любая многомерная плотность обладает свойствами, обычными для плотности вероятности:

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p\,d\xi_1 \ldots d\xi_n = 1.$$

Зная $n$-мерную плотность, всегда можно найти $m$-мерную плотность при $m<n$, интегрируя по «лишним» координатам:

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots, \xi_n)\,d\xi_{m+1} \ldots d\xi_n .$$

**Вычисление моментов.** Располагая соответствующей многомерной плотностью вероятности, можно находить средние значения любых комбинаций из рассматриваемых случайных величин и, в частности, вычислять их моменты. Так, ограничиваясь наиболее важным для дальнейшего случаем двумерной случайной величины, по аналогии с (6.4) и (6.7) находим математические ожидания:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2, \\ \overline{x}_2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

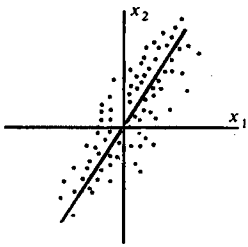
и дисперсии:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x}_1)^2 p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2, \\ \sigma_2^2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \overline{x}_2)^2 p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 . \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

ковариационный момент

Новой по сравнению с одномерным случаем является возможность образовать смешанный момент второго порядка — так называемый *ковариационный момент* системы двух случайных величин:

$$k_{12} = \overline{x_1 x_2} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2. \tag{6.20}$$




**Корреляция.** Предположим, что проведена серия опытов, в результате которых каждый раз наблюдалась двумерная случайная величина $\{x_1, x_2\}$. Условимся исход каждого опыта изображать точкой на декартовой плоскости.

Может оказаться, что изображающие точки в среднем располагаются вдоль некоторой прямой, т. е. в каждом отдельном испытании величины $x_1$ и $x_2$ *имеют чаще всего одинаковый знак*. Это наводит на мысль о том, что между $x_1$ и $x_2$ есть статистическая связь, называемая *корреляцией*.

Однако возможен случай совершенно хаотического расположения точек на плоскости. Говорят, что при этом рассматриваемые величины *некоррелированы*, т. е. между ними нет вероятностно устойчивой связи.

корреляционный момент

Количественной характеристикой степени статистической связи двух случайных величин служит их ковариационный момент $k_{12}$ или, что часто удобнее, *корреляционный момент* $K_{12}$, определяемый как среднее значение произведения $(x_1 - \overline{x}_1) \times (x_2 - \overline{x}_2)$:

$$K_{12} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x}_1)(x_2 - \overline{x}_2)\, p(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = k_{12} - \overline{x}_1 \overline{x}_2. \tag{6.21}$$

Вводят также безразмерный *коэффициент корреляции*

$$R_{12} = K_{12}/(\sigma_1 \sigma_2). \tag{6.22}$$

Для совпадающих случайных величин, когда $x_1 = x_2$,

$$K_{11} = K_{22} = \sigma^2; \quad R_{11} = R_{22} = 1.$$

Если размерность случайного вектора больше двух, то можно построить всевозможные перекрестные корреляционные моменты

$$K_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j)\, p(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

и коэффициенты корреляции $R_{ij}=K_{ij}/(\sigma_i\sigma_j)$, которые объединяются в соответствующие матрицы

$$\underline{K}=\begin{pmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \underline{R}=\begin{pmatrix} 1 & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \ldots & R_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что всегда $|R_{ij}|\leqslant 1$, причем равенство возможно лишь при условии $x_i=\pm x_j$ (полностью коррелированные величины).

**Статистическая независимость случайных величин.** По определению, случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *статистически независимы,* если их многомерная плотность вероятности представима в виде произведения соответствующих одномерных плотностей:

■ принцип статистической независимости

$$\boxed{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)=p(x_1)\,p(x_2)\ldots p(x_n).} \qquad (6.23)$$

Статистически независимые случайные величины попарно некоррелированы. Действительно, для них при $i\neq j$

$$K_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\bar{x}_i)\,p(x_i)\,\mathrm{d}x_i\int_{-\infty}^{\infty}(x_j-\bar{x}_j)\,p(x_j)\,\mathrm{d}x_j=0.$$

▲ решите задачу 12

Обратное утверждение в общем случае неверно: из некоррелированности не вытекает автоматически статистическая независимость случайных величин.

**Функциональные преобразования многомерных случайных величин.** Предположим, что два случайных вектора $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ связаны однозначной зависимостью

$$y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=f_n(x_1,\ldots,x_n),$$

для которой известны обратные функции

$$x_1=g_1(y_1,\ldots,y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=g_n(y_1,\ldots,y_n).$$

Исходная плотность вероятности $p_{\text{исх}}(x_1, \ldots, x_n)$ задана. Для того чтобы обобщить формулу (6.11) на многомерный случай и вычислить плотность вероятности $p_{\text{пр}}(y_1, \ldots, y_n)$ преобразованного вектора, нужно использовать якобиан преобразования

Якобиан служит коэффициентом пропорциональности между элементарными объемами при функциональном преобразовании

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \qquad (6.24)$$

Тогда искомая плотность вероятности имеет вид

$$\boxed{p_{\text{пр}}(y_1, \dots, y_n) = p_{\text{исх}}(g_1, \dots, g_n) \mid D \mid .} \qquad (6.25)$$

**Пример 6.4.** *Пусть $x_1$ и $x_2$ — случайные координаты конца вектора на плоскости.*

Если перейти к полярным координатам ($\rho$, $\varphi$)

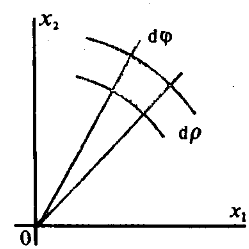
$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < \infty, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \end{cases}$$
$$x_2 = \rho\sin\varphi,$$

то якобиан такого преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

и поэтому если задана плотность вероятности $p_{\text{исх}}(x_1, x_2)$, то

$$p_{\text{пр}}(\rho, \varphi) = \rho p_{\text{исх}}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$




**Многомерное гауссово распределение.** Предположим, что для $n$-мерной случайной величины $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ известны совокупности средних значений $(m_1, \dots, m_n)$ и дисперсий $(\sigma_1^2, \dots, \dots, \sigma_n^2)$, а также матрица коэффициентов корреляции $\underline{R}$.

В общем случае этой информации недостаточно для построения на ее основе $n$-мерной плотности вероятности.

Исключением является случай, когда $\vec{X}$ — многомерная гауссова величина. Тогда, по определению,

$$\boxed{p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i}\frac{(x_j - m_j)}{\sigma_j}\right],} \qquad (6.26)$$

где $D$ — определитель матрицы $\underline{R}$; $D_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $R_{ij}$ этой матрицы.

Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Пусть вектор $\vec{X}$ образован некоррелированными случайными величинами, так что в матрице $\underline{R}$ отличны от нуля лишь элементы на главной диагонали: $R_{ij} = \delta_{ij}$. При этом $D=1$; алгебраические дополнения $D_{ij} = \delta_{ij}$. Подставив эти величины в (6.26), имеем

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1 \ldots \sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right] =$$

$$= p(x_1)\, p(x_2) \ldots p(x_n),$$

где каждое из одномерных гауссовых распределений обладает параметрами $(m_i, \sigma_i)$. Отсюда следует важное свойство гауссова распределения: *если гауссова совокупность образована некоррелированными случайными величинами, то все они статистически независимы.*

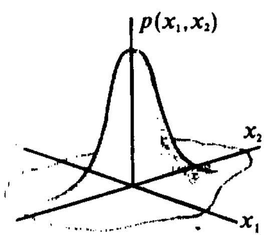
▲ решите задачу 10

В дальнейшем будет часто использоваться двумерная гауссова плотность

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2R\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \tag{6.27}$$

где $R = R_{12} = R_{21}$ — коэффициент корреляции компонент $x_1$ и $x_2$. Эта формула упрощается, если $m_1 = m_2 = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)\sigma^2}\left[x_1^2 - 2Rx_1x_2 + x_2^2\right]\right\}. \tag{6.28}$$




Подобная плотность вероятности отображается гладкой поверхностью, построенной над координатной плоскостью $(x_1, x_2)$. Величина $p(x_1, x_2)$ достигает абсолютного максимума в начале координат. Конфигурация поверхности определяется коэффициентом корреляции $R$.

**Многомерная характеристическая функция.** Обобщением понятия характеристической функции на многомерный случай служит $n$-мерное преобразование Фурье от соответствующей плотности вероятности:

$$\Theta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \overline{\exp[j(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n)]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n)]\, p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{6.29}$$

Многомерная характеристическая функция описывает систему случайных величин с той же степенью полноты, как и отвечающая ей плотность вероятности, выражающаяся обратным преобразованием Фурье:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta(v_1, \dots, v_n) \exp[-j(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)]\, dv_1 \dots dv_n. \quad (6.30)$$

Если $\{X_1, \dots, X_n\}$ статистически независимы, то в силу (6.29) многомерная характеристическая функция распадается на произведение одномерных характеристических функций, относящихся к отдельным случайным величинам:

$$\Theta(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i(v_i). \quad (6.31)$$

Можно показать, что многомерной гауссовой случайной величине $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ отвечает характеристическая функция

$$\Theta(v_1, \dots, v_n) = \exp\left[j \sum_{k=1}^{n} m_k v_k - \frac{1}{2} \sum_{k,\, l=1}^{n} \sigma_k \sigma_l R_{kl} v_k v_l\right], \quad (6.32)$$

где $m_k$ и $\sigma_k^2$ — среднее значение и дисперсия случайной величины $X_k$; $R_{kl}$ — элемент матрицы коэффициентов корреляции.

свойство характеристической функции

**Плотность вероятности суммы случайных величин.** Если в (6.29) положить $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$, то многомерная характеристическая функция переходит в одномерную характеристическую функцию суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_n$:

$$\Theta_\Sigma(v) = \overline{\exp jv(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}.$$

Отсюда, выполнив обратное преобразование Фурье, можно найти плотность вероятности этой суммы. Например, если $\{X_1, \dots, X_n\}$ — гауссовы некоррелированные (а значит, и независимые) случайные величины с параметрами $(m_k, \sigma_k)$ каждая, то из (6.32) следует, что

$$\Theta_\Sigma(v) = \exp\left[jv \sum_{k=1}^{n} m_k - {}^1/_2 v^2 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right]. \quad (6.33)$$

Сравнивая этот результат с формулой (6.16), можно убедиться, что сумма нормальных случайных величин распределена также нормально, причем математические ожидания и дисперсии слагаемых суммируются:

$$\boxed{m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k; \quad \sigma_\Sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.} \tag{6.34}$$

центральная предельная теорема

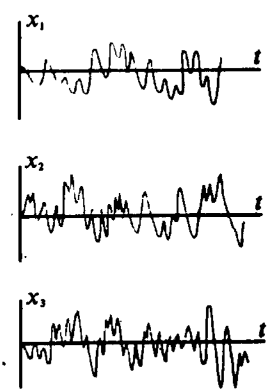
В теории вероятностей доказывается гораздо более сильное утверждение, составляющее сущность центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова [15]. Согласно этой теореме, при некоторых ограничениях, как правило, выполняемых в физических системах, распределение суммы независимых случайных величин, дисперсии которых конечны, а распределения вероятности произвольны, с ростом числа слагаемых стремится к гауссову.

## 6.3 Случайные процессы

Теория случайных величин изучает вероятностные явления «в статике», рассматривая их как некоторые зафиксированные результаты экспериментов. Для описания сигналов, отображающих развивающиеся во времени случайные явления, методы классической теории вероятностей оказываются недостаточными. Подобные задачи изучает особая ветвь математики, получившая название *теории случайных процессов.*

По определению, *случайный процесс* $X(t)$ — это функция, характеризующаяся тем, что в любой момент времени $t$ принимаемые ею значения являются случайными величинами.

**Ансамбли реализаций.** Имея дело с детерминированными сигналами, мы отображаем их функциональными зависимостями или осциллограммами. Если же речь идет о случайных процессах, то ситуация оказывается сложнее. Фиксируя на определенном промежутке времени мгновенные значения случайного сигнала, мы получаем лишь единственную *реализацию* случайного процесса. Теоретически случайный процесс выражается через бесконечную совокупность таких реализаций, образующих *статистический ансамбль.* Например, таким ансамблем служит набор сигналов $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t), \ldots\}$, которые можно одновременно наблюдать на выходах совершенно одинаковых генераторов шумового напряжения.



Ансамбль реализаций

Совсем не обязательно, чтобы реализации случайного процесса отображались функциями со сложным, нерегулярным во времени поведением. Часто приходится рассматривать случайные процессы, образованные, например, всевозможными гармоническими сигналами $U \cos(\omega t + \varphi)$, у которых один из трех параметров $(U, \omega, \varphi)$ — случайная величина, принимающая определенное значение в каждой реализации. Случайный характер такого сигнала обусловлен невозможностью заранее, до опыта предсказать значение этого параметра.

● квазидетерминированные случайные процессы

Случайные процессы, реализации которых зависят от конечного числа параметров, принято называть *квазидетерминированными*.

**Плотности вероятности случайных процессов.** Пусть $X(t)$ — случайный процесс, заданный ансамблем реализаций, а $t_1$ — некоторый произвольный момент времени. Фиксируя величины $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$, получаемые в отдельных реализациях, мы осуществляем *одномерное сечение* данного случайного процесса и наблюдаем случайную величину $X(t_1)$. Ее плотность вероятности $p(x, t_1)$ называется одномерной плотностью вероятности процесса $X(t)$ в момент времени $t_1$. Согласно определению, величина $\mathrm{d}P=p(x, t_1)\mathrm{d}x$ есть вероятность того, что реализации случайного процесса в момент времени $t_1$ примут значения, лежащие в интервале $(x, x+\mathrm{d}x)$.

● одномерная плотность вероятности

Информация, которую можно извлечь из одномерной плотности, недостаточна для того, чтобы судить о характере развития реализации случайного процесса во времени. Гораздо более полное описание можно получить, выполнив два сечения случайного процесса в несовпадающие моменты времени $t_1$ и $t_2$. Возникающая при таком мысленном эксперименте двумерная случайная величина $\{X(t_1), X(t_2)\}$ представляется двумерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

Эта характеристика случайного процесса позволяет вычислить вероятность события, заключающегося в том, что реализация случайного процесса при $t=t_1$ проходит в окрестности точки $x=x_1$, а при $t=t_2$ — в окрестности точки $x=x_2$.

● многомерные плотности вероятности

Естественным обобщением является $n$-мерное сечение случайного процесса $(n>2)$, приводящее к $n$-мерной плотности вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Многомерная плотность вероятности случайного процесса должна удовлетворять обычным условиям, налагаемым на плотность вероятности совокупности случайных величин (см. § 6.2). Кроме того, величина $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ не должна зависеть от того, в каком порядке располагаются ее аргументы (условие симметрии).

Иногда вместо $n$-мерной плотности вероятности пользуются $n$-мерной характеристической функцией, которая связана с соответствующей плотностью преобразованием Фурье:

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \exp[j(v_1 x_1 + \dots$$

$$\dots + v_n x_n)] \, dx_1 \dots dx_n. \qquad (6.35)$$

Многомерные плотности вероятности достаточно высокой размерности позволяют весьма подробно описывать свойства случайных процессов. Однако получение и исследование этих плотностей зачастую представляет серьезные математические трудности.

**Моментные функции случайных процессов.** Менее детальные, но, как правило, вполне удовлетворительные в практическом смысле характеристики случайных процессов можно получить, вычисляя моменты тех случайных величин, которые наблюдаются в сечениях этих процессов. Поскольку в общем случае эти моменты зависят от временны́х аргументов, они получили название *моментных функций.*

Для статистической радиотехники наибольшее значение имеют три моментные функции низших порядков, называемые *математическим ожиданием, дисперсией* и *функцией автокорреляции.*

Математическое ожидание

$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) \, dx \qquad (6.36)$$

есть среднее значение процесса $X(t)$ в текущий момент времени $t$; усреднение проводится по всему ансамблю реализаций процесса.

Дисперсия

$$\sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x, t) \, dx \qquad (6.37)$$

позволяет судить о степени разброса мгновенных значений, принимаемых отдельными реализациями в фиксированном сечении.

Двумерный центральный момент

$$K(t_1, t_2) = \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] \, p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 x_2 \qquad (6.38)$$

называется функцией автокорреляции случайного процесса $X(t)$. Эта функция характеризует степень статистической связи тех случайных величин, которые наблюдаются при $t = t_1$ и $t = t_2$.

● функции автокорреляции

Сравнивая формулы (6.37) и (6.38), заметим, что при совмещении сечений функция автокорреляции численно равна дисперсии:

$$K(t_1, t_2)\big|_{t_1=t_2=t} = \sigma^2(t). \tag{6.39}$$

**Стационарные случайные процессы.** Так принято называть случайные процессы, статистические характеристики которых неизменны во времени. Случайные сигналы, являющиеся типичными реализациями стационарных случайных процессов, составляют важный и широко распространенный на практике класс случайных колебаний.

Говорят, что случайный процесс *стационарен в узком смысле*, если любая его $n$-мерная плотность вероятности инвариантна относительно временного сдвига $\tau$:

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = p(x_1, \ldots, x_n, t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau). \tag{6.40}$$

Если же ограничить требования тем, чтобы математическое ожидание $m$ и дисперсия $\sigma^2$ процесса не зависели от времени, а функция автокорреляции определялась только разностью $\tau = |t_2 - t_1|$, т. е.

$$\boxed{K(t_1, t_2) = K(\tau),}$$

■ стационарность в широком и узком смыслах

то подобный случайный процесс будет *стационарен в широком смысле*. Понятно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Как следует из определения стационарного случайного процесса, функция автокорреляции является четной:

$$K(\tau) = K(-\tau).$$

Кроме того, абсолютные значения этой функции при любых $\tau$ не превосходят ее значений при $\tau = 0$:

$$|K(\tau)| \leqslant K(0) = \sigma^2. \tag{6.41}$$

Метод доказательства таков: из очевидного неравенства

$$\overline{[(x(t) - m) - (x(t+\tau) - m)]^2} \geqslant 0$$

следует, что

$$\overline{(x(t) - m)^2} - \overline{2(x(t) - m)(x(t+\tau) - m)} + \overline{(x(t+\tau) - m)^2} = \\ = 2\sigma^2 - 2K(\tau) \geqslant 0,$$

откуда непосредственно вытекает (6.41).

Часто удобно вводить нормированную функцию автокорреляции

**коэффициент корреляции случайного процесса**

$$\boxed{R(\tau) = K(\tau)/\sigma^2,} \tag{6.42}$$

называемую также *коэффициентом корреляции* стационарного случайного процесса, для которой $R(0)=1$.

Для иллюстрации понятия стационарного случайного процесса рассмотрим два примера.

**Пример 6.5.** *Случайный процесс $U(t)$ образован реализациями вида $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $U_0$ и $\omega_0$ постоянны, в то время как фазовый угол $\varphi$ — случайная величина с равномерным распределением в интервале — $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.*

Так как плотность вероятности фазового угла $p_\varphi = 1/(2\pi)$, то математическое ожидание процесса

$$\overline{u} = \overline{U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi)\, d\varphi = 0.$$

Аналогично находится дисперсия:

$$\sigma^2 = \overline{(u - \overline{u})^2} = U_0^2\, \overline{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = U_0^2/2.$$

Наконец, функция автокорреляции

$$K(t_1, t_2) = U_0^2\, \overline{\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} =$$

$$= \frac{U_0^2}{2}\left[\overline{\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)} + \cos\omega_0(t_2 - t_1)\right] =$$

$$= \frac{U_0^2}{2}\cos\omega(t_2 - t_1).$$

▲ решите задачу 9

Итак, данный случайный процесс удовлетворяет всем условиям, которые необходимы для того, чтобы обеспечить стационарность в широком смысле.

**Пример 6.6.** *Рассмотреть случайный процесс с реализациями $u(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, причем здесь $\omega_0$ и $\varphi_0$ — заданные числа, $U_0$ — случайная величина, имеющая произвольный закон распределения.*

Математическое ожидание

$$\overline{u} = \overline{U}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

не будет зависеть от времени лишь тогда, когда $\overline{U}_0 = 0$. Поэтому в общем случае рассматриваемый случайный процесс будет нестационарным.

Большинство случайных процессов в радиотехнике являются эргодическими

**Свойство эргодичности.** Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется *эргодическим*, если при нахождении любых статистических характеристик усреднение по статистическому ансамблю может быть заменено усреднением по времени. Операция усреднения выполняется над единственной реализацией $x(t)$, протяженность которой $T$ стремится к бесконечности. Обозначая усреднение по времени угловыми скобками, запишем математическое ожидание эргодического случайного процесса

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}\,t\,, \tag{6.43}$$

которое равно постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия подобного процесса

$$\sigma^2 = \langle (x(t) - m)^2 \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m)^2 \mathrm{d}t = \\ = \langle x^2(t) \rangle - m^2. \tag{6.44}$$

физический смысл дисперсии случайного процесса

Поскольку $< x^2 >$ представляет собой среднюю мощность реализации, а величина $m^2$ — мощность постоянной составляющей, *то дисперсия имеет здесь наглядный смысл мощности флуктуационной составляющей эргодического процесса.*

Аналогично находится функция автокорреляции:

$$K(\tau) = \langle (x(t) - m)(x(t+\tau) - m) \rangle = \langle x(t)\,x(t+\tau) \rangle - m^2 = \\ = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau - m^2. \tag{6.45}$$

Для того чтобы случайный процесс был эргодичным, прежде всего он должен быть стационарным в широком смысле. Достаточным условием эргодичности является стремление к нулю функции автокорреляции при неограниченном росте временно́го сдвига $\tau$:

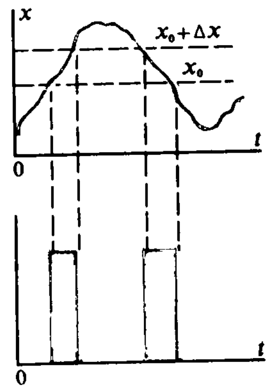
$$\lim_{\tau \to \infty} K(\tau) = 0. \tag{6.46}$$

В математике показано, что это требование можно несколько ослабить. Оказывается, что случайный процесс эргодичен, если выполнено условие Слуцкого [14]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T K(\tau)\,d\tau = 0. \tag{6.47}$$

Так, (6.47) справедливо применительно к гармоническому процессу со случайной начальной фазой (см. пример 6.5).

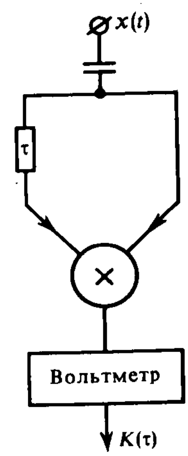
**Измерение характеристик случайных процессов.** Если случайный процесс является эргодическим, то его реализация достаточной длины есть «типичный» представитель статистического ансамбля. Изучая эту реализацию экспериментально, можно достаточно полно характеризовать данный случайный процесс.



Измерение плотности вероятности

Так, устройство для измерения одномерной плотности вероятности случайного процесса может быть выполнено следующим образом. Одномерная плотность вероятности эргодического случайного процесса должна трактоваться как величина, пропорциональная относительному времени пребывания его реализации на уровне между $x$ и $x+\Delta x$. Предположим, что имеется специальное устройство с двумя входами, на один из которых подается исследуемая реализация $x(t)$, а на другой — опорное постоянное напряжение, уровень которого $x_0$ может регулироваться в определенных пределах. На выходе устройства возникают прямоугольные видеоимпульсы постоянной амплитуды, начало и конец которых определяются моментами времени, когда текущие значения случайного сигнала совпадают с уровнями либо $x_0$, либо $x_0+\Delta x$. Если теперь измерить, скажем, с помощью обычного стрелочного прибора средний ток, создаваемый последовательностью видеоимпульсов, то показания этого прибора с точностью до постоянного коэффициента будут пропорциональны плотности вероятности $p(x_0)$.

Любой достаточно инерционный стрелочный прибор может быть использован для нахождения математического ожидания случайного процесса (см. формулу (6.43)).



Коррелометр

Прибор, измеряющий дисперсию случайного процесса, как это следует из (6.44), должен иметь на входе конденсатор, отделяющий постоянную составляющую. Дальнейшие этапы процесса измерения — возведение в квадрат и усреднение по времени — выполняются обычно инерционным квадратичным вольтметром.

Принцип работы измерителя функции автокорреляции (коррелометра) вытекает из формулы (6.45). Здесь мгновенные значения случайного сигнала после фильтрации постоянной составляющей, разделяясь на два канала, поступают на перемножитель, причем в одном из каналов сигнал получает задержку на

▲ решите задачу 15

время $\tau$. Для получения значения функции автокорреляции сигнал с выхода перемножителя обрабатывается инерционным звеном, которое осуществляет усреднение.

Приведенные здесь способы измерения характеристик случайных процессов основаны на аналоговых операциях. Современная радиотехника все шире применяет цифровые измерители параметров случайных процессов. Работа этих приборов основана на дискретизации случайного сигнала и последующих операциях над полученными числами-выборками в соответствии с формулами (6.43) — (6.45).

**Взаимная функция корреляции двух случайных процессов.** Во многих случаях представляет интерес вопрос о том, какова статистическая связь между двумя стационарными случайными процессами $X$ и $Y$. Принято вводить *взаимные функции корреляции* этих процессов по формулам

$$\begin{aligned} K_{xy}(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m_x][y(t_2) - m_y]}, \\ K_{yx}(t_1, t_2) &= \overline{[y(t_1) - m_y][x(t_2) - m_x]}. \end{aligned} \qquad (6.48)$$

● стационарно связанные случайные процессы

Случайные процессы называют *стационарно связанными*, если функции $K_{xy}(t_1, t_2)$ и $K_{xy}(t_1, t_2)$ зависят не от самих аргументов $t_1$ и $t_2$, а лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \qquad (6.49)$$

Предположим, что случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически независимы в том смысле, что для мгновенных значений $x = x(t)$ и $y_\tau = y(t+\tau)$ независимо от величины $\tau$ двумерная плотность вероятности

$$p(x, y_\tau) = p(x)\,p(y_\tau).$$

Тогда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)\,p(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} (y_\tau - m_y)\,p(y_\tau)\,dy_\tau = 0,$$

т. е. из статистической независимости случайных процессов вытекает их некоррелированность. В общем случае обратное утверждение несправедливо.

**Стационарные гауссовы случайные процессы.** Эти математические модели случайных сигналов широко применяются в радиотехнике для описания статистических явлений, обусловленных большим числом независимых слагаемых, т. е. в условиях применимости центральной предельной теоремы. По определению, $n$-мерная плотность вероятности стационарного гауссова процесса следующим образом зависит от $n-1$ временных аргументов $\tau_i = t_i - t_1$, $i=2, 3, \ldots, n$:

$$p(x_1, \ldots, x_n, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2D\sigma^2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}(x_i - m)(x_j - m)\right]. \qquad (6.50)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в формуле (6.26). Элементы корреляционной матрицы этого случайного процесса определяются посредством нормированной автокорреляционной функции $R_{ij} = R(\tau_i - \tau_j)$.

Часто используют двумерную гауссову плотность

$$p(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - R^2(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(x_1 - m)^2 - 2R(\tau)(x_1 - m)(x_2 - m) + (x_2 - m)^2}{2\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]}\right\}. \qquad (6.51)$$

Стационарный гауссов процесс занимает исключительное место среди прочих случайных процессов — любая его многомерная плотность вероятности определяется лишь двумя характеристиками: математическим ожиданием и автокорреляционной функцией. Подобное свойство и обусловило то, что наибольшее число теоретических результатов в статистической радиотехнике получено именно применительно к стационарным гауссовым процессам.

**Марковские процессы.** Заканчивая обзор общих методов описания случайных сигналов, необходимо кратко остановиться на одной достаточно частной, но тем не менее широко применяемой в радиотехнике математической модели. Речь идет о так называемых марковских случайных процессах.

Предположим, что состояние некоторой физической системы может характеризоваться одним из чисел, принадлежащих конечному множеству $x_1, x_2, \ldots, x_N$. В фиксированные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ случайным образом происходит скачкообразная смена состояний. Описываемый случайный процесс называется *простой цепью Маркова*, если вероятность наблюдать систему в состоянии $x_i$ на $k$-м шаге зависит лишь от того, в каком из состояний $x_j$ находилась эта система на предыдущем $(k-1)$-м шаге. Состояния на $(k-2)$-м, $(k-3)$-м, ... шагах при этом совершенно безразличны.

Андрей Андреевич Марков (1856—1922) — известный русский математик

Обозначая эту переходную вероятность символом $p_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N)$, можем ввести матрицу

$$\underline{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

полностью описывающую статистические свойства марковской цепи.

Основная задача, которую приходится решать в теории марковских цепей, формулируется так: заданы матрица **П** и начальное состояние процесса. Ищем вероятность того, что система достигнет некоторого фиксированного состояния $x_m$ ровно за $n$ шагов.

Идея марковского случайного процесса обобщается на случай непрерывного времени, причем реализации также могут принимать непрерывное множество значений. Следует подчеркнуть, что марковские свойства случайного процесса связаны с динамическими особенностями порождающей его физической системы и никак не указывают на вид плотности вероятности. В частности, марковский случайный процесс может быть, но может и не быть гауссовым.

Теории и приложениям марковских случайных процессов посвящена обширная литература (см., например, [3, 14]).

## Результаты

- *Вероятностные закономерности проявляются при изучении физических систем, образованных из большого числа более мелких подсистем.*
- *Основными характеристиками случайной величины являются ее функция распределения и плотность вероятности.*
- *В качестве числовых параметров, описывающих случайную величину, используются моменты, такие, как математическое ожидание и дисперсия.*
- *Законы статистических связей, существующих между отдельными компонентами многомерной случайной величины, определяются смешанными моментами второго порядка, называемыми коэффициентами корреляции.*
- *Некоррелированные гауссовы величины статистически независимы.*
- *Согласно центральной предельной теореме, сумма большого числа независимых случайных величин в пределе с ростом числа слагаемых распределена нормально.*
- *Случайный процесс задается бесконечным ансамблем своих реализаций.*
- *Важнейшие моментные функции случайного процесса — математическое ожидание, дисперсия и функция автокорреляции.*

◇◇ *Если статистические характеристики случайного процесса неизменны во времени, то такой процесс называется стационарным.*

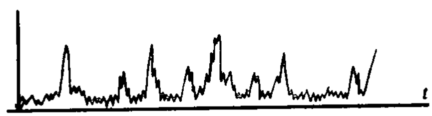
◇◇ *Характеристики стационарных случайных процессов, обладающих эргодическими свойствами, могут изучаться экспериментально путем анализа единственной реализации.*

◇◇ *Математическое ожидание и функция автокорреляции позволяют вычислить любую многомерную плотность вероятности стационарного гауссова случайного процесса.*

◇◇ *Реализации марковских процессов представляют собой цепи случайно сменяющихся состояний; вероятность наблюдать то или иное состояние на данном шаге зависит лишь от ближайшего предшествующего состояния.*

## Вопросы

1. Как формулируются аксиомы теории вероятностей?
2. В чем заключена разница между понятиями математической и эмпирической (выборочной) вероятностей?
3. Перечислите основные свойства плотности вероятности случайной величины.
4. Сформулируйте принцип вычисления усредненных значений величин, функционально связанных со случайными величинами.
5. Как находится плотность вероятности функции от случайной величины в случае однозначной и неоднозначной связи?
6. Как связаны между собой плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины?
7. В чем заключен смысл понятия корреляции двух случайных величин?
8. Что является более жестким требованием — некоррелированность или статистическая независимость случайных величин?
9. Перечислите отличительные свойства многомерной гауссовой случайной величины.
10. Как формулируется центральная предельная теорема?
11. В чем состоит разница между двумя понятиями — «случайный процесс» и «случайная реализация»?
12. В ходе эксперимента получена следующая реализация случайного сигнала:




Может ли она в принципе относиться к ансамблю реализаций гауссова случайного процесса? Сколь правдоподобно такое утверждение?

13. Как определяется понятие случайного процесса, стационарного: а) в широком, б) в узком смысле?
14. В чем заключается отличительное свойство эргодического случайного процесса?
15. Каков физический смысл дисперсии эргодического случайного процесса?
16. Как определяется понятие взаимной корреляционной функции двух случайных процессов?

## Задачи

1. При передаче текста по некоторому каналу связи в среднем 0,5% символов воспринимаются с ошибкой. Передан текст длиной 120 символов. Какова вероятность правильного воспроизведения данного сообщения?
2. Случайная величина $X$ имеет плотность

вероятности

$p(x) = a \exp(-b|x|)$.

Найдите связь между числами $a$ и $b$, вытекающую из условия нормировки.

3. Случайная величина $X$ равномерно распределена во внутренних точках интервала (0, 5); вероятность обнаружить эту величину на концах интервала одинакова и равна 0.3. Вычислите и постройте графики функции распределения и плотности вероятности для данной случайной величины.

4. Вычислите среднее значение и дисперсию случайной величины, рассмотренной в задаче 3.

5. Найдите среднее значение и дисперсию случайной величины, имеющей плотность вероятности

$p(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|x|)$

при $\alpha > 0$.

6. Характеристическая функция $\Theta(v)$ случайной величины $X$ имеет вид

$\Theta(v) = \frac{1}{1+v^2}$ .

Найдите плотность вероятности $p(x)$ данной случайной величины.

7. Найдите связь между плотностью вероятности $p(x)$ случайной величины $X$ и плотностью вероятности $p(y)$ случайной величины $Y$, которая получена путем следующего функционального преобразования:

$y = \exp(-x^2)$.

8. Совместная плотность вероятности $p(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины имеет вид

$p(x_1, x_2) = \frac{a^2}{\pi} e^{-a^2(x_1^2+x_2^2)}$

Определите плотности вероятности случайных величин $x_1$ и $x_2$, а также их математические ожидания и дисперсии.

9. Докажите, что для стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ с реализациями

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

необходимо и достаточно, чтобы случайные величины $A$ и $B$ обладали следующими свойствами:

а) $\overline{A} = \overline{B} = 0$;
б) $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$;
в) $\overline{AB} = 0$.

10. Случайный процесс $Z(t)$ является суммой двух гауссовых случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, обладающих постоянными во времени математическими ожиданиями $m_x$, $m_y$ и дисперсиями $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ соответственно. Найдите одномерную плотность вероятности суммарного процесса.

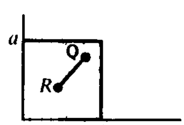
## Более сложные задания

11. Сигнал представляет собой сумму гармонических колебаний одной и той же частоты. Амплитуды слагаемых одинаковы и равны 5 В, начальные фазы могут независимо принимать лишь два значения: 0 и 180°. Число слагаемых равно 30. Вычислите вероятность того, что результирующая амплитуда сигнала окажется больше 40 В.

12. Докажите, что если случайная величина $Z$ является суммой независимых случайных величин $X$ и $Y$, то ее плотность вероятности есть свертка плотностей, отвечающих каждому из слагаемых:

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_y(\zeta) p_x(z-\zeta) d\zeta.$$

13. Случайная точка $Q(x_1, x_2)$ равномерно распределена в квадрате со стороной $a$:




Найдите математическое ожидание и дисперсию длины случайного отрезка $RQ$, соединяющую эту точку с центром квадрата.

14. Координаты ($x$, $y$) случайной точки на плоскости являются независимыми гауссовыми случайными величинами и имеют следующие параметры: $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. Найдите плотность вероятности длины случайного радиус-вектора этой точки.

15. Рассмотрите возможности создания прибора для измерения двумерной плотности вероятности эргодического случайного процесса.

# Глава 7 Корреляционная теория случайных процессов

Наряду с полным описанием свойств случайных сигналов с помощью многомерных плотностей вероятности возможен и упрощенный подход, когда случайные процессы характеризуются своими моментными функциями. Теория случайных процессов, основанная на использовании моментных функций не выше второго порядка, получила название *корреляционной теории*. В настоящей главе будет показано, что между корреляционными и спектральными свойствами случайных сигналов существует глубокая и тесная связь.

● корреляционная теория

## 7.1 Спектральные представления стационарных случайных процессов

В гл. 2 была развита спектральная теория детерминированных сигналов. Вероятностный характер отдельных реализаций делает невозможным прямое перенесение методов спектрального анализа в теорию случайных процессов. Однако удается получить ряд важных спектральных характеристик случайных колебаний, преобразуя по Фурье некоторые функции, получаемые путем усреднения реализаций.

**Спектральные плотности реализаций.** Будем рассматривать стационарный случайный процесс $X(t)$, обладающий нулевым математическим ожиданием: $\overline{x}=0$. Отдельно взятая реализация этого процесса есть детерминированная функция, которую можно представить спектральным разложением

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (7.1)$$

с некоторой детерминированной спектральной плотностью $S(\omega)$.

Для того чтобы описать весь ансамбль реализаций, образующих процесс $X(t)$, необходимо допустить, что $S(\omega)$ сами являются случайными функциями частоты. Таким образом, случайный процесс во временно́й области связан с другим случайным процессом в частотной области. Между отдельными реализациями этих процессов устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Если реализации случайного процесса представлены в виде (7.1), то говорят, что осуществлено *спектральное представление* этого процесса.

спектральное представление случайного процесса

Ведущую роль в спектральной теории случайных процессов играет ответ на следующий вопрос: *какими свойствами должны обладать случайные функции* $S(\omega)$ *для того, чтобы процесс* $X(t)$ *был стационарным?*

**Свойства случайной спектральной плотности.** Для ответа на поставленный вопрос прежде всего проведем усреднение мгновенных значений по ансамблю:

$$\overline{x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)e^{j\omega t}}\,d\omega = 0.$$

Это равенство будет выполняться тождественно при любом $t$, если потребовать, чтобы

$$\overline{S(\omega)} = 0. \tag{7.2}$$

Итак, случайная спектральная плотность отдельных реализаций стационарного случайного процесса должна иметь нулевое математическое ожидание на всех частотах.

Теперь нужно определить, при каких условиях функция автокорреляции $K(\tau)$ будет зависеть лишь от сдвига $\tau$ между сечениями. Воспользуемся тем, что сигнал $x(t)$ вещественный и поэтому наряду с (7.1) справедливо также равенство

Для комплексного процесса следует в отдельности рассмотреть вещественную и мнимую части

$$x(t) = \overset{*}{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega)\,e^{-j\omega t}\,d\omega. \tag{7.3}$$

Запишем выражение функции автокорреляции, используя спектральное разложение случайного сигнала:

$$K(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \overline{\overset{*}{x}(t)\,x(t+\tau)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)S^*(\omega')}\,e^{j\omega\tau}e^{j(\omega-\omega')t}\,d\omega\,d\omega' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{j\omega\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)\,S^*(\omega')}\,e^{j(\omega-\omega')t}\,d\omega'. \tag{7.4}$$

Здесь во внутреннем подынтегральном выражении содержится множитель $\overline{S(\omega)S^*(\omega')}$, имеющий смысл автокорреляционной функции случайной спектральной плотности. Для того чтобы величина $K(\tau)$ не зависела от времени $t$, необходимо, как это видно из (7.4), потребовать следующей пропорциональности:

Следует обратить внимание на то, что $S(\omega)$ — функция, принимающая комплексные значения

$$\overline{S(\omega)S^*(\omega')} \sim \delta(\omega-\omega'). \qquad (7.5)$$

Таким образом, случайная спектральная плотность $S(\omega)$ стационарного процесса имеет весьма специфическую структуру; спектры, отвечающие любым двум несовпадающим частотам, некоррелированы между собой, в то же время средний квадрат (дисперсия) случайной плотности неограниченно велик. Такой вид корреляционной связи называется *дельта-коррелированностью*.

● дельта-коррелированность

**Энергетический спектр стационарного случайного процесса.** Введем в (7.5) множитель пропорциональности, зависящий от частоты, и запишем это равенство следующим образом:

$$\overline{S(\omega)S^*(\omega')} = 2\pi W(\omega)\,\delta(\omega-\omega'). \qquad (7.6)$$

Функция $W(\omega)$, играющая фундаментальную роль в теории стационарных случайных процессов, называется *энергетическим спектром* процесса $X(t)$.

● энергетический спектр случайного процесса

Подставив (7.6) в (7.4), приходим к важному результату:

$$\boxed{K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega.} \qquad (7.7)$$

Итак, *функция автокорреляции и энергетический спектр стационарного случайного процесса, имеющего нулевое математическое ожидание, связаны между собой преобразованием Фурье* (теорема, доказанная в 1934 г. известным советским математиком А. Я. Хинчиным и носящая с тех пор его имя).

Эту теорему называют также теоремой Винера — Хинчина

Отсюда следует

$$\boxed{W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau.} \qquad (7.8)$$

Для того чтобы выяснить физический смысл понятия энергетического спектра, положим в (7.7), что $\tau=0$. Тогда, поскольку $K(0)=\sigma^2$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\,d\omega. \qquad (7.9)$$

Дисперсия $\sigma^2$, равная средней мощности стационарного случайного процесса, есть, таким образом, сумма вкладов от всех частот. Величина $W(\omega)$ пропорциональна удельной средней мощности, соответствующей единичному частотному интервалу в окрестности выбранной частоты $\omega$.

Если случайный сигнал является напряжением, то его энергетический спектр имеет размерность $В^2$ с/рад

По своему физическому смыслу энергетический спектр вещественен и неотрицателен:

$$W(\omega) \geqslant 0. \qquad (7.10)$$

Это свойство накладывает весьма жесткие ограничения на вид допустимых функций автокорреляции (с подобным явлением мы уже сталкивались в гл. 3, изучая корреляционные свойства детерминированных сигналов).

▲ решите задачу 1

Необходимо указать также на следующее важное обстоятельство. Энергетический спектр стационарного случайного процесса, будучи всегда вещественным, не несет никакой информации о фазовых соотношениях между отдельными спектральными компонентами. Поэтому по энергетическому спектру принципиально невозможно восстановить какую-либо отдельно взятую реализацию случайного процесса.

**Односторонний энергетический спектр.** Поскольку $K(\tau)$ — четная функция аргумента $\tau$, то соответствующий энергетический спектр $W(\omega)$ представляет собой четную функцию частоты $\omega$. Отсюда следует, что пара преобразований Фурье (7.7) — (7.8) может быть записана с использованием лишь интегралов в полубесконечных пределах:

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega, \qquad (7.11)$$

$$W(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau. \qquad (7.12)$$

▲ решите задачу 2

Целесообразно ввести так называемый *односторонний энергетический спектр* $F(\omega)$ рассматриваемого случайного процесса, определив его следующим образом:

$$F(\omega) = \begin{cases} W(\omega)/\pi & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \qquad (7.13)$$

Функция $F(\omega)$ позволяет выразить дисперсию стационарного случайного процесса в виде интеграла по положительным (физическим) частотам:

$$\sigma^2 = K(0) = \int_0^\infty F(\omega)\,d\omega. \tag{7.14}$$

Можно определить также односторонний энергетический спектр $F(f)$, представляющий собой среднюю мощность процесса, приходящуюся на единичный интервал частот шириной в 1 Гц:

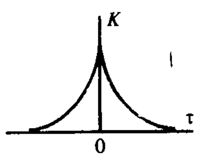
Односторонний энергетический спектр $F(f)$ имеет, например, размерность $В^2/Гц$

$$F(f) = \begin{cases} 2W(2\pi f) & \text{при } f > 0, \\ 0 & \text{при } f < 0. \end{cases}$$

При этом

$$\sigma^2 = \int_0^\infty F(f)\,df.$$

Теорема Хинчина является важнейшим инструментом в прикладной теории случайных процессов, позволяющим решать разнообразные задачи. Рассмотрим некоторые характерные примеры.

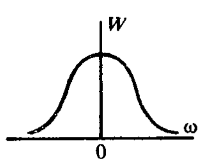



**Пример 7.1.** *Случайный процесс с экспоненциальной функцией автокорреляции.*

Пусть известно, что процесс $X(t)$ имеет функцию автокорреляции следующего вида:

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \mid \tau \mid)$$

с некоторым вещественным и положительным параметром $\alpha$. На основании (7.12) его энергетический спектр




$$W(\omega) = 2\sigma^2 \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Односторонний энергетический спектр

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

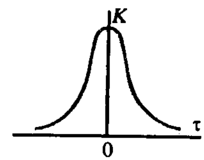
Из графика с очевидностью следует, что спектр мощности рассматриваемого процесса имеет выраженный низкочастотный характер — максимум спектральной плотности наблюдается на нулевой частоте.

**Пример 7.2.** *Предположим, что энергетический спектр случайного процесса $X(t)$ описывается гауссовой функцией (квадратичной экспонентой)*

$$W(\omega) = W_0 \exp(-\beta\omega^2).$$

Для нахождения функции автокорреляции применим формулу (7.11):

$$K(\tau)=\frac{W_0}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta\omega^2}\cos\omega\tau d\omega=\frac{W_0}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi\beta}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4\beta}\right).$$




Итак, гауссов характер энергетического спектра ведет к функции автокорреляции также гауссова вида.

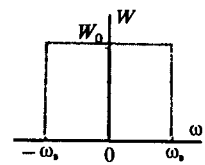
Дисперсия данного случайного процесса

$$\sigma^2=W_0/(2\sqrt{\pi\beta}).$$

**Пример 7.3.** *Стационарный случайный процесс с ограниченным энергетическим спектром низкочастотного вида.*

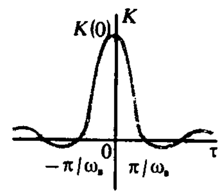
Пусть процесс $X(t)$ характеризуется следующим энергетическим спектром:

$$W(\omega)=\begin{cases} W_0 & \text{при } -\omega_в<\omega<\omega_в, \\ 0 & \text{вне интервала } (-\omega_в,\ \omega_в). \end{cases}$$




По формуле (7.11) находим функцию автокорреляции:

$$K(\tau)=\frac{W_0}{\pi}\int\limits_0^{\omega_в}\cos\omega\tau d\omega=\frac{W_0\omega_в}{\pi}\,\frac{\sin\omega_в\tau}{\omega_в\tau}.$$




Дисперсия этого случайного процесса

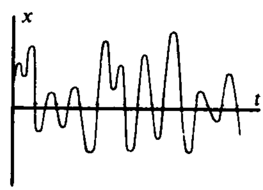
$$\sigma^2=K(0)=W_0\omega_в/\pi.$$

Здесь удобно воспользоваться односторонней спектральной плотностью мощности

$$F(\omega)=\begin{cases} F_0=\dfrac{W_0}{\pi} & \text{при } 0<\omega<\omega_в, \\ 0 & \text{вне интервала } (0,\ \omega_в), \end{cases}$$

которая позволяет записать формулу для дисперсии в легко запоминающемся виде произведения энергетического спектра на полосу частот, занимаемую сигналом:

$$\sigma^2=F_0\omega_в.$$




Квазипериодическая реализация

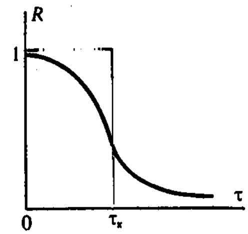
Важно отметить, что автокорреляционная функция данного случайного сигнала знакопеременна, причем изменение знака наблюдается при сдвигах $\tau$, кратных величине $\pi/\omega_в$. Это означает, что с увеличением $\tau$ среднее значение произведения $x(t)x(t+\tau)$ будет вначале положительным, затем отрицательным, затем снова положительным и т. д. Такое свойство функции автокорреляции говорит о *квазипериодичности* любой реализации данного случайного процесса, понимаемой, конечно, не в абсолютном, а в вероятностном смысле.

С физической точки зрения квазипериодические реализации случайных процессов возникают в тех ситуациях, когда случайные колебания представляют собой сумму большого числа независимых радиоимпульсов.

**Интервал корреляции.** Случайные процессы, изучаемые статистической радиотехникой, как правило, обладают следующим свойством: их функция автокорреляции стремится к нулю с увеличением временно́го сдвига $\tau$. Чем быстрее убывает функция $K(\tau)$, тем меньшей оказывается статистическая связь между мгновенными значениями случайного сигнала в два несовпадающих момента времени.

Числовой характеристикой, пригодной для оценки «скорости изменения» реализаций случайного процесса, может явиться *интервал корреляции* $\tau_к$, определяемый следующим образом:

$$\boxed{\tau_к = \frac{1}{K(0)}\int_0^\infty K(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty R(\tau)\,d\tau.} \qquad (7.15)$$




Площади обеих фигур равновелики

Грубо говоря, возможен вероятностный прогноз поведения любой реализации случайного процесса на время порядка $\tau_к$, если известна информация о ее поведении «в прошлом». Однако любая попытка осуществить прогнозирование на время, существенно превышающее интервал корреляции, окажется безрезультатной — мгновенные значения, столь далеко отстоящие во времени, практически некоррелированы, т. е. среднее значение произведения $x(t)x(t+\tau)$ близко к нулю.

▲ решите задачу 5

**Эффективная ширина спектра.** Пусть исследуемый случайный процесс характеризуется функцией $F(\omega)$ — односторонним энергетическим спектром, причем $F_{max}$ — экстремальное значение этой функции. Мысленно можно заменить данный случайный процесс другим процессом, у которого спектральная плотность мощности постоянна и равна $F_{max}$ в пределах полосы частот $\Delta\omega_{эфф}$, выбираемой из условия равенства средних мощностей обоих процессов:

$$F_{max}\Delta\omega_{эфф} = \int_0^\infty F(\omega)\,d\omega.$$

Отсюда получается формула для эффективной ширины спектра случайного процесса:

$$\boxed{\Delta\omega_{эфф} = \frac{1}{F_{max}}\int_0^\infty F(\omega)\,d\omega.} \qquad (7.16)$$

Эта числовая характеристика часто используется в инженерных расчетах, позволяя легко находить дисперсию шумового напряжения: $\sigma^2 = F_{max}\,\Delta\omega_{эфф}$.

Например, если известно, что $F_{max} = 5 \cdot 10^{-9}$ В$^2 \cdot$с, $\Delta\omega_{эфф} = 3 \cdot 10^5$ 1/с, то $\sigma^2 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ В$^2$, откуда среднеквадратичное напряжение шума $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 39$ мВ.

▲ решите задачу 4

Ясно, что эффективную ширину спектра случайного процесса можно определить множеством способов, например из условия уменьшения энергетического спектра на границе этого частотного интервала до уровня $0.1F_{max}$. В любом случае между $\tau_к$ и $\Delta\omega_{эфф}$ должно иметь место соотношение неопределенности

$$\Delta\omega_{эфф}\tau_к = O(1),$$

вытекающее из свойств преобразования Фурье (см. гл. 2). Таким образом, чем шире энергетический спектр шума, тем хаотичнее изменяются во времени его реализации.

**Белый шум.** В радиотехнике этим термином принято называть стационарный случайный процесс с постоянным на всех частотах энергетическим спектром:

$$\boxed{W(\omega) = W_0 = \text{const}.}$$

● белый шум

Термин «белый шум» образно подчеркивает аналогию с «белым» (естественным) светом, у которого в пределах видимого диапазона интенсивность всех спектральных компонент приблизительно одинакова.

По теореме Хинчина, функция автокорреляции белого шума

$$K(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0\delta(\tau), \tag{7.17}$$

что говорит о неограниченно большой средней мощности белого шума.

Белый шум называют также дельта-коррелированным случайным процессом. Некоррелированность мгновенных значений реализаций такого случайного сигнала означает неограниченно большую скорость изменения их во времени: как бы мал ни был интервал $\tau$, мгновенное значение сигнала за это время может измениться на любую наперед заданную величину.

Белый шум является абстрактной математической моделью, и отвечающий ему физический процесс в природе, безусловно, не существует. Однако это не мешает приближенно заменять реальные достаточно широкополосные случайные процессы белым шумом в тех случаях, когда полоса пропускания цепи, на которую воздействует случайный сигнал, оказывается существенно у́же эффективной ширины спектра шума.

## 7.2 Дифференцирование и интегрирование случайных процессов

В этом параграфе будут изучаться свойства реализаций случайных процессов, подвергнутых операциям дифференцирования и интегрирования. Будет показано, что важнейшей характеристикой, определяющей дифференциальные свойства случайного процесса, является его функция автокорреляции.

**Вероятностная трактовка сходимости и непрерывности.** В теории случайных процессов приходится несколько расширить классическое понятие сходимости последовательности чисел к своему пределу. Так, если $\{x_n\}$ — случайная последовательность, то отнюдь не обязательно, чтобы при $m, n \to \infty$ величина $|x_m - x_n|$ всегда была меньше любого наперед заданного малого числа.

Говорят, что случайная последовательность $\{x_n\}$ сходится к неслучайному числу $x$ *по вероятности*, если

сходимость по вероятности

$$\lim_{n\to\infty} \overline{(x_n - x)^2} = 0. \tag{7.18}$$

Требование сходимости по вероятности, применяемое во всех задачах, связанных со случайными процессами, является менее жестким требованием по сравнению с классическими критериями сходимости детерминированных последовательностей.

Подобным же образом устанавливается свойство непрерывности случайного процесса. Говорят, что случайный процесс $X(t)$ *непрерывен* в точке $t = t_0$, если имеет место предельное равенство

непрерывность случайного процесса

$$\lim_{t_1\to t_0} \overline{[x(t_1) - x(t_0)]^2} = 0. \tag{7.19}$$

**Производная от случайного процесса.** Предположим, что любая реализация $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ может быть подана на дифференцирующее устройство, создающее на своем выходе новую реализацию $y(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Совокупность реализаций $y(t)$ образует случайный процесс $Y(t)$, называемый *производной* по отношению к процессу $X(t)$. Символически этот факт обозначается следующим образом:

$$Y(t) = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t.$$

Будем полагать, что $X(t)$ — стационарный случайный процесс с известным математическим ожиданием $\overline{x} = m_x$. Для того чтобы найти математическое ожидание производной, следует выполнить усреднение по реализациям:

$$m_y = \overline{y} = \frac{\overline{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_x = 0. \tag{7.20}$$

Итак, при дифференцировании любого стационарного случайного сигнала возникает новый случайный сигнал с нулевым математическим ожиданием.

Поставим несколько более сложную задачу вычисления функции автокорреляции производной. Не ограничивая общности, будем полагать, что математическое ожидание исходного процесса $m_x = 0$ (если это не так, всегда можно перейти к новому процессу $\tilde{X}(t)$, реализации которого $\tilde{x}(t) = x(t) - m_x$). Воспользуемся тем, что

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

и представим функцию автокорреляции производной следующим образом:

$$K_y(\tau) = \overline{y(t)\,y(t+\tau)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot \frac{x(t+\tau+\Delta t) - x(t+\tau)}{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\overline{x(t+\Delta t)\,x(t+\tau+\Delta t)} - \overline{x(t+\Delta t)\,x(t+\tau)} -\right.$$

$$\left. - \overline{x(t)\,x(t+\tau+\Delta t)} + \overline{x(t)\,x(t+\tau)}\right].$$

▲ решите задачу 7

Все четыре слагаемых, находящиеся в квадратных скобках, представляют собой функции автокорреляции исходного процесса, вычисленные при различных величинах задержки. Легко видеть, что

$$K_y(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} [2K_x(\tau) - K_x(\tau - \Delta t) - K_x(\tau + \Delta t)].$$

В правой части последнего равенства можно усмотреть конечноразностное представление второй производной от функции $K_x(\tau)$, взятой с обратным знаком. Таким образом, приходим к важной формуле

$$\boxed{K_y(\tau) = -K_x''(\tau) = -\sigma_x^2 R''(\tau).} \qquad (7.21)$$

**Дифференцируемые и недифференцируемые случайные процессы.** По определению, случайный процесс $X(t)$ называется *дифференцируемым*, если его производная имеет конечную дисперсию.

В соответствии с (7.21) дисперсия производной

$$\sigma_y^2 = -K_x''(0) = -\sigma_x^2 R''(0).$$

Поэтому для дифференцируемости случайного процесса необходимо, чтобы вторая производная его автокорреляционной функции в нуле была конечной величиной, а значит, первая производная не имела бы разрыва в этой точке.

**условие дифференцируемости случайного процесса**

Недифференцируемым является случайный процесс с функцией автокорреляции вида $\sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$, рассмотренный в примере 7.1. Продифференцировав эту функцию, легко убедиться, что производная в нуле изменяется скачком на величину $-2\sigma^2\alpha$.

В радиотехнике часто рассматривают случайные процессы с автокорреляционными функциями вида

$$K(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha \mid \tau \mid) e^{-\alpha \mid \tau \mid}. \tag{7.22}$$

Первая производная этой функции

$$K'(\tau) = \begin{cases} -\alpha^2\sigma^2\tau \exp(-\alpha\tau) \text{ при } \tau > 0, \\ -\alpha^2\sigma^2\tau \exp(\alpha\tau) \quad \text{при } \tau < 0 \end{cases}$$

в нуле оказывается непрерывной, и поэтому функция автокорреляции вида (7.22) отвечает дифференцируемому процессу. Любые реальные случайные сигналы, с которыми приходится встречаться на практике, всегда обладают достаточной степенью гладкости, т. е. они являются дифференцируемыми. Однако в теоретических исследованиях довольно часто используются математические модели, соответствующие недифференцируемым процессам. Как правило, это имеет место тогда, когда реализации случайного процесса образуются из большого числа независимых слагаемых. Несмотря на то что вклад одного такого слагаемого (например, импульса тока от движения отдельно взятого электрона) ничтожен, именно эти слагаемые определяют собой «тонкую структуру» реализации. Как следствие, реализации такого процесса в пределе могут приобрести вид функции, всюду непрерывной, однако ни в одной точке не дифференцируемой.

▲ решите задачу 8

**Энергетический спектр производной.** Решим важную задачу о связи между энергетическими спектрами исходного процесса и его производной. Пусть задано соответствие $X(t) \longleftrightarrow W_x(\omega)$. По теореме Хинчина, автокорреляционная функция исходного процесса

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega.$$

На основании (7.21) функция автокорреляции производной

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega,$$

откуда получается искомая формула связи

$$W_y(\omega) = \omega^2 W_x(\omega). \tag{7.23}$$

Используется прием дифференцирования интеграла по параметру

Примечательно, что в спектре мощности производной наблюдается ослабление низкочастотных и подъем высокочастотных компонент. Формула (7.23) позволяет судить о дифференцируемости процесса $X(t)$, исходя из свойств его энергетического спектра: конечная величина дисперсии производной будет обеспечена, если существует интеграл

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega)\, d\omega < +\infty.$$

Так, для случайного процесса со спектром низкочастотного вида (см. пример 7.3) дисперсия производной

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} \omega^2 d\omega = \frac{W_0 \omega_в^3}{3\pi},$$

поэтому такой процесс дифференцируем.

**Корреляционная связь между случайным процессом и его производной.** Во многих задачах радиотехники представляет интерес вопрос о статистической связи между мгновенными значениями случайного сигнала и его производной. Для ответа на него вычислим функцию взаимной корреляции $K_{xy}(\tau)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = dX/dt$, полагая, что оба эти процесса стационарны и имеют нулевые средние значения. При этих условиях

$$K_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\, y(t+\tau)} =$$

$$= \overline{x(t) \frac{d}{d\tau} x(t+\tau)} = \frac{d}{d\tau} \overline{x(t)\, x(t+\tau)},$$

откуда

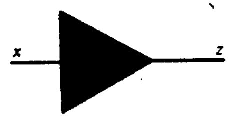
$$K_{xy}(\tau) = \frac{dK_x(\tau)}{d\tau}. \tag{7.24}$$

Как уже известно, функция $K_x(\tau)$ является четной. Поэтому при $\tau = 0$ производная $dK_x'/d\tau$ всегда обращается в нуль. На основании (7.24) отсюда следует вывод о том, *что мгновенные значения сигнала и его производной, взятые в один и тот же момент* *времени, являются некоррелированными случайными величинами.* Еще более сильное утверждение можно сделать применительно к гауссовым случайным процессам: здесь случайный сигнал и его производная *статистически независимы.*

**некоррелированность случайного процесса и его производной**

**Интеграл от случайного процесса.** Будем называть случайный процесс $Z(t)$ *определенным интегралом* с переменным верхним пределом от случайного процесса $X(t)$, если между реализациями $z(t)$ и $x(t)$ имеется следующее соответствие:

$$z(t) = \int_0^t x(t_1)\,dt_1. \tag{7.25}$$



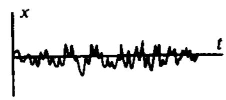

**Интегратор**

Физически это означает, что сигналы $z(t)$ наблюдаются на выходе идеального интегратора, причем входные сигналы $x(t)$ начинают поступать в нулевой момент времени.

Если процесс $X(t)$ стационарен и имеет среднее значение $m_x$, то математическое ожидание сигнала на выходе интегратора

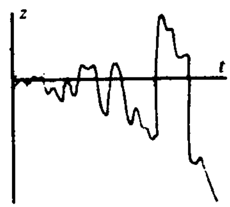
$$m_z = \overline{z}(t) = \int_0^t \overline{x}(t_1)\,dt_1 = m_x t. \tag{7.26}$$

**Случайный сигнал на входе**




Таким образом, условие $m_x \neq 0$ сразу ведет к нестационарности случайного процесса $Z(t)$.

**и на выходе**




**интегратора**

Однако даже при нулевом математическом ожидании входного процесса сигнал на выходе интегратора будет представлять собой реализацию нестационарного случайного процесса. Чтобы убедиться в этом, вычислим функцию автокорреляции интеграла:

$$K_z(t_1, t_2) = \overline{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} x(t')\,x(t'')\,dt'dt''} =$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overline{x(t')\,x(t'')}\,dt'dt'' = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(t', t'')\,dt'dt''.$$

Если процесс $X(t)$ стационарен, то аргумент функции автокорреляции, стоящей под знаком интеграла в последней формуле, будет представлять собой разность $t'' - t'$ и поэтому

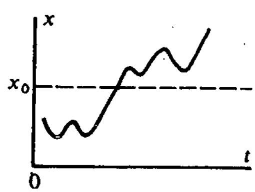
$$K_z(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(t'' - t')\,dt'dt''. \tag{7.27}$$

Поскольку правая часть в формуле (7.27) зависит непосредственно от $t_1$ и $t_2$, а не от их разности, то сигнал на выходе интеграла не может представлять собой стационарного случайного процесса.

Нестационарность интеграла от случайного процесса имеет глубокий физический смысл, свидетельствуя о неограниченном нарастании уровня флуктуаций на выходе идеального интегратора, обусловленном их накоплением.

Сходные ситуации часто встречаются в различных областях физики. В качестве примера можно привести известную проблему одномерного случайного блуждания точки (броуновское движение) [14]. Здесь воображаемая точка, получая равновероятные толчки в двух противоположных направлениях, в среднем остается на месте, однако величина ее отклонения от среднего положения неограниченно нарастает во времени.

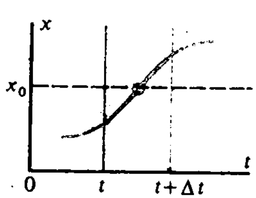
**Задача о выбросах случайных процессов.** В статистической радиотехнике большой интерес представляет следующая задача, тесно связанная с дифференциальными свойствами случайных процессов. Предположим, что реализации некоторого случайного процесса $X(t)$ представляют собой достаточно гладкие функции времени. Требуется исследовать вопрос о том, сколь часто во времени происходит пересечение этими реализациями некоторого фиксированного уровня $x_0$. Такая проблема естественно возникает, например, при анализе помехоустойчивости радиотехнических устройств, находящихся под воздействием флуктуационных или случайных импульсных помех.




Положительный выброс

Событие, состоящее в том, что реализация $x(t)$ пересекает заданный уровень $x_0$ «снизу вверх», называют *положительным выбросом* процесса $X(t)$ на уровне $x_0$.

Решим простейшую задачу — нахождение среднего числа положительных выбросов, происходящих за единицу времени. Для этого мысленно выделим на временно́й оси $t$ малый интервал длительностью $\Delta t$. Считая, что процесс $X(t)$ стационарен и непрерывен, всегда можно указать столь малое $\Delta t$, что в пределах этого отрезка времени либо не будет ни одного положительного выброса, либо он будет единственным.




Найдем вначале вероятность элементарного события, заключающегося в том, что за время $\Delta t$ происходит один положительный выброс. Очевидно, что единственный положительный выброс возникает в том случае, если: а) $x(t) < x_0$, б) $x(t+\Delta t) > x_0$. Но поскольку $x(t+\Delta t) \approx x(t) + x'\Delta t$, то условие б) означает, что $x_0 - x'\Delta t < x(t)$. Таким образом, единственный положительный выброс в пределах интервала $\Delta t$ произойдет, если реализация случайного процесса имеет здесь положительную производную ($x' \geqslant 0$) и удовлетворяет неравенству

$$x_0 - x'\Delta t < x(t) < x_0.$$

Вероятность $P$ этого события легко вычисляется, если известна совместная двумерная плотность вероятности $p(x, x')$ реализации и ее производной, относящаяся к одному и тому же моменту времени:

$$P = \int_0^\infty dx' \int_{x_0 - x'\Delta t}^{x_0} p(x, x')\, dx = \Delta t \int_0^\infty p(x_0, x')\, x' dx'. \qquad (7.28)$$

Прямая пропорциональность между этой вероятностью и длительности интервала $\Delta t$ указывает на то, что величина $n(x_0)$ — среднее число положительных выбросов, происходящих за 1 с, выражается формулой

$$\boxed{n(x_0) = \int_0^\infty p(x_0, x')\, x' dx'.} \qquad (7.29)$$

**Выбросы гауссовых процессов.** Вычисление среднего числа положительных выбросов значительно упрощается, если процесс $X(t)$ является гауссовым. В этом случае мгновенные значения реализации и ее производной в совпадающие моменты времени статистически независимы, т. е.

$$p(x_0, x') = p(x_0)\, p(x'), \qquad (7.30)$$

причем производная, получаемая путем линейных операций над исходным процессом, также нормальна. Объединяя (7.29) и (7.30), находим

$$n(x_0) = p(x_0) \int_0^\infty p(x')\, x' dx'. \qquad (7.31)$$

Будем полагать, что автокорреляционная функция исходного процесса

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 R(\tau)$$

известна. Тогда дисперсия производной

$$\sigma_{x'}^2 = -\sigma_x^2 R''(0),$$

откуда следует формула для плотности вероятности производной

Используется нормальность производной

$$p(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x \sqrt{-R''(0)}} \exp\left[-\frac{x'^2}{2\sigma_x^2(-R''(0))}\right]. \qquad (7.32)$$

Элементарные выкладки дают результат

$$\int_0^\infty p(x')\,x'\mathrm{d}x' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma_x \sqrt{-R''(0)},$$

подстановка которого в (7.31) позволяет определить среднее число положительных выбросов стационарного гауссова процесса:

$$\boxed{n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-R''(0)}\,\exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_x^2}\right).} \tag{7.33}$$

**Квазичастота стационарного случайного процесса.** В § 7.1 отмечалось, что некоторые виды случайных процессов изменяются во времени квазипериодически. Числовой характеристикой, отражающей темп таких колебаний, может служить *квазичастота*, определяемая как среднее число пересечений нулевого уровня. Согласно (7.33), для гауссова процесса квазичастота

● квазичастота

$$\boxed{n(0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-R''(0)}} \tag{7.34}$$

Квазичастота может быть определена только для дифференцируемого случайного процесса

целиком определяется поведением автокорреляционной функции в нуле. Поскольку

$$-R''(0) = \sigma_{x'}^2 / \sigma_x^2,$$

а дисперсия производной выражается через односторонний энергетический спектр процесса $X(t)$:

$$\sigma_{x'}^2 = \int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

▲ решите задачу 9

то квазичастота может быть записана в следующем виде, эквивалентном (7.34):

$$n(0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x}\left(\int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}. \tag{7.35}$$

**Пример 7.4.** *Квазичастота стационарного гауссова процесса с ограниченным низкочастотным спектром (см. пример 7.3).*

Здесь

$$\int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega)\,\mathrm{d}\omega = F_0\omega_\text{в}^3/3, \quad \sigma_x = \sqrt{F_0\omega_\text{в}}.$$

Подставляя эти выражения в (7.35), получаем

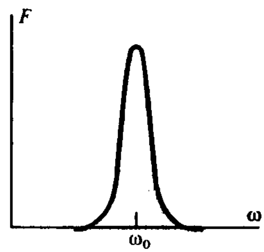
$$n(0) = \omega_в/2\pi\sqrt{3} = f_в/\sqrt{3}.$$

Последний результат не может быть усмотрен непосредственно.

## 7.3 Узкополосные случайные процессы

В радиотехнических приложениях исключительно важную роль играет особый класс случайных процессов, характеризующихся тем, что их энергетический спектр имеет резко выраженный максимум вблизи некоторой частоты, отличной от нуля. Ниже проводится анализ статистических свойств подобных узкополосных случайных процессов. Рассмотрение ограничивается случаем гауссовых процессов, наиболее часто встречающихся на практике. К тому же именно для гауссовых процессов удается получить ряд важных результатов в рамках корреляционной теории.

**Функция автокорреляции узкополосного случайного процесса.** Будем рассматривать случайный процесс $X(t)$, односторонний энергетический спектр которого $F(\omega)$ концентрируется в окрестности произвольно выбранной частоты $\omega_0$.



Энергетический спектр узкополосного случайного процесса

По теореме Хинчина, автокорреляционная функция исследуемого процесса

$$K(\tau) = \int_0^\infty F(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \tag{7.36}$$

Мысленно сместим спектр процесса из окрестности частоты $\omega_0$ в окрестность нулевой частоты, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$. Тогда формула (7.36) приобретает следующий вид:

$$K(\tau) = \int_{-\omega_0}^\infty F(\omega_0 + \Omega)\cos[(\omega_0 + \Omega)\tau]d\Omega. \tag{7.37}$$

В соответствии с исходным предположением об узкополосности процесса $X(t)$ его энергетический спектр $F(\omega)$ исчезающе мал на частотах, близких к нулю. Поэтому в (7.37) можно с высокой точностью заменить нижний предел интегрирования на $-\infty$ и записать функцию автокорреляции в виде

$$\boxed{K(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0\tau - b(\tau)\sin\omega_0\tau,} \tag{7.38}$$

где

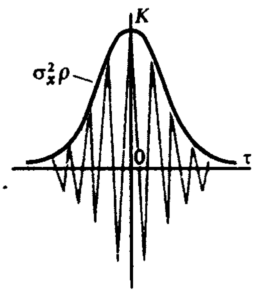
$$a(\tau) = \int_{-\infty}^\infty F(\omega_0 + \Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega,$$

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega)\sin \Omega\tau \, d\Omega -$$

— медленно меняющиеся функции аргумента $\tau$. Заметим, что $a(\tau)$ четна, а $b(\tau)$ нечетна по $\tau$.

Особенно простой и наглядной функция автокорреляции узкополосного случайного процесса получается в том случае, когда спектр $F(\omega)$ симметричен относительно своей центральной частоты $\omega_0$. При этом $b(\tau)=0$, так что

$$K(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0\tau. \qquad (7.39)$$




Функция автокорреляции узкополосного случайного процесса

Коэффициент $a(\tau)$ играет роль огибающей, которая изменяется медленно по сравнению с множителем $\cos\omega_0\tau$. Часто бывает удобным вводить нормированную огибающую $\rho(\tau)$ для автокорреляционной функции узкополосного случайного процесса, определив ее следующим образом:

$$a(\tau) = \sigma_x^2\,\rho(\tau).$$

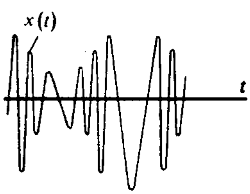
Тогда

$$\boxed{K(\tau) = \sigma_x^2\,\rho(\tau)\cos\omega_0\tau.} \qquad (7.40)$$

**Огибающая и начальная фаза.** Характерный вид автокорреляционной функции (7.40) свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания вида

$$x(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \qquad (7.41)$$

у которых как огибающая $U(t)$, так и начальная фаза $\varphi(t)$ являются случайными функциями, медленно (в масштабе $\omega_0$) изменяющимися во времени.




Типичная реализация узкополосного случайного процесса

Представим реализацию (7.41) как сумму синфазной и квадратурной компонент (см. гл. 5):

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t - B(t)\sin\omega_0 t. \qquad (7.42)$$

Обе амплитуды $A(t)$ и $B(t)$ также являются медленными сигналами, причем они будут изменяться тем медленнее, чем меньше эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{эфф}$ по сравнению с центральной частотой $\omega_0$.

Рассмотрим случайный процесс $Y(t)$, сопряженный по отношению к исходному процессу $X(t)$. Его реализации вычисляются с помощью преобразования Гильберта:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)\,d\tau}{t-\tau}.$$

Предположение о медленности синфазной $A(t)$ и квадратурной $B(t)$ амплитуд дает возможность весьма просто записать выражение для реализации сопряженного процесса, вынеся медленные множители за знак преобразования Гильберта:

$$y(t) = A(t)\sin\omega_0 t + B(t)\cos\omega_0 t \,. \qquad (7.43)$$

Отсюда следуют формулы для мгновенных значений реализации огибающей

$$U(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} \qquad (7.44)$$

и начальной фазы

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{B(t)}{A(t)}. \qquad (7.45)$$

**Статистические свойства сопряженного процесса.** Для дальнейшего анализа огибающей и начальной фазы узкополосного случайного процесса необходимо изучить связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Прежде всего отметим, что если $\overline{x}=0$, то и $\overline{y}=0$. Далее, поскольку процесс $X(t)$ гауссов, а преобразование Гильберта есть линейное интегральное преобразование, то свойство нормальности присуще и сопряженному процессу $Y(t)$.

Как известно, если $S_x(\omega)$ — спектральная плотность реализации $x(t)$, то соответствующий спектр $S_y(\omega)$ сопряженной реализации

$$S_y(\omega) = -\,j\,S_x(\omega)\,\mathrm{sgn}(\omega).$$

Модули спектральных плотностей $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ совпадают, поэтому энергетические спектры процессов $X(t)$ и $Y(t)$ одинаковы:

$$W_x(\omega) = W_y(\omega).$$

Отсюда вытекает тождественность автокорреляционных функций и вывод о стационарности процесса $Y(t)$:

$$K_x(\tau) = K_y(\tau) = \int_0^{\infty} F_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega.$$

Вычислим, наконец, взаимную корреляционную функцию

$$K_{xy}(\tau)=\overline{x(t)\,y(t+\tau)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{x(t)\,x(\xi)}}{t+\tau-\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_x(\xi-t)}{\tau-(\xi-t)}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_x(\eta)}{\tau-\eta}\,d\eta\,,$$

которая оказывается равной преобразованию Гильберта от автокорреляционной функции процесса $X(t)$. Аналогично показывается (этот вывод предоставляется читателям в качестве упражнения), что

$$K_{yx}(\tau)=-K_{xy}(\tau).$$

Итак,

$$K_{xy}(\tau)=\mathscr{H}\Big[K_x(\tau)\Big]=\int\limits_0^{\infty}F_x(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega. \tag{7.46}$$

Интересно заметить, что функция $K_{xy}(\tau)$ нечетна и обращается в нуль при $\tau=0$. Отсюда следует, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$ в совпадающие моменты времени статистически независимы. Формуле (7.46) можно придать удобный вид, выполнив замену переменной $\omega=\omega_0+\Omega$. Тогда

$$K_{xy}(\tau)=\int\limits_{-\omega_0}^{\infty}F_x(\omega_0+\Omega)\sin(\omega_0+\Omega)\tau\,d\Omega=$$

$$=a(\tau)\sin\omega_0\tau+b(\tau)\cos\omega_0\tau, \tag{7.47}$$

где функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ определяются в соответствии с (7.38).

**Корреляционные свойства синфазной и квадратурной амплитуд.** Наша конечная цель — найти и изучить статистические характеристики огибающей $U(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$. Для этого удобно перейти от реализации $x(t)$ и $y(t)$ к медленно меняющимся во времени реализациям $A(t)$ и $B(t)$, которые на основании (7.42) и (7.43) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t)&=x(t)\cos\omega_0 t+y(t)\sin\omega_0 t,\\ B(t)&=-x(t)\sin\omega_0 t+y(t)\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Процессы $A(t)$ и $B(t)$ линейно связаны с гауссовыми процессами $X(t)$ и $Y(t)$. Поэтому они также являются гауссовыми, и если $\overline{x}=\overline{y}=0$, то $\overline{A}=\overline{B}=0$.

Возьмем первую формулу из системы (7.48) и вычислим автокорреляционную функцию процесса $A(t)$. Выполнив элементарные тригонометрические преобразования, находим

$$K_A(\tau) = \overline{[x(t)\cos\omega_0 t + y(t)\sin\omega_0 t] \times}$$

$$\overline{\times [x(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau) + y(t+\tau)\sin\omega_0(t+\tau)]} =$$

$$= K_x(\tau)\cos\omega_0\tau + K_{xy}(\tau)\sin\omega_0\tau. \qquad (7.49)$$

Подстановка сюда выражений функций $K_x(\tau)$ и $K_{xy}(\tau)$ из (7.38) и (7.47) приводит к очень простому результату:

$$K_A(\tau) = a(\tau). \qquad (7.50)$$

Аналогично доказывается, что

$$K_B(\tau) = a(\tau) \qquad (7.51)$$

▲ решите задачу 10

и

$$K_{AB}(\tau) = b(\tau). \qquad (7.52)$$

Положив в (7.50) и (7.51) значение $\tau=0$, имеем

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega = \sigma_x^2. \qquad (7.53)$$

Таким образом, дисперсии синфазной и квадратурной амплитуд оказываются равными дисперсии исходного узкополосного процесса $X(t)$.

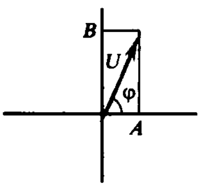
**Совместная плотность вероятности огибающей и начальной фазы.** Достоинства метода, основанного на переходе от узкополосного случайного процесса к его синфазной и квадратурной компонентам, становятся очевидными, когда возникает задача вычисления двумерной плотности вероятности $p(U, \varphi)$. Эта характеристика, в свою очередь, дает возможность найти одномерные плотности вероятности огибающей

$$p(U) = \int\limits_0^{2\pi} p(U, \varphi)\,d\varphi \qquad (7.54)$$

и начальной фазы

$$p(\varphi) = \int\limits_0^{\infty} p(U, \varphi)\,dU. \qquad (7.55)$$

Мгновенные значения амплитуд $A(t)$ и $B(t)$ образуют двумерный гауссов вектор, обе компоненты которого независимы и обладают равными дисперсиями $\sigma_x^2$. Поэтому двумерная




плотность вероятности

$$p(A,B) = p(A)\,p(B) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\,e^{-\frac{A^2+B^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{7.56}$$

Для получения плотности вероятности $p(U,\varphi)$ следует осуществить функциональное преобразование, которое переводит случайный вектор $\{A, B\}$ в новую случайную совокупность $\{U, \varphi\}$:

$$A = U\cos\varphi;\quad B = U\sin\varphi. \tag{7.57}$$

Якобиан такого преобразования (см. формулу (6.24) )

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -U\sin\varphi \\ \sin\varphi & U\cos\varphi \end{vmatrix} = U. \tag{7.58}$$

Поскольку в новых переменных $A^2+B^2=U^2$, то формула для искомой двумерной плотности вероятности такова:

$$p(U,\varphi) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2}\exp[-U^2/(2\sigma_x^2)] \tag{7.59}$$

**Одномерный закон распределения фазы.** Воспользовавшись формулами (7.55) и (7.59), найдем плотность вероятности начальной фазы:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{U}{\sigma_x^2}\,e^{-U^2/\left(2\sigma_x^2\right)}\,dU.$$

Замена переменной $z=U/\sigma_x$ приводит к следующему результату:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{2\pi}. \tag{7.60}$$

Таким образом, начальная фаза узкополосного случайного процесса *распределена равномерно* в промежутке от 0 до $2\pi$. Физически это означает отсутствие какого-либо преимущественного значения начальной фазы у отдельно взятых реализаций.

**Одномерный закон распределения огибающей.** Поскольку величина $p(U,\varphi)$ не зависит явно от угла $\varphi$, то на основании (7.54) плотность вероятности огибающей

$$\boxed{p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}\right)} \tag{7.61}$$

Целесообразно снова перейти к безразмерной переменной $z=U/\sigma_x$, относительно которой

$$p(z) = z\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \tag{7.62}$$

Закон распределения мгновенных значений огибающей узкополосного случайного процесса, устанавливаемый выражениями (7.61) или (7.62), известен под названием *закона Рэлея*. Соответствующий график (рис. 7.1) наглядно показывает, что наиболее вероятны некоторые средние (порядки $\sigma_x$) значения огибающей. В то же время маловероятно, чтобы огибающая принимала значения как близкие к нулю, так и значительно превосходящие среднеквадратичный уровень $\sigma_x$ исходного процесса.

● закон Рэлея

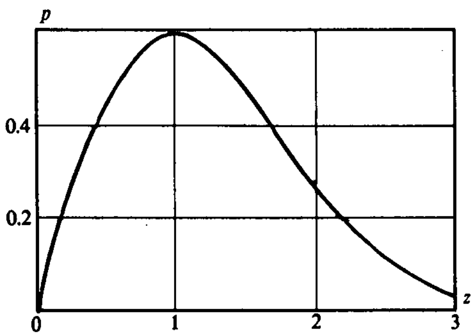



Рис. 7.1. График плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону Рэлея (по оси абсцисс отложен безразмерный аргумент $z=U/\sigma_x$)

Проводя усреднение с помощью распределения (7.61), можно найти среднее значение огибающей узкополосного нормального процесса:

$$m_U=\overline{U}=\sqrt{\pi/2}\sigma_x = 1.253\ \sigma_x. \tag{7.63}$$

▲ решите задачу 11

и ее дисперсию:

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} - \overline{U}^2 = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_x^2 = 0.429\sigma_x^2. \tag{7.64}$$

Располагая одномерной плотностью вероятности огибающей, можно решать многие задачи теории узкополосных случайных процессов, в частности, находить вероятность превышения огибающей некоторого заданного уровня.

**Пример 7.5.** *Пусть узкополосный нормальный процесс имеет постоянное значение одностороннего энергетического спектра* $F_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ В$^2 \cdot$ с *в пределах полосы частот от* $\omega_{\min} = 10^5$ 1/с *до* $\omega_{\max} = 1.02 \cdot 10^5$ 1/с. *Найти вероятность того, что огибающая этого процесса будет превосходить уровень* $U_0 = 5$ В.

По условию задачи, эффективная ширина спектра процесса $\Delta\omega_{эфф} = 2 \cdot 10^3$ 1/с. Поэтому дисперсия $\sigma_x^2 = F_0 \Delta\omega_{эфф} = 3$ В$^2$. В соответствии с определением понятия плотности вероятности искомая величина

$$P(U > U_0) = \int\limits_{U_0}^{\infty} p(U)\, dU = e^{-U_0^2/(2\sigma_x^2)} = e^{-25/6} = 0{,}0155.$$

Можно утверждать, что событие, рассматриваемое в этом примере, является достаточно редким.

Случайные величины, распределенные по закону Рэлея, встречаются во многих физических и радиотехнических задачах. Изящный вывод формулы (7.61), полученный Рэлеем из совсем иных предпосылок, читатель может найти в классической книге [43].

**Двумерная плотность вероятности огибающей.** Для того чтобы исследовать динамику изменения огибающей во времени, необходимо располагать более подробной информацией по сравнению с той, которая может быть почерпнута из закона Рэлея. Так, для вычисления функции автокорреляции огибающей требуется знать двумерную плотность вероятности $p(U, U_\tau)$ (здесь и в дальнейшем принято сокращенное обозначение $U_\tau = U(t+\tau)$).

Воспользуемся тем, что синфазные и квадратурные амплитуды узкополосного нормального процесса являются низкочастотными гауссовыми сигналами с одинаковыми автокорреляционными функциями:

$$K_A(\tau) = K_B(\tau) = \sigma_x^2\, \rho(\tau)$$

и двумерными плотностями (см. (6.28)):

$$p(A, A_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{A^2 + A_\tau^2 - 2\rho A A_\tau}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right];$$

$$p(B, B_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{B^2 + B_\tau^2 - 2\rho B B_\tau}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right].$$

Если энергетический спектр процесса симметричен относительно центральной частоты $\omega_0$, так что $b(\tau) = 0$, то процессы

$A(t)$ и $B(t)$ статистически независимы и поэтому совместная четырехмерная плотность вероятности

$$p(A, A_\tau, B, B_\tau) = p(A, A_\tau)\, p(B, B_\tau) \tag{7.65}$$

Осуществим переход от синфазной и квадратурной амплитуд к огибающей и фазе, вычисленным в различные моменты времени:

$$\begin{aligned} A &= U\cos\varphi; & A_\tau &= U_\tau \cos\varphi_\tau; \\ B &= U\sin\varphi; & B_\tau &= U_\tau \sin\varphi_\tau\,. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Якобиан этого преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi_\tau & 0 & \sin\varphi_\tau \\ -U\sin\varphi & 0 & U\cos\varphi & 0 \\ 0 & -U_\tau \sin\varphi_\tau & 0 & U_\tau\cos\varphi_\tau \end{vmatrix} = UU_\tau. \tag{7.67}$$

Используя этот результат, можно записать плотность вероятности (7.65) в новых переменных:

$$p(U, U_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{UU_\tau}{4\pi^2\sigma_x^4(1-\rho^2)}\exp\left[-\frac{U^2+U_\tau^2-2\rho UU_\tau\cos(\varphi-\varphi_\tau)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right] \tag{7.68}$$

Теперь, чтобы получить искомую двумерную плотность вероятности огибающей, следует дважды проинтегрировать правую часть формулы (7.68) по угловым координатам:

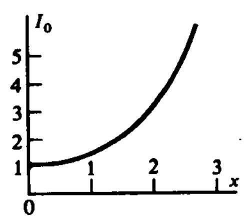
$$p(U, U_\tau) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi_\tau\, p(U, U_\tau, \varphi, \varphi_\tau). \tag{7.69}$$

Применяя известное в математике представление

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi} d\varphi = I_0(x),$$

где $I_0$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, из (7.68) и (7.69) получаем окончательно

$$\boxed{p(U, U_\tau) = \frac{UU_\tau}{\sigma_x^4(1-\rho^2)}\exp\left[\frac{U^2+U_\tau^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right] \times I_0\left(\frac{\rho UU_\tau}{\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right)} \tag{7.70}$$




**Функция $I_0(x)$**

Плотность вероятности, определяемую формулой (7.70), иногда называют *двумерным законом Рэлея*. Интересно отметить, что если величина $\tau$ значительно превосходит интервал

**двумерный закон Рэлея**

корреляции $\tau_к$, свойственный функции $\rho(\tau)$, то $\rho \to 0$, и поскольку $I_0(0)=1$, то

$$p(U,U_\tau) \approx \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \frac{U_\tau}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U_\tau^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (7.71)$$

т. е. $p(U, U_\tau)$ стремится к произведению двух одномерных рэлеевских плотностей.

**Функция автокорреляции огибающей.** В соответствии с определением понятия функции автокорреляции

$$K_U(\tau) = \overline{UU_\tau} - \overline{U}^2. \qquad (7.72)$$

Квадрат среднего значения огибающей находится на основании (7.63):

$$\overline{U}^2 = (\pi/2)\sigma_x^2.$$

Поэтому задача сводится к вычислению среднего значения произведения $UU_\tau$:

$$\overline{UU_\tau} = \int_0^\infty \mathrm{d}U \int_0^\infty \mathrm{d}U_\tau\, p(U, U_\tau). \qquad \mathbf{(7.73)}$$

Нахождение интеграла (7.73) связано с весьма громоздкими вычислениями, основанными на том, что двумерная плотность вероятности (7.70) разлагается в бесконечный ряд по многочленам Лагерра [15]. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$K_U(\tau) = \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 \left[\frac{\rho^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n}(n!)^2} \rho^{2n}\right]. \qquad \mathbf{(7.74)}$$

Представляя автокорреляционную функцию в виде

$$K_U(\tau) = \sigma_U^2 R_U(\tau),$$

▲ решите задачу 12

из (7.74) находим следующее выражение для коэффициента корреляции огибающей:

$$\boxed{R_U(\tau) = 0.915\rho^2(\tau) + 0.058\rho^4(\tau) + \ldots} \qquad \mathbf{(7.75)}$$

В ориентировочных расчетах можно приближенно считать, что коэффициент корреляции огибающей просто равен квадрату огибающей функции автокорреляции узкополосного сигнала.

**Пример 7. 6.** *Пусть известно, что автокорреляционная функция некоторого случайного процесса* (В$^2$)

$$K_x(\tau) = 0.5e^{-10^4|\tau|} \cos 2\pi \cdot 10^6\tau.$$

Поскольку высокочастотный сомножитель имеет здесь период $10^{-6}$ с, в то время как амплитудный множитель изменяется за это время лишь в $\exp(-10^{-2}) = 0.99$ раза, рассматриваемый случайный процесс действительно может считаться узкополосным с центральной частотой $f_0 = 1$ МГц. Ограничиваясь первым членом ряда в формуле (7.75) и заменяя приближенно коэффициент 0.915 на единицу, находим коэффициент корреляции огибающей:

$$R_U(\tau) \approx \exp(-2 \cdot 10^4 |\tau|).$$

Дисперсия огибающей

$$\sigma_U^2 = 0.429\sigma_x^2 = 0.2145 \text{ В}^2,$$

откуда функция автокорреляции огибающей

$$K_U(\tau) = 0.1963 \exp(-2 \cdot 10^4 |\tau|).$$

Интервал корреляции огибающей

$$\tau_к = \int_0^\infty R_U(\tau)\, d\tau = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$$

составляет 50 периодов гармонического колебания с частотой $f_0$. Наконец, односторонний энергетический спектр огибающей (см. пример 7.1), имеющий размерность В$^2$ с,

$$F_U(\omega) = \frac{2{,}73 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^8 + \omega^2}$$

имеет низкочастотный характер.

**Огибающая сумма гармонического сигнала и узкополосного нормального шума.** В радиотехнике часто приходится изучать статистические свойства сигнала, наблюдаемого на выходе некоторого частотно-избирательного устройства, например резонансного усилителя. Здесь помимо флуктуационного гауссова шума с центральной частотой $\omega_0$, равной резонансной частоте системы, присутствует также детерминированный сигнал $U_m \cos \omega_0 t$ с известной амплитудой $U_m$. Если полезная информация, передавемая по радиоканалу, заключена в огибающей выходного колебания, как, например, при использовании амплитудной модуляции, то важно выяснить, насколько значителен вредный эффект, порождаемый шумом.

Простейшей задачей здесь является нахождение одномерной плотности вероятности огибающей суммарного колебания.

Считая, что полезный сигнал

$$s(t) = U_m \cos \omega_0 t \ ,$$

в то время как шум

$$n(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t \ ,$$

имеем следующее выражение реализации суммарного процесса $X(t)$:

$$x(t) = s(t) + n(t) = [U_m + A(t)] \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t \ .$$

Данный случайный процесс узкополосен, и поэтому его реализация может быть записана посредством медленно меняющейся огибающей $U(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$:

$$x(t) = U(t) \cos(\omega_0 (t) + \varphi(t)) \ .$$

Очевидно, что между парами $\{A, B\}$ и $\{U, \varphi\}$ имеется связь:

$$A = U \cos \varphi - U_m \ ,$$

$$B = U \sin \varphi \ . \tag{7.76}$$

Легко проверить, что якобиан $D$ этого преобразования равен $U$. Тогда поскольку двумерная плотность вероятности

$$p(A,B) = \frac{1}{2\pi \sigma_x^2} e^{-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2}} \ ,$$

то в новых переменных

$$p(U, \varphi) = \frac{U}{2\pi \sigma_x^2} \exp\left[-\frac{U^2 + U_m^2 - 2UU_m \cos\varphi}{2\sigma_x^2}\right] \tag{7.77}$$

Теперь, чтобы получить одномерную плотность вероятности огибающей, следует проинтегрировать правую часть формулы (7.77) по угловой координате:

$$p(U) = \int_0^{2\pi} p(U, \varphi)\, d\varphi \ ,$$

в результате чего находим

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2}\right] I_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right) . \tag{7.78}$$

закон Райса

Данная формула выражает закон, получивший в радиотехнике название *закона Райса*. Отметим, что при $U_m = 0$, т. е.

при отсутствии детерминированного сигнала, закон Райса автоматически переходит в закон Рэлея.

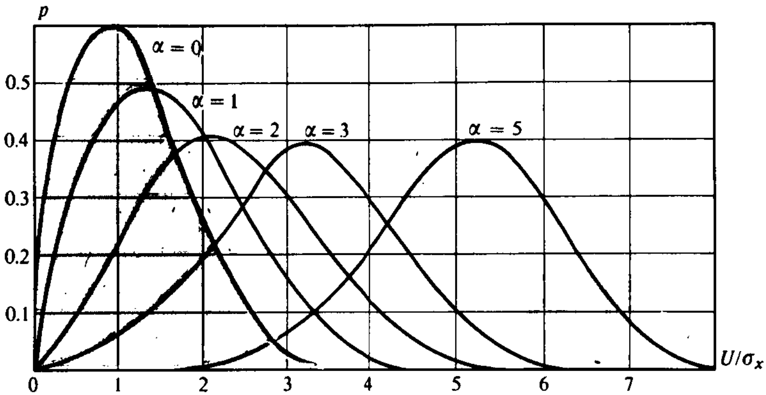



Рис. 7.2. Плотность вероятности случайной величины, распределенной по закону Райса

Отмечена кривая, отвечающая закону Рэлея

На рис. 7.2. представлены графики плотности вероятности случайной величины, распределенной по закону Райса при различных отношениях $\alpha = U_m/\sigma_x$.

Интересно отметить, что если амплитуда детерминированного сигнала значительно превосходит среднеквадратичный уровень шума, т. е. $U_m/\sigma_x \gg 1$, то при $U \approx U_m$ можно воспользоваться асимптотическим представлением модифицированных функций Бесселя с большим аргументом:

$$I_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right) \approx \frac{\exp\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right)}{\sqrt{2\pi\frac{UU_m}{\sigma_x^2}}} \approx \frac{\sigma_x \exp\left(\frac{UU_m}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{2\pi}\,U} .$$

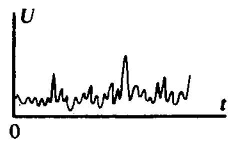
При подстановке в (7.78) имеем

$$p(U) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[-\frac{(U-U_m)^2}{2\sigma_x^2}\right], \qquad (7.79)$$

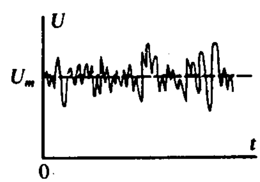
т. е. огибающая результирующая сигнала распределена в этом случае приближенно нормально с дисперсией $\sigma_x^2$ и математическим ожиданием $U_m$.

Практически считают, что уже при $U_m/\sigma_x = 3$ огибающая узкополосного сигнала нормализуется. Полезно вспомнить, что огибающая чистого шума, распределенная по закону Рэлея,

Типичная реализация огибающей узкополосного шума:




и процесса вида «гармонический сигнал + узкополосный шум»




Следует обратить внимание на изменение среднего значения и дисперсии под влиянием гармонического сигнала имела дисперсию, равную $0.429\sigma_x^2$. Таким образом, увеличение амплитуды детерминированного гармонического сигнала приводит к более чем двукратному возрастанию дисперсии огибающей. Тем не менее относительные флуктуации огибающей при этом падают. Действительно, для чистого шума величина $\sigma_U/\overline{U}$, которую удобно принять в качестве числовой оценки флуктуаций, равна 0.523. При большом детерминированном сигнале $\sigma_U/\overline{U}=\sigma_x/U_m$, стремясь к нулю с ростом $U_m$.

## Результаты

◇◇ *Случайная спектральная плотность отдельных реализаций стационарного случайного процесса дельта-коррелирована и имеет на всех частотах нулевое математическое ожидание.*

◇◇ *Преобразование Фурье от функции автокорреляции называется энергетическим спектром стационарного случайного процесса. Чем шире энергетический спектр, тем хаотичнее реализации случайного процесса.*

◇◇ *Для того чтобы случайный процесс был дифференцируемым, необходимо существование второй производной от автокорреляционной функции при нулевом значении аргумента.*

◇◇ *Мгновенные значения реализаций случайного процесса и его производной в совпадающие моменты времени некоррелированы.*

◇◇ *Реализации случайного сигнала на выходе идеального интегратора образуют нестационарный случайный процесс даже в том случае, если входной случайный процесс стационарен.*

◇◇ *Реализации узкополосного случайного процесса в общем случае представляют собой квазигармонические колебания, случайно модулированные по амплитуде и по фазовому углу.*

◇◇ *Функция автокорреляции узкополосного случайного процесса представляется произведением быстрого и медленного сомножителей.*

◇◇ *Узкополосный случайный процесс и его преобразование Гильберта в совпадающие моменты времени некоррелированы между собой.*

◇◇ *Огибающая узкополосного нормального случайного процесса распределена по закону Рэлея; начальная фаза этого процесса имеет равномерное распределение.*

◇◇ *Функция автокорреляции огибающей узкополосного случайного процесса приблизительно равна квадрату огибающей функции автокорреляции самого процесса.*

◇◇ *Огибающая сумма гармонического сигнала и узкополосного гауссова шума, центральная частота энергетического спектра которого совпадает с частотой сигнала, распределена по закону Райса. При больших отношениях сигнал/шум наблюдается нормализация огибающей.*

## Вопросы

1. Некоторый случайный процесс изучается в рамках корреляционной теории. Какой смысл вкладывается в это высказывание?
2. Как формулируется теорема Хинчина?
3. Перечислите основные свойства энергетического спектра стационарного случайного процесса.
4. Как определяется понятие одностороннего энергетического спектра? Как, зная энергетический спектр, вычислить дисперсию стационарного случайного процесса?
5. Почему случайный процесс типа белого шума называют дельта-коррелированным случайным процессом? Каковы основные свойства белого шума? В каких случаях реальный случайный процесс можно приближенно заменить белым шумом?
6. Как определяется понятие сходимости по вероятности?
7. Какими отличительными свойствами обладают недифференцируемые случайные процессы?
8. Как вычисляются дисперсия, функция автокорреляции и энергетический спектр производной от стационарного случайного процесса?
9. Как определяется понятие положительного выброса случайного процесса?
10. Что такое квазичастота стационарного случайного процесса?
11. Изобразите примерный вид одной из реализаций узкополосного случайного процесса.
12. Перечислите основные свойства синфазной и квадратурной амплитуд узкополосного случайного процесса.
13. Почему преобразование Гильберта от гауссова случайного процесса сохраняет свойство нормальности?
14. Изобразите характерную осциллограмму случайного сигнала, имеющего рэлеевскую плотность вероятности.
15. Начертите несколько графиков кривых, описывающих закон распределения Райса при нескольких отношениях сигнал/шум.

## Задачи

1. Вычислите энергетический спектр стационарного случайного процесса, описываемого функцией автокорреляции

$$K(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|/t_0), & |\tau| \leqslant t_0, \\ 0, & |\tau| > t_0. \end{cases}$$

2. Найдите энергетический спектр стационарного случайного процесса с функцией автокорреляции

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta^2\tau^2/2} \cos \omega_0\tau.$$

3. Односторонний энергетический спектр стационарного случайного процесса $X(t)$ задан формулой

$$F_X(f) = A\left(\frac{f}{f_0}\right)\exp\left(-\frac{f}{f_0}\right),$$

где $A, f_0$ — постоянные величины. Определите автокорреляционную функцию этого процесса.

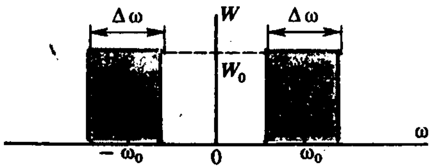
4. Стационарный случайный процесс имеет эффективную ширину энергетического спектра, равную 1.5 МГц. Максимальное значение одностороннего энергетического спектра составляет $0.3\cdot10^{-12}$ В$^2$/Гц. Определите дисперсию процесса.
5. Найдите интервал корреляции стационарного случайного процесса с автокорреляционной функцией

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

6. Полагая, что в течение месяца температура воздуха является реализацией стационарного случайного процесса, предложите оценку для интервала корреляции.
7. Найдите дисперсию производной случайного процесса с функцией автокорреляции вида

$$K(\tau) = \sigma^2(1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}.$$

8. Стационарный случайный процесс имеет энергетический спектр, представляемый следующим графиком:




Докажите, что этот случайный процесс дифференцируем, и найдите дисперсию его производной.

9. Квазичастота случайного процесса с дисперсией 8 $В^2$ равна 0.5 МГц. Определите дисперсию производной данного случайного процесса.

10. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет энергетический спектр

$$F_x(\omega) = \begin{cases} F_0 & \text{при } \omega_1 < \omega < \omega_2, \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_1,\ \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Реализации процесса представлены в виде

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t - B(t)\sin\omega_0 t,$$

где

$$\omega_0 = (\omega_2 - \omega_1)/2.$$

Найдите автокорреляционные функции $K_A(\tau)$ и $K_B(\tau)$, а также взаимную корреляционную функцию $K_{AB}(\tau)$.

11. Найдите среднее значение и дисперсию огибающей узкополосного нормального случайного процесса с автокорреляционной функцией

$$K_x(\tau) = 25\exp(-4\cdot 10^6\tau^2)\cos 10^9\tau.$$

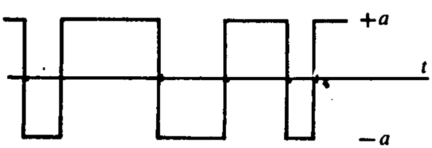
12. Узкополосный нормальный случайный процесс $X(t)$ имеет функцию автокорреляции

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta\tau^2/2}\cos\omega_0\tau.$$

Найдите функцию автокорреляции и энергетический спектр огибающей этого процесса.

## Более сложные задания

13. Исследуйте автокорреляционную функцию процесса вида «случайного телеграфного сигнала». Его реализации являются разрывными функциями, принимающими с равной вероятностью лишь два значения: $+a$ и $-a$:




В случайные моменты времени знак реализации изменяется скачком. Вероятность события, состоящего в том, что за время $T$ произойдет $n$ перемен знака, описывается законом Пуассона

$$P_T(n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!}e^{-\lambda T},$$

где $\lambda$ — параметр, определяющий скорость изменения процесса во времени.

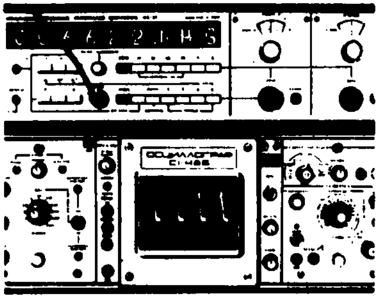
14. Узкополосный нормальный случайный процесс $X(t)$ имеет функцию автокорреляции

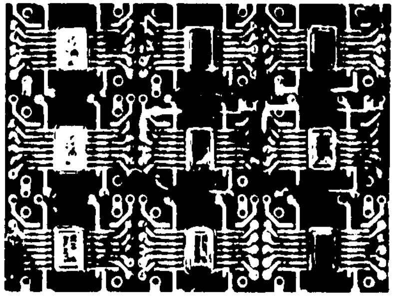
$$K_x(\tau) = \sigma_x^2\rho(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

Докажите, что квадрат огибающей этого процесса имеет функцию автокорреляции

$$K_{U^2}(\tau) = 4\sigma_x^2\rho^2(\tau).$$

15. Узкополосный нормальный случайный процесс имеет функцию автокорреляции, приведенную в задаче 14. Найдите одномерную плотность вероятности мгновенной частоты данного процесса.





# 2. Радиотехнические цепи, устройства и системы

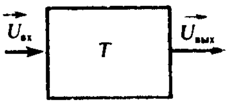
## Глава 8
## Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы

Первая часть курса была посвящена основам теории радиотехнических сигналов. Подчеркивалось, что сигналы становятся объектами теоретического исследования лишь после того, как вводится фундаментальный принцип описания посредством соответствующих математических моделей.

Устройства, применяемые для обработки, преобразования или передачи сигналов, могут быть чрезвычайно разноообразны как по принципам внутреннего устройства, так и с точки зрения своих внешних характеристик. Для того чтобы получить возможность сравнивать и классифицировать такие устройства, следует прежде всего сформулировать некоторое число исходных понятий.

## 8.1 Физические системы и их математические модели

Как бы ни различались между собой разнообразные радиотехнические системы и устройства, в их структуре всегда можно выделить *вход*, предназначенный для подачи исходных сигналов, и *выход*, откуда преобразованные сигналы поступают для дальнейшего использования. Обычно это иллюстрируется структурной схемой типа «черного ящика».




**Системные операторы.** В наиболее простом случае как входной сигнал $u_{вх}(t)$, так и выходной сигнал $u_{вых}(t)$, часто называемый *откликом* или *выходной реакцией* системы, представляют собой одиночные функции времени. Более общим случаем является представление входного сигнала в виде $m$-мерного вектора:

$$\vec{U}_{вх}(t)=\left\{u_{вх1}(t),\ u_{вх2}(t),\ \ldots,\ u_{вхm}(t)\right\},$$

а выходного сигнала — в виде $n$-мерного вектора:

$$\vec{U}_{вых}(t)=\left\{u_{вых1}(t),\ u_{вых2}(t),\ \ldots,\ u_{выхn}(t)\right\}$$

системный оператор

Закон связи между сигналами $\vec{U}_{вх}(t)$ и $\vec{U}_{вых}(t)$ можно задать посредством *системного оператора* $T$, результатом действия которого на $\vec{U}_{вх}$ служит сигнал $\vec{U}_{вых}$:

$$\boxed{\vec{U}_{вых}(t)=T\vec{U}_{вх}(t).} \tag{8.1}$$

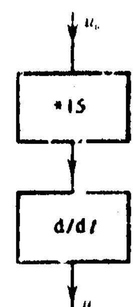
**Пример 8.1.** *Предположим, что некоторая система преобразует одномерный входной сигнал по следующему закону:*

$u_{вых}(t) = 15\mathrm{d}u_{вх}(t)/\mathrm{d}t.$

Системный оператор в данном случае может быть записан так:

$$T\equiv 15\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Из этого выражения можно непосредственно усмотреть структурную схему системы, образованную каскадным соединением масштабного звена (идеального усилителя) и дифференциатора.




Для полной определенности задачи следует указать также область $D_{вх}$ некоторого функционального, например гильбертова, пространства, которая называется *областью допустимых входных воздействий.* В простейшем случае задание этой области сводится к тому, что определяется характер входных сигналов, которые могут быть непрерывными или дискретными, детерминированными или случайными. Подобным же образом должна быть указана область $D_{вых}$ *допустимых выходных сигналов*.

В настоящей главе рассматриваются только системы, на которые воздействуют аналоговые сигналы, определяемые как непрерывными, так и разрывными функциями времени. Преобразование дискретных и цифровых сигналов линейными системами изучается в гл. 15.

В дальнейшем *математической моделью физической системы* будем называть совокупность системного оператора $T$ и двух областей допустимых сигналов $D_{вх}$ и $D_{вых}$.

математическая модель физической системы

Классификация радиотехнических систем проводится на основании существенных свойств их математических моделей.

**Стационарные и нестационарные системы.** Принято говорить, что система *стационара*, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Если $T$ — оператор стационарной системы, то из равенства

$$\vec{U}_{вых}(t) = T\vec{U}_{вх}(t) \tag{8.2}$$

следует, что

$$\vec{U}_{вых}(t \pm t_0) = T\vec{U}_{вх}(t \pm t_0) \tag{8.3}$$

при любом значении $t_0$. Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами.

Если же инвариантность свойств системы относительно начала отсчета времени отсутствует, то такая система называется *нестационарной* (системой с переменными во времени параметрами или параметрической системой).

Оба указанных класса систем имеют широкое применение в радиотехнике и будут изучаться в данном курсе. Следует, однако, указать, что теоретическое изучение нестационарных систем, как правило, представляет гораздо более сложную задачу.

**Линейные и нелинейные системы.** Важнейший принцип классификации систем основан на том, что различные системы, вообще говоря, по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов. Если оператор системы таков, что справедливы равенства

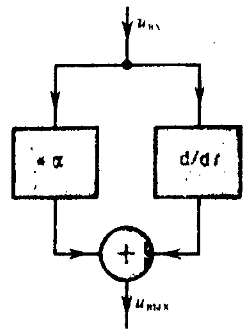
принцип суперпозиции

$$\boxed{\begin{aligned} &T(\vec{U}_{вх1} + \vec{U}_{вх2}) = T\vec{U}_{вх1} + T\vec{U}_{вх2}\,; \\ &T(\alpha\vec{U}_{вх}) = \alpha T\vec{U}_{вх}, \end{aligned}} \tag{8.4}$$

где $\alpha$ — произвольное число, то данная система называется *линейной*. Условие (8.4) выражает фундаментальный принцип суперпозиции.

**Пример 8.2.** *Некоторая система производит обработку входного сигнала в соответствии с законом*

$$u_{\text{вых}}(t) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right) u_{\text{вх}}(t).$$




Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия (8.4) выполняются. Таким образом, данная система линейна.

**Пример 8.3.** *Предположим, что некоторая система представляет собой идеальный квадратор, работающий в соответствии с алгоритмом*

$$u_{\text{вых}}(t) = u^2_{\text{вх}}(t).$$

Подав на вход сумму двух сигналов $u_{\text{вх}1} + u_{\text{вх}2}$, на выходе имеем

$$u_{\text{вых}}(t) = u^2_{\text{вх}1} + 2u_{\text{вх}1}u_{\text{вх}2} + u^2_{\text{вх}2}.$$

Наличие перекрестного слагаемого $2u_{\text{вх}1}\,u_{\text{вх}2}$ указывает на то, что данная система нелинейна.

Строго говоря, все физические системы, с которыми имеет дело радиотехника, в той или иной степени нелинейны. Однако существует класс систем, для которых линейные модели дают весьма точное описание. Так, практически всегда можно пренебречь нелинейными свойствами обычных резисторов, конденсаторов и некоторых индуктивных элементов. Как будет показано в дальнейшем, линейные системы замечательны тем, что для них, по крайней мере теоретически, можно получить решение любой задачи, связанной с преобразованием входного сигнала.

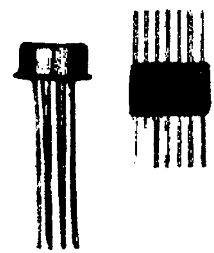
Нелинейные радиотехнические устройства содержат в себе обычно такие элементы, как диоды и транзисторы. Их нелинейность проявляется в резком отличии вольт-амперных характеристик от прямолинейных зависимостей.

Хотя теория нелинейных систем оказывается, как правило, весьма сложной и далеко не все результаты могут быть получены здесь аналитическим путем, именно с помощью нелинейных элементов осуществляются важнейшие преобразования радиотехнических сигналов. Теории простейших нелинейных систем посвящена гл. 11.

**Сосредоточенные и распределенные системы.** Другой критерий для классификации радиотехнических систем основан на сопоставлении физических размеров системы и длины волны колебаний, подаваемых на ее вход. Если характерный размер системы (например, наибольшая длина соединительных проводников электрической цепи) оказывается гораздо меньше длины волны, то мы имеем дело с системой *сосредоточенного типа*.

В сосредоточенной электрической цепи всегда можно выделить физические области с преимущественной локализацией энергии электрического поля (конденсаторы) и магнитного поля (индуктивные элементы). Свойства сосредоточенных цепей не зависят от конфигурации соединительных проводников, поэтому такие цепи принято описывать их абстрактными моделями, называемыми принципиальными схемами.

В радиотехнике сосредоточенные системы широко применяются вплоть до рабочих частот в несколько сотен мегагерц. Анализ и расчет сосредоточенных радиотехнических систем проводятся с помощью законов Кирхгофа, известных из курса теории цепей.



Интегральные микросхемы — пример сосредоточенных систем

На частотах в несколько тысяч мегагерц, в так называемом сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне, физические размеры большинства устройств становятся сравнимыми с длиной волны передаваемых колебаний. При этом оказывается необходимым учет конечного времени распространения сигнала вдоль системы. Обычные электрические цепи в столь высокочастотном диапазоне использоваться уже не могут, и на смену им приходят *системы с распределенными параметрами* (распределенные или волновые системы). Так, вместо соединительных проводников применяются отрезки металлических труб — волноводов, вместо колебательных $LC$-контуров — их распределенные аналоги, называемые объемными резонаторами. Теория, методы анализа и проектирования распределенных систем, как правило, достаточно сложны и служат содержанием отдельных радиотехнических дисциплин.

Волновод — пример распределенной системы

Заканчивая краткий обзор принципов классификации радиотехнических систем, сосредоточим внимание на простейшем их виде — линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами.

Наиболее типичные представители этого класса систем — линейные электрические цепи, свойства которых должны быть известны читателю из материала предшествующих курсов. Однако сюда могут быть отнесены любые линейные физические устройства и системы, свойства которых неизменны во времени, а размеры малы по сравнению с длиной волны.

## 8.2 Импульсные, переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем

Замечательная особенность линейных систем, состоящая в справедливости принципа суперпозиции, открывает прямой путь к систематическому анализу задач о прохождении разнообразных сигналов через такие системы. Например, изложенный в гл. 1 способ динамического представления сигналов позволяет разлагать эти сигналы в суммы элементарных импульсов. Если теперь удастся тем или иным способом найти реакцию на выходе системы, возникающую под действием элементарного возмущения на входе, то окончательным этапом решения задачи явится простое суммирование таких реакций.

Намеченный здесь путь анализа базируется на временно́м представлении свойств сигналов и систем. В равной мере применим, а порой и гораздо более удобен анализ в частотной области, когда сигналы задаются рядами или интегралами Фурье. Свойства систем при этом отображаются их частотными характеристиками, которые указывают закон преобразования элементарных гармонических сигналов.

**Импульсная характеристика.** Как известно, при динамическом представлении сигналов используют одно из двух элементарных возмущений — единичный скачок или дельта-функцию. Обратимся вначале ко второму принципу, основанному на интегральном представлении сигнала с помощью дельта-функций.

В математике импульсную характеристику называют функцией Грина рассматриваемого оператора

Пусть некоторая линейная стационарная система описывается своим оператором $T$. Для простоты будем полагать, что входной и выходной сигналы одномерны. По определению, *импульсной характеристикой* системы называется функция $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал вида $\delta(t)$. Это означает, что $h(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boxed{h(t) = T\delta(t).} \tag{8.5}$$

Поскольку система стационарна, аналогичное уравнение будет иметь место и в том случае, если входное воздействие смещено во времени на произвольную величину $t_0$:

$$h(t-t_0) = T\delta(t-t_0). \tag{8.6}$$

■ физический смысл импульсной характеристики

Следует ясно представлять себе, что импульсная характеристика, так же как и порождающая ее дельта-функция, есть результат разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временем установления стационарного состояния системы.

**Интеграл Дюамеля.** Исключительно важная роль, которую играет импульсная характеристика в теории линейных стационарных систем, обусловлена тем, что знание функции $h(t)$ позволяет формально решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через такую систему. Действительно, в гл. 1 было показано, что сигнал всегда может быть представлен так:

$$u_{вх}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

Отвечающая ему выходная реакция

$$u_{вых}(t)=Tu_{вх}(t)=T\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau. \qquad (8.7)$$

Теперь примем во внимание, что интеграл есть предельное выражение суммы и поэтому линейный оператор $T$ на основании принципа суперпозиции может быть внесен под знак интеграла. Далее, оператор $T$ «действует» лишь на величины, зависящие от текущего времени $t$, но не от переменной интегрирования $\tau$. Поэтому из (8.7) следует, что

$$u_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(\tau)\,T\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

или окончательно

$$\boxed{u_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.} \qquad (8.8)$$

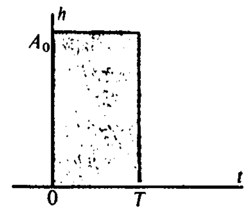
Эта формула, имеющая фундаментальное значение в теории линейных систем, называется *интегралом Дюамеля*. Соотношение (8.8) свидетельствует о том, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой свертку двух функций — входного сигнала и импульсной характеристики. Очевидно, что формула (8.8) может быть записана и так:

▲ решите задачу 1

$$u_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau. \qquad (8.9)$$

Большим достоинством метода анализа, основанного на интеграле Дюамеля, является то, что, определив импульсную характеристику $h(t)$, мы сводим дальнейшие этапы решения к полностью формализованным операциям. Если даже интегралы (8.8) и (8.9) не могут быть найдены аналитически, всегда возможен численный их анализ с помощью ЭВМ.

**Пример 8.4.** *Предположим, что некоторая линейная стационарная система, внутреннее устройство которой для нас безразлично, характеризуется тем, что ее импульсная характеристика представляет собой прямоугольный видеоимпульс конечной длительности $T$, возникающий при $t=0$ и имеющий амплитуду $A_0$:*




$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ A_0, & 0<t<T,\\ 0, & t>T.\end{cases}$$

*Определить выходную реакцию данной системы, если на вход подан ступенчатый сигнал*

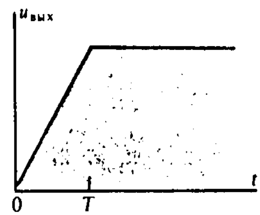
$$u_{\text{вх}}(t)=U_0\sigma(t).$$

Применяя формулу интеграла Дюамеля (8.8), обращаем внимание на то, что выходной сигнал будет выглядеть по-разному в зависимости от того, превосходит или нет текущее значение $t$ величину длительности импульсной характеристики. При $0<t<T$ имеем

$$u_{\text{вых}}(t)=A_0U_0\int\limits_0^t d\tau=A_0U_0t.$$

Если же $t>T$, то при $\tau>T$ функция $h(t-\tau)$ обращается в нуль и поэтому

$$u_{\text{вых}}(t)=A_0U_0\int\limits_0^T d\tau=A_0U_0T.$$




Найденная выходная реакция отображается кусочно-линейным графиком.

**Обобщение на многомерный случай.** До сих пор предполагалось что как входной, так и выходной сигналы одномерны. Если же приходится изучать более общий случай системы с $m$ входами и $n$ выходами, то следует ввести парциальные импульсные характеристики $h_{ij}(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$), каждая из которых отображает сигнал на $i$-м выходе при подаче на $j$-й вход дельта-функции. Совокупность функции $h_{ij}(t)$ образует матрицу импульсных характеристик

$$\underline{h}(t)=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nm}\end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

Формула интеграла Дюамеля в многомерном случае приобретает вид

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underline{h}(t-\tau)\vec{U}_{\text{вх}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.11}$$

где $\vec{U}_{\text{вх}}$ — $m$-мерный вектор, $\vec{U}_{\text{вых}}$ — $n$-мерный вектор.

**Условие физической реализуемости.** Каков бы ни был конкретный вид импульсной характеристики физически реализуемой системы, всегда должен выполняться важнейший принцип: *выходной сигнал, отвечающий импульсному входному воздействию, не может возникнуть до момента подачи сигнала на вход.*

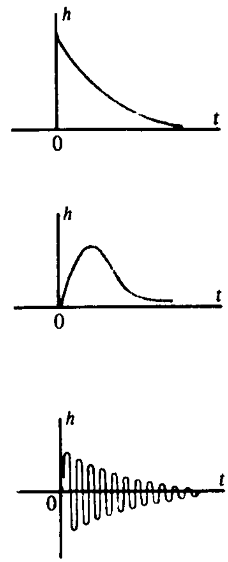
Изложенный принцип накладывает очень простое ограничение на вид допустимых импульсных характеристик:

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{8.12}$$

Этому условию удовлетворяет, например, импульсная характеристика системы, рассмотренной в примере 8.4.

Легко видеть, что для физически реализуемой системы верхний предел в формуле интеграла Дюамеля может быть заменен на текущее значение времени:

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.} \tag{8.13}$$



Примеры импульсных характеристик реализуемых систем

Формула (8.11) имеет ясный физический смысл: линейная стационарная система проводит операцию взвешенного суммирования всех мгновенных значений сигнала, поступивших на вход и существовавших «в прошлом» при $-\infty < \tau < t$. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика системы. Принципиально важно, что физически реализуемая система ни при каких обстоятельствах не способна оперировать с информацией, заключенной в «будущих» значениях входного сигнала.

**Переходная характеристика.** Пусть на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый функцией Хевисайда $\sigma(t)$. Выходную реакцию

$$g(t) = T\sigma(t) \tag{8.14}$$

принято называть *переходной характеристикой* системы. Поскольку рассматриваемая система стационарна, то переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига: $g(t-t_0) = T\sigma(t-t_0)$.

Высказанные ранее соображения о физической реализуемости системы полностью переносятся на тот случай, когда система возбуждается не дельта-функцией, а единичным скачком. Поэтому переходная характеристика физически реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t>0$, в то время как

$$g(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0. \tag{8.15}$$

Между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь. Действительно, поскольку $\delta(t)=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$, то на основании (8.5)

$$h(t)=T\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t)\right).$$

Оператор дифференцирования $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ и линейный стационарный оператор $T$ могут меняться местами, и поэтому

$$\boxed{h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T\sigma(t)=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},} \tag{8.16}$$

или

$$g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}h(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{8.17}$$

**Пример 8.5.** *Найти переходную характеристику линейной системы, рассмотренной в примере* 8.4.

Поскольку здесь

$$h(t)=A_0\sigma(t)-A_0\sigma(t-T),$$

то на основании (8.17)

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0,\\ A_0t & \text{при} \quad 0<t<T.\\ A_0T & \text{при} \quad t>T.\end{cases}$$

Итак, данная система, будучи в покое при $t<0$, под воздействием единичного перепада входного сигнала переходит в новое стационарное состояние за время, равное длительности импульсной характеристики.

Воспользовавшись формулой динамического представления (1.4) и поступая так же, как и при выводе соотношения (8.8), получаем еще одну форму интеграла Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t)=u_{\text{вх}}(0)g(t)+\int\limits_{0}^{t}\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}\tau}g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.18}$$

**Частотный коэффициент передачи.** При математическом исследовании систем важен поиск таких входных сигналов, которые, будучи преобразованы системой, остаются неизменными с точностью до некоторого числового множителя. Если имеет место равенство

$$u_{\text{вых}}(t) = T u_{\text{вх}}(t) = \lambda u_{\text{вх}}(t), \tag{8.19}$$

то $u_{\text{вх}}(t)$ называется *собственной функцией оператора* $T$, а число $\lambda$, в общем случае комплексное, — его *собственным значением.*

собственные функции и собственные значения

Покажем, что комплексный сигнал $u_{\text{вх}}(t) = \exp(j\omega t)$ при любом значении частоты $\omega$ является собственной функцией линейной стационарной системы. Для этого воспользуемся интегралом Дюамеля в форме (8.9) и вычислим

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau\, e^{j\omega t}. \tag{8.20}$$

Отсюда видно, что собственным значением является комплексное число

$$\boxed{K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t,} \tag{8.21}$$

частотный коэффициент передачи

называемое *частотным коэффициентом передачи системы.*

Формула (8.31) устанавливает принципиальный факт — *частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье.* Поэтому можно всегда, зная функцию $K(j\omega)$, определить

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega.} \tag{8.22}$$

Мы подошли к важнейшему положению рассматриваемой теории — любую линейную стационарную систему можно рассматривать либо во временно́й области с помощью ее импульсной и переходной характеристик, либо в частотной области, задавая частотный коэффициент передачи системы. Оба подхода равноценны, и выбор одного из них диктуется удобствами получения исходных данных о системе и простотой вычислений.

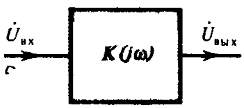
частотный и временной анализ

В заключение отметим, что частотные свойства линейной системы, имеющей $m$ входов и $n$ выходов, можно описать матрицей частотных коэффициентов передачи

$$\underline{K}(j\omega) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nm} \end{pmatrix} \qquad (8.23)$$

Между матрицами $\underline{h}$ и $\underline{K}$ устанавливается закон связи, аналогичный тому, который задан формулами (8.21) и 8.22).

**Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики.** Функция $K(j\omega)$ имеет простую интерпретацию: если на вход системы поступает гармонический сигнал с известной частотой $\omega$ и комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$, то комплексная амплитуда выходного сигнала




$$\dot{U}_{вых} = K(j\omega)\dot{U}_{вх}. \qquad (8.24)$$

Часто, особенно в инженерных расчетах, пользуются представлением частотного коэффициента передачи в показательной форме:

$$K(j\omega) = \left|K(j\omega)\right| e^{j\varphi_K(\omega)} \qquad (8.25)$$

Обе входящие сюда вещественные функции носят специальные названия: $|K(j\omega)|$ — *амплитудно-частотная характеристика* (АХЧ); $\varphi_K(\omega)$ — *фазочастотная характеристика* (ФЧХ) системы. Широко распространены измерительные приборы, позволяющие экспериментально измерять АЧХ и ФЧХ разнообразных радиотехнических устройств в различных диапазонах частот.

**Ограничения, накладываемые на частотный коэффициент передачи.** Далеко не каждая функция $K(j\omega)$ может являться частотным коэффициентом передачи физически реализуемой системы. Простейшее ограничение связано с тем, что импульсная характеристика $h(t)$ обязана быть вещественной, а это означает в силу свойств преобразования Фурье (см. гл. 2), что

$$K(j\omega) = K^*(-j\omega). \qquad (8.26)$$

свойства АЧХ и ФЧХ

В соответствии с формулой (8.26) модуль частотного коэффициента передачи (АЧХ) есть четная, а фазовый угол (ФЧХ) — нечетная функция частоты.

Гораздо сложнее ответить на вопрос о том, каким должен быть частотный коэффициент передачи для того, чтобы выполнялись условия физической реализуемости (8.12) или (8.15).

Приведем без доказательства окончательный результат, известный под названием *критерия Пэли—Винера*: частотный коэффициент передачи физически реализуемой системы должен быть таким, чтобы существовал интеграл

● критерий Пэли—Винера

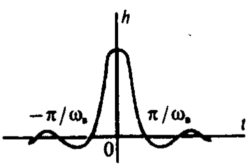
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(j\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < +\infty. \tag{8.27}$$

Рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий связь между функциями $K(j\omega)$ и $h(t)$.

**Пример 8.6.** *Предположим, что линейная стационарная система ведет себя подобно идеальному ФНЧ, т. е. ее частотный коэффициент передачи задается системой равенств:*

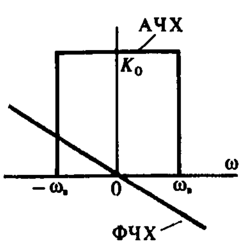
$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_{\text{в}}, \\ K_0, & -\omega_{\text{в}} < \omega < \omega_{\text{в}}, \\ 0, & \omega > \omega_{\text{в}}. \end{cases}$$

На основании (8.20) импульсная характеристика такого фильтра




$$h(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int\limits_{-\omega_{\text{в}}}^{\omega_{\text{в}}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0\omega_{\text{в}}}{\pi} \frac{\sin \omega_{\text{в}} t}{\omega_{\text{в}} t}. \tag{8.28}$$

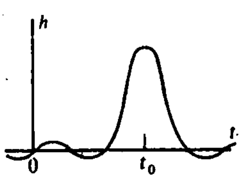
Симметрия графика этой функции относительно точки $t=0$ свидетельствует о нереализуемости идеального фильтра нижних частот. Впрочем, к этому выводу можно было бы прийти непосредственно на основании критерия Пэли—Винера. Действительно, интеграл (8.27) оказывается расходящимся для любой системы, АЧХ которой обращается в нуль на некотором конечном участке оси частот.




Несмотря на нереализуемость идеального ФНЧ, эту модель с успехом используют для приближенного описания свойств электрических фильтров, полагая, что функция $K(j\omega)$ содержит фазовый множитель, линейно зависящий от частоты:

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_{\text{в}}, \\ K_0 \exp(-j\omega t_0), & -\omega_{\text{в}} < \omega < \omega_{\text{в}} \\ 0, & \omega > \omega_{\text{н}}. \end{cases}$$

Как нетрудно проверить, здесь




$$h(t) = \frac{K_0\omega_{\text{в}}}{\pi} \frac{\sin \omega_{\text{в}} (t-t_0)}{\omega_{\text{в}} (t-t_0)}. \tag{8.29}$$

Параметр $t_0$, равный угловому коэффициенту наклона ФЧХ, определяет собой задержку во времени максимума функции $h(t)$. Ясно, что данная модель тем точнее отображает свойства реализуемой системы, чем больше величина $t_0$.

## 8.3 Линейные динамические системы

Так принято называть линейные системы, которые характеризуются следующим свойством: сигнал на их выходе определяется не только величиной входного сигнала в рассматриваемый момент времени, но и всей «предысторией» входного процесса. Иначе говоря, линейная динамическая система обладает некоторой «памятью», от характера которой зависят все особенности преобразования входного сигнала.

**Системы, описываемые дифференциальными уравнениями.** Среди всевозможных динамических систем наибольшее значение для теоретической радиотехники имеют те, которые описываются дифференциальными операторами. В наиболее общем случае речь идет о системах, для которых связь между входными и выходными сигналами устанавливается с помощью дифференциального уравнения:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n \frac{d^n u_{вых}}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{вых}}{dt} + a_0 u_{вых} = \\ &= b_m \frac{d^m u_{вх}}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u_{вх}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du_{вх}}{dt} + b_0 u_{вх}. \end{aligned}} \tag{8.30}$$

Именно такой оказывается динамическая связь между мгновенными значениями входного и выходного сигналов в электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Если эта цепь линейна и стационарна, то все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ — постоянные вещественные числа.

Предположим, что входной сигнал $u_{вх}(t)$ задан. Тогда правая часть уравнения (8.30), которую можно условно обозначить $f(t)$, является известной функцией. Задача анализа поведения системы сводится к хорошо изученной в математике проблеме решения линейного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами:

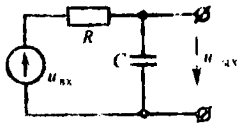
$$a_n \frac{d^n u_{вых}}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 u_{вых} = f(t). \tag{8.31}$$

порядок динамической системы

Порядок $n$ этого уравнения принято называть *порядком динамической системы*.

Рассмотрим несколько примеров динамических систем и соответствующих им дифференциальных уравнений.

**Пример 8.7.** *Рассмотреть $RC$-цепь вида Г-образного четырехполюсника, возбуждаемого со стороны входа источником э.д.с. $u_{вх}(t)$. Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе.*



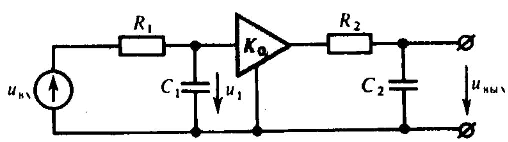

Системы 1-го порядка называют также инерционными звеньями

Поскольку ток в цепи $i(t) = C\dfrac{du_{вых}}{dt}$, то, используя второй закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

$$RC\,\frac{du_{вых}}{dt} + u_{вых} = u_{вх}(t). \tag{8.32}$$

Итак, $RC$-цепь служит примером динамической системы 1-го порядка. Важнейший параметр этой цепи — *постоянная времени* $\tau = RC$, определяющая собой характерный временной масштаб протекания процессов в системе.

**Пример 8.8.** *Пусть дана более сложная система, образованная двумя $RC$-цепями, которые разделены идеальным усилителем с коэффициентом усиления $K_0$. Предполагается, что входное сопротивление усилителя неограниченно велико, а выходное сопротивление бесконечно мало и поэтому усилитель является идеальным элементом развязки между цепями.*




Вводя две постоянные времени $\tau_1 = R_1C_1$ и $\tau_2 = R_2C_2$, по аналогии с предыдущим примером имеем следующие дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$\tau_2\,\frac{du_{вых}}{dt} + u_{вых} = K_0u_1,$$

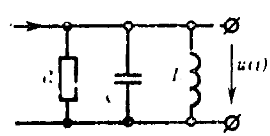
$$\tau_1\,\frac{du_1}{dt} + u_1 = u_{вх}(t).$$

Исключив отсюда вспомогательную величину $u_1$, получаем дифференциальное уравнение

$$\tau_1\tau_2\,\frac{d^2u_{вых}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2)\,\frac{du_{вых}}{dt} + u_{вых} = K_0u_{вх}(t). \tag{8.33}$$

Рассмотренная здесь более сложная $RC$-цепь оказывается уже системой 2-го порядка.

**Пример 8.9.** *Найти дифференциальное уравнение, описывающее поведение параллельного колебательного контура с потерями:*



Здесь входным сигналом служит ток $i(t)$; выходным сигналом является напряжение $u(t)$ на контуре. Суммируя токи $i_C = C\dfrac{du}{dt}$; $i_L = \dfrac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u d\xi$; $i_R = u/R$, получаем уравнение

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u d\xi + \frac{u}{R} = i(t),$$

откуда

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C}\frac{di}{dt}, \qquad (8.34)$$

▲ решите задачу 4

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — частота собственных колебаний в контуре без потерь, $\alpha = 1/(2RC)$ — коэффициент затухания контура.

**Собственные колебания динамических систем.** Полное исследование поведения динамической системы, описываемой уравнением (8.30) или (8.31), требует учета начальных условий, которые характеризуют внутреннее состояние системы в некоторый фиксированный момент времени. Обычно принято задавать величину искомой функции и ее $n-1$ производных при $t=0$: $u_{\text{вых}}(0), \ldots, u_{\text{вых}}^{(n-1)}(0)$.

Из теории дифференциальных уравнений известно [8], что решением уравнения (8.31), удовлетворяющим любым начальным условиям, является сумма некоторого частного решения неоднородного уравнения, у которого правая часть $f(t)$ отлична от нуля, и общего решения однородного уравнения

$$a_n\frac{d^n u_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 u_{\text{вых}} = 0. \qquad (8.35)$$

Проблема решения однородного уравнения связана с нахождением корней характеристического уравнения системы

$$\boxed{a_n\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.} \qquad (8.36)$$

■ свойство корней характеристического уравнения

Данное уравнение имеет ровно $n$ корней, причем, поскольку коэффициенты уравнения вещественны, то корни $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ могут быть либо вещественными, либо комплексно-сопряженными. Если все корни различны, то общее решение однородного уравнения (8.35), которое описывает собственные колебания системы, имеет вид

$$u_{\text{соб}}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \ldots + C_n e^{\gamma_n t}, \qquad (8.37)$$

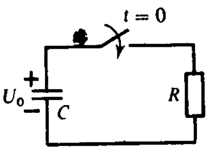
где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные числа, определяемые из начальных условий.

Если же некоторые из корней оказываются кратными, то вид общего решения однородного уравнения несколько усложняется за счет появления так называемых секулярных (вековых) множителей. Так, если $\gamma_i$ представляет собой $k$ — кратный корень, то ему отвечает совокупность собственных колебаний вида

Данный термин возник в астрономии

$$e^{\gamma_i t}, te^{\gamma_i t}, \ldots, t^{k-1}e^{\gamma_i t}.$$

Рассмотрим некоторые примеры собственных колебаний в линейных стационарных цепях.

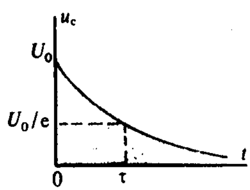



**Пример 8.10.** *Апериодический разряд конденсатора. Пусть конденсатор с емкостью $C$, предварительно заряженный до напряжения $U_0$, в момент времени $t=0$ замыкается на резистор $R$. Найти закон изменения напряжения на конденсаторе.*

Система описывается дифференциальным уравнением $\tau \dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$ с начальным условием $u_C(0) = 0$.

Характеристическое уравнение $\tau\gamma + 1 = 0$ имеет корень $\gamma = -1/\tau$. Любое решение дифференциального уравнения свободных колебаний представимо в виде

$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

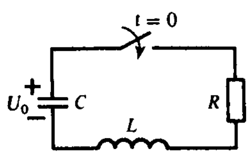



Для того чтобы удовлетворить начальному условию, следует положить $A = U_0$. Окончательно

$$u_c(t) = U_0 \exp(-t/\tau).$$

Этот результат устанавливает физический смысл постоянной времени $\tau$ как промежутка времени, в течение которого свободный процесс затухает в $e = 2.71828$ ... раза.

Итак, отрицательный вещественный корень характеристического уравнения отвечает собственному колебанию, экспоненциально убывающему во времени.




**Пример 8.11.** *Колебательный разряд конденсатора. Предположим, что условия предыдущего примера усложнены тем, что в цепь включен также индуктивный элемент $L$.*

Дифференциальное уравнение цепи относительно тока $i(t)$, составленное на основании второго закона Кирхгофа, имеет вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \tag{8.38}$$

где $\alpha = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Очевидное начальное условие $i(0) = 0$ следует из-за наличия в контуре индуктивного элемента (ток в системе не может возникнуть скачком). Еще одно условие: в начальный момент времени напряжение на конденсаторе уравновешивается э.д.с. самоиндукции:

$$U_0 + L \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

откуда

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -U_0/L.$$

Характеристическое уравнение

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c$ — частота собственных колебаний системы. Обычно интересуются процессами в контуре с малыми потерями, когда $\omega_0 \gg \alpha$, и поэтому $\omega_c \approx \omega_0$.

Общее решение однородного уравнения

$$i(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \tag{8.39}$$

должно содержать коэффициенты $C_1$ и $C_2$, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений (см. начальные условия):

$$C_1 + C_2 = 0,$$

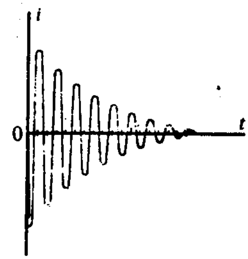
$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = -U_0/L,$$

откуда

$$C_1 = \frac{-U_0}{2j\omega_c L}; \quad C_2 = \frac{U_0}{2j\omega_c L}.$$

Подставив эти коэффициенты в (8.39), получим окончательно

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \tag{8.40}$$




**Частотный коэффициент передачи.** Если на вход линейной динамической системы поступает экспоненциальным сигнал вида $u_{вх}(t) = \exp(j\omega t)$, то сигнал на выходе $u_{вых}(t) = K(j\omega)\exp(j\omega t)$. Подставляя эти выражения в (8.30), после сокращения на общий множитель находим частотный коэффициент передачи системы:

$$\boxed{K(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}.} \tag{8.41}$$

Частотный коэффициент передачи распределенной системы свободен от этого ограничения и может описываться более сложными функциями

Итак, частотный коэффициент передачи любой динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, представляет собой *дробно-рациональную функцию переменной* $j\omega$; коэффициенты этой функции совпадают с коэффициентами дифференциального уравнения.

На практике частотный коэффициент передачи линейных систем обычно находят методами теории цепей на основании принципиальных схем, не прибегая к составлению дифференциальных уравнений. Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 8.12.** *Для RC-цепи, схема которой приведена в примере* 8.7,

$$K(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \tag{8.42}$$

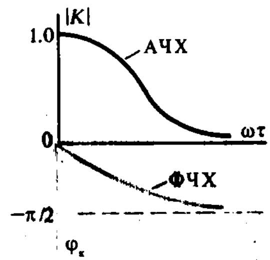
*где* $\tau = RC$ *— постоянная времени.*

Уравнение АЧХ принимает вид

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

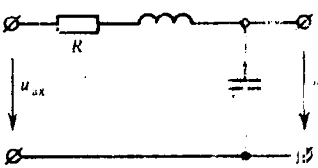
ФЧХ определяется следующим образом:

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau).$$




Из вида АЧХ следует, что рассматриваемая цепь может использоваться в качестве фильтра нижних частот (ФНЧ).

**Пример 8.13.** *Изучить частотный коэффициент передачи Г-образного четырехполюсника, собранного из элементов* $L$, $C$, $R$:




Здесь

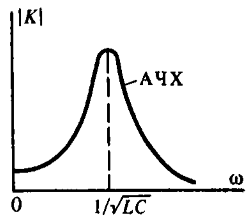
$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC},$$

откуда следует уравнение АЧХ

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

и уравнение ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}.$$




▲
решите задачу 5

Если сопротивление потерь $R$ достаточно мало, так что добротность системы $Q = \sqrt{L/C}/R \gg 1$, то данная цепь может с успехом выполнять роль полосового фильтра.

**Усилитель малых сигналов с апериодической нагрузкой.** Важным примером линейной динамической системы является однокаскадный электронный усилитель напряжения (рис. 8.1).

Паразитная емкость включает в себя выходную емкость электронного прибора, а также емкость соединительных проводников

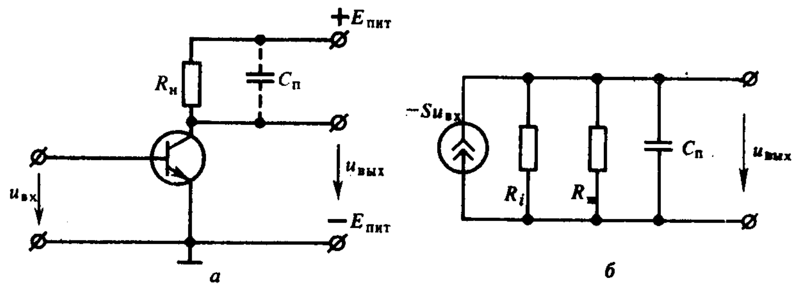



Рис. 8.1. Однокаскадный усилитель напряжения:
*а* — упрощенная принципиальная схема; *б* — эквивалентная схема; $R_н$ — резистор нагрузки; $C_п$ — паразитная емкость

Здесь для определенности в качестве управляемого электронного элемента взят биполярный транзистор со структурой *n-p-n*. Наряду с биполярными транзисторами в усилителях применяются также разнообразные полевые транзисторы и электронные лампы.

Для того чтобы любую такую схему можно было анализировать единообразно, принято использовать эквивалентные схемы замещения электронных приборов. Метод эквивалентных схем применим тогда, когда амплитуды переменных напряжений в схеме малы настолько, что можно пренебречь нелинейностью внешних характеристик электронных приборов. Например, биполярный транзистор достаточно точно описывается линейной схемой замещения, если амплитуда переменной составляющей входного напряжения мала по сравнению с так называемым тепловым потенциалом *p-n*-перехода $u_т = kT/e$, где $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура перехода, $e$ — заряд электрона.

При $T$=300К (стандартная температура) тепловой потенциал перехода равен 25 мВ

Как известно из курса теории цепей, простейшая схема замещения выходной цепи активного электронного прибора (рис. 8.1, *б*) содержит в себе управляемый источник тока, создающий ток $—Su_{вх}$ ($S$ — крутизна характеристики прибора в рабочей точке), а также выходное (внутреннее) сопротивление прибора $R_i$, включенное параллельно источнику.

Нагрузкой усилителя является параллельное соединение резистора $R_н$ и конденсатора $C_п$; такую нагрузку принято называть апериодической в отличие от колебательной нагрузки, каковой является $LC$-контур.

Полная проводимость, включенная параллельно источнику тока,

$$Y_\Sigma = \frac{1}{R_н} + \frac{1}{R_i} + j\omega C_п .$$

Если на вход усилителя подан гармонический сигнал с частотой $\omega$ и комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$, то комплексная амплитуда выходного сигнала

$$\dot{U}_{вых} = -S\dot{U}_{вх}/Y_\Sigma ,$$

откуда частотный коэффициент передачи схемы

$$\boxed{K(j\omega) = -\frac{S}{Y_\Sigma} = -\frac{SR_{экв}}{1 + j\omega C_п R_{экв}},} \qquad (8.43)$$

Отрицательный знак указывает на то, что при увеличении напряжения на базе коллекторный ток растет и выходное напряжение уменьшается

где $R_{экв} = R_н R_i/(R_н + R_i)$.

Таким образом, однокаскадный усилитель напряжения с резистивно-емкостной нагрузкой имеет частотный коэффициент передачи такого же вида, как и рассмотренная ранее $RC$-цепь. На нулевой частоте величина АЧХ максимальна; модуль коэффициента усиления $K_0 = SR_{экв}$. С ростом частоты происходит спад усиления из-за шунтирующего действия паразитной емкости. Полосу пропускания усилителя принято оценивать величиной *граничной частоты* $\omega_{гр}$, на которой наблюдается уменьшение значения АЧХ в $\sqrt{2}$ раз. Из (8.43) видно, что, поскольку

● граничная частота усиления

$$|K(j\omega)| = \frac{SR_{экв}}{\sqrt{1+\omega^2 R_{экв}^2 C_п^2}}, \quad \text{то}$$

$$\omega_{гр} = 1/(R_{экв} C_п).$$

**Пример 8.14.** *Усилитель, собранный по схеме, изображенной на рис.* 8.1, *имеет следующие параметры:* $R_н = 1.6$ кОм, $S = 20$ **мА/В**, $C_п = 30$ пФ, $R_i = 15$ кОм. *Вычислить коэффициент усиления на нулевой частоте и полосу пропускания системы.*

Прежде всего находим эквивалентное сопротивление нагрузки:

$$R_{экв} = \frac{1.6 \cdot 15}{1.6 + 15} = 1.45 \text{ кОм}.$$

Модуль коэффициента усиления на нулевой частоте

$$K_0 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1.45 \cdot 10^3 = 29.$$

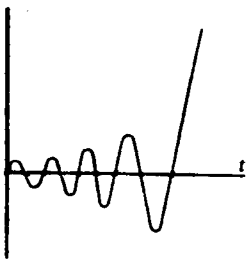
▲ решите задачу 10

Граничная частота усилителя

$$\omega_{гр} = 1/(1.45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-11}) = 2.3 \cdot 10^7 \text{ 1/с}; \quad f_{гр} = 3.66 \text{ МГц}.$$

■ принцип абсолютной устойчивости системы

**Устойчивость динамических систем.** По определению, линейная система называется *абсолютно устойчивой*, если все ее собственные колебания имеют характер процессов, затухающих во времени. Необходимым и достаточным условием абсолютной устойчивости является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения (8.36). Эти корни не должны быть также и чисто мнимыми. Хотя при этом собственные колебания есть гармонические функции вида




Колебание в неустойчивой системе

$$u_{\text{соб}}(t) = \frac{\sin}{\cos}(\omega_0 t),$$

небольшие случайные изменения параметров системы могут привести к переходу ее в неустойчивый режим, когда

$$u_{\text{соб}}(t) = e^{\alpha t} \frac{\sin}{\cos}(\omega_0 t), \quad \alpha > 0,$$

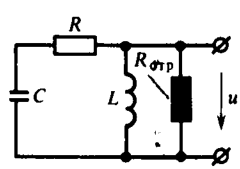
т. е. амплитуда колебаний экспоненциально нарастает во времени.

Если порядок динамической системы достаточно высок, то прямая проверка устойчивости, основанная на поиске корней характеристического уравнения, может оказаться весьма затруднительной. Поэтому были разработаны специальные критерии устойчивости, позволяющие определять наличие корней с положительными вещественными частями непосредственно по виду коэффициентов, минуя само решение характеристического уравнения. Эти критерии будут изучаться в гл. 14.

Возникновение нарастающих собственных колебаний в электрических цепях возможно лишь тогда, когда в составе цепи помимо пассивных элементов $L$, $C$, $R$ содержатся активные элементы, передающие часть энергии от внешних источников в цепь. Примером активного элемента, известной из теории цепей, может послужить резистор с отрицательным сопротивлением.

---

**Пример 8.15.** *Колебательный контур с параметрами $C = 80$ пФ, $L = 2.5$ мкГн, $R = 12$ Ом содержит отрицательное сопротивление, включенное параллельно индуктивному элементу. Определить критическое значение отрицательного сопротивления, при котором возникает неустойчивость системы.*




Дифференциальное уравнение данной цепи, составленное относительно напряжения $u$ на индуктивном элементе, как легко проверить, имеет вид

$$\left(1 + \frac{R}{R_{\text{отр}}}\right)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_{\text{отр}}C}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{8.44}$$

Корни $\gamma_1$ и $\gamma_2$ характеристического уравнения обладают вещественной частью

$$\mathrm{Re}\,\gamma_{1,2} = -\frac{\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_{\text{отр}} C}\right)}{2\left(1 + \frac{R}{R_{\text{отр}}}\right)}.$$

Переход системы к неустойчивому режиму характеризуется обращением величины $\mathrm{Re}\,\gamma_{1,2}$ в нуль. Отсюда критическое значение отрицательного сопротивления

$$R_{\text{отр. кр}} = -\frac{L}{RC} = -2.604 \text{ кОм}.$$

Итак, рассматриваемая система будет самопроизвольно возбуждаться, если имеющееся в ней отрицательное сопротивление $R_{\text{отр}} > -2.604$ кОм.

## 8.4 Спектральный метод

Говоря о спектральном методе анализа прохождения радиотехнических сигналов через линейные стационарные системы, обычно имеют в виду широкий комплекс математических приемов, в основе которых лежит использование свойств частотного коэффициента передачи системы. Ниже на конкретных примерах будет показано применение спектрального подхода как к задаче прямого нахождения реакции системы, так и к проблеме числовой оценки выходного сигнала.

**Основная формула.** Пусть на входе некоторой линейной стационарной системы действует детерминированный сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, заданный своим разложением в интеграл Фурье:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{8.45}$$

Будем полагать, что математическая модель системы задана частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$. Как уже известно, комплексный сигнал $\exp(j\omega t)$ является собственной функцией рассматриваемой системы, создавая на выходе элементарную реакцию $K(j\omega)\exp(j\omega t)$. Суммируя эти сигналы, находим спектральное представление выходной реакции:

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)\, S_{\text{вх}}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.} \tag{8.46}$$

Полученная здесь основная формула спектрального метода свидетельствует о том, *что частотный коэффициент передачи* *служит множителем пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на входе и на выходе*:

■ принцип спектрального метода

$$\boxed{S_{\text{вых}}(\omega) = K(j\omega)\,S_{\text{вх}}(\omega).} \tag{8.47}$$

Итак, анализ систем в частотной области отличается замечательной чертой — эффект преобразования сигнала в системе отображается просто алгебраической операцией умножения.

Следует иметь в виду, что спектральный и временно́й подходы полностью эквивалентны друг другу. Действительно, интеграл Дюамеля (8.8) есть свертка функций $u_{\text{вх}}(t)$ и импульсной характеристики во временно́й области:

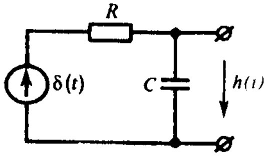
$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) * h(t),$$

а значит, спектральная плотность выходного сигнала есть произведение спектров функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $h(t)$. Отсюда непосредственно следует формула (8.47).

Практическая ценность спектрального способа нахождения выходной реакции в каждом конкретном случае зависит от того, удается ли провести интегрирование в формуле (8.46).

**Вычисление импульсных характеристик.** Как правило, нахождение частотных коэффициентов передачи линейных систем не вызывает принципиальных затруднений. Поэтому если требуется вычислить импульсную характеристику $h(t)$ системы, то целесообразно воспользоваться спектральным методом, согласно которому

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$




В качестве примера найдем импульсную характеристику $RC$-цепи, для которой выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе. Здесь

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

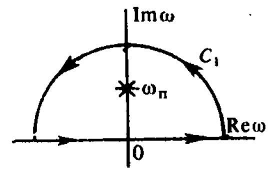
и поэтому импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}\,d\omega}{1 + j\omega RC}. \tag{8.48}$$

Применим метод вычетов [11] и будем считать, что $\omega$ — комплексная переменная. Контур интегрирования в (8.48) образован всей вещественной осью $\mathrm{Im}\,\omega=0$ и дугой $C_1$ бесконечно большого радиуса, которая может замыкаться как в верхней, так и в нижней полуплоскости.

Подынтегральная функция в (8.48) имеет единственный простой полюс в точке с координатой $\omega_п=j/(RC)$. Вычет подынтегральной функции в этой точке

$$\mathrm{res}\left(\frac{e^{j\omega t}}{1+j\omega RC}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_п}=\frac{1}{jRC}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (8.49)$$

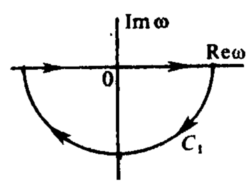



Найдем функцию $h(t)$ при $t>0$. Для этого дугу $C_1$ следует располагать в верхней полуплоскости, поскольку именно в этом случае функция $\exp(j\omega t)$ будет экспоненциально стремиться к нулю с ростом радиуса дуги. В пределе контурный интеграл будет равен интегралу, вычисленному лишь вдоль вещественной оси в соответствии с формулой (8.48).

По теореме Коши контурный интеграл от аналитической функции равен числу $2\pi j$, умноженному на сумму вычетов подынтегральной функции во всех полюсах, лежащих внутри контура интегрирования. Таким образом,

$$\boxed{h(t)\Big|_{t>0}=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.} \qquad (8.50)$$

Если же требуется найти импульсную характеристику при $t<0$, то контур интегрирования следует замкнуть в нижней полуплоскости, где подынтегральная функция вообще не имеет полюсов и поэтому




$$h(t)\Big|_{t<0}=0. \qquad (8.51)$$

График импульсной характеристики $RC$-цепи, построенный по формулам (8.50) и (8.51), представляет собой кривую, разрывную при $t=0$ (рис. 8.2).

Представление разрывных функций контурными интегралами является математическим приемом, широко применяемым в разнообразных теоретических исследованиях.

**Вычисление сигнала на выходе системы.** В качестве примера использования спектрального метода решим задачу о прохождении экспоненциального видеоимпульса

▲
решите задачи 6 и 7

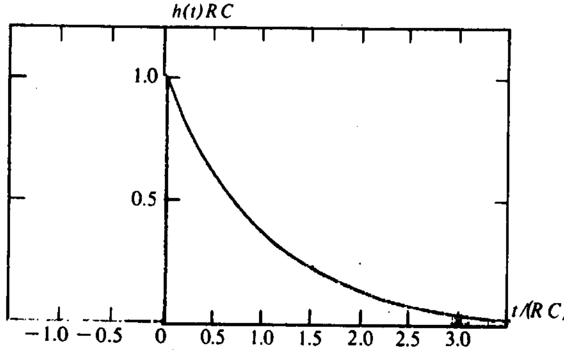
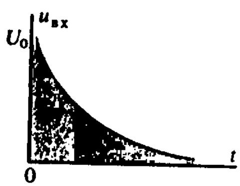



Рис. 8.2. График импульсной характеристики $RC$-цепи




$u_{вх}(t) = U_0 \exp(-\alpha t)\sigma(t)$

через $RC$-цепь, рассмотренную выше. В данном случае спектр входного воздействия

$$S_{вх}(\omega) = \frac{U_0}{\alpha + j\omega}$$

и задача сводится к вычислению интеграла:

$$u_{вых}(t) = \frac{U_0}{2\pi\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(j\omega t)\,d\omega}{(1 + j\omega/\alpha)(1 + j\omega RC)} \tag{8.52}$$

Разложив подынтегральное выражение на элементарные дроби, имеем

$$\frac{1}{(1 + j\omega/\alpha)(1 + j\omega RC)} = \frac{1}{1 - \alpha RC}\left[\frac{1}{1 + j\omega/\alpha} - \frac{\alpha RC}{1 + j\omega RC}\right]$$

Одинаковая структура слагаемых в квадратных скобках позволяет непосредственно использовать результаты, полученные при вычислении импульсной характеристики, и записать решение:

▲
решите задачу 8

$$u_{вых}(t)\Big|_{t>0} = \frac{U_0}{1 - \alpha RC}\left[e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}}\right]. \tag{8.53}$$

Естественно, что

$$u_{вых}(t)\Big|_{t<0} = 0. \tag{8.54}$$

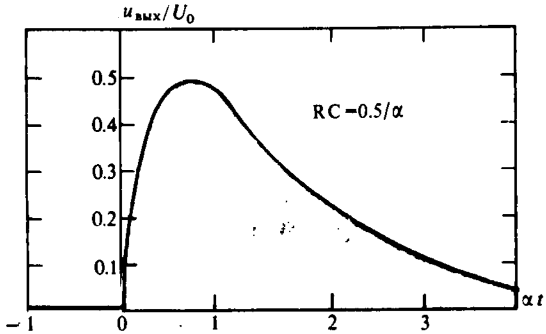
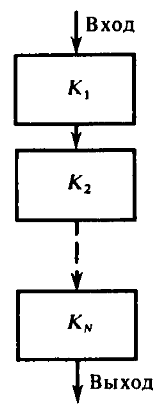



Рис. 8.3. Отклик $RC$-цепи на экспоненциальный видеоимпульс (следует обратить внимание на то, что эта цепь «сглаживает» входной сигнал)

Соответствующий график приведен на рис. 8.3.

**Коэффициент передачи многокаскадных систем.** Для радиотехники характерно использование сложных систем, отдельные звенья которых включены каскадно, т. е. выходной сигнал предыдущего звена служит входным сигналом для последующего. Примером такой системы может служить многокаскадный усилитель.




Будем полагать, что известны частотные коэффициенты передачи отдельных звеньев $K_n(j\omega)$ ($n=1, 2, \ldots, N$, где $N$ — общее число каскадов). Подавая на вход первого каскада сигнал $u_{вх}(t) = \exp(j\omega t)$, получаем на выходе

$$u_{вых}(t) = K_1(j\omega)K_2(j\omega)\ldots K_N(j\omega)\exp(j\omega t),$$

откуда результирующий коэффициент передачи системы

$$\boxed{K_{рез}(j\omega) = \prod_{n=1}^{N} K_n(j\omega).} \tag{8.55}$$

В практике инженерных расчетов широко применяется способ выражения АЧХ систем в особых логарифмических единицах — так называемых децибелах. Если на некоторой частоте $\omega$ известен модуль частотного коэффициента передачи, то *усиление* системы на этой частоте, выраженное в децибелах,

● децибелы

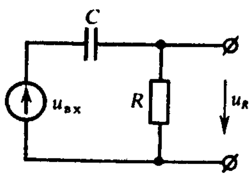
$$\boxed{\Delta = 20\lg\left|K(j\omega)\right|.} \tag{8.56}$$

Система, для которой $|K(j\omega)|<1$, ослабляет сигнал; этому случаю соответствует отрицательное усиление.

Легко видеть, что при каскадном соединении звеньев их усиления алгебраически суммируются:

$$\boxed{\Delta_{\text{рез}} = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n \, .} \tag{8.57}$$

**Дифференцирующие и интегрирующие цепи.** Линейные цепи часто используются в радиотехнике для преобразования формы импульсных колебаний.




Рассмотрим $RC$-цепь, в которой выходным сигналом является напряжение на резисторе. Дифференциальное уравнение системы

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + u_R = \tau \frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t}. \tag{8.58}$$

Если постоянная времени $\tau$ мала настолько, что

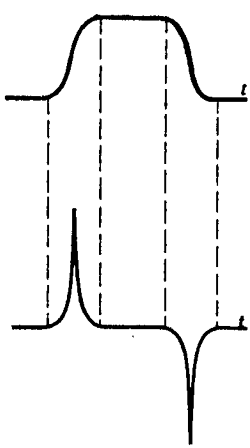
$$\tau \left| \mathrm{d}u_R / \mathrm{d}t \right| \ll \left| u_R \right| \tag{8.59}$$

в любой момент времени, то первым слагаемым в левой части (8.58) можно пренебречь по сравнению со вторым и поэтому

$$\boxed{u_R \approx \tau \frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} \, ,} \tag{8.60}$$

т. е. при выполнении условий (8.59) $RC$-цепь выполняет операцию приближенного дифференцирования сигнала. Схемотехническое применение дифференцирующих цепей — создание обострителей импульсных сигналов.

Сигнал
на входе




и на выходе
дифференцирующей
цепи

Ясно, что выполнение неравенства (8.59) зависит не только от параметров цепи, но и от характеристик входного сигнала. Для оценок здесь проще и нагляднее воспользоваться методом анализа в частотной области. Коэффициент передачи рассматриваемой цепи

$$K(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

будет действительно близок к частотному коэффициенту передачи идеального дифференциатора

$$K(j\omega) \approx j\omega\tau,$$

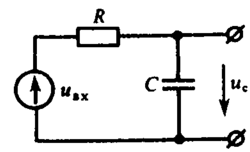
если произведение $\omega\tau$ пренебрежимо мало по сравнению с единицей в той области частот, где сосредоточена основная доля энергии сигнала. Например, пусть входной сигнал — прямоугольный видеоимпульс с длительностью $\tau_и$. Используя грубую оценку для верхней граничной частоты в спектре импульса

$\omega_в = 2\pi/\tau_и$,

получаем условие, обеспечивающее пригодность $RC$-цепи для приближенного дифференцирования такого сигнала:

$$\tau = RC \ll \tau_и/(2\pi). \tag{8.61}$$

Диаметрально противоположными свойствами обладает $RC$-цепь, у которой выходной сигнал снимается с конденсатора. Здесь




$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_{вх}(t),$$

и если параметры цепи и входного сигнала таковы, что

$$\tau\left|\frac{du_C}{dt}\right| \gg \left|u_C\right|,$$

то

$$\boxed{u_C(t) \approx \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{t} u_{вх}(\xi)\,d\xi.} \tag{8.62}$$

$RC$-цепь с такими свойствами называется интегрирующей цепью.

Приближенное интегрирование выполняется тем точнее, чем значительнее относительная доля высокочастотных компонент в спектре входного сигнала. Действительно, поскольку здесь

$$K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau),$$

то приближенное равенство

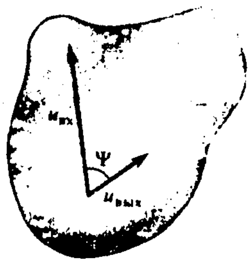
$$K(j\omega) \approx 1/(j\omega\tau),$$

▲ решите задачу 9

обеспечивающее интегрирующие свойства цепи, будет иметь место, если $\omega_н\tau \gg 1$, где $\omega_н$ — нижняя граничная частота спектра.

Интегрирующие цепи, обладающие свойством подавлять высокочастотные компоненты спектра входного сигнала, часто используют как сглаживающие фильтры. Кроме того, они могут преобразовывать скачкообразные перепады входного сигнала в линейно нарастающие импульсы напряжения на выходе.

**Геометрическая интерпретация процесса преобразования сигнала в линейной системе.** Спектральный метод позволяет проводить наглядный анализ тех преобразований, которые совершаются над сигналами при их прохождении через линейные стационарные системы. С геометрических позиций, развитых в




гл. 1, системный оператор $T$ — это закон перехода от сигнала $u_{вх}(t)$ некоторого линейного пространства к новому сигналу $u_{вых}(t)$. Как правило, данное функциональное пространство может считаться гильбертовым. Тогда в самом общем случае можно утверждать, что оператор $T$ изменяет норму сигнала $u_{вх}(t)$, т. е. $\|u_{вх}\| \neq \|Tu_{вх}\|$. Кроме того, между сигналами $u_{вх}$ и $u_{вых}$ возникает некоторый угол $\Psi$.

По формуле Рэлея (см. гл. 3), энергия выходного сигнала

$$E_{вых} = \|u_{вых}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{вых}(\omega)\, S^*_{вых}(\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 W_{вх}(\omega)\,d\omega, \qquad (8.63)$$

где $W_{вх}(\omega)$ — энергетический спектр сигнала на входе.

В соответствии с (8.63)

$$W_{вых}(\omega) = |K(j\omega)|^2 W_{вх}(\omega).$$

Величину

частотный коэффициент передачи мощности

$$\boxed{K_P(\omega) = |K(j\omega)|^2} \qquad (8.64)$$

называют *частотным коэффициентом передачи мощности* системы на заданной частоте $\omega$. Вещественность этого коэффициента делает вычисление энергии выходного сигнала гораздо более простой задачей по сравнению с поиском точной формы выходного сигнала. Отметим, что во многих случаях вполне достаточно знать лишь изменение энергии сигнала, прошедшего линейную систему.

**Пример 8.16.** *Пусть на входе RC-цепи с частотным коэффициентом передачи $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$ действует идеальный низкочастотный сигнал, энергетический спектр которого отличен от нуля и равен $W_0$ лишь в пределах интервала частот $0 < \omega < \omega_в$. Найти отношение энергий сигналов на входе и на выходе.*

В данном случае

$$K_P(\omega) = 1/(1 + \omega^2\tau^2).$$

$K_P(\omega) = K(j\omega)\,K(-j\omega)$

По формуле (8.63),

$$E_{вых} = \frac{W_0}{\pi}\int_0^{\omega_в} \frac{d\omega}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{W_0}{\pi\tau}\,\mathrm{arctg}\,\omega_в\tau.$$

Энергия входного сигнала

$E_{вх} = W_0 \omega_в / \pi.$

Поэтому отношение энергий

$$\eta = E_{вых}/E_{вх} = \operatorname{arctg} \omega_в \tau / (\omega_в \tau) \qquad (8.65)$$

стремится к нулю с ростом как постоянной времени $\tau$, так и граничной частоты спектра $\omega_в$.

**Угол между векторами входного и выходного сигналов.** В гл. 1 мы познакомились с принципом сравнения двух сигналов, основанным на вычислении угла $\Psi$, который образуют векторы этих сигналов в гильбертовом пространстве. Эту же идею можно использовать для сопоставления сигналов на входе и выходе линейной стационарной системы.

На основании обобщенной теоремы Рэлея скалярное произведение этих сигналов выражается через их спектральные плотности:

▲

решите задачу 14

$$(u_{вх}, u_{вых}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{вх}(\omega)\, S^*_{вых}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вх}(\omega) S^*_{вх}(\omega) \times$$

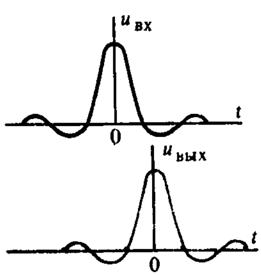
$$\times K^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{вх}(\omega) K^*(j\omega) d\omega.$$

Поскольку мнимая часть коэффициента передачи есть нечетная функция частоты, то последняя формула упрощается:

$$(u_{вх}, u_{вых}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{вх}(\omega) \operatorname{Re} K(j\omega)\, d\omega. \qquad (8.66)$$

Угол $\Psi$ между векторами входного и выходного сигналов найдется из соотношения.

$$\cos \Psi = \frac{(u_{вх}, u_{вых})}{\| u_{вх} \| \cdot \| u_{вых} \|}. \qquad (8.67)$$




**Пример 8.17.** *Вычислить угол $\Psi$ между сигналами на входе и выходе RC-цепи в соответствии с условиями примера* 8.16.

Поскольку здесь

$$\operatorname{Re} K(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

то в данном частном случае интеграл (8.66) численно равен квадрату нормы выходного сигнала. Отсюда следует, что

$$\cos \Psi = \sqrt{\eta} = \left( \frac{\operatorname{arctg} \omega_в \tau}{\omega_в \tau} \right)^{1/2}. \qquad (8.68)$$

Если произведение $\omega_в \tau \gg 1$, то $\cos\Psi \to 0$, а это означает, что $RC$-цепь создает на выходе сигнал, почти ортогональный по отношению к сигналу на входе. Природу этого эффекта можно понять из качественных рассуждений, приняв во внимание, что благодаря инерционным свойствам цепи выходной сигнал задерживается во времени.

**Автокорреляционная характеристика системы.** Заканчивая обзор спектральных методов в теории линейных стационарных систем, упомянем еще об одной полезной функции — так называемой автокорреляционной характеристике системы $\Xi(\tau)$. Ее принято определять как преобразование Фурье от частотного коэффициента передачи мощности:

$$\Xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_P(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \tag{8.69}$$

Наряду с частотным представлением возможно и временное представление функции (8.69). Чтобы осуществить его, заметим, что $K_P(\omega) = K(j\omega)K^*(j\omega)$. Поэтому между функциями $K_P(p)$ и $\Xi(\tau)$ должна существовать такая же связь, которая была найдена в гл. 3 применительно к энергетическому спектру и функции автокорреляции произвольного сигнала:

$$\Xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, h(t-\tau)\, dt. \tag{8.70}$$

## 8.5 Операторный метод

К рассмотренному выше спектральному методу тесно примыкает широко распространенный операторный метод, базирующийся на представлении входных и выходных сигналов преобразованиями Лапласа.

**Решение дифференциальных уравнений операторным методом.** Преобразование Лапласа является исключительно гибким и мощным методом, позволяющим путем формализованных процедур находить решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Именно это свойство обусловило его популярность при изучении линейных динамических систем.

Пусть дифференциальное уравнение

$$a_n \frac{d^n u_{вых}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{вых}}{dt} + a_0 u_{вых} =$$

$$= b_m \frac{d^m u_{вх}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{вх}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u_{вх} \tag{8.71}$$

устанавливает закон соответствия между сигналами на входе и выходе некоторой линейной стационарной системы. Наложим важное ограничение — будем полагать, что входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)=0$ при $t<0$. Кроме того, исходя из специфики тех задач, которые приходится решать в нашем курсе, будем считать, что вплоть до момента возникновения входного сигнала система не содержит какой-либо запасенной энергии. Математически это означает, что начальные условия выбраны нулевыми: $u_{\text{вых}}(0)=\dot{u}_{\text{вых}}(0)=\ldots=\overset{(n-1)}{u}_{\text{вых}}(0)=0$. Наконец, допустим, что область возможных входных сигналов не содержит в себе функций, столь быстро нарастающих во времени, что для них не существует преобразования Лапласа.

Обозначим закон соответствия между оригиналами и изображениями следующим образом:

$$u_{\text{вх}}(t) \rightleftharpoons U_{\text{вх}}(p);\quad u_{\text{вых}}(t) \rightleftharpoons U_{\text{вых}}(p).$$

Вычислив преобразования Лапласа от обеих частей уравнения (8.71), получим

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\, U_{\text{вых}}(p) =$$
$$=(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\, U_{\text{вх}}(p). \qquad (8.72)$$

Важнейшей характеристикой, на которой основан операторный метод, является отношение изображений выходного и входного сигналов

$$\boxed{K(p)=U_{\text{вых}}(p)\,/\,U_{\text{вх}}(p),} \qquad (8.73)$$

называемое *передаточной функцией* или *операторным коэффициентом передачи* рассматриваемой системы.

**передаточная функция системы**

В соответствии с (8.72)

$$K(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}\,. \qquad (8.74)$$

В рамках операторного метода передаточная функция является полной математической моделью системы. Если эта функция известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ u_{\text{вх}}(t) \to U_{\text{вх}}(p), \\ 2)\ U_{\text{вых}}(p) = K(p)\,U_{\text{вх}}(p), \\ 3)\ U_{\text{вых}}(p) \to u_{\text{вых}}(t)\,. \end{array}}$$

Термин «операторный метод» имеет историческое происхождение и связан с известными работами Хевисайда, еще в конце прошлого века предложившего символический способ решения дифференциальных уравнений, которые описывают нестационарные явления в линейных электрических цепях. Метод Хевисайда основан на формальной замене оператора дифференцирования d/d$t$ комплексным числом $p$ (о связи метода Хевисайда с теорией преобразования Лапласа см. [11]).

**Свойства передаточной функции.** Сравнение формул (8.74) и (8.41) показывает, что функция $K(p)$ есть результат аналитического продолжения частотного коэффициента передачи $K(j\omega)$ с мнимой оси $j\omega$ на всю плоскость комплексной частоты $p=\sigma+j\omega$. Величина $K(p)$ есть функция, аналитическая во всей плоскости $p$, за исключением конечного числа точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, являющихся корнями знаменателя в формуле (8.74). Данные точки, т. е. корни уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0,$$

называются *полюсами* передаточной функции $K(p)$.

Совокупность точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$, представляющих собой корни уравнения

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = 0,$$

называется *нулями* передаточной функции.

нули и полюсы

Вынеся общий множитель $K_0$, возникающий при делении в (8.74) числителя на знаменатель, можно записать $K(p)$ в так называемом нуль-полюсном представлении:

$$\boxed{K(p) = K_0 \frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}.}$$

Вещественность коэффициентов дифференциального уравнения (8.72) обеспечивает важную особенность нулей и полюсов — *все эти числа либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары.*

В дальнейшем принята следующая система обозначений:
о — нуль
* — полюс

Часто используют графический прием отображения передаточной функции с помощью так называемой карты нулей и полюсов, представляющей собой плоскость, на которой некоторыми условными значками нанесены координаты указанных точек. Сама функция $K(p)$, будучи комплекснозначной, не может быть непосредственно представлена в наглядной графической форме. Поэтому иногда поступают следующим образом: над

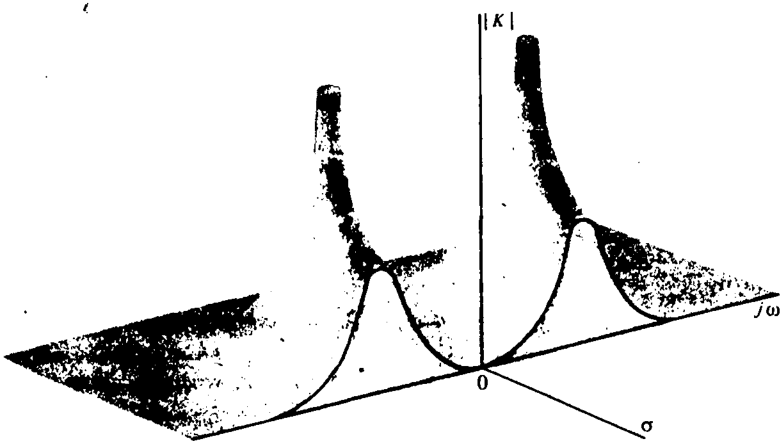



Рис. 8.4. Характер поверхности $K(p)$ для передаточной функции, имеющей два комплексно-сопряженных полюса: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ и один нуль: $z=0$

плоскостью с декартовой системой координат изображают трехмерную поверхность функции $|K(p)|$ (рис. 8.4).

Поверхность имеет характерный вид «горного ландшафта»; бесконечно высокие вершины отвечают полюсам, а впадины — нулям передаточной функции. Выполнив сечение этой поверхности с помощью плоскости, которая содержит как вертикальную ось, так и ось $j\omega$, мы получаем профиль АЧХ системы.

Полюсы передаточной функции линейной цепи есть не что иное, как корни характеристического уравнения (8.36). Поэтому для абсолютной устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы эти полюсы располагались строго в левой полуплоскости комплексной переменной $p$. Нули передаточной функции в общем случае могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях.

▲ решите задачу 11

**Формула обращения.** Заключительным этапом решения задачи о прохождении сигнала через линейную систему с помощью операторного метода является поиск оригинала, которому отвечает изображение

$$U_{\text{вых}}(p) = K(p)\, U_{\text{вх}}(p)\ .$$

Рассмотрим частный случай, когда функция $U_{\text{вых}}(p)$ представляет собой отношение двух многочленов по степени комплексной частоты:

$$U_{\text{вых}}(p) = M(p)\ /\ N(p)\ ,$$

причем будем считать, что степень числителя $m$ не превосходит степени знаменателя $n$ и, кроме того, корни знаменателя $p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — простые.

Метод, позволяющий находить оригинал, отвечающий такому изображению, основывается на представлении $U_{\text{вых}}(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$U_{\text{вых}}(p)=\sum_{i=1}^{n} C_i \frac{1}{p-p_i}\,.$$

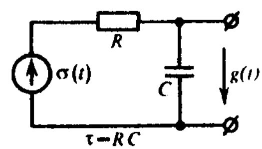
Коэффициенты $C_i$ являются вычетами функции $U_{\text{вых}}(p)$ в точках полюсов, и поэтому [11]

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M(p_i)}{N'(p_i)}\,\frac{1}{p-p_i}. \tag{8.75}$$

Как известно, изображению $1/(p-p_i)$ отвечает оригинал $\exp(p_i t)$. Таким образом, из (8.75) вытекает известная формула обращения

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M(p_i)}{N'(p_i)}\, e^{p_i t}} \tag{8.76}$$

**Пример 8.18.** *Нахождение переходной характеристики RC-цепи.*

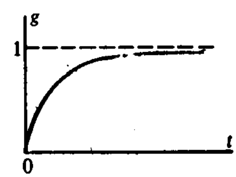



Здесь $\sigma(t) \div 1/p$, $K(p)=1/(1+p\tau)$, и поэтому

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{p(1+p\tau)}\,.$$

Разлагая на элементарные дроби, имеем

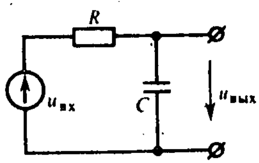
$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\dfrac{1}{\tau}}\,.$$




Оригиналы, соответствующие обоим слагаемым правой части последней формулы, хорошо известны (см. гл. 2). Искомый результат имеет вид

$$g(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\sigma(t). \tag{8.77}$$

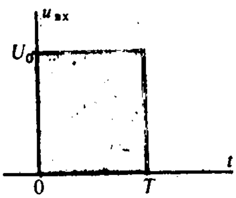
**Примеры нахождения выходных сигналов операторным методом.** При использовании операторного метода бо́льшую часть формальных вычислений можно исключить, используя широко распространенные таблицы преобразования Лапласа (см. Приложение 4).




**Пример 8.19.** *Воздействие прямоугольного видеоимпульса на RC-цепь. Пусть на вход RC-цепи, изображенной на рисунке, действует прямоугольный видеоимпульс э.д.с. с известными параметрами $U_0$ и $T$. Найти функцию, описывающую выходной сигнал.*

Входной сигнал имеет изображение

$$U_{вх}(p) = \frac{U_0}{p}\left(1 - e^{-pT}\right).$$




Множитель $\exp(-pT)$ свидетельствует о сдвиге во времени на величину $T$. Поэтому на основе решения задачи, изученной в примере 8.18, можно записать следующий результат:

$$u_C(t) = U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\sigma(t) - U_0\left(1 - e^{-(t-T)/\tau}\right)\sigma(t-T). \tag{8.78}$$

Для наглядности формулу (8.78) целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} &u_C(t) = U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ при } 0 < t < T, \\ &u_C(t) = -U_0 e^{-t/\tau}\left(1 - e^{T/\tau}\right) \text{ при } t > T. \end{aligned} \tag{8.79}$$

Если выходной сигнал снимается с резистора, то при тех же параметрах $R$ и $C$ напряжение на резисторе

$$u_R(t) = u_{вх} - u_C(t).$$

Соответствующие графики приведены на рис. 8.6.

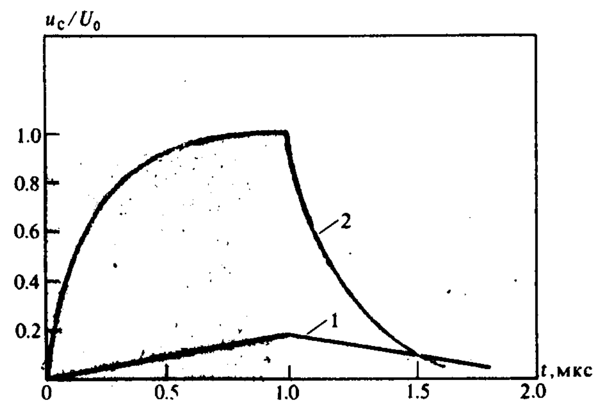
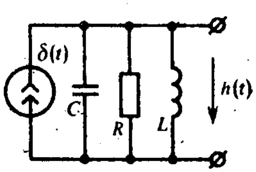



Рис. 8.5. Измнение во времени напряжения на конденсаторе $RC$-цепи, возбуждаемой прямоугольным видеоимпульсом длительностью $T = 1$ мкс: *1* — при $T/\tau = 0{,}2$; *2* — при $T/\tau = 5$




**Пример 8.20.** *Импульсная характеристика параллельного колебательного контура. Пусть параллельный колебательный контур с потерями возбуждается дельта-импульсом тока в неразветвленной части цепи. Выходным сигналом служит напряжение на контуре.*

Равенство $U(p) = Z(p)\,I(p)$ указывает на то, что передаточной функцией в данном случае служит операторное сопротивление контура

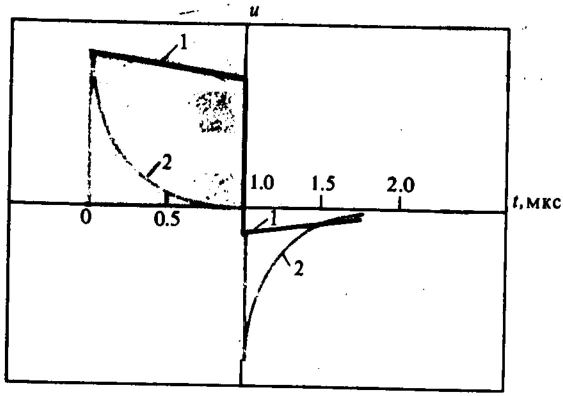



Рис. 8.6. Изменение во времени напряжения на резисторе $RC$-цепи, возбуждаемой прямоугольным видеоимпульсом длительностью $T=1$ мкс: 1 — при $T/\tau=0{,}2$; 2 — при $T/\tau=5$

$$Z(p)=\frac{pRL}{p^2LCR+pL+R}=\frac{p/C}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}, \tag{8.80}$$

где $\alpha=1/(2RC)$; $\omega_0^2=1/(LC)$.

Формулу (8.80) удобно представить так:

$$Z(p)=\frac{p/C}{(p+\alpha)^2+\omega_c^2}, \tag{8.81}$$

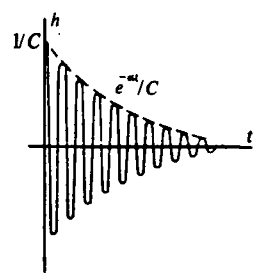
где $\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ — частота собственных колебаний в контуре с потерями.

Изображением дельта-импульса тока служит единица, поэтому импульсная характеристика данной системы — это оригинал, соответствующий изображению (8.81). По таблицам, помещенным в Приложении 4, находим

$$h(t)=\frac{e^{-\alpha t}}{C}\left(\cos\omega_c t-\frac{\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t\right). \tag{8.82}$$

Если контур высокодобротный и $\alpha\ll\omega_0$, то формула (8.82) несколько упрощается:

$$h(t)\approx\frac{e^{-\alpha t}}{C}\cos\omega_0 t. \tag{8.83}$$



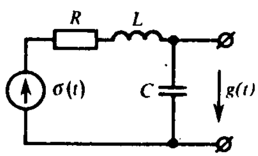

Импульсная характеристика колебательного контура, впрочем, как и любой другой линейной колебательной системы, имеет характерный вид гармонического колебания с экспоненциально уменьшающейся во времени огибающей.

Необходимо помнить, что формулы (8.82) и (8.83) соответствуют возбуждению контура бесконечно коротким импульсом тока, площадь которого тем не менее конечна и составляет 1 А·с. В реальном масштабе это очень большая величина — прямоугольный импульс длительностью 1 мкс должен иметь гигантскую амплитуду $10^6$ А! Неудивительно, что при $C=1000$ пФ такой импульс вызовет в начальный момент времени напряжение $10^9$В. Реальный импульс с амплитудой 0.01 А и длительностью 1 мкс имеет площадь $10^{-8}$ А·с; при $C=1000$ пФ начальное напряжение на контуре составит лишь 10 В.

Итак, формула для вычисления напряжения на параллельном контуре, который возбуждается коротким импульсом тока произвольной формы, имеет вид

$$u_{\text{вых}}(t)=\frac{S_{\text{имп}}e^{-\alpha t}}{C}\left[\cos\omega_c t-\frac{\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t\right]. \tag{8.84}$$

**Пример 8.21.** *Переходная характеристика последовательного колебательного контура.*



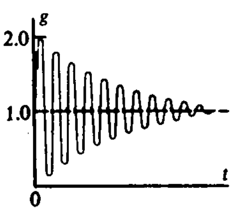

Здесь передаточная функция

$$K(p)=\frac{1/(pC)}{pL+R+1/(pC)}=\frac{\omega_0^2}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2},$$

где $\alpha=R/(2L)$. Входной сигнал — функция Хевисайда с изображением $1/p$. Таким образом,

$$U_{\text{вых}}(p)=\frac{\omega_0^2}{p\left[(p+\alpha)^2+\omega_c^2\right]}.$$

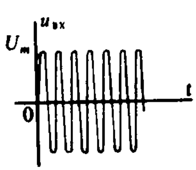
Используя таблицу преобразований Лапласа, находим окончательно




$$\boxed{g(t)=1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_c t+\frac{\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t\right).} \tag{8.85}$$

График функции $g(t)$ указывает на то, что под действием единичного скачка напряжения на входе система совершает колебательные движения, асимптотически стремясь к новому стационарному состоянию.

**Пример 8.22.** *Включение источника гармонической э.д.с. в RC-цепь.* Пусть

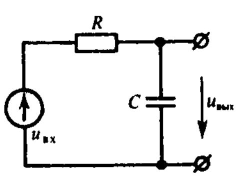



$$u_{\text{вх}}(t)=U_m\sin\omega_0 t\sigma(t).$$

Изображение этого сигнала

$$U_{\text{вх}}(p)=\frac{U_m\omega_0}{p^2+\omega_0^2}.$$

Так как



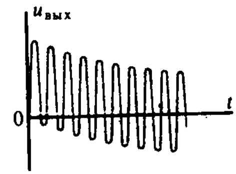

$$K(p)=1/(1+p\tau)=\alpha/(p+\alpha),$$

где $\alpha=1/\tau$, то

$$U_{\text{вых}}(p)=\frac{U_m\alpha\omega_0}{(p+\alpha)\left(p^2+\omega_0^2\right)}.$$

По таблицам находим

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{U_m \alpha \omega_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \left[ e^{-\alpha t} - \cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right]. \qquad (8.86)$$




Первое слагаемое в квадратных скобках правой части отображает затухающий свободный процесс. Если $\alpha t \gg 1$, то в решении остается лишь вынужденная составляющая, которая изменяется во времени по гармоническому закону.

Этот ряд примеров можно было бы продолжить и рассмотреть более сложные задачи, например задачу о включении источника гармонической э. д. с. в колебательный контур. Однако получающиеся при этом точные решения довольно громоздки. Гораздо более удобным оказывается приближенный метод анализа нестационарных явлений в колебательных цепях, изложенный в гл. 9.

## Результаты

◇◇ *Закон, связывающий входной и выходной сигналы в системе, называется системным оператором.*

◇◇ *Классификация систем основана на свойствах системных операторов. Различают линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные, сосредоточенные и распределенные системы.*

◇◇ *Реакция линейной системы на дельта-импульс называется импульсной характеристикой.*

◇◇ *Сигнал на выходе есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики. Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика связаны парой преобразований Фурье.*

◇◇ *Собственные колебания динамических систем определяются корнями характеристического уравнения.*

◇◇ *Динамическая система абсолютно устойчива, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.*

◇◇ *Частотный коэффициент передачи линейной стационарной системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, есть дробно-рациональная функция частоты.*

◇◇ *Спектральная плотность выходного сигнала является произведением частотного коэффициента передачи и спектральной плотности колебания на входе.*

## Вопросы

1. Приведите несколько примеров линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных систем.
2. При каких условиях реакцию линейной системы на короткий входной импульс можно представить импульсной характеристикой системы?

3. Сформулируйте условие физической реализуемости системы.

4. Что такое переходная характеристика системы? Как связаны между собой переходная и импульсная характеристика?

5. Как определяется частотный коэффициент передачи линейной стационарной системы?

6. Приведите формулировку критерия Пэли — Винера.

7. В чем заключено отличительное свойство динамических систем?

8. Напишите формулу, определяющую частотный коэффициент передачи усилителя малых сигналов с апериодической нагрузкой. Чем определяется граничная частота усиления?

9. В чем состоит сущность спектрального метода анализа прохождения сигналов через линейные системы?

10. В каких логарифмических единицах выражается усиление сигнала в системе?

11. Начертите схемы дифференцирующих и интегрирующих цепей и поясните принцип их работы.

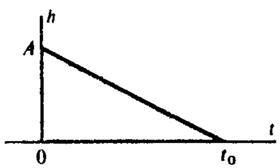
12. Как преобразуется при прохождении через линейную цепь вектор входного сигнала, рассматриваемый как элемент гильбертова пространства?

13. Что такое частотный коэффициент передачи мощности?

14. Приведите определение понятия передаточной функции линейной стационарной системы.

## Задачи

1. Характеристика $h(t)$ линейной стационарной системы представляет собой импульс треугольной формы:




На вход системы подается сигнал

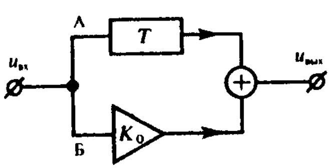
$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} at, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Найдите выходную реакцию системы.

2. Вычислите импульсную характеристику идеального интегратора, для которого

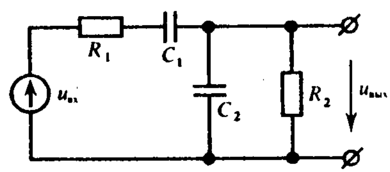
$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\xi)\,d\xi.$$

3. Структурная схема системы имеет вид




В ветвях *А* и *Б* помещены идеальный элемент задержки на *T* с и масштабный усилитель с коэффициентом усиления $K_0$. Найдите импульсную характеристику системы.

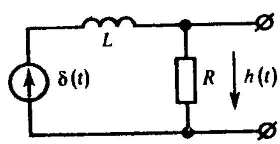
4. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее цепь:




Уравнение должно быть записано относительно неизвестной функции $u_{\text{вых}}(t)$.

5. Найдите частотные коэффициенты передачи систем, рассмотренных в задачах 3 и 4.

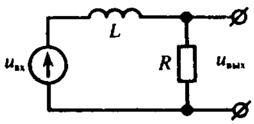
6. Вычислите импульсную характеристику *RL* — цепи, схема которой имеет вид




7. Вычислите импульсную характеристику цепи, рассмотренной в задаче 4.

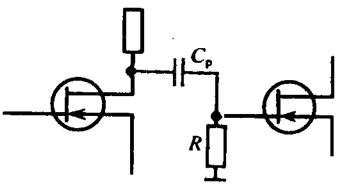
8. Проведите анализ формулы (8.53) для случая, когда $\alpha = 1/(RC)$.

9. Исследуйте, при каких условиях цепь вида




может служить устройством, осуществляющим приближенное интегрированпе входного сигнала.

10. В многокаскадном усилителе на полевых транзисторах применен разделительный конденсатор $C_р$:




Его назначение — препятствовать попаданию высокого постоянного потенциала со стока предыдущего каскада на затвор последующего. Усилитель предназначен для усиления прямоугольных видеоимпульсов длительностью $T=$ $=1$ мс. Считая, что сопротивление резистора $R=0.5$ МОм, а полевой транзистор имеет бесконечное входное сопротивление, определите емкость $C_р$, при которой за время длительности импульса $T$ напряжение на затворе (см. схему) падает не более чем на 5% от максимального уровня.

11. Найдите передаточную функцию двухкаскадного усилителя, имеющего одинаковые каскады с резистивно-емкостной нагрузкой. Параметры одного каскада:

$S = 10$ мА/В, $R = 0.3$ кОм, $R_i = 7$ кОм, $C_п$=120 пФ.

Емкость конденсатора в цепи межкаскадной связи (см. задачу 10) столь велика, что ее влиянием на характеристики усилителя можно пренебречь.

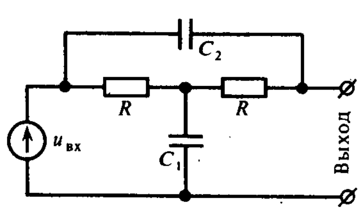
12. На последовательный колебательный контур с параметрами $L$, $C$ и $R$ действует источник э. д. с.

$$u_{вх}(t) = at\sigma(t).$$

Получите зависимости, определяющие законы изменения напряжения на конденсаторе и индуктивности.

## Более сложные задания

13. Вычислите частотный коэффициент передачи и найдите импульсную характеристику следующей цепи:




14. На входе $RC$-цепи действует источник импульсной э.д.с.
$u_{вх}(t) = U_0 e^{-\alpha t}\sigma(t)$.

Выходной сигнал снимается с конденсатора. Определите угол, возникающий между векторами входного и выходного сигнала в гильбертовом пространстве.

15. Исследуйте переходную характеристику колебательного контура с помощью физической модели — грузика, подвешенного на нити. Входное воздействие на систему — скачкообразное перемещение точки подвеса маятника в горизонтальном направлении. Экспериментально подберите такой вид входного воздействия, которое переводило бы систему из одного состояния покоя в другое за конечное время. Сделайте вывод о предельно достижимом быстродействии колебательных систем. (Данная задача является частной иллюстрацией к одному из интенсивно развиваемых направлений современной кибернетики — теории оптимального управления [42].)

# Глава 9
# Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы

В радиотехнике с самых первых шагов ее становления широкое применение получил способ выделения полезных сигналов с помощью частотно-избирательных линейных цепей. Такие цепи пропускают на выход лишь колебания с частотами, лежащими в относительно узкой полосе вокруг некоторой центральной частоты. Частотная фильтрация полезного сигнала эффективна в том случае, если обрабатываемый сигнал в достаточной степени узкополосен. Примерами таких сигналов могут служить разнообразные модулированные колебания, изученные в гл. 4.

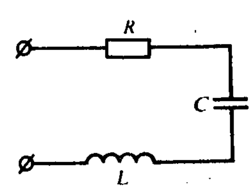
Узкополосные частотно-избирательные цепи или, как их часто называют, линейные узкополосные частотные фильтры обладают рядом специфических свойств. Для анализа и расчета характеристик этих цепей, а также для нахождения выходных сигналов в радиотехнике созданы методы, с которыми мы познакомимся в этой главе.

## 9.1 Модели частотно-избирательных цепей

Простейшим частотным фильтром является колебательный контур, образованный путем соответствующего включения элементов $L$, $C$ и $R$. В курсе теории цепей изучаются последовательные и параллельные колебательные контуры. Не приводя подробных выкладок, которые должны быть известны читателю [25], перечислим основные положения, которыми часто будем пользоваться в дальнейшем.

**Частотные характеристики последовательного колебательного контура.** Свойства последовательного колебательного контура при гармоническом входном воздействии описываются комплексной входной проводимостью

$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}.} \tag{9.1}$$




На резонансной частоте $\omega_{рез} = 1/\sqrt{LC}$ проводимость контура $Y_{рез} = 1/R$ чисто активна. Величину

$$\rho = \sqrt{L/C} \tag{9.2}$$

называют *характеристическим сопротивлением* контура.

Частотно-избирательные свойства данной системы проявляются тем сильнее, чем выше *добротность*

$$Q = \rho/R = \omega_{рез}L/R = 1/(\omega_{рез}RC). \tag{9.3}$$

Принято вводить *абсолютную расстройку* $\Delta\omega$ источника входного гармонического сигнала относительно резонансной частоты, записывая частоту этого источника так:

$$\omega = \omega_{рез} + \Delta\omega,$$

а также безразмерную *относительную расстройку*

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_{рез}} - \frac{\omega_{рез}}{\omega}, \tag{9.4}$$

которая обращается в нуль на резонансной частоте.

**обобщенная расстройка**

Наконец, *обобщенная расстройка* $\xi$ есть отношение полного реактивного сопротивления контура к сопротивлению потерь:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Q\nu.} \tag{9.5}$$

Проводимость последовательного контура выражается через обобщенную расстройку:

$$\boxed{\dot{Y} = \frac{1/R}{1 + j\xi} = |\dot{Y}|e^{j\varphi}.} \tag{9.6}$$

**решите задачу 1**

Из (9.6) следует уравнение АЧХ контура

$$|\dot{Y}| = \frac{1/R}{\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{9.7}$$

а также уравнение его ФЧХ

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\xi. \tag{9.8}$$

Графики, построенные по формулам (9.7) и (9.8), изображены на рис. 9.1.

Модуль проводимости уменьшается в $\sqrt{2} = 0.707$ раза по сравнению с резонансным значением на частотах, отвечающих равенству $\xi = \pm 1$. При этом

$$Q\left(\frac{\omega_{рез}+\Delta\omega}{\omega_{рез}}-\frac{\omega_{рез}}{\omega_{рез}+\Delta\omega}\right)=\pm 1.$$

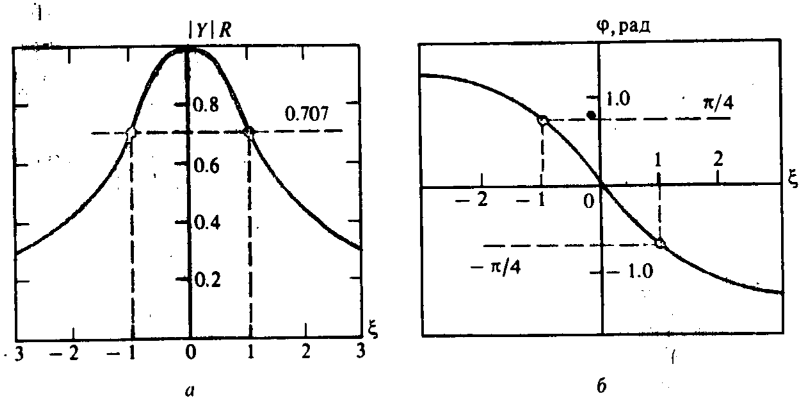



Рис. 9.1. Проводимость последовательного контура в зависимости от обобщенной расстройки:
а — модуль; б — фаза

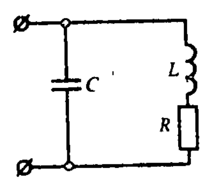
Если добротность $Q \gg 1$, то это равенство будет выполняться при малых отношениях $\Delta\omega/\omega_{рез}$. Поэтому приближенно

$$2Q\Delta\omega/\omega_{рез}=\pm 1.$$

откуда полоса пропускания контура по уровню 0.707

$$\Pi_{0.707}=2\left|\Delta\omega\right|=\omega_{рез}\Big|Q. \tag{9.9}$$

**Частотные характеристики параллельного колебательного контура.** Последовательный контур на резонансной частоте обладает весьма малым сопротивлением, модуль которого резко возрастает с увеличением расстройки от резонанса. Для параллельного колебательного контура сопротивление при резонансе




$$R_{рез}=\rho Q, \tag{9.10}$$

будучи также чисто активным, максимально по величине.

Частотная характеристика параллельного колебательного контура отображается его входным сопротивлением $Z(j\omega)$. Эту функцию удобно выразить, используя в качестве аргумента обобщенную расстройку $\xi$:

$$\boxed{Z(j\xi)=\frac{R_{рез}}{1+j\xi}\,.} \tag{9.11}$$

Кривые, описывающие модуль и фазу этого сопротивления, в точности повторяют те, которые были приведены на рис. 9.1 применительно к проводимости последовательного контура.

Если добротность $Q$ достаточно велика, так что в непосредственной окрестности резонансной частоты для расчета обобщенной расстройки можно пользоваться приближенной формулой

▲ решите задачу 2

$$\boxed{\xi \approx \frac{2Q(\omega - \omega_{рез})}{\omega_{рез}},} \tag{9.12}$$

то АЧХ данной цепи, т. е. зависимость модуля входного сопротивления от частоты, отображается так называемой резонансной кривой, симметричной относительно частоты $\omega_{рез}$. Уравнение резонансной кривой

$$\left| Z(j\omega) \right| = \frac{R_{рез}}{\sqrt{1 + 4Q^2(\omega - \omega_{рез})^2/\omega_{рез}^2}}. \tag{9.13}$$

Резкое уменьшение модуля сопротивления параллельного контура при расстройке позволяет использовать эту цепь для частотной фильтрации сигналов.

**Пример 9.1.** *Параллельный колебательный контур с параметрами* $Q=125$, $L=6$ мкГн *настроен на частоту* $f_{рез}=8$ МГц. *Контур возбуждается источником гармонического тока; выходным сигналом является напряжение на контуре. Определить, во сколько раз будет ослаблен сигнал на частоте* 8.1 МГц *по сравнению с сигналом на резонансной частоте.*

Для настройки на требуемую резонансную частоту необходимо использовать конденсатор с емкостью

$$C = 1/(4\pi^2 L f_{рез}^2) = 66 \text{ пФ}.$$

Резонансное сопротивление контура

$$R_{рез} = \rho Q = \sqrt{L/C}\; Q = 37.69 \text{ кОм}.$$

В соответствии с (9.12) обобщенная расстройка на частоте 8.1 МГц

$$\xi = \frac{2Q\Delta f}{f_{рез}} = 3.125.$$

Амплитуда выходного сигнала в данном случае пропорциональна модулю сопротивления контура. Поскольку

$$|Z|/R_{рез} = 1/\sqrt{1+\xi^2},$$

то, подставляя найденное значение $\xi$, находим, что амплитуда сигнала на частоте 8.1 МГц составит 0.305 от амплитуды на резонансной частоте.

Этому соответствует отрицательное усиление (т. е. ослабление)

$\Delta = 20\lg 0.305 = -10.31$ дБ.

Амплитудно-частотная характеристика данной системы изображена на рис. 9.2.

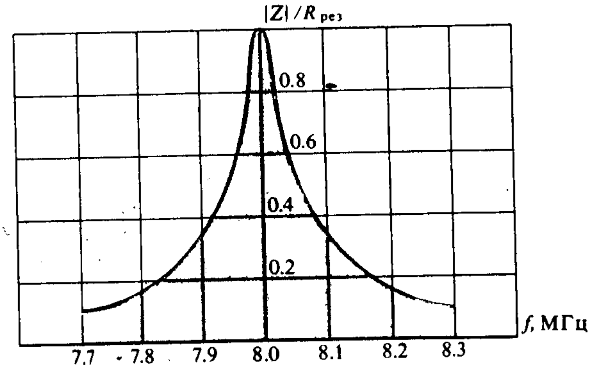



Рис. 9.2. АЧХ параллельного колебательного контура с параметрами $Q=125$, $L=6$ мкГн, $C=66$ пФ

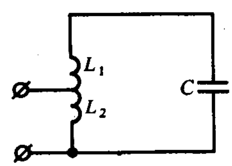
Характерный вид графика АЧХ свидетельствует о том, что рассмотренный колебательный контур является узкополосной частотно-избирательной системой. Действительно, в рассматриваемом случае отношение полосы пропускания к резонансной частоте

$\Pi_{0.707}/f_{рез} = 1/Q = 8 \cdot 10^{-3} \ll 1.$

Часто используют параллельные колебательные контуры с неполным включением. Например, внешние цепи могут быть подключены к отводу в индуктивном элементе. Входное сопротивление такого контура вычисляется по формуле (9.11), в которую следует подставить величину резонансного сопротивления

$R_{рез} = k^2_{вкл}\ \rho Q,$

где $k_{вкл} = L_2/(L_1 + L_2)$ — коэффициент включения контура без учета индуктивной связи.

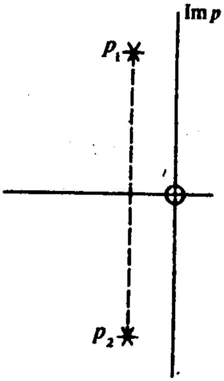



Неполное включение контура позволяет снижать величину резонансного сопротивления без расширения полосы пропускания

**Нуль-полюсное представление характеристик колебательных контуров.** Рассмотрим формулу (9.11) для входного сопротивления параллельного контура, выразив обобщенную расстройку $\xi$ через текущее значение частоты. При этом

$$Z(j\omega) = \frac{R_{рез}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_{рез}} - \frac{\omega_{рез}}{\omega}\right)}. \tag{9.14}$$

Перейдя от частотной переменной $j\omega$ к комплексной частоте $p$, получим операторное сопротивление контура




$$Z(p)=\frac{R_{\text{рез}}}{1+Q\left(\dfrac{p}{\omega_{\text{рез}}}+\dfrac{\omega_{\text{рез}}}{p}\right)}=\frac{\dfrac{p}{C}}{p^2+\dfrac{\omega_{\text{рез}}}{Q}p+\omega^2_{\text{рез}}}.$$

Сопротивление $Z(p)$ имеет единственный нуль при $p=0$ и два комплексно-сопряженных полюса

$$p_{1,2}=-\frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q}\pm j\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,\omega_{\text{рез}}. \tag{9.15}$$

Полюсы расположены в левой полуплоскости (система устойчива) и тем ближе к мнимой оси, чем выше добротность $Q$. Это свойство является общим для любых частотно-избирательных систем.

**добротность полюса**

Иногда вводят особую числовую характеристику — так называемую *добротность полюса* $Q_{\text{пол}}$, определяя ее как отношение абсолютных значений мнимой и вещественной частей координат полюса. Как следует из (9.15), в данном случае

$$Q_{\text{пол}}=\left|\operatorname{Im}p_{1,2}\right|/\left|\operatorname{Re}p_{1,2}\right|\approx 2Q.$$

**Резонансный усилитель малых колебаний.** Данная узкополосная система совмещает в себе функции усилителя и линейного частотного фильтра (рис. 9.3).

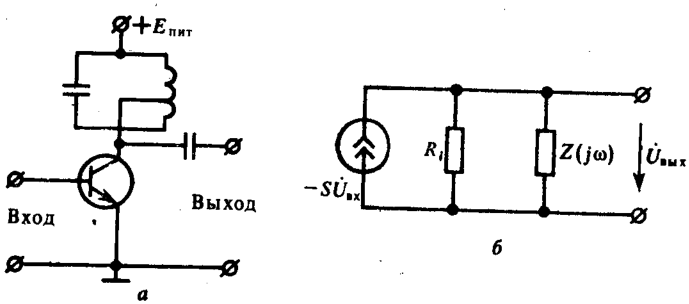



Рис. 9.3. Резонансный усилитель малых колебаний:
*а* — принципиальная схема; *б* — эквивалентная схема замещения

Отличие от усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой (см. гл. 8) состоит в том, что здесь нагрузкой электронного прибора служит параллельный колебательный контур; включение контура в общем случае может быть неполным.

Обращаясь к эквивалентной схеме замещения, видим, что ток $-S\dot{U}_{вх}$, поступающий от управляемого источника, протекает по сопротивлению

$$Z_{экв}(j\omega)=\frac{Z(j\omega)R_i}{Z(j\omega)+R_i}$$

и создает на нем падение напряжения, являющееся выходным сигналом усилителя. Несложные преобразования показывают (см. формулу (9.11)), что

$$Z_{экв}(j\omega)=\frac{R_{рез.экв}}{1+j\xi_{экв}}, \tag{9.16}$$

где

$$R_{рез.экв}=\frac{R_{рез}}{1+R_{рез}/R_i} \tag{9.17}$$

есть эквивалентное сопротивление контура усилителя при резонансе с учетом внутреннего сопротивления источника

$$\xi_{экв}=\frac{\xi}{1+R_{рез}/R_i}.$$

Можно считать, что влияние внутреннего сопротивления заключено в том, что добротность колебательной системы уменьшается и становится равной эквивалентной добротности

$$\boxed{Q_{экв}=\frac{Q}{1+R_{рез}/R_i}} \tag{9.18}$$

Согласно формуле (9.18), для ослабления шунтирующего действия электронного прибора на колебательную систему без расширения полосы пропускания усилителя следует уменьшать резонансное сопротивление $R_{рез}$, применяя неполное включение контура. Поскольку комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе усилителя

$$\dot{U}_{вых}=-SZ_{экв}\dot{U}_{вх},$$

то частотный коэффициент передачи системы

$$K(j\xi_{экв})=\frac{-SR_{рез.экв}}{1+j\xi_{экв}}. \tag{9.19}$$

▲ решите задачу 5

Отсюда следует, что АЧХ и ФЧХ усилителя соответственно имеют вид

$$|K(j\omega)| = \frac{SR_{\text{рез.экв}}}{\sqrt{1+\frac{4Q^2_{\text{экв}}(\omega-\omega_{\text{рез}})^2}{\omega^2_{\text{рез}}}}}, \tag{9.20}$$

$$\varphi_K(\omega)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2Q_{\text{экв}}(\omega-\omega_{\text{рез}})}{\omega_{\text{рез}}}. \tag{9.21}$$

**Пример 9.2.** *Усилитель, собранный по схеме, изображенной на рис. 9.3, имеет следующие параметры:* $f_{\text{рез}}=28$ МГц, $Q=95$, $\rho=430$ Ом, $k_{\text{вкл}}=0.6$, $S=20$ мА/В, $R_i=15$ кОм. *Определить коэффициент усиления на резонансной частоте и полосу пропускания усилителя.*

Резонансное сопротивление колебательной системы

$R_{\text{рез}}=k^2_{\text{вкл}}\rho Q=0.36\cdot0.43\cdot95=14.71$ кОм.

Эквивалентное сопротивление контура при резонансе с учетом шунтирующего действия транзистора

$$R_{\text{рез. экв}}=\frac{14.71}{1+14.71/15}=7.43 \text{ кОм}.$$

При настройке усилителя в резонанс $\xi_{\text{экв}}=0$ и поэтому из (9.19) следует, что резонансный коэффициент усиления

$K_{\text{рез}}=SR_{\text{рез. экв}}=148.6,$

или в логарифмических единицах

$\Delta_{\text{рез}}=20\lg K_{\text{рез}}=43.44$ дБ.

Полосу пропускания усилителя по уровню 0.707 определяем на основании (9.9):

$\Pi_{0.707}=f_{\text{рез}}/Q_{\text{экв}}=0.584$ МГц.

**Многоконтурные частотно-избирательные системы.** Рассмотренные выше простейшие виды узкополосных радиотехнических цепей обладают существенным недостатком — невысокой частотной избирательностью. Это свойство проявляется в том, что за границами полосы пропускания значения АЧХ таких цепей стремятся к нулю недостаточно быстро. Поэтому выходное колебание содержит в себе не только полезный сигнал, спектр которого располагается вблизи максимума АЧХ, но и некоторую, порой значительную долю мешающих сигналов, шумов и т. д. со спектрами, лежащими на достаточном удалении от той частоты, на которую настроен фильтр.

Стремясь повысить частотную избирательность фильтров, прибегают к многоконтурным схемам, у которых форма АЧХ близка к прямоугольной

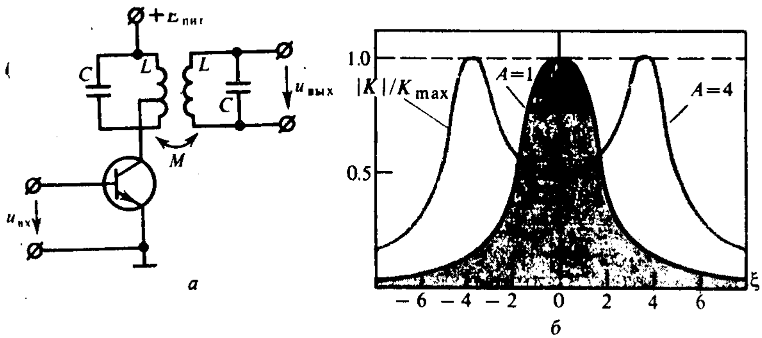



Рис. 9.4. Резонансный усилитель со связанными контурами:
*а* — принципиальная схема; *б* — графики АЧХ при различных факторах связи

Простейшим многоконтурным частотно-избирательным фильтром является система двух связанных колебательных контуров. Принцип работы такой схемы изучается в курсе теории электрических цепей. На рис. 9.4, *а* изображена принципиальная схема резонансного усилителя, нагрузкой которого является система двух одинаковых индуктивно связанных контуров.

Важными параметрами этой системы являются коэффициент связи $k_c = M/L$ и так называемый фактор связи $A = k_c Q$. Частотный коэффициент передачи данного усилителя вычисляется по формуле

$$|K(j\xi)| = \frac{k_{вкл}\, A S R_{рез.экв}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \tag{9.22}$$

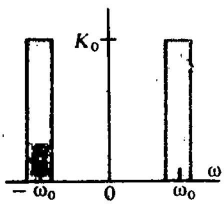
Кривые АЧХ, построенные в соответствии с (9.22), изображены на рис. 9.4, *б* при различных факторах связи $A$. Отметим, что если $A > 1$, то резонансная кривая в полосе пропускания имеет провал, глубина которого растет с увеличением фактора связи. Если сравнить АЧХ одноконтурного и двухконтурного усилителей, то можно заметить, что при равных добротностях колебательных систем двухконтурный усилитель обладает большей крутизной скатов резонансной кривой, т. е. способен обеспечить бóльшую частотную избирательность.

Применяя фильтры с большим числом взаимно связанных колебательных систем, можно создать весьма совершенные частотно-избирательные устройства.

В последнее время в радиотехнике все шире используют частотно-избирательные фильтры, построенные на новых схемотехнических принципах, — так называемые активные фильтры (см. гл. 14). Большие успехи достигнуты в области конструирования частотных фильтров, работа которых основана на использовании волновых явлений в твердых телах. Новое направление радиотехники, получившее название акустоэлектроники, сулит заманчивые перспективы создания миниатюрных и надежных частотно-избирательных систем.

**Идеализированные модели частотно-избирательных устройств.** При теоретическом исследовании частотно-избирательных узкополосных цепей целесообразно применять их упрощенные модели, которые позволяют правильно описывать существенные особенности поведения фильтров, опуская мало существенные и к тому же трудно анализируемые подробности.

● идеальный полосовой фильтр



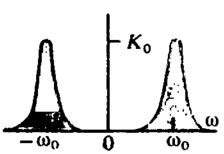

Наиболее простой моделью из этого класса служит гипотетический *идеальный полосовой фильтр*, коэффициент передачи которого постоянен и равен $K_0$ в пределах полосы пропускания:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при} \quad -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ K_0 & \text{при} \quad \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0 & \text{на остальных частотах.} \end{cases} \qquad (9.23)$$

Другой распространенной теоретической моделью узкополосной системы является так называемый *гауссов радиофильтр*, АЧХ которого представляет собой колоколообразную гауссову кривую, симметричную относительно частоты $\omega_0$. Частотный коэффициент передачи гауссова радиофильтра

● гауссов радиофильтр

$$K(j\omega) = K_0 e^{-b(\omega+\omega_0)^2} + K_0 e^{-b(\omega-\omega_0)^2}. \qquad (9.24)$$




Здесь $b$ — некоторая постоянная величина, определяющая частотные свойства фильтра. Первое слагаемое в (9.24) обусловливает «всплеск» коэффициента передачи в области отрицательных частот, а второе — в области положительных частот. Если $b\omega_0^2 \gg 1$, то фильтр узкополосен и эффект перекрытия частотных характеристик, отвечающих отрицательным и положительным частотам, не наблюдается.

## 9.2 Частотно-избирательные цепи при широкополосных входных воздействиях

Задача о поведении узкополосной частотно-избирательной цепи, возбуждаемой широкополосным входным сигналом, интересна в связи с тем, что сигналы помех часто представляют собой короткие импульсы. Эффективная ширина спектра таких сигналов может значительно превышать ширину полосы пропускания частотно-избирательной системы.

**Понятие широкополосного сигнала.** Пусть $K(j\omega)$ — коэффициент передачи частотно-избирательной цепи, способной выделять спектральные компоненты входного сигнала, сосредоточенные в окрестностях частот $\pm\omega_0$. Входное колебание $u_{вх}(t)$ со спектральной плотностью $S_{вх}(\omega)$ называют *широкополосным сигналом* применительно к данной цепи, если функция $S_{вх}(\omega)$ может приближенно считаться постоянной в пределах полосы пропускания системы. При этом

▲ решите задачу 6

$$u_{вых}(t) \approx \frac{S_{вх}(-\omega_0)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega + \frac{S_{вх}(\omega_0)}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{9.25}$$

Согласно (9.25), *форма выходного сигнала в данном случае определяется не характером входного колебания, а лишь частотным коэффициентом передачи системы.* Спектральная плотность входного сигнала в пределах полосы пропускания системы устанавливает масштабный уровень выходного отклика.

**Импульсная характеристика частотно-избирательной цепи.** Сигналом с предельно широким спектром является дельта-импульс, для которого $S_{вх}(\omega)=1$. Выходным сигналом в данном случае служит импульсная характеристика $h(t)$. Согласно (9.25),

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{9.26}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (9.26) и перейдем в нем от переменной интегрирования $\omega$ к новой частотной переменной $\Omega$:

$$\omega = -\omega_0 - \Omega.$$

Такой переход означает смещение коэффициента передачи $K(j\omega)$ из окрестности частоты $-\omega_0$ в окрестность точки $\Omega=0$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{-e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int\limits_{+\infty}^{-\omega_0} K\left[-j(\omega_0+\Omega)\right]e^{-j\Omega t}\,d\Omega = \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{\infty} K\left[-j(\omega_0+\Omega)\right]e^{-j\Omega t}\,d\Omega. \tag{9.27}$$

Поскольку рассматриваемая цепь узкополосная, модуль частотного коэффициента передачи резко уменьшается с ростом величины $\Omega$. Это означает, что в последнем интеграле из (9.27) нижний предел $-\omega_0$ можно заменить на $-\infty$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0+\Omega)]e^{-j\Omega t}\,d\Omega. \quad (9.28)$$

Совершенно аналогично, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0+\Omega$, второй интеграл из (9.26) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi}\int_{0}^{\infty} K[j(\omega_0+\Omega)]\,e^{j\Omega t}\,d\Omega. \quad 9.29)$$

Так как комплексно-сопряженные выражения (9.28) и (9.29) складываются, то выражение импульсной характеристики узкополосной системы приобретает вид

$$\boxed{h(t) = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0+\Omega)]\,e^{j\Omega t}\,d\Omega\, e^{j\omega_0 t}\right].} \quad (9.30)$$

**Низкочастотный эквивалент частотно-избирательной цепи.** Этим термином принято называть воображаемую систему, частотный коэффициент передачи которой получается путем смещения частотного коэффициента передачи реальной узкополосной цепи из окрестности частоты $\omega_0$ в окрестность нулевой частоты, т. е.

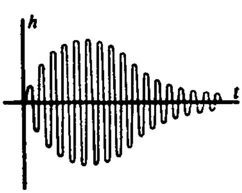
$$\boxed{K_{нч}(j\Omega) = K[j(\omega_0+\Omega)].} \quad (9.31)$$

Интеграл, входящий в (9.30), является импульсной характеристикой НЧ-эквивалента

$$h_{нч}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{нч}(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega. \quad (9.32)$$

Поэтому

$$\boxed{h(t) = \mathrm{Re}[2h_{нч}(t)e^{j\omega_0 t}],} \quad (9.33)$$



**Типичный вид импульсной характеристики частотно-избирательной цепи**

откуда следует, что функция $2h_{нч}(t)$ является комплексной огибающей импульсной характеристики реальной узкополосной цепи. Из формулы (9.33) следует, что в общем случае импульсная характеристика частотно-избирательной системы представляет собой квазигармоническое колебание, огибающая и начальная фаза которого медленно (в масштабе времени $T=2\pi/\omega_0$) изменяются во времени.

**Пример 9.3.** *Низкочастотный эквивалент параллельного колебательного контура.*

Здесь частотным коэффициентом передачи системы является входное сопротивление

$$Z(j\omega)=\frac{R_{\text{рез}}}{1+j\dfrac{2Q(\omega-\omega_{\text{рез}})}{\omega_{\text{рез}}}}\,. \tag{9.34}$$

Коэффициент передачи НЧ-эквивалента получим, выполнив в (9.34) замену переменной $\omega=\omega_{\text{рез}}+\Omega$:

$$Z(j\Omega)=\frac{R_{\text{рез}}}{1+j\dfrac{2Q\Omega}{\omega_{\text{рез}}}}\,. \tag{9.35}$$

С точностью до масштабного множителя $R_{\text{рез}}$ получен частотный коэффициент передачи динамической системы 1-го порядка (подобной $RC$-цепи) с постоянной времени

**постоянная времени контура**

$$\boxed{\tau_{\text{к}}=2Q/\omega_{\text{рез}},} \tag{9.36}$$

называемой *постоянной времени колебательного контура.*

Импульсная характеристика подобной системы была найдена в гл. 8 при изучении свойств $RC$-цепи:

$$h_{\text{нч}}(t)=(R_{\text{рез}}/\tau_{\text{к}})\,e^{-t/\tau_{\text{к}}}\quad\text{при}\quad t>0. \tag{9.37}$$

Таким образом, импульсная характеристика параллельного контура

$$h(t)=(R_{\text{рез}}\,\omega_{\text{рез}}/Q)\,e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos\omega_{\text{рез}}t. \tag{9.38}$$

Поскольку $R_{\text{рез}}\,\omega_{\text{рез}}/Q=1/C$, где $C$ — емкость колебательного контура, то полученный здесь результат полностью совпадает с тем, который был найден в примере 8.20.

**Пример 9.4.** *Найти импульсную характеристику идеализированной узкополосной системы, частотный коэффициент передачи которой*

$$K(j\omega)=K_0e^{-b(\omega-\omega_0)}\,\sigma(\omega-\omega_0)$$

*при* $\omega>0$.

Перенеся эту функцию в окрестность нулевой частоты, получаем коэффициент передачи НЧ-эквивалента

$$K_{\text{нч}}(j\Omega)=K_0e^{-b\Omega}\,\sigma(\Omega), \tag{9.39}$$

откуда соответствующая импульсная характеристика

$$h_{\text{нч}}(t)=\frac{K_0}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(b-jt)\Omega}\,d\Omega=\frac{K_0}{2\pi(b-jt)}\,. \tag{9.40}$$

Заметим, что $h_{нч}(t)$ — комплекснозначная функция, поэтому низкочастотный эквивалент рассматриваемого фильтра не может быть физически реализуемой цепью. Однако это отнюдь не мешает получить импульсную характеристику исходной системы, используя формулу (9.33):

$$h(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{K_0}{\pi(b - jt)} e^{j\omega_0 t}\right] = \frac{K_0}{\pi}\,\frac{1}{b^2 + t^2}\,(b\cos\omega_0 t - t\sin\omega_0 t).$$

**Пример 9.5.** *Вычислить импульсную характеристику двухкаскадного резонансного усилителя, схема которого изображена на рис. 9.5.*

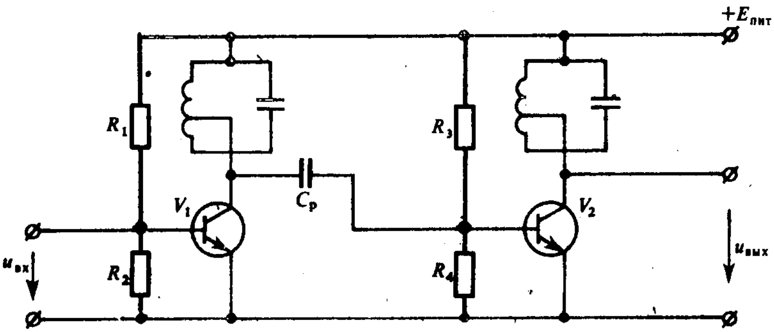



Рис. 9.5. Принципиальная схема двухкаскадного усилителя (элементы, показанные черным цветом, выполняют вспомогательные функции):
$R_1$ — $R_4$ — резисторы, предназначенные для подачи начальных смещений на базы транзисторов $V_1$, $V_2$; $C_р$ — разделительный конденсатор

Положим для простоты, что оба каскада настроены на одну и ту же резонансную частоту $\omega_{рез}$, обладают одинаковыми резонансными коэффициентами усиления $K_{рез}$ и одинаковыми постоянными времени $\tau_к$. Тогда частотный коэффициент передачи системы

$$K(j\omega) = \frac{K^2_{рез}}{[1 + j\tau_к(\omega - \omega_{рез})]^2}$$

откуда

$$K_{нч}(j\Omega) = K^2_{рез}/(1 + j\Omega\tau_к)^2.$$

Заменив частотную переменную $j\Omega$ на комплексную частоту $p$, имеем

$$K_{нч}(p) = \frac{K^2_{рез}}{(1 + p\tau_к)^2} = \frac{K^2_{рез}/\tau^2_к}{(p + 1/\tau_к)^2}.$$

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа данной передаточной функции отвечает импульсная характеристика

$$h_{нч}(t) = \frac{K^2_{рез}}{\tau^2_к}\, t e^{-t/\tau_к},$$

откуда следует выражение импульсной характеристики двухкаскадного усилителя

$$h(t)=\frac{2K_{\text{рез}}^2}{\tau_{\text{к}}}\left(\frac{t}{\tau_{\text{к}}}\right)e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos\omega_{\text{рез}}t. \tag{9.41}$$

Соответствующий график приведен на рис. 9.6.

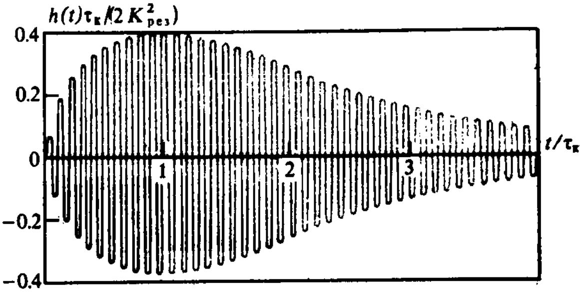



Рис. 9.6. Импульсная характеристика двухкаскадного резонансного усилителя

Полезно сравнить этот результат с импульсной характеристикой одиночного параллельного контура, полученной в примере 8.20. Обращает на себя внимание «затягивание» выходного импульса во времени, происходящее из-за большей инерционности двухконтурной системы.

---

**Общий случай.** Предположим, что на вход некоторой частотно-избирательной системы воздействует произвольный широкополосный сигнал со спектральной плотностью

$$S_{\text{вх}}(\omega)=A(\omega)+jB(\omega).$$

Пусть $u_{\text{вх}}(t)$ — вещественная функция, тогда

$$A(\omega)=A(-\omega);\quad B(\omega)=-B(-\omega).$$

Представим выходное колебание в виде суммы:

$$u_{\text{вых}}(t)=u_{\text{вых}}^{(1)}(t)+ju_{\text{вых}}^{(2)}(t). \tag{9.42}$$

Здесь

$$u_{\text{вых}}^{(1)}(t)=\frac{A(-\omega_0)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega+$$

$$+\frac{A(\omega_0)}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=2A(\omega_0)\,\mathrm{Re}\left[h_{\text{нч}}(t)e^{j\omega_0 t}\right]. \tag{9.43}$$

Аналогично,

$$u_{\text{вых}}^{(2)}(t)=\frac{B(-\omega_0)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega+$$

▲ решите задачу 7

$$+\frac{B(\omega_0)}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega=j2B(\omega)\,\mathrm{Im}[h_{\text{нч}}(t)e^{j\omega_0 t}]. \tag{9.44}$$

Подставляя (9.43) и (9.44) в (9.42), получаем окончательный результат:

$$\boxed{\begin{aligned}u_{\text{вых}}(t)=2\Big\{&A(\omega_0)\mathrm{Re}\,[h_{\text{нч}}(t)e^{j\omega_0 t}]-\\ &-B(\omega_0)\,\mathrm{Im}[h_{\text{нч}}(t)\,e^{j\omega_0 t}]\Big\}.\end{aligned}} \tag{9.45}$$

Естественно, что из (9.45) вытекает как частный случай формула (9.33), описывающая импульсную характеристику узкополосной цепи.

**Физический смысл спектрального разложения.** Положим для простоты, что $h_{\text{нч}}(t)$ — вещественная функция, и представим формулу (9.45) так:

$$u_{\text{вых}}(t)=2\,h_{\text{нч}}(t)\,[A(\omega_0)\cos\omega_0 t-$$

$$-B(\omega_0)\sin\omega_0 t\,]=2h_{\text{нч}}(t)\sqrt{A^2+B^2}\,\cos(\omega_0 t+\varphi), \tag{9.46}$$

где $\varphi=\mathrm{arctg}\,(B/A)$, а $\sqrt{A^2+B^2}=|S_{\text{вх}}(\omega_0)|$.

Таким образом мы пришли к выводу: отклик узкополосной системы на широкополосный сигнал пропорционален абсолютному значению спектральной плотности входного сигнала в той точке на оси частот, которая соответствует центральной частоте полосы пропускания системы.

Отсюда следует путь осуществления аппаратурного спектрального анализа сигналов. На рис. 9.7 приведена структурная схема *анализатора спектра*, построенного по так называемому параллельному принципу.

Устройство состоит из ряда узкополосных фильтров, полосы пропускания которых взаимно не перекрываются. Проводя одновременное измерение амплитуд выходных колебаний, можно получить информацию об интенсивности спектральных компонент входного сигнала в различных участках оси частот.

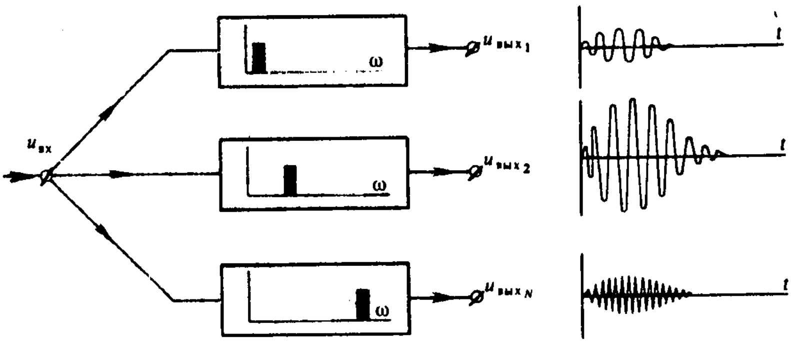



Рис. 9.7. Структурная схема анализатора спектра сигналов (амплитуды выходных колебаний фильтров пропорциональны модулям спектральной плотности)

Сформулированный здесь принцип аппаратурного спектрального анализа имеет не только прикладное, но и большое принципиальное значение. В частности, он позволяет установить физический смысл поведения спектров сигналов, изученных в гл. 2. Например, было показано, что спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса длительностью $\tau_и$ обращается в нуль на всех частотах $\omega_n = 2\pi n/\tau_и$ ($n = 1, 2, ...$). Предположим, что данный видеоимпульс действует на вход весьма узкополосной колебательной системы, настроенной на одну из этих частот. Период собственных колебаний систем $T_n = 2\pi/\omega_n = \tau_и/n$ находится в целократном соотношении с длительностью импульса. Колебательная система, получив «толчок» от фронта импульса, через время, кратное периоду собственных колебаний, получит такой же «толчок», но в противоположном направлении, от среза импульса. В результате будет наблюдаться взаимное погашение этих реакций. Именно об этом говорят нулевые значения спектральной плотности видеоимпульса в некоторых точках оси частот.

Прекрасное изложение вопросов, связанных с физическими аспектами спектральных разложений, читатель найдет в книге [7].

## 9.3 Частотно-избирательные цепи при узкополосных входных воздействиях

В типичной ситуации, например при приеме модулированных сигналов, на вход частотно-избирательного линейного фильтра подается полезный сигнал, спектральная плотность которого имеет четко выраженный максимум в пределах полосы пропускания цепи. При этом, как правило, резонансная частота колебательной системы совпадает с частотой несущего колебания (симметричная настройка).

■

причина искажений сигнала в частотно-избирательных системах

Если спектр входного радиосигнала был бы строго ограничен областью частот, в пределах которой частотный коэффициент передачи фильтра неизменен, то выходной сигнал являлся бы просто масштабной копией входного воздействия. Однако неизбежная неидеальность АЧХ и ФЧХ частотно-избирательной системы ведет к искажениям формы выходного сигнала. Ниже излагается метод, позволяющий вычислять сигналы на выходе частотно-избирательных цепей, возбуждаемых узкополосными колебаниями.

**Основные соотношения.** Рассмотрим произвольную узкополосную цепь, частотный коэффициент передачи которой $K(j\omega)$ существенно отличен от нуля лишь в окрестности точек $\pm\omega_0$ на оси частот. Предположим, что входным сигналом служит узкополосное (квазигармоническое) колебание с центральной частотой $\omega_0$. Это означает, что в формуле

$$u_{вх}(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{U}_{вх}(t)\,e^{j\omega_0 t}\right] \qquad (9.47)$$

комплексная огибающая $\tilde{U}_{вх}(t)$ изменяется медленно по сравнению с колебанием $\cos\omega_0 t$. Обозначим соответствие между сигналами и их спектрами:

$$u_{вх}(t) \longleftrightarrow S_{вх}(\omega); \quad \tilde{U}_{вх}(t) \longleftrightarrow G_{вх}(\omega),$$

причем (см. гл. 5) спектры входного сигнала и его комплексной огибающей связаны следующим образом:

$$S_{вх}(\omega) = \frac{1}{2}G_{вх}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}G^*_{вх}(-\omega-\omega_0).$$

Отсюда, используя основную формулу спектрального метода, получаем следующее выражение для выходного сигнала:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} G^*_{вх}(-\omega-\omega_0)K(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} G_{вх}(\omega-\omega_0)\,K(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega. \qquad (9.48)$$

Выполнив в первом интеграле замену переменной $\omega = -\omega_0 - \Omega$, преобразуем его:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} G_{вх}^{*}(-\omega-\omega_0)K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{вх}^{*}(\Omega)K\left[-j(\omega_0+\Omega)\right]e^{-j\Omega t}\,d\Omega\, e^{-j\omega_0 t}. \tag{9.49}$$

Аналогично, используя подстановку $\omega=\omega_0+\Omega$, преобразуем второй интеграл в (9.48):

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} G_{вх}(\omega-\omega_0)\,K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{вх}(\Omega)K\left[j(\omega_0+\Omega)\right]e^{j\Omega t}\,d\Omega\, e^{j\omega_0 t}. \tag{9.50}$$

При суммировании правых частей (9.49) и (9.50) заметим, что эти два выражения являются комплексно-сопряженными. Кроме того, величина $K[j(\omega_0+\Omega)]$ на основании (9.31) является частотным коэффициентом передачи НЧ-эквивалента узкополосной цепи. Поэтому

$$u_{вых}(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{вх}(\Omega)\,K_{нч}(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega e^{j\omega_0 t}\right].$$

Отсюда видно, что комплексной огибающей выходного сигнала служит выражение

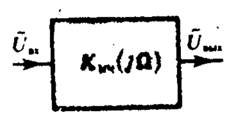
$$\tilde{U}_{вых}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{вх}(\Omega)\,K_{нч}(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega. \tag{9.51}$$

Его следует трактовать так: *комплексная огибающая выходного сигнала есть медленно меняющееся во времени колебание со спектральной плотностью*

$$\boxed{G_{вых}(\Omega)=G_{вх}(\Omega)K_{нч}(j\Omega)} \tag{9.52}$$

Чтобы решить задачу о прохождении узкополосного сигнала через частотно-избирательную систему, вначале следует найти результат воздействия входной комплексной огибающей на НЧ-эквивалент исходной системы. Заключительным этапом явится переход к физическому выходному сигналу:

$$\boxed{u_{вых}(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{U}_{вых}(t)e^{j\omega_0 t}\right].} \tag{9.53}$$




Равенство (9.51) соответствует спектральному методу нахождения сигнала на выходе НЧ-эквивалента. В равной мере могут быть использованы и другие известные методы, например операторный метод, а также метод интеграла Дюамеля, согласно которому

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \tilde{U}_{\text{вх}}(\tau)\, h_{\text{нч}}(t-\tau)\,d\tau, \tag{9.54}$$

где $h_{\text{нч}}(t)$ — импульсная характеристика НЧ-эквивалента.

**Прохождение АМ-сигнала через одноконтурный резонансный усилитель.** Рассмотрим задачу о воздействии однотонального АМ-колебания

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0\,(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \tag{9.55}$$

на однокаскадный резонансный усилитель с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{-K_{\text{рез}}}{1 + j\tau_{\text{к}}(\omega - \omega_{\text{рез}})}. \tag{9.56}$$

Сделаем важное упрощающее предположение — будем считать, что резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ и частота несущего колебания $\omega_0$ совпадают. Комплексная огибающая входного сигнала

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_0\,(1 + M\cos\Omega t). \tag{9.57}$$

Коэффициент передачи НЧ-эквивалента усилителя

$$K(j\Omega) = -K_{\text{рез}}/(1 + j\Omega\tau_{\text{к}}). \tag{9.58}$$

Выходную комплексную огибающую можно найти из (9.57) и (9.58), применив обычный метод комплексных амплитуд, известный из теории цепей:

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}}U_0 - \frac{K_{\text{рез}}U_0 M}{\sqrt{1+\Omega^2\tau_{\text{к}}^2}}\cos(\Omega t - \vartheta),$$

где $\vartheta = \operatorname{arctg}\Omega\tau_{\text{к}}$.

Подставляя это выражение в (9.53), находим окончательно

$$u_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}}U_0\left[1 + \frac{M}{\sqrt{1+\Omega^2\tau_{\text{к}}^2}}\cos(\Omega t - \vartheta)\right]\cos\omega_0 t.$$

Так как постоянная времени контура $\tau_{\text{к}} = 2Q_{\text{экв}}/\omega_{\text{рез}}$, эту зависимость можно записать в виде

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}}U_0\left[1 + \frac{M}{\sqrt{1+\xi_\Omega^2}}\cos(\Omega t - \vartheta)\right]\cos\omega_0 t,} \tag{9.59}$$

где $\xi_\Omega = 2Q_{экв}\,\Omega/\omega_{рез}$ — обобщенная расстройка контура усилителя на частоте верхнего бокового колебания.

Итак, на выходе усилителя наблюдается колебание, которое, будучи усиленным по амплитуде, по-прежнему является АМ-сигналом. Отличие от входного сигнала заключается в меньшем коэффициенте модуляции:

▲ решите задачу 8

$$\boxed{M_{вых} = M_{вх} / \sqrt{1+\xi_\Omega^2}\,.} \tag{9.60}$$

Кроме того, огибающая выходного сигнала запаздывает относительно огибающей сигнала на входе на время $t_{зап} = \vartheta_\Omega/\Omega$.

**Пример 9.6.** *Пусть АМ-сигнал с параметрами $M=0.8$, $\omega_0 = 5\cdot 10^6$ 1/с, $\Omega = 3\cdot 10^4$ 1/с проходит через усилитель, настроенный на несущую частоту. Контур усилителя имеет эквивалентную добротность $Q_{экв}=75$.*

В этом случае $\xi_\Omega = 2\cdot 75\cdot 3\cdot 10^4/5\cdot 10^6 = 0.9$, откуда по формуле (9.60) находим

$$M_{вых} = 0.8 \,/\, \sqrt{1+0.81} = 0.595.$$

Итак, наблюдается ощутимое снижение глубины модуляции.

Поскольку $\mathrm{arctg}\,0.9 = 0.733$ рад, то величина задержки огибающей составит $t_{зап} = 0.733/(3\cdot 10^4) = 24.43$ мкс.

**Воздействие импульса включения гармонической э. д. с.** Во многих радиотехнических системах (радиолокация, многоканальная радиосвязь) полезная информация передается с помощью последовательностей прямоугольных радиоимпульсов. Проходя через резонансные частотно-избирательные системы, являющиеся неотъемлемыми частями радиоприемных устройств, такие импульсы несколько искажаются. Для того чтобы оценить степень этих нежелательных искажений, решим задачу о сигнале на выходе однокаскадного резонансного усилителя с коэффициентом передачи (9.56) в условиях, когда на входе действует сигнал

$$u_{вх}(t) = U_m \cos\omega_0 t\,\sigma(t).$$

Если $\omega_{рез} = \omega_0$, то, выбирая эту частоту в качестве опорной, получаем следующее выражение для комплексной огибающей:

$$\tilde{U}_{вх}(t) = U_m\,\sigma(t). \tag{9.61}$$

Задача о воздействии сигнала (9.61) на систему с коэффициентом передачи вида (9.58) была рассмотрена в гл. 8 при изучении переходной характеристики $RC$-цепи. Поэтому можно воспользоваться уже известным результатом и записать

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}} U_m \left(1 - e^{-t/\tau_к}\right) \sigma(t). \quad (9.62)$$

Выходной сигнал усилителя

▲ решите задачу 9

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{рез}} U_m \left(1 - e^{-t/\tau_к}\right) \cos\omega_0 t.} \quad (9.63)$$

График, построенный по формуле (9.63), представлен на рис. 9.8.

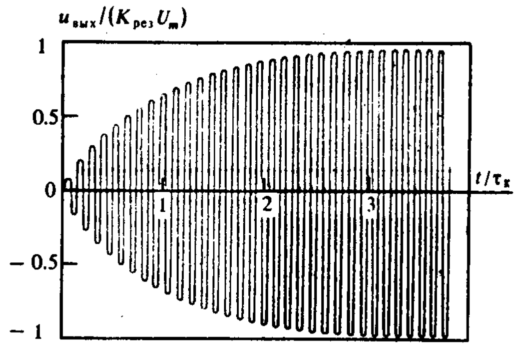



Рис. 9.8. Процесс установления колебаний на выходе резонансного усилителя, настроенного на частоту сигнала

● время установления колебательной системы

Мгновенная амплитуда выходного сигнала достигает уровня 0.9 от стационарного значения $K_{\text{рез}}\, U_m$ за время установления

$$\boxed{\tau_{\text{уст}} = 2.303\tau_к = \frac{4.606\, Q_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}.} \quad (9.64)$$

**Влияние расстройки.** Рассмотрим предыдущую задачу в более общем виде, предполагая, что частота гармонического сигнала отличается от резонансной частоты контура на величину $\delta\omega$:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos[(\omega_{\text{рез}} + \delta\omega)\, t] \text{ и } \tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_m e^{j\delta\omega t}\, \sigma(t).$$

Сигнал на выходе НЧ-эквивалента одноконтурного резонансного усилителя проще всего найти, воспользовавшись интегралом Дюамеля, в который следует подставить импульсную характеристику низкочастотного эквивалента усилителя

$$h_{\text{нч}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}}}{\tau_к} e^{-\frac{t}{\tau_к}}\, \sigma(t). \quad (9.65)$$

По формуле (9.54) находим

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_\text{к}} \int\limits_0^t e^{j\delta\omega\tau} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\text{к}}} d\tau =$$

$$= \frac{-K_{\text{рез}} U_m}{1+j\delta\omega\tau_\text{к}} \left[ e^{j\delta\omega t} - e^{-\frac{t}{\tau_\text{к}}} \right]. \qquad (9.66)$$

Физическая огибающая колебательного процесса на выходе резонансного усилителя описывается модулем выходной комплексной огибающей:

$$U_{\text{вых}}(t) = \left| \tilde{U}_{\text{вых}}(t) \right| = \frac{K_{\text{рез}} U_m}{\sqrt{1+(\delta\omega\tau_\text{к})^2}} \times$$

$$\times \sqrt{1 - 2e^{-\frac{t}{\tau_\text{к}}} \cos\delta\omega t + e^{-\frac{2t}{\tau_\text{к}}}} \qquad (9.67)$$

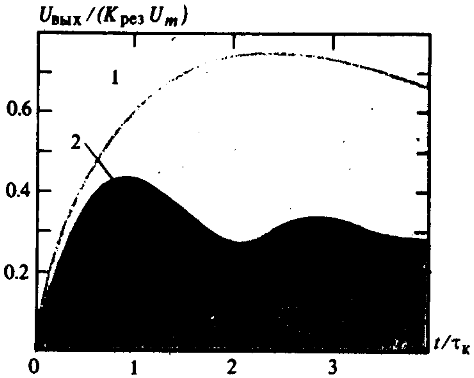


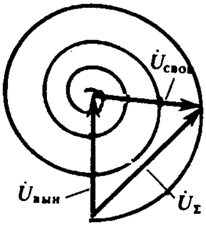

Рис. 9.9. Процесс установления огибающей в резонансном усилителе при наличии расстройки:

*1* — при $\delta\omega\tau_\text{к} = 1$; *2* — при $\delta\omega\tau_\text{к} = 3$

На рис. 9.9 изображены кривые, построенные по формуле (9.67) при различных значениях расстройки $\delta\omega$.

Таким образом, расстройка между резонансной частотой колебательной системы и частотой гармонического заполнения выходного импульса приводит к немонотонному изменению огибающей сигнала на выходе.

Физическое толкование этого факта таково: выходной сигнал усилителя складывается из вынужденных колебаний, имеющих частоту внешнего источника, и экспоненциально затухающих во времени свободных колебаний с частотой, равной собственной частоте контура. В процессе колебаний вектор $\dot{U}_{\text{своб}}$




Сложение свободных и вынужденных колебаний

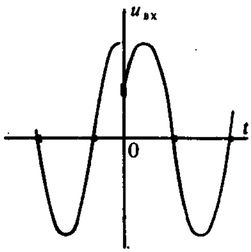
вращается с разностной частотой относительно вектора $\dot U_{\text{вын}}$ Огибающая выходного сигнала, пропорциональная длине суммарного вектора $\dot U_{\Sigma}$, оказывается переменной во времени, стремясь в пределе к амплитуде вынужденных колебаний.

Интересно, что в процессе установления непостоянной оказывается и мгновенная частота выходного сигнала. Используя формулу (9.66), на основании принципа вычисления мгновенной частоты, изложенного в гл. 5, имеем

$$\omega(t)=\omega_{\text{рез}}+\frac{d}{dt}\arg\widetilde{U}_{\text{вых}}(t)=$$

$$=\omega_{\text{рез}}+\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{\sin\delta\omega t}{\cos\delta\omega t-e^{-t/\tau_{\text{к}}}} \qquad (9.68)$$

Естественно, что при $t\to\infty$, когда нестационарный процесс в усилителе практически закончится, частота выходного сигнала становится равной частоте входного воздействия.




**Воздействие фазоманипулированных сигналов на резонансный усилитель.** Как уже упоминалось, в радиотехнике часто применяются радиосигналы, представляющие собой отрезки гармонических колебаний, начальная фаза которых претерпевает скачкообразные изменения в дискретные моменты времени. Подобные сигналы называют фазоманипулированными колебаниями.

● фазоманипулированные колебания

Изучим особенности прохождения таких сигналов через однокаскадный резонансный усилитель, предполагая, что на входе системы действует сигнал со скачкообразным изменением фазы на $\varphi_0$ радиан при $t=0$:

$$u_{\text{вх}}(t)=U_m\begin{cases}\cos\omega_{\text{рез}}t & \text{при } t<0,\\ \cos(\omega_{\text{рез}}t+\varphi_0) & \text{при } t>0.\end{cases} \qquad (9.69)$$

Этому сигналу соответствует комплексная огибающая

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(t)=U_m[\sigma(-t)+e^{j\varphi_0}\sigma(t)]. \qquad (9.70)$$

Используя метод интеграла Дюамеля, находим комплексную огибающую на выходе:

$$\widetilde{U}_{\text{вых}}(t)=\frac{-K_{\text{рез}}U_m}{\tau_{\text{к}}}\int\limits_{-\infty}^{t}[\sigma(-\tau)+e^{j\varphi_0}\sigma(\tau)]\,e^{-\frac{t-\tau}{\tau_{\text{к}}}}\,d\tau. \qquad (9.71)$$

При $t<0$ из (9.71) следует

$$\widetilde{U}_{\text{вых}}(t)=\frac{-K_{\text{рез}}U_m}{\tau_{\text{к}}}\int\limits_{\infty}^{t}e^{-\frac{t-\tau}{\tau_{\text{к}}}}\,d\tau=-K_{\text{рез}}U_m, \qquad (9.72)$$

т. е. до момента скачка фазы усилитель находится в стационарном режиме. Если же $t>0$, то

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_{\text{к}}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(t-\tau)/\tau_{\text{к}}} d\tau -$$

$$-\frac{K_{\text{рез}} U_m e^{j\varphi_0}}{\tau_{\text{к}}} \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-\tau)/\tau_{\text{к}}} d\tau =$$

$$= -K_{\text{рез}} U_m \left[e^{-t/\tau_{\text{к}}} + e^{j\varphi_0}\left(1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}\right)\right] \qquad (9.73)$$

Отметим, что при $t=0$ выражения (9.72) и (9.73) приводят к одинаковому результату: $\tilde{U}_{\text{вых}}(0) = -K_{\text{рез}} U_m$. Если же $t/\tau_{\text{к}} \gg 1$, то $U_{\text{вых}}(t) \approx -K_{\text{рез}} U_m e^{j\varphi_0}$, т. е. по окончании переходного процесса система переходит к новому стационарному состоянию, которое отличается от исходного фазовым сдвигом на $\varphi_0$ радиан.

Из (9.73) следует выражение для физической огибающей выходного сигнала при $t>0$:

$$U_{\text{вых}}(t) = K_{\text{рез}} U_m \left\{\left[e^{-t/\tau_{\text{к}}} + \left(1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}\right)\cos\varphi_0\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}\right)^2 \sin^2\varphi_0\right\}^{1/2}. \qquad (9.74)$$

На практике часто используют сигналы с фазовой манипуляцией на 180°. При этом

$$U_{\text{вых}}(t) = K_{\text{рез}} U_m \left| 2 e^{-t/\tau_{\text{к}}} - 1 \right|. \qquad (9.75)$$

**Фазовая манипуляция со сдвигом фазы на 180° особенно удобна для передачи дискретных сообщений, закодированных двоичными числами**

Здесь амплитуда выходного сигнала обращается в нуль в момент времени $t_0$, являющийся корнем уравнения

$$2\exp(-t_0/\tau_{\text{к}}) - 1 = 0,$$

откуда

$$\boxed{t_0 = 0.693\,\tau_{\text{к}}.} \qquad (9.76)$$

Рис. 9.10 иллюстрирует зависимость физической огибающей выходного сигнала от безразмерного параметра $t/\tau_{\text{к}}$ при двух значениях фазового сдвига $\varphi_0$: 180° и 90°.

Физически поведение выходного сигнала обусловлено интерференцией собственных и вынужденных колебаний.

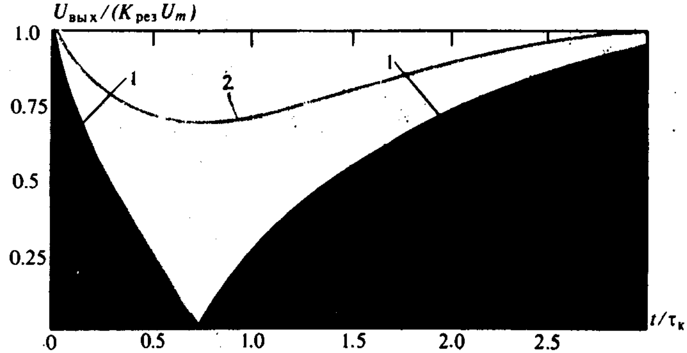



Рис. 9.10. Огибающая сигнала на выходе резонансного усилителя, возбуждаемого фазоманипулированным сигналом:
*1* — при $\varphi_0 = 180°$; *2* — при $\varphi_0 = 90°$

Обычно непостоянство мгновенной частоты является нежелательным явлением

Отметим, что нестационарный процесс, возникающий в усилителе под действием фазоманипулированного входного сигнала, сопровождается непостоянством мгновенной частоты. На основании (9.73)

$$\omega(t) = \omega_{рез} + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{(1+e^{-t/\tau_к})\sin\varphi_0}{e^{-t/\tau_к} + (1-e^{-t/\tau_к})\cos\varphi_0}. \tag{9.77}$$

**Прохождение сигналов с угловой модуляцией через резонансные системы.** Точное решение задачи о воздействии ЧМ- и ФМ-сигналов на узкополосные частотно-избирательные цепи является весьма сложным. Метод низкочастотных эквивалентов, развитый в этой главе, позволяет лишь сформулировать проблему. Так, если простейшее колебание с однотональной угловой модуляцией

$$u_{вх}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t),$$

имеющее комплексную огибающую

$$\tilde{U}_{вх}(t) = U_m e^{jm \sin \Omega t},$$

поступает на вход одноконтурного резонансного усилителя, то комплексная огибающая выходного сигнала представляется следующим интегралом Дюамеля:

$$\tilde{U}_{вых}(t) = \frac{-K_{рез} U_m}{\tau_к} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{jm \sin \Omega \tau} e^{-(t-\tau)/\tau_к} d\tau, \tag{9.78}$$

(предполагается, что $\omega_0 = \omega_{рез}$). Поскольку верхний предел в (9.78) переменный, строгое вычисление такого интеграла невозможно.

Поставленную задачу удается решить приближенно, полагая, что мгновенная частота входного колебания изменяется достаточно медленно для того, чтобы колебательная система успевала «отслеживать» ее вариации. При этом огибающая выходного сигнала оказывается пропорциональной модулю коэффициента передачи системы, вычисленному при текущем значении мгновенной частоты:

$$|K(j\omega)|=\frac{K_{рез}}{\sqrt{1+\tau_к^2(\omega-\omega_{рез})^2}}. \qquad (9.79)$$

Подставляя сюда $\omega=\omega_{рез}+m\Omega\cos\Omega t$, получаем выражение для огибающей выходного сигнала:

$$U_{вых}(t)=\frac{K_{рез}U_m}{\sqrt{1+(m\Omega\tau_к)^2\cos^2\Omega t}}. \qquad (9.80)$$

Таким образом, прохождение ЧМ- или ФМ-сигнала через резонансный усилитель, настроенный на несущее колебание, сопровождается паразитной амплитудной модуляцией. Если параметр $m\Omega\tau_к \ll 1$, то из (9.80) следует приближенное выражение

$$U_{вых}(t)\approx K_{рез}U_m\left(1-\frac{1}{2}(m\Omega\tau_к)^2\cos^2\Omega t\right)=$$

$$=K_{рез}U_m\left[\left(1+\frac{(m\Omega\tau_к)^2}{4}\right)-\frac{(m\Omega\tau_к)^2}{4}\cos 2\Omega t\right], \qquad (9.81)$$

согласно которому в спектре огибающей появляется вторая, а при больших девиациях частоты — и более высокие четные гармоники частоты модуляции.

■ метод мгновенной частоты

Метод мгновенной частоты позволяет не только анализировать изменение амплитуд ЧМ- и ФМ-сигналов, но и находить изменения полезного сигнала, вызванные действием колебательной системы усилителя. Для этого заметим, что на выходе системы к полной фазе входного сигнала $\Psi_{вх}=\omega_0 t+m\sin\Omega t$ добавится фазовый сдвиг, определяемый ФЧХ усилителя:

$$\varphi_K(\omega)=-\operatorname{arctg}(\omega-\omega_{рез})\tau_к. \qquad (9.82)$$

▲ решите задачу 10

Подставив в (9.82) мгновенную частоту входного колебания $\omega_{вх}=\omega_{рез}+m\Omega\cos\Omega t$, находим полную фазу $\Psi_{вых}$ и отвечающую ей мгновенную частоту выходного сигнала $\omega_{вых}$:

$$\Psi_{вых}=\omega_0 t+m\sin\Omega t-\operatorname{arctg}(m\Omega\tau_к\cos\Omega t), \qquad (9.83)$$

$$\omega_{вых}=d\Psi_{вых}/dt=\omega_0+m\Omega\cos\Omega t+\frac{m\tau_к\Omega^2\sin\Omega t}{1+(m\Omega\tau_к\cos\Omega t)^2}. \qquad (9.84)$$

Полагая, что произведение девиации частоты на постоянную времени контура $b = m\Omega\tau_к \ll 1$, и разлагая последнее слагаемое правой части (9.84) в степенной ряд, получим, ограничившись первым членом разложения:

$$\omega_{вых} = \omega_0 + m\,\Omega\cos\Omega t + \Omega b\sin\Omega t - \Omega b^3 \sin\Omega t\cos^2\Omega t.$$

Выполнив элементарные тригонометрические преобразования, приходим к выражению

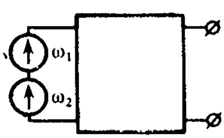
$$\boxed{\omega_{вых} = \omega_0 + m\Omega\cos\Omega t + \Omega b\left(1 - \frac{b^2}{4}\right)\sin\Omega t - \frac{\Omega b^3}{4}\sin 3\Omega t\,.} \qquad (9.85)$$

Из формулы (9.85) следует, что в составе мгновенной частоты выходного сигнала содержится не только синфазная компонента $m\Omega\cos\Omega t$, присутствующая и на входе, но помимо нее возникает еще и малая квадратурная составляющая, пропорциональная $\sin\Omega t$. Наличие ее указывает на смещение во времени полезного сигнала, заключенного в мгновенной частоте.

● спектральный состав мгновенной частоты на выходе узкополосной системы

Помимо этого, следует отметить наличие в формуле для мгновенной частоты составляющей, которая изменяется во времени с утроенной частотой модуляции. В этом проявляется искажающее действие узкополосной цепи на полезное сообщение, заключенное в текущих значениях мгновенной частоты. Следует, правда, отметить, что при сделанных допущениях этот нежелательный эффект весьма мал.

**Роль фазовой характеристики цепи.** Заканчивая изучение свойств и характеристик линейных стационарных цепей, рассмотрим важный вопрос о том, какое влияние на выходной сигнал оказывает ФЧХ системы.




Для изучения принципиальных сторон явлений разберем случай, когда на вход системы подается сумма двух гармонических сигналов единичной амплитуды с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, относительная разность между которыми мала:

$$|\omega_1 - \omega_2| / \omega_1 \ll 1.$$

Аналитическая форма записи входного сигнала такова:

$$u_{вх}(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t =$$

$$= 2\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t \cdot \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\cdot t \qquad (9.86)$$

Энергия суммарного процесса локализуется во времени в виде отдельных «порций», носящих название *узкополосных или квазигармонических групп.* Чем меньше частотный промежуток между составляющими, тем больше степень растянутости этих групп во времени. Низкочастотный сомножитель в (9.86) является огибающей группы. Узкополосную группу можно рассматривать как простейший элемент, из которых складывается колебание с более сложным спектральным составом.

узкополосные группы

Пусть сигнал вида (9.86) проходит через линейную стационарную систему с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|\, e^{j\varphi_K(\omega)} \qquad (9.87)$$

Предположим, что в пределах частотного интервала $(\omega_1, \omega_2)$ модуль коэффициента передачи является постоянной величиной $K_0$. Тогда

$$u_{\text{вых}}(t) \approx K_0[\cos(\omega_1 t + \varphi_K(\omega_1)) + \cos(\omega_2 t + \varphi_K(\omega_2))]\,. \qquad (9.88)$$

ФЧХ системы можно разложить в ряд Тейлора относительно точки $\omega_1$:

$$\varphi_K(\omega_2) = \varphi_K(\omega_1) + \frac{d\varphi_K}{d\omega}(\omega_2 - \omega_1) + \ldots$$

Ограничиваясь в этом разложении только линейным членом, получаем

$$u_{\text{вых}}(t) \approx K_0\Big[\cos(\omega_1 t + \varphi_K(\omega_1)) + \cos(\omega_1 t + \Delta\omega\, t +$$
$$+ \varphi_K(\omega_1) + \frac{d\varphi_K}{d\omega}\Delta\omega)\Big] = 2K_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t + \frac{d\varphi_K}{d\omega}\right)\right] \times$$
$$\times \cos\left(\omega_1 t + \frac{1}{2}\Delta\omega t + \varphi_K(\omega_1) + \frac{1}{2}\frac{d\varphi_K}{d\omega}\Delta\omega\right).$$

Здесь $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Отсюда непосредственно видно, что огибающая квазигармонической группы на выходе системы смещена во времени относительно огибающей входного сигнала на величину, равную по абсолютному значению $|d\varphi_K/d\omega|$. Если эта производная отрицательна, то огибающая выходного сигнала запаздывает на время

решите задачу 11

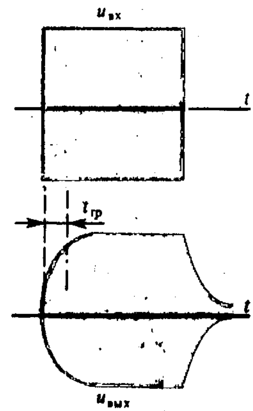
$$\boxed{T_{\text{гр}} = -\frac{d\varphi_K}{d\omega},} \qquad (9.89)$$

групповое время запаздывания

называемое *групповым временем запаздывания.* Производная должна быть вычислена в некоторой произвольной точке частотного интервала, где сконцентрирована основная доля энергии узкополосного сигнала.

Групповое время запаздывания является удобной характеристикой для оценки задержки узкополосных сигналов в инерционных линейных цепях.

**Пример 9.7.** *Прямоугольный радиоимпульс длительностью* $\tau_и = 20$ мкс, *имеющий частоту заполнения* $f_0 = 10$ МГц, *подается на вход однокаскадного резонансного усилителя, настроенного на частоту заполнения импульса. Эквивалентная добротность колебательной системы* $Q_{экв} = 40$. *Оценить время запаздывания выходного импульса относительно колебания на входе.*




Спектр входного сигнала сосредоточен в интервале частот $(f_0 - 1/\tau_и,\ f_0 + 1/\tau_и)$, т. е. в промежутке от 9.950 до 10.050 МГц (ширина спектра оценивается по нулям первого лепестка спектральной диаграммы). Полоса пропускания усилителя $П_{0,707} = f_{рез}/Q_{экв} = 250$ кГц. Приближенно можно полагать, что входной импульс в данном случае является узкополосным сигналом, задержку которого можно оценивать по формуле (9.89). Используя уравнение ФЧХ $\varphi_к(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\tau_К(\omega - \omega_{рез})$, находим

$$T_{гр}\Big|_{\omega=\omega_{рез}} = \tau_К = 2Q_{экв}/\omega_{рез} = 1{,}27 \text{ мкс}.$$

## Результаты

- *Узкополосные частотно-избирательные системы характерны тем, что для них отношение ширины полосы пропускания к центральной частоте этого интервала мало. Они применяются для частотной фильтрации полезных сигналов, имеющих ограниченный спектр.*
- *Физически частотно-избирательные цепи могут быть реализованы в виде высокодобротных колебательных систем, как одноконтурных, так и многоконтурных.*
- *Входной сигнал является широкополосным по отношению к частотно-избирательной системе, если его спектральная плотность может считаться постоянной в пределах полосы пропускания.*
- *Низкочастотный эквивалент узкополосной цепи — воображаемая система, частотный коэффициент передачи которой получен путем переноса частотной характеристики исходной цепи в окрестность нулевой частоты.*
- *Импульсная характеристика узкополосной цепи представляет собой узкополосное колебание, мгновенная частота которого близка к центральной частоте полосы пропускания.*
- *Комплексная огибающая импульсной характеристики узкополосной цепи пропорциональна импульсной характеристике низкочастотного эквивалента.*
- *С помощью частотно-избирательных цепей, измеряя их отклики на произвольный широкополосный сигнал, можно экспериментально исследовать зависимость модуля спектральной плотности сигнала от частоты (аппаратурный спектральный анализ).*

◇◇ *Вместо полного решения задачи о воздействии узкополосного сигнала на частотно-избирательную цепь достаточно решить более простую задачу о прохождении комплексной огибающей входного сигнала через низкочастотный эквивалент системы.*

◇◇ *Результатом воздействия узкополосной цепи на АМ-сигнал при условии, что центральная частота полосы пропускания и частота несущего колебания совпадают, является снижение глубины модуляции.*

◇◇ *При прохождении импульса включения гармонического сигнала через настроенную одноконтурную систему огибающая выходного процесса устанавливается до уровня 0.9 от стационарного значения за время* $\tau_{уст} = 4.606\, Q_{экв}/\omega_{рез}$.

◇◇ *Расстройка между резонансной частотой контура и частотой гармонического заполнения импульса включения ведет к немонотонному изменению во времени огибающей выходного сигнала. Мгновенная частота на выходе также оказывается непостоянной.*

◇◇ *Прохождение фазоманипулированного сигнала через узкополосный резонансный усилитель сопровождается изменением во времени как выходной огибающей, так и мгновенной частоты на выходе.*

◇◇ *Задачу о воздействии ЧМ- и ФМ-сигналов на узкополосные цепи удается решить элементарными средствами лишь в предположении, что произведение входной девиации частоты на постоянную времени системы достаточно мало (метод мгновенной частоты).*

◇◇ *Частотно-избирательная цепь обусловливает паразитную амплитудную модуляцию выходных ЧМ- и ФМ-сигналов, а также появление третьей гармоники частоты модуляции в спектре мгновенной частоты.*

## Вопросы

1. Как принято определять ширину полосы пропускания узкополосных электрических цепей? На сколько децибел ослабляется сигнал с частотой, соответствующей границе полосы пропускания?

2. При каком условии АЧХ одноконтурной резонансной системы оказывается симметричной относительно резонансной частоты?

3. Каков типичный порядок величин $L, C, R_{рез}$ для параллельных колебательных контуров с резонансной частотой в несколько десятков мегагерц?

4. Что такое абсолютная, относительная и обобщенная расстройки?

5. Изобразите характерную картину расположения на комплексной плоскости полюсов передаточной функции узкополосной системы. Можно ли по ней определить добротность системы?

6. Что такое неполное включение колебательного контура во внешнюю цепь? Перечислите основные свойства такой резонансной системы.

7. В чем проявляется влияние внутреннего сопротивления электронного прибора на характеристики резонансного усилителя малых колебаний? Как можно ослабить возникающий здесь вредный эффект? Напишите формулы для расчета: 1) резонансного коэффициента усиления, 2) полосы пропускания.

8. Каково преимущество усилителя со связанными контурами по сравнению с одноконтурным усилителем?

9. Перечислите факторы, которые, по вашему мнению, могут определять собой предельную

верхнюю частоту, на которой резонансный усилитель еще оказывается работоспособным.

10. Какой смысл, абсолютный или относительный, вкладывается в понятие «широкополосный сигнал»?

11. Обязательно ли низкочастотный эквивалент узкополосной системы должен быть физически реализуемой цепью?

12. Изобразите примерный график импульсной характеристики какой-либо узкополосной системы. Обратите внимание на условие физической реализуемости.

13. Что такое постоянная времени колебательного контура?

14. Какова разница между импульсными характеристиками одноконтурного и двухконтурного усилителей?

15. Сформулируйте физический смысл спектрального разложения сигнала.

16. Как следует выбирать полосу пропускания резонансного усилителя для удовлетворительного в техническом отношении пропускания АМ-сигналов? В чем заключена противоречивость требований к форме АЧХ частотных фильтров?

17. Чем определяется время установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе?

18. Дайте физическую трактовку процесса установления колебаний в одноконтурной резонансной системе, возбуждаемой со стороны входа импульсом включения гармонической э.д.с. Какова здесь роль собственных колебаний контура? Почему в начальный промежуток времени выходной сигнал мал?

19. Проведите такой же анализ применительно к фазоманипулированному входному сигналу. Почему во время переходного процесса частота сигнала на выходе непостоянна?

20. В чем заключена сущность метода мгновенной частоты?

21. Нарисуйте примерный график полезного сигнала, который может быть извлечен из выходных колебаний одноконтурной резонансной системы при условии, что сигнал на входе является однотональным ЧМ-сигналом.

22. Что такое групповое время запаздывания? Какова должна быть ФЧХ системы для того, чтобы проходящий через нее сигнал испытывал минимальные искажения?

## Задачи

1. Определите, при каком значении обобщенной расстройки крутизна АЧХ резонансного контура максимальна?

2. Параллельный колебательный контур на резонансной частоте 20 МГц имеет активное сопротивление, равное 30 кОм, а на частоте 21 МГц модуль его сопротивления равен 18 кОм. Рассчитайте параметры контура.

3. Найдите частотный коэффициент передачи и импульсную характеристику низкочастотного эквивалента идеального полосового фильтра (см. формулу (9.23)).

4. Решите предыдущую задачу применительно к гауссову радиофильтру (см. формулу (9.24)).

5. В схеме резонансного усилителя малых колебаний (см. рис. 9.3) коэффициент включения контура в коллекторную цепь транзистора может изменяться путем перемещения отвода. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от коэффициента включения.

6. Гауссов радиофильтр (см. (9.24)) с параметрами: $K_0=10$, $\omega_0=10^6$ 1/с, $b=5\cdot10^{-10}$с$^2$ возбуждается входным сигналом, имеющим вид прямоугольного видеоимпульса с амплитудой 25 В и длительностью 0.2 мкс. Убедитесь, что этот сигнал по отношению к данному фильтру может считаться широкополосным.

7. На входе однокаскадного резонансного усилителя с параметрами $f_{рез}=6$ МГц, $Q_{экв}=40$, $K_{рез}=35$ действует экспоненциальный видеоимпульс напряжения (В)

$$u_{вх}(t) = 0.3\exp(-4\cdot10^7 t)\sigma(t).$$

Найдите сигнал на выходе усилителя.

8. На входе последовательного колебательного контура включен источник э.д.с. (В).

$$u_{вх}(t) = 5(1+0.8\cos 4\cdot10^3 t)\cos 10^6 t.$$

Контур настроен в резонанс с частотой несущего колебания.

Определите добротность контура, при которой коэффициент модуляции тока будет равен 0.4.

9. Исследуйте искажения огибающей прямоугольных радиоимпульсов при прохождении их через однокаскадный резонансный усилитель, контур которого имеет эквивалентную добротность $Q_{экв}=60$. Несущая частота входного сигнала, равная 2 МГц, совпадает с резонансной частотой контура.

10. Определите закон изменения во времени мгновенной частоты сигнала на выходе однокаскадного резонансного усилителя, возбуждаемого сигналом

$$u_{вх}(t) = U_0 \cos(2\pi 10^6 t + 0.1 \cos 2\pi 10^3 t).$$

Контур усилителя настроен на несущую частоту входного колебания и имеет постоянную времени $10^{-5}$с.

11. Резонансный усилитель содержит два каскада, настроенных на одинаковую частоту 12 МГц. Добротности колебательных контуров первого и второго каскадов равны 40 и 50 соответственно. Определите групповое время запаздывания узкополосного сигнала с центральной частотой 12.2 МГц.

### Более сложные задания

12. Решите задачу о воздействии однотонального АМ-сигнала на резонансный усилитель в условиях, когда несущая частота сигнала $\omega_0$ не совпадает с резонансной частотой контура $\omega_{рез}$. Покажите, что расстройка между этими частотами приводит к паразитной угловой модуляции выходного сигнала. Считая относительную расстройку $|\omega_0-\omega_{рез}|/\omega_0$ малой, выведите формулу для расчета параметров паразитной модуляции.

13. Рассмотрите воздействие на однокаскадный усилитель входного сигнала со скачком мгновенной частоты при $t=0$:

$$u_{вх}(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t \text{ при } t<0, \\ U_0 \cos(\omega_0+\delta\omega)t \text{ при } t>0. \end{cases}$$

Предположите, что $\omega_{рез}=\omega_0$. Найдите формулу, описывающую закон изменения огибающей и мгновенной частоты на выходе.

14. Пусть резонансный усилитель состоит из идентичных каскадов. Выведите формулу, называемую в радиотехнике *формулой Агеева — Кобзарева*, определяющую время установления выходных колебаний в данной системе в зависимости от числа каскадов $N$, постоянной времени одного каскада $\tau_к$ и резонансной частоты $\omega_{рез}$. Входной сигнал — импульс включения гармонической э.д.с. с частотой $\omega_0=\omega_{рез}$.
Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{p(p+a)^N} \doteq \frac{1}{a^N}\left[1 - e^{-at}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(at)^m}{m!}\right].$$

# Глава 10 Воздействие случайных сигналов на линейные стационарные цепи

В двух предыдущих главах излагались методы, позволяющие решать любые задачи, связанные с прохождением детерминированных сигналов через линейные стационарные системы. Последним шагом, завершающим теорию линейных систем, должно явиться перенесение этих методов в статистическую область.

Предположим, что имеется линейная стационарная цепь, на входе которой присутствует колебание $x(t)$, представляющее собой некоторую реализацию случайного процесса $X(t)$. Если эта реализация указана заранее, то никакой новой задачи не возникает — к сигналу $x(t)$ можно относиться как к вполне детерминированной, хотя, возможно, очень сложно описываемой функции. Знание математической модели системы, которая определяется, например, частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$, позволяет всегда найти выходную реакцию $y(t)$.

Однако специфика статистической теории состоит в том, что столь полная информация о входном сигнале недоступна — вместо детерминированного описания входного сигнала мы располагаем лишь сведениями об усредненных статистических характеристиках случайного процесса $X(t)$. Такими характеристиками могут явиться одномерная и многомерные плотности вероятности, а также различные моментные функции, прежде всего математическое ожидание и функция автокорреляции. Наша цель — исследование той связи между свойствами процессов $X(t)$ и $Y(t)$, которая может быть найдена на основе частотного коэффициента передачи системы.

## 10.1 Спектральный метод анализа прохождения случайных сигналов через линейные стационарные цепи

С самого начала поставим важное ограничение — будем рассматривать лишь входные процессы $X(t)$, стационарные в широком смысле. Как известно, это означает, что математическое ожидание мгновенных значений реализаций $\overline{x}$ постоянно во времени, в то время как автокорреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} - \overline{x}^2$ зависит лишь от $\tau = |t_1 - t_2|$ — абсолютного значения сдвига между теми точками на оси времени, в которых производится измерение мгновенных значений.

В дальнейшем всюду с целью упрощения выкладок будем полагать, что $\overline{x}=0$. Это предположение не ограничивает общности рассуждений и выводов. Благодаря свойству линейности рассматриваемых цепей задача о влиянии постоянной составляющей входного сигнала на выходной отклик системы может быть решена совершенно независимо и, что важно, без привлечения статистических методов.

**Среднее значение выходного сигнала.** Рассмотрим отдельно взятую реализацию входного сигнала $x(t)$ и представим ее в виде интеграла Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Здесь и в дальнейшем предполагается такой характер реализаций входного сигнала, что их спектральные плотности заведомо существуют, по крайней мере в форме обобщенных функций.

Выходной сигнал системы будет найден, если известен ее частотный коэффициент передачи:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{10.1}$$

Усреднение производится по ансамблю реализаций

Переходя от отдельной реализации к полному ансамблю входных сигналов, мы должны считать, что $S_x(\omega)$ — случайная функция, причем (см. гл. 7) предположение о стационарности процесса $X(t)$ накладывает жесткие условия: среднее значение спектральной плотности $\overline{S_x(\omega)}=0$. Поэтому, выполняя статистическое усреднение в обеих частях (10.1), имеем

$$\boxed{\overline{y}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{S_x(\omega)}\,K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=0.} \tag{10.2}$$

**Функция автокорреляции и энергетический спектр случайного сигнала на выходе системы.** Чтобы вычислить автокорреляционную функцию $K_y(\tau)$, необходимо помимо спектрального разложения (10.1) располагать выражением выходного сигнала в момент времени $t+\tau$. Это можно сделать на основании известных свойств преобразования Фурье:

$$y(t+\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega')K(j\omega')\,e^{j\omega'\tau}\,e^{j\omega' t}\,d\omega'\,. \tag{10.3}$$

Небольшая (и не принципиальная) деталь, относящаяся к технике вычислений: функция $y(t)$ вещественна, и поэтому формула (10.3) не изменится, если в ее правой части перейти к комплексно-сопряженным величинам:

$$y(t+\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega')K^*(j\omega')\,e^{-j\omega'\tau}\,e^{-j\omega'\tau}\,d\omega'\,. \tag{10.4}$$

Функцию автокорреляции выходного сигнала найдем, перемножая сигналы, определенные равенствами (10.1) и (10.4), а затем проводя статистическое усреднение:

$$K_y(\tau) = \overline{y(t)\,y(t+\tau)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega)\,S_x^*(\omega')}\,K(j\omega)\,K^*(j\omega') \times$$
$$\times\ e^{-j\omega'\tau}\,e^{j(\omega-\omega')t}\,d\omega\,d\omega'. \tag{10.5}$$

На первый взгляд анализ этой формулы может показаться безнадежно сложным. Но следует иметь в виду, что рассматриваемый нами входной случайный процесс стационарен и поэтому (см. гл. 7) случайные спектральные плотности его отдельных реализаций дельта-коррелированы, т. е.

$$\overline{S_x(\omega)\,S_x^*(\omega')} = 2\pi\,W_x(\omega)\,\delta(\omega-\omega'), \tag{10.6}$$

Используется фильтрующее свойство дельта-функции

где $W_x(\omega)$ — энергетический спектр стационарного случайного процесса $X(t)$. Эта замечательная особенность структуры спектра входного сигнала позволяет выяснить очень простой смысл формулы (10.5):

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,|K(j\omega)|^2\,e^{-j\omega\tau}\,d\omega,$$

или в равной мере

$$\boxed{K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,|K(j\omega)|^2\,e^{j\omega\tau}\,d\omega.} \tag{10.7}$$

Формула (10.7), по сути дела, содержит в себе полное решение поставленной задачи в рамках корреляционной теории: *энергетический спектр выходного случайного сигнала связан с аналогичным спектром сигнала на входе с помощью соотношения*

■ связь энергетических спектров на входе и выходе системы

$$\boxed{W_y(\omega) = W_x(\omega)\,|K(j\omega)|^2.} \tag{10.8}$$

В прикладных задачах часто приходится иметь дело с односторонними энергетическими спектрами $F_x(f)$ и $F_y(f)$, которые определены только при положительных частотах $f$, выражаемых в герцах. Очевидно, что

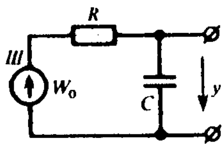
$$F_y(f) = F_x(f)\,|K(j\,2\pi f)|^2 \tag{10.9}$$

и поэтому дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_y^2 = K_y(0) = \int\limits_0^{\infty} F_x(f)\,|K(j\,2\pi f)|^2\,df \tag{10.10}$$

является результатом суммирования вкладов от энергетического спектра входного сигнала, умноженного на зависящий от частоты квадрат модуля коэффициента передачи, т. е. частотный коэффициент передачи мощности.

Техника решения конкретных задач из рассматриваемого здесь круга нам уже хорошо известна — это всевозможные приемы вычисления интегралов Фурье. Поэтому в нижеследующих примерах внимание будет сосредоточено не столько на математической стороне дела, сколько на обсуждении физических особенностей процессов.




**Пример 10.1.** *Воздействие источника белого шума на интегрирующую RC-цепь. Предположим, что динамическая система 1-го порядка, принципиальная схема которой изображается в виде интегрирующей RC-цепи, возбуждается со стороны входа источником шумовой э.д.с. с постоянным на всех частотах энергетическим спектром* $W_0$ $(B^2 \cdot c)$. *Определить дисперсию и функцию автокорреляции выходного напряжения* $y(t)$.

Вычислим коэффициент передачи мощности для данной цепи:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2 (RC)^2}$$

Далее по формуле (10.7), положив $\tau=0$, определим дисперсию шума на выходе:

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2 (RC)^2} = \frac{W_0}{2RC} \qquad (10.11)$$

решите задачи 1 и 2

Как и следовало ожидать, дисперсия выходного сигнала уменьшается с ростом постоянной времени цепи, поскольку при этом сокращается полоса частот, эффективно пропускаемая цепью.

Функция автокорреляции выходного сигнала

$$K_y(\tau) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}\, d\omega}{1+\omega^2 (RC)^2}. \qquad (10.12)$$

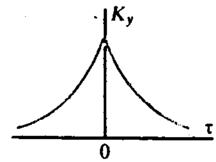
Здесь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}\, d\omega}{1+\omega^2 (RC)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega\tau\, d\omega}{1+\omega^2 (RC)^2};$$

последний интеграл является табличным [40], и поэтому, воспользовавшись готовым результатом, получаем

$$\boxed{K_y(\tau) = \frac{W_0}{2RC} \exp\left(\frac{-|\tau|}{RC}\right).} \qquad (10.13)$$

Естественно, что значение функции автокорреляции в нуле оказалось равным дисперсии выходного сигнала.




Итак, при возбуждении интегрирующей $RC$-цепи белым шумом мы получаем на выходе случайный процесс с функцией автокорреляции экспоненциального типа.

Важно, что $RC$-цепь за счет своих инерционных свойств осуществляет известное «упорядочение»: если входной сигнал, будучи белым шумом, абсолютно непрогнозируем, то выходной сигнал оказывается сглаженным; его интервал корреляции имеет порядок постоянной времени цепи.

**Пример 10.2.** *Воздействие белого шума на одноконтурный резонансный усилитель.*

Предположим, что источник э.д.с. вида белого шума с односторонним энергетическим спектром $F_0$ (В$^2$/Гц) возбуждает вход резонансного усилителя малых колебаний. Частотный коэффициент передачи данной системы

$$K(j2\pi f) = \frac{-K_{\text{рез}}}{1 + j2\pi\tau_{\text{к}}(f - f_{\text{рез}})},$$

и коэффициент передачи мощности

$$|K(j2\pi f)|^2 = \frac{K^2_{\text{рез}}}{1 + 4\pi^2\tau^2_{\text{к}}(f - f_{\text{рез}})^2}.$$

Расчет дисперсии сводится к нахождению интеграла (10.10):

$$\sigma^2_y = F_0 K^2_{\text{рез}} \int\limits_0^\infty \frac{df}{1 + 4\pi^2\tau^2_{\text{к}}(f - f_{\text{рез}})^2}.$$

Выполним замену переменной $\eta = f - f_{\text{рез}}$ и будем полагать колебательный контур усилителя столь добротным, что коэффициент передачи при $f=0$ можно считать нулевым. Тогда

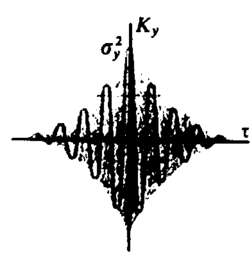
$$\sigma^2_y = F_0 K^2_{\text{рез}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{1 + 4\pi^2\tau^2_{\text{к}}\eta^2} = \frac{F_0 K^2_{\text{рез}}}{2\tau_{\text{к}}}. \qquad (10.14)$$

Наконец, функция автокорреляции выходного сигнала

$$K_y(\tau) = \frac{F_0 K^2_{\text{рез}}}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega\tau d\omega}{1 + \tau^2_{\text{к}}(\omega - \omega_{\text{рез}})^2} \approx$$

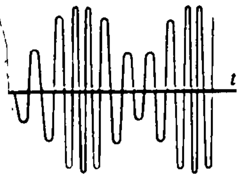
$$\approx \frac{F_0 K^2_{\text{рез}}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\Omega + \omega_{\text{рез}})\tau d\Omega}{1 + \tau^2_{\text{к}}\Omega^2} = \frac{F_0 K^2_{\text{рез}}}{2\pi} \cos\omega_{\text{рез}}\tau \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos\Omega\tau d\Omega}{1 + \tau^2_{\text{к}}\Omega^2} = \frac{F_0 K^2_{\text{рез}}}{2\tau_{\text{к}}} e^{-|\tau|/\tau_{\text{к}}} \cos\omega_{\text{рез}}\tau. \qquad (10.15)$$




Мы видим, что полученная здесь автокорреляционная функция имеет вид

$$K_y(\tau) = \sigma^2_y \rho(\tau) \cos\omega_{\text{рез}}\tau, \qquad (10.16)$$




Типичная реализация случайного сигнала на выходе резонансного усилителя

▲

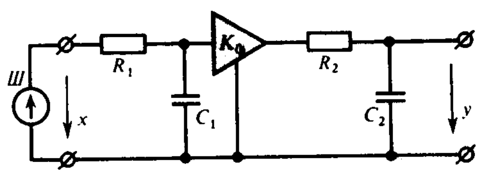
решите задачу 4

характерный для узкополосного случайного процесса, поскольку огибающая $\rho(\tau)=\exp(-|\tau|/\tau_к)$ является медленной функцией по сравнению с высокочастотным заполнением.

Любая реализация случайного сигнала на выходе узкополосного усилителя представляет собой квазигармоническое колебание со случайными огибающей и мгновенной частотой; в среднем частота заполнения равна резонансной частоте колебательной системы. Причину таких свойств выходного сигнала легко понять, заметив, что этот сигнал является результатом суммирования огромного числа элементарных откликов, каждый из которых пропорционален импульсной характеристике системы (принцип интеграла Дюамеля).

Для того чтобы получить представление о порядке величин, с которыми имеет дело статистическая радиотехника, оценим дисперсию шума на выходе резонансного усилителя при следующих исходных данных: $F_0=10^{-16}$ В$^2$/Гц, $K_{рез}=30$, $\omega_{рез}=10^8$ 1/с, $Q_{экв}=60$. Постоянная времени контура $\tau_к=2Q_{экв}/\omega_{рез}=1.2$ мкс, поэтому на основании формулы (10.14) дисперсия $\sigma_y^2=10^{-16}\cdot 900/(1.2\cdot 10^{-6})=7.5\cdot 10^{-8}$ В$^2$; эффективное напряжение шума, равное квадратному корню из дисперсии, составит 274 мкВ.

**Пример 10.3.** *Рассмотреть цепь, образованную двумя RC-звеньями, между которыми включен идеальный усилитель с коэффициентом усиления $K_0$:*



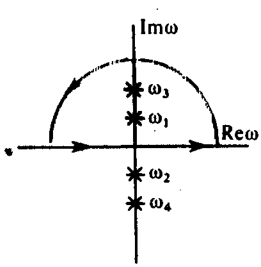

*Пусть система со стороны входа возбуждается источником шумовой э.д.с. с постоянным на всех частотах энергетическим спектром (белый шум). Вычислить автокорреляционную функцию выходного сигнала.*

Коэффициент передачи мощности

$$|K(j\omega)|^2=\frac{K_0^2}{\left(1+\omega^2\tau_1^2\right)\left(1+\omega^2\tau_2^2\right)}.$$

В соответствии с (10.7) нахождение функции автокорреляции выходного напряжения сводится к вычислению интеграла:

$$K_y(\tau)=\frac{W_0K_0^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}\,d\omega}{\left(1+\omega^2\tau_1^2\right)\left(1+\omega^2\tau_2^2\right)}. \qquad (10.17)$$




Целесообразно воспользоваться теорией вычетов, повторив тот же путь, который был проделан в гл. 8 при анализе импульсной характеристики RC-цепи. Подынтегральная функция в (10.17) имеет четыре простых полюса в точках с координатами

$$\omega_{1,2}=\pm j(1/\tau_1);\quad \omega_{3,4}=\pm j(1/\tau_2).$$

Будем вычислять функцию $K_y(\tau)$ при $\tau>0$, замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Вычет подынтегральной функции в точке $\omega_1$

$$\operatorname{res}\Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{\exp(j\omega\tau)}{\dfrac{d}{d\omega}\left[\left(1+\omega^2\tau_1^2\right)\left(1+\omega^2\tau_2^2\right)\right]}\Bigg|_{\omega=\omega_1} = \frac{\tau_1 e^{-\tau/\tau_1}}{2j\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)}.$$

Аналогично ищется вычет в точке $\omega=\omega_3$, лежащей внутри контура интегрирования

$$\operatorname{res}\Big|_{\omega=\omega_3} = \frac{-\tau_2 e^{-\tau/\tau_2}}{2j\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)}.$$

Отсюда, применив теорему Коши, находим

$$K_y(\tau) = \frac{W_0K_0^2}{2\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)}\left(\tau_1 e^{-\tau/\tau_1} - \tau_2 e^{-\tau/\tau_2}\right) \qquad (10.18)$$

при $\tau>0$.

Функция автокорреляции при $\tau<0$ получится из этой же формулы путем замены $\tau$ на $-\tau$. Это вытекает из свойства четности автокорреляционной функции, однако результат может быть подтвержден прямым расчетом, если замкнуть путь интегрирования дугой бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости комплексной частоты $\omega$.

Итак,

$$K_y(\tau) = \frac{W_0K_0^2}{2\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)}\left(\tau_1 e^{-|\tau|/\tau_1} - \tau_2 e^{-|\tau|/\tau_2}\right). \qquad (10.19)$$

▲ решите задачу 6

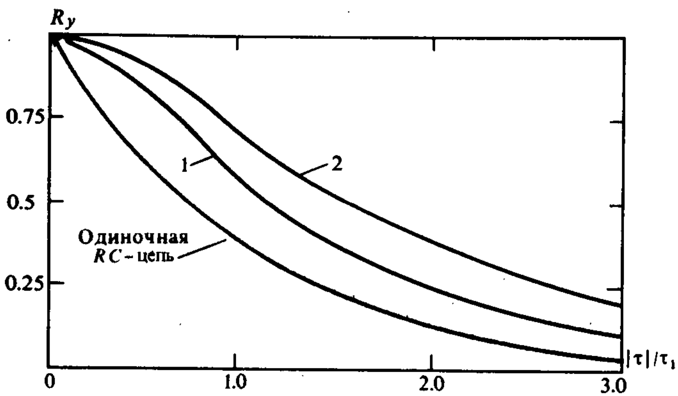



Рис. 10.1. Коэффициент корреляции случайного процесса на выходе системы из двух $RC$-цепей:
1 — при $\tau_2=\tau_1/2$; 2 — при $\tau_1=\tau_2$

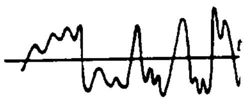
Дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_y^2 = K_y(0) = \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1 + \tau_2)}, \tag{10.20}$$

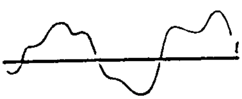
поэтому коэффициент корреляции

$$\boxed{R_y(\tau) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{-|\tau|/\tau_1} - \tau_2 e^{-|\tau|/\tau_2}\right).} \tag{10.21}$$

Белый шум, преобразованный одной



и двумя



последовательно включенными $RC$-цепями

На рис. 10.1 изображены результаты расчетов по формуле (10.21) при двух различных значениях отношения $\tau_1/\tau_2$.

На этом же рисунке для сравнения представлена кривая, отображающая коэффициент корреляции на выходе одиночной интегрирующей $RC$-цепи с постоянной времени $\tau_1$. Интересно отметить не только рост интервала корреляции, вызванный добавлением второго инерционного звена, но также изменение характера функции $R_y(\tau)$ двухзвенного фильтра в окрестности точки $\tau = 0$. Существование второй производной автокорреляционной функции в этой точке обеспечивает дифференцируемость выходного случайного процесса (см. гл. 7). Физически дифференцируемость означает гладкость реализаций сигнала, прошедшего две каскадно включенные $RC$-цепи.

**Прохождение случайных сигналов с широким спектром. Шумовая полоса цепи.** Часто приходится рассматривать воздействие на линейные цепи весьма широкополосных случайных сигналов, образованных, например, хаотической последовательностью коротких импульсов. В этом случае с полным основанием можно учитывать спектральные характеристики шума только в пределах полосы пропускания системы, заменяя реальный случайный процесс эквивалентным ему белым шумом с односторонним энергетическим спектром $F_0 = F_x(f_0)$, где $f_0$ — некоторая точка в пределах полосы пропускания цепи.

Формула (10.10), определяющая выходную дисперсию, в этом случае упростится:

$$\sigma_y^2 = F_0 \int_0^\infty |K(j2\pi f)|^2 \, df. \tag{10.22}$$

При инженерных расчетах линейную цепь, находящуюся под воздействием широкополосного случайного сигнала, удобно характеризовать *шумовой полосой пропускания* $\Pi_ш$ (Гц). Она определяется как полоса пропускания идеального полосового фильтра с коэффициентом передачи $K_{max}$ — максимальным по модулю коэффициентом передачи реальной цепи; при возбуждении идеальной системы белым шумом с энергетическим спек-

● шумовая полоса пропускания

тром $F_0$ дисперсии шумовых сигналов на выходах идеальной и реальной цепей должны совпадать:

$$F_0 \int\limits_0^\infty |K(j\,2\pi f)|^2\, \mathrm{d}f = F_0 K^2{}_{\max}\, \Pi_{\text{ш}}, \tag{10.23}$$

откуда

$$\boxed{\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{K^2_{\max}} \int\limits_0^\infty |K(j\,2\pi f)|^2\, \mathrm{d}f.} \tag{10.24}$$

Например, для интегрирующей $RC$-цепи

$K_{\max} = 1$; $|K(j\,2\pi f)|^2 = 1/(1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2)$,

поэтому

$$\Pi_{\text{ш}} = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}f}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2} = \frac{1}{4RC}\,. \tag{10.25}$$

Заметим, что для данной системы модуль частотного коэффициента передачи падает в $\sqrt{2}$ раз по отношению к максимальному значению на частоте $f_{0,707} = 1/(2\pi RC)$. Поэтому шумовая полоса пропускания шире полосы $\Pi_{0.707}$ :

$\Pi_{\text{ш}} / \Pi_{0.707} = \pi/2 = 1.571.$

Аналогично находится шумовая полоса пропускания одноконтурного резонансного усилителя:

$$\Pi_{\text{ш}} = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}f}{1 + 4\pi^2 \tau_{\text{к}}^2 (f - f_{\text{рез}})^2} = \frac{1}{2\tau_{\text{к}}} = 1.571\, \Pi_{0.707}\,. \tag{10.26}$$

Продемонстрируем методику использования понятия шумовой полосы пропускания в радиотехнических расчетах.

---

**Пример 10.4.** *На входе одноконтурного резонансного усилителя малых колебаний, имеющего следующие параметры:* $K_{\text{рез}} = 85$, $Q_{\text{экв}} = 70$, $f_{\text{рез}} = 0.7$ МГц, *действует источник стационарной шумовой э.д.с.* $x(t)$, *обладающий функцией автокорреляции* ($\text{В}^2$)

$K_x(\tau) = 0.45 \exp(-\beta|\tau|)$,

*где* $\beta = 10^7$ 1/с. *Определить эффективное напряжение шума на выходе усилителя.*

Прежде всего по теореме Хинчина находим энергетический спектр входного сигнала:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos \omega\tau d\tau.$$

Подобный спектр уже был вычислен нами в гл. 7. Воспользуемся полученным там результатом и запишем для данного случая

$$W_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\beta}{\beta^2 + \omega^2} = \frac{0.9 \cdot 10^7}{10^{14} + \omega^2}.$$

Односторонний энергетический спектр

$$F_x(f) = 2W_x(2\pi f) = \frac{1.8 \cdot 10^7}{10^{14} + (2\pi f)^2}.$$

Замечая, что энергетический спектр максимален на нулевой частоте, а при $\omega = 10^7$ 1/с его величина уменьшается лишь вдвое, приходим к выводу, что в пределах полосы пропускания усилителя входной сигнал может быть заменен эквивалентным белым шумом со спектральной плотностью мощности

▲ решите задачу 8

$$F_0 = F_x(f_{\text{рез}}) = 1.508 \cdot 10^{-7}\ \text{В}^2/\text{Гц}.$$

Полоса пропускания усилителя по уровню 0.707

$$\text{Н}_{0.707} = f_{\text{рез}}/Q_{\text{экв}} = 10\ \text{кГц}.$$

Шумовая полоса пропускания

$$\text{Н}_{\text{ш}} = (\pi/2)\,\text{Н}_{0.707} = 15.708\ \text{кГц}.$$

Подставив все полученные здесь данные в формулу (10.23), находим, что $\sigma_y^2 = 1.508 \cdot 107^{-7} \cdot (85)^2 \cdot 15708 = 17.11$ В$^2$.

Эффективное напряжение шума на выходе

$$\sigma_y = \sqrt{17.11} = 4.14\ \text{В}.$$

**Нормализация случайного сигнала на выходе линейной стационарной цепи.** Все задачи, которые были рассмотрены выше, решались в рамках корреляционной теории, т. е. с привлечением моментных функций не выше 2-го порядка. Более полная постановка проблемы выглядела бы так: входной случайный процесс задается семейством своих $n$-мерных плотностей вероятности $p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$. Требуется, зная частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$, определить аналогичные плотности вероятности выходного процесса.

Решение такой задачи в общем случае весьма сложно и в этой книге не рассматривается. Однако часто можно заранее предполагать гауссов характер распределения выходного сигнала независимо от того, каков вид плотностей вероятности случайного процесса на входе.

▲ решите задачу 5

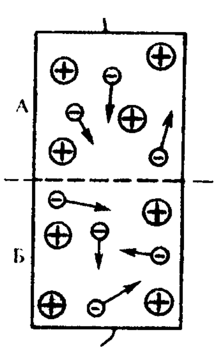
Явление нормализации выходного сигнала присуще любой стационарной линейной системе с достаточно сильно выраженной инерционностью. Дело в том, что в соответствии с формулой Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

мгновенное значение $y(t)$ есть результат взвешенного суммирования предшествующих значений входного сигнала $x(t)$, умноженных на сдвинутую импульсную характеристику цепи. Если протяженность импульсной характеристики во времени такова, что она «захватывает» несколько интервалов корреляции входного случайного процесса, то реализуются условия применимости центральной предельной теоремы (см. гл. 6). Следствием этого является асимптотическая нормальность выходного сигнала. Если же входной случайный процесс нормален, то этим свойством будет обладать случайный процесс на выходе независимо от динамических свойств системы.

Таким образом, методы корреляционной теории являются вполне адекватными для решения большинства задач, связанных с прохождением случайных сигналов через линейные стационарные цепи.

## 10.2 Источники флуктуационных шумов в радиотехнических устройствах

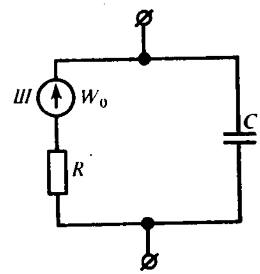



Заряды областей А и Б не равны из-за хаотического движения носителей

В заключительном параграфе этой главы мы познакомимся с теми физическими явлениями, которые порождают флуктуации напряжения и тока в радиотехнических цепях. Нашей целью будет также получение зависимостей, которые используются для оценки интенсивности шумов.

**Тепловые шумы резисторов.** Распространенной причиной возникновения шума являются флуктуации объемной плотности электрического заряда в проводящих телах (резисторах), вызванные хаотическим тепловым движением носителей заряда. Несмотря на электрическую нейтральность системы в целом, внутри объема резистора возникают переменные во времени электромагнитные поля, а на внешних зажимах появляется шумовая разность потенциалов. Спектр шумового напряжения оказывается чрезвычайно широким из-за высокой плотности «упаковки» зарядов и большой средней тепловой скорости. Это обстоятельство позволяет считать, что на частотах радиодиапазона напряжение теплового шума резистора является приближенной физической реализацией белого (дельта-коррелированного) шума.

**Формула Найквиста.** Выведем соотношение для расчета энергетического спектра шумового напряжения на зажимах резистора $R$, находящегося в тепловом равновесии с окружающей его внешней средой при абсолютной температуре $T$. Для этого мысленно включим параллельно резистору вспомогательный элемент — конденсатор $C$ и будем считать, что реальный шумящий резистор эквивалентно заменен последовательным соединением идеального нешумящего резистора $R$ и источника э.д.с., создающего белый шум. Энергетический спектр $W_0$ этого шума требуется определить.




Как известно из курса физики, любая система, находящаяся в тепловом равновесии, обладает средней энергией $kT/2$, приходящейся на одну степень свободы ($k=1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана). Именно такой будет средняя энергия электрического поля, накопленная в конденсаторе нашей цепи, поскольку рассматриваемая цепь является динамической системой 1-го порядка с одной степенью свободы. Итак,

$$C\overline{u_c^2}/2 = kT/2,$$

и поэтому дисперсия шумового напряжения на конденсаторе

$$\sigma^2 = \overline{u_c^2} = kT/C.$$

▲ решите задачу 7

Теперь воспользуемся формулой (10.11), которая связывает дисперсию с энергетическим спектром шумового напряжения. Поскольку

$$W_0/(2RC) = kT/C,$$

то вспомогательная величина $C$ исключается и мы получаем

$$W_0 = 2kTR$$

Практически удобнее пользоваться односторонним энергетическим спектром, который задается только в области положительных частот и имеет размерность В$^2$/Гц:

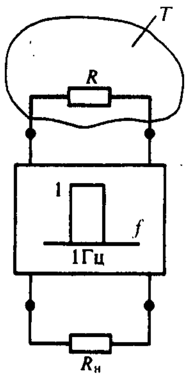
$$\boxed{F_0 = 4kTR\ .} \qquad (10.27)$$

Это замечательное соотношение, носящее название формулы Найквиста, было доказано в конце 20-х годов.

Подчеркнем, что величина $F_0^{*}$ имеет простой и ясный физический смысл *удельной дисперсии* источника теплового шума, которая приходится на полосу частот шириной в 1 Гц.

▲ решите задачу 10

Спектральную плотность мощности тепловых шумов можно оценить из следующего примера: при $T=300$ К и $R=10$ кОм величина $F_0$ составит $1.66\cdot10^{-16}$ В$^2$/Гц, откуда удельное эффективное напряжение шума равно $1.29\cdot10^{-8}$ В/$\sqrt{\text{Гц}}$. Несмотря




на кажущуюся малость, эффект тепловых шумов может явиться решающим фактором, который ограничивает реальную чувствительность приемных устройств.

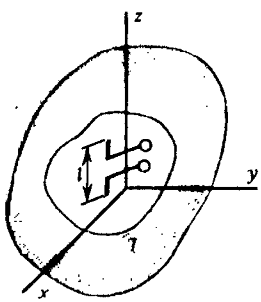
Интересно и важно отметить, что величина мощности шума, которая может быть передана во внешнюю резистивную нагрузку, не зависит от сопротивления $R$. Для доказательства рассмотрим систему, в которой между шумящим сопротивлением $R$ и нагрузкой $R_н$ включен идеальный фильтр с полосой пропускания 1 Гц. Как известно, мощность, передаваемая в нагрузку, максимальна при $R = R_н$ (условие согласования) и равна в нашем случае (Вт/Гц)

$$P_{уд} = \frac{\overline{u^2_{уд}}}{4R} = kT. \tag{10.28}$$

Наилучшие результаты достигаются при охлаждении входных цепей приемников до температуры жидкого гелия ($T$=4.2K)

Поэтому единственным радикальным средством борьбы с тепловыми шумами является глубокое охлаждение входных цепей чувствительных радиоприемных устройств, применяемых в радиолокации, радиоастрономии и системах дальней космической связи.

**Шумы приемных антенн.** Важным, а иногда и определяющим источником шума в радиотехнических устройствах могут явиться хаотические флуктуации электромагнитных полей, создающие шумовое напряжение на выходе приемной антенны.




Пусть простейшая приемная антенна (вибратор Герца) длиной $l$ ориентирована вдоль оси $z$ и помещена внутри замкнутой полости, стенки которой имеют температуру $T$.

В соответствии с законом Планка, известным читателю из курса физики, полость заполнена равновесным электромагнитным излучением, характеризуемым особым спектральным параметром, носящим название *удельной яркости* (Вт/(м$^2$ · Гц·ср))

$$B = \frac{2hf^3}{c^2[\exp(hf/(kT)) - 1]}, \tag{10.29}$$

где $c$ — скорость света; $f$ — частота, Гц; $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц — постоянная Планка. Удельная яркость представляет собой поток электромагнитного излучения, отнесенный к частотному интервалу 1 Гц и приходящий в данную точку из телесного угла в 1 ср.

● удельная яркость

Если $hf \ll kT$, что типично для радиодиапазона, то (10.29) превращается в приближенную *формулу Рэлея — Джинса*

$$B = 2kT/\lambda^2, \tag{10.30}$$

где $\lambda = c/f$ — длина волны.

Введем в рассмотрение величину

$$\overline{E^2_{уд}} = \overline{E^2_{x\,уд}} + \overline{E^2_{y\,уд}} + \overline{E^2_{z\,уд}}$$

— средний квадрат напряженности электрического поля $E$, приходящийся на интервал частот в 1 Гц. В теории электромагнетизма доказывается, что поток мощности излучения (Вт/м$^2$) составит при этом $\overline{E^2_{уд}}/(120\pi) = \overline{E^2_{z\,уд}}/(40\pi)$. Здесь учтено, что из-за полного равноправия всех пространственных направлений $\overline{E^2_{уд}} = 3\overline{E^2_{z\,уд}}$. Деля поток мощности на $4\pi$, т. е. на телесный угол всего пространства, получаем выражение для яркости через полевые величины:

$$B = \overline{E^2_{z\,уд}} \,/\, (160\pi^2). \qquad (10.31)$$

Приравняв правые части (10.30) и (10.31), находим удельный средний квадрат той компоненты электрического поля, которая ориентирована вдоль антенны:

$$\overline{E^2_{z\,уд}} = 320\,\pi^2 kT/\lambda^2 \qquad (10.32)$$

Поскольку на зажимах антенны, малой по сравнению с длиной волны, наводится напряжение $u = El$, получаем удельную дисперсию выходного напряжения:

$$\overline{u^2_{уд}} = 320\,\pi^2 (l/\lambda)^2 kT. \qquad (10.33)$$

Напряженность электрического поля имеет размерность В/м

Если ввести так называемое *сопротивление излучения* (Ом) вибратора Герца

$$R_\Sigma = 80\pi^2 (l/\lambda)^2,$$

то из (10.33) вытекает формула Найквиста для элементарной приемной антенны:

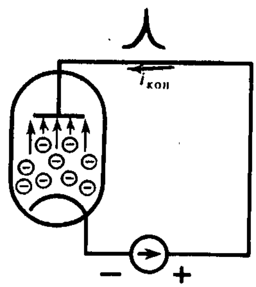
$$\overline{u^2_{уд}} = F_0 = 4\,kTR_\Sigma. \qquad (10.34)$$

Здесь под температурой $T$ понимают температуру равновесной среды, через которую распространяются электромагнитные колебания. В полной мере это справедливо лишь для шумов космического происхождения. Измерения показали, что температура наиболее «холодных» участков небесного свода имеет порядок нескольких кельвинов. В то же время температура в направлении радиогалактик и других естественных источников шумового радиоизлучения может достигать 10 000 К. Если же говорить об атмосферных помехах земного происхождения, то здесь подавляющая часть мощности шума сосредоточена на частотах ниже 30 МГц. Для того чтобы оставить неизменным вид формулы (10.34), приходится вводить шумовую температуру $T_ш$, зависящую от частоты. Спектральный состав атмосфер-

▲ решите задачу 11

ных помех таков, что на частотах порядка 1 МГц температура $T_ш$ в некоторых условиях может достигать $3 \cdot 10^8$ К.

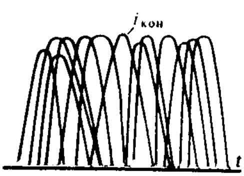
**Дробовой шум.** Распространенным источником флуктуаций в радиотехнических цепях является специфический механизм, обусловленный дискретной природой электрического заряда. В отличие от тепловых шумов флуктуации возникают здесь не за счет беспорядочного теплового движения электронов, а благодаря статистической независимости перемещения носителей тока в электронных приборах.




Рассмотрим, например, диод с нагретым катодом; ток в диоде протекает под действием источника постоянной э. д. с. Этот ток имеет вид хаотического потока электронов, каждый из которых переносит электрический заряд $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Время пролета электрона с катода на анод составляет $\tau_{пр} \approx 10^{-9}$ с. В этот интервал времени во внешних цепях регистрируется короткий импульс так называемого *конвекционного тока*, причем

$$\int_0^{\tau_{пр}} i_{кон}\, dt = e,$$

откуда следует оценка $i_{кон} \approx 1.6 \cdot 10^{-10}$ А.




Эффект перекрытия импульсов

В обычных режимах ток диода составляет несколько миллиампер, поэтому импульсы конвекционного тока густо перекрываются во времени.

Акты вылета отдельных электронов с катода можно считать статистически независимыми событиями. Отсюда ясно, что мгновенное значение анодного тока диода не остается постоянным, а претерпевает некоторые флуктуации. В этом смысле любой электронный прибор служит источником особого шума, который в физике и радиотехнике получил название *дробового шума*.

**Распределение Пуассона.** Обозначим символом $\nu$ среднее число электронов, прибывающих на анод за 1 с. Эксперимент убедительно говорит о том, что эта числовая характеристика является статистически устойчивой, т. е. стационарной. Постоянная составляющая анодного тока связана с параметром $\nu$ простым соотношением

$$I_0 = e\nu .$$

Число $\nu$ весьма велико: при $I_0 = 1$ мА имеем оценку $\nu \approx 10^{16}$ 1/с.

Все рассуждения справедливы также для процесса инжекции носителей в полупроводниковых приборах

Переходя к статистическому анализу процесса, сделаем одно упрощающее предположение, несущественное физически, но облегчающее расчеты: представим себе, что в промежутке катод — анод электроны следуют друг за другом «цепочкой».

так что вероятность парных или более сложных приходов электронов на анод пренебрежимо мала.

Дискретная сущность рассматриваемой задачи дает возможность считать, что если $A$ — событие прихода электрона на анод в интервале $(t,\ t+\Delta t)$, то с точностью до малых величин порядка $(\Delta t)^2$ вероятность этого события

$$P_A = \nu\,\Delta t. \qquad (10.35)$$

Обозначим через $P_0(t)$ вероятность не иметь ни одного пришедшего электрона за промежуток времени от 0 до $t$. При этом $P_0(t+\Delta t)$ будет вероятностью сложного события — ни одного электрона не должно появиться на аноде ни в интервале $(0,\ t)$, ни в интервале $(t,\ t+\Delta t)$. На основании свойства вероятности сложного события

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\,(1-\nu\,\Delta t)\,.$$

Сложное событие образовано двумя независимыми событиями

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_0}{dt} = -\nu\,P_0$$

с очевидным начальным условием $P_0(0)=1$.

Решение этой задачи элементарно:

$$P_0(t) = \exp(-\nu t).$$

Поскольку $\nu \approx 10^{16}$ 1/с, то вероятность не иметь ни одного пришедшего электрона за интервал времени длительностью 1 с составит $\exp(-10^{16})$, что с полным основанием можно считать вероятностью невозможного события.

Изучим вероятность $P_1(t)$ наблюдать ровно один пришедший электрон. На интервале времени $(0,\ t+\Delta t)$ эта вероятность складывается из вероятности двух несовместных событий:

а) электрон прибывает в интервале $(0,\ t)$;

б) электрон прибывает в интервале $(t,\ t+\Delta t)$.

По правилу сложения вероятностей,

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\,(1-\nu\,\Delta t) + P_0(t)\,\nu\,\Delta t\,,$$

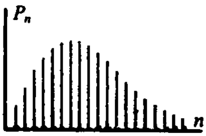
откуда следует дифференциальное уравнение

$$dP_1\,/\,dt = -\nu\,P_1 + \nu P_0$$

с начальным условием $P_1(0)=0$. Аналогично получается начальная задача, решение которой описывает прибытие на анод ровно $n$ электронов:

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_n/\mathrm{d}t = -\nu P + \nu P_{n-1}, \\ P_n(0) = 0. \end{cases} \tag{10.36}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что



Распределение Пуассона

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\nu t)^n}{n!}\, e^{-\nu t}.} \tag{10.37}$$

● Формула (10.37) определяет *закон распределения Пуассона*, который встречается во многих задачах статистической радиотехники. Если целочисленная величина распределена по закону Пуассона, то в отдельных испытаниях редко будут наблюдаться значительные отклонения от среднего значения как в одну, так и в другую сторону.

**Моменты пуассоновской случайной величины.** Возьмем некоторый отрезок времени $T$ и подсчитаем среднее число прибывших электронов:

$$\overline{n}_T = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{(\nu T)^n}{n!}\, e^{-\nu T} = \nu T\, e^{-\nu T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu T)^{n-1}}{(n-1)!} = \nu T. \tag{10.38}$$

Смысл этой формулы нагляден — он подтверждает исходное предположение о том, что $\nu$ — средняя интенсивность потока электронов. Теперь найдем средний квадрат числа прибывших за это время электронов:

$$\overline{n_T^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\frac{(\nu T)^n}{n!}\, e^{-\nu T} = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)+n]\,\frac{(\nu T)^n}{n!}\, e^{-\nu T} =$$

$$= \nu T + (\nu T)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\nu T)^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{-\nu T} = \nu T + (\nu T)^2. \tag{10.39}$$

Используя (10.38) и (10.39), получаем дисперсию числа электронов

$$\sigma_n^2 = \overline{n_T^2} - \overline{n}_T^2 = \nu T. \tag{10.40}$$

**Статистические свойства тока диода.** Перейдем к вычислению тока, протекающего через диод. Если за время $T$ на анод попало $n$ электронов, то ток $i_T$, отнесенный к интервалу наблюдения, найдется так:

$$i_T = en/T.$$

Среднее значение наблюдаемого тока

$$I_0 = \overline{i}_T = (e/T)\overline{n}_T = e\nu. \tag{10.41}$$

В то же время дисперсия тока

$$\sigma_i^2 = (e^2/T^2)\,\sigma_n^2 = (e/T)\,I_0. \tag{10.42}$$

Если за меру интенсивности флуктуаций тока взять отношение среднеквадратичного отклонения к среднему значению, то

$$\sigma_i/I_0 = \sqrt{e/T}\,/\,\sqrt{I_0}\,. \tag{10.43}$$

Вывод, следующий из формулы (10.43), таков: относительные флуктуации тока диода падают с увеличением времени наблюдения и ростом среднего тока.

**Пример 10.5.** *Пусть* $I_0 = 10^{-2}$ А *и время наблюдения* $T = 1$ с.

Тогда дисперсия тока за время наблюдения $\sigma_i^2 = 1.6 \cdot 10^{-21}$ А$^2$ и ток в диоде будет оценен следующим образом:

$$i = 10^{-2} \pm 4 \cdot 10^{-11}\ \text{А}.$$

Видно, что относительные флуктуации тока здесь очень невелики. Если же существенно сократить как средний ток, так и время наблюдения, положив $I_0 = 10^{-8}$А и $T = 10^{-8}$ с, то $\sigma_i^2 = 1.6 \cdot 10^{-19}$ А$^2$, так что

$$i = 10^{-8} \pm 4 \cdot 10^{-10}\ \text{А},$$

▲ решите задачу 12

т. е. относительные флуктуации тока существенно возрастают.

Рассмотренный пример объясняет, почему мы не наблюдаем случайных колебаний стрелки магнитоэлектрического измерительного прибора, включенного последовательно в цепь диода. Здесь за счет инерционности механической системы прибора происходит усреднение измеряемого тока на отрезке времени порядка секунды.

**Формула Шоттки.** Чем меньше время анализа $T$, тем большую полосу частот в спектре процесса приходится учитывать. По теореме Котельникова, для того чтобы провести какую-либо обработку сигнала за время $T$, регистрирующая система должна быть способна пропускать все частоты вплоть до частоты $f_в$, удовлетворяющей соотношению

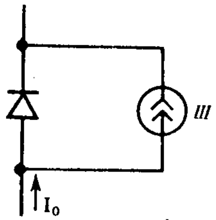
$$T = 1/(2f_в).$$

Воспользовавшись этим в формуле (10.42), имеем

$$\sigma_i^2 = 2eI_0 f_в\ ,$$

откуда удельная дисперсия флуктуационного тока (А$^2$/Гц), приходящаяся на 1 Гц полосы частот, равна

$$\boxed{\overline{i_{уд}^2} = 2eI_0.} \tag{10.44}$$

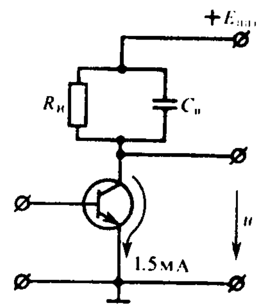



Это важное соотношение получило в радиотехнике название *формулы Шоттки*. Согласно ей, эквивалентная шумовая схема любого электронного прибора содержит в себе источник тока, создающий белый шум со спектральной плотностью, описываемой формулой (10.44).

Эксперименты показывают, что дробовой шум электронных приборов имеет постоянный энергетический спектр вплоть до частот в несколько сотен мегагерц, а затем начинает уменьшаться с ростом частоты. Это связано с тем, что на очень высоких частотах (при малых временах $T$) несправедливой становится принятая модель шума, согласно которой за время наблюдения на анод должно приходить достаточно большое число электронов. Кроме того, начинает сказываться уменьшение спектральной плотности шума из-за конечной длительности элементарного импульса конвекционного тока.

---

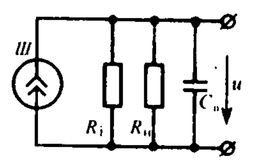
**Пример 10.6.** *Однокаскадный транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой имеет следующие параметры:* $R_н=5.1$ кОм, $C_п=45$ пФ, $R_i=20$ кОм. *Рабочая точка на характеристике транзистора выбрана таким образом, что постоянная составляющая тока коллектора* $I_0=1.5$ мА. *Вычислить эффективное шумовое напряжение на выходе, обусловленное дробовым шумом транзистора.*




Прежде всего по формуле Шоттки находим энергетический спектр источника шумового тока:

$$F_0 = 2eI_{ок} = 2\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 1.5\cdot 10^{-3} = 4.8\cdot 10^{-22}\ \text{А}^2/\text{Гц}.$$

Составляя эквивалентную схему замещения выходной цепи усилителя, замечаем, что здесь роль частотного коэффициента передачи системы играет комплексное сопротивление, включенное параллельно источнику тока:




$$Z(j\omega) = \frac{R_{экв}}{1 + j\omega C_п R_{экв}},$$

где $R_{экв}=R_н R_i/(R_н+R_i)$. В данном случае $R_{экв}=5.1\cdot 20/25.1=4.06$ кОм. Дисперсия шумового напряжения на выходе усилителя вычисляется по формуле (10.22):

$$\sigma_u^2 = F_0\int_0^\infty |Z(j2\pi f)|^2\,df = F_0 R_{экв}^2\int_0^\infty \frac{df}{1+4\pi^2 R_{экв} C_п f^2} =$$

$$= \frac{F_0 R_{экв}}{4C_п} = 1.16\cdot 10^{-8}\ \text{В}^2.$$

Наконец, вычисляем эффективное напряжение шума на выходе:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = 108\ \text{мкВ}.$$

Подобные расчеты приходится выполнять каждый раз, определяя предельную чувствительность усилителей малых сигналов. Для этого поступают так: эффективное напряжение шума приводят ко входу по формуле

$$\sigma_{\text{вх}} = \sigma_{\text{вых}}/K,$$

где $K$ — коэффициент усиления системы на частоте сигнала. Полученную величину считают за минимальный уровень эффективного напряжения полезного гармонического сигнала, который может усиливаться данным устройством:

$$U_{mc}^{\min} = \sqrt{2}\,\sigma_{\text{вх}}.$$

Так, в рассматриваемом примере при крутизне характеристики транзистора $S = 20$ мА/В коэффициент усиления на нулевой частоте

$$K = SR_{\text{экв}} = 81.2,$$

поэтому $\sigma_{\text{вх}} = 108/81.2 = 1.33$ мкВ и минимальная амплитуда усиливаемого сигнала $U_{mc}^{\min} = 1.33\sqrt{2} = 1.88$ мкВ (предполагается, что его частота существенно ниже граничной частоты усилителя).

## Результаты

- *Если на входе линейной системы среднее значение стационарного случайного сигнала равно нулю, то таково же и среднее значение выходного сигнала.*
- *Энергетический спектр выходного случайного сигнала равен энергетическому спектру сигнала на входе, умноженному на квадрат модуля частотного коэффициента передачи.*
- *Функция автокорреляции сигнала на выходе интегрирующей RC-цепи, возбуждаемой белым шумом, имеет экспоненциальный характер.*
- *Выходной сигнал резонансного усилителя, на вход которого подан белый шум, является узкополосным случайным процессом.*
- *Если линейная стационарная цепь достаточно инерционна, то случайный процесс на ее выходе асимптотически нормален независимо от статистических свойств входного случайного процесса.*
- *Возникновение тепловых шумов в резисторах обусловлено случайными флуктуациями плотности электрического заряда. На всех частотах радиодиапазона тепловой шум резистора имеет практически постоянную спектральную плотность мощности.*
- *Энергетический спектр теплового шума вычисляется по формуле Найквиста.*
- *Эквивалентная шумовая температура приемных антенн зависит от частотного диапазона и колеблется в пределах от нескольких единиц до миллионов кельвинов.*
- *Явление дробового шума электронных приборов связано с дискретной природой заряда и статистической независимостью движения отдельных носителей.*
- *Статистические свойства потока электронов описываются распределением Пуассона*

◇◇ *Электронный прибор, в котором наблюдается дробовой эффект, эквивалентно заменяется источником шумового тока с равномерным спектром; энергетический спектр тока устанавливается формулой Шоттки.*

## Вопросы

1. Какую роль играет свойство стационарности входного случайного процесса при выводе формулы, определяющей энергетический спектр случайного процесса на выходе?
2. Как выглядят примерные графики функций автокорреляции случайных сигналов: а) на выходе интегрирующей $RC$-цепи, б) на выходе одноконтурного резонансного усилителя? Входной сигнал — белый шум. Являются ли реализации дифференцируемыми в статистическом смысле?
3. В чем состоят характерные отличия автокорреляционной функции случайного сигнала на выходе двухзвенной $RC$-цепи, возбуждаемой белым шумом?
4. В каком случае реальный процесс, действующий на выходе реальной цепи, можно заменить белым шумом?
5. Что такое шумовая полоса пропускания цепи?
6. Каковы физические факторы, ведущие к нормализации сигнала на выходе линейной цепи?
7. Опишите механизм возникновения тепловых шумов в резисторах. Каков частотный диапазон, в пределах которого тепловой шум можно считать белым?
8. Чем определяется шумовое напряжение на зажимах приемной антенны?
9. Опишите природу дробового шума, возникающего в электронных приборах.
10. Напишите формулу распределения Пуассона и поясните физический смысл параметра $\nu$.
11. Как выглядит эквивалентная схема, описывающая шумовые свойства прибора, в котором наблюдается дробовой эффект?
12. Как распределен по частоте энергетический спектр дробового шума?

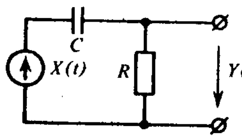
## Задачи

1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ с энергетическим спектром

$$W_x(\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\omega_в,\\ W_0, & -\omega_в<\omega<\omega_в\\ 0, & \omega>\omega_в\end{cases}$$

подан на вход интегрирующей $RC$-цепи. Найдите дисперсию выходного сигнала.

2. Решите задачу 1 при условии, что заданный сигнал подается на вход дифференцирующей цепи:




3. Напряжение, действующее на входе идеального ФНЧ с коэффициентом передачи

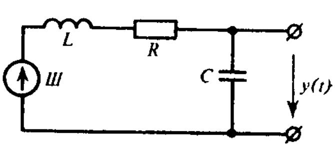
$$K(j\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\omega_в,\\ K_0, & -\omega_в<\omega<\omega_в,\\ 0, & \omega>\omega_в,\end{cases}$$

где $\omega_в$ — верхняя частота полосы пропускания, представляет собой стационарный случайный процесс с функцией автокорреляции

$$K_x(\tau)=\sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Вычислите энергетический спектр, автокорреляционную функцию и дисперсию выходного напряжения.

4. На входе последовательного колебательного контура действует источник э.д.с вида



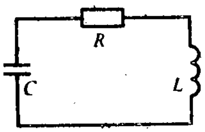
белого шума с энергическим спектром $W_0$ на всех частотах. Определите энергетический спектр и автокорреляционную функцию выходного напряжения $y(t)$.

5. На входе однокаскадного резонансного усилителя включен источник э.д.с., создающий белый гауссов шум с энергетическим спектром $F_0=10^{-15}$ В²/Гц. Параметры усилителя: $K_{\text{рез}}=100$, $Q_{\text{экв}}=110$, $f_{\text{рез}}=15$ МГц. Вычислите вероятность события, состоящего в том, что случайное шумовое напряжение на выходе превышает уровень 2 мВ.

6. Выведите формулу, определяющую энергетический спектр выходного сигнала двухзвенного $RC$-фильтра (см. пример 10.3), если на входе создано шумовое напряжение с функцией автокорреляции

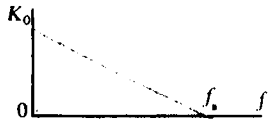
$$K_x(\tau)=\sigma_x^2\exp(-\alpha|\tau|).$$

7. Колебательный контур




с параметрами $R=8$ Ом, $L=1.5$ мкГн, $C=120$ пФ помещен в среду с температурой $T=400$ К. Вычислите дисперсию шумового напряжения на индуктивном элементе, а также шумовую полосу пропускания цепи.

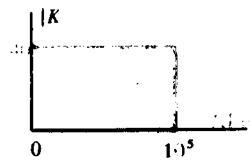
8. Модуль частотного коэффициента передачи ФНЧ линейно падает с ростом частоты в диапазоне $(0, f_в)$:




Вычислите шумовую полосу пропускания системы.

9. Определите шумовую полосу пропускания двухзвенного $RC$-фильтра, рассмотренного в примере 10.3.

10. Резистор $R=10$ кОм, находящийся при температуре $T=300$ К, включен на вход идеального ФНЧ со следующей частотной характеристикой:




Определите дисперсию и автокорреляционную функцию выходного сигнала фильтра.

11. Антенна СВЧ с сопротивлением излучения $R_\Sigma=2.5$ Ом принимает сигналы из области пространства с температурой $T=20$ К. Полоса пропускания системы равна 400 МГц. Каково эффективное напряжение шума на зажимах антенны?

12. Оцените дисперсию выходных показаний инерционного прибора, измеряющего ток диода. Постоянная составляющая тока 0.3 мА, характерное время интегрирования (постоянная времени) прибора 2 с.

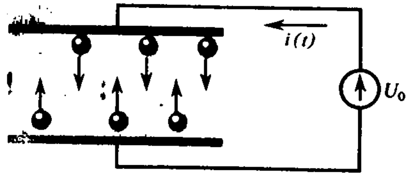
## Более сложные задания

13. Случайный процесс $X(t)$ с автокорреляционной функцией $K_x(t_1, t_2)$ действует на входе линейной стационарной системы, для которой известна импульсная характеристика $h(t)$. Прямым вычислением, используя интеграл Дюамеля, покажите, что функция автокорреляции выходного сигнала описывается формулой

$$K_y(t_1, t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K_x(\xi_1, \xi_2)\cdot h(t_1-\xi_1)\,h(t_2-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,$$

т. е. является двумерной сверткой функций $K_x(t_1,t_2)$ и $h(t)$.

14. Исследуйте статистические характеристики случайного тока в системе, где между обкладками конденсатора под действием сил электрического поля движется множество легких проводящих тел (например, частицы металлической пыли, небольшие кусочки фольги и т. п.). Количество одновременно движущихся частиц считается достаточно большим для того, чтобы можно было применить статистические методы анализа.




Оцените дисперсию и ширину спектра процесса в зависимости от физических параметров устройства. Продумайте способ демонстрации описанного здесь эффекта. Предложите его интерпретацию с помощью модели дробового шума. Проанализируйте влияние вязкости среды на ширину спектра мощности.

# Глава 11

# Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях

Все радиотехнические цепи, рассмотренные нами ранее, относились к классу линейных систем. Замечательной особенностью линейной цепи является справедливость для нее принципа суперпозиции. Из этого принципа вытекает простое и важное следствие: гармонический сигнал, проходя через линейную стационарную систему, остается неизменным по форме, приобретая лишь другую амплитуду и начальную фазу.

Однако именно поэтому линейная стационарная система неспособна обогатить спектральный состав колебаний, поданных на ее вход. Это обстоятельство в значительной степени сужает класс полезных преобразований сигналов, которые осуществляются линейными цепями с постоянными параметрами.

Гораздо большими возможностями в этом отношении обладают нелинейные системы, характерные тем, что в них связь между входным сигналом $u_{\text{вх}}(t)$ и выходной реакцией $u_{\text{вых}}(t)$ устанавливается нелинейной функциональной зависимостью

$$\boxed{u_{\text{вых}}(t) = f(u_{\text{вх}}, t).} \tag{11.1}$$

В настоящей главе будут рассматриваться некоторые общие закономерности, присущие нелинейным системам, приемы математического исследования, а также важнейшие виды полезных преобразований сигналов, которые осуществляются с помощью нелинейных цепей и устройств.

## 11.1 Безынерционные нелинейные преобразования

Исследование нелинейной цепи в общем случае — задача весьма сложная в том отношении, что при математическом описании внутреннего состояния системы мы приходим к проблеме решения нелинейных дифференциальных уравнений. Известно, что применительно к ним оказываются несправедливыми большинство приемов и методов, которые позволяют относительно легко решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Тем не менее возможны случаи, когда исследование нелинейных систем удается довести до конца относительно простыми способами. Для этого достаточно потребовать, чтобы нелинейная зависимость вида (11.1) *не содержала явно времени.* Физически такое требование означает *безынерционность* нелинейного элемента, т. е. мгновенное установление выходной реакции вслед за изменением внешнего входного воздействия.

☒

☐ условие безынерционности

Безынерционных нелинейных элементов, строго говоря, не существует. Однако эта идеализация достаточно точна, если характерное время изменения входного сигнала значительно превышает время установления процесса внутри самого нелинейного элемента.

Для радиотехники нелинейные элементы — это чаще всего полупроводниковые приборы — диоды и транзисторы. Принцип их работы основан на эффекте диффузии неосновных носителей тока в областях полупроводникового материала, непосредственно прилегающих к *p-n*-переходам. Современные полупроводниковые приборы весьма совершенны по своим частотным свойствам. Равновесное (стационарное) состояние может устанавливаться в них за время порядка $10^{-11}$ с. Поэтому предположение о безынерционном характере внутренних процессов в нелинейных радиотехнических элементах часто бывает оправданным.

**Внешние характеристики безынерционных нелинейных элементов.** Функциональная зависимость вида (11.1) может рассматриваться как простейшая математическая модель нелинейного элемента. Особенность ее состоит в том, что здесь никак не фигурируют процессы, происходящие внутри элемента. Принято говорить, что здесь мы имеем дело с внешней характеристикой системы.

Ниже для конкретности будут рассматриваться внешние характеристики нелинейных двухполюсников, когда входным сигналом служит напряжение $u$, а выходным сигналом — ток $i$, протекающий в двухполюснике. Зависимость $i(u)$ обычно при-

**вольт-амперная характеристика**

нято называть *вольт-амперной характеристикой* нелинейного элемента. Все методы и результаты можно перенести на случай нелинейного четырехполюсника, например транзистора, работающего в нелинейном режиме при больших амплитудах входного сигнала. Здесь выходная цепь представляется источником тока, управляемым выходным напряжением; связь между мгновенными значениями напряжения и тока оказывается существенно нелинейной.

Используемые на практике нелинейные элементы имеют весьма разнообразные внешние характеристики. Так, можно выделить класс элементов с однозначными вольт-амперными характеристиками (рис. 11.1, *а*) и класс элементов, характеристики которых содержат участки многозначности (рис. 11.1, *б*).

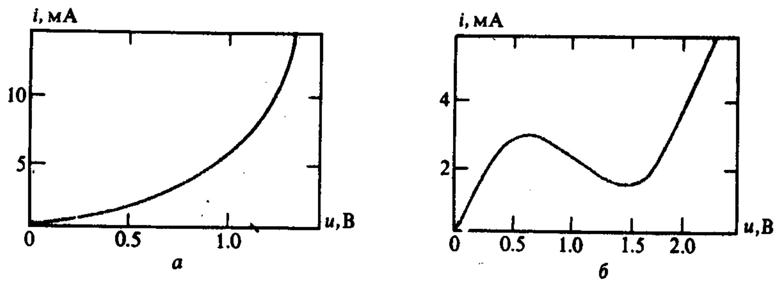


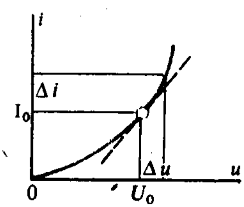

Рис. 11.1. Типичные вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников:

*а* — однозначная характеристика полупроводникового диода; *б* — характеристика туннельного диода, отличающаяся тем, что одному и тому же току могут отвечать три различных значения напряжения

**Сопротивление нелинейного двухполюсника.** Понятие сопротивления для нелинейного двухполюсника можно определить по-разному. Пусть $i(u)$ — вольт-амперная характеристика. Приложив постоянное напряжение $u=U_0$, имеем в цепи ток $I_0=$ $=i(U_0)$. Отношение

$$R_{=}=U_0/I_0 \tag{11.2}$$

называют *сопротивлением данного элемента постоянному току*. В отличие от обычного сопротивления линейного резистора величина $R_{=}$ не постоянна, а зависит от приложенного напряжения.




Часто приходится иметь дело с одновременным воздействием на нелинейный элемент двух источников э. д. с.: $U_0$ и $\Delta u$, причем $|\Delta u|/|U_0|\ll 1$. Разложив вольт-амперную характеристику в ряд Тейлора в окрестности точки $U_0$, находим ток $i \approx I_0 + i'(U_0)\Delta u$.

Отношение приращения напряжения к приращению тока в выбранной рабочей точке ($U_0$, $I_0$) называют *дифференциальным сопротивлением* нелинейного двухполюсника:

$$R_{\text{диф}} = \Delta u / \Delta i = 1 / i'(U_0). \qquad (11.3)$$

**дифференциальные сопротивление и крутизна**

Иногда удобнее пользоваться *дифференциальной крутизной характеристики*

$$S_{\text{диф}} = 1/R_{\text{диф}} = \left.\frac{di}{du}\right|_{u=U_0}, \qquad (11.4)$$

которая является тангенсом угла наклона касательной вольт-амперной характеристики в данной рабочей точке.

Подчеркнем, что введение понятий дифференциального сопротивления или дифференциальной крутизны, по сути дела, — линеаризация реальной вольт-амперной характеристики. Такая линеаризация справедлива лишь для малых приращений сигнала относительно рабочей точки.

**Способы описания характеристик нелинейных элементов.** Как правило, вольт-амперные характеристики нелинейных элементов получают экспериментально; гораздо реже удается найти их теоретически. Для аналитического изучения процессов в радиотехнических цепях, содержащих такие элементы, необходимо прежде всего отобразить вольт-амперные характеристики в математической форме, пригодной для расчетов.

Простым и весьма точным способом может явиться представление характеристики в виде таблицы. Этот способ особенно удобен для анализа процессов с помощью ЭВМ; аргумент и функция хранятся в памяти машины в виде двумерного массива чисел. Можно получить любую заданную точность, выбирая шаг таблицы достаточно малым, а также используя интерполяцию.

Если исследование должно проводиться не численными, а аналитическими методами, то возникает задача подбора такой аппроксимирующей функции, которая, будучи достаточно простой, отражала бы все важнейшие особенности экспериментально снятой характеристики.

В радиотехнике чаще всего используют следующие приемы аппроксимации нелинейных характеристик.

**Кусочно-линейная аппроксимация.** Способ основан на приближенной замене реальной характеристики отрезками прямых линий с различными наклонами. Обычно применяется при расчете процессов в нелинейных элементах при больших амплитудах внешних воздействий. В качестве примера на рис. 11.2 показана входная характеристика реального транзистора, аппроксимированная двумя отрезками прямых.

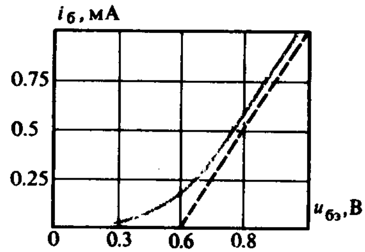



Рис. 11.2. Входная характеристика транзистора КТ306 — зависимость тока базы от напряжения база — эмиттер

Аппроксимация определяется двумя параметрами — напряжением начала характеристики $U_н$ и крутизной $S$, имеющей размерность проводимости. Математическая форма записи такова:

$$i(u)=\begin{cases}0, & u<U_н,\\ S(u-U_н), & u>U_н.\end{cases} \tag{11.5}$$

Предполагается, что ток базы значительно меньше тока коллектора

Напряжение начала входных характеристик биполярных транзисторов имеет порядок 0.2—0.8 В; крутизна характеристики тока базы, как правило, около 10 мА/В. Если же говорить о крутизне характеристики тока коллектора в зависимости от напряжения на базе, то последняя цифра должна быть умножена на $h_{21э}$ — коэффициент усиления тока базы. Поскольку $h_{21э} = 100 \div 200$, то указанная крутизна имеет порядок нескольких ампер на вольт.

**Степенная аппроксимация.** Этот прием аппроксимации основан на разложении нелинейной вольт-амперной характеристики $i(u)$ в ряд Тейлора, сходящийся в некоторой окрестности рабочей точки $U_0$:

Общая формула $a_n = \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n i}{du^n}\right|_{u=U_0}$

$$i(u)=a_0+a_1(u-U_0)+a_2(u-U_0)^2+\dots\,. \tag{11.6}$$

Здесь коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... — вещественные числа. Количество членов разложения определяется из заданной точности расчетов.

Степенная аппроксимация широко используется при анализе работы нелинейных устройств, на которые подаются относительно малые внешние воздействия. Способ нахождения коэффициентов степенной аппроксимации иллюстрируется следующим простым примером.

**Пример 11.1.** *Экспериментально снятая входная характеристика* $i_б=f(u_{бэ})$ *транзистора* КТ301 *задана графиком на рис.* 11.3. *Найти коэффициенты* $a_0$, $a_1$ *и* $a_2$, *определяющие аппроксимацию вида* $i_б=a_0+a_1(u_{бэ}-U_0)+a_2(u_{бэ}-U_0)^2$ *в окрестности рабочей точки* $U_0=0.7$ В.

Выбираем в качестве узлов аппроксимации точки 0.5, 0.7 и 0.9 В. Как видно из построения, чтобы найти неизвестные коэффициенты, следует решить систему уравнений:

▲ решите задачу 1

$$a_0-0.2a_1+0.04a_2=0.05,$$
$$a_0=0.15,$$
$$a_0+0.2a_1+0.04a_2=0.5,$$

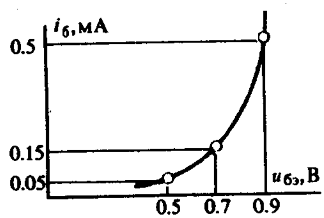



Рис. 11.3. Степенная аппроксимация входной характеристики транзистора

откуда $a_0=0.15$ мА, $a_1=1.125$ мА/В, $a_2=3.125$ мА/В$^2$.

Подчеркнем, что степенная аппроксимация есть способ преимущественно *локального* описания характеристик; пользоваться им при значительных отклонениях мгновенных значений входного сигнала от рабочей точки нецелесообразно из-за существенного ухудшения точности.

**Показательная аппроксимация.** Теория работы *p-n*-перехода устанавливает вид вольт-амперной характеристики полупроводникового диода в области $u>0$ вблизи начала координат:

$$i(u)=i_0\left[\exp(u/u_т)-1\right]. \qquad (11.7)$$

Здесь $i_0$ — начальный ток перехода, $u_т$ — тепловой потенциал, равный 25 мВ для кремниевых приборов при стандартной температуре 300 К.

Показательная зависимость вида (11.7) часто используется при изучении нелинейных явлений в радиотехнических цепях, содержащих полупроводниковые устройства. Аппроксимация вполне точна при значениях тока, не превышающих нескольких миллиампер. При больших токах экспоненциальная характеристика плавно переходит в прямую линию из-за влияния объемного сопротивления полупроводникового материала.

## 11.2 Спектральный состав тока в безынерционном нелинейном элементе при гармоническом внешнем воздействии

Рассмотрим явления в простейшей цепи, образованной источником гармонической э. д. с. сигнала

$$u_c(t) = U_m \cos \omega t,$$

которая вместе с источником постоянной э. д. с. смещения $U_0$ действует на входных зажимах безынерционного нелинейного элемента. Найдем форму тока в цепи, воспользовавшись несложными графическими построениями, приведенными на рис. 11.4.

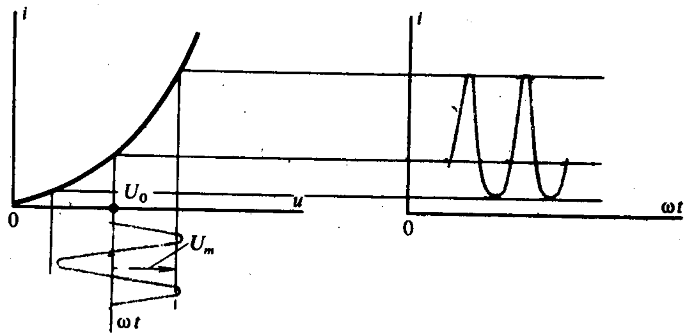



Рис. 11.4. Графическое построение кривой, отображающей изменение тока в безынерционной нелинейной цепи

Легко видеть, что формы тока и напряжения оказываются здесь различными. Причина искажения кривой тока очень проста: *одинаковым приращениям напряжения отвечают неодинаковые приращения тока*, поскольку

$$\Delta i = S_{\text{диф}}(u)\, \Delta u,$$

а дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики на различных участках также различна.

**Основной принцип.** Подойдя к описанной задаче аналитически, заметим, что функция

$$i(t) = i(U_0 + U_m \cos \omega t),$$

описывающая мгновенные значения тока, является периодической с периодом $T = 2\pi/\omega$ и поэтому всегда может быть представлена рядом Фурье

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + \varphi_n). \tag{11.8}$$

**спектральный состав тока в безынерционном нелинейном двухполюснике**

Физически это означает, что ток в безынерционном нелинейном элементе есть сумма постоянной составляющей и, вообще говоря, бесконечного набора гармоник с частотами ω, 2ω, 3ω, ...

При технических расчетах важнейшая задача — нахождение амплитуд спектральных составляющих тока ($I_0$, $I_1$, $I_2$, ...) в зависимости от напряжения смещения и амплитуды возбуждающего напряжения $U_m$. Решение проводится по-разному в зависимости от вида аппроксимирующей функции.

**Кусочно-линейная аппроксимация.** Форма тока в цепи, содержащей нелинейный элемент с характеристикой

$$i = \begin{cases} S(u - U_{\text{н}}), & u > U_{\text{н}}, \\ 0, & u < U_{\text{н}}, \end{cases} \tag{11.9}$$

на который подано напряжение $u = U_0 + U_m \cos \omega t$, видна из построения на рис. 11.5.

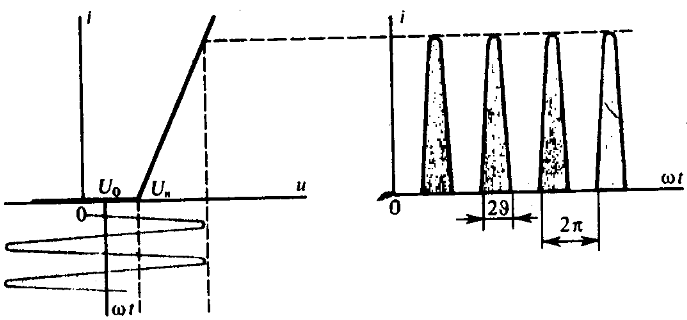



Рис. 11.5. Ток в цепи, содержащей элемент с кусочно-линейной характеристикой

График тока имеет характерный вид косинусоидальных импульсов с отсечкой. Спектральный состав такого периодического процесса подробно изучался в гл. 2.

Угол отсечки импульсов тока определится из равенства

$$U_0 + U_m \cos \vartheta = U_{\text{н}},$$

откуда

$$\boxed{\cos \vartheta = \frac{U_{\text{н}} - U_0}{U_m}.} \tag{11.10}$$

Постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока вычисляются по формулам

$$\begin{cases} I_0 = SU_m\gamma_0(\vartheta), \\ I_n = SU_m\gamma_n(\vartheta), \end{cases} \tag{11.11}$$

в которые входят соответствующие функции Берга $\gamma_n(\vartheta)$.

---

**Пример 11.2.** *Нелинейный элемент имеет кусочно-линейную вольт-амперную характеристику со следующими параметрами:* $U_н = 0.6$ В, $S = 25$ мА/В. *К элементу приложено напряжение* $u = 0.2 + 0.8\cos\omega t$, В. *Вычислить постоянную составляющую* $I_0$ *и первую гармонику* $I_1$ *протекающего тока.*

Поскольку

$$\cos\vartheta = \frac{0.6 - 0.2}{0.8} = 0.5, \text{ то } \vartheta = 60°.$$

Значения функций Берга:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta) = 0.109,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi}(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta) = 0.196.$$

По формулам (11.11) находим:

$$I_0 = 25\cdot 0.8\cdot 0.109 = 2.18 \text{ мА},$$

$$I_1 = 25\cdot 0.8\cdot 0.196 = 3.92 \text{ мА}.$$

---

**Степенная аппроксимация.** Пусть

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \ldots;$$

напряжение, приложенное к нелинейному двухполюснику,

$$u(t) = U_0 + U_m\cos\omega t. \tag{11.12}$$

Воспользовавшись известными формулами

$$\cos^2 x = {}^1/_2\ (1 + \cos 2x),$$

$$\cos^3 x = {}^1/_4\ (3\cos x + \cos 3x),$$

$$\cos^4 x = {}^1/_8\ (3 + 4\cos 2x + \cos 4x),$$

$$\cos^5 x = {}^1/_{16}\ (10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

представим равенство (11.12) так:

$$i = (a_0 + {}^1/_2\, a_2 U_m^2 + {}^3/_8\, a_4 U_m^4 + \ldots) +$$

$$+ (a_1 U_m + {}^3/_4\, a_3 U_m^3 + {}^5/_8\, a_5 U_m^5 + \ldots)\cos\omega t +$$

$$+(\tfrac{1}{2}a_2U_m^2+\tfrac{1}{8}a_4U_m^4+\ldots)\cos 2\omega t+$$
$$+(\tfrac{1}{4}a_3U_m^3+\tfrac{5}{16}\,a_5U_m^5+\ldots)\cos 3\omega t+\ldots \qquad (11.13)$$

Отсюда вытекают следующие соотношения для расчета постоянной составляющей тока и амплитуд гармоник:

$$\boxed{\begin{aligned} I_0 &= a_0+\tfrac{1}{2}a_2U_m^2+\tfrac{3}{8}a_4U_m^4+\ldots;\\ I_1 &= a_1U_m+\tfrac{3}{4}a_3U_m^3+\tfrac{5}{8}a_5U_m^5+\ldots;\\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\,a_2U_m^2+\tfrac{1}{8}a_4U_m^4+\ldots;\\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\,a_3U_m^3+\tfrac{5}{16}\,a_5U_m^5+\ldots \end{aligned}} \qquad (11.14)$$

Обратим внимание на то, что постоянная составляющая и амплитуды четных гармоник определяются коэффициентами ряда Тейлора с четными номерами; нечетные гармоники зависят лишь от нечетных коэффициентов.

**Показательная аппроксимация.** В случае, когда вольт-амперная характеристика двухполюсника аппроксимируется выражением

$$i(u)=i_0\,[\exp(au)-1],$$

вычисление спектра тока основано на использовании формулы

$$e^{x\cos\omega t}=I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(x)\cos n\omega t, \qquad (11.15)$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя $n$-го индекса.

Если к нелинейному двухполюснику с экспоненциальной характеристикой приложена сумма напряжений смещения и гармонического сигнала, т. е.

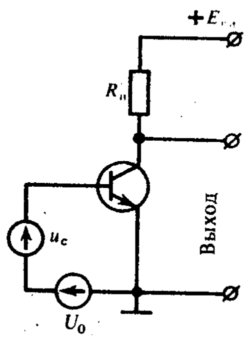
$$u=U_0+U_m\cos\omega t,$$

то

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= i_0\,[e^{aU_0}I_0(aU_m)-1]+\\ &+2i_0e^{aU_0}\sum_{n=1}^{\infty}I_n(aU_m)\cos n\omega t. \end{aligned}} \qquad (11.16)$$

**Нелинейные искажения в усилителе с резистивной нагрузкой.** Вопросы трансформации спектра входного сигнала в нелинейных цепях чрезвычайно важны. С одной стороны, на преобразовании спектра основана работа целого ряда радиотехнических устройств — модуляторов, детекторов и т. д., которые будут рассмотрены ниже. С другой стороны, из-за нелинейности характеристик возникают некоторые нежелательные эффекты, которые необходимо оценивать и учитывать.

Как пример влияния нелинейности изучим однокаскадный транзисторный усилитель, нагрузкой которого служит резистор $R_н$. В отличие от усилителя малых сигналов (см. гл. 8) будем полагать, что амплитуда входного гармонического сигнала $U_{m\,вх}$ достаточно велика для того, чтобы сделать обязательным учет нелинейности сквозной характеристики транзистора $i_к=f(u_{бэ})$. Пусть в простейшем случае эта характеристика при некотором выборе рабочей точки задается многочленом второй степени:




$$i_к=a_0+a_1(u_{бэ}-U_0)+a_2(u_{бэ}-U_0)^2.$$

Подав на вход усилителя напряжение

$$u_{бэ}=U_0+U_{m\,вх}\cos\omega t,$$

в коллекторной цепи будем иметь постоянную составляющую, а также первую и вторую гармоники частоты сигнала, причем на основании (11.14)

$$I_1=a_1U_{m\,вх};\qquad I_2={}^1/_2\ a_2U^2_{m\,вх}.$$

**коэффициент нелинейных искажений**

Токи этих гармоник создают на резисторе нагрузки падение напряжения, которое является выходным сигналом. Для того чтобы количественно оценить степень искажения сигнала на выходе усилителя, вводят особую величину $k_{нл}$, называемую *коэффициентом нелинейных искажений* усилителя и равную отношению среднеквадратичного уровня всех высших гармоник к амплитуде тока полезного сигнала:

$$k_{нл}=\frac{\sqrt{I_2^2+I_3^2+I_4^2+\ldots}}{I_1}. \qquad (11.17)$$

В данном случае

$$k_{нл}=I_2/I_1={}^1/_2(a_2/a_1)U_{m\,вх}. \qquad (11.18)$$

Важно заметить, что коэффициент нелинейных искажений увеличивается с ростом амплитуды сигнала.

## 11.3 Нелинейные резонансные усилители и умножители частоты

В технике радиопередающих устройств широко применяются резонансные усилители мощности. Их отличительная черта — работа при больших амплитудах входных напряжений, что делает обязательным учет нелинейного вида вольт-амперных характеристик активных элементов — транзисторов или электронных ламп.

**Принцип работы нелинейного резонансного усилителя.** Рассмотрим однокаскадный транзисторный усилитель (рис. 11.6,*а*) с нагрузкой в виде параллельного колебательного контура. На вход усилителя подано напряжение $u_{вх}(t)=U_0+U_{m\,вх}\cos\omega t$; колебательный контур настроен на частоту сигнала: $\omega_{рез}=\omega$.

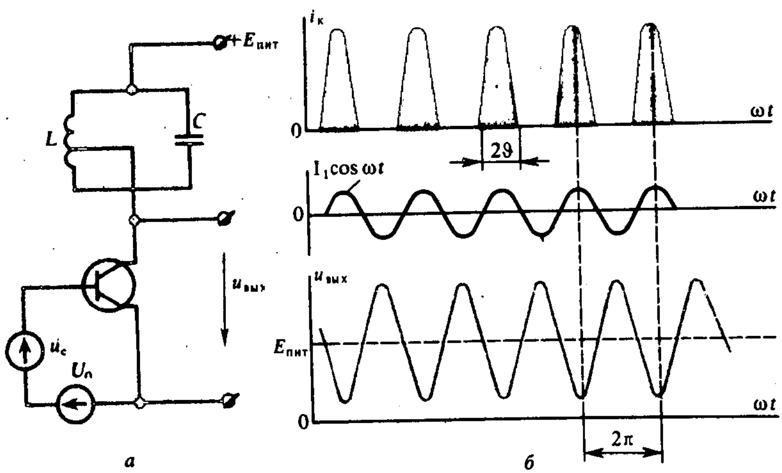



Рис. 11.6. Нелинейный резонансный усилитель:
*а* — принципиальная схема; *б* — временные диаграммы токов и напряжения

Предположим, что характеристика $i_к=f(u_{бэ})$ транзистора аппроксимирована отрезками прямых, и обратимся к рис. 11.6, *б*. Ток в цепи коллектора имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой. Эти импульсы обладают сложным спектральным составом, однако ведущую роль в работе устройства играет лишь первая гармоника тока, частота которой совпадает с резонансной частотой контура; сопротивление колебательной системы на частотах 2ω, 3ω, ... столь мало, что высшие гармоники практически не дают вклада в выходной сигнал.

Первая гармоника коллекторного тока создает на выходе полезное напряжение с амплитудой

$$U_{m\,вых}=I_1R_{рез}=SR_{рез}U_{m\,вх}\gamma_1(\vartheta). \qquad (11.19)$$

Внутреннее сопротивление источника учтено в величине резонансного сопротивления

Аналогично, используя формулу (11.14), можно записать выражение амплитуды гармонического сигнала на выходе резонансного усилителя при степенной аппроксимации характеристики транзистора:

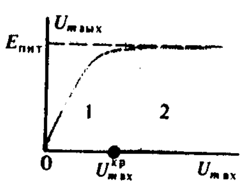
$$U_{m\,вых}=R_{рез}\left(a_1U_{m\,вх}+{}^3/_4\,a_3U_{m\,вх}^3+{}^5/_8\,a_5U_{m\,вх}^5+\ldots\right) \qquad (11.20)$$

**Колебательная характеристика усилителя.** Так принято называть зависимость $U_{m\,вых}=f(U_{m\,вх})$, вытекающую из формулы (11.19) или (11.20). Естественное требование к колебательной характеристике — ее линейность, что особенно важно при усилении АМ-сигналов. Как видно, например, из (11.19), колебательная характеристика в общем случае нелинейна, поскольку угол отсечки $\vartheta$, а значит, и функция Берга $\gamma_1(\vartheta)$ зависят от амплитуды возбуждающего напряжения $U_{m\,вх}$. Единственное исключение представляет случай, когда положение рабочей точки совпадает с началом характеристики. При этом, как легко видеть, угол отсечки $\vartheta=90°$ независимо от величины $U_{m\,вх}$.

Работа усилителя с углом отсечки 90° выгодна еще и потому, что в отсутствие высокочастотного сигнала (режим «молчания») постоянная составляющая коллекторного тока обращается в нуль. Данное обстоятельство благоприятно сказывается на к. п. д. усилителя.

Важным параметром колебательной характеристики является ширина ее линейного участка, который определяет динамический диапазон усиливаемых сигналов. Естественная причина, ограничивающая рост колебательной характеристики, состоит в следующем: при некотором критическом значении амплитуды входного сигнала $U_{m\,вх}^{кр}$ колебательное напряжение на контуре становится близким по величине к напряжению источника питания $E_{пит}$. Дальнейший рост амплитуды напряжения на контуре становится невозможным, поскольку при этом в некоторые моменты времени мгновенное значение напряжения на коллекторе транзистора переходит через нуль. Как следствие, нормально запертый коллекторный переход открывается и по цепи *коллектор — база — источник сигнала — источник питания* происходит резкое шунтирование колебательной системы усилителя.

▲ решите задачу 2




1 — недонапряженный режим;

2 — перенапряженный режим

Если $U_{m\,вх}>U_{m\,вх}^{кр}$, то говорят, что усилитель работает в *перенапряженном режиме*. Этот режим непригоден для усиления АМ-сигналов. Однако, значительно снижая напряжение источника питания, резонансный усилитель можно перевести в перенапряженный режим, превратив его в *ограничитель амплитуды* квазигармонических колебаний — устройство, ликвидирующее паразитную амплитудную модуляцию ЧМ- или ФМ-сигналов.

**Энергетические соотношения в нелинейном резонансном усилителе.** Рассматриваемые здесь резонансные усилители, как правило, достаточно мощные устройства и для них немаловажен высокий коэффициент полезного действия. Чтобы вычислить к. п. д., необходимо знать мощность, потребляемую от источника питания

$P_{пит} = I_0 \, E_{пит}$,

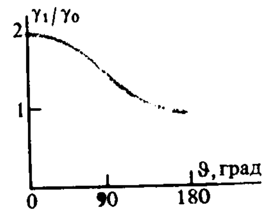
и полезную активную мощность в колебательном контуре

$P_{пол} = {}^1/_2 \, I_1 U_{m\,вых}$.

В мощных усилителях обычно стремятся максимально полно использовать источник питания, приближаясь к границе перенапряженного режима, т. е. $U_{m\,вых} \approx E_{пит}$. Тогда

$$к.п.д. = P_{пол} / P_{пит} = {}^1/_2 \, \gamma_1(\vartheta) / \gamma_0(\vartheta). \qquad (11.21)$$

Если исследовать отношение $\gamma_1(\vartheta)/\gamma_0(\vartheta)$, то легко убедиться, что оно максимально и равно двум при $\vartheta = 0°$; с ростом $\vartheta$ это отношение падает, составляя при 90° величину $\pi/2 = 1.571$. Поэтому с точки зрения эффективности использования мощности источника питания выгоден режим с малым углом отсечки, когда к. п. д. усилителя приближается к единице. Причина этого заключена в том, что в этом случае электронный прибор бо́льшую часть времени находится в запертом состоянии и рассеяния мощности в теплоту на коллекторе (аноде) не происходит. Однако при этом резко снижается функция $\gamma_1$ и для получения заданной полезной мощности приходится существенно увеличивать амплитуду входного сигнала, что не всегда возможно. Поэтому, принимая во внимание линейность колебательной характеристики, на практике идут на некоторое снижение к. п. д. и выбирают угол отсечки, близкий к 90°.




выбор угла отсечки тока при усилении

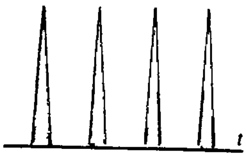
**Резонансное умножение частоты.** Если в схеме резонансного усилителя, работающего с большой амплитудой входного сигнала, колебательная система будет настроена на $n\omega$ — частоту одной из высших гармоник входного сигнала, то данное устройство может использоваться в качестве *умножителя частоты*.

Потребность в умножителях возникает, например, при создании источников гармонических колебаний с высокой стабильностью частоты, если непосредственное генерирование таких колебаний в заданном частотном диапазоне невозможно, однако в распоряжении имеется весьма стабильный низкочастотный генератор.

Часто умножители применяют в радиопередающих устройствах с угловой модуляцией для расширения частотного отклонения сигнала. Если на входе умножителя частотное отклонение составляет $\Delta\omega$, то понятно, что на выходе оно будет равно $n\Delta\omega$, где $n$ — кратность умножителя.

Расчеты умножителей частоты и нелинейных резонансных усилителей в принципе не отличаются друг от друга. По аналогии с (11.19), амплитуда выходного сигнала умножителя при кусочно-линейной аппроксимации

$$U_{m\,\text{вых}} = S R_{\text{рез}} U_{m\,\text{вх}} \gamma_n(\vartheta). \qquad (11.22)$$




Импульсы с малым углом отсечки

Трудность создания резонансных умножителей заключается в низких значениях $\gamma_n(\vartheta)$ при большой кратности умножения. Поэтому следует выбирать углы отсечки, максимизирующие соответствующие функции Берга. Чем выше скважность последовательности импульсов коллекторного тока, тем богаче их спектральный состав. Отсюда следует, что, желая создать умножитель с высокой кратностью, следует выбирать малые углы отсечки. Анализ функций $\gamma_n$ $(\vartheta)$ показывает, что существует оптимальный угол $\vartheta_{\text{опт}}$, причем

$$\vartheta_{\text{опт}} = 180°/n. \qquad (11.23)$$

Именно таким должен быть угол отсечки тока в умножителе частоты при фиксированном значении амплитуды возбуждающего напряжения $U_{m\,\text{вх}}$.

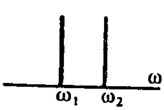
## 11.4 Безынерционные нелинейные преобразования суммы гармонических сигналов

Свойство нелинейной цепи обогащать спектр, создавая на выходе спектральные компоненты, первоначально отсутствующие на входе, ярче всего проявляется, если входной сигнал представляет собой сумму некоторого числа гармонических колебаний с различными частотами. Эффект возникновения большого числа новых спектральных составляющих лежит в основе важнейших для радиотехники нелинейных преобразований сигналов, которые будут излагаться в следующем параграфе.

**Бигармоническое воздействие на нелинейный элемент со степенной характеристикой.** Будем изучать нелинейный двухполюсник, вольт-амперная характеристика которого для конкретности описывается многочленом второй степени:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2. \qquad (11.24)$$

Приложенное напряжение помимо постоянной составляющей $U_0$ содержит два гармонических колебания с различными частотами $\omega_1$ и $\omega_2$; амплитуды колебаний равны $U_{m1}$ и $U_{m2}$ соответственно:




Спектр бигармонического сигнала

$$u = U_0 + U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos\omega_2 t. \qquad (11.25)$$

Такой сигнал в радиотехнике принято называть *бигармоническим воздействием.* Он очень удобен для выяснения принципиальных особенностей преобразования спектра в нелинейных цепях.

Подставим сигнал (11.25) в формулу (11.24):

$$i(t) = a_0 + a_1 U_{m1} \cos\omega_1 t + a_2 U_{m2} \cos\omega_2 t +$$
$$+ a_2 U_{m1}^2 \cos^2\omega_1 t + 2a_2 U_{m1} U_{m2} \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t +$$
$$+ a_2 U_{m2}^2 \cos^2\omega_2 t.$$

Выполнив элементарные преобразования и сгруппировав члены, приходим к следующему спектральному представлению тока в нелинейном двухполюснике:

$$i(t) = \left[a_0 + \frac{a_2}{2}(U_{m1}^2 + U_{m2}^2)\right] + a_1 U_{m1} \cos\omega_1 t +$$
$$+ a_1 U_{m2} \cos\omega_2 t + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} \cos 2\omega_1 t +$$
$$+ \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} \cos 2\omega_2 t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2) t +$$
$$+ a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2) t. \quad (11.26)$$

Мы видим, что в составе тока присутствуют слагаемые, уже встречавшиеся ранее, а именно: постоянная составляющая, первые и вторые гармоники обоих источников входного сигнала. Принципиально новым является появление двух гармонических составляющих с частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$. Важно, что амплитуды этих колебаний, равные $a_2 U_{m1} U_{m2}$, в одинаковой мере зависят от амплитуд входных источников и обращаются в нуль, если один из источников на входе отсутствует. Это свидетельствует о том, что *из-за нелинейности рассматриваемого двухполюсника в нем происходит взаимодействие колебаний*, соответствующих отдельным гармоническим компонентам

▲ решите задачу 3

● взаимодействие колебаний

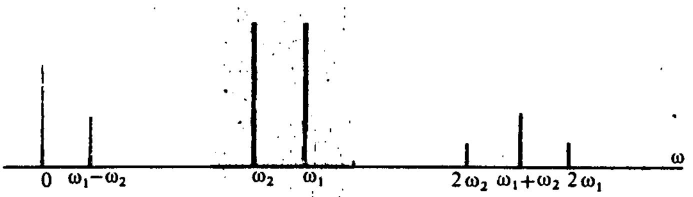



Рис. 11.7. Спектральная диаграмма тока в нелинейном двухполюснике с вольт-амперной характеристикой, описываемой квадратичным многочленом (входной сигнал — бигармоническое колебание, спектр которого на рисунке выделен)

входного сигнала. На рис. 11.7 изображена полная спектральная диаграмма тока в данном двухполюснике применительно к выбранному виду входного сигнала.

**Влияние кубичного члена вольт-амперной характеристики.** Несколько усложним задачу и будем считать, что в составе вольт-амперной характеристики $i(u)$ присутствует слагаемое кубичного вида, которое обусловливает дополнительный ток

$$i_3 = a_3 (u - U_0)^3. \tag{11.27}$$

Поставив сюда сигнал (11.25), будем иметь

$$\begin{aligned} i_3(t) = a_3 \Big[ & \left(3/4\, U_{m1}^3 + 3/2\, U_{m1} U_{m2}^2\right) \cos \omega_1 t + \\ & + \left(3/4\, U_{m2}^3 + 3/2\, U_{m1}^2 U_{m2}\right) \cos \omega_2 t + \\ & + \frac{U_{m1}^3}{4} \cos 3\omega_1 t + \frac{U_{m2}^3}{4} \cos 3\omega_2 t + \\ & + 3/4\, U_{m1}^2 U_{m2} \cos (2\omega_1 + \omega_2) t + \\ & + 3/4\, U_{m1}^2 U_{m2} \cos (2\omega_1 - \omega_2) t + \\ & + 3/4\, U_{m1} U_{m2}^2 \cos (2\omega_2 + \omega_1) t + \\ & + 3/4\, U_{m1} U_{m2}^2 \cos (2\omega_2 - \omega_1) t \Big] \end{aligned} \tag{11.28}$$

Видно, что, с одной стороны, кубичное слагаемое несколько изменяет уровень амплитуд первых гармоник тока, имеющих частоты $\omega_1$ и $\omega_2$. Существеннее, однако, появление новых спектральных компонет с частотами $3\omega_1$, $3\omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 + \omega_1$, $2\omega_2 - \omega_1$.

**Комбинационные частоты.** Пример, изученный нами выше, является весьма частным, во-первых, потому, что приложенное напряжение содержит лишь две спектральные компоненты, и, во-вторых, из-за очень простой формы вольт-амперной характеристики с квадратичной или кубичной нелинейностью. Общая постановка задачи выглядит так: вольт-амперная характеристика $i(u)$ произвольна; входной сигнал представляется тригонометрической суммой:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos \omega_k t. \tag{11.29}$$

Требуется определить амплитуды и частоты всех спектральных компонент, присутствующих в токе.

Решение такой задачи выглядит по-разному в зависимости от вида аппроксимации вольт-амперной характеристики [37]. Проблема вычисления амплитуд гармонических составляющих сводится, как правило, к громоздким выкладкам, и мы здесь не будем ею заниматься. Изучая частоты спектральных компонент выходного сигнала, можно заметить следующую закономерность, подтвержденную предыдущим примером: эти так называемые *комбинационные частоты* задаются общим выражением вида

$$\boxed{\omega = \left| n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_m\omega_m + \ldots \right|,} \tag{11.30}$$

где $n_i$ — любые целые числа, положительные и отрицательные, включая нуль.

Комбинационные частоты принято группировать, объединяя вместе все частоты, для которых

$$|n_1| + |n_2| + \ldots + |n_m| + \ldots = N. \tag{11.31}$$

**комбинационные частоты**

Число $N$ называют *порядком комбинационной частоты.*

Рассмотренный нами пример показывает, что в спектре тока, текущего через нелинейный элемент с характеристикой, содержащей степени не выше третьей, при возбуждении системы суммой двух гармонических сигналов наблюдаются следующие комбинационные частоты, которые можно объединить так:

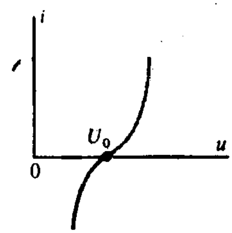
| $N$ | Частоты |
|---|---|
| 1 | $\omega_1$, $\omega_2$ |
| 2 | $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$ |
| 3 | $3\omega_1$, $3\omega_2$, $2\omega_1+\omega_2$, $2\omega_1-\omega_2$, $2\omega_2+\omega_1$, $2\omega_2-\omega_1$ |

Можно заметить важную закономерность: слагаемое со степенью $N$ в вольт-амперной характеристике элемента обусловливает появление комбинационных составляющих с предельным порядком, равным степени этого слагаемого. При этом если $N$ — четное число, то возникают комбинационные частоты четных порядков: $N$, $N-2$, $N-4$ вплоть до $N=0$ (постоянная составляющая). Если же $N$ нечетно, то порядки комбинационных частот также нечетны: $N$, $N-2$, $N-4$ вплоть до $N=1$.

▲ решите задачу 3

**Пример 11.3.** *Нелинейный элемент имеет кубическую характеристику*

$i(u) = a_3 (u - U_0)^3$.




*Входное напряжение содержит три гармонических колебания:*

$u = U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t + U_{m3} \cos \omega_3 t$.

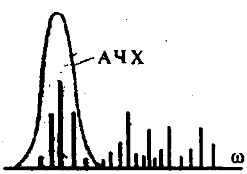
*Найти частоты всех комбинационных составляющих тока.*

Поскольку степень характеристики равна трем, будут наблюдаться комбинационные частоты с $N=1$ и $N=3$.

Комбинационные частоты первого порядка: $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.
Комбинационные частоты третьего порядка:

$$3\omega_1, \quad 3\omega_2, \quad 3\omega_3, \quad |\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3|,$$
$$|\pm 2\omega_1 \pm \omega_2|, \quad |\pm 2\omega_1 \pm \omega_3|, \quad |\pm 2\omega_2 \pm \omega_1|,$$
$$|\pm 2\omega_2 \pm \omega_3|, \quad |\pm 2\omega_3 \pm \omega_1|, \quad |\pm 2\omega_3 \pm \omega_2|.$$

Фактически должны учитываться лишь различающиеся частоты. Так, выражениям $2\omega_1 + \omega_2$ и $-2\omega_1 - \omega_2$ отвечает одна и та же частота.




**Фильтрация комбинационных частот.** Принцип использования нелинейных устройств для преобразования радиотехнических сигналов заключается в следующем. Подавая на нелинейный безынерционный элемент сумму исходных колебаний, мы наблюдаем в выходном сигнале всевозможные комбинационные составляющие. Если теперь подвергнуть выходной сигнал фильтрации с помощью линейной частотно-избирательной цепи, то можно добиться целого ряда полезных эффектов, получая на выходе фильтра сигнал со спектральными компонентами, которые отсутствовали на входе.

Одно из возможных устройств, работающих по этому принципу, — нелинейный резонансный умножитель частоты; он уже был рассмотрен. Преобразование спектра, осуществляемое умножителем, очень просто из-за того, что здесь имеется единственный гармонический входной сигнал.

## 11.5 Амплитудная модуляция. Детектирование АМ-сигналов

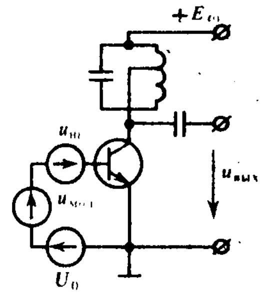
Амплитудным модулятором называется устройство, создающее на выходных зажимах АМ-сигнал вида

$$u_{АМ}(t) = U_m (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$$

при подаче на входы цепи гармонического несущего колебания $u_{нес}(t) = U_{m\,нес} \cos \omega_0 t$ и низкочастотного модулирующего сигнала $u_{мод}(t) = U_{m\,мод} \cos \Omega t$. Чаще всего амплитудные модуляторы строят, используя эффект преобразования спектра суммы двух сигналов в безынерционном нелинейном элементе.

**Принцип работы амплитудного модулятора.** Простейшим амплитудным модулятором служит однокаскадное усилительное устройство нелинейного типа с резонансной нагрузкой. На вход каскада подается напряжение вида

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{m\,мод} \cos \Omega t + U_{m\,нес} \cos \omega_0 t \,. \qquad (11.32)$$




Резонансный контур в цепи коллектора настроен на частоту несущего колебания. Принцип работы данного модулятора поясняется осциллограммами напряжений и токов, показанными на рис. 11.8.

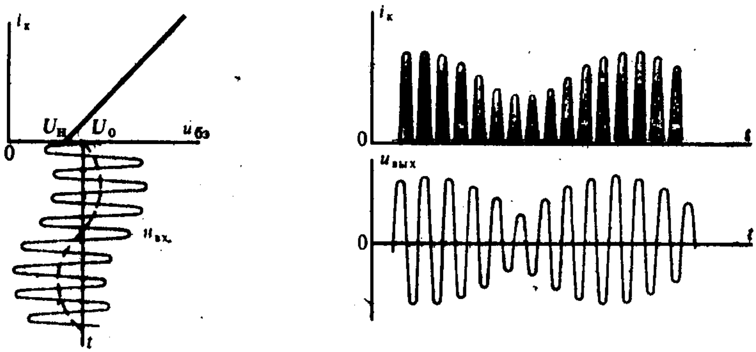



Рис. 11.8. Токи и напряжения в схеме амплитудного модулятора

Для определенности предположено, что вольт-амперная характеристика транзистора аппроксимирована отрезками двух прямых. За счет того, что рабочая точка перемещается в такт с низкочастотным модулирующим колебанием, происходит непрерывное изменение угла отсечки несущего сигнала. Амплитуда первой гармоники последовательности импульсов коллекторного тока оказывается непостоянной во времени. Колебательный контур фильтрует коллекторный ток, выделяя на выходе АМ-сигнал, т. е. колебание с амплитудой, изменяющейся пропорционально полезному модулирующему сигналу.

**Пример 11.4.** *Транзистор, используемый в схеме модулятора, имеет излом характеристики в точке* $U_н = 0.6$ В. *Амплитуда колебаний несущей частоты на входе* $U_{m\,нес} = 0.4$ В, *амплитуда модулирующего сигнала* $U_{m\,мод} = 0.1$ В, *начальное смещение* $U_0 = 0.6$ В. *Определить коэффициент амплитудной модуляции M в данной схеме.*

В соответствии с исходными данными положение рабочей точки колеблется в пределах от $U_0 + U_{m\,мод} = 0.7$ В до $U_0 - U_{m\,мод} = 0.5$ В. Отсюда находим изменение угла отсечки:

$$\vartheta_{max} = \arccos \frac{0.6 - 0.7}{0.4} = 1.823 \text{ рад},$$

$$\vartheta_{\min} = \arccos \frac{0.6 - 0.5}{0.4} = 1.318 \text{ рад}.$$

Амплитуда первой гармоники коллекторного тока пропорциональна функции Берга $\gamma_1(\vartheta)$, которая изменяется в пределах

▲ решите задачу 4

$$\text{от } \gamma_1(\vartheta_{\max}) = \frac{1}{\pi}(\vartheta_{\max} - \sin\vartheta_{\max}\cos\vartheta_{\max}) = 0.657$$

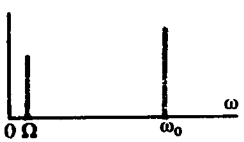
$$\text{до } \gamma_1(\vartheta_{\min}) = \frac{1}{\pi}(\vartheta_{\min} - \sin\vartheta_{\min}\cos\vartheta_{\min}) = 0.342.$$

Отсюда находим коэффициент модуляции выходного сигнала:

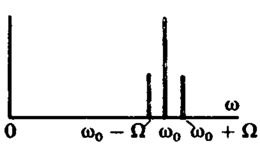
$$M = \frac{I_{1\max} - I_{1\min}}{I_{1\max} + I_{1\min}} = \frac{0.657 - 0.342}{0.657 + 0.342} = 0.315.$$

**Аналитическое рассмотрение.** Процесс получения АМ-сигнала можно изучить аналитически, применив развитую выше теорию комбинационных частот. Пусть на входе нелинейного элемента с характеристикой простейшего вида (11.24) действует напряжение

Спектр колебаний на входе модулятора:




и на его выходе:




$$u(t) = U_0 + U_{m\,\text{нес}}\cos\omega_0 t + U_{m\,\text{мод}}\cos\Omega t,$$

причем $\omega_0 \gg \Omega$.

В составе тока, протекающего через двухполюсник, можно выделить компоненты с частотами, близкими к $\omega_0$. Эти составляющие образуют амплитудно-модулированный ток

$$i_{\text{АМ}}(t) = a_1 U_{m\,\text{нес}}\cos\omega_0 t + a_2 U_{m\,\text{нес}} U_{m\,\text{мод}} \times$$
$$\times \cos(\omega_0 + \Omega)t + a_2 U_{m\,\text{нес}} U_{m\,\text{мод}} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \qquad (11.33)$$

Как известно (см. гл. 4), относительный уровень боковых колебаний по сравнению с несущим сигналом равен $M/2$. Из (11.33) следует, что в данном случае коэффициент амплитудной модуляции выходного сигнала

$$M = \frac{2a_2}{a_1} U_{m\,\text{мод}}. \qquad (11.34)$$

**Принцип детектирования АМ-сигналов.** Операция детектирования сигнала прямо противоположна модуляции. Имея на входе идеального детектора АМ-колебание

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m\,\text{вх}}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t,$$

мы должны получить на выходе низкочастотный сигнал $u_{\text{вых}}(t) = U_{m\,\text{вых}}\cos\Omega t$, пропорциональный передаваемому сообщению. Эффективность работы детектора принято оценивать *коэффициентом детектирования*

$$k_{дет} = U_{m\,вых} / (M U_{m\,вх}). \qquad (11.35)$$

**коэффициент детектирования**

Детектирование — сугубо нелинейная операция, поскольку в спектре входного колебания отсутствует компонента с частотой $\Omega$. Можно осуществить детектирование, подав АМ-сигнал на безынерционный нелинейный элемент с последующей фильтрацией низкочастотных составляющих спектра.

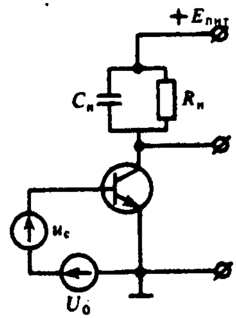



Схема коллекторного детектора

Рассмотрим схему так называемого *коллекторного детектора,* представляющую собой однокаскадное транзисторное устройство с нагрузкой в виде параллельной $RC$-цепи. Для того чтобы нагрузочная цепь выполняла роль частотного фильтра, подавляющего высокочастотные спектральные составляющие, потребуем выполнения неравенств

$$\boxed{1/(\omega_0 C_н) \ll R_н; \quad 1/(\Omega C_н) \gg R_н.} \qquad (11.36)$$

Это означает, что для сигнала с частотой модуляции $\Omega$ нагрузка детектора практически резистивна и равна $R_н$, в то же время модуль сопротивления нагрузки, а значит, и коэффициент передачи системы на несущей частоте $\omega_0$ перенебрежимо малы.

Пусть

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{m\,вх}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t,$$

причем амплитуда $U_{m\,вх}$ достаточно велика для того, чтобы можно было воспользоваться кусочно-линейной аппроксимацией вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Положим также для простоты, что $U_0 = U_н$ и поэтому угол отсечки тока $\vartheta = 90°$ независимо от изменения во времени амплитуды входного сигнала. Процессы в коллекторном детекторе иллюстрируются графиками на рис. 11.9.

Последовательность импульсов коллекторного тока оказывается промодулированной по амплитуде; нулевая составляющая тока медленно (с частотой $\Omega$) изменяется во времени, причем

$$I_{0к} = S U_{m\,вх}(1 + M\cos\Omega t)\gamma_0(90°) =$$
$$= 0.318\, S U_{m\,вх}(1 + M\cos\Omega t).$$

Выходное напряжение детектора

$$u_{вых}(t) = E_{пит} - I_{0к} R_н =$$
$$= E_{пит} - 0.318\, S R_н U_{m\,вх}(1 + M\cos\Omega t), \qquad (11.37)$$

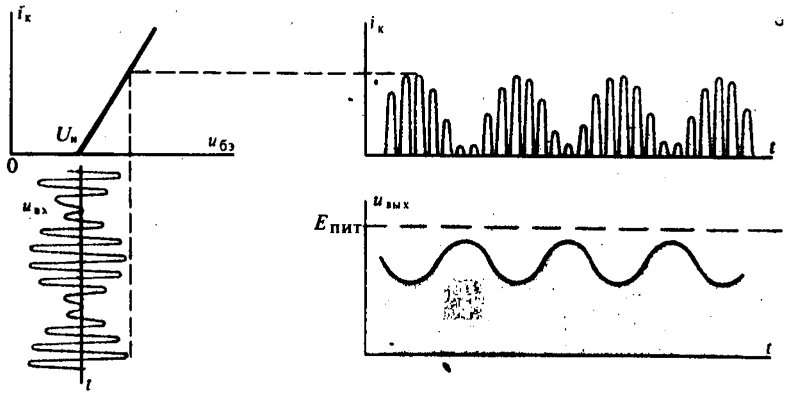



Рис. 11.9. Осциллограммы токов и напряжений в схеме коллекторного детектора

откуда коэффициент детектирования данной схемы

$$k_{дет} = 0.318 SR_н. \tag{11.38}$$

режим линейного детектирования

Существенно, что здесь амплитуды сигналов на входе и на выходе связаны прямой пропорциональностью. Поэтому такой режим работы детектора принято называть *линейным*. Его отличительная черта — отсутствие искажений передаваемого сообщения.

**Квадратичное детектирование.** Рассмотрим отдельно важный для приложений случай детектирования слабых сигналов, когда вольт-амперная характеристика должна быть аппроксимирована степенно́й зависимостью вида

$$i_к(u) = a_0 + a_1(u_{вх} - U_0) + a_2(u_{вх} - U_0)^2 + \dots \tag{11.39}$$

Ограничимся лишь выписанными здесь членами и предположим, что на детектор подано напряжение АМ-сигнала вместе с постоянным смещением $U_0$:

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{m\,вх}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t. \tag{11.40}$$

Поставив (11.40) в (11.39), мы обнаружим среди разнообразных комбинационных колебаний, присутствующих в токе, следующую низкочастотную составляющую:

$$i_{нч}(t) = a_2 U_{m\,вх}^2 M\cos\Omega t + \frac{a_2 U_{m\,вх}^2}{4} M^2 \cos 2\Omega t. \tag{11.41}$$

Благодаря фильтрующему действию нагрузочной $RC$-цепи выходной сигнал будет определяться именно этим током:

$$u_{\text{вых}}(t) = E_{\text{пит}} - a_2 R_{\text{н}} U^2_{m\text{вх}} M \cos\Omega t - $$
$$- \frac{a_2 R_{\text{н}} U^2_{m\text{вх}} M^2}{4} \cos 2\Omega t. \qquad (11.42)$$

Полезный эффект детектирования пропорционален здесь величине $U^2_{m\text{вх}}$, поэтому детектирование АМ-сигналов с малыми амплитудами является *квадратичным*. Наличие в (11.42) слагаемого, пропорционального $\cos 2\Omega t$, говорит о том, что квадратичное детектирование сопровождается искажениями передаваемого сообщения. Введя коэффициент нелинейных искажений $k_{\text{нл}}$, равный отношению амплитуд выходных колебаний с частотами $2\Omega$ и $\Omega$, находим из (11.42), что $k_{\text{нл}} = M/4$. Нелинейные искажения оказываются весьма значительными при глубокой амплитудной модуляции на входе. Поэтому в радиоприемных устройствах желательно, чтобы амплитуда несущего колебания АМ-сигнала, подаваемого на детектор, составляла несколько вольт. При этом реализуется режим линейного детектирования и нелинейных искажений не возникает.

**нелинейные искажения при детектировании**

**Взаимодействие сигнала и помехи в детекторе.** Предположим, что на входе квадратичного детектора помимо полезного АМ-сигнала присутствует немодулированный сигнал помехи, частота которого $\omega_{\text{п}}$ близка к несущей частоте $\omega_0$, так что

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0 + U_{m\,\text{вх}}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t + $$
$$+ U_{m\text{п}} \cos\omega_{\text{п}} t.$$

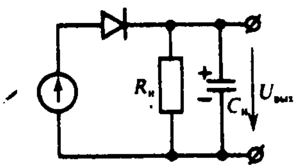
Ток, вызванный квадратичным членом в (11.39), равен при этом

$$i_2(t) = a_2(u_{\text{вх}} - U_0)^2 =$$
$$= a_2 U^2_{m\text{вх}} (1 + M\cos\Omega t)^2 \cos^2\omega_0 t +$$
$$+ 2a_2 U_{m\text{вх}} U_{m\text{п}} (1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \cos\omega_{\text{п}} t +$$
$$+ a_2 U^2_{m\text{п}} \cos^2\omega_{\text{п}} t. \qquad (11.43)$$

Дополнительная составляющая тока в низкочастотной области спектра, обязанная своим возникновением сигналу помехи, на основании (11.43) равна

$$\Delta i_{\text{нч}}(t) = \tfrac{1}{2} a_2 U_{m\text{вх}} U_{m\text{п}} M [\cos(\omega_0 - \omega_{\text{п}} + \Omega)t +$$
$$+ \cos(\omega_0 - \omega_{\text{п}} - \Omega)t] +$$
$$+ a_2 U_{m\text{вх}} U_{m\text{п}} \cos(\omega_0 - \omega_{\text{п}})t.$$

Таким образом, даже при отсутствии модуляции ($M=0$) на выходе детектора появляется низкочастотный гармонический сигнал с частотой $\omega_0-\omega_п$. Если же $M \neq 0$, то спектр выходного сигнала становится еще более сложным из-за возникновения комбинационных низкочастотных колебаний с частотами $\omega_0-\omega_п+\Omega$ и $\omega_0-\omega_п-\Omega$. Эти частоты близки к частотам полезного сигнала и принципиально не могут быть устранены путем фильтрации. Если $U_{mп} \gg U_{m\,вх}$, то паразитные сигналы могут значительно превосходить полезные. В этом смысле говорят о *подавлении слабого полезного сигнала сильной помехой.* Для того чтобы ослабить этот эффект, следует максимально снижать уровень помех при додетекторной обработке сигнала.

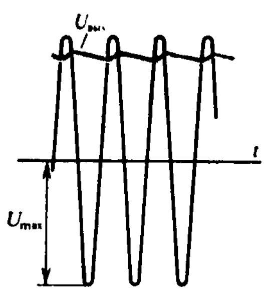



**Диодный детектор АМ-сигналов.** Широко распространена схема диодного детектора, особенно пригодная для работы с сигналами большого уровня. Такой детектор образован последовательным соединением диода и параллельной $RC$-цепи, которая выполняет роль частотного фильтра. Параметры $RC$-цепи выбираются согласно условию (11.36).

Будем считать, что вольт-амперная характеристика диода имеет кусочно-линейный вид с нулевым напряжением начала:

$$i(u) = \begin{cases} Su, & u > 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Для нормального функционирования схемы необходимо, чтобы сопротивление нагрузки $R_н$ значительно превышало сопротивление диода в прямом направлении, т. е. чтобы $SR_н \gg 1$. Пусть на вход детектора подан немодулированный гармонический сигнал $u_{вх}(t)=U_{mвх}\cos\omega_0 t$. Заряд конденсатора через прямое сопротивление открытого диода происходит гораздо быстрее, чем его разряд через большой резистор нагрузки, и поэтому осциллограмма выходного сигнала представляет собой пилообразную кривую с малой высотой зубцов. Средний уровень выходного напряжения близок к амплитуде входного сигнала. Таким образом, диод бóльшую часть периода оказывается запертым.




Пренебрежем некоторым непостоянством выходного сигнала и будем считать, что $U_{вых}$ — постоянная величина. Заметим далее, что напряжение $U_{вых}$ приложено к диоду в обратной полярности и служит для него напряжением смещения $U_0= =-U_{вых}$. Коэффициент детектирования в данной схеме

$$k_{дет} = U_{вых} / U_{mвх} = \cos\theta$$

может быть близким к единице, поскольку угол отсечки тока достаточно мал.

Угол отсечки находится из соотношения

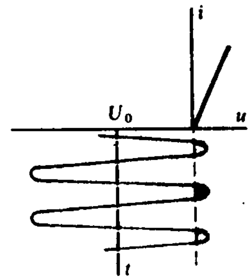
$$-U_0 = I_0 R_н = SU_{mвх}\gamma_0(\vartheta)R_н,$$

откуда следует трансцендентное уравнение

$$\cos\vartheta = \frac{SR_н}{\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta),$$

или

$$\boxed{\mathrm{tg}\vartheta - \vartheta = \pi/(SR_н).} \quad (11.44)$$




Выходное напряжение в диодном детекторе близко к амплитуде входного сигнала

При $SR_н \gg 1$ угол отсечки близок к нулю, так что из (11.44) вытекает расчетное соотношение для нахождения коэффициента детектирования:

$$k_{дет} = \cos\left(\sqrt[3]{\frac{3\pi}{SR_н}}\right). \quad (11.45)$$

▲ решите задачу 5

**Пример 11.5.** *В схеме диодного детектора* $R_н = 18$ кОм, *крутизна характеристики диода* $S = 10$ мА/В. *Определить коэффициент детектирования.*

Произведение $SR_н = 180$ и поэтому можно пользоваться формулой (11.45), которая дает

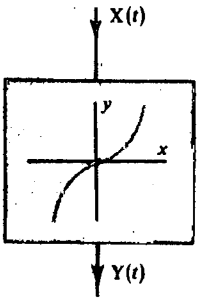
$$k_{дет} = \cos\left(\sqrt[3]{3.14 \cdot 3/180}\right) = 0.93.$$

Если на вход диодного детектора поступает АМ-колебание, то при выполнении условий (11.36) выходное напряжение детектора «отслеживает» мгновенный уровень амплитуды входного сигнала.

## 11.6 Воздействие стационарных случайных сигналов на безынерционные нелинейные цепи

Предположим, что на выходе безынерционной нелинейной системы присутствует случайный сигнал $x(t)$, являющийся одной из реализаций стационарного случайного процесса $X(t)$. Выходной сигнал $y(t)$ связан с входным воздействием зависимостью вида $y(t) = f(x(t))$; ансамбль реализаций $y(t)$ задает стационарный случайный процесс $Y(t)$. Ставится задача найти связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$. При этом могут иметь место два частных подхода:

1. По известной $n$-мерной плотности вероятности входного случайного процесса $p(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 ..., t_n)$ отыскивается




аналогичная функция $p(y_1, y_2, ..., y_n; t_1, ..., t_n)$, определяющая выходной сигнал.

2. Исследование проводится в рамках корреляционной теории — ищутся математическое ожидание $m_y$ и функция автокорреляции $K_y(\tau)$ выходного случайного процесса. Наряду с функцией автокорреляции может представлять интерес энергетический спектр $W_y(\omega)$ выходного сигнала.

**Плотность вероятности выходного сигнала после нелинейного преобразования.** Первая из поставленных задач легко решается теми приемами, которые были описаны в гл. 6 при рассмотрении плотностей вероятности систем случайных величин, подвергнутых функциональным преобразованиям. Если $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ — случайные величины, наблюдаемые на входе в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$ соответственно, то, имея в виду безынерционный характер преобразования, имеем на выходе в те же моменты времени значения сигнала

$$y_1 = f(x_1);\quad y_2 = f(x_2); \ldots ;\quad y_n = f(x_n). \tag{11.46}$$

Применив обратную функцию $x = \varphi(y)$, имеем

$$x_1 = \varphi(y_1);\quad x_2 = \varphi(y_2); \ldots ;\quad x_n = \varphi(y_n). \tag{11.47}$$

Многомерная плотность вероятности на выходе

$$p_{\text{вых}}(y_1, \ldots, y_n) = p_{\text{вх}}(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_n))\,|D|, \tag{11.48}$$

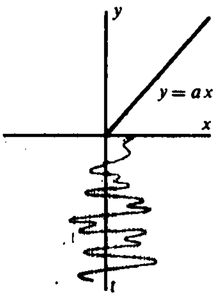
причем якобиан $D$ имеет очень простой вид:

В случае многозначных обратных функций следует просуммировать вклады от всех ветвей этих функций

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi(y_1)}{dy_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{d\varphi(y_2)}{dy_2} & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{d\varphi(y_n)}{dy_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \left.\frac{d\varphi}{dy}\right|_{y=y_1} \cdot \left.\frac{d\varphi}{dy}\right|_{y=y_2} \cdot \ldots \cdot \left.\frac{d\varphi}{dy}\right|_{y=y_n} \tag{11.49}$$

Формула (11.48) решает поставленную задачу в самом общем виде. Следует обратить внимание на то, что структура функционального определителя (11.49) вытекает из предположения о безынерционности преобразования — мгновенное значение выходного сигнала зависит только от входного сигнала в тот же момент времени.




**Пример 11.6.** *На входе безынерционного нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой*

$$y = \begin{cases} ax, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{11.50}$$

*действует гауссов случайный процесс $X(t)$, обладающий нулевым средним значением и заданной дисперсией $\sigma_x^2$. Плотность вероятности входного сигнала*

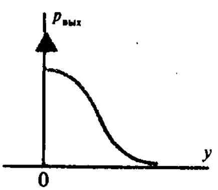
$$p_{\text{вх}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

*Вычислить плотность вероятности сигнала на выходе.*

При $x>0$ обратная функция имеет вид: $x=y/a$ и, таким образом, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y=1/a$. Поэтому


$$p_{\text{вых}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x a} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2 a^2}\right)$$

при $y>0$. Любому отрицательному значению $x$ соответствует единственное значение $y=0$. Чтобы обеспечить нормировку плотности вероятности на выходе, следует допустить $\delta$-особенность в плотности вероятности $p_{\text{вых}}(y)$ при $y=0$ с коэффициентом, равным 1/2:




$$p_{\text{вых}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x a^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2 a^2}\right) & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{11.51}$$

Принципиально важно, что, подав на вход нелинейной системы гауссов сигнал, мы наблюдаем на выходе случайный процесс негауссова вида.

**Среднее значение сигнала на выходе нелинейной системы.** Простейшая статистическая характеристика стационарного случайного процесса — его среднее значение, получающееся путем операции усреднения по ансамблю реализаций или, если процесс эргодический, по одной достаточно протяженной реализации. Для того чтобы вычислить среднее значение сигнала после нелинейного безынерционного преобразования, следует располагать одномерной плотностью вероятности $p_{\text{вых}}(y)$:

$$\bar{y} = m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\text{вых}}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{11.52}$$

Таким образом, данная задача сводится к квадратуре. С равным успехом можно найти среднее значение преобразованного сигнала, усреднив функцию $f(x)$ с помощью одномерной плотности вероятности входного сигнала:

$$\overline{y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\text{вх}}(x) \mathrm{d}x. \tag{11.53}$$

**Пример 11.7.** *Найти среднее значение выходного сигнала для системы, описанной в примере* 11.6.

По формуле (11.53)

$$\overline{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{ax}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{a\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} = 0.399 a\sigma_x. \tag{11.54}$$

Отсюда следует возможность измерения дисперсии стационарных гауссовых процессов с помощью нелинейного преобразователя с характеристикой вида (11.50) и каскадно включенной линейной инерционной цепи, выполняющей операцию усреднения по времени.

**Вычисление функции автокорреляции выходного сигнала.** В соответствии с общим правилом автокорреляционная функция сигнала $y(t)$ на выходе безынерционного нелинейного преобразователя

$$K_y(\tau) = \overline{y(t) y(t+\tau)} - \overline{y}^2 =$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x_\tau) p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau) \mathrm{d}x \mathrm{d}x_\tau - \overline{y}^2. \tag{11.55}$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (11.55), необходимо располагать функцией $p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau)$ — двумерной плотностью вероятности входного сигнала для двух сечений, разделенных промежутком времени $\tau$.

Вычисления по формуле (11.55) могут оказаться весьма сложными. Окончательный результат в более или менее обозримом виде удается получить лишь для нормального процесса на входе, когда

$$p_{\text{вх}}(x, x_\tau; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1 - R_x^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + x_\tau^2 - 2R_x x x_\tau}{2\sigma_x^2 (1 - R_x^2)}\right], \tag{11.56}$$

где $R_x(\tau)$ — коэффициент корреляции сигнала на входе.

**Пример 11.8.** *Вычислить функцию автокорреляции выходного сигнала применительно к условиям, сформулированным в примере* 11.6.

Основная трудность заключается в нахождении ковариационного момента:

$$\overline{yy_\tau} = \frac{a^2}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{xx_\tau}{2\sigma_x^2 \sqrt{1-R_x^2}} \exp\left[-\frac{x^2+x_\tau^2-2R_x xx_\tau}{2\sigma_x^2\left(1-R_x^2\right)}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}x_\tau .$$

Выполнив замены переменных

$$\xi = \frac{x}{\sigma_x\sqrt{2\left(1-R_x^2\right)}}; \quad \xi_\tau = \frac{x_\tau}{\sigma_x\sqrt{2\left(1-R_x^2\right)}},$$

запишем среднее значение произведения так:

$$\overline{yy_\tau} = \frac{2}{\pi} a^2\sigma_x^2 \left(1-R_x^2\right)^{3/2} I,$$

где

$$I = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \xi\xi_\tau \exp\left(-\xi^2-\xi_\tau^2+2R_x\xi\xi_\tau\right) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi_\tau .$$

Последний интеграл проще всего вычислить, перейдя к полярным координатам: $\xi=\rho\cos\varphi$, $\xi_\tau=\rho\sin\varphi$.

Опуская несложные, но громоздкие выкладки, приведем результат:

$$I = \frac{1}{4\left(1-R_x^2\right)^{3/2}} \left(\sqrt{1-R_x^2} + R_x \arccos\,(-R_x)\right).$$

Отсюда, используя формулу (11.54), находим функцию автокорреляции выходного сигнала:

$$K_y(\tau) = \frac{a^2\sigma_x^2}{2\pi}\left(\sqrt{1-R_x^2} + R_x \arccos\,(-R_x) - 1\right). \tag{11.57}$$

Поскольку при $\tau=0$ величина $R_x(0)=1$, то дисперсия сигнала на выходе

$$\sigma_y^2 = K_y(0) = \frac{a^2\sigma_x^2}{2\pi}(\pi-1) = 0.3408a^2\sigma_x^2 . \tag{11.58}$$

▲ решите задачи 6 и 7

Поэтому коэффициент корреляции случайного процесса на выходе безынерционного нелинейного преобразователя с кусочно-линейной характеристикой описывается формулой

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi-1}\left(\sqrt{1-R_x^2} + R_x \arccos\,(-R_x) - 1\right). \tag{11.59}$$

**Нелинейные преобразования узкополосных случайных процессов.** Предположим, что входной сигнал нелинейного безынерционного преобразователя является узкополосным случайным процессом с гауссовым законом распределения. Его реализации имеют вид квазигармонических случайных колебаний с центральной частотой $\omega_0$. Функция автокорреляции входного сигнала

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos\omega_0\tau. \qquad (11.60)$$

Найдем автокорреляционную функцию выходного сигнала применительно к конкретному виду нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой, который изучался в предыдущих примерах. Непосредственная подстановка $R_x$ из (11.60) в (11.59) приводит к требуемому результату, но такой путь лишен наглядности. Целесообразно несколько преобразовать выражение (11.59), разложив его правую часть в бесконечный ряд по степени величины $R_x(\tau)$. Для этого воспользуемся тем, что

$$\arccos(-R_x) = \frac{\pi}{2} + R_x + \frac{R_x^3}{6} + \ldots,$$

$$\sqrt{1-R_x^2} = 1 - \frac{R_x^2}{2} - \frac{R_x^4}{8} - \ldots$$

Поэтому

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi-1}\left(\frac{\pi}{2}R_x + \frac{R_x^2}{2} + \frac{R_x^4}{24} + \ldots\right). \qquad (11.61)$$

На основании (11.60) находим, что

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi-1}\left(\frac{\pi}{2}\rho(\tau)\cos\omega_0\tau + \right.$$

$$\left. + {}^1/_2\,\rho^2(\tau)\cos^2\omega_0\tau + {}^1/_{24}\,\rho^4(\tau)\cos^4\omega_0\tau + \ldots\right). \qquad (11.62)$$

Поскольку

$$\cos^2\omega_0\tau = {}^1/_2 + {}^1/_2\cos 2\omega_0\tau,$$

$$\cos^4\omega_0\tau = {}^3/_8 + {}^1/_2\cos 2\omega_0\tau + {}^1/_8\cos 4\omega_0\tau,$$

то из (11.62) следует, что

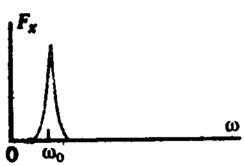
Влияние высших членов разложения пренебрежимо мало

$$R_y(\tau) \approx 0.117\rho^2(\tau) + 0.007\rho^4(\tau) +$$

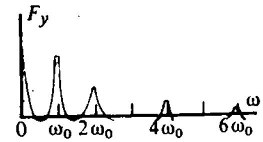
$$+ 0.733\rho(\tau)\cos\omega_0\tau + (0.117\rho^2(\tau) +$$

$$+ 0.01\rho^4(\tau))\cos 2\omega_0\tau +$$

$$+ 0.002\rho^4(\tau)\cos 4\omega_0\tau. \qquad (11.63)$$




Отсюда, воспользовавшись теоремой Хинчина, можно установить вид энергетического спектра $F_y(\omega)$ выходного случайного процесса. Оказывается, что спектр колебаний на выходе изучаемого нелинейного преобразователя разбивается на бесконечную сумму составляющих, каждая из которых отображает индивидуальный узкополосный случайный процесс. Максимумы спектральных плотностей мощности этих составляющих наблюдаются на частотах $\omega_0$, $2\omega_0$, $4\omega_0$, ... Помимо этого, в спектре выходного сигнала возникает низкочастотная компонента в окрестности нулевой частоты, которую можно рассматривать как результат амплитудного детектирования входного сигнала.




Интересно отметить, что в данном частном случае спектр выходного сигнала не содержит составляющих с частотами $3\omega_0$, $5\omega_0$, ... Безусловно, что при других видах характеристики нелинейного элемента можно ожидать появления всех без исключения гармоник центральной частоты входного случайного колебания. Интенсивности высокочастотных спектральных компонент, как правило, быстро уменьшаются с ростом их номера.

## Результаты

- *Для аппроксимации реальных вольт-амперных характеристик безынерционных нелинейных двухполюсников используются различные функции простого вида. Наиболее распространены кусочно-линейная, степенная и показательная (экспоненциальная) аппроксимации.*
- *Ток в нелинейном безынерционном двухполюснике при гармоническом внешнем воздействии содержит в общем случае постоянную поставляющую и бесконечное число гармоник — колебаний с частотами, кратными частоте входного сигнала.*
- *Напряжение на выходе резонансного усилителя, работающего в нелинейном режиме, синусоидально из-за частотно-избирательных свойств контура, несмотря на негармонический характер тока, протекающего через колебательный контур.*
- *При большой амплитуде входного сигнала в резонансном усилителе возникает перенапряженный режим.*
- *Воздействие на нелинейный элемент суммы гармонических сигналов с различными частотами приводит к возникновению на выходе колебаний с комбинационными частотами.*
- *Фильтрация соответствующих комбинационных колебаний позволяет осуществить амплитудную модуляцию, а также детектирование АМ-сигнала.*
- *При безынерционном нелинейном преобразовании гауссова случайного процесса возникает случайный процесс с негауссовой плотностью вероятности.*
- *Для того чтобы вычислить автокорреляционную функцию случайного процесса на выходе нелинейного преобразователя, необходимо располагать двумерной плотностью вероятности входного сигнала.*

## Вопросы

1. При каком условии нелинейное преобразование сигнала можно считать безынерционным?
2. Какова должна быть вольт-амперная характеристика нелинейного элемента для того, чтобы в составе тока отсутствовали гармоники нечетных номеров?
3. Из каких соображений выбирают угол отсечки тока в схеме резонансного усилителя, работающего при больших уровнях входного сигнала?
4. Каков физический принцип работы нелинейного умножителя частоты? Почему трудно добиться высокой кратности умножения?
5. Из каких соображений выбирают параметры нагрузки детектора АМ-колебаний?
6. В чем состоит отличие между линейным и квадратичным детектированием?
7. Чем определяется угол отсечки тока в диодном детекторе?
8. Как вычисляются одномерная и многомерные плотности вероятности случайного процесса после нелинейного безынерционного преобразования?
9. Чем характерно нелинейное преобразование узкополосных случайных процессов?

## Задачи

1. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника (мА) имеет вид $i(u)=10u^3$.

Какова аналитическая запись этой характеристики в окрестности рабочей точки $U_0=2$ В?

2. Резонансный усилитель гармонических колебаний создан по схеме, приведенной на рис. 11.6. Характеристика транзистора (мА) аппроксимирована отрезками двух прямых:

$$i_{\text{к}}(u_{\text{бэ}})=\begin{cases}50(u_{\text{бэ}}-0.2)\ \text{при}\ u_{\text{бэ}}>0.2\,\text{В},\\ 0\ \text{при}\ u_{\text{бэ}}<0.2\,\text{В}.\end{cases}$$

Сопротивление колебательного контура при резонансе $R_{\text{рез}}=0.8$ кОм. Напряжение источника питания $E_{\text{пит}}=9$ В. Рабочая точка совпадает с точкой излома характеристики. Определите, при какой амплитуде входного сигнала в схеме возникает перенапряженный режим.

3. Нелинейный безынерционный элемент имеет вольт-амперную характеристику

$$i(u)=a_0+a_1u+a_4u^4.$$

К элементу приложено напряжение

$$u(t)=U_{m1}\cos\omega_1t+U_{m2}\cos\omega_2t.$$

Найдите амплитуды и частоты всех комбинационных составляющих тока.

4. К нелинейному резистору с характеристикой (мА)

$$i(u)=25u+4u^2$$

приложено напряжение (В)

$$u=5+2\cos\Omega t+1.5\cos\omega_0t.$$

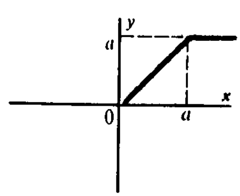
Найдите амплитуду несущего колебания и глубину амплитудной модуляции тока.

5. В схеме диодного детектора применен полупроводниковый диод с крутизной $S=10$мА/В; сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}=20$ кОм. На вход детектора подано напряжение АМ-сигнала (В)

$$u(t)=5(1+0.6\cos\Omega t)\cos\omega_0t.$$

Найдите амплитуду сигнала с низкой частотой $\Omega$, выделяемого на нагрузке детектора.

6. Нелинейное устройство представляет собой ограничитель, характеристика $y=f(x)$ которого имеет вид

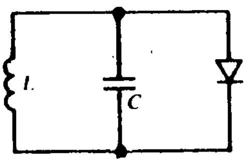



На входе устройства действует стационарный гауссов случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_x^2$. Изобразите типичную реализацию процесса на выходе. Вычислите математическое ожидание и дисперсию выходного сигнала.

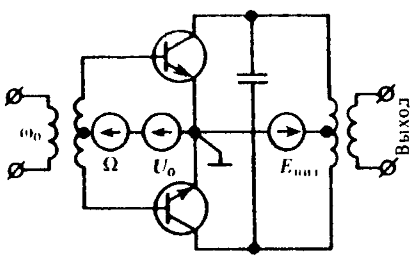
7. На входе нелинейного безынерционного элемента с характеристикой $y=a|x|$ действует стационарный гауссов шум с нулевым математическим ожиданием и функцией автокорреляции $K_x(\tau)=\sigma_x^2 R_x(\tau)$. Найдите выражение автокорреляционной функции выходного сигнала.

### Более сложные задания

8. Исследуйте свободные колебания в нелинейной системе, представляющей собой параллельный колебательный контур из элементов $L$ и $C$, зашунтированный диодом:

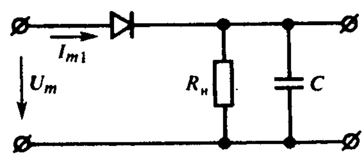



9. Проведите анализ работы балансного модулятора:




Колебательный контур в коллекторной цепи настроен на частоту $\omega_0$. Покажите, что при идеальной симметрии плеч схемы выходной сигнал не содержит составляющей с несущей частотой.

10. Покажите, что диодный детектор, собранный по схеме




имеет входное сопротивление $R_{вх}=R_н/2$. Под входным сопротивлением понимается отношение амплитуды напряжения $U_m$ к амплитуде первой гармоники тока $I_{m1}$ на входе.

11. Предложите схему, осуществляющую детектирование колебаний с угловой модуляцией. Схема должна содержать линейную частотно-избирательную систему и детектор АМ-колебаний.

# Глава 12
# Преобразования сигналов в линейных параметрических цепях

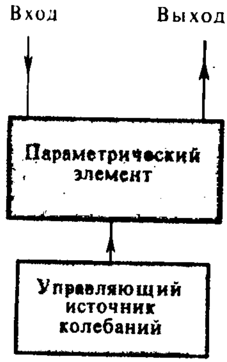
Интересными и полезными для радиотехнических приложений свойствами обладают линейные системы, которые описываются нестационарными системными операторами $T(t)$, зависящими от времени. Закон преобразования входного сигнала здесь имеет вид

$$\boxed{u_{вых}(t) = T(t)\, u_{вх}(t),} \qquad (12.1)$$

причем благодаря линейности системы

$$T(t)[\alpha_1 u_{\text{вх}1} + \alpha_2 u_{\text{вх}2}] = \alpha_1 T(t) u_{\text{вх}1} + \alpha_2 T(t) u_{\text{вх}2} \tag{12.2}$$

при любых постоянных $\alpha_1$ и $\alpha_2$.




Цепи, описываемые равенством (12.1), называются *параметрическими*. Термин связан с тем, что в составе таких цепей обязательно присутствуют элементы, параметры которых зависят от времени. В радиотехнических цепях находят применение следующие параметрические элементы: резисторы $R(t)$, конденсаторы $C(t)$ и, наконец, индуктивные элементы $L(t)$.

Отличительная черта линейной параметрической системы — наличие вспомогательного источника колебаний, управляющего параметрами элементов.

Важная роль, отводимая в радиотехнике параметрическим цепям, обусловлена способностью таких систем преобразовывать спектры входных сигналов, а также возможностью создания малошумящих параметрических усилителей.

## 12.1 Прохождение сигналов через резистивные параметрические цепи

● резистивная параметрическая цепь

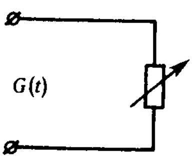
Параметрическую цепь называют *резистивной (безынерционной)*, если ее системный оператор имеет вид числа $k(t)$, зависящего от времени и служащего коэффициентом пропорциональности между входным $u_{\text{вх}}(t)$ и выходным $u_{\text{вых}}(t)$ сигналами:

$$u_{\text{вых}}(t) = k(t) u_{\text{вх}}(t). \tag{12.3}$$

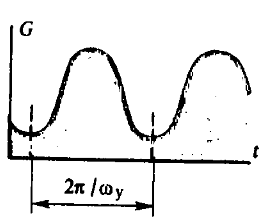
Простейшей системой такого вида служит параметрический резистор с сопротивлением $R(t)$. Закон, связывающий мгновенные значения напряжения и тока в этом двухполюснике, таков:

$$u(t) = R(t) i(t). \tag{12.4}$$

Параметрический резистивный элемент может описываться также переменной во времени проводимостью $G(t) = 1/R(t)$.




**Спектр тока в параметрическом резистивном двухполюснике.** Обычно управляющий сигнал, поступающий на параметрический элемент от внешнего вспомогательного источника, является периодическим во времени. Поэтому, изучая преобразования сигналов в резистивных параметрических элементах, сосредоточим внимание на управляемом резисторе, проводимость которого $G(t)$ представима рядом Фурье:




$$G(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(k\omega_у t - \Psi_k). \tag{12.5}$$

Здесь $\omega_у$ — частота управляющего источника; $G_0, G_1, G_2, \ldots$ и $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ — постоянные числа, определяющие амплитуды и фазы соответствующих гармоник в спектре проводимости.

Приложим к резистивному параметрическому двухполюснику гармоническое напряжение сигнала $u(t) = U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c)$. Ток, протекающий в цепи, равен при этом

$$i(t) = G(t)u(t) = \frac{U_m G_0}{2}\cos(\omega_c t + \varphi_c) + \sum_{k=1}^{\infty} U_m G_k \cos(k\omega_y t - \Psi_k)\cos(\omega_c t + \varphi_c) =$$

$$= \frac{U_m G_0}{2}\cos(\omega_c t + \varphi_c) + \frac{U_m}{2}\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos[(\omega_c + k\omega_y)t + \varphi_c - \Psi_k] +$$

$$+ \frac{U_m}{2}\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos[(\omega_c - k\omega_y)t + \varphi_c + \Psi_k]. \qquad (12.6)$$

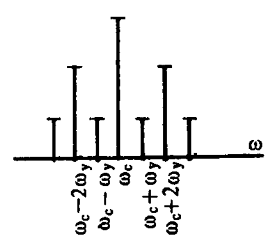
▲ решите задачу 1

Формулу (12.6) можно записать более кратко, суммируя по положительным и отрицательным индексам $k$, учтя при этом, что $G_k = G_{-k}$, $\Psi_k = -\Psi_{-k}$:

$$\boxed{i(t) = {}^1\!/\!_2 U_m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_k \cos[(\omega_c + k\omega_y)t + \varphi_c - \Psi_k].} \qquad (12.7)$$

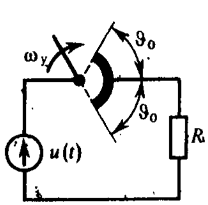
Последнее равенство устанавливает спектральный состав тока в резистивном параметрическом двухполюснике: этот ток содержит компоненту на частоте сигнала с амплитудой $U_m G_0/2$, а также последовательность комбинационных колебаний с частотами $\omega_c + k\omega_y$ $(k = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots)$ и амплитудами $U_m G_k/2$. Спектральная диаграмма тока имеет вид, симметричный относительно частоты $\omega_c$.

■ Спектр тока в резистивном параметрическом двухполюснике




Можно отметить, что в известном смысле спектральный состав тока в параметрическом резисторе проще, чем в безынерционном нелинейном элементе. Так, здесь принципиально отсутствуют высшие гармоники частоты сигнала.

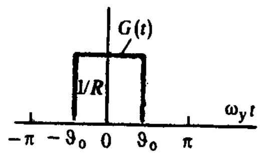
**Пример 12.1.** *Рассмотреть параметрическую цепь, образованную постоянным резистором R и коммутатором, который периодически подключает этот резистор к источнику э.д.с. $u(t) = U_m \cos \omega_c t$. Пусть $T_y$ — период управляющего сигнала. Коммутатор работает так, что за интервал времени $(-T_y/2, \ T_y/2)$ цепь замкнута при всех t, удовлетворяющих условию $-\vartheta_0 < \omega_y t < \vartheta_0$, и разомкнута в остальные моменты времени. Найти амплитуды всех спектральных компонент тока.*




Параметрическая цепь с резистором и коммутатором

В соответствии с условиями задачи проводимость данной параметрической системы $G(t)$ — четная функция, разлагаемая в ряд Фурье вида (12.5) только по косинусам с нулевыми начальными фазами $\Psi_k$. Коэффициенты этого ряда

$$G_k = \frac{2}{\pi R} \int\limits_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \cos k\xi d\xi = \frac{2}{k\pi R} \sin k\vartheta_0. \qquad (12.8)$$



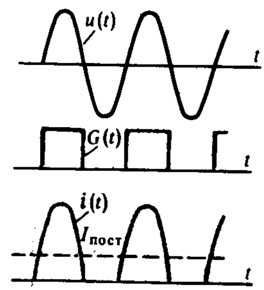

Комбинационные составляющие тока с частотами $\omega_c + k\omega_y$ будут иметь амплитуды

$$I_k = \frac{U_m}{k\pi R} \sin k\vartheta_0. \qquad (12.9)$$

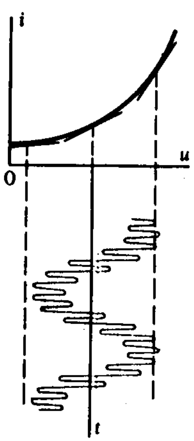
Интересно отметить, что если входной сигнал и управляющее колебание синхронны ($\omega_c = \omega_y$), будет наблюдаться постоянная составляющая тока

$$I_{\text{пост}} = \frac{U_m}{\pi R} \sin \vartheta_0, \quad k = -1.$$

В этих условиях параметрическая цепь играет роль выпрямителя; ток создается только положительными полуволнами косинусоиды.




Эффект выпрямления тока при $\theta_0 = 90°$




Дифференциальная крутизна характеристики определяется «большим» управляющим напряжением

**Реализация параметрических резистивных элементов.** На практике параметрически управляемые резисторы создают следующим образом. На вход безынерционного нелинейного двухполюсника с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$ подают сумму двух колебаний: управляющего напряжения $u_y(t)$ и напряжения сигнала $u_c(t)$. При этом управляющее напряжение значительно превышает по величине полезный сигнал. Ток в нелинейном двухполюснике можно записать, разложив вольт-амперную характеристику в ряд Тейлора относительно текущего значения управляющего напряжения:

$$i = f(u_y + u_c) = f(u_y) + f'(u_y)u_c + \frac{1}{2}f''(u_y)u_c^2 + \ldots \qquad (12.10)$$

Амплитуда сигнала выбирается столь малой, что в формуле (12.10) можно пренебречь вторыми и более высокими степенями величины $u_c(t)$. Обозначив посредством $i_c(t)$ приращение тока через двухполюсник, вызванное наличием сигнала, имеем

$$\boxed{i_c(t) \approx f'(u_y(t))u_c = S_{\text{диф}}(u_y(t))u_c} \qquad (12.11)$$

Ниже будут изучены важные примеры использования резистивных параметрических элементов рассмотренного вида.

**Преобразование частоты.** Так называют трансформацию спектра модулированного сигнала, заключающуюся в переносе его из окрестности несущей частоты $\omega_с$ в окрестность некоторой *промежуточной частоты* $\omega_{пр}$, совершаемую без изменения закона модуляции.

**промежуточная частота**

Преобразователь частоты состоит из *смесителя* — параметрического безынерционного элемента и *гетеродина* — вспомогательного генератора гармонических колебаний с частотой $\omega_г$, служащего для параметрического управления смесителем. Под действием напряжения гетеродина дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики смесителя периодически изменяется во времени по закону

$$S_{диф}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_г t + S_2 \cos 2\omega_г t + \ldots \tag{12.12}$$

Если на входе преобразователя частоты действует напряжение АМ-сигнала

$$u_с(t) = U_m(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_с t,$$

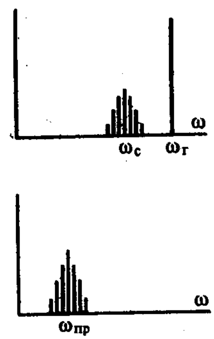
то в соответствии с (12.11) и (12.12) в выходном токе появляется составляющая

$$i_с(t) = U_m(1 + M\cos\Omega t)[S_0 \cos\omega_с t +$$
$$+ {}^1/_2 S_1 \cos(\omega_г - \omega_с)t + {}^1/_2 S_1 \cos(\omega_г + \omega_с)t +$$
$$+ {}^1/_2 S_2 \cos(2\omega_г - \omega_с)t + {}^1/_2 S_2 \cos(2\omega_г + \omega_с)t + \ldots].$$

В качестве промежуточной частоты принято выбирать $\omega_{пр} = |\omega_г - \omega_с|$; ток на промежуточной частоте

$$i_{пр}(t) = \frac{S_1 U_m}{2}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_{пр} t \tag{12.13}$$

является АМ-колебанием с тем же законом модуляции, что и входной сигнал.




Преобразование спектра

Для того чтобы выделить составляющие спектра с частотами, близкими к промежуточной частоте, выходная цепь преобразователя содержит колебательный контур, настроенный на $\omega_{пр}$.

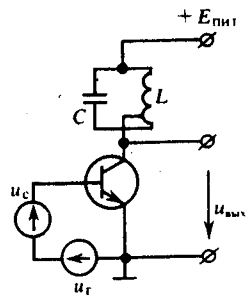



Схема преобразователя частоты

Преобразование частоты широко используется в радиоприемных устройствах — так называемых *супергетеродинах*.

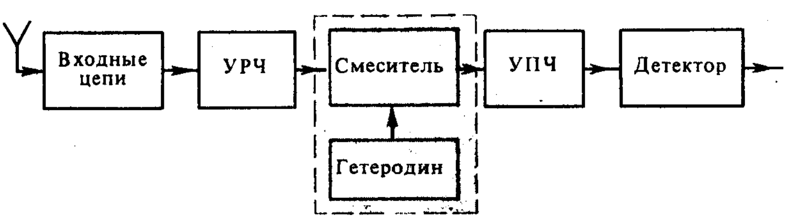


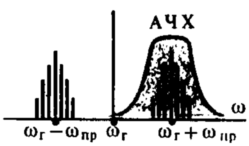

Рис. 12.1. Структурная схема супергетеродинного приемника

Структурная схема супергетеродинного приемника изображена на рис. 12.1.

■ принцип работы супергетеродинного приемника

Сигнал, принятый антенной, через фильтрующие входные цепи и усилитель радиочастоты (УРЧ) поступает на преобразователь частоты. Выходной сигнал преобразователя является модулированным колебанием с несущей частотой, равной промежуточной частоте приемника. Основное усиление приемника и его избирательность (селективность), т. е. способность выделять полезный сигнал из помех, обеспечиваются узкополосным усилителем промежуточной частоты (УПЧ).

Важная особенность супергетеродина — неизменность промежуточной частоты; для настройки приемника приходится перестраивать лишь гетеродин и в некоторых случаях те колебательные системы, которые имеются в входных цепях и в УРЧ.




Подавление зеркального канала

Следует отметить, что преобразователь частоты одинаково реагирует на полезные сигналы с частотами $\omega_{c1}=\omega_г+\omega_{пр}$ и $\omega_{c2}=\omega_г-\omega_{пр}$. В радиотехнике говорят, что возможен прием как по основному, так и по зеркальному каналу. Для того чтобы предотвратить неоднозначность настройки приемника, требуется обеспечить такую избирательность резонансных систем, включенных между антенной и преобразователем частоты, чтобы практически подавить сигналы зеркального канала.

● крутизна преобразования

**Крутизна преобразования.** Эффективность работы преобразователя частоты принято характеризовать особым параметром — крутизной преобразования $S_{пр}$, которая служит коэффициентом пропорциональности между амплитудой тока промежуточной частоты и амплитудой немодулированного напряжения сигнала, т. е. $S_{пр}=I_{m\,пр}/U_{mc}$. Как следует из (12.13),

$$\boxed{S_{пр}=S_1/2\,.} \tag{12.14}$$

Итак, крутизна преобразования равна половине амплитуды первой гармоники дифференциальной крутизны параметрического элемента.

▲ решите задачу 3

Предположим, что вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, входящего в схему преобразователя частоты, квадратична: $i(u)=bu^2$. В отсутствие сигнала к элементу приложена сумма напряжений смещения и гетеродина: $u_у=U_0+$ $+U_{m\,г}\cos\omega_г t$. Дифференциальная крутизна преобразователя изменяется во времени по закону

$$S_{диф}=2bu_у=2bU_0+2bU_{m\,г}\cos\omega_г t. \tag{12.15}$$

Обращаясь к (12.14), видим, что в данном случае

$$S_{пр}=bU_{mг}. \qquad (12.16)$$

Таким образом, здесь при постоянном уровне полезного сигнала на входе амплитуда выходного сигнала преобразователя прямо пропорциональна амплитуде напряжения гетеродина.

Рассмотрим простой пример расчета преобразователя частоты.

---

**Пример 12.2.** *В преобразователе частоты использован нелинейный элемент (транзистор) с характеристикой* $i_к=20u_{бэ}^2$, мА, *т. е.* $b=20$ мА/В$^2$. *Резонансное сопротивление колебательного контура в коллекторной цепи* $R_{рез}=3$ кОм. *Амплитуда немодулированного входного сигнала* $U_{mс}=50$ мкВ, *амплитуда напряжения гетеродина* $U_{mг}=0.5$ В. *Найти амплитудное значение* $U_{m\,пр}$ — *напряжение промежуточной частоты на выходе преобразователя.*

По формуле (12.16) находим крутизну преобразования: $S_{пр}=20\cdot 0.5=10$ мА/В. Амплитуда тока промежуточной частоты на выходе $I_{m\,пр}=S_{пр}U_{mс}=0.5$ мкА. Полагая выходное сопротивление транзистора достаточно высоким, так что можно пренебречь его шунтирующим действием на колебательный контур, находим амплитуду напряжения промежуточной частоты на выходе: $U_{m\,пр}=1.5$ мВ.

---

**Синхронное детектирование.** Предположим, что в схеме преобразователя частоты гетеродин настроен в точности на частоту сигнала и поэтому дифференциальная крутизна изменяется во времени по закону

$$S_{диф}(t)=S_0+S_1\cos\omega_c t+S_2\cos 2\omega_c t+\ldots$$

Подав на вход такого устройства АМ-сигнал

$$u_c(t)=U_{mc}(1+M\cos\Omega t)\cos(\omega_c t+\varphi_c),$$

получаем выражение для тока, обусловленного сигналом:

$$i_c(t)=U_{mc}(1+M\cos\Omega t)[S_0\cos(\omega_c t+\varphi_c)+$$

$$+{}^1/_2 S_1\cos(2\omega_c t+\varphi_c)+{}^1/_2 S_1\cos\varphi_c+\ldots]. \qquad (12.17)$$

Выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, содержит постоянную составляющую $(S_1/2)\cos\varphi_c$, которая зависит от сдвига фазы между сигналом гетеродина и несущим колебанием входного сигнала. Поэтому в спектре выходного тока появится низкочастотная составляющая

$$i_{нч}(t)=\frac{U_{mc}S_1}{2}(1+M\cos\Omega t)\cos\varphi_c; \qquad (12.18)$$

этот ток полностью повторяет собой передаваемое сообщение.

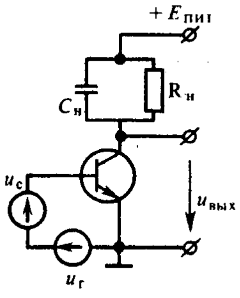



Схема синхронного детектора

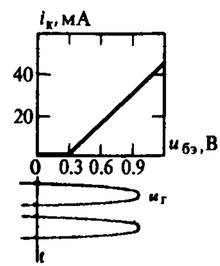
*Синхронным детектором* называют преобразователь частоты, работающий при условии $\omega_{\text{г}}=\omega_{\text{с}}$; для выделения полезного сигнала выходная цепь содержит ФНЧ, например параллельную $RC$-цепь.

Использование синхронных детекторов на практике затруднено тем, что между несущим колебанием входного сигнала и колебанием гетеродина должно поддерживаться жесткое фазовое соотношение. Наиболее благоприятен режим работы при $\varphi_{\text{с}}=0°$; если же $\varphi_{\text{с}}=90°$, то полезный выходной сигнал обращается в нуль. Однако такая чувствительность синхронного детектора к сдвигу фаз позволяет использовать его для измерения фазовых соотношений между двумя когерентными колебаниями.

Ниже демонстрируется методика расчета конкретного варианта синхронного детектора.

---

**Пример 12.3.** *В схеме синхронного детектора использован транзистор, характеристика* $i_{\text{к}}=f(u_{\text{бэ}})$ *которого аппроксимируется двумя отрезками прямых. Параметры аппроксимации:* $S=50$ мА/В, $U_{\text{н}}=0.3$ В. *Амплитуда напряжения гетеродина* $U_{m\text{г}}=1$ В, *постоянное напряжение смещения отсутствует* ($U_0=0$). *Немодулированное напряжение полезного сигнала с амплитудой* $U_{m\text{с}}=25$ мкВ *имеет фазовый сдвиг относительно колебаний гетеродина на угол* $\varphi_{\text{с}}=45°$. *Определить изменение постоянного напряжения на выходе синхронного детектора, вызванное полезным сигналом, если резистор* $R_{\text{н}}=1.2$ кОм.

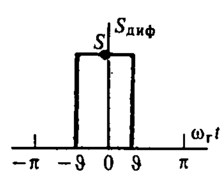



При данном виде вольт-амперной характеристики нелинейного элемента дифференциальная крутизна может принимать лишь два значения:

$$S_{\text{диф}}=\begin{cases}0, & u_{\text{у}}<U_{\text{н}},\\ S, & u_{\text{у}}>U_{\text{н}}.\end{cases}$$

Поэтому закон изменения дифференциальной крутизны во времени описывается периодической последовательностью прямоугольных видеоимпульсов. Угол отсечки тока $\vartheta$, определяющий длительность этих импульсов, найдем по формуле (см. гл. 2)

$$\vartheta=\arccos\left(\frac{U_{\text{н}}-U_0}{U_{m\text{г}}}\right)=72.5°.$$




Для того чтобы определить амплитуду первой гармоники крутизны, можно воспользоваться формулой (12.8), в которую вместо проводимости $1/R$ следует подставить $S$ — крутизну транзистора на активном участке характеристики. Тогда

$$S_1=\frac{2S}{\pi}\sin\vartheta=0.607S=30.35\ \text{мА/В}.$$

Полезный сигнал вызывает согласно (12.18) приращение тока, текущего через транзистор, на величину

$$\Delta i=\frac{U_{m\text{с}}S_1}{2}\cos\varphi_{\text{с}}=0.268\ \text{мкА}.$$

Отсюда находим изменение уровня постоянного напряжения на выходе синхронного детектора:

$$\Delta u = -\Delta i R_н = -0.32 \text{ мВ}.$$

## 12.2 Энергетические соотношения в параметрических реактивных элементах цепи

Целым рядом особых свойств обладают параметрические реактивные элементы, у которых либо емкость $C(t)$, либо индуктивность $L(t)$ переменны во времени. Ниже на примере параметрически управляемого конденсатора будет показано, что в определенных условиях такие элементы могут выступать в роли «посредников», передающих часть энергии от внешних управляющих источников, так называемых *генераторов накачки*, к цепям, несущим полезный сигнал. На этом принципе основано параметрическое усиление сигналов, которое будет изучаться в последующем параграфе.

● генератор накачки

**Связь между емкостью конденсатора и запасенной энергией.** Для того чтобы уяснить физические основы процессов, происходящих в реактивных параметрических цепях, рассмотрим следующую идеализированную систему. Пусть плоский конденсатор с расстоянием $x_0$ между обкладками заряжен до напряжения $U_0$. Конденсатор несет разделенный заряд $Q = CU_0$, где $C$ — его емкость.

Предположим, что механическим путем зазор между обкладками увеличен до величины $x_0 + dx$. Перемещение производится в направлении против силы электрического поля, стремящейся сблизить обкладки. Поэтому внешние силы должны совершить некоторую положительную работу над данной системой, в результате чего запас энергии поля в конденсаторе возрастает.

С увеличением зазора емкость конденсатора уменьшается

Для того чтобы получить количественные результаты, заметим, что исходная энергия конденсатора

$$E = Q^2/(2C). \tag{12.19}$$

Если емкость получила приращение $dC$, то приращение энергии

$$dE = -\frac{Q^2}{2C^2}\,dC = -E\frac{dC}{C}, \tag{12.20}$$

поскольку ток проводимости отсутствует и заряд $Q$ неизменен. Вычисляя емкость $C$ по известной из курса физики формуле плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 S / x_0$$

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8.842 \times 10^{-12}$ Ф/м

($S$ — площадь обкладки), имеем следующее выражение для относительного приращения емкости:

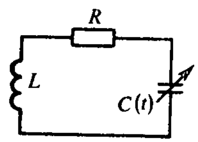
$$dC/C = -dx/x_0.$$

Подставив этот результат в (12.20), находим, что

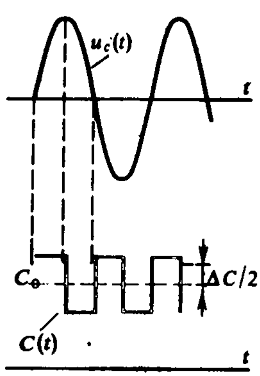
$$dE = E\frac{dx}{x_0}. \tag{12.21}$$

Как и следовало ожидать, формулы (12.20) и (12.21) показывают, что для увеличения запаса энергии электрического поля в системе необходимо за счет внешних факторов уменьшить емкость заряженного конденсатора.

**Параметрическое возбуждение колебательного контура.** Если величина заряда $Q$ в конденсаторе постоянна, то невозможно добиться непрерывного притока энергии в систему, периодически изменяя емкость конденсатора вокруг некоторого среднего значения. Внешний источник, совершив положительную работу на отрезке времени, когда емкость уменьшалась, получит от конденсатора назад ровно такую же порцию энергии в процессе увеличения емкости. Поэтому усредненная за период мощность накачки будет равна нулю.




Другая картина наблюдается в колебательной системе, когда напряжение на конденсаторе, вызванное собственным процессом, меняет знак, переходя через нуль. Рассмотрим добротный колебательный контур, образованный постоянной индуктивностью $L$, параметрической емкостью $C(t)$ и резистором потерь $R$. Предположим, что в контуре каким-либо образом возбуждены собственные колебания. Пренебрегая незначительным уменьшением амплитуды колебаний из-за потерь, будем считать, что $U_{mC}$ — амплитуда напряжения на емкости, которое изменяется во времени с частотой собственных колебаний $\omega_{соб} = 1/\sqrt{LC_0}$. Здесь $C_0$ — среднее значение емкости параметрического конденсатора.




Пусть емкость конденсатора изменяется периодически следующим образом: дважды за период собственных колебаний, в те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе экстремально, емкость скачком уменьшается на величину $\Delta C$; возвращение в исходное состояние, т. е. положительный перепад емкости, наблюдается в те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе проходит через нуль.

При такой накачке будет наблюдаться однонаправленный приток энергии в колебательный контур. Действительно, работа внешних сил, выполняемая в момент отрицательных перепадов емкости, всегда положительна независимо от знака напряжения на обкладках. Возвращение емкости в исходное состояние будет совершаться в те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе равно нулю, т. е. без затраты энергии.

Если

$$E_{C\max}=\frac{1}{2}U_{mC}^2\left(C_0+\frac{\Delta C}{2}\right)\approx\frac{1}{2}U_{mC}^2C_0$$

— максимальная энергия, запасаемая в конденсаторе, то согласно формуле (12.20) за период собственных колебаний система получит энергию накачки

$$E_{\text{н}}=2E_{C\max}\frac{\Delta C}{C_0}=U_{mC}\,\Delta C. \qquad (12.22)$$

Учитывается, что энергия поступает в контур дважды за период собственных колебаний

В то же время средняя мощность потерь в контуре

$$P_{\text{пот}}=\frac{1}{2}I_m^2R=\frac{1}{2}\frac{U_{mC}^2}{\rho^2}R=\frac{1}{2}\frac{U_{mC}^2}{\rho Q}. \qquad (12.23)$$

Полная энергия, рассеиваемая в резисторе за период колебаний $T$, составит

$$E_{\text{пот}}=P_{\text{пот}}T=U_{mC}^2C_0\pi/Q. \qquad (12.24)$$

Принимается во внимание, что $\rho\omega_{\text{соб}}=1/C_0$

Если выполняется равенство

$$E_{\text{н}}=E_{\text{пот}}, \qquad (12.25)$$

то за счет действия источника накачки происходит компенсация потерь в контуре. Если же $E_{\text{н}}>E_{\text{пот}}$, то система становится неустойчивой и амплитуда колебаний в контуре будет экспоненциально нарастать, т. е. произойдет *параметрическое возбуждение* колебательной системы. Из (12.22) и (12.24) вытекает соотношение, определяющее критическую величину относительной вариации емкости:

$$\boxed{\Delta C_{\text{кр}}/C_0=\pi/Q.} \qquad (12.26)$$

Значения $\Delta C_{\text{кр}}$, как правило, невелики. Так, для параметрического возбуждения контура с $C_0=20$ пФ, $Q=100$ достаточно иметь $\Delta C=0.63$ пФ.

Анализ приведенного здесь частного примера системы с управляемой емкостью проведен в предположении, что сигнал накачки изменяет емкость конденсатора дважды за период собственных колебаний. Однако легко видеть, что эффект параметрического возбуждения колебательной системы будет наблюдаться и тогда, когда основная частота напряжения накачки $\omega_{\text{н}}=\omega_{\text{соб}}/n(n=1, 2, \ldots)$. Важно лишь, чтобы в спектре сигнала накачки присутствовала составляющая с частотой $2\omega_{\text{соб}}$.

■ Требования к генератору накачки, обеспечивающие параметрическое возбуждение колебательного контура

Требуется также, чтобы между собственными колебаниями контура и колебаниями генератора накачки поддерживались строгие фазовые соотношения. Достаточно сдвинуть сигнал накачки по фазе на половину периода, так что положительный перепад емкости будет приходиться на те моменты времени, когда напряжение на конденсаторе проходит через экстремумы, как параметрический конденсатор начнет играть роль уже не генератора энергии, а дополнительной активной нагрузки.

**Связь между напряжением и током в параметрическом конденсаторе.** Рассмотрим цепь, образованную источником сигнала

$$u(t) = U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c)$$

и управляемым конденсатором, емкость которого меняется во времени по гармоническому закону с частотой накачки:

$$C(t) = C_0(1 + \beta\cos(\omega_н t + \varphi_н)). \tag{12.27}$$

Здесь $\beta$ — коэффициент, характеризующий глубину модуляции емкости. Поскольку заряд в конденсаторе $q = C(t)u$, то ток в цепи

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dC}{dt}u + C\frac{du}{dt} = \\ &= -\beta\omega_н C_0 U_m \sin(\omega_н t + \varphi_н)\cos(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &- \omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &- \beta\omega_c C_0 U_m \cos(\omega_н t + \varphi_н)\sin(\omega_c t + \varphi_c). \end{aligned} \tag{12.28}$$

Воспользовавшись известной тригонометрической формулой

$$\cos x \sin y = {}^1/_2[\sin(x + y) - \sin(x - y)],$$

можно представить произведения, стоящие в первом и третьем слагаемых правой части формулы (12.28), следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sin(\omega_н t + \varphi_н)\cos(\omega_c t + \varphi_c) = \\ &= {}^1/_2[\sin((\omega_c + \omega_н)t + \varphi_c + \varphi_н) - \\ &- \sin((\omega_c - \omega_н)t + \varphi_c - \varphi_н)]; \end{aligned} \tag{12.29}$$

▲ решите задачу 4

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_н t + \varphi_н)\sin(\omega_c t + \varphi_c) = \\ &= {}^1/_2[\sin((\omega_c + \omega_н)t + \varphi_c + \varphi_н) - \\ &- \sin((\omega_н - \omega_c)t + \varphi_н - \varphi_c)]. \end{aligned} \tag{12.30}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} i(t) = &-\omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) + \\ &+ \frac{\beta C_0 U_m}{2}(\omega_c - \omega_н)\sin((\omega_н - \omega_c)t + \varphi_н - \varphi_c) - \\ &- \frac{\beta C_0 U_m}{2}(\omega_н + \omega_c)\sin((\omega_c + \omega_н)t + \varphi_c + \varphi_н). \end{aligned} \tag{12.31}$$

Это выражение устанавливает вид спектральной диаграммы тока в параметрическом конденсаторе. Спектр помимо компоненты на частоте сигнала содержит два боковых колебания с частотами $\omega_с-\omega_н$ и $\omega_с+\omega_н$.

**Средняя мощность, потребляемая параматрическим конденсатором на частоте сигнала.** Из теории цепей известно, что для существования между источником и нагрузкой отличного от нуля среднего потока мощности требуется, чтобы, во-первых, при гармоническом режиме ток и напряжение описывались функциями одной и той же частоты и, во-вторых, сдвиг фаз между током и напряжением был отличен от 90°.

Средняя мощность, потребляемая двухполюсником,

$P=\frac{UI}{2}\cos\varphi$,

где $\varphi$ — угол сдвига фаз между током и напряжением

Как видно из формулы (12.31), в составе тока, текущего через параметрический конденсатор, всегда присутствует реактивная компонента на частоте сигнала:

$$i_р(t)=-\omega_с C_0 U_m \sin(\omega_с t+\varphi_с).$$

Этот ток, находясь во временнóй квадратуре с напряжением источника, в среднем не выделяет мощности.

Однако при соответствующем выборе частоты накачки можно добиться появления еще одной компоненты тока с частотой сигнала. Как это видно из (12.29) и (12.30), для этого достаточно положить

$$\omega_н=2\omega_с.$$

выбор частоты накачки

Тогда ток через параметрический конденсатор начинает содержать полезную составляющую

$$i_п(t)=-\frac{\beta\omega_с C_0 U_m}{2}\sin(\omega_с t+\varphi_н-\varphi_с). \tag{12.32}$$

Мгновенная мощность полезной составляющей

$$p_п(t)=u(t)\,i_п(t)=$$

$$=-\frac{-\beta\omega_с C_0 U_m^2}{2}\cos(\omega_с t+\varphi_с)\sin(\omega_с t+\varphi_н-\varphi_с)=$$

$$=-\frac{\beta\omega_с C_0 U_m^2}{4}\left[\sin(2\omega_с t+\varphi_н)-\sin(2\varphi_с-\varphi_н)\right].$$

Мощность, усредненная за период сигнала,

$$P_{ср}=\frac{1}{T_с}\int_0^{T_с} p_п(t)\,dt=\frac{\beta\omega_с C_0 U_m^2}{4}\sin(2\varphi_с-\varphi_н). \tag{12.33}$$

**Схема замещения параметрического конденсатора.** Формула (12.33) свидетельствует о том, что в зависимости от фазового соотношения между источником входного сигнала и генератором колебаний накачки величина средней мощности может быть

▲ решите задачи 5, 6 и 7

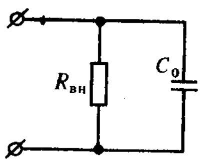
как положительной, так и отрицательной. Это означает, что при соответствующем выборе углов $\varphi_c$ и $\varphi_н$ возможен режим, когда параметрически управляемый конденсатор ведет себя подобно активному элементу цепи, не потребляя, а поставляя мощность на частоте входного сигнала.

Обозначив $\Phi=2\varphi_c-\varphi_н$, запишем среднюю мощность колебательного процесса в конденсаторе как

$$P_{ср}=U_m^2/(2R_{вн}),$$

где

$$\boxed{R_{вн}=2/(\beta\omega_c C_0 \sin\Phi)} \qquad (12.34)$$



— активное сопротивление, вносимое данным элементом в цепь. Схема замещения параметрического конденсатора, управляемого источником накачки с удвоенной входной частотой, представляет собой параллельное соединение конденсатора $C_0$ и резистора $R_{вн}$. Для того чтобы этот элемент вел себя подобно генератору, необходимо, чтобы значение вносимого активного сопротивления было отрицательно. Средняя мощность, отдаваемая в цепь, тем больше, чем меньше модуль отрицательного сопротивления.

## 12.3 Принципы параметрического усиления

■ применение параметрических усилителей

Способность управляемых реактивных двухполюсников при определенных условиях играть роль активных элементов цепи послужила основой для создания особого вида радиотехнических устройств, называемых *параметрическими усилителями*. Эти усилители нашли применение главным образом в СВЧ-диапазоне как входные каскады высокочувствительных радиоприемных устройств. Основное достоинство параметрических усилителей — низкий уровень собственных шумов, что связано с отсутствием дробовых флуктуаций тока.

● варактор

● вольт-кулонная характеристика

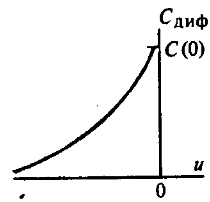
**Реализация параметрически управляемых реактивных элементов.** Возможность параметрического усиления сигналов была теоретически показана еще в начале века. Однако практическое осуществление этой идеи стало возможным лишь в 50-х годах, после того как были созданы первые удачные конструкции параметрических полупроводниковых диодов. Работа этих диодов, называемых также *варакторами*, основана на следующем эффекте. Если к *p-n*-переходу диода приложено напряжение в обратной полярности, то величина разделенного заряда $q$ в области запирающего слоя является функцией приложенного напряжения $u$. Зависимость $q(u)$ называют *вольт-кулонной характеристикой* управляемого конденсатора. При изменении напряжения через запертый переход диода течет ток смещения

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du}\,\frac{du}{dt} = C_{\text{диф}}(u)\,\frac{du}{dt}. \tag{12.35}$$

Здесь $C_{\text{диф}}$ $(u)$—дифференциальная емкость управляемого конденсатора. Установлено, что дифференциальная емкость (пФ) варактора с точечным контактом приближенно описывается формулой

$$C_{\text{диф}}(u) = \frac{C(0)}{\sqrt{1+2|u|}}, \tag{12.36}$$

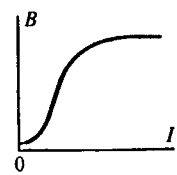
где $C(0)$ — дифференциальная емкость при нулевом смещении: $u$ — напряжение, В. Чем сильнее заперт переход, тем меньше дифференциальная емкость.




Реализация параметрически управляемой емкости достигается за счет нелинейных свойств варактора

Современные варакторы обладают весьма совершенными характеристиками и способны работать вплоть до частот в несколько десятков гигагерц, т. е. в миллиметровом диапазоне.

Могут быть созданы также элементы с параметрически управляемой индуктивностью $L$ $(t)$. Они представляют собой индуктивные катушки, где в качестве сердечника применен ферромагнитный материал с резко выраженной зависимостью индукции $B$ от подмагничивающего тока $I$. Однако на радиочастотах этот способ не нашел широкого применения из-за большой инерционности процессов перемагничивания материала.




Кривая намагничивания ферромагнитного материала

**Одноконтурный параметрический усилитель.** Рассмотрим генератор сигнала, образованный параллельным соединением активной проводимости $G_{\text{г}}$ и идеального источника тока с амплитудой $I_m$. Генератор нагружен на резистивную нагрузку, проводимость которой равна $G_{\text{н}}$. На зажимах цепи возникает напряжение $U_m = I_m/(G_{\text{г}} + G_{\text{н}})$, поэтому мощность в нагрузке

$$P_{\text{н}} = \frac{1}{2}\,\frac{I_m^2 G_{\text{н}}}{(G_{\text{г}} + G_{\text{н}})^2}. \tag{12.37}$$

С уменьшением проводимости генератора мощность в нагрузке возрастает. Таким образом, эффекта усиления можно добиться, уменьшая каким-либо образом внутреннюю проводимость генератора. Одним из путей служит включение параллельно генератору параметрического конденсатора, емкость которого изменяется с удвоенной частотой сигнала, а начальная фаза генератора накачки выбрана такой, чтобы сопротивление $R_{\text{вн}}$ (см. формулу (12.34)) было отрицательным.

Говорят, что при выполнении указанных условий параметрический усилитель работает в синхронном режиме

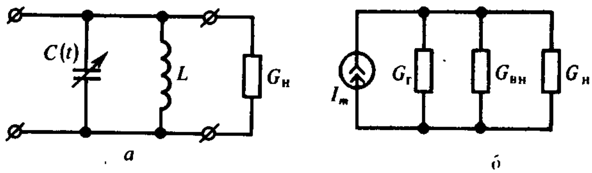



Рис. 12.2. Одноконтурный параметрический усилитель:
*а* — принципиальная схема; *б* — эквивалентная схема

На рис. 12.2 изображена схема простейшего одноконтурного параметрического усилителя, реализующего данный принцип.

Вспомогательная индуктивность $L$ вместе с емкостью $C_0$ (см. формулу (12.27)) образует параллельный колебательный контур, настроенный на частоту сигнала. Входное сопротивление контура велико, и он не шунтирует проводимость, вносимую варактором параллельно контуру и равную

$$G_{вн} = 1/R_{вн} = \beta\omega_c C_0 \sin\Phi/2. \tag{12.38}$$

Обращаясь к рис. 12.1, *б*, можно заметить, что мощность, рассеиваемая в нагрузке, становится равной

$$P'_н = \frac{1}{2}\,\frac{I_m^2 G_н}{(G_н + G_г + G_{вн})^2}. \tag{12.39}$$

Если $G_{вн}<0$, то $P'_н>P_н$. Из сравнения формул (12.37) и (12.39) следует выражение для коэффициента усиления мощности

$$\boxed{K_P = \left(\frac{G_г + G_н}{G_н + G_г + G_{вн}}\right)^2.} \tag{12.40}$$

▲ решите задачу 8

Например, в параметрическом усилителе при $G_г=0.013$ См, $G_н=0.01$ См и $G_{вн}=-0.02$ См величина

$$K_P = (0.023)^2/(0.003)^2 = 58.78,$$

или в логарифмических единицах

$$\Delta_P = 10\lg K_P = 17.69 \text{ дБ}.$$

**Устойчивость параметрического усилителя.** Если отрицательная проводимость варактора полностью компенсирует как внутреннюю проводимость источника сигнала, так и проводимость нагрузки, то происходит самовозбуждение параметрического усилителя. Формула (12.39) показывает, что критическое значение отрицательной вносимой проводимости, при которой наступает самовозбуждение, равно

$$G_{вн.кр} = -(G_г + G_н). \tag{12.41}$$

Полагая, что фазовые соотношения колебаний сигнала и накачки оптимальны в том смысле, что $\sin\Phi = -1$, из (12.34) и (12.41) находим критическую величину глубины модуляции емкости:

**условие самовозбуждения параметрического усилителя**

$$\beta_{кр} = \frac{2(G_г + G_н)}{\omega_c C_0}. \qquad (12.42)$$

**Пример 12.4.** *Одноконтурный параметрический усилитель работает на частоте* 6 ГГц ($\lambda = 5$ см). *Генератор сигнала и нагрузка имеют одинаковые проводимости* 0.005 См ($R_г = R_н = 200$ Ом). *Емкость варактора* $C_0 = 0.8$ пФ. *Определить предельные границы изменения емкости, при достижении которых схема переходит в режим самовозбуждения.*

По формуле (12.42) определяем

$$\beta_{кр} = \frac{2 \cdot 0.01}{6.28 \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot 0.8 \cdot 10^{-12}} = 0.66.$$

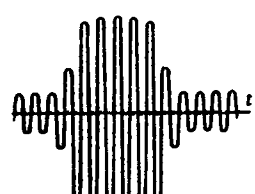
Таким образом, параметрический усилитель самовозбудится, если емкость варактора, изменяясь во времени по гармоническому закону, колеблется в пределах от $C_{max} = C_0(1+\beta_{кр}) = 1.328$ пФ до $C_{min} = C_0(1-\beta_{кр}) = 0.272$ пФ.

**Параметрическое усиление в режиме расстройки.** В реальных условиях трудно, а порой и невозможно, точно выполнить условие синхронизма $\omega_н = 2\omega_c$. Если частота сигнала оказывается несколько расстроенной относительно требуемого значения, т. е. $\omega_c = \omega_н/2 + \delta\omega$, то говорят, что параметрический усилитель работает *в асинхронном режиме.* При этом величина $\Phi$, определяющая согласно (12.34) активное вносимое сопротивление, является функцией времени:

$$\Phi = 2\varphi_н - \varphi_c - \delta\omega t.$$

Вносимое сопротивление, изменяясь по закону

$$R_{вн} = \frac{2}{\beta\omega_c C_0 \sin(2\varphi_н - \varphi_c - \delta\omega t)},$$




**Выходной сигнал усилителя в асинхронном режиме**

периодически приобретает разные знаки. Как следствие этого, наблюдаются глубокие изменения уровня выходного сигнала, аналогичные по характеру биениям. Этот недостаток одноконтурных усилителей в значительной степени препятствует их практическому использованию.

**Двухконтурный параметрический усилитель.** Работы, направленные на улучшение эксплуатационных характеристик параметрических усилителей, привели к созданию принципиально иных схем, свободных от указанных выше недостатков. Так называемые *двухконтурные усилители* способны работать при произвольном соотношении частот сигнала и накачки, причем независимо от начальных фаз этих колебаний. Такой эффект достигается за счет использования вспомогательных колебаний, возникающих на одной из комбинационных частот.

Схема двухконтурного параметрического усилителя приведена на рис. 12.3.

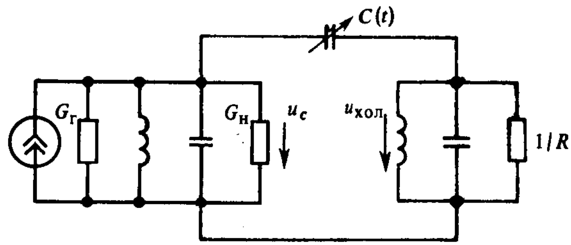



Рис. 12.3. Двухконтурный параметрический усилитель

**холостой контур и холостая частота**

Усилитель состоит из двух колебательных контуров, один из которых, называемый *сигнальным контуром*, настроен на частоту $\omega_c$, а другой, так называемый *холостой контур*, настроен на *холостую частоту* $\omega_{хол}=\omega_н-\omega_c$. Связь между контурами осуществляется с помощью параметрической емкости варактора, которая изменяется во времени по гармоническому закону с частотой накачки $\omega_н$:

$$C(t)=C_0\,(1+\beta\cos\omega_н t).$$

Если $u_c(t)$ и $u_{хол}(t)$ — напряжения на сигнальном и холостом контурах соответственно, то ток через варактор

**Предполагается, что глубина модуляции емкости достаточно мала**

$$i(t)\approx C(t)\frac{d}{dt}(u_c-u_{хол}). \quad (12.43)$$

Предположим, что

$$u_c(t)=U_{mc}\cos\omega_c t. \quad (12.44)$$

Среди комбинационных составляющих тока через варактор есть компонента на холостой частоте

$$i_{хол}(t)=I_{m\,хол}\cos(\omega_{хол}t+\Psi), \quad (12.45)$$

где величины $I_{m\,хол}$ и $\Psi$ пока не определены.

Считая известным $R_{рез.хол}$ — резонансное сопротивление холостого контура, имеем

$$u_{хол}(t)=I_{m\,хол}R_{рез.\,хол}\cos(\omega_{хол}t+\Psi). \quad (12.46)$$

Подставив выражения (12.44) и (12.46) в формулу (12.43), получаем следующее выражение тока в параметрическом конденсаторе:

$$i(t) = C_0(1+\beta\cos\omega_н t)\times$$
$$\times(-\omega_с U_{mc}\sin\omega_с t + \omega_{хол} I_{m\,хол} R_{рез.хол}\sin(\omega_{хол}t+\Psi)).$$

Для того чтобы отсюда найти холостой ток $i_{хол}(t)$, заметим, что компонента с частотой $\omega_{хол}=\omega_н-\omega_с$ получится только от произведения

$$\cos\omega_н t\sin\omega_с t = {}^1/_2\,[\sin(\omega_с-\omega_н)t + \sin(\omega_с+\omega_н)t].$$

Таким образом, ток на холостой частоте *не зависит от напряжения $u_{хол}(t)$ на холостом контуре и равен*

Система проявляет свойства источника тока

$$i_{хол}(t) = \frac{\beta\omega_с C_0 U_{mc}}{2}\sin\omega_{хол}t. \tag{12.47}$$

Поэтому

$$u_{хол}(t) = \frac{\beta\omega_с C_0 U_{mc} R_{рез.хол}}{2}\sin\omega_{хол}t.$$

Теперь вычислим ток $i_с(t)$, протекающий через варактор и имеющий частоту сигнала. По аналогии с предыдущим убеждаемся, что этот ток *не зависит от напряжения $u_с(t)$ на сигнальном контуре.* Принимая во внимание, что

$$-\frac{du_{хол}}{dt} = -\frac{\beta\omega_с\omega_{хол}C_0 U_{mc}R_{рез.хол}}{2}\cos\omega_{хол}t$$

и

$$\cos\omega_н t\cos(\omega_н-\omega_с)t = \frac{1}{2}\left[\cos\omega_с t + \cos(2\omega_н-\omega_с)t\right],$$

находим

$$i_с(t) = \frac{-\beta^2\omega_с\omega_{хол}C_0^2 U_{mc}R_{рез.хол}}{4}\cos\omega_с t. \tag{12.48}$$

Поэтому проводимость, вносимая в сигнальный контур последовательным соединением варактора и холостого контура, оказывается активной и равной

$$\boxed{G_{вн} = \frac{i_с(t)}{u_с(t)} = -\frac{\beta^2\omega_с\omega_{хол}C_0^2 R_{рез.хол}}{4}.} \tag{12.49}$$

Поскольку данная проводимость отрицательна, в схеме возможно усиление мощности сигнала. Коэффициент усиления рассчитывается по формуле (12.40). Анализ устойчивости проводится так же, как и в случае одноконтурного усилителя.

■ преимущества двухконтурного усилителя

Если сопоставить формулы (12.38) и (12.49), то можно прежде всего отметить то, что в схеме двухконтурного усилителя вносимая отрицательная проводимость никак не связана с начальными фазами сигнала и накачки. Кроме того, двухконтурный параметрический усилитель некритичен к точному выбору частот $\omega_с$ и $\omega_н$. Вносимая проводимость будет отрицательна всегда, если $\omega_н > \omega_с$.

**Баланс мощностей в многоконтурных параметрических системах.** Нечувствительность двухконтурных параметрических усилителей к соотношению фаз полезного сигнала и накачки дает возможность изучать такие системы на основе простых энергетических соображений. Обратимся к общей схеме, представленной на рис. 12.4.

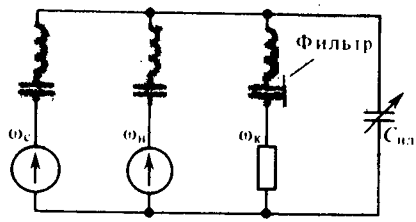



Рис. 12.4. К выводу энергетических соотношений в двухконтурной параметрической системе

Приведенные здесь рассуждения в равной мере справедливы, если система содержит нелинейный индуктивный элемент

Здесь параллельно конденсатору с нелинейной емкостью $C_{нл}$ включены три цепи. Две из них содержат источники сигнала и накачки, третья цепь является пассивной и служит холостым контуром, настроенным на комбинационную частоту $\omega_к = m\omega_с + n\omega_н$ ($m$, $n$ — целые числа). Каждая цепь снабжена узкополосным фильтром, пропускающим лишь колебания с частотами, близкими к $\omega_с$, $\omega_н$ и $\omega_к$ соответственно. Для простоты будем считать, что цепи сигнала и накачки не имеют омических потерь.

Предположим, что один из источников, сигнала или накачки, отсутствует. При этом в токе, протекающем через нелинейный конденсатор, нет компонент с комбинационными частотами. Ток в холостом контуре равен нулю и система в целом ведет себя как реактивная цепь, не потребляя средней мощности от источника.

Наличие обоих источников вызывает появление составляющей тока на комбинационной частоте; этот ток может замыкаться только через цепь холостого контура. Имеющаяся здесь нагрузка потребляет среднюю мощность, а в цепи сигнала и накачки вносятся положительные или отрицательные сопротивления, величина и знак которых определяют перераспределение мощностей между источниками.

Рассматриваемая система замкнута (автономна), и на основании закона сохранения энергии средние мощности сигнала, накачки и комбинационных колебаний связаны соотношением

$$P_с + P_н + P_к = 0. \tag{12.50}$$

Мощность, усредненную за период колебаний $T$, можно выразить через энергию $E$, выделяемую в этот интервал времени:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,dt = fE$$

($f$ — частота, Гц). Таким образом,

$$f_с E_с + f_н E_н + f_к E_к = 0,$$

или, учитывая, что $f_к = mf_с + nf_н$,

$$f_с(E_с + mE_к) + f_н(E_н + nE_к) = 0. \tag{12.51}$$

Равенство (12.51) должно выполняться тождественно при любых частотах $f_с$ и $f_н$. Это возможно лишь в том случае, если

$$E_с + mE_к = 0,$$

$$E_н + nE_к = 0. \tag{12.52}$$

Переходя от энергий к мощностям, получаем два важных соотношения, которые называют *уравнениями Мэнли — Роу*:

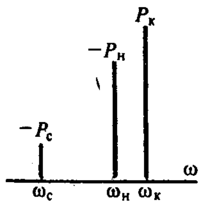
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{P_с}{f_с} + \frac{mP_к}{mf_с + nf_н} = 0; \\ \frac{P_н}{f_н} + \frac{nP_к}{mf_с + nf_н} = 0. \end{aligned}} \tag{12.53}$$

уравнения Мэнли — Роу

Уравнения Мэнли — Роу дают возможность просто и наглядно изучать закономерности преобразования мощностей в многоконтурных параметрических системах. Рассмотрим два типичных случая.

**Параметрическое усиление с преобразованием частоты «вверх».** Положив в формулах (12.53) $m = n = 1$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P_с}{f_с} + \frac{P_к}{f_с + f_н} = 0; \\ \frac{P_н}{f_н} + \frac{P_к}{f_с + f_н} = 0. \end{aligned} \tag{12.54}$$




Как это принято, будем считать положительной мощность, выделяемую в нагрузке, и отрицательной — мощность, отдаваемую генератором. Из (12.54) видно, что поскольку $P_к>0$, то $P_с<0$ и $P_н<0$. Итак, если холостой контур усилителя настроен на частоту $f_к=f_с+f_н$, то оба источника — сигнала и накачки — отдают мощность в холостой контур, где она потребляется в нагрузке. Поскольку $P_к=-P_с-P_н$, то коэффициент усиления мощности

$$K_р=\frac{P_к}{-P_с}=1+\frac{f_н}{f_с}=\frac{f_к}{f_с}. \qquad (12.55)$$

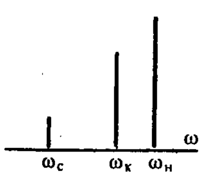
Достоинство такого способа параметрического усиления заключается в абсолютной устойчивости системы, неспособной перейти в режим самовозбуждения ни при каких мощностях сигнала и накачки. Недостаток же связан с тем, что выходной сигнал имеет частоту более высокую, чем сигнал на входе. В СВЧ-диапазоне это вызывает известные трудности при дальнейшей обработке сигнала.

**Регенеративное параметрическое усиление.** Пусть $m=-1$, $n=1$, т. е. частота настройки холостого контура $f_к=f_н-f_с$. Уравнения Мэнли — Роу принимают следующий вид:

$$\frac{P_с}{f_с}-\frac{P_к}{f_н-f_с}=0 \qquad (12.56)$$

Предполагается, что $f_н>f_с$

$$\frac{P_н}{f_н}+\frac{P_к}{f_н-f_с}=0. \qquad (12.57)$$




Как следует из (12.56), в данном режиме положительными являются как $P_к$, так и $P_с$. Таким образом, некоторая часть мощности, отбираемая от генератора накачки, поступает в сигнальный контур, т. е. в системе наблюдается регенерация на частоте сигнала. Съем выходной мощности может производиться как с сигнального, так и с холостого контура.

Уравнения (12.56) и (12.57) не дают возможности определить коэффициент усиления системы, поскольку мощность $P_с$ содержит в себе как ту часть, которая потребляется от устройств, подключенных ко входу усилителя, так и часть, возникающую за счет эффекта регенерации. Можно отметить способность таких усилителей к самовозбуждению, поскольку при определенных условиях в сигнальном контуре будет развиваться отличная от нуля мощность даже при отсутствии сигнала, подаваемого на вход от внешних цепей.

## 12.4 Нестационарные динамические системы

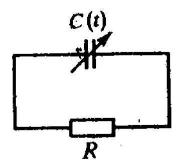
Более сложным видом линейных параметрических устройств являются линейные динамические системы с параметрическими элементами. Соответствующими моделями могут служить $RC$-, $RL$- или $RCL$-цепи с элементами вида $R(t)$, $C(t)$ или $L(t)$. Математическое описание таких систем в общем случае дается линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами:

$$a_n(t)\frac{d^n u_{вых}}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots +$$

$$+ a_1(t)\frac{du_{вых}}{dt} + a_0(t)u_{вых} = f(t). \qquad (12.58)$$

Общих методов аналитического решения таких уравнений при произвольном характере зависимости коэффициентов от времени не существует. Поэтому большую роль играют приближенные методы, опирающиеся на конкретные особенности той или иной системы. В данном параграфе будут рассмотрены две нестационарные динамические системы, для одной из которых может быть получено строгое решение, а другая позволяет относительно легко найти приближенные характеристики выходного сигнала, важные для практических приложений.

**Свободные колебания в параметрической $RC$-цепи.** Рассмотрим $RC$-цепь без источника внешнего сигнала, образованную постоянным резистором $R$ и параметрическим конденсатором с емкостью $C(t)$. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе $u_C(0)=U_0$. Найдем закон изменения величины $u_C$ при $t>0$. Для составления дифференциального уравнения системы заметим, что ток в цепи




$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} + u_C\frac{dC}{dt}.$$

На основании второго закона Кирхгофа имеем следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} RC\frac{du_C}{dt} + \left(1 + R\frac{dC}{dt}\right)u_C = 0, \\ u_C(0) = U_0. \end{cases} \qquad (12.59)$$

Важно отметить, что если бы емкость была постоянной, то такой системе отвечала бы начальная задача

$$\begin{cases} RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0; \\ u_C(0) = U_0. \end{cases} \qquad (12.60)$$

Сравнивая (12.59) и (12.60), убеждаемся, что в общем случае дифференциальное уравнение параметрической системы нельзя получить простой подстановкой переменных параметров $R(t)$, $C(t)$ или $L(t)$ в уравнение, соответствующее стационарной системе.

Конкретный расчет проведем для случая линейно изменяющейся емкости, когда

Величина $a$ имеет размерность проводимости

$$C(t) = C_0 + at; \quad \frac{dC}{dt} = a.$$

Здесь $C_0$, $a$ — некоторые постоянные величины.

Дифференциальное уравнение при этом легко решается путем разделения переменных:

$$\frac{du_C}{u_C} = d\ln u_C = -\frac{1+aR}{R(C_0+at)}\,dt,$$

откуда

$$\ln u_C = -\frac{1+aR}{R}\int\frac{dt}{C_0+at} =$$

$$= -\frac{1+aR}{R}\ln(at+C_0) + \ln A,$$

или

$$u_C(t) = A(at+C_0)^{-\frac{1+aR}{aR}}. \tag{12.61}$$

Постоянная $A$ определяется из начального условия

$$u_C(0) = AC_0^{-\frac{1+aR}{aR}} = U_0.$$

Окончательное решение задачи (12.59) имеет вид

$$u_C(t) = U_0\left(1+\frac{at}{C_0}\right)^{-\frac{1+aR}{aR}}. \tag{12.62}$$

Полезно сравнить эту формулу с решением стационарной задачи при $a=0$:

$$u_C(t) = U_0\,e^{-t/(RC_0)}. \tag{12.63}$$

▲ решите задачу 9

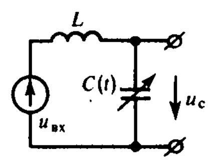
На рис. 12.5 изображены графики, построенные по формулам (12.62) и (12.63). Параметр $a$ выбран равным $1/R$. При этом за интервал времени $\tau_0 = RC_0$, т. е. за постоянную времени стационарной цепи, емкость конденсатора увеличивается на величину $C_0$.

Интересно, что в начальный промежуток времени напряжение в параметрической системе изменяется более круто, однако


Рис. 12.5. Изменение напряжения на конденсаторе параметрической $RC$-цепи в процессе свободного разряда. Здесь же изображена кривая, относящаяся к стационарной цепи с постоянной времени $\tau_0 = RC_0$

в дальнейшем экспонента (12.63), естественно, начинает спадать быстрее, чем степенная функция (12.62).

**Колебательный контур с перестраиваемой емкостью.** Во многих радиотехнических устройствах, таких, как анализаторы спектра или приемники с быстрой автоматической настройкой, используются колебательные контуры, образованные элементами $L$ и $C$, один из которых тем или иным способом изменяется во времени, обеспечивая перестройку резонансной частоты.




Рассмотрим задачу о перестраиваемом колебательном контуре при следующих условиях: 1. Параметрическим элементом служит конденсатор, с которого и снимается выходной сигнал. 2. Потери в контуре отсутствуют. 3. Входной сигнал создается источником гармонической э. д. с. $u_{вх}(t) = U_m \cos \omega_0 t$.

Учтем, что напряжение на индуктивном элементе

$$L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt} + u_C\frac{dC}{dt}\right) =$$

$$= LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2L\frac{dC}{dt}\frac{du_C}{dt} + L\frac{d^2C}{dt^2}u_C,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение системы

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2L\frac{dC}{dt}\frac{du_C}{dt} + \left(L\frac{d^2C}{dt^2} + 1\right)u_C = u_{вх}(t). \qquad (12.64)$$

Если емкость меняется во времени по линейному закону $C(t) = at$, то уравнение (12.64) упростится:

$$aLt\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2aL\frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \cos \omega_0 t. \qquad (12.65)$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение отличается двумя особенностями:

1. Коэффициент при старшей производной линейно зависит от времени.

2. Несмотря на то что омические потери, по предположению, отсутствуют, в левой части находится слагаемое, пропорциональное первой производной от искомой функции. Принимая во внимание, что аналогичное уравнение стационарного контура имеет вид

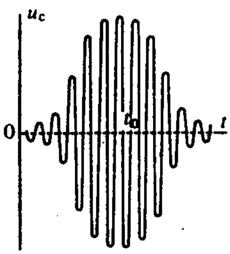
$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_m\cos\omega_0 t, \tag{12.66}$$

приходим к выводу, что параметрическое изменение емкости контура эквивалентно внесению некоторого затухания.

Вообще говоря, уравнение (12.65) должно быть дополнено начальными условиями, которые определяют $u_C$ и $du_C/dt$ при $t=0$. Полное решение является суммой свободных и вынужденных колебаний (см. гл. 8). Ограничимся лишь поиском вынужденного решения, что обычно представляет наибольший практический интерес.

Предположим, что в некотором определенном смысле, речь о котором пойдет ниже, емкость $C(t)$ изменяется медленно. Это позволяет говорить о *мгновенной резонансной частоте*

$$\omega_{\text{рез}}(t)=1/\sqrt{LC(t)}=1/\sqrt{Lat}. \tag{12.67}$$




В момент времени $t_0$, когда $\omega_{\text{рез}}(t_0)=\omega_0$, наступает резонанс и амплитуда колебаний на выходе становится максимальной. Как при $t<t_0$, так и при $t>t_0$ наблюдаются меньшие значения амплитуды выходного сигнала.

Интересуясь поведением системы в непосредственной близости от резонансной точки $t_0$, заменим приближенно переменный коэффициент $aLt$ в левой части (12.65) на постоянную величину

$$aLt_0=1/\omega_0^2. \tag{12.68}$$

Теперь задача сводится к нахождению частного решения уравнения

Предположение о медленном изменении емкости во времени позволяет свести задачу к решению дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2aL\omega_0^2\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2U_m\cos\omega_0 t. \tag{12.69}$$

Будем искать это решение в виде

$$u_C(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \tag{12.70}$$

с неизвестными постоянными $A$ и $B$.

Подстановка (12.70) в (12.69) и приравнивание коэффициентов при синусе и косинусе в обеих частях приводит к результату

$$A=0;\ B=\frac{U_m}{2aL\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Таким образом, на малом отрезке времени, включающем в себя тот момент, когда система проходит через резонанс, напряжение на конденсаторе приближенно описывается формулой

$$u_C(t)\approx\frac{U_m}{2aL\omega_0}\sin\omega_0 t. \qquad (12.71)$$

**Условие «медленного» прохождения через резонанс.** Формула (12.71) тем точнее отображает истинный процесс, чем меньше $a$. Ограничению, налагаемому на величину $a$, можно придать точный смысл, если воспользоваться следующим физическим соображением: прохождение параметрической системы через резонанс следует считать «медленным», если изменение мгновенной резонансной частоты $\omega_{рез}(t)=1/\sqrt{LC(t)}$ за период $T=2\pi/\omega_0$ существенно меньше, чем $\omega_0$.

Во многих практически интересных случаях условия медленности выполняются

Величина изменения резонансной частоты

$$\Delta\omega_{рез}=\left.\frac{\Delta\omega_{рез}}{dt}\right|_{t=t_0}\cdot T=-\frac{aL\omega_0^3}{2}T=-a\pi L\omega_0^2. \qquad (12.72)$$

Условие будет выполнено, если

$$a\pi L\omega_0^2\ll\omega_0,$$

откуда

$$a\ll\frac{1}{\pi\omega_0 L}=\frac{1}{\pi\rho_0}, \qquad (12.73)$$

где $\rho_0$ — характеристическое сопротивление контура при настройке его в резонанс на частоту $\omega_0$.

---

**Пример 12.5.** *Колебательный контур имеет характеристическое сопротивление* $\rho_0=500$ Ом; *емкость конденсатора изменяется во времени со скоростью*

$$a=10^{-4}\ \text{См}=10^{-4}\ \text{Ф/с}=100\ \text{пФ/мкс}.$$

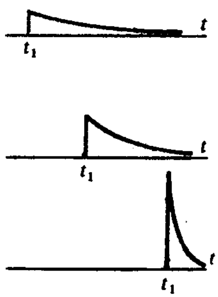
*Исследовать прохождение данной системы через резонанс.*

Воспользовавшись неравенством (12.73), убеждаемся, что условие медленности изменения емкости выполнено. На основании (12.71) находим, что в момент резонанса амплитуда напряжения на выходе превышает амплитуду входного сигнала в

$$\frac{1}{2aL\omega_0}=\frac{1}{2a\rho_0}=10\ \text{раз}.$$

**Импульсная характеристика и частотный коэффициент передачи нестационарной динамической системы.** Любая линейная система, как стационарная, так и нестационарная (параметрическая), подчиняется принципу суперпозиции и поэтому может быть исследована с помощью интеграла Дюамеля.

Импульсная характеристика параметрической системы $h(t, t_1)$ определяется как выходная реакция на δ-импульс, поданный на вход в момент времени $t_1$. Если для стационарной цепи аргументом импульсной характеристики служит только разность $t-t_1$ момента наблюдения и момента подачи входного импульса, то здесь эта зависимость может иметь произвольную форму. Однако отклик физически осуществимой системы не может появиться раньше входного воздействия, поэтому для реализуемой системы всегда




Изменение формы импульсной характеристики параметрической цепи во времени

$$h(t, t_1) = 0 \quad \text{при} \quad t < t_1. \qquad (12.74)$$

Располагая импульсной характеристикой $h(t, t_1)$, можно записать сигнал на выходе нестационарной динамической системы в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t_1)\, h(t, t_1)\, dt_1. \qquad (12.75)$$

Преобразование Фурье от импульсной характеристики по переменной $t_1$ называют *частотным коэффициентом передачи параметрической цепи*:

$$\boxed{K(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t_1)\, e^{-j\omega t_1}\, dt_1.} \qquad (12.76)$$

Если $S_{\text{вх}}(\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала, то формула (12.75) в частотном представлении имеет вид

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega)\, K(j\omega, t)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (12.77)$$

■ характерное отличие частотного коэффициента передачи параметрической цепи

Отличие частотного коэффициента передачи (12.76) от аналогичной функции, характеризующей стационарную систему, состоит в том, что здесь дополнительным аргументом является время наблюдения $t$.

Формулы (12.75) или (12.77), в сущности, являются формальными решениями, поскольку получение функций $h(t, t_1)$ или, что равносильно, $K(j\omega,t)$ сопряжено с анализом точной модели системы, т. е. с решением соответствующего дифференциального уравнения. Тем не менее к такому способу описания нестационарных динамических систем часто прибегают, если приходится заменять сложную реальную цепь ее предельно упрощенной математической моделью. Так, параметрическая система может иметь коэффициент передачи

$$K(j\omega, t) = z(t), \tag{12.78}$$

не зависящий от частоты. Соответствующее устройство работает как перемножитель или амплитудный модулятор. При подаче на его вход колебания $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \cos \omega_0 t$ на выходе получается АМ-сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 z(t) \cos \omega_0 t. \tag{12.79}$$

■ упрощения, применяемые при описании нестационарных динамических систем

Другой важный пример — нестационарная система, работающая как частотный или фазовый модулятор. Здесь

$$K(j\omega, t) = \exp[jz(t)] \tag{12.80}$$

и поэтому в указанных выше условиях выходной сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + z(t)) \tag{12.81}$$

является колебанием с угловой модуляцией.

## 12.5 Воздействие гармонических сигналов на параметрические системы со случайными характеристиками

В большинстве реальных случаев одновременно имеет место случайная модуляция и по амплитуде и по фазе

Большой теоретический и прикладной интерес представляет изучение прохождения сигналов через системы, параметры которых случайно изменяются во времени. В простейшем случае речь идет о случайной нестабильности коэффициента усиления некоторого устройства, приводящей к флуктуациям амплитуды на выходе. В более сложной ситуации приходится рассматривать распространение сигналов в различных средах, например в плазме ионосферы Земли при наличии случайных изменений показателя преломления. Здесь принятый сигнал искажен случайной угловой модуляцией, поскольку набег фазы сигнала на трассе распространения оказывается случайной функцией времени.

Подробное исследование статистических характеристик сигналов на выходе линейных систем со случайно изменяющимися параметрами является весьма сложным [14, 15]. В данном параграфе будут кратко рассмотрены две простейшие задачи подобного вида.

**Случайная амплитудная модуляция.** Изучая параметрическую систему с коэффициентом передачи вида (12.78), будем считать известными математическое ожидание $m_z$ и функцию автокорреляции $K_z(\tau)$ стационарного случайного процесса $Z(t)$, определяющего закон модуляции.

Методами корреляционной теории исследуем статистические характеристики процесса $Y(t)$ на выходе системы, полагая, что входной сигнал — гармоническое колебание $U_0 \cos \omega_0 t$. Поскольку реализация выходного сигнала

$$y(t) = U_0\, z(t) \cos \omega_0 t,$$

то, очевидно, $m_y = \overline{y} = 0$.

Автокорреляционная функция выходного сигнала

$$K_y(\tau) = \overline{y(t)\, y(t+\tau)} = U_0^2\, \overline{z(t)\, z(t+\tau)} \cdot \overline{\cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 (t+\tau)}. \tag{12.82}$$

Поскольку

$$\overline{\cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 (t+\tau)} =$$

$$= {}^1\!/_2\, \overline{[\cos \omega_0 (2t+\tau) + \cos \omega_0 \tau]} = {}^1\!/_2 \cos \omega_0 \tau,$$ то

$$K_y(\tau) = \frac{U_0^2}{2}\, \overline{z(t)\, z(t+\tau)} \cdot \cos \omega_0 \tau.$$

Согласно определению, ковариационный момент

$$\overline{z(t)\, z(t+\tau)} = K_z(\tau) + m_z^2,$$

откуда получаем окончательную формулу, связывающую автокорреляционные функции выходного сигнала и случайного коэффициента передачи $z(t)$:

$$K_y(\tau) = \frac{U_0^2}{2} \left[ K_z(\tau) + m_z^2 \right] \cos \omega_0 \tau\,. \tag{12.83}$$

Отсюда дисперсия выходного случайного процесса

$$\sigma_y^2 = \frac{U_0^2}{2} \left[ \sigma_z^2 + m_z^2 \right].$$

Характерный вид формулы (12.83) указывает на то, что если реализации $z(t)$ изменяются во времени медленно по сравнению с входным сигналом, то выходное колебание является узкополосным случайным процессом. Следует заметить, что если $m_z \neq 0$, то функция $K_y(\tau)$ не стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Для того чтобы понять физические следствия этого свойства, обратим по Фурье функцию $K_y(\tau)$, т. е. найдем энергетический спектр процесса $Y(t)$:

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{U_0^2 \sigma_z^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) \cos \omega_0 \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau +$$

$$+ \frac{U_0^2 m_z^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau d\tau.$$

Несложные преобразования позволяют представить эту зависимость в виде

$$W_y(\omega) = \frac{U_0^2 \sigma_z^2}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau \right] +$$

$$+ \frac{U_0^2 m_z^2 \pi}{2} \left[ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right]. \qquad (12.84)$$

**характер энергетического спектра сигнала при случайной амплитудной модуляции**

Формула (12.84) устанавливает, что в спектре мощности процесса на выходе случайного амплитудного модулятора присутствуют две компоненты: непрерывная часть, обусловленная случайными флуктуациями амплитуды, и регулярная часть, которая описывает прохождение на выход немодулированного несущего колебания; спектру регулярной части соответствуют две δ-функции в частотной области. Доля регулярной части тем значительнее, чем больше величина $m_z^2$ по сравнению с дисперсией $\sigma_z^2$. Примерный вид графиков автокорреляционной функции и энергетического спектра для рассматриваемого случая изображен на рис. 12.6. Непрерывная часть энергетического спектра, как это видно из рисунка, отображается двумя гладкими кривыми с максимумами в точках $\omega = \pm\omega_0$.

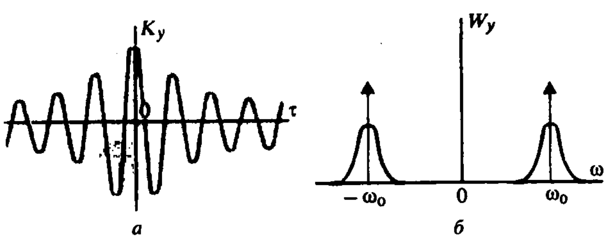
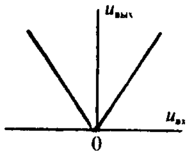



Рис. 12.6. Характеристики сигнала на выходе случайного амплитудного модулятора:
*а* — функция автокорреляции; *б* — энергетический спектр

**Огибающая выходного сигнала.** Если $Z(t)$ — медленный процесс, то можно считать, что мгновенное значение физической огибающей на выходе рассматриваемой системы


$$U_y(t) = \left| U_0 z(t) \right|. \tag{12.85}$$

Знак абсолютной величины указывает на то, что амплитудный детектор, создающий на своем выходе огибающую, нечувствителен к фазе высокочастотного заполнения.




Как видно из соотношения (12.85), огибающая узкополосного процесса на выходе параметрической системы с флуктуирующим коэффициентом передачи $z(t)$ может быть получена как результат нелинейного безынерционного преобразования случайного процесса $z(t)$ в воображаемом устройстве с кусочно-линейной характеристикой $u_{вых} = |U_0 u_{вх}|$. Среднее значение, дисперсия и автокорреляционная функция огибающей могут быть вычислены с помощью методов, изложенных в гл. 11.

**Случайная угловая модуляция.** Обратимся к исследованию случайной параметрической системы с коэффициентом передачи вида (12.80). Полностью повторяя этапы, изложенные выше применительно к случайному амплитудному модулятору, получим общее выражение для автокорреляционной функции выходного сигнала при гармоническом возбуждении системы:

$$K_y(\tau) = U_0^2 \overline{\cos(\omega_0 t + z(t)) \cos(\omega_0 (t+\tau) + z(t+\tau))} =$$

$$= \frac{U_0^2}{2} \left[ \overline{\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + z(t) + z(t+\tau))} + \right.$$

$$\left. + \overline{\cos(\omega_0 \tau + z(t+\tau) - z(t))} \right]. \tag{12.86}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках при усреднении, очевидно, обращается в нуль и поэтому

$$K_y(\tau) = \frac{U_0^2}{2} \overline{\cos(\omega_0 \tau + z_\tau - z)} =$$

$$= \frac{U_0^2}{2} \overline{\cos(z_\tau - z)} \cos \omega_0 \tau -$$

$$- \frac{U_0^2}{2} \overline{\sin(z_\tau - z)} \sin \omega_0 \tau \tag{12.87}$$

■ постоянство дисперсии сигнала при случайной угловой модуляции

(для сокращения записи аргумент фукции $z(t)$ опущен).

Если $\tau \to 0$, то $\lim \overline{\cos(z_\tau - z)} = 1$, $\lim \overline{\sin(z_\tau - z)} = 0$ и поэтому эффективная мощность сигнала, т. е. его дисперсия $\sigma_y^2 = U_0^2/2$, оказывается такой же, как мощность гармонического сигнала с амплитудой $U_0$ и постоянной частотой.

Формула (12.87) дает полное описание сигнала со случайной угловой модуляцией с точки зрения корреляционной теории. Так, она указывает на следующий факт: если процесс $Z(t)$ образован реализациями, медленными по сравнению с гармоническими колебаниями частоты $\omega_0$, то сигнал на выходе случайного фазового модулятора является узкополосным процессом с центральной частотой $\omega_0$.

**Угловая модуляция нормальным случайным процессом.** Для того чтобы воспользоваться формулой (12.87), необходимо найти средние значения входящих сюда тригонометрических функций с разностным аргументом. Это можно сделать, располагая двумерной плотностью вероятности $p(z_\tau,z)$:

$$\overline{\cos(z_\tau - z)} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(z_\tau - z)\, p(z_\tau, z)\, dz_\tau\, dz,$$

$$\overline{\sin(z_\tau - z)} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(z_\tau - z)\, p(z_\tau, z)\, dz_\tau\, dz.$$

Вычисление таких интегралов при произвольном характере функции $p(z_\tau,z)$ может оказаться весьма сложным. Однако если случайный процесс $Z(t)$ гауссов, то можно предложить изящный способ, немедленно приводящий к окончательному результату. Метод вычисления основан на использовании двумерной характеристической функции гауссова процесса (см. формулу (6.32)):

$$\Theta(v_1, v_2) = \overline{e^{j(z_\tau v_1 + z v_2)}} =$$

$$= \exp\left\{ j m_z (v_1 + v_2) - \frac{1}{2}\sigma_z^2 \left( v_1^2 + 2R_z(\tau) v_1 v_2 + v_2^2 \right) \right\}. \qquad (12.88)$$

■ усреднение с помощью характеристической функции

Поскольку

$$\cos(z_\tau - z) = \frac{e^{j(z_\tau - z)} + e^{-j(z_\tau - z)}}{2},$$

то на основании (12.88)

$$\overline{\cos(z_\tau - z)} = \frac{1}{2}\left[\Theta(1, -1) + \Theta(-1, 1)\right]. \qquad (12.89)$$

Положив для определенности $m_z = 0$, имеем

$$\Theta(1, -1) = \Theta(-1, 1) = \exp\left[-\sigma_z^2 (1 - R_z(\tau))\right],$$

поэтому

$$\overline{\cos(z_\tau - z)} = \exp\left[-\sigma_z^2(1 - R_z(\tau))\right],$$

$$\overline{\sin(z_\tau - z)} = 0.$$

Подстановка этих результатов в (12.87) дает окончательное выражение автокорреляционной функции сигнала, полученного из гармонического колебания с помощью гауссовой угловой модуляции:

$$\boxed{K_y(\tau) = \frac{U_0^2}{2} e^{-\sigma_z^2(1 - R_z(\tau))} \cos\omega_0\tau.} \tag{12.90}$$

С качественной точки зрения эта функция аналогична той, которая была найдена ранее при анализе случайной амплитудной модуляции. Поэтому можно полностью перенести вывод о наличии в энергетическом спектре двух компонент — непрерывной и регулярной (дискретной). Анализ показывает [15], что при $\sigma_z^2 \gg 1$ случайная угловая модуляция оказывается широкополосной. Регулярная часть спектра практически исчезает, а непрерывная часть вблизи частоты $\omega_0$ описывается гауссовой функцией

$$W_y(\omega) = U_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma_z\sqrt{-R_z''(0)}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_z^2(-R_z''(0))}}. \tag{12.91}$$

Эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega_{эфф} = \sqrt{2\pi}\ \sigma_z \sqrt{-R_z''(0)} \tag{12.92}$$

растет с увеличением как $\sigma_z$, так и $-R_z''(0)$, пропорциональной скорости изменения во времени модулирующей функции.

## Результаты

◇◇ *Если сопротивление безынерционного параметрического элемента периодически изменяется во времени, то в спектре выходного сигнала содержится, вообще говоря, бесконечное число комбинационных составляющих с частотами вида $\omega_c + k\omega_y$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).*

◇◇ *Для реализации резистивного параметрического элемента на вход безынерционного нелинейного двухполюсника подают сумму малого полезного сигнала и большого управляющего сигнала.*

◇◇ *Преобразование частоты заключается в переносе спектра сигнала из окрестности несущей частоты в окрестность промежуточной частоты без изменения закона модуляции.*

- ◇◇ *При синхронном детектировании частоты сигнала и гетеродина совпадают.*
- ◇◇ *Параметрические реактивные элементы могут передавать часть мощности генератора накачки тем цепям, в которых присутствует полезный сигнал.*
- ◇◇ *При определенных фазовых соотношениях параметрически управляемый конденсатор может вызывать возбуждение колебаний в LC-контуре. Включение такого конденсатора эквивалентно внесению в контур отрицательной активной проводимости.*
- ◇◇ *Различают одноконтурные и двухконтурные параметрические усилители; последние содержат в себе холостой контур, настроенный на одну из комбинационных частот.*
- ◇◇ *Энергетические соотношения в многоконтурной параметрической системе описываются уравнениями Мэнли—Роу.*
- ◇◇ *Параметрические динамические системы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.*
- ◇◇ *Частотный коэффициент передачи линейной параметрической системы зависит как от частоты, так и от времени.*
- ◇◇ *При случайной амплитудной модуляции в спектре выходного сигнала содержится как непрерывная, так и дискретная составляющие.*
- ◇◇ *Если при угловой модуляции модулирующая функция является реализацией нормального случайного процесса, то автокорреляционная функция выходного сигнала может быть выражена через характеристическую функцию сигнала на входе модулятора.*

## Вопросы

1. Чем принципиально отличаются спектры токов, протекающих в резистивном параметрическом и нелинейном двухполюснике? Оба элемента возбуждаются гармоническим входным сигналом.
2. Изобразите структурную схему супергетеродинного приемника. Что такое зеркальный канал приема? Как можно исключить неоднозначность настройки приемника?
3. Как определяется понятие крутизны преобразования?
4. Каковы достоинства и недостатки синхронного детектора?
5. Можно ли добиться возбуждения колебательного контура с помощью параметрического конденсатора, емкость которого изменяется во времени с частотой, равной резонансной частоте контура?
6. Опишите физический принцип работы варактора.
7. Какими явлениями сопровождается работа одноконтурного параметрического усилителя в асинхронном режиме?
8. В чем состоит достоинство двухконтурных параметрических усилителей?
9. Почему параметрическим усилителям свойствен низкий уровень собственных шумов?
10. Как формулируется условие «медленности» прохождения параметрического колебательного контура через резонанс?
11. Приведите пример физической системы, в которой входной сигнал подвергается случайной амплитудной модуляции.
12. Каковы характерные особенности спектра сигнала, получаемого при случайной угловой модуляции гармонического несущего колебания?

## Задачи

1. Параметрическая активная проводимость изменяется во времени по закону

$G(t) = 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} \cos 10^5 t + 3 \cdot 10^{-4} \cos 2 \cdot 10^5 t.$

К данному элементу приложено напряжение

$u(t) = 5 \cos 10^6 t.$

Найдите амплитуды и частоты всех составляющих тока. Постройте спектральную диаграмму тока.

2. Безынерционный нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику (мА)

$i(u) = 5 + 2.5u + 1.5u^2.$

К резистору приложено напряжение (В)

$u(t) = 3 + 0.5 \cos \Omega t.$

Выведите формулу, определяющую зависимость дифференциальной крутизны во времени.

3. В преобразователе частоты применен транзистор с характеристикой

$$i_к = \begin{cases} 20(u_{бэ} - 0.5) & \text{при } u_{бэ} > 0.5 \text{ В}, \\ 0 & \text{при } u_{бэ} < 0.5 \text{ В}. \end{cases}$$

В отсутствие полезного сигнала на базу подана сумма напряжений смещения и гетеродина (В):

$u_{бэ} = 0.2 + 0.7 \cos \omega_г t.$

Вычислите крутизну преобразования.

4. Емкость параметрического конденсатора (пФ) изменяется во времени по закону

$C(t) = 200 + 80 \cos (10^5 t + \pi/4) + 40 \cos 5 \cdot 10^5 t.$

К конденсатору приложено напряжение (В)

$u = 30 \cos 5 \cdot 10^6 t.$

Найдите аналитическое выражение тока, существующего в конденсаторе.

5. Индуктивность колебательного контура равна 0.5 мГн, средняя емкость $C_0 = 750$ пФ, сопротивление потерь контура 12 Ом. Емкость контура изменяется скачкообразно с одинаковыми приращениями в обе стороны по отношению к среднему значению. Определите, с какой частотой и в каких пределах следует изменять емкость, чтобы контур имел результирующую добротность $Q = 300$.

6. Определить добротность колебательного контура, имеющего индуктивность 100 мкГн и сопротивление потерь 15 Ом; емкость конденсатора контура изменяется во времени по закону (пФ)

$C(t) = 150 + 5 \cos 1.63 \cdot 10^7 t.$

7. Емкость параметрического конденсатора (пФ), включенного в колебательный контур, изменяется во времени по закону

$C(t) = 300 + 20 \cos 5 \cdot 10^6 t.$

При каких величинах индуктивности и добротности контура произойдет параметрическое возбуждение системы, сопровождаемое неограниченным ростом амплитуды колебаний? Является ли данное решение единственным?

8. Одноконтурный параметрический усилитель создан для усиления колебаний с частотой 120 МГц. Усилитель включает в себя катушку с индуктивностью 0.6 мкГн; собственная добротность контура усилителя равна 35. Определите, с какой частотой и в каких пределах следует изменять емкость конденсатора, с тем чтобы усиление системы составило 15 дБ.

## Более сложные задания

9. Найдите закон изменения во времени свободных колебаний в параметрической $RC$-цепи, емкость конденсатора которой изменяется по закону

$C(t) = C_0 + C_m \cos \omega_у t,$

где $\omega_у$ — частота управляющего сигнала.

10. Определите импульсную характеристику параметрической $RC$-цепи, емкость конденсатора которой изменяется во времени по закону

$C(t) = C_0 + C_m \exp(-t/\tau)\sigma(t),$

где $C_0$, $C_m$, $\tau$ — постоянные величины.

11. К последовательной $RC$-цепи с параметрами $R(t)=R_0e^{\alpha t}$, $C(t)=C_0e^{\alpha t}$ в момент времени $t=0$ подключается источник постоянной э. д. с. величиной $U_0$. Найдите законы изменения напряжений $u_R$ и $u_C$. Проанализируйте случаи, когда $\alpha \gg 1/(R_0C_0)$ и $\alpha \approx 1/(R_0C_0)$.

# Глава 13 Основы теории синтеза линейных радиотехнических цепей

Теория цепей может быть разделена на две обширные области, тесно связанные между собой — *анализ и синтез.* Задачей анализа цепи является нахождение внешних характеристик системы, структура которой задана заранее в виде принципиальной схемы. Задача синтеза диаметрально противоположна. Внешняя характеристика, например частотный коэффициент передачи, является исходной. Ищется структура цепи, реализующей эту характеристику.

■ неоднозначность процедуры синтеза

В отличие от анализа синтез цепи, как правило, является неоднозначной процедурой. Поэтому среди множества структур, обладающих заданными свойствами, требуется найти ту, которая в определенном смысле оптимальна. Критерии оптимальности могут быть разнообразными. Так, всегда желательно, чтобы синтезируемая цепь содержала минимально возможное число элементов. В других случаях требуется, чтобы цепь была мало чувствительна к выбору номиналов элементов.

В последнее время методы синтеза цепей приобрели исключительно большое значение в связи с появлением систем автоматизированного проектирования радиотехнических устройств и систем с помощью ЭВМ. Разработан целый ряд методов синтеза, порой весьма сложных, с которыми читатель в дальнейшем сможет познакомиться самостоятельно [27, 30]. В данной главе будут изучаться две простейшие задачи синтеза, посвященные поиску структур линейных двухполюсников и четырехполюсников, образованных элементами типа $R$, $L$ и $C$. Исходные данные для синтеза во всех случаях будут задаваться с помощью частотных характеристик.

Отметим, что излагаемые методы синтеза применимы не только к электрическим цепям, но и к любым линейным системам, которые допускают модельное представление в форме цепей.

## 13.1 Аналитические свойства входного сопротивления линейного пассивного двухполюсника

Для того чтобы сделать процедуру синтеза цепи содержательной, необходимо заранее установить те критерии, которые позволили бы судить о принципиальной возможности или невозможности реализации цепи. В данном параграфе будут изучаться важнейшие свойства входных сопротивлений линейных пассивных двухполюсников.

**Расположение нулей и полюсов.** Пусть $U(p)$ и $I(p)$ — изображения напряжения и тока в двухполюснике. Их отношение $Z(p)=U(p)/I(p)$ является входным сопротивлением, определенным во всей плоскости комплексной частоты. При этом, как известно из гл. 8,

$$Z(p)=\frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0} =$$

Здесь $Z_0$ — произвольный масштабный множитель

$$= \frac{Z_0 (p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}. \qquad (13.1)$$

Нули $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и полюсы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ входного сопротивления двухполюсника должны быть такими, чтобы рассматриваемая система, по условию не содержащая внутри себя источников, непрерывно подводящих энергию, была абсолютно устойчивой.

Пусть зажимы элемента разомкнуты (холостой ход) и на них имеется некоторое напряжение. Поскольку ток в цепи отсутствует, то поведение двухполюсника описывается *характеристическим уравнением*

● характеристическое уравнение двухполюсника

$$I(p)/U(p)=1/Z(p)=0, \qquad (13.2)$$

корнями которого служат полюсы входного сопротивления $Z(p)$. Любое напряжение на зажимах двухполюсника, находящегося в режиме холостого хода и обладающего некоторым запасом энергии в реактивных элементах, описывается формулой

$$u_{\text{х.х.}}(t)=A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t},$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — коэффициенты, находимые из начальных условий. Условием устойчивости системы в режиме холостого хода служит неравенство

$$\boxed{\mathrm{Re}(p_i)<0, \quad i=1,2,\ldots,n.} \qquad (13.3)$$

Аналогично, рассматривая тот же двухполюсник в режиме короткого замыкания, когда $U(p)=0$, но $I(p)\neq 0$, получим второе характеристическое уравнение

$$U(p)/I(p)=Z(p)=0. \tag{13.4}$$

Его корни — это нули входного сопротивления, которые должны удовлетворять условию

$$\boxed{\mathrm{Re}(z_i)<0, \quad i=1,\ 2,\ldots,\ m.} \tag{13.5}$$

Итак, как полюсы, так и нули входного сопротивления абсолютно устойчивого пассивного линейного двухполюсника должны лежать *только в левой полуплоскости комплексной частоты p*. При этом данные точки всегда либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

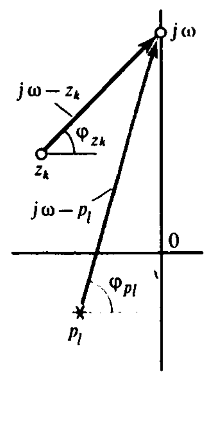
**Расположение нулей и полюсов устойчивого двухполюсника**

Предельным идеализированным случаем является чисто реактивный двухполюсник. Отсутствие омических потерь в нем ведет к тому, что нули и полюсы располагаются здесь только на мнимой оси $j\omega$.

**Теорема о числе нулей и полюсов.** Дополнительные сведения о характере функции $Z(p)$ дает следующая важная теорема: *числа нулей и полюсов входного сопротивления пассивного двухполюсника не могут отличаться более чем на единицу.*

Для доказательства запишем входное сопротивление на некоторой физической частоте $\omega$ в виде

$$Z(j\omega)=|Z(j\omega)|\,e^{j\arg Z}. \tag{13.6}$$




Для того чтобы отобразить эту формулу геометрически, следует в (13.1) положить $p=j\omega$ и из всех нулей и полюсов провести векторы, концы которых сходятся в выбранной точке на мнимой оси, отображающей текущую частоту. При этом, как легко видеть, фазовый угол входного сопротивления

$$\arg Z=\sum_{k=1}^{m}\varphi_{zk}-\sum_{l=1}^{n}\varphi_{pl},$$

т. е. нули увеличивают, а полюсы уменьшают результирующую фазу.

Устойчивый пассивный двухполюсник на любой частоте в среднем всегда поглощает энергию внешних источников. Это значит, что вещественная часть входного сопротивления $Z(j\omega)$ положительна, откуда следует неравенство

$$-\pi/2\leqslant\arg Z\leqslant\pi/2. \tag{13.7}$$

Устремим частоту $\omega$ к бесконечности. При этом как фазы полюсов, так и фазы нулей будут стремиться к $\pi/2$. Таким образом,

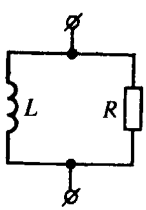
$$\lim_{\omega \to \infty} \arg Z = (m - n)\frac{\pi}{2}. \qquad (13.8)$$

Поэтому числа $m$ и $n$ могут либо совпадать, либо отличаться на единицу.

положительная вещественная функция

В теории цепей функция $Z(p)$, аналитическая в правой полуплоскости и имеющая неотрицательную вещественную часть на мнимой оси $j\omega$, носит специальное название *положительной вещественной функции*.

Наглядная формулировка доказанной теоремы состоит в следующем: при стремлении частоты к бесконечности любая пассивная цепь ведет себя либо как резистор (степени числителя и знаменателя в формуле (13.1) совпадают), либо как конденсатор (степень знаменателя на единицу превышает степень числителя), либо, наконец, как индуктивный элемент, если имеет место обратное соотношение.




**Связь между вещественной и мнимой частями входного сопротивления.** Легко проверить, что при вещественных частотах $\omega$ входное сопротивление двухполюсника, образованного параллельным соединением элементов $R$ и $L$, выражается следующим образом:

$$Z(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega) =$$

$$= \frac{\omega^2 R L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Обращает на себя внимание то, что значения $R$ и $L$ входят одновременно как в вещественную, так и в мнимую части входного сопротивления.

цепи минимального сопротивления

Цепи, составленные таким образом, что каждый из входящих элементов влияет и на вещественную и на мнимую части $Z(j\omega)$, принято называть *цепями минимального сопротивления*. Для цепей этого класса устанавливается однозначная связь между функциями $R(j\omega)$ и $X(j\omega)$ при вещественных значениях угловой частоты.

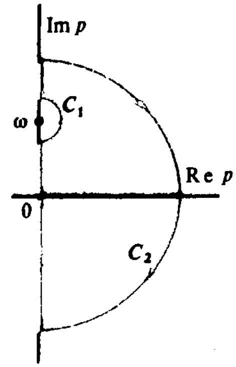
Зафиксируем $\omega$ и рассмотрим интеграл

$$\oint \frac{z(p)}{p - j\omega}\, dp = 0, \qquad (13.9)$$

взятый по замкнутому контуру в правой полуплоскости. Полюс, возникающий при $p = j\omega$, обходится по полуокружности

$C_1$ малого радиуса. Интеграл по бесконечно большой дуге $C_2$ пренебрежимо мал в силу аналитичности $Z(p)$ справа от мнимой оси. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\xi)\,d\xi}{\xi-\omega} + \int_{C_1} \frac{Z(p)\,dp}{p-j\omega} = 0. \qquad (13.10)$$




Подынтегральная функция $Z(p)/(p-j\omega)$ в окрестности полюса $p=j\omega$ стремится к бесконечности равномерно, и поэтому согласно теореме Коши, приняв во внимание, что дуга $C_1$ есть полуокружность, а вычет в точке полюса равен $Z(j\omega)$, можно переписать (13.10) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\xi)\,d\xi}{\xi-\omega} + j\pi Z(j\omega) = 0. \qquad (13.11)$$

Вклад в интеграл дает лишь половина вычета в точке полюса

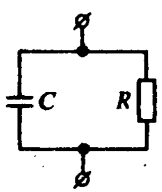
Отсюда, разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$X(j\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(j\xi)\,d\xi}{\xi-\omega};$$
$$(13.12)$$
$$R(j\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(j\xi)\,d\xi}{\omega-\xi}.$$

Данные интегралы понимаются в смысле главного значения

Таким образом, связь между вещественной и мнимой частями входного сопротивления двухполюсника рассматриваемого класса устанавливается парой интегральных преобразований Гильберта.

**Пример 13.1.** *Дана параллельная RC-цепь, для которой*




$$R(j\omega) = \frac{R}{1+\omega^2 (RC)^2}, \qquad (13.13)$$

$$X(j\omega) = \frac{-\omega R^2 C}{1+\omega^2 (RC)^2} \qquad (13.14)$$

*Проверить, что, зная вещественную часть входного сопротивления этой цепи, можно восстановить мнимую часть посредством преобразования Гильберта.*

Введя обозначение $\alpha = 1/(RC)$ и подставив (13.13) в (13.12), имеем

$$X(j\omega) = \frac{1}{\pi R C^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\alpha^2+\xi^2)(\xi-\omega)}. \qquad (13.15)$$

Подынтегральная функция раскладывается в сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(\alpha^2+\xi^2)(\xi-\omega)}=\frac{a\xi+b}{\alpha^2+\xi^2}+\frac{c}{\xi-\omega},$$

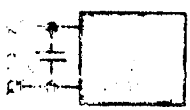
где

$$a=-\frac{1}{\alpha^2+\omega^2},\quad b=-\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2},\quad c=-a.$$

Отдельные интегралы имеют вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi d\xi}{\alpha^2+\xi^2}=0;\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\omega}=0;\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\alpha^2+\xi^2}=\frac{\pi}{\alpha}.$$

Подставляя их в (13.15), приходим к формуле (13.14), что и требовалось доказать.



Полученный здесь результат имеет большое значение для оценки поведения входного сопротивления двухполюсника на всей оси частот. В качестве примера можно привести теорему [36], которая устанавливает, что входное сопротивление любой цепи, например усилителя, с входной емкостью $C_{вх}$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{0}^{\infty}R_{вх}\,d\omega\leqslant\frac{\pi}{2}/C_{вх}. \qquad (13.16)$$

те задачу 1

Это позволяет, например, утверждать, что создание усилителя с равномерным входным сопротивлением $R_{вх}=1$ МОм в полосе частот 0—1 МГц при входной емкости $C_{вх}=10$ пФ является принципиально невозможным.

**Входное сопротивление реактивных двухполюсников.** Важное положение теории цепей, называемое теоремой Фостера [27], касается частотных свойств входных сопротивлений чисто

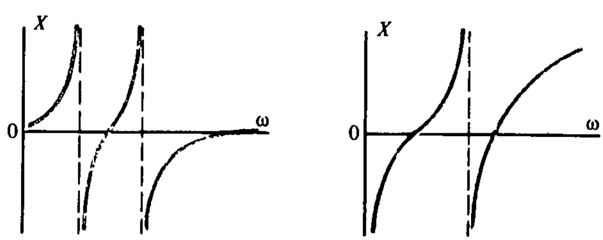



Рис. 13.1. Характерные графики функций $X(j\omega)$ для двух чисто реактивных цепей

реактивных двухполюсников. Формулировка теоремы такова: если $Z(j\omega)=jX(j\omega)$, то реактивное сопротивление является неубывающей функцией, т. е. $dX/d\omega>0$. Примеры частотных зависимостей входных сопротивлений некоторых реактивных двухполюсников изображены на рис. 13.1.

● теорема Фостера

Следствием этой теоремы являются утверждения о том, что:

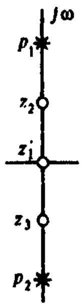
а) точки $p=0$ и $p=\infty$ есть особые точки (нули или полюсы входного сопротивления;

б) на оси $j\omega$ нули и полюсы расположены в чередующемся порядке.

■ свойства входных сопротивлений реактивных двухполюсников

При синтезе электрической цепи обязателен предварительный анализ свойств функции $Z(p)$ для того, чтобы отвергнуть заведомо не реализуемые характеристики.

▲ решите задачу 2




**Пример 13.2.** *Дана функция*

$$Z(p)=\frac{p(p^2+1)}{p^2+4}, \tag{13.17}$$

*имеющая три нуля*: $z_1=0$, $z_2=j$, $z_3=-j$ *и два полюса*: $p_1=2j$ и $p_2=-2j$.

Особые точки расположены на мнимой оси (характерно для реактивных цепей); число полюсов на единицу меньше числа нулей. Тем не менее, цепь, описываемая функцией (13.17), не существует из-за нарушения принципа чередования особых точек.

## 13.2 Синтез пассивных двухполюсников

● постановка задачи синтеза двухполюсника

Классическая задача синтеза электрических двухполюсников формулируется следующим образом: задана некоторая входная функция цепи: $Z(p)$ — сопротивление или $Y(p)$ — проводимость, причем выполняются все условия, гарантирующие принадлежность ее к функциям физически реализуемых устойчивых двухполюсников. Требуется синтезировать электрическую цепь с заданной входной характеристикой.

В исходной информации, с которой начинается синтез двухполюсника, не содержится сведений о структуре будущей цепи. Поэтому, проводя синтез, заранее выбирают ту или иную структуру. Процедура синтеза неоднозначна, и может оказаться, что одну и ту же входную функцию можно реализовать несколькими способами. Тогда предпочтение отдают варианту, в некотором смысле оптимальному, например цепи, содержащей меньшее число элементов.

**Основная идея синтеза.** Любой метод синтеза двухполюсника основан на том, что заданная функция $Z(p)$ или $Y(p)$ подвергается ряду последовательных упрощений. На каждом этапе выделяется определенное выражение, которое может быть однозначно сопоставлено с физическим элементом цепи. Характер выполняемых преобразований заранее устанавливается выбранной структурой цепи. Простейшие структуры, которые будут рассматриваться, изображены на рис. 13.2

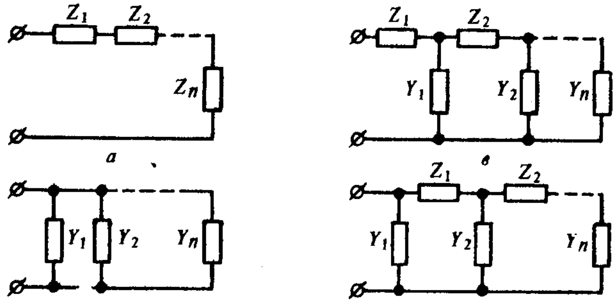



Рис. 13.2. Некоторые структуры синтезируемых двухполюсников

Легко видеть, что в случае *а*

$$Z(p)=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n; \tag{13.18}$$

в случае *б*

$$Y(p)=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n. \tag{13.19}$$

**лестничные цепи**

В практических задачах синтеза число элементов структуры всегда конечно

Двухполюсники, изображенные на рис. 13.2 *в*, *г*, называются *лестничными цепями*. Здесь для случая *в*

$$Z(p)=Z_1+\cfrac{1}{Y_1+\cfrac{1}{Z_2+\ldots\cfrac{\ldots}{\ldots\cfrac{1}{Z_n+\cfrac{1}{Y_n}}}}}; \tag{13.20}$$

для случая *г*

$$Y(p)=Y_1+\cfrac{1}{Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\ldots\cfrac{\ldots}{\ldots\cfrac{1}{Z_n+\cfrac{1}{Y_n}}}}}. \tag{13.21}$$

Выражения (13.20) и (13.21) называют *цепными* или *непрерывными дробями*.

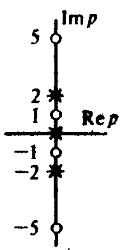
цепная дробь

Если все компоненты $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ идентифицированы с некоторыми физическими элементами цепи, то задача синтеза двухполюсника решена.

**Синтез реактивных двухполюсников.** Изучим основные приемы синтеза линейных пассивных двухполюсников на примере чисто реактивных цепей, образующихся из элементов типа $L$ и $C$. В этом случае строго показывается [27], что любая реализуемая функция, $Z(p)$ или $Y(p)$, может быть представлена как входная функция цепей, изображенных на рис. 13.2. Двухполюсники реактивного типа со структурами (*а*) или (*б*) принято называть *цепями Фостера*, в то время как варианты (*в*) или (*г*) называют *цепями Кауэра*.

цепи Фостера и Кауэра

Обратимся к конкретному примеру.




**Пример 13.3.** *Входное сопротивление задано в виде*

$$Z(p)=\frac{(p^2+1)(p^2+25)}{p(p^2+4)}=\frac{p^4+26p^2+25}{p^3+4p}. \qquad (13.22)$$

*Синтезировать двухполюсник типа Фостера, обладающий данным сопротивлением.*

Непосредственное деление числителя на знаменатель в (13.22) выделяет первый элемент цепи:

$$Z(p)=p+\frac{22p^2+25}{p^3+4p}=p+Z'(p),$$

который оказывается индуктивностью в 1 Гн (здесь и в дальнейшем числовые величины элементов выбраны из соображения наглядности расчетов).

Упрощение входного сопротивления $Z'(p)$ можно провести, разложив его на простые дроби:

$$Z'(p)=\frac{25}{4p}+\frac{\frac{63p}{4}}{p^2+4}=\frac{25}{4p}+Z''(p).$$

Первое слагаемое в правой части отображает здесь конденсатор с емкостью $^4/_{25}$ Ф.

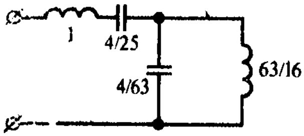
Для того чтобы идентифицировать последний элемент цепи, соответствующий сопротивлению $Z''(p)$, целесообразно перейти к проводимости

решите задачу 3

$$Y''(p)=1/Z''(p)=\frac{p^2+4}{63p/4}=\frac{4}{63}\,p+\frac{16}{63p},$$

которой отвечает параллельное соединение конденсатора с емкостью $^4/_{63}$ Ф и индуктивностью $^{63}/_{16}$ Гн.

В итоге приходим к следующей принципиальной схеме двухполюсника, реализующего заданное входное сопротивление:




Для того чтобы синтезировать реактивный двухполюсник по методу Кауэра, нужно представить заданное входное сопротивление (или проводимость) в виде цепной дроби. Процедура, приводящая к такой форме, вытекает из самой структуры дроби. Она получила название *«деление — обращение остатка»*.

**Пример 13.4.** *Найти схему Кауэра, реализующую входное сопротивление* (13.22).

Будем проводить синтез путем деления числителя на знаменатель, начиная со старших степеней:

$$\begin{array}{r|l} p^4+26p^2+25 & p^3+4p \\ \cline{2-2} -\;\; p^4+4p^2 & p \\ \hline 22p^2+25 & \end{array} \qquad (13.23)$$

Итак, первым элементом цепи, как и в схеме Фостера, будет последовательная индуктивность в 1 Гн.

Записывая

$$Z(p)=p+\cfrac{1}{\cfrac{p^3+4p}{22p^2+25}}, \qquad (13.24)$$

▲ решите задачу 4

видим, что в (13.23) знаменатель должен быть разделен на остаток. В этом и заключается обращение остатка. Дальнейшие этапы синтеза чередуются:

*деление*:

$$\begin{array}{r|l} p^3+4p & 22p^2+25 \\ \cline{2-2} -\;\; p^3+\frac{25p}{22} & \frac{p}{22} \\ \hline \frac{63p}{22} & \end{array},$$

*обращение остатка*:

$$\begin{array}{r|l} 22p^2+25 & \frac{63p}{22} \\ \cline{2-2} -\;\; 22p^2 & \frac{484p}{63} \\ \hline 25 & \end{array},$$

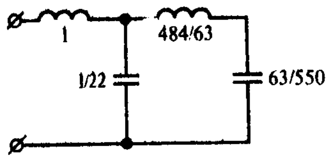
*деление*:

$$\begin{array}{r|l} \frac{63p}{22} & 25 \\ \cline{2-2} & \frac{63p}{550} \end{array}.$$

Объединяя все эти результаты, записываем разложение $Z(p)$ в цепную дробь:

$$Z(p) = p + \cfrac{1}{\cfrac{p}{22} + \cfrac{1}{\cfrac{484}{63}\,p + \cfrac{1}{\cfrac{63p}{550}}}}, \tag{13.25}$$

которой отвечает следующая схема Кауэра:




Два предыдущих примера наглядно показывают, что синтез двухполюсников осуществляется неоднозначно. Можно найти еще одну цепь с таким же входным сопротивлением, применив метод Кауэра и начав деление не с высших, а с низших степеней.

**Пример 13.5.** *Найти цепь с входным сопротивлением, описываемым формулой* (13.22), *используя метод Кауэра и начиная деление с низших степеней многочленов.*

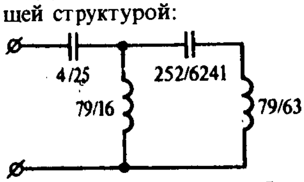
Записывая

$$Z(p) = \frac{25 + 26p^2 + p^4}{4p + p^3},$$

выполняя деление и обращение остатка, получим

$$Z(p) = \frac{25}{4p} + \cfrac{1}{\cfrac{16}{79p} + \cfrac{1}{\cfrac{6241}{252p} + \cfrac{79p}{63}}}. \tag{13.26}$$

Данной цепной дроби отвечает реактивный двухполюсник со следующей структурой:




Метод «деление — обращение остатка» удобен с точки зрения синтеза на ЭВМ. Этот способ допускает большое число вариантов. Так, начав деление с высших степеней, можно на последующих этапах применить обратный порядок следования степеней.

канонические цепи

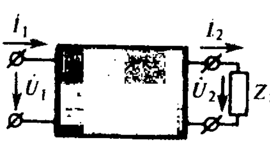
**Заключительные замечания.** Цепи, реализующие заданное входное сопротивление или проводимость при минимальном числе элементов, называются *каноническими*. Применительно к реактивным двухполюсникам доказано [27], что именно этим свойством обладают как цепи Фостера, так и цепи Кауэра. Если $N$ — число пар особых точек (нулей и полюсов) входной функции, не равных нулю и бесконечности, то каноническая цепь содержит $N+1$ реактивных элементов.

теорема Дарлингтона

При практическом синтезе следует иметь в виду, что при разложении функций $Z(p)$ или $Y(p)$ на сумму простейших слагаемых или в цепную дробь возможно получение отрицательных коэффициентов. Это означает, что выбранный путь приводит к нереализуемой цепи и поэтому следует воспользоваться другим возможным способом, например в методе Кауэра начинать деление не с высших, а с низших степеней. Может случиться, что при синтезе $RLC$-цепи общего вида ни один из предлагаемых здесь способов не приводит к цели. Это означает, что такая входная функция в принципе не может быть реализована в классе рассмотренных здесь простейших структур, и следует обратиться к более сложным структурам, описанным в [27]. Можно лишь утверждать, что искомая цепь существует, поскольку согласно фундаментальной для теории цепей *теореме Дарлингтона* [28] любая физическая допустимая входная функция реализуется как входное сопротивление или проводимость некоторого чисто реактивного пассивного четырехполюсника, нагруженного на единственный резистор.

Поиск подходящих структур является наиболее сложным моментом при синтезе цепей. Особое внимание этому следует уделять, разрабатывая алгоритм автоматизированного проектирования цепей с помощью ЭВМ.

## 13.3 Частотные характеристики четырехполюсников




Четырехполюсниками называют электрические цепи, имеющие вид «черного ящика» с двумя парами доступных зажимов, одна из которых служит входом, а другая — выходом сигнала. В рабочем режиме ко входу подключен источник сигнала, а выходные зажимы нагружены на сопротивление нагрузки $Z_н$.

Предполагается, что читатель знаком с методами анализа четырехполюсников, которые излагаются в курсе теории цепей. Материал данного параграфа освещает лишь отдельные моменты, существенные для синтеза четырехполюсников.

**Матричное описание.** Важнейшее свойство линейного стационарного четырехполюсника состоит в том, что четыре комплексные амплитуды $\dot U_1$, $\dot I_1$, $\dot U_2$, $\dot I_2$ при любой частоте внешнего воздействия связаны двумя линейными алгебраическими уравнениями. Две произвольно выбранные комплексные амплитуды могут быть приняты за независимые величины, а две другие должны определяться через них. Это служит основанием для матричного описания линейных четырехполюсников [25]. Так, часто используют матрицу передачи ($ABCD$-матрицу), полагая независимыми переменными напряжение и ток на выходе. При этом

$$\begin{aligned} \dot U_1 &= A\dot U_2 + B\dot I_2; \\ \dot I_1 &= C\dot U_2 + D\dot I_2. \end{aligned} \qquad (13.27)$$

Коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ имеют разные физические размерности и могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания. Матрицы передачи особенно удобны для описания каскадного включения четырехполюсников, поскольку результирующая матрица есть произведение матриц отдельных звеньев.

Функции цепи

Если заданы матрица четырехполюсника и сопротивление нагрузки, то можно вычислить так называемые *функции цепи*, к которым относятся:

а) входное сопротивление $Z_{вх} = \dot U_1/\dot I_1$,

б) передаточное сопротивление $Z_п = \dot U_2/\dot I_1$,

в) частотный коэффициент передачи по напряжению

$K = \dot U_2/\dot U_1$.

Функции цепи зависят в общем случае от частоты и позволяют характеризовать частотные свойства четырехполюсника применительно к различным постановкам задач. Любая функция цепи выражается через элементы матриц четырехполюсника и через сопротивление нагрузки. Так, деля левые и правые части уравнения (13.27) друг на друга, находим, что

$$Z_{вх} = \frac{AZ_н + B}{CZ_н + D}. \qquad (13.28)$$

Аналогично вычисляется частотный коэффициент передачи по напряжению:

$$K(j\omega) = \dot U_2/\dot U_1 = Z_н/(AZ_н + B). \qquad (13.29)$$

Обратим внимание на то, что функция $K(j\omega)$ зависит от направления передачи энергии в системе. Если источник и нагрузка меняются местами, то следует ввести коэффициент передачи в обратном направлении:

$$K_{\text{обр}}(j\omega)=\dot{U}_1/\dot{U}_2 \mid Z_{\text{н слева}}. \tag{13.30}$$

Коэффициенты прямой и обратной передачи в общем случае не совпадают.

**Передаточная функция четырехполюсника.** В дальнейшем в качестве аргумента частотного коэффициента передачи будет использоваться не только переменная $j\omega$, но и комплексная частота $p$, т. е. наряду с функцией $K(j\omega)$ рассматривается более общая характеристика — передаточная функция $K(p)$. Передаточная функция четырехполюсника обладает всеми свойствами аналогичных функций линейных стационарных систем, рассмотренных в гл. 8. Так, линейному четырехполюснику с постоянными параметрами отвечает функция

$$K(p)=K_0\,\frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}, \tag{13.31}$$

где $K_0$ — постоянная величина. Если цепь устойчива, то полюсы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ должны располагаться в левой полуплоскости, образуя комплексно-сопряженные пары.

■ расположение полюсов передаточной функции четырехполюсника

Существование нуля передаточной функции в бесконечно удаленной точке обеспечивает спад АЧХ цепи при очень высоких частотах

Обычно вводят дополнительное условие — *число полюсов функции $K(p)$ должно превышать число нулей,* т. е. в бесконечно удаленной точке должен существовать не полюс, а нуль передаточной функции. Тогда импульсная характеристика цепи

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{C}K(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

оказывается ограниченной, поскольку при бесконечно большом радиусе контура интегрирования $C$ экспоненциальный сомножитель подынтегральной функции сможет «погасить» величину интеграла по дуге.

В отличие от входного сопротивления двухполюсника разность числа нулей и полюсов передаточной функции может быть любой. Это связано с тем, что на фазовый угол коэффициента передачи не может быть наложено каких-либо энергетических ограничений.

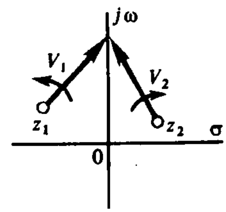
**Расположение нулей передаточной функции.** В отличие от полюсов нули функции $K(p)$ устойчивого линейного четырехполюсника могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости переменной $p$. Действительно, характеристическое уравнение $K(p)=0$ означает, что при некотором $U_1(p)\neq 0$

изображение выходного напряжения $U_2(p)$ обращается в нуль. Это не противоречит предположению об устойчивости системы.

**минимально-фазовые цепи**

Четырехполюсники, не имеющие нулей передаточной функции в правой полуплоскости, называют *минимально-фазовыми цепями*. Если же нули в правой полуплоскости имеются, то такие четырехполюсники называют *неминимально-фазовыми цепями*.

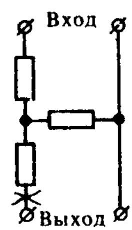
Данная терминология связана со следующими обстоятельствами. Рассмотрим плоскость комплексной частоты, на которой обозначены точки $z_1$ и $z_2$ в левой и правой полуплоскостях. Пусть эти точки являются нулями передаточной функции некоторого четырехполюсника. Если четырехполюсник находится под гармоническим внешним воздействием, так что $p = j\omega$, то данным точкам соответствуют два вектора на комплексной плоскости : $V_1 = j\omega - z_1$ и $V_2 = j\omega - z_2$; они отвечают соответствующим сомножителям в числителе формулы (13.31). Оба вектора вращаются и изменяют свою длину при изменении частоты $\omega$. Разница состоит в том, что вектор $V_1$ с изменением частоты от $-\infty$ до $+\infty$ увеличивает фазовый угол частотного коэффициента передачи на $\pi$ радиан, в то время как вектор $V_2$ в тех же условиях уменьшает фазу на ту же самую величину. Коэффициент передачи четырехполюсника является дробно-рациональной функцией, изменение аргумента которой



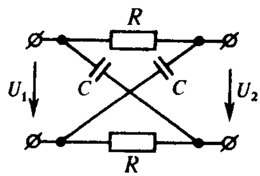

$$\Delta \arg K(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \Delta \arg(\text{числит.}) - \Delta \arg(\text{знамен.}).$$

Поэтому при одинаковом числе нулей и полюсов неминимально-фазовая цепь обеспечивает большее по абсолютной величине изменение фазы коэффициента передачи по сравнению с минимально-фазовой цепью.

Расположение нулей функции $K(p)$ связано с топологической структурой цепи. В теории цепей показывается, что минимально-фазовым будет любой четырехполюсник со следующим свойством: передача сигнала со входа на выход может быть полностью прекращена путем разрыва единственной ветви. В частности, минимально-фазовыми оказываются любые четырехполюсники лестничной структуры.




Неминимально-фазовые цепи имеют, как правило, структуру мостовых (скрещенных) схем, в которых сигнал на выход проходит по двум каналам или более. Простейший пример неминимально-фазовой цепи — симметричный мостовой четырехполюсник, образованный элементами $R$ и $C$. Здесь, как нетрудно убедиться,




$$K(p)=\frac{pRC-1}{pRC+1}. \tag{13.32}$$

Данная функция имеет нуль передаточной функции в точке $p=1/(RC)$, т. е. в правой полуплоскости.

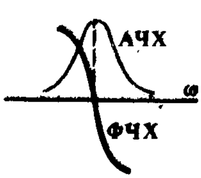
Однако мостовая структура не гарантирует автоматически принадлежность цепи к минимально-фазовому классу и в каждом отдельном случае следует проверять наличие или отсутствие нулей в правой полуплоскости.

**Связь между модулем и фазой частотного коэффициента передачи.** Доказано [1], что четырехполюсники минимально-фазового типа обладают замечательной особенностью: модуль и фаза их частотного коэффициента передачи, т. е. АЧХ и ФЧХ этих цепей, однозначно связаны друг с другом. Вещественная и мнимая части логарифма частотного коэффициента передачи

$$\ln\{|K(j\omega)|\exp[j\varphi_K(\omega)]\}=\ln|K(j\omega)|+j\varphi_K(\omega)=$$
$$=\psi_K(\omega)+j\varphi_K(\omega)$$

образуют пару преобразований Гильберта:

$$\varphi_K(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_K(\xi)\,d\xi}{\xi-\omega};$$
$$\psi_K(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_K(\xi)\,d\xi}{\omega-\xi}. \tag{13.33}$$




В четырехполюснике минимально-фазового типа невозможно, реализуя заданную АЧХ, получить любую ФЧХ. Основываясь на свойствах преобразований Гильберта (см. гл. 5), можно утверждать, например, что если АЧХ минимально-фазового четырехполюсника на какой-нибудь частоте достигает максимума, то ФЧХ в окрестности этой частоты проходит через нуль.

■ применение неминимально-фазовых цепей

Если же четырехполюсник принадлежит к классу цепей неминимальной фазы, то АЧХ и ФЧХ независимы друг от друга. Среди неминимально-фазовых цепей особо важную роль играют так называемые всепропускающие четырехполюсники, у которых модуль коэффициента передачи постоянен и не зависит от частоты. Примером может служить симметричный мостовой $RC$-четырехполюсник, для которого (см. (13.32))

$$|K(j\omega)|=1;\quad \varphi_K=-2\,\mathrm{arctg}\,\omega RC. \tag{13.34}$$

Подобные четырехполюсники используются для целей фазовой коррекции сигналов. Они позволяют частично компенсировать искажения формы сигналов, прошедших через радиотехнические устройства.

**Коэффициент передачи мощности.** Как известно (см. гл. 8), так принято называть квадрат модуля частотного коэффициента передачи четырехполюсника:

$$K_p(\omega) = K(j\omega)\overset{*}{K}(j\omega) = K(j\omega)K(-j\omega). \qquad (13.35)$$

В отличие от самого коэффициента передачи $K(j\omega)$ функция $K_p(\omega)$ вещественна и поэтому особенно удобна для задания исходных данных к синтезу четырехполюсника. Однако она не содержит сведений о ФЧХ системы.

Как видно из (13.35), коэффициент передачи мощности — четная функция частоты, и поэтому он всегда может быть представлен в виде отношения двух многочленов по степеням $\omega^2$:

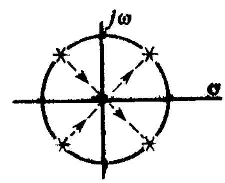
$$K_p(\omega) = M(\omega^2)/N(\omega^2). \qquad (13.36)$$

■ частотные свойства коэффициента передачи мощности

При замене переменной $p = j\omega$ функция $K_p(\omega)$ аналитически продолжается с мнимой оси $j\omega$ на всю плоскость комплексных частот:

$$K_p(p) = K(p)K(-p). \qquad (13.37)$$

Формула (13.37) устанавливает важный факт: если $a + jb$ — особая точка (нуль или полюс) функции $K(p)$, то $K_p(p)$ будет иметь такую же особую точку как при $p = a + jb$, так и при $p = -a - jb$. Принято говорить, что особые точки частотного коэффициента передачи мощности имеют *квадрантную симметрию*, т. е. располагаются на комплексной плоскости, имея центр симметрии в начале координат. Это свойство имеет большое значение для задач синтеза четырехполюсников, поскольку оно дает возможность восстанавливать частотный коэффициент передачи по известной функции $K_p(p)$.



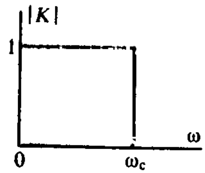

Расположение полюсов, находящихся в квадрантной симметрии

## 13.4 Фильтры нижних частот

В данном параграфе будут рассмотрены частотные характеристики фильтров нижних частот (ФНЧ), назначение которых — с минимальным ослаблением передавать колебания, частоты которых не превосходят заданной граничной частоты, называемой *частотой среза* $\omega_c$ фильтра. В то же время колебания с более высокими частотами должны существенно ослабляться.

● частота среза фильтра

**Этапы синтеза фильтров.** Синтез частотно-избирательных цепей начинается обычно с формулировки технических требований к частотным характеристикам. Например, для ФНЧ с частотой среза $\omega_c$ идеальная АЧХ имеет вид




$$|K(j\omega)| = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_c, \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases} \tag{13.38}$$

(имеются в виду физические частоты $\omega > 0$).

При этом никаких ограничений на ФЧХ не налагается. Такой подход называется синтезом фильтра по заданной амплитудно-частотной характеристике.

Идеальная частотная характеристика (13.38) заведомо нереализуема (см. гл. 8). Второй этап синтеза состоит в аппроксимации идеальной характеристики с помощью такой функции, которая может принадлежать физически реализуемой цепи.

Заключительным этапом синтеза является реализация выбранной частотной характеристики и получение принципиальной схемы фильтра вместе с номиналами входящих сюда элементов.

В радиотехнике наибольшее распространение получили два способа аппроксимации частотных характеристик, рассматриваемые ниже.

**В общем случае коэффициент передачи мощности может содержать произвольный масштабный множитель**

**Максимально-плоская аппроксимация.** Один из возможных способов аппроксимации идеальной характеристики ФНЧ построен на использовании коэффициента передачи мощности

$$\boxed{K_p(\omega_н) = 1/(1 + \omega_н^{2n}),} \tag{13.39}$$

где $\omega_н = \omega/\omega_c$ — безразмерная нормированная частота. ФНЧ, имеющий такие частотные свойства, называют *фильтром с максимально-плоской характеристикой или фильтром Баттерворса.* Целое число $n = 1, 2, 3, \ldots$ является *порядком фильтра.* Сравнение (13.36) и (13.39) показывает, что при любом $n$ такой фильтр реализуем. В полосе пропускания фильтра, т. е. при $0 < \omega_н < 1$,

● **порядок фильтра**

▲ **решите задачу 5**

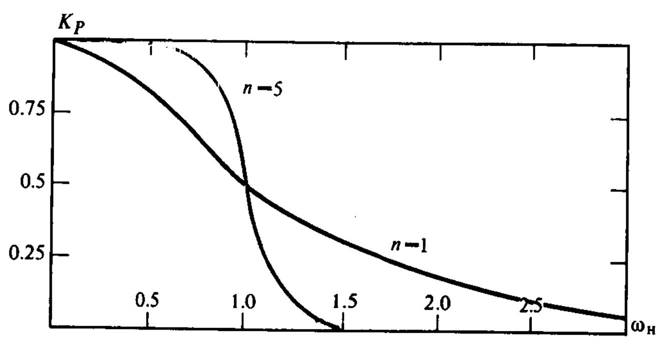



Рис. 13.3. Частотные характеристики коэффициента передачи мощности для фильтров Баттерворса при $n=1$ и $n=5$

квадрат модуля коэффициента передачи плавно уменьшается с ростом частоты. На частоте среза (при $\omega_н=1$) ослабление, вносимое фильтром, составляет $10\lg 0.5 \approx -3$ дБ независимо от порядка системы. Чем больше $n$, тем точнее аппроксимируется идеальная форма частотной характеристики. На рис. 13.3 изображены графики, построенные по формуле (13.39) для максимально-плоских характеристик различных порядков.

Порядок фильтра обычно подбирают, исходя из требований, предъявляемых к ослаблению сигналов с частотами $\omega > \omega_c$.

**Пример 13.6.** *Найти порядок фильтра Баттерворса с частотой среза* $10^5$ 1/с, *который при* $\omega = 3 \cdot 10^5$ 1/с *обеспечивал бы ослабление сигнала не хуже чем* —26 дБ *по отношению к уровню при* $\omega=0$.

Данное условие определяет порядок фильтра $n$ как ближайшее целое число (с избытком) к решению уравнения

$$10\lg\frac{1}{1+3^{2n}} = -26,$$

или

$$1+3^{2n} = 10^{2.6} = 398.$$

Решая его, находим

$$2n = \lg 397/\lg 3 = 5.45,$$

откуда $n=3$.

При значительной расстройке сигнала относительно полосы пропускания фильтра, когда $\omega_н \gg 1$, из (13.39) имеем

▲ решите задачу 6

$$K_p(\omega_н) \approx \omega_н^{-2n},$$

т. е. ослабление, выраженное в децибелах,

$$\Delta = 10\lg K_p \approx -20n\lg\omega_н.$$

Отсюда следует, что при увеличении частоты вдвое ослабление, вносимое фильтром Баттерворса, возрастает на $-20n \cdot 0.301 \approx$ $\approx -6n$ дБ. Говорят, что для фильтра этого типа скорость роста ослабления вне полосы пропускания составляет $-6n$ дБ/октава.

Октава — интервал частот, граничные точки которого отличаются в два раза

**Передаточная функция фильтра с максимально-плоской частотной характеристикой.** Для того чтобы в дальнейшем синтезировать структуру цепи, необходимо от коэффициента передачи мощности, выбранного в форме (13.39), перейти к передаточной функции $K(p)$. С этой целью введем нормированную комплексную частоту $p_н = \sigma_н + j\omega_н$ и запишем (13.39) так:

$$K_p(p_н) = K(p_н)K(-p_н) = \frac{1}{1+(-1)^n p_н^{2n}}. \qquad (13.40)$$

Отсюда видно, что на плоскости $p_н$ функция $K_P(p_н)$, отвечающая ФНЧ с характеристикой Баттерворса $n$-го порядка, имеет $2n$ полюсов, которые являются корнями уравнения

$$\boxed{1+(-1)^n p_н^{2n}=0.} \tag{13.41}$$

Все эти корни лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. При $n=1$ полюсы коэффициента передачи мощности находятся из уравнения $p_н^2=1$, т. е.

$$p_{н1}=1; \quad p_{н2}=-1. \tag{13.42}$$

Если $n=2$, то уравнение $p_н^4=-1$ имеет четыре корня:

▲ решите задачу 7

$$p_{н1}=e^{j\pi/4}; \quad p_{н2}=e^{j3\pi/4}; \quad p_{н3}=e^{j5\pi/4}; \quad p_{н4}=e^{j7\pi/4}. \tag{13.43}$$

Наконец, для фильтра 3-го порядка необходимо решить уравнение $p_н^6=1$, у которого имеется шесть корней:

$$p_{н1}=1; \quad p_{н2}=e^{j\pi/3}; \quad p_{н3}=e^{j2\pi/3};$$

$$p_{н4}=-1; \quad p_{н5}=e^{j4\pi/3}; \quad p_{н6}=e^{j5\pi/3}. \tag{13.44}$$

Расположение корней на комплексной плоскости для приведенных случаев показано на рис. 13.4.

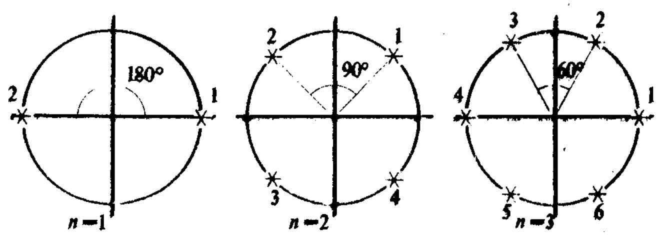
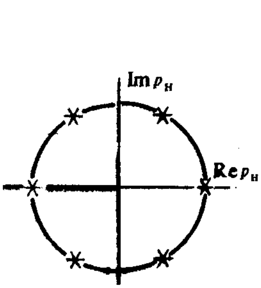



Рис. 13.4. Полюсы коэффициента передачи мощности ФНЧ с характеристикой Баттерворса при $n=1, 2, 3$




Общая закономерность при любом $n$ такова: все полюсы расположены на одинаковом угловом расстоянии друг от друга, равном $\pi/n$; если $n$ — нечетное число, то первый корень $p_{н1}=1$, если же $n$ четно, то $p_{н1}=\exp(j\pi/n)$.

Теперь воспользуемся тем, что полюсы коэффициента передачи мощности имеют квадрантную симметрию, т. е. их число и конфигурация расположения в обеих полуплоскостях одинаковы. Это позволяет считать, что только те полюсы, которые расположены в левой полуплоскости, отвечают синтезируемому фильтру. Их «зеркальная копия» в правой полуплоскости соотносится с функцией $K(-p)$ и не принимается во внимание. Описанный здесь принцип является основным в процедуре синтеза фильтров, поскольку именно на нем в дальнейшем основана реализация цепи.

■ принцип отбора полюсов передаточной функции

**Пример 13.7.** *Определить передаточную функцию ФНЧ с характеристикой Баттерворса 2-го порядка.*

Передаточная функция определяется двумя полюсами, лежащими в левой полуплоскости (см. (13.43)):

$$p_{н1} = (-1 + j)/\sqrt{2}, \quad p_{н2} = (-1 - j)/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$K(p_н) = \frac{1}{(p_н - p_{н1})(p_н - p_{н2})} = \frac{1}{p_н^2 + \sqrt{2}\,p_н + 1}. \tag{13.45}$$

Таким образом, для реализации ФНЧ при $n=2$ требуется динамическая система 2-го порядка (колебательное звено).

**Чебышевская аппроксимация.** Широкое применение находит также и другой способ аппроксимации частотной характеристики идеального ФНЧ, получивший название чебышевской аппроксимации. Коэффициент передачи мощности ФНЧ такого вида задается формулой

$$K_P(\omega_н) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_н)}, \tag{13.46}$$

где $\varepsilon < 1$ — постоянное число, называемое *коэффициентом неравномерности характеристики в полосе пропускания*, $T_n(\omega_н)$ — многочлен Чебышева $n$-го порядка, определяемый формулой

● коэффициент неравномерности характеристики

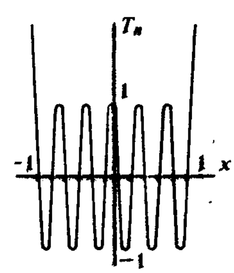
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{13.47}$$

Функция $T_n(x)$ при любом $n$ может быть найдена из рекуррентного соотношения

$$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \tag{13.48}$$

причем $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$.

Эти многочлены часто используются во всевозможных задачах аппроксимации благодаря следующему свойству: среди всех многочленов $n$-й степени с одинаковыми коэффициентами при старшей степени аргумента эти многочлены менее всего уклоняются от нуля на интервале $-1 < x < 1$. В то же время при $|x| \gg 1$ многочлены Чебышева резко увеличивают свои




Типичный график многочлена Чебышева

свойство многочленов Чебышева

значения. Асимптотически

$$T_n(x) \approx 2^{n-1} x^n \quad \text{при} \quad |x| \gg 1. \tag{13.49}$$

С помощью таких функций можно удачно аппроксимировать идеальную характеристику ФНЧ: из (13.46) видно, что в пределах полосы пропускания величина $K_P$ колеблется от 1 до $1/(1+\varepsilon^2)$, если же $\omega_н \gg 1$, то фильтр обеспечивает большое ослабление сигнала.

На рис. 13.5 приведены характерные графики частотных характеристик передачи мощности для двух чебышевских фильтров при $n=2$ и $n=3$.

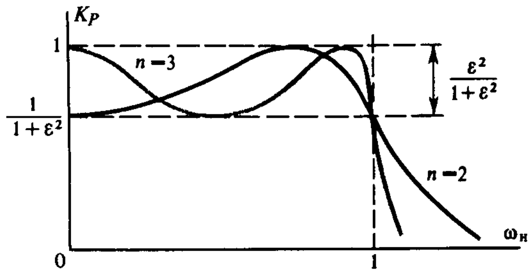



Рис. 13.5. Частотные характеристики ФНЧ чебышевского типа

решите задачу 8

Из графиков видно, что в полосе пропускания частотные характеристики чебышевских фильтров немонотонны. Величина пульсаций ослабления тем выше, чем больше $\varepsilon$. Как это следует из (13.46), увеличение $\varepsilon$ ведет к большему ослаблению сигналов вне полосы пропускания. Подбором двух параметров $n$ и $\varepsilon$ можно добиться выполнения исходных условий, предъявляемых к синтезируемому фильтру.

**Пример 13.8.** *Фильтр с чебышевской характеристикой 3-го порядка на частоте среза ($\omega_н=1$) обеспечивает ослабление мощности в два раза, т. е. такое же, как и фильтр с максимально-плоской характеристикой. Определить величину ослабления, вносимого этим фильтром на частоте, в три раза превышающей частоту среза.*

Прежде всего найдем $\varepsilon$. Как следует из (13.47), $T_n(1)=1$ при любом $n$, поэтому $K_P(1)=1/2$ в том случае, если $\varepsilon=1$.

Многочлен Чебышева 3-го порядка

$$T_3(\omega_н) = 4\omega_н^3 - 3\omega_н,$$

откуда ослабление, вносимое чебышевским фильтром с единичным коэффициентом неравномерности на частоте $\omega=3\omega_c$, составит

$$\Delta_{чеб} = 10 \lg \frac{1}{1+T_3^2(3)} = -39.91 \text{ дБ}.$$

Интересно отметить, что в аналогичных условиях фильтр Баттерворса 3-го порядка обеспечивает ослабление

$$\Delta_{бат} = 10 \lg \frac{1}{1+3^6} = -28.63 \text{ дБ}.$$

Таким образом, применение фильтра с чебышевской характеристикой позволяет добиться существенно лучших свойств частотно-избирательной системы.

**Передаточная функция чебышевского ФНЧ.** Как видно из (13.46), полюсы коэффициента передачи мощности чебышевского фильтра являются корнями уравнения

$$1+\varepsilon^2 T_n^2(p_н)=0 \qquad (13.50)$$

(ср. с формулой (13.41)).

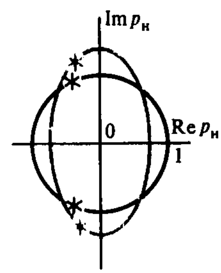
Метод его решения довольно громоздок и с ним читатель может ознакомиться по [28]. Окончательный вывод состоит в следующем. Прежде всего вычисляется вспомогательный параметр:

$$a=\frac{1}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right). \qquad (13.51)$$

Затем должны быть найдены полюсы фильтра Баттерворса того же порядка. Переход к полюсам чебышевского фильтра осуществляется за счет того, что абсцисса каждого полюса фильтра Баттерворса умножается на $\operatorname{sh} a$, а ордината — на $\operatorname{ch} a$.

Если полюсы фильтра Баттерворса располагаются на единичной окружности, то полюсы фильтра с чебышевской характеристикой лежат на эллипсе, уравнение которого в плоскости $p_н=\sigma_н+j\omega_н$ имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_н}{\operatorname{sh}a}\right)^2+\left(\frac{\omega_н}{\operatorname{ch}a}\right)^2=1.$$



Полюсы фильтров с максимально-плоской и чебышевской характеристиками

Получив координаты полюсов, можно записать выражение передаточной функции чебышевского фильтра в виде

$$K(p_н)=\frac{1}{(p_н-p_{н1})(p_н-p_{н2})\ldots(p_н-p_{нn})}.$$

**Пример 13.9.** *Найти передаточную функцию чебышевского фильтра 2-го порядка с параметром* $\varepsilon=1$.

Здесь

$$a=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})=0.4407.$$

▲ решите задачу 9

Соответствующий фильтр Баттерворса имеет два полюса:

$p_{н1} = 0.707\,(-1+j)$; $p_{н2} = 0.707\,(-1-j)$.

Абсциссы полюсов чебышевского фильтра будут равны $-0.707\,\mathrm{sh}\,a = -0.322$; ординаты полюсов составят $\pm 0.707\,\mathrm{ch}\,a = \pm 0.777$.

Из этого примера видно, что переход от максимально-плоской к чебышевской характеристике осуществляется путем приближения полюсов к мнимой оси; перемещение их по вертикали незначительно. С физической точки зрения это означает, что колебательная система, образующая чебышевский фильтр, должна в данном случае обладать меньшим затуханием.

## 13.5 Реализация фильтров

● структурный синтез

Окончательный этап синтеза фильтров состоит в нахождении принципиальной схемы устройства. В этом параграфе будет рассмотрен так называемый *структурный синтез*, когда цепь образуется каскадным включением некоторого числа звеньев, отделенных друг от друга идеальными развязывающими элементами (рис. 13.6). Частотный коэффициент передачи такого устройства

$$K(j\omega) = K_1(j\omega)K_2(j\omega)\ldots K_N(j\omega).$$

Коэффициенты передачи $K_1$, $K_2$, ..., $K_N$ должны быть такими, чтобы они реализовывали те полюсы функции $K(p)$, которые были определены ранее на этапе аппроксимации.

Широкое использование элементов развязки характерно для современного синтеза активных цепей в микроэлектронном исполнении

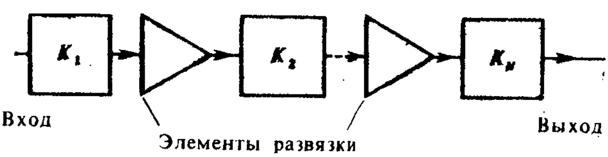



Рис. 13.6. Фильтр, образованный каскадным включением звеньев (в качестве элементов развязки обычно используются эмиттерные повторители)

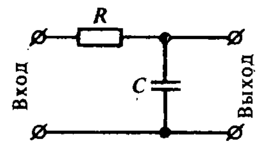
Для создания ФНЧ требуются звенья двух видов — звено 1-го порядка, имеющее единственный вещественный полюс, и звено 2-го порядка, обладающее парой комплексно-сопряженных полюсов.

**Звено 1-го порядка.** Простейшей цепью данного вида является Г-образный $RC$-четырехполюсник, для которого

$$K(p) = 1/(1+pRC); \tag{13.52}$$

координата полюса $p_1 = -1/(RC)$.

Отметим, что задавая $p_1$, мы получаем лишь произведение $RC$. Один из элементов, $R$ или $C$, может быть выбран произвольно. Например, желательно, чтобы емкость $C$ значительно превосходила входную емкость последующего каскада. При этом снижается чувствительность частотной характеристики фильтра к неточному выбору номиналов элементов, образующих схему.




**Звено 2-го порядка.** Два комплексно-сопряженных полюса частотного коэффициента передачи можно реализовать с помощью Г-образного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 13.7.

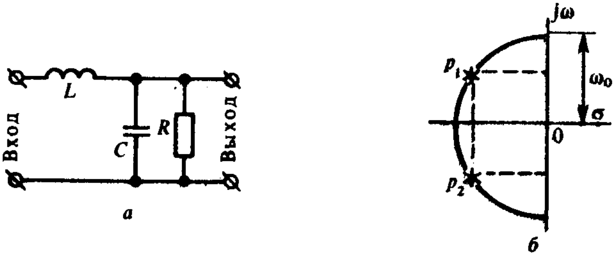



Рис. 13.7. Звено 2-го порядка:
*а* — принципиальная схема; *б* — расположение полюсов передаточной функции

Легко вычислить, что для этого звена

▲ решите задачу 10

$$K(p)=\frac{\omega_0^2}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}, \tag{13.53}$$

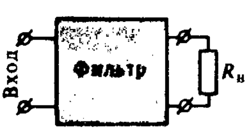
где $\omega_0=1/\sqrt{LC}$; $\alpha=1/(2RC)$.

Передаточная функция имеет полюсы

$$p_{1,2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}, \tag{13.54}$$

которые в зависимости от соотношения между $\omega_0$ и $\alpha$ могут быть как комплексно-сопряженными, так и вещественными.

Рассмотрим конкретные примеры реализации ФНЧ с помощью звеньев, включаемых каскадно.




**Пример 13.10.** *Реализовать ФНЧ с максимально-плоской характеристикой 3-го порядка при частоте среза* $10^5$ 1/с. *Нагрузкой фильтра служит резистор* $R_н=0.5$ кОм.

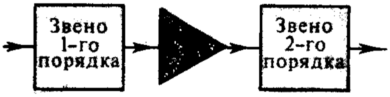
Как было показано ранее, такой фильтр должен иметь три полюса передаточной функции в точках с координатами

$$p_{1,2}=-10^6(\cos 60^\circ\pm j\sin 60^\circ)=-0.5\cdot 10^6\pm j\,0.866\cdot 10^6\ 1/\text{с},$$

$$p_3=-10^6\ 1/\text{с}$$

(здесь выполнен переход от нормированной переменной $p_н$ к истинной комплексной частоте $p=\omega_c p_н$).

Будем искать схему фильтра в виде каскадного соединения звена 1-го порядка, которому отвечает полюс $p_3$, развязывающего устройства и звена 2-го порядка с полюсами $p_1$ и $p_2$.




Звено 1-го порядка в соответствии с (13.52) должно иметь постоянную времени $RC=1/\omega_c=10^{-5}$ с. Если выбрать $C=10$ нФ, то резистор, образующий это звено, имеет сопротивление $R=10^{-5}/C=1$ кОм.

Будем полагать, что роль резистора, входящего в звено 2-го порядка, выполняет нагрузочное сопротивление. На основании (13.54) пара комплексно-сопряженных корней будет иметь требуемую вещественную часть, если

$$1/(2R_нC) = -\operatorname{Re} p_{1,2} = 0.5 \cdot 10^5.$$

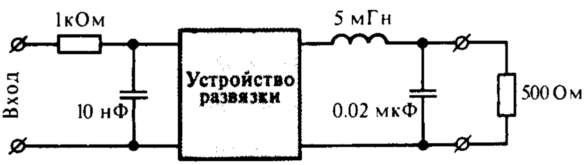
Отсюда

$$C = 1/(10^6 R_н) = 0.02\ \text{мкФ}.$$

Наконец, индуктивность

$$L = 1/\left(\omega_c^2 C\right) = 5\ \text{мГн}.$$

Принципиальная схема синтезированного фильтра имеет вид




▲ решите задачу 11

**Пример 13.11.** *Реализовать чебышевский фильтр нижних частот 2-го порядка, работающий на резистивную нагрузку с сопротивлением* $R_н=1$ кОм. *Исходные данные к синтезу: частота среза* $\omega_c=10^5$ 1/с, *коэффициент неравномерности* $\varepsilon=1$.

▲ решите задачу 12

Для реализации частотной характеристики 2-го порядка достаточно иметь одно Г-образное *RLC*-звено. В примере 13.9 были получены координаты полюсов передаточной функции чебышевского фильтра 2-го порядка при $\varepsilon=1$

$$p_{н\,1,2} = -0.322 \pm j\,0.777,$$

или после перехода к ненормированной переменной $p$

$$p_{1,2} = (-0.322 \pm j\,0.777)\,10^5\ 1/\text{с}.$$

Емкость конденсатора $C$ находим из (13.54), приравняв величину $\alpha$ требуемой абсциссе полюсов:

$$\alpha = 1/(2R_нC) = 0.322 \cdot 10^5,$$

откуда $C=15.53$ нФ.

Индуктивность $L$ определяется из уравнения для координат полюсов по мнимой оси:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 0.777 \cdot 10^5.$$

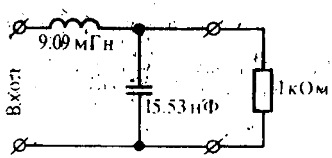
▲ решите задачу 13

Решая его, находим:

$$\omega_0^2 = 1/(LC) = 0.708 \cdot 10^{10};$$

$$L = 1/\left(\omega_0^2 C\right) = 9.09 \text{ мГн}.$$

Итак, заданная частотная характеристика реализуется схемой




Отметим, что на практике, особенно в СВЧ-диапазоне, используются схемы фильтров, в которых развязывающие элементы отсутствуют. С методами расчета таких схем читатель может познакомиться самостоятельно [29].

**Реализация фильтров верхних частот.** Фильтр верхних частот (ФВЧ) предназначен для того, чтобы с малым ослаблением пропускать колебания, частоты которых превышают частоту среза $\omega_c$. Схема ФВЧ может быть получена непосредственно. если синтезирован ФНЧ с такой же частотой среза. Для этого в теории цепей используется прием, называемый *преобразованием частоты*.

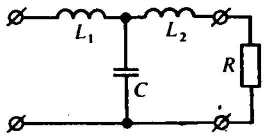
Перейдем от переменной $p$, которая использована для описания ФНЧ, к новой частотной переменной $p'$, такой, что

$$p = \omega_c^2 / p'. \qquad (13.55)$$

Здесь термин «преобразование частоты» не следует смешивать с тем, который используется в теории нелинейных и параметрических преобразований сигналов

При этом точке $p=0$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка в плоскости $p'$. Двум точкам $p_{1,2} = \pm j\omega_c$ на мнимой оси отвечают две точки $p'_{1,2} = \mp j\omega_c$, отличающиеся от исходных лишь измененными знаками. Поэтому можно ожидать. что АЧХ фильтра, синтезированного из ФНЧ путем частотного преобразования (13.55), будут действительно соответствовать ФВЧ.

Каждый конденсатор, имевший в схеме ФНЧ проводимость $pC$, должен быть заменен на элемент с проводимостью $\omega_c^2 C/p'$, т. е. на катушку с индуктивностью $L = 1/(\omega_c^2 C)$. Аналогично, катушка $L$ в низкочастотном фильтре должна быть заменена на конденсатор $C = 1/(\omega_c^2 L)$. Резистивные элементы фильтра остаются без изменения. Описанный здесь переход изображен на рис. 13.8.



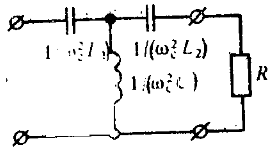




Рис. 13.8. Переход от схемы ФНЧ к схеме ФВЧ

**Реализация полосовых фильтров.** Полосовой фильтр (ПФ) с малым ослаблением пропускает лишь частоты в полосе, прилегающей к некоторой точке $\omega_0 \neq 0$. Если синтезирован ФНЧ с заданной частотой среза, то можно непосредственно перейти к схеме ПФ, выполнив замену переменной

Преобразование частоты связано с некоторой деформацией АЧХ синтезируемого фильтра, мало существенной, если фильтр узкополосен

$$p = p' + \frac{\omega_0^2}{p'}. \tag{13.56}$$

При этом точке $p' = j\omega_0$ отвечает точка $p = 0$ и, таким образом, максимум АЧХ, наблюдавшийся в схеме ФНЧ на нулевой частоте, будет возникать в схеме ПФ на частоте $\omega_0$. Поскольку

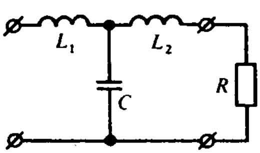
$$pC = p'C + \frac{\omega_0^2 C}{p'},$$

то проводимости конденсатора, примененного в схеме низкочастотного фильтра, отвечает в схеме ПФ проводимость параллельного колебательного контура, образованного конденсатором $C$ и катушкой с индуктивностью $L = 1/(\omega_0^2 C)$. Заметим, что данный контур оказывается настроенным на частоту $\omega_0$.

Аналогично, из равенства

$$pL = p'L + \frac{\omega_0^2 L}{p'}$$

заключаем, что катушка $L$ превращается в последовательное соединение этой же катушки и конденсатора $C = 1/(\omega_0^2 L)$, т. е. в последовательный колебательный контур, настроенный на частоту $\omega_0$ (рис. 13.9).



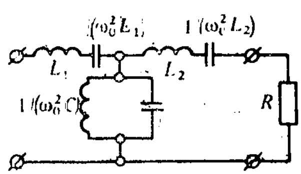




Рис. 13.9. Переход от схемы ФНЧ к схеме ПФ

Рассмотренные здесь примеры показывают, что ФНЧ служит основным объектом при синтезе частотно-избирательных цепей, так называемым *фильтром-прототипом*, параметры которого дают возможность перейти в дальнейшем к схемам любых других фильтров.

● **фильтр-прототип**

## Результаты

◇◇ *Нули и полюсы входного сопротивления устойчивого линейного двухполюсника располагаются в левой полуплоскости комплексной частоты и образуют комплексно-сопряженные пары.*

◇◇ *Количества нулей и полюсов входного сопротивления пассивного двухполюсника отличаются не более чем на единицу.*

◇◇ *Вещественная и мнимая части входного сопротивления двухполюсника связаны преобразованиями Гильберта, если данный двухполюсник принадлежит к классу цепей минимального сопротивления.*

◇◇ *Входное сопротивление реактивного двухполюсника является неубывающей функцией частоты (теорема Фостера).*

◇◇ *Синтез двухполюсника по заданному входному сопротивлению осуществляется в рамках заданной структуры цепи. Различают синтез по Фостеру (представление сопротивления или проводимости в виде суммы элементарных частей) и синтез по Кауэру (представление входной функции посредством цепной дроби).*

◇◇ *Полюсы передаточной функции устойчивого четырехполюсника располагаются только в левой полуплоскости.*

◇◇ *Нули передаточной функции устойчивого четырехполюсника могут располагаться в правой полуплоскости (неминимально-фазовые цепи).*

◇◇ *Нули и полюсы частотного коэффициента передачи мощности располагаются в квадратной симметрии.*

◇◇ *Полюсы передаточной функции ФНЧ с максимально-плоской характеристикой находятся на окружности, радиус которой равен значению частоты среза.*

◇◇ *ФНЧ с чебышевской характеристикой имеет полюсы, расположенные на эллипсе, эксцентриситет которого определяется коэффициентом неравномерности АЧХ.*

◇◇ *Реализация фильтров верхних частот и полосовых фильтров проводится на основании найденной заранее схемы ФНЧ, играющего роль фильтра-прототипа.*

## Вопросы

1. Напишите характеристические уравнения двухполюсника в режиме холостого хода и короткого замыкания.
2. Каким свойством обладает положительная вещественная функция?
3. Какие двухполюсники называются цепями минимального сопротивления?
4. Перечислите основные свойства нулей и полюсов реактивных двухполюсников.
5. Приведите пример лестничной цепи и покажите способ записи ее входного сопротивления (проводимости) в виде цепной дроби.
6. Какие двухполюсники носят название канонических цепей?

7. Какими функциями цепи принято описывать четырехполюсники?
8. Почему передаточная функция устойчивого четырехполюсника должна иметь нуль в бесконечно удаленной точке?
9. Почему любой четырехполюсник с лестничной структурой является минимально-фазовой цепью?
10. Какова связь между АЧХ и ФЧХ четырехполюсника минимально-фазового типа?
11. Каково техническое назначение неминимально-фазовых цепей?
12. Как располагаются полюсы передаточной функции ФНЧ с характеристикой Баттерворса?
13. Объясните, почему многочлены Чебышева удобны для аппроксимации характеристик ФНЧ.
14. В чем заключена разница между свойствами фильтров Чебышева и Баттерворса?
15. Каков принцип структурного синтеза фильтров?
16. Приведите формулы преобразования частотной переменной, обеспечивающие переход от ФНЧ к ФВЧ и ПФ.

## Задачи

1. Проверьте формулу (13.16) применительно к параллельной $RC$-цепи, рассмотренной в примере 13.1.
2. Покажите, что функция

$$Z(p) = \frac{(p^2+1)(p^2+5)}{p(p^2+3)(p^2+7)}$$

является входным сопротивлением реализуемого чисто реактивного двухполюсника.
3. Реализуйте цепь Фостера, имеющую входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{p(p^2+4)}{p^2+1}.$$

4. Реализуйте две цепи Кауэра, входные сопротивления которых заданы в условиях задачи 3.
5. Докажите, что первые $n-1$ производные от коэффициента передачи мощности фильтра Баттерворса $n$-го порядка при $\omega_н=0$ обращаются в нуль.
6. Фильтр с максимально-плоской характеристикой имеет частоту среза 10 кГц. Ослабление гармонического сигнала при переходе с частоты 80 кГц к частоте 160 кГц возрастает на —36 дБ. Найдите порядок фильтра.
7. Вычислите передаточную функцию фильтра Баттерворса 4-го порядка.
8. Фильтр с чебышевской характеристикой имеет коэффициент $\varepsilon=0.3$. Какова неравномерность АЧХ этого фильтра при $\omega_н<1$, выраженная в децибелах?
9. Вычислите передаточную функцию фильтра 2-го порядка с чебышевской характеристикой при $\varepsilon=0.5$.
10. Покажите, что в схеме звена 2-го порядка изменение сопротивления резистора $R$ ведет к перемещению комплексно-сопряженных полюсов передаточной функции по окружности радиуса $\omega_0$. Исследуйте также случай $\alpha>\omega_0$.
11. Реализуйте схему ФНЧ с максимально-плоской характеристикой 2-го порядка при частоте среза $\omega_c=10^6$ 1/с. Нагрузкой фильтра служит резистор $R_н=20$ кОм. Находя номиналы элементов фильтра, обратите внимание на практическую выполнимость цепи.
12. Найдите координаты полюсов передаточной функции чебышевского ФНЧ 3-го порядка с параметрами $\omega_c=4\cdot10^4$ 1/с, $\varepsilon=0.5$.
13. Реализуйте схему фильтра, рассмотренного в задаче 12, путем каскадного включения звеньев 1-го и 2-го порядков. Нагрузочное сопротивление фильтра $R_н=2$ кОм.

## Более сложные задания

14. Вещественная часть входного сопротивления равна

$$\frac{100}{1+10^{-12}\omega^2+10^{-24}\omega^4}.$$

Найдите выражение полного входного сопротивления и соответствующую схему.
15. Исследуйте входное сопротивление полубесконечной лестничной цепи с периодической структурой из элементов $Z(p)$.

16. Система, осуществляющая идеальную задержку сигналов на $T$ секунд, имеет передаточную функцию

$$K(p) = \exp(-pT) = \frac{1}{1+pT+(pT)^2/2!+\ldots}.$$

Исследуйте возможность приближенной замены этой характеристики дробно-рациональной функцией с различным порядком знаменателя. Найдите полюсы передаточной функции в 1, 2 и 3-м приближениях.

17. Исследуйте фазочастотную характеристику ФНЧ с передаточной функцией максимально-плоского типа. Выведите формулы для группового времени запаздывания при $\omega=0$ и $\omega=\omega_c$.

18. Вычислите импульсные характеристики ФНЧ 2-го порядка с максимально-плоскими и чебышевскими АЧХ.

19. Выведите асимптотическую формулу, определяющую в логарифмических единицах скорость изменения ослабления, вносимого чебышевским ФНЧ на частотах, значительно превышающих частоту среза.

# Глава 14
# Активные цепи с обратной связью и автоколебательные системы

В данной главе изучается особый класс активных линейных и нелинейных цепей, характерный тем, что выходной сигнал или некоторая часть его снова поступает на вход. Такие цепи принято называть *цепями с обратной связью.*

Введение обратной связи позволяет в ряде случаев существенно улучшить рабочие характеристики цепей. При определенных условиях цепь с обратной связью становится неустойчивой и в ней возникают автоколебания. На этом принципе построены различные автоколебательные системы, прежде всего, автогенераторы гармонических колебаний, которые являются неотъемлимым элементом любого радиопередающего устройства.

## 14.1 Передаточная функция линейной системы с обратной связью

Для того чтобы сделать последующий анализ применимым к большому числу различных частных случаев, рассмотрим проблему цепи с обратной связью в самой общей постановке, не конкретизируя физический характер входных и выходных сигналов.

**Вывод основного соотношения.** Будем изучать линейную систему, структурная схема которой приведена на рис. 14.1.

Система состоит из двух четырехполюсников. Активный четырехполюсник, имеющий передаточную функцию $K(p)$, называется *основным элементом* системы. Другой, как правило.

● основной элемент и элемент обратной связи

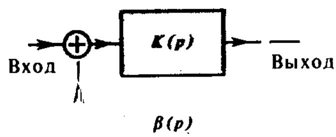



Рис. 14.1. Структурная схема линейной системы с обратной связью

пассивный четырехполюсник с передаточной функцией $\beta(p)$ называется *элементом обратной связи*. Стрелки на рисунке указывают направления движения сигналов в системе.

На входе основного элемента имеется звено, суммирующее входной сигнал и выходную реакцию элемента обратной связи. Если $U_{вх}(p)$ и $U_{вых}(p)$ — изображения входного и выходного сигналов соответственно, то, как легко видеть,

$$U_{вых}(p) = K(p)\,[\,U_{вх}(p) + \beta(p)U_{вых}(p)\,]. \qquad (14.1)$$

Отсюда непосредственно следует формула, определяющая передаточную функцию системы, охваченной обратной связью:

$$K_{ос}(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \boxed{\frac{K(p)}{1-\beta(p)K(p)}}. \qquad (14.2)$$

В соответствии с этой формулой частотные свойства системы в равной мере зависят как от функции $K(p)$, так и от характеристики $\beta(p)$ цепи обратной связи. Поэтому можно, оставляя неизменным основной элемент системы, в широких пределах варьировать частотную характеристику всего устройства, изменяя лишь параметры элемента обратной связи.

**Отрицательная и положительная обратные связи.** Рассмотрим формулу (14.2) при $p=j\omega$. Частотный коэффициент передачи системы с обратной связью

$$K_{ос}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1-\beta(j\omega)K(j\omega)}. \qquad (14.3)$$

Если на заданной частоте $\omega$

$$\boxed{|1-\beta(j\omega)K(j\omega)| > 1,} \qquad (14.4)$$

то введение обратной связи уменьшает модуль коэффициента передачи системы и, следовательно, амплитуду выходного сигнала. Такую обратную связь принято называть *отрицательной* (ООС). Если имеет место обратное неравенство

$$\boxed{|1-\beta(j\omega)K(j\omega)|<1,} \tag{14.5}$$

то в системе наблюдается *положительная обратная связь* (ПОС).

Иногда не вводят термины ООС и ПОС и говорят о более широком понятии комплексной ОС. В этом случае указывается величина фазового сдвига сигнала в элементе обратной связи

Как отрицательная, так и положительная обратные связи широко используются при создании радиотехнических устройств. Однако следует иметь в виду, что положительная обратная связь может явиться причиной неустойчивости системы. Действительно, пусть, например, $\beta=\beta_0$ и $K=K_0$ — положительные вещественные числа. Если $\beta_0$ вначале равно нулю, а затем увеличивается, то в соответствии с (14.3) при этом возрастает коэффициент усиления $K_{oc}$; если же $\beta_0$ становится равным $1/K_0$, то $K_{oc}=\infty$, что означает самовозбуждение системы — появление выходного сигнала при отсутствии сигнала на входе.

Применение ООС дает возможность существенно улучшить частотные характеристики усилительных устройств. Продемонстрируем конкретные примеры технических задач, когда целесообразно использовать ООС.

**Стабилизация коэффициента усиления.** Предположим, что имеется усилитель с большим, но недостаточно стабильным коэффициентом усиления $K_0$. Требуется создать на его базе усилительное устройство с меньшей нестабильностью коэффициента усиления. Охватив усилитель петлей ООС, т. е. взяв $\beta(j\omega)=-\beta_0<0$, на основании (14.3) имеем

$$K_{oc}=K_0/(1+\beta_0 K_0),$$

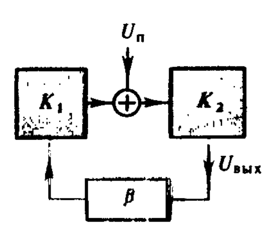
откуда

$$\frac{dK_{oc}}{K_{oc}}=\frac{1}{1+\beta_0 K_0}\,\frac{dK_0}{K_0}. \tag{14.6}$$

▲ решите задачу 2

Если $\beta_0 K_0 \gg 1$, то относительная нестабильность результирующего коэффициента усиления падает примерно в $\beta_0 K_0$ раз. Правда, во столько же раз уменьшается и сам коэффициент усиления, но это, как правило, не вызывает дополнительных трудностей, так как всегда можно получить нужное усиление за счет включения дополнительных каскадов.

**Подавление паразитных сигналов.** Пусть основной элемент усилителя представляет собой каскадное включение двух звеньев с коэффициентами усиления $K_1$ и $K_2$; в точку их соединения подводится некоторый нежелательный паразитный сигнал с напряжением $U_п$. Усилитель в целом охвачен кольцом ООС с коэффициентом $\beta$. Требуется найти коэффициент усиления $K_п=U_{вых}/U_п$, характеризующий эффективность передачи паразитного сигнала на выход.



Поскольку, очевидно,

$$U_{\text{вых}} = K_2(U_{\text{п}} - \beta K_1 U_{\text{вых}}),$$

то

$$K_{\text{п}} = U_{\text{вых}}/U_{\text{п}} = K_2/(1+\beta K_1 K_2). \tag{14.7}$$

Отсюда видно, что паразитный сигнал, «проникающий» в систему в точке, близкой к ее выходу, т. е. при $K_2 \ll K_1$, будет существенно ослаблен. На этом эффекте основан способ борьбы с нелинейными искажениями в многокаскадных усилителях (рис. 14.2).

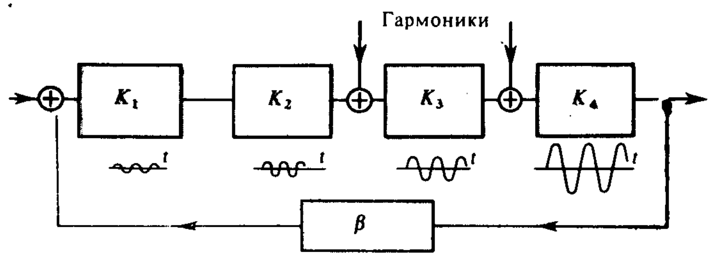



Рис. 14.2. Подавление высших гармоник в многокаскадном усилителе с ООС

Коэффициент нелинейных искажений в высококачественных усилителях составляет доли процента

Как известно, нелинейные искажения (см. гл. 11) проявляются в возникновении высших гармоник частоты сигнала из-за нелинейности характеристики активных элементов. Уровень гармоник тем выше, чем больше амплитуда сигнала. Мысленно можно представить себе, что паразитные сигналы гармоник как бы вводятся в систему извне, причем главным образом в последних мощных каскадах усилителя. На основании (14.7) делаем вывод о том, что ООС может значительно уменьшить уровень гармоник на выходе. Поэтому практически любые усилители, предназначенные для высококачественного воспроизведения сигналов звуковых частот (радиовещание, звукозапись), строятся с применением ООС.

**Коррекция частотной характеристики.** Рассмотрим однокаскадный транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой, имеющий передаточную функцию (см. (8.43))

$$K(p) = -K_0/(1+p\tau_{\text{экв}}), \tag{14.8}$$

где $K_0 = SR_{\text{экв}}$, $\tau_{\text{экв}} = R_{\text{экв}} C_{\text{п}}$.

На нулевой частоте коэффициент передачи отрицателен:

$$K(0) = -K_0.$$

Охватив этот усилитель цепью частотно-независимой обратной связи с вещественным положительным параметром $\beta(j\omega) = \beta_0$, будем на основании (14.2) иметь

$$K_{oc}(0) = -K_0/(1+\beta_0 K_0).$$

Поскольку $1+\beta_0 K_0 > 1$, то в данном случае обратная связь будет отрицательной. Легко проверить, что отрицательный характер обратной связи сохранится на всех частотах, поскольку

$$|1-\beta_0 K(j\omega)| = \left|1+\frac{\beta_0 K_0}{1+j\omega\tau_{экв}}\right| > 1$$

Отрицательный характер обратной связи определяется знаком коэффициента усиления на нулевой частоте

при любой частоте $\omega > 0$. Подставив (14.8) в общую формулу (14.2), получаем следующее выражение для передаточной функции усилителя с ООС:

$$K_{oc}(p) = \frac{-K_0}{(1+\beta_0 K_0) + p\tau_{экв}}, \tag{14.9}$$

откуда следует уравнение АЧХ

$$|K_{oc}(j\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{(1+\beta_0 K_0)^2 + \omega^2\tau^2_{экв}}}. \tag{14.10}$$

На рис. 14.3 приведено семейство частотных характеристик усилителей с различными уровнями ООС, которые устанавливаются величиной параметра

$$d = \beta_0 K_0. \tag{14.11}$$

Приведенный рисунок указывает на главный эффект — ООС ведет к «выравниванию» АЧХ усилителя за счет снижения усиления на низких частотах. Вследствие этого расширяется эффективная полоса пропускания усилителя. Так, на основании

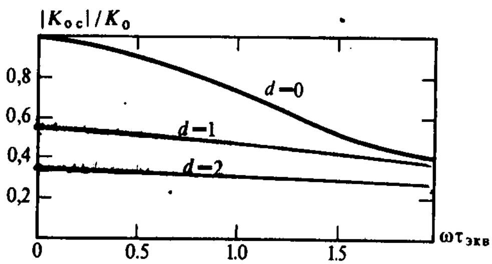
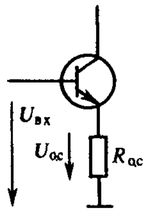



Рис. 14.3. Амплитудно-частотные характеристики однокаскадного усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой при различных уровнях ООС

(14.10) граничная частота $\omega_{гр}$, определяемая по спаду АЧХ до уровня 0.707 $K_0$, равна

$$\omega_{гр} = (1 + \beta_0 K_0)/\tau_{экв} \tag{14.12}$$

и линейно возрастает с увеличением уровня ООС.




Простейший способ создания ООС в однокаскадном усилителе заключается в том, что в цепь эмиттера включается добавочный резистор обратной связи $R_{ос}$. Увеличение входного напряжения вызывает рост тока эмиттера и, как следствие, возрастание напряжения $U_{ос}$ на резисторе обратной связи. Поэтому управляющее напряжение транзистора

$$U_{бэ} = U_{вх} - U_{ос},$$

т. е. в данной схеме действительно возникает ООС.

▲ решите задачу 3

**Положительная обратная связь в резонансном усилителе.** Рассмотрим однокаскадный резонансный усилитель малых колебаний с частотным коэффициентом передачи

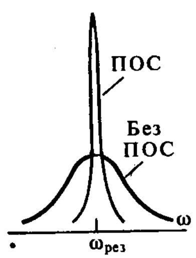
Рассматривается только область положительных частот

$$K(j\omega) = \frac{-K_{рез}}{1 + j\tau_к(\omega - \omega_{рез})}, \tag{14.13}$$

где $K_{рез} = SR_{рез}$, $\tau_к = 2Q/\omega_{рез}$ — постоянная времени контура.

Представим, что этот усилитель охвачен цепью частотно-независимой ПОС с параметром $\beta_0$, так что

$$K_{ос}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 + \beta_0 K(j\omega)} = \frac{\dfrac{-K_{рез}}{1 - \beta_0 K_{рез}}}{1 + j\dfrac{\tau_к}{1 - \beta_0 K_{рез}}(\omega - \omega_{рез})}. \tag{14.14}$$

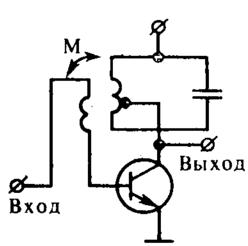



Влияние ПОС на АЧХ усилителя

Сравнивая (14.13) и (14.14), видим, что при $\beta_0 K_{рез} < 1$ форма частотной характеристики усилителя с ПОС такая же, как и усилителя без обратной связи. Однако в системе с ПОС наблюдается увеличение резонансного коэффициента усиления в $1/(1 - \beta_0 K_{рез})$ раз; во столько же раз возрастает эквивалентная добротность колебательного контура усилителя

$$Q_{экв. ос} = Q_{экв}/(1 - \beta_0 K_{рез})$$

и соответственно сокращается полоса пропускания.




Эти явления связаны с тем, что за счет ПОС происходит регенерация, т. е. частичная компенсация потерь в колебательном контуре. Энергия на регенерацию потребляется от источника питания.

Для создания ПОС в резонансном усилителе можно применять катушку, включенную последовательно во входную цепь и индуктивно связанную с колебательным контуром.

Несмотря на ряд очевидных достоинств, схема резонансного усилителя с ПОС применяется редко из-за склонности таких усилителей к самовозбуждению, наступающему при $\beta_0 K_{рез} \to 1$.

**Запаздывающая обратная связь.** На рис. 14.4 изображена структурная схема системы, в которой цепь обратной связи помимо масштабного усилительного звена с постоянным коэффициентом передачи $\beta_0$ содержит идеальное устройство задержки сигналов на отрезок времени $\tau_0$.

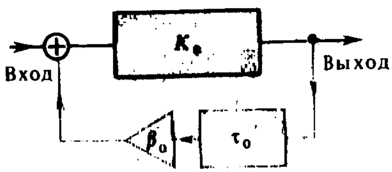


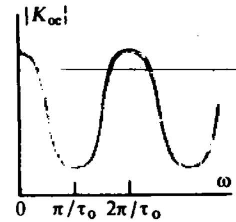

Рис. 14.4. Структурная схема системы с запаздывающей обратной связью

Пусть коэффициент передачи основного элемента $K_0$ не зависит от частоты. Тогда

$$K_{ос}(j\omega) = \frac{K_0}{1 - \beta_0 K_0 e^{-j\omega\tau_0}}. \tag{14.15}$$

АЧХ данной системы

$$|K_{ос}(j\omega)| = \frac{K_0/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \beta_0 K_0 \cos \omega\tau_0}}. \tag{14.16}$$




АЧХ гребенчатого фильтра

Если $\beta_0 K_0 < 1$, то система устойчива. Ее частотная характеристика описывается периодической кривой с чередующимися максимумами и минимумами, т. е. характер обратной связи оказывается различным на разных частотах.

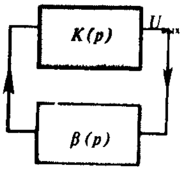
Запаздывающая обратная связь позволяет создавать частотно-избирательные системы с периодическими АЧХ, так называемые *гребенчатые фильтры*. Отметим, что системы этого вида способны к самовозбуждению при $\beta_0 K_0 \to 1$.

## 14.2 Устойчивость цепей с обратной связью

В этом параграфе будет рассмотрен вопрос об устойчивости состояния равновесия системы с обратной связью.

Цель — подтвердить те качественные рассуждения о возможности самовозбуждения систем с ПОС, которые приводились выше.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему, образованную активным основным элементом с передаточной функцией $K(p)$;




выход этого элемента соединен со входом посредством звена обратной связи с передаточной функцией $\beta(p)$. Полагаем, что внешний входной сигнал не подается, т. е. система автономна.

Уравнение состояния записывается на основании того, что

$$U_{вых}(p) = K(p)\beta(p)U_{вых}(p),$$

откуда

$$(1-\beta(p)K(p))U_{вых}(p) = 0. \tag{14.17}$$

Поскольку $U_{вых}(p) \neq 0$ тождественно (в противном случае система не была бы возбуждена), то равенство (14.17) будет иметь место лишь при тех значениях $p$, которые являются корнями характеристического уравнения

характеристическое уравнение системы с обратной связью

$$1-\beta(p)K(p) = 0. \tag{14.18}$$

Пусть $p_1$, $p_2$, ... — корни этого уравнения. Поскольку рассматриваемая система линейна, выходной сигнал будет в общем случае иметь вид

$$u_{вых}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots \tag{14.19}$$

Для того чтобы этот сигнал был ограниченным, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, т. е. располагались в левой полуплоскости переменной $p$. Цепь с обратной связью, обладающая такими свойствами, будет абсолютно устойчива в том смысле, речь о котором шла в гл. 8.

При исследовании систем с обратной связью могут возникать две проблемы. Если синтезируемая цепь, например усилитель, обязана быть устойчивой, то необходимо располагать критерием, который позволил бы по виду функций $\beta(p)$ и $K(p)$ судить об отсутствии корней характеристического уравнения в правой полуплоскости. Если, наоборот, обратная связь используется для создания неустойчивой автоколебательной системы, то следует знать корни уравнения (14.18), определяющие частоту, на которой произойдет самовозбуждение.

В данном параграфе будет изучаться первая из поставленных проблем. Отметим, что полученные здесь выводы касаются не только устойчивости систем с обратной связью, но также устойчивости любой линейной динамической системы.

**Алгебраические критерии устойчивости.** Предположим, что как основной элемент, так и элемент обратной связи являются цепями с сосредоточенными параметрами и поэтому

$$K(p) = P_1(p)/Q_1(p); \quad \beta(p) = P_2(p)/Q_2(p) \tag{14.20}$$

— отношения многочленов по степеням $p$. Подставив (14.20) в (14.18), получаем характеристическое уравнение системы в виде

$$\frac{Q_1(p)Q_2(p)-P_1(p)P_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)}=0. \tag{14.21}$$

Отсюда следует, что система с обратной связью будет устойчивой, если все корни уравнения

многочлены Гурвица

$$H(p)=Q_1(p)Q_2(p)-P_1(p)P_2(p)=0$$

имеют отрицательные вещественные части. В алгебре многочлены $H(p)$ с такими свойствами называют многочленами Гурвица.

Рассмотрим частный случай многочлена Гурвица $H(p)=$ $=(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)$, имеющего три корня, один из которых $p_1=-\alpha_1$ — вещественный и отрицательный, а два других $p_{2,3}=$ $=-\beta\pm j\omega_0$ — сопряженные комплексные числа с отрицательной вещественной частью. Прямая подстановка корней показывает, что данный многочлен

$$H(p)=(p+\alpha)[(p+\beta)^2+\omega_0^2]=p^3+(\alpha+2\beta)p^2+(\beta^2+2\alpha\beta+\omega_0^2)p+$$
$$+\alpha(\beta^2+\omega_0^2)$$

содержит все степени переменной $p$, начиная со старшей, и имеет коэффициенты одного знака. Этот признак указывает лишь необходимые условия для того, чтобы многочлен был многочленом Гурвица. Полное решение задачи было получено в конце прошлого века и нашло отражение в известном *критерии Рауса — Гурвица*. С доказательством критерия можно ознакомиться по [11]. Приведем окончательную формулировку: для того чтобы уравнение

критерий Рауса — Гурвица

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0=0$$

с вещественными коэффициентами имело корни, лежащие лишь в левой полуплоскости переменной $p$, необходимо и достаточно, чтобы были положительными следующие величины:

1) коэффициенты $a_n$, $a_0$,

2) определитель Рауса—Гурвица

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\ldots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2}\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots & \ldots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

и все его главные миноры.

**Пример 14.1.** *Проверить с помощью критерия Рауса — Гурвица устойчивость системы, характеристическое уравнение которой имеет вид*
$p^3 + 2p^2 + 6p + 4 = 0.$

Убеждаемся что $a_3, a_0 > 0$. Составляем определитель:

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0$; единственный главный минор $2 > 0$.

Таким образом, система устойчива. ▲

решите задачу 6

Достоинство критерия Рауса — Гурвица — относительная простота вычислений. Недостаток же заключается в том, что область применимости этого критерия ограничена цепями с сосредоточенными параметрами, поскольку только для них передаточная функция выражается через многочлены.

**Геометрические критерии устойчивости.** Возвращаясь вновь к характеристическому уравнению (14.18), заметим, что произведение

$$w(p) = \beta(p) K(p) \tag{14.22}$$

есть не что иное, как передаточная функция каскадного соединения двух звеньев — основного звена и звена обратной связи. Обычно $w(p)$ называют передаточной функцией системы с разомкнутой обратной связью.

Геометрические критерии устойчивости называют также частотными критериями

Функцию вида (14.22) можно рассматривать как отображение комплексной плоскости $p$ на другую комплексную плоскость $w$. Если $p_1$, $p_2$, ... — корни характеристического уравнения

$$1 - \beta(p) K(p) = 0,$$

то, как легко видеть, в плоскости $w$ всем этим точкам будет соответствовать единственная точка $w = 1$.

Отсюда немедленно вытекает принцип, позволяющий судить о возможности самовозбуждения системы с обратной связью: если образ правой полуплоскости переменной $p$ при отображении вида (14.22) содержит точку $w = 1$, то система с замкнутой обратной связью неустойчива.

Важную роль играет кривая в плоскости $w$, являющаяся образом мнимой оси плоскости $p$. Уравнение этой кривой в параметрической форме таково:

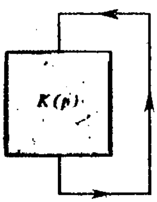
$$w(j\omega) = \beta(j\omega) K(j\omega). \tag{14.23}$$

Роль параметра играет частота $\omega$, которая изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Данная кривая называется *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ) разомкнутой системы. Во всех случаях, представляющих практический интерес, модули частотных коэффициентов передачи стремятся к нулю с ростом частоты. Поэтому АФХ проходит через точку $w=0$. Кроме того, АФХ симметрична относительно вещественной оси в плоскости $w$, поскольку $w(-j\omega)=w^*(j\omega)$. Ясно, что АФХ для рассматриваемых систем представляет собой замкнутые кривые в плоскости $w$.

амплитудно-фазовая характеристика

В теории функций комплексного переменного показано [11], что при отображении (14.22) образом правой полуплоскости оказывается внутренняя область, охватываемая кривой АФХ. Критерий устойчивости, вытекающий из описанного построения, известен под названием *критерия Найквиста*: если АФХ разомкнутой системы охватывает точку с координатами (0, 1), то замкнутая система неустойчива.

критерий Найквиста




**Пример 14.2.** *Исследовать вопрос устойчивости однокаскадного усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой, выход которого непосредственно соединен со входом.*

Здесь, очевидно, $\beta(p)=1$, в то время как

$$K(p) = -K_0/(1+p\tau),$$

где $K_0=SR_{экв}$, $\tau=R_{экв}C_п$ (см. гл. 8).

Уравнение АФХ имеет вид

$$w(j\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\exp\left(j\left(\pi - \operatorname{arctg}\omega\tau\right)\right). \tag{14.24}$$

Чертеж амплитудно-фазовой характеристики, построенный в соответствии с (14.24), приведен на рис. 14.5.

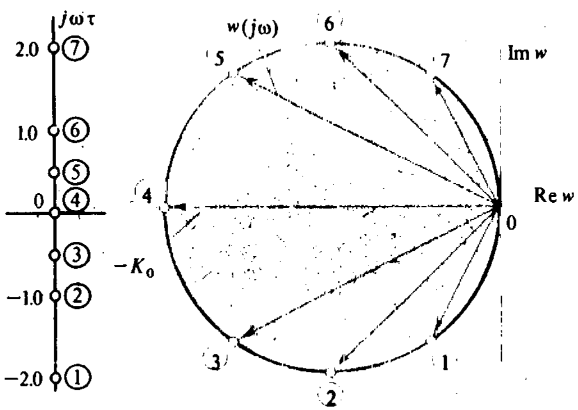
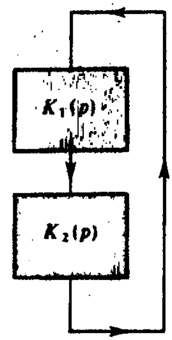



Рис. 14.5. Амплитудно-фазовая характеристика однокаскадного усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой (номера указывают соответствие точек на оси $j\omega$ и на АФХ усилителя)

Как видно из рисунка, АФХ рассматриваемой системы представляет собой окружность с диаметром, равным $K_0$. Верхней полуокружности отвечает положительная часть оси $j\omega$; с ростом частоты модуль частотного коэффициента передачи уменьшается, а фазовый угол стремится к 90°.

Поскольку замкнутая кривая АФХ целиком находится в левой полуплоскости и не охватывает точку $w=1$, то при соединении выхода данного усилителя со входом система устойчива.




**Пример 14.3.** *Изучить с помощью критерия Найквиста устойчивость двухкаскадного усилителя с апериодическими нагрузками, передаточная функция которого*

$$K(p) = K_1(p)\,K_2(p) = K_{01}K_{02}/(1+p\tau)^2. \qquad (14.25)$$

Здесь для простоты предположено, что постоянные времени обоих каскадов одинаковы; коэффициенты усиления на нулевой частоте $K_{01}$ и $K_{02}$ в общем случае могут быть различными.

Проведя замену переменной $p=j\omega$ в (14.25), получаем уравнение АФХ

$$w(j\omega) = \frac{K_{01}K_{02}}{(1+j\omega\tau)^2} = \frac{K_{01}K_{02}}{1+\omega^2\tau^2}\exp(-j2\operatorname{arctg}\omega\tau). \qquad (14.26)$$

Вид АФХ данного усилителя показан на рис. 14.6.

▲ решите задачу 7

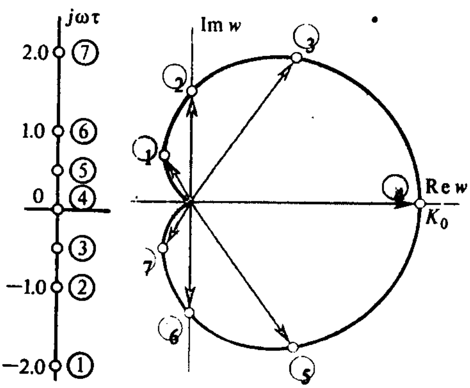



Рис. 14.6. Амплитудно-фазовая характеристика двухкаскадного усилителя с апериодическими нагрузками

Если коэффициент усиления разомкнутой системы на нулевой частоте $K_0=K_{01}K_{02}>1$, то при замыкании цепи обратной связи система становится неустойчивой, т. к. точка $w=1$ будет находиться внутри замкнутой кривой АФХ.

▲ решите задачу 8

Помимо критерия Найквиста известен ряд других геометрических методов исследования устойчивости линейных систем с обратной связью, например критерий Михайлова и критерий пересечений [37]. Они широко применяются при анализе систем автоматического регулирования.

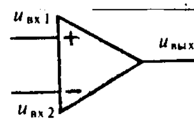
## 14.3 Активные $RC$-фильтры

На современном этапе развития радиотехники и радиоэлектроники многие схемные решения, ранее применявшиеся повсеместно, претерпели коренной пересмотр из-за широкого внедрения микроэлектронных устройств. В значительной степени это коснулось теории и практики построения частотно-избирательных фильтров.

Было выяснено, что создать катушку индуктивности в микроэлектронном исполнении практически невозможно. Однако для реализации обычных колебательных звеньев 2-го порядка необходимо располагать индуктивными элементами (см. гл. 13). Выход из этого положения был найден после того, как были разработаны так называемые активные $RC$-фильтры. Они представляют собой комбинацию пассивной $RC$-цепи и активного элемента — как правило, сложной транзисторной схемы, которая передает в пассивную цепь некоторую мощность, отбираемую от источника питания.

В этом параграфе будет рассмотрен один из возможных принципов построения активных $RC$-фильтров, когда в качестве активного элемента используется операционный усилитель.

**Операционный усилитель.** Так принято называть усилительное устройство с большим коэффициентом усиления $K_0$ в широкой полосе частот, начиная с нулевой частоты. Входное сопротивление операционного усилителя весьма велико (на практике десятки или сотни килоом), а выходное сопротивление достаточно мало (десятки ом.) Поэтому приближенно операционный усилитель (ОУ) можно рассматривать как источник напряжения, управляемый напряжением. Такая модель активного управляемого элемента часто используется в теории цепей. Современные ОУ имеют коэффициенты $K_0 \approx 10^4 \div 10^5$. Как правило микросхемы ОУ снабжены двумя входами: инвертирующим (—) и неинвертирующим (+). Если $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$ — напряжения входного сигнала на неинвертирующем и инвертирующем входах соответственно, то выходное напряжение

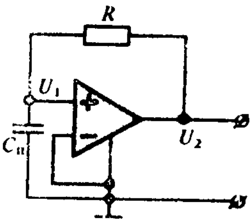



Операционный усилитель

$$u_{вых} = K_0(u_{вх1} - u_{вх2}). \tag{14.27}$$

Операционный усилитель — одна из наиболее широко применяемых аналоговых интегральных микросхем.

**Устойчивость систем с операционными усилителями.** Если в системе, содержащей ОУ, имеется обратная связь, то возможно появление неустойчивых режимов. Рассмотрим, например, систему, в которой выход ОУ соединен с неинвертирующим




Сигнал на инвертирующем входе равен нулю

входом через резистор $R$. Пусть $C_п$ — паразитная емкость входа усилителя. Поскольку входное сопротивление усилителя бесконечно велико, изображение входного напряжения $U_1(p)$ связано с изображением выходного напряжения $U_2(p)$ простым соотношением

$$U_1 = U_2 \frac{\frac{1}{pC_п}}{\frac{1}{pC_п} + R}.$$

Но в то же время $U_1 = U_2/K_0$. Одновременное выполнение этих двух равенств возможно лишь тогда, если $p$ служит корнем характеристического уравнения

$$1/(1 + pRC_п) = 1/K_0,$$

т. е. $p = (K_0 - 1)/(RC_п)$. Таким образом, при $K_0 > 1$ система неустойчива; напряжения в схеме нарастают во времени по закону $\exp((K_0 - 1)\,t/(RC_п))$.

Ясно, что схема, в которой выход ОУ соединен через резистор с инвертирующим входом, является устойчивой.

**Принцип построения активных $RC$-цепей.** Рассмотрим в достаточно общей постановке один из способ создания активного фильтра на базе операционного усилителя (рис. 14.7). Этот принцип охватывает большое число схем, применяемых на практике.

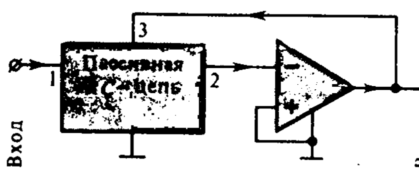



Рис. 14.7. Схема активной $RC$-цепи с использованием операционного усилителя

Пассивная часть устройства представлена в виде шестиполюсника из элементов $R$ и $C$. Зажим *1* служит входом; между зажимами *2* и *3* включен ОУ, в котором использован инвертирующий вход.

Эта схема является частным случаем системы с обратной связью, речь о которых шла в начале этой главы. Для того чтобы найти передаточную функцию рассматриваемой системы, опишем пассивный шестиполюсник с помощью его $Y$-матрицы:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + Y_{13}U_3, \\
I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + Y_{23}U_3, \qquad (14.28) \\
I_3 &= Y_{31}U_1 + Y_{32}U_2 + Y_{33}U_3.
\end{aligned}
$$

Если $K_0$ — коэффициент усиления ОУ, то $U_3 = -K_0U_2$. Входная цепь ОУ не потребляет тока, и поэтому на основании второго уравнения из (14.28)

Принимается во внимание, что в ОУ использован инвертирующий вход

$$0 = Y_{21}U_1 + \left(Y_{23} - \frac{Y_{22}}{K_0}\right)U_3,$$

откуда передаточная функция системы

$$K(p) = \frac{U_3}{U_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{23} - Y_{22}/K_0}.$$

Считая, что $K_0 \gg 1$, находим окончательно

$$\boxed{K(p) = -Y_{21}/Y_{23}} \qquad (14.29)$$

Итак, передаточная функция активного *RC*-фильтра зависит исключительно от свойств пассивной цепи; коэффициент усиления ОУ и другие его параметры из окончательного результата исключены. Поэтому создание систем с различными частотными характеристиками сводится к синтезу пассивных *RC*-цепей (в данном случае шестиполюсников) по заданным частотным характеристикам. В этой книге задачи синтеза шестиполюсников не рассматриваются. Поэтому мы пойдем по более простому пути — изучим некоторые конкретные системы с простой конфигурацией элементов, которые иллюстрируют схемотехнические возможности данного класса цепей.

**Масштабный усилитель.** Рассмотрим простейшую схему с ОУ, изображенную на рис. 14.8 и называемую масштабным усилителем.

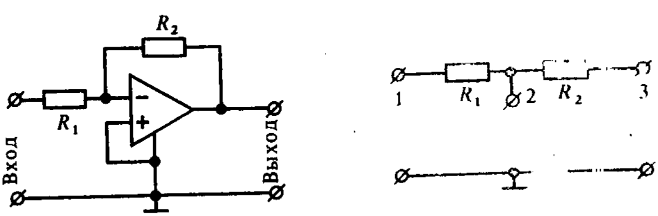



Рис. 14.8. Масштабный усилитель:

*а* — принципиальная схема устройства; *б* — схема пассивного шестиполюсника

Для того чтобы найти взаимные проводимости $Y_{21}$ и $Y_{23}$, обратимся ко второму уравнению из системы (14.28) и заметим, что, например, $Y_{21}=I_2/U_1$ при коротком замыкании на землю зажимов *2* и *3*, т. е. при $U_2=U_3=0$. Как видно из рис. 14.8,*б*, $Y_{21}=1/R_1$. Аналогично, $Y_{23}=1/R_2$. Подставляя эти выражения в (14.29), получаем

Если $R_1=R_2$, то данное устройство выполняет функцию инвертора входного сигнала

$$\boxed{K(p)=-R_2/R_1.} \tag{14.30}$$

Эта формула объясняет термин «масштабный усилитель»; оказывается, что в данной цепи подбором резисторов $R_1$ и $R_2$ можно обеспечить заданный масштабный коэффициент усиления. Естественно, что какая-либо частотная избирательность в этой схеме, не содержащей реактивных элементов, отсутствует.

**Аналоговый интегратор.** Если в цепи, рассмотренной выше, резистор $R_2$ заменить на конденсатор с емкостью $C$, то придем к схеме, выполняющей операцию электрического интегрирования входного сигнала (рис. 14.9).

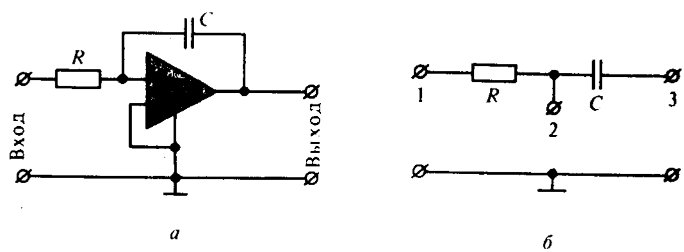



Рис. 14.9. Интегратор на базе операционного усилителя:
*а* — принципиальная схема; *б* — схема пассивного шестиполюсника

▲ решите задачу 10

Действительно, анализируя пассивную часть цепи, находим, что $Y_{21}=1/R$; $Y_{23}=pC$, откуда на основании (14.29) получаем

$$\boxed{K(p)=-1/(pRC).} \tag{14.31}$$

Данная формула подтверждает, что рассмотренное устройство с передаточной функцией, обратно пропорциональной $p$, выполняет интегрирование сигнала, подаваемого на вход.

**Фильтр нижних частот.** Для того чтобы варьировать частотные характеристики активных $RC$-фильтров, необходимо использовать пассивные цепи с бо́льшим числом элементов, чем это рассматривалось выше. Можно указать на удачный пример системы [33], имеющей свойства фильтра нижних частот (рис. 14.10).

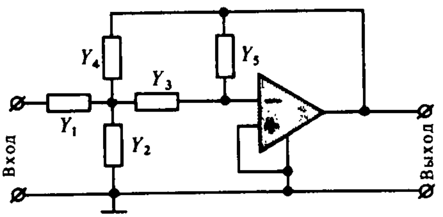



Рис. 14.10. Активный RC-фильтр нижних частот

Элементарный расчет, выполняемый так же, как это показывалось выше, приводит к следующему выражению для передаточной функции данной системы:

$$K(p)=\frac{-Y_1Y_3}{Y_5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+Y_3Y_4}. \tag{14.32}$$

Задача синтеза сводится, таким образом, к подбору проводимостей элементов, которые обеспечивают требуемый вид частотной характеристики. По исходному условию все проводимости $Y_1$ — $Y_5$ являются либо резисторами с некоторыми проводимостями $G$, либо конденсаторами, проводимости которых равны $pC$. Принципиально важно то, что передаточная функция активного фильтра выражается согласно (14.29) как отношение двух взаимных проводимостей $Y_{21}$ и $Y_{23}$. Полюсы функции $K(p)$ совпадают при этом с нулями функции $Y_{23}(p)$. В теории цепей показывается [27], что полюсы любой входной или передаточной функции пассивной RC-цепи могут лежать только на отрицательной части вещественной оси. Однако это ограничение не распространяется *на нули* соответствующих функций, которые в виде комплексно-сопряженных пар могут располагаться в любой части левой полуплоскости переменной $p$. Таким образом, объединяя пассивную RC-цепь и операционный усилитель, можно создать колебательное звено 2-го порядка — основной элемент, на базе которого формируются частотные фильтры с самыми разнообразными частотными характеристиками.

■ различие между полюсами и нулями передаточных функций RC-цепей

Как известно (см. гл. 13), типичная передаточная функция ФНЧ должна иметь вид

$$K(p)=\frac{A_0}{ap^2+bp+c},$$

где $A_0$, $a$, $b$, $c$ — постоянные величины.

Обращаясь к формуле (14.32), видим, что для этого необходимо, чтобы элементы $Y_1$, $Y_3$ и $Y_4$ были резисторами, а элементы $Y_2$ и $Y_5$ — конденсаторами. При этом

$$K(p)=\frac{-G_1G_3}{p^2C_2C_5+pC_5(G_1+G_3+G_4)+G_3G_4}. \qquad (14.33)$$

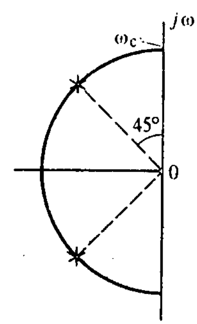
Поскольку вещественные части координат полюсов отрицательны при любом выборе параметров, то данная цепь абсолютно устойчива

Полюсы передаточной функции расположены в точках

$$p_{1,2}=-\frac{G_1+G_3+G_4}{2C_2}\pm j\sqrt{\frac{G_3G_4}{C_2C_5}-\frac{1}{4}\left(\frac{G_1+G_3+G_4}{C_2}\right)^2}. \qquad (14.34)$$

Данная формула позволяет синтезировать колебательные звенья с установленной заранее конфигурацией полюсов.

**Пример 14.4.** *Синтезировать активный RC-фильтр нижних частот 2-го порядка с максимально-плоской характеристикой при частоте среза* $\omega_c=10^3$ 1/с.




Как известно из гл. 13, подобный фильтр должен иметь два полюса передаточной функции:

$$p_{1,2}=\omega_c(-0.707\pm j\,0.707). \qquad (14.35)$$

Зададимся приемлемой величиной резисторов, входящих в схему фильтра, положив их номиналы одинаковыми: $R_1=R_3=R_4=1.8$ кОм, т. е. $G_1=G_3=G_4=5.55\cdot10^{-4}$ См.

Приравнивая вещественные части (14.34) и (14.35), получаем формулу, определяющую емкость $C_2$:

$$\frac{G_1+G_3+G_4}{2C_2}=0.707\omega_c,$$

откуда, подставляя известные величины, находим, что $C_2=1.18$ мкФ.

Чтобы найти емкость конденсатора $C_5$, следует приравнять мнимые части (14.34) и (14.35):

$$\frac{G_3G_4}{C_2C_5}-\frac{1}{4}\left(\frac{G_1+G_3+G_4}{C_2}\right)^2=\frac{\omega_c^2}{2}.$$

Решив это уравнение, находим, что $C_5=0.26$ мкФ. Принципиальная схема синтезированного активного фильтра изображена на рис. 14.11.

▲ решите задачу 11

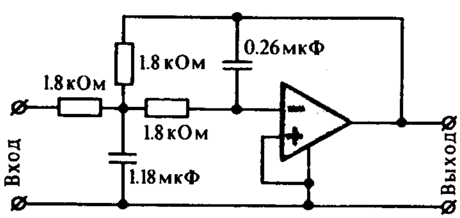



Рис. 14.11. Активный $RC$-фильтр, имеющий максимально-плоскую характеристику при частоте среза $10^3$ 1/с

**Заключительные замечания.** В настоящем параграфе был изучен один из возможных способов построения активных $RC$-фильтров, основанный на применении усилительных приборов с бесконечно большим коэффициентом усиления (операционных усилителей). Арсенал средств современной интегральной схемотехники далеко не исчерпывается этим принципом. Так, большой интерес представляют схемы, в которых используются *гираторы* — активные четырехполюсники, обладающие тем свойством, что при подключении конденсатора к их выходным зажимам реализуется чисто индуктивное входное сопротивление. Тем самым решается задача создания фильтров, не содержащих физических индуктивных элементов.

гиратор

Со свойствами гираторов, а также других активных элементов, применяемых в современных $RC$-фильтрах, читатель может ознакомиться самостоятельно по [32, 33].

## 14.4 Автогенераторы гармонических колебаний. Режим малого сигнала

В ряде ситуаций в активных радиотехнических цепях возникают периодические *автоколебания*. Так принято называть колебательные процессы, существующие без внешнего периодического воздействия на систему. Устройства, генерирующие автоколебания, называют автоколебательными системами или, короче, *автогенераторами*. Работа любого автогенератора основана на том, что энергия от внешнего источника питания через активный элемент, например транзистор, подается на колебательную систему. Сигнал, управляющий транзистором, снимается с этой же колебательной системы и подается на управляющий электрод транзистора через цепь обратной связи.

При соответствующем выборе параметров такой системы она становится неустойчивой. Любые малые колебания, вызванные, например, тепловыми шумами, приобретают тенденцию к неограниченному возрастанию амплитуды. Однако по мере роста амплитуды существенную роль начинают играть нелинейные свойства управляемого элемента, ведущие к тому, что амплитуда автоколебаний достигает некоторого установившегося значения и в дальнейшем остается практически постоянной. Говорят, что при этом автогенератор работает в *стационарном режиме*.

стационарный режим

При исследовании и расчете автогенераторов возникают две основные задачи:

1. Выяснить, при каких условиях схема с обратной связью становится неустойчивой, т. е. самовозбуждается.

2. Определить амплитуду и частоту автоколебаний в стационарном режиме.

В дальнейшем мы убедимся, что первая из этих задач решается проще, поскольку при малых амплитудах автоколебаний, характерных для начального этапа процесса, нелинейный управляемый элемент может быть заменен эквивалентным линейным элементом. Гораздо сложнее решается вторая поставленная задача, состоящая, говоря широко, в исследовании систем с обратной связью при условии, что нелинейными эффектами пренебречь нельзя.

**Самовозбуждение простейшего автогенератора.** Исследование процессов в автогенераторах начнем со схемы (рис. 14.12), называемой *автогенератором с трансформаторной связью.*

В автогенераторе можно применить биполярный транзистор, учтя дополнительное затухание колебательной системы из-за конечного выходного сопротивления

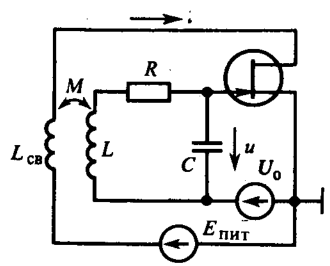


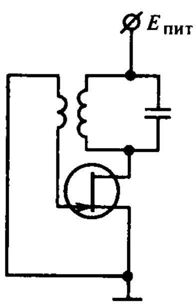

Рис. 14.12. Автогенератор с трансформаторной связью

Колебательной системой здесь служит контур $LCR$, элементом обратной связи — катушка $L_{св}$, размещенная таким образом, что создаваемый ею магнитный поток частично пронизывает катушку $L$.

Пусть в цепи каким-либо образом возбуждены малые колебания. Если $u$ — напряжение на конденсаторе (и соответственно на управляющем электроде электронного прибора), то по второму закону Кирхгофа имеем следующее дифференциальное уравнение, описывающее данную систему:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=\pm M\frac{di}{dt}, \qquad (14.36)$$

где $i$ — ток в цепи обратной связи. Знак правой части в (14.36) зависит от того, каким образом, встречно или согласно, включены катушки $L$ и $L_{св}$.




Колебательный контур в схеме автогенератора с трансформаторной связью может включаться также и в выходную цепь электронного прибора

Сделаем основное предположение — будем считать управляющее напряжение $u$ столь малым, что электронный прибор вполне точно может быть заменен управляемым источником, который создает ток, линейно зависящий от управляющего напряжения:

$$i=i_0+S_{диф}\,u, \qquad (14.37)$$

где $i_0$ — постоянная составляющая тока, несущественная для дальнейшего, $S_{диф}$— дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики прибора в фиксированной рабочей точке. Объединив (14.36) и (14.37), получаем следующее уравнение системы:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}\mp\frac{MS_{диф}}{LC}\right)\frac{du}{dt}+\omega_0^2 u=0,} \qquad (14.38)$$

где $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ — частота собственных колебаний контура без потерь. Отметим важное обстоятельство — уравнение (14.38) является *линейным* дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Варьируя коэффициент взаимоиндукции $M$, можно изменять коэффициент при производной $\frac{du}{dt}$. Знак и величина этого коэффициента, как известно, определяют собой характер свободных колебаний в такой динамической системе. Если в уравнениях (14.36) и (14.38) выбраны верхние знаки, то за счет обратной связи будет наблюдаться явление регенерации, изученное ранее. Если величина $M$ достигнет критического значения

$$M_{кр}=RC/S_{диф}=1/(\omega_0 Q S_{диф}), \qquad (14.39)$$

критическое значение коэффициента взаимоиндукции

где $Q$ — добротность контура без учета регенерации, то уравнение (14.38) приобретет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2 u=0,$$

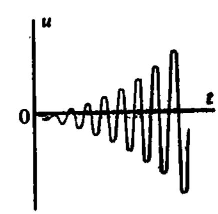
свойственный идеальной колебательной системе без потерь. Если же $M>M_{кр}$, то схема автогенератора становится неустойчивой. Введя параметр

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{MS_{диф}}{LC}-\frac{R}{L}\right)>0,$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2}-2\alpha\frac{du}{dt}+\omega_0^2 u=0,$$

которое описывает гармонические колебания с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой:




$$u(t)=Ae^{\alpha t}\cos\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,t+Be^{\alpha t}\sin\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,t \qquad (14.40)$$

($A$ и $B$ — постоянные, зависящие от начальных условий). Практически всегда $\alpha\ll\omega_0$ и в соответствии с (14.40) частота заполнения автоколебаний, возникающих в линейном режиме, весьма близка к частоте собственных колебаний контура.

▲ решите задачу 12

Подчеркнем физический смысл правильного выбора знака в уравнении (14.38), который обеспечивает неустойчивость режима покоя автогенератора: для того чтобы система была способна к самовозбуждению, необходимо, чтобы любое возмущение состояния колебательной системы приводило к появлению сигнала обратной связи, который, складываясь с первоначальным возмущением, увеличивал бы его. Именно таким образом трактуется понятие положительной обратной связи в теории автоколебательных систем.

**Трехточечные автогенераторы.** Недостаток автогенераторов с трансформаторной связью заключается в том, что здесь необходимо иметь две индуктивные катушки. Поэтому на практике чаще используют схемы так называемых *автогенераторов-трехточек,* в которых напряжение обратной связи снимается с части колебательного контура. На рис. 14.13 изображена схема индуктивной трехточки.

Исследуем условие самовозбуждения этой схемы, составив и решив характеристическое уравнение цепи с замкнутой обратной связью.

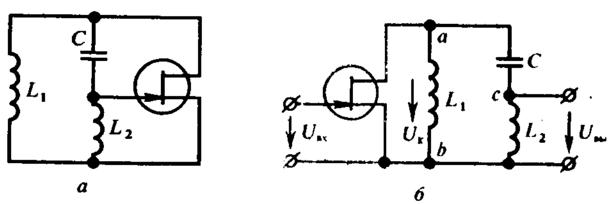



Рис. 14.13. Автогенератор, собранный по схеме индуктивной трехточки: *а* — принципиальная схема (источники питания и смещения не показаны); *б* — та же схема с разомкнутой цепью обратной связи

Если $U_{вх}$ и $U_{вых}$— изображения сигналов на входе и на выходе системы с разомкнутой обратной связью (рис. 14.13,*б*), причем известна передаточная функция данной системы $K(p)$, то характеристическое уравнение, описывающее замкнутую цепь, имеет, как уже было выяснено, следующий вид:

$$K(p)=1. \qquad (14.41)$$

Для того чтобы найти функцию $K(p)$, учтем, что при выбранном направлении тока напряжение на контуре

$$U_к=-S_{диф}\,Z_{ab}(p)\,U_{вх}.$$

Здесь сопротивление

$Z_{ab}(p)=k^2_{вкл} Z_к(p)$,

где $k_{вкл}=L_1/(L_1+L_2)$ — коэффициент включения контура, $Z_к(p)$ — входное сопротивление параллельного контура между точками $a$ и $c$, т. е. при полном включении. Считая добротность контура достаточно высокой, имеем следующую приближенную формулу:

$$Z_к(p)=R_{рез}\left(\frac{1}{1+p\tau_к-j\omega_{рез}\tau_к}+\frac{1}{1+p\tau_к+j\omega_{рез}\tau_к}\right). \quad (14.42)$$

Учитывается, что максимум модуля входного сопротивления параллельного колебательного контура достигается при $p=\pm j\omega_{рез}$

Наконец, примем во внимание, что на резонансной частоте

$\omega_{рез}=1/\sqrt{(L_1+L_2)C}$

в колебательной системе наблюдается резонанс токов и поэтому

$$U_{вых}=-\frac{L_2}{L_1}U_к. \quad (14.43)$$

Объединив приведенные здесь формулы, запишем характеристическое уравнение (14.41) в виде

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)k^2_{вкл}S_{диф}Z_к(p)=1, \quad (14.44)$$

или

$$\frac{1}{1+p\tau_к-j\omega_{рез}\tau_к}+\frac{1}{1+p\tau_к+j\omega_{рез}\tau_к}=\frac{1}{aS_{диф}R_{рез}}, \quad (14.45)$$

где введен параметр связи

$$a=L_2L_1/(L_1+L_2)^2. \quad (14.46)$$

Уравнение (14.45) имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2}=\frac{aS_{диф}R_{рез}-1}{\tau_к}\pm j\sqrt{\omega^2_{рез}-\frac{(aS_{диф}R_{рез})^2}{\tau^2_к}}. \quad (14.47)$$

● условие самовозбуждения трехточечного автогенератора

Отсюда видно, что автогенератор, собранный по схеме индуктивной трехточки, самовозбуждается, если выполнено условие

$$\boxed{aS_{диф}R_{рез}>1.} \quad (14.48)$$

**Пример 14.5.** *Трехточечный автогенератор имеет колебательный контур, настроенный на частоту* $\omega_{рез}=6\cdot10^6$ 1/с. *Крутизна электронного прибора в рабочей точке* $S_{диф}=7$ мА/В. *Добротность контура* $Q=40$, *контурная емкость* $C=400$ пФ. *Найти величины индуктивностей* $L_1$ *и* $L_2$, *обеспечивающие уверенное самовозбуждение автогенератора.*

Характеристическое сопротивление контура $\rho = 1/(\omega_{рез} C) = 416.6$ Ом, откуда резонансное сопротивление $R_{рез} = \rho Q = 16.6$ кОм. На основании (14.48) для самовозбуждения необходимо, чтобы

$$a > 1/(S_{диф} R_{рез}) = 8.57 \cdot 10^{-3}.$$

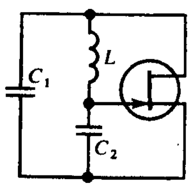
С некоторым запасом полагаем $a = 10^{-2}$. Полная индуктивность контура

$$L_1 + L_2 = 1/\left(\omega_{рез}^2 C\right) = 69.4 \text{ мкГн}.$$

Используя (14.46), получаем квадратное уравнение для нахождения индуктивности $L_2$:

$$L_2 (69.4 - L_2)/(69.4)^2 = 10^{-2},$$

имеющее два корня: $L_2 = 0.7$ мкГн и $L_2 = 68.7$ мкГн. Из практических соображений целесообразно выбрать меньшее значение $L_2$, при котором автогенератор, очевидно, развивает большее напряжение на контуре.




Другим вариантом схемы трехточечного автогенератора является так называемая емкостная трехточка, в которой напряжение обратной связи снимается с емкостного делителя, образованного конденсаторами $C_1$ и $C_2$. Анализ условий самовозбуждения такой схемы проводится таким же способом, как это описано ранее.

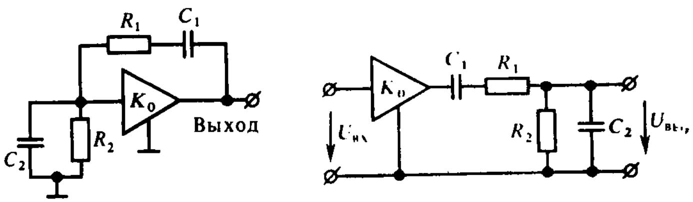
***RC*-автогенераторы гармонических колебаний.** На частотах ниже нескольких десятков килогерц применять в качестве колебательных систем автогенераторов резонансные *LC*-контуры становится затруднительным, главным образом из-за роста габаритов и массы индуктивных элементов. Поэтому на этих частотах, как правило, используют *RC*-автогенераторы, представляющие собой комбинации активных четырехполюсников (усилителей) и пассивных *RC*-цепей, играющих роль элементов обратной связи.

● условие, налагаемое на корни характеристического уравнения

Пусть $K(p)$ — передаточная функция разомкнутой цепи и $K(p) = 1$ — характеристическое уравнение, описывающее поведение системы с замкнутой обратной связью. Для того чтобы такая система была неустойчивой и способной генерировать гармонические колебания в стационарном режиме, необходимо, чтобы характеристическое уравнение имело по крайней мере одну пару комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью. Мнимая часть корней будет при этом определять генерируемую частоту.

Получим условие самовозбуждения распространенной схемы генератора с двумя *RC*-цепями (рис. 14.14).

Основой генератора является идеальный усилитель с вещественным и положительным коэффициентом усиления $K_0$.




*а* *б*

Рис. 14.14. Автогенератор с двумя *RC*-цепями:
*а* — принципиальная схема; *б* — схема с разомкнутой цепью обратной связи

Выход усилителя соединен с его входом через пассивный *RC*-четырехполюсника, передаточная функция которого в соответствии с рис. 14.14,*б* имеет вид

$$K_1(p)=\frac{p\tau_1}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+p\tau'}. \qquad (14.49)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\tau_1=R_1C_1$; $\tau_2=R_2C_2$; $\tau'=R_2C_1$. Характеристическое уравнение автогенератора $K_0K_1(p)=1$, очевидно, можно записать так:

$$p^2\tau_1\tau_2+p(\tau_1+\tau_2-\tau'(K_0-1))+1=0. \qquad (14.50)$$

Описываемая система становится неустойчивой тогда, когда коэффициент при первой степени $p$, проходя через нуль, меняет знак, т. е. для самовозбуждения автогенератора необходимо, чтобы

Это условие следует из критерия Рауса — Гурвица

$$\tau_1+\tau_2-\tau'(K_0-1)<0.$$

Отсюда получаем условие, накладываемое на коэффициент усиления активного звена:

$$\boxed{K_0>1+\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_2C_1}.} \qquad (14.51)$$

В частности, если обе *RC*-цепи идентичны, то система самовозбуждается, если $K_0>3$.

Мнимая часть корней уравнения (14.50) зависит не только от параметров $R_1$, $R_2$, $C_1$ и $C_2$, но и от коэффициента усиления $K_0$. Для оценки генерируемой частоты можно приближенно считать, что автогенератор работает на границе самовозбуждения и поэтому коэффициент при первой степени $p$ равен нулю. Тогда из характеристического уравнения

Строго говоря, генерируемая частота зависит от коэффициента усиления активного звена

$$p^2\tau_1\tau_2+1=0$$

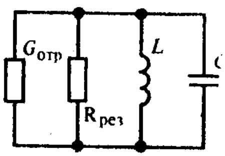
находим значение генерируемой частоты

$$\boxed{\omega_{\text{ген}} = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}\,.} \tag{14.52}$$

▲ решите задачу 13

Отметим в заключение, что $RC$-автогенератор существенно уступает $LC$-автогенератору с точки зрения монохроматичности генерируемых колебаний. Это связано с тем, что цепь обратной связи не содержит здесь колебательных контуров и не может в достаточной мере отфильтровать нежелательные высшие гармоники. Удовлетворительная форма генерируемых колебаний достигается схемотехническими мерами, например использованием дополнительной цепи нелинейной инерционной обратной связи [37].

**Автогенераторы с внутренней обратной связью.** Рассмотренные выше схемы автогенераторов содержат специально созданные цепи положительной обратной связи. Однако возможен и другой принцип построения автогенераторов. Работа их основана на том, что в колебательный контур вводится отрицательная активная проводимость.




Если, например, $R_{\text{рез}}$ — активная составляющая входного сопротивления контура при резонансе, а $G_{\text{отр}} = S_{\text{диф}} < 0$ — параллельно включенная отрицательная проводимость, соответствующая малой амплитуде колебаний, то условие самовозбуждения системы заключается в компенсации потерь контура (см. гл. 8):

$$-S_{\text{диф}} > 1/R_{\text{рез}}. \tag{14.53}$$

● энергетический баланс в автогенераторе

Пусть это условие выполнено. С ростом амплитуды автоколебаний за счет нелинейности характеристики нелинейного элемента будет наблюдаться постепенное уменьшение скорости нарастания колебаний. В стационарном режиме энергия, рассеиваемая в контуре за период собственных колебаний, будет в точности равна энергии, которая поступает в контур от внешних источников за данный отрезок времени. Такой механизм саморегулирования стационарной амплитуды получил в радиотехнике название *внутренней обратной связи.*

● внутренняя обратная связь

**Автогенераторы с распределенными колебательными системами.** Интересной и очень важной в практическом отношении разновидностью автогенераторов с внутренней обратной связью являются автоколебательные устройства, в которых использованы отрезки линий передачи с распределенными параметрами. Типичным примером здесь может служить *лазер* — автогенератор гармонических колебаний в оптическом и инфракрасном диапазонах (рис. 14.15).

● лазер

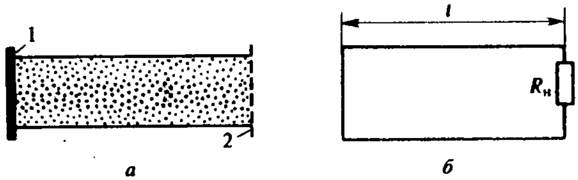



Рис. 14.15. Принцип работы лазера:
*а* — эскиз конструкции; *б* — эквивалетная схема; *1* — отражающее зеркало; *2* — полупрозрачное зеркало

Лазер обычно состоит из двух плоскопараллельных зеркал, образующих распределенную колебательную систему, так называемый резонатор Фабри — Перо. Пространство между зеркалами заполнено активной средой, например смесью газов He и Ne, в которой за счет действия внешней накачки создана избыточная концентрация атомов, находящихся в возбужденном состоянии. Эти атомы, переходя в более низкое энергетическое состояние, излучают кванты электромагнитной энергии на частоте, равной одной из резонансных частот колебательной системы. Если излучаемая мощность превосходит мощность, отдаваемую в нагрузку через полупрозрачное зеркало, то происходит самовозбуждение системы.

**принцип работы лазера**

Чтобы получить количественную формулировку условия самовозбуждения лазера, рассмотрим его простейшую одномерную модель, изображенную на рис. 14.15 *б*. Она включает в себя короткозамкнутый с одного конца отрезок линии передачи, нагруженный на резистор $R_н$. Из теории линий передачи известно [26], что гармонический волновой процесс в линии характеризуется комплексным коэффициентом распространения

$$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{(R_1+j\omega L_1)(G_1+j\omega C_1)}, \qquad (14.54)$$

который определяется погонными параметрами линии $R_1$, $G_1$, $L_1$ и $C_1$. Эффект действия накачки в рамках теории распределенных цепей принято описывать тем, что погонная шунтирующая проводимость становится отрицательной: $G_1=-g_1$. Тогда, считая для простоты $R_1=0$ и что активная проводимость лишь в малой степени изменяет фазовую скорость, т. е. $g_1 \ll \omega C_1$, на основании (14.54) имеем

Данную систему также можно описать, считая отрицательным погонное активное сопротивление

$$\gamma\approx-\frac{1}{2}g_1 Z_в+j\beta_0, \qquad (14.55)$$

где $Z_в = \sqrt{L_1/C_1}$ — волновое сопротивление линии, $\beta_0 = \omega\sqrt{L_1 C_1}$ — коэффициент фазы.

Параллельно резистору нагрузки включена входная проводимость короткозамкнутого отрезка линии длиной $l$, равная, как известно,

$$Y_{вх} = \frac{1}{Z_в} \operatorname{cth} \gamma l.$$

Подставив сюда величину $\gamma$ из (14.55) и приняв во внимание, что при $\alpha \ll \beta$

$$\operatorname{cth}(\alpha l + j\beta l) \approx \frac{\alpha l - j\operatorname{ctg}\beta l}{1 - j\alpha l \operatorname{ctg}\beta l} \approx \frac{\alpha l}{\sin^2\beta l} - j\operatorname{ctg}\beta l,$$

находим

$$Y_{вх} = \frac{1}{Z_в}\left(\frac{-g_1 l Z_в}{2\sin^2\beta_0 l} - j\operatorname{ctg}\beta_0 l\right). \tag{14.56}$$

Для того чтобы система стала неустойчивой, требуется, чтобы отрицательная активная проводимость линии компенсировала положительную проводимость нагрузки. Это приводит к условию самовозбуждения

**Существует бесконечное множество частот на которых возможно самовозбуждение распределенной автоколебательной системы**

$$\boxed{g_1 l/(2\sin^2\beta_0 l) > 1/R_н.} \tag{14.57}$$

Генерируемая частота $\omega_{ген}$ определяется из резонансного условия, согласно которому реактивная составляющая входного сопротивления линии должна обратиться в нуль: $\operatorname{ctg}\beta_0 l = 0$. Отсюда $\beta_0 l = (\pi/2)(2k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и поэтому

$$\omega_{ген} = \frac{\pi}{2l\sqrt{L_1 C_1}}(2k+1).$$

● условие самовозбуждения распределенной автоколебательной системы

На частоте генерации $|\sin\beta_0 l| = 1$, вследствие чего условие самовозбуждения приобретает вид

$$g_1 > 2/(lR_н).$$

В соответствии с этой формулой возбуждение подобного распределенного автогенератора осуществляется тем легче, чем больше сопротивление нагрузки, т. е. чем ближе линия к режиму холостого хода относительно выходных зажимов.

## 14.5 Автогенераторы гармонических колебаний. Режим большого сигнала

Данный параграф посвящен основам теории автоколебательных систем, работающих при большом уровне генерируемого сигнала, когда уже нельзя пренебречь нелинейностью характеристики электронного прибора. Излагаемый материал основан на приближенном решении нелинейного дифференциального уравнения автогенератора.

**Метод укороченного уравнения.** Обратимся вновь к простейшей схеме автогенератора с трансформаторной связью и будем считать заданной вольт-амперную характеристику активного элемента $i=f(u)$. Поскольку $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=\mathrm{d}f/\mathrm{d}u\cdot \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, запишем нелинейное дифференциальное уравнение (14.36), характеризующее поведение автогенератора при любых режимах, в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R}{L}-\frac{M}{LC}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u=0. \tag{14.58}$$

Выбранный знак величины $M$ обеспечивает возможность самовозбуждения системы

Способов точного решения таких уравнений не существует. Как правило, приходится прибегать к тем или иным дополнительным соображениям физического характера и отыскивать приближенные решения. В данном случае следует принять во внимание, что автогенератор содержит высокодобротный колебательный контур и поэтому, несмотря на нелинейность характеристики, напряжение на контуре должно быть весьма похожим на гармоническое колебание с частотой $\omega_0$.

Будем искать приближенное решение уравнения (14.58) в виде

$$u(t)=U(t)\cos\omega_0 t,$$

причем амплитуда $U(t)$ предполагается медленной функцией времени в том смысле, что $|\mathrm{d}U/\mathrm{d}t|\ll\omega_0|U|$. На этом основании в выражении для производной

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\cos\omega_0 t-\omega_0 U\sin\omega_0 t$$

сохраним только второе слагаемое:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\approx-\omega_0 U\sin\omega_0 t. \tag{14.59}$$

Таким же образом

Производная $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}t^2$ мала в силу предположения о медленности изменения амплитуды

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2}\cos\omega_0 t-2\omega_0\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\sin\omega_0 t-\omega_0^2 U\cos\omega_0 t\approx$$

$$\approx-2\omega_0\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\sin\omega_0 t-\omega_0^2 U\cos\omega_0 t. \tag{14.60}$$

● укороченное уравнение автогенератора

Подставив (14.59) и (14.60) в (14.58), получаем так называемое *укороченное* дифференциальное уравнение

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{M}{LC}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)U=0,} \qquad (14.61)$$

приближенно описывающее процессы в автогенераторе с высокодобротным колебательным контуром.

Метод укороченного уравнения значительно упрощает последующие этапы анализа, поскольку уравнение (14.61) содержит лишь производную первого порядка.

**Средняя крутизна.** Производная d$f$/d$u$, находящаяся во втором слагаемом уравнения (14.61), является локальным значением дифференциальной проводимости нелинейного элемента. Поскольку считается, что выходной сигнал автогенератора лишь в малой степени отличается от гармонических колебаний с частотой $\omega_0$, то ток $i(t)$ есть периодическая функция времени, разлагаемая в ряд Фурье:

$$i=f(u)=I_0+I_1\cos\omega_0 t+I_2\cos 2\omega_0 t+\ldots$$

Отбросив все высшие гармоники, имеем приближенно

$$f\approx I_0+I_1\cos\omega_0 t\,.$$

В то же время $u(t)=U\cos\omega_0 t$ и поэтому

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{I_1}{U}\,.$$

● средняя крутизна

По определению, коэффициент пропорциональности между амплитудой первой гармоники тока и амплитудой напряжения на управляющем электроде есть *средняя крутизна* $S_1$, или *крутизна по первой гармонике*:

$$\boxed{S_1(U)=I_1(U)/U\,.} \qquad (14.62)$$

Введя среднюю крутизну, запишем укороченное уравнение (14.61) в виде

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+{}^1/_2\left(\frac{R}{L}-\frac{M}{LC}S_1(U)\right)U=0\,. \qquad (14.63)$$

Для аналитического рассмотрения удобен случай, когда вольт-амперная характеристика имеет форму степенного ряда:

▲ решите задачу 14

$$i(u)=a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots$$

Как известно (см. гл. 11), при этом

$$I_1 = a_1 U + {}^3/_4\, a_3 U^3 + {}^5/_8\, a_5 U^5 + \ldots,$$

так что

$$S_1(U) = a_1 + {}^3/_4\, a_3 U^2 + {}^5/_8\, a_5 U^4 + \ldots \qquad (14.64)$$

Понятие средней крутизны впервые ввел академик Ю. Б. Кобзарев, создавший в 30-х годах квазилинейную теорию автогенераторов

Подставляя данное выражение средней крутизны в укороченное уравнение (14.63), получаем нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, которое всегда может быть решено методом разделения переменных.

**Стационарный режим автогенератора.** По определению, стационарный режим автоколебательной системы характеризуется постоянной амплитудой. Положив в (14.63) $dU/dt = 0$, получаем уравнение

$$\boxed{S_1(U) = RC/M,} \qquad (14.65)$$

● уравнение для определения стационарной амплитуды автоколебаний

положительные корни которого определяют стационарные значения амплитуды автоколебаний.

---

**Пример 14.6.** *Рассмотреть автогенератор, в котором использован активный элемент со следующей зависимостью средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения*:

$$S_1(U) = a_1 + {}^3/_4 a_3 U^2,$$

*где* $a_1 = S_{\text{диф}} = 15$ мА/В, $a_3 = -4$ мА/В$^3$.

*Автогенератор характеризуется параметрами:* $\omega_0 = 10^7$ 1/с, $Q = 30$, $M = 1$ мкГн.

Для нахождения стационарной амплитуды вычислим прежде всего величину

$$\xi = RC/M = 1/(\omega_0 QM) = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

▲ решите задачу 15

На основании (14.65) стационарная амплитуда в данном случае удовлетворяет квадратному уравнению

$$a_1 - {}^3/_4 a_3 U_{\text{ст}}^2 = \xi,$$

решив которое, получаем

$$U = \sqrt{\frac{\xi - a_1}{{}^3/_4\, a_3}} = 1.97 \text{ В}.$$

---

В зависимости от того, в какой области располагается рабочая точка нелинейного элемента, характеристика $S_1(U)$ имеет одну из двух форм, изображенных на рис. 14.16.

Если средняя крутизна монотонно уменьшается с увеличением амплитуды управляющего напряжения, то говорят, что

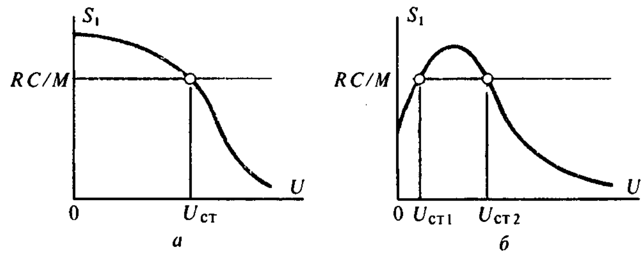



Рис. 14.16. Типичные зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения:
*а* — характеристика мягкого режима; *б* — характеристика жесткого режима

**мягкий и жесткий режимы автогенератора**

автогенератор работает *в мягком режиме*. Соответствующая зависимость изображена на рис. 14.16, *а*. На этом же графике проведена так называемая прямая обратной связи — горизонтальная линия с ординатой $RC/M$. Точка пересечения кривой $S_1(U)$ и прямой обратной связи определяет единственную амплитуду стационарных автоколебаний $U_{ст}$.

Сложнее обстоит дело, если автогенератор работает *в жестком режиме*. Здесь, как видно из построения на рис. 14.16, *б*, возможны два стационарных режима с различными амплитудами $U_{ст1}$ и $U_{ст2}$.

**Устойчивость стационарных режимов.** Для того чтобы определить, какой из этих двух стационарных режимов реализуется фактически, нужно исследовать принципиально важный вопрос об их устойчивости. Говорят, что стационарный режим автоколебательного процесса устойчив, если при любых малых отклонениях амплитуды гармонических колебаний от стационарного уровня система стремится вновь вернуться к состоянию со стационарной амплитудой. Наоборот, процесс, соответствующий неустойчивой стационарной точке, стремится так изменить свою амплитуду, чтобы перейти в ту или иную устойчивую стационарную точку.

**различие между понятиями устойчивости линейных и нелинейных автоколебательных систем**

Устойчивость стационарного режима — понятие, специфическое для нелинейных автоколебательных систем. Напомним, что применительно к линейной динамической системе речь может идти только об устойчивости или неустойчивости состояния покоя (режим малых колебаний).

Рассмотрим укороченное уравнение автогенератора (14.63) и предположим, что амплитуда автоколебаний $U$ получила малое отклонение $V$ относительно стационарной точки:

$$U = U_{ст} + V. \tag{14.66}$$

При этом

$$S_1(U) \approx S_1(U_{\text{ст}}) + AV,$$

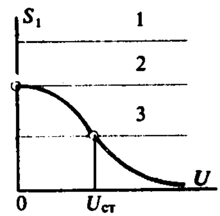
где $A = \mathrm{d}S_1/\mathrm{d}U$ — угловой коэффициент наклона графика средней крутизны в точке стационарного режима. Подставив (14.66) в (14.63), находим с учетом (14.65) дифференциальное уравнение относительно приращения амплитуды:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{AM}{2LC}(V^2 + VU_{\text{ст}}) \approx \frac{AMU_{\text{ст}}}{2LC}V. \qquad (14.67)$$

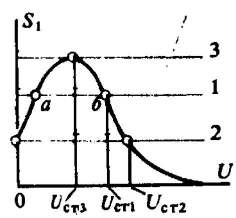
Это простое линейное дифференциальное уравнение указывает на то, что знак производной $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ зависит лишь от знака величины $A$. Так, если $A<0$, то $V$ и $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ имеют разные знаки. Поэтому, если по тем или иным причинам амплитуда автоколебаний $U$ стала больше, чем $U_{\text{ст}}$, т. е. $V>0$, то в силу (14.67) производная $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t<0$ и поэтому с течением времени автоколебательная система вернется к стационарному состоянию.

■ критерий устойчивости стационарного режима

Легко видеть, что описанным свойством устойчивости обладает автогенератор, работающий в мягком режиме. Предположим, что коэффициент взаимоиндукции $M$ мал настолько, что прямая обратной связи *1* не пересекает кривую $S_1(U)$. Единственное устойчивое состояние системы при этом — состояние покоя с нулевой амплитудой колебаний. Если величина $M$ растет, то при $M_{\text{кр}} = RC/S_{\text{диф}}$ (прямая *2*) автогенератор самовозбудится при сколь угодно малой амплитуде стационарных автоколебаний. Дальнейший рост $M$ ведет к плавному увеличению амплитуды генерируемых колебаний (прямая *3*).




По-иному протекают процессы в автогенераторе, работающем в жестком режиме. Если система первоначально находилась в покое, а прямая обратной связи занимает положение *1*, то автоколебания не возникают, несмотря на то что имеются две точки стационарного режима — неустойчивая точка *а* и устойчивая точка *б*. Однако, если с помощью каких-либо внешних источников в системе возбуждены гармонические колебания с резонансной частотой и амплитудой, отвечающей точке *а*, то, поскольку здесь $A>0$ (средняя крутизна растет с увеличением амплитуды), возникшие автоколебания будут неустойчивыми. Амплитуда их будет нарастать до тех пор, пока система не перейдет в устойчивую точку *б*, характеризующуюся постоянной стационарной амплитудой $U_{\text{ст}1}$.




Автогенератор, работающий в жестком режиме, способен также и к самовозбуждению. Для этого прямая обратной связи должна занять положение *2*, при котором неустойчивым являет-

Принято говорить о мягком и жестком режимах самовозбуждения автогенератора

▲ решите задачу 16

ся стационарный режим с бесконечно малой амплитудой колебаний. Как следует из сказанного ранее, возбудившиеся автоколебания будут нарастать до тех пор, пока их амплитуда не достигнет в пределе стационарного уровня $U_{ст2}$. Если же теперь уменьшать $M$, то амплитуда автоколебаний будет плавно уменьшаться до тех пор, пока не станет равной $U_{ст3}$ и прямая обратной связи 3 не займет положение касательной к характеристике $S_1(U)$. Дальнейшее уменьшение $M$ приводит к срыву автогенерации; амплитуда колебаний скачком падает до нуля.

● колебательный гистерезис

Таким образом, в автогенераторе с жестким режимом колебания возникают и исчезают при различных значениях коэффициента обратной связи. Подобное их свойство принято называть *колебательным гистерезисом*.

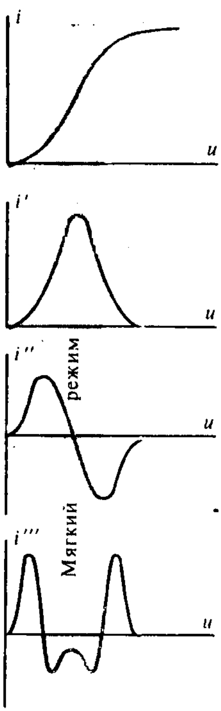
**Зависимость режима автогенератора от выбора рабочей точки.** Как уже отмечалось, мягкий режим отличается от жесткого тем, что в первом случае средняя крутизна $S_1(U)$ при малых амплитудах падает с ростом $U$, а во втором — растет. Пусть вольт-амперная характеристика нелинейного элемента описывается степенным рядом и поэтому (см. (14.64)) при малых $U$ имеет место зависимость

$$S_1(U) = a_1 + {}^3/_4\, a_3 U^2,$$

из которой следует, что автогенератор работает в мягком режиме, если $a_3 < 0$, и в жестком режиме, если $a_3 > 0$. Как известно,

$$a_3 = \frac{1}{3!}\,\frac{d^3 i}{du^3},$$

причем производная вычисляется в точке, отвечающей начальному напряжению смещения, поданному на нелинейный элемент.




Определение границ мягкого и жесткого режимов

Обычно зависимость $i(u)$ представляется гладкой кривой, которая монотонно возрастает от нулевого до некоторого постоянного уровня. Проведя трехкратное дифференцирование этой зависимости графическим способом, убеждаемся, что мягкий режим будет реализован в тех случаях, когда рабочая точка выбрана в средней части характеристики.

**Процесс установления стационарной амплитуды.** Метод укороченных уравнений позволяет не только находить стационарные режимы и исследовать их устойчивость, но также изучать динамику процесса установления стационарной амплитуды автоколебаний. Для иллюстрации метода найдем закон изменения во времени амплитуды $U(t)$ в автогенераторе с мягким режимом, полагая, что при $t=0$ в системе существуют гармонические колебания с резонансной частотой и с некоторой известной амплитудой $U_0$.

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{Ma_1}{LC} - \frac{3a_3M}{4LC}U^2\right)U = 0$$

с начальным условием $U(0) = U_0$.

Введем сокращенные обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{Ma_1}{LC} - \frac{R}{L}\right) > 0; \quad \beta = \frac{3a_3M}{8LC} < 0.$$

Обе части укороченного уравнения

$$\frac{dU}{dt} = (\alpha + \beta U^2)U \tag{14.68}$$

можно умножить на $U$ и получить эквивалентную форму:

$$\frac{dU^2}{2(\alpha + \beta U^2)U^2} = dt. \tag{14.69}$$

Аналогичным способом рассматривают процессы в автогенераторе с жестким режимом самовозбуждения

Разлагая левую часть (14.69) на элементарные дроби, имеем

$$\frac{-\frac{\beta}{2\alpha}dU^2}{\alpha + \beta U^2} + \frac{\frac{1}{2\alpha}dU^2}{U^2} = dt. \tag{14.70}$$

Наконец, интегрируя и принимая во внимание начальное условие, получаем решение задачи в виде

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{U^2(\alpha + \beta U_0^2)}{U_0^2(\alpha + \beta U^2)} = t,$$

откуда следует окончательный результат:

$$\boxed{U(t) = \frac{U_0\sqrt{\alpha}\exp(\alpha t)}{\sqrt{\alpha + \beta U_0^2(1 - \exp(2\alpha t))}}}. \tag{14.71}$$

Если $t \to \infty$, то амплитуда автоколебаний стремится к постоянному стационарному уровню

$$U_{ст} = \sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{RC}{M} - a_1}{{}^3/_4\, a_3}}, \tag{14.72}$$

что совпадает с выводом, полученным в примере 14.6.

Важно отметить следующее: стационарная амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий. Если $U_0 = 0$, то в соответствии с (14.71) амплитуда $U(t)$ равна нулю при любых

$t>0$. Однако поскольку при $\alpha>0$ режим малых колебаний неустойчив, то при любой сколь угодно малой величине $U_0$, возникающей, например, из-за тепловых шумов, самовозбуждение автогенератора всегда будет иметь место.

... между ... и пассивными колебательными системами

Наконец, обратим внимание на то, что с повышением добротности колебательной системы, когда $R \to 0$, параметр $\alpha$ увеличивается. Это, в свою очередь, означает, что установление стационарной амплитуды происходит тем быстрее, чем выше добротность колебательного контура (см. (14.71)). Полезно вспомнить, что пассивные узкополосные системы, изученные в гл. 9, имеют диаметрально противоположные свойства — здесь при нестационарных процессах огибающая изменяется тем медленнее, чем больше добротность системы.

**Метод фазовой плоскости.** В радиотехнике и радиофизике применяется особый графический метод описания и интерпретации поведения колебательных систем и, в частности, автогенераторов, получивший название метода фазовой плоскости. Сущность этого метода проще всего пояснить на примере изучавшейся ранее линейной колебательной системы 2-го порядка.

Свободные колебания в данной системе описываются уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (14.73)$$

относительно неизвестной функции $u$, которой могут отвечать напряжение, ток и т. д. Из теории дифференциальных уравнений известно, что если в любой момент времени задать величины $u$ и $du/dt$, то дальнейший ход процесса в системе будет полностью определен. Графическим образом процесса явится перемещение *изображающей точки* вдоль некоторой кривой (фазовой траектории), лежащей в плоскости с декартовыми координатами ($u$, $u'$). Данную плоскость называют *фазовой плоскостью* системы.

... портрет

Каждой совокупности начальных условий $u$ и $u'$ отвечает единственная фазовая траектория. Задаваясь различными начальными условиями, мы получаем бесконечное число взаимно непересекающихся фазовых траекторий, которые образуют так называемый *фазовый портрет* системы.

Фазовые траектории для уравнения (14.73) строятся достаточно просто, поскольку известно общее решение

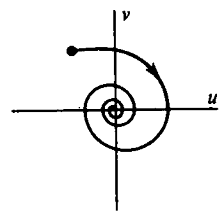
$$u(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_c t + \varphi),$$

где $A$ и $\varphi$ — постоянные, зависящие от выбора начальных условий; $\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ — частота собственных колебаний. При $\alpha \ll \omega_0$ имеем приближенно

$$\frac{du}{dt} \approx -\omega_c A e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \varphi) .$$

Удобно перейти к переменной $v=(du/dt)/\omega_c$. Тогда колебательный процесс в рассматриваемой системе отображается двумя зависящими от времени проекциями изображающей точки на оси $u$, $v$:

$$u(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi);$$
$$v(t) = -A e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \varphi) . \qquad (14.74)$$




Легко видеть, что равенства (14,74) описывают логарифмическую спираль, радиус-вектор которой экспоненциально уменьшается с течением времени по закону $A$ exp $(-\alpha t)$, если $\alpha>0$. Движение изображающей точки происходит в направлении часовой стрелки; полярный угол вектора, равный — $\omega_c t-\varphi$, изменяется во времени линейно. При $t\to\infty$ изображающая точка стремится к началу координат, которому отвечает устойчивое положение равновесия.

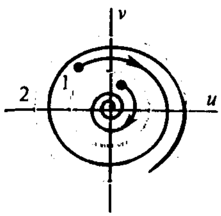
Если $\alpha<0$ (отрицательное затухание), то спираль фазовой траектории «раскручивается», что говорит о неустойчивости состояния равновесия в системе.

Наконец, если $\alpha=0$, то в данной идеализированной системе без затухания движение изображающей точки происходит по окружности, радиус которой зависит от выбора начальных условий.

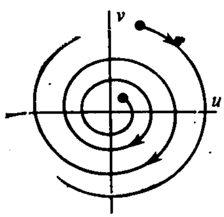
**Фазовые портреты автогенераторов.** Построение системы фазовых траекторий для нелинейного уравнения вида (14.58), описывающего автогенератор, может оказаться сложной задачей, решаемой численными или графическими способами. Однако если добротность колебательной системы автогенератора велика и форма генерируемых колебаний близка к гармонической, то можно заметить, что на фазовой плоскости существует окружность, называемая *предельным циклом*, по которой перемещается изображающая точка в стационарном режиме. Радиус предельного цикла равен амплитуде стационарных автоколебаний и не зависит от начальных условий.

предельный ц

Принято различать устойчивые и неустойчивые предельные циклы. Автогенератор, работающий в мягком режиме,




Мягкий режим




Жесткий режим

имеет единственный предельный цикл, который оказывается устойчивым. Действительно, если в начальном состоянии амплитуда колебаний оказалась больше стационарной, то с течением времени фазовая траектория будет «наматываться» на предельный цикл. Таким же образом происходит возрастание амплитуды автоколебаний, если в начальный момент времени их амплитуда оказалась меньше той, которая отвечает радиусу предельного цикла.

Несколько сложнее динамика процесса в автогенераторе, который работает в жестком режиме. Здесь имеются два предельных цикла *1* и *2*, причем цикл *1* с меньшей амплитудой неустойчив, а цикл *2* — устойчив. Если изображающая точка первоначально находится внутри цикла *1*, то фазовая траектория имеет вид спирали, которая стягивается в начало координат. Поэтому самовозбуждение данного автогенератора без воздействия внешней силы невозможно. Если же поместить изображающую точку вне неустойчивого предельного цикла *1*, то фазовая траектория будет иметь вид спирали, которая стремится к устойчивому предельному циклу *2*.

## Результаты

◇◇ *Введение обратной связи является широко распространенным способом создания динамических систем с заданными частотными или импульсными характеристиками.*

◇◇ *Принято различать системы с положительными и отрицательными обратными связями.*

◇◇ *Введение в усилитель отрицательной обратной связи позволяет создавать системы с высокой стабильностью коэффициента усиления.*

◇◇ *Отрицательная обратная связь уменьшает уровень нелинейных искажений, возникающих из-за нелинейности вольт-амперных характеристик активных элементов.*

◇◇ *Применение отрицательной обратной связи дает возможность за счет снижения уровня усиления расширять полосу пропускания усилителя.*

◇◇ *Для анализа устойчивости малых колебаний в системах с обратной связью используют критерии устойчивости. Наиболее распространены критерии Рауса — Гурвица и критерий Найквиста.*

◇◇ *Активные RC-фильтры являются частотно-избирательными устройствами, не содержащими индуктивных элементов.*

◇◇ *При введении в усилитель цепи положительной обратной связи возможно возникновение неустойчивости. Если в подобной схеме содержится колебательная система, то неустойчивый усилитель с положительной обратной связью является автогенератором гармонических колебаний.*

◇◇ *Для генерирования гармонических колебаний в низкочастотной области находят применение RC-автогенераторы, не содержащие колебательных контуров.*

◇◇ *Установившаяся амплитуда колебаний в автогенераторе определяется видом нелинейной характеристики электронного прибора, входящего в схему автогенератора.*

◇◇ *Различают устойчивые и неустойчивые стационарные режимы автогенераторов, а также жесткий и мягкий режим самовозбуждения.*

## Вопросы

1. Сформулируйте принцип классификации обратных связей в динамических системах. Возможен ли случай, когда в одной и той же системе обратная связь на одной частоте будет положительной, а на другой — отрицательной?
2. Перечислите некоторые технические применения отрицательной обратной связи в усилительных устройствах.
3. Какова особенность частотных характеристик усилителя, охваченного цепью обратной связи с запаздыванием?
4. Приведите формулировки критериев устойчивости Рауса — Гурвица и Найквиста.
5. Перечислите характерные свойства операционных усилителей.
6. Почему соединение выхода операционного усилителя с его неинвертирующим входом приводит к неустойчивости усилителя?
7. Изобразите принципиальные схемы масштабного усилителя и аналогового интегратора, построенных на базе операционного усилителя.
8. Имеется экспериментальный макет автогенератора с трансформаторной связью. Автогенератор не возбуждается, несмотря на то что он собран из заведомо исправных деталей. С чего следует начать налаживание такой схемы?
9. Изобразите принципиальные схемы автогенераторов, собранных по схемам индуктивной и емкостной трехточек.
10. Зависит ли частота автоколебаний, генерируемых $RC$-автогенератором, от коэффициента усиления активного звена?
11. Каково условие самовозбуждения автогенератора с внутренней обратной связью?
12. Как определяется понятие средней крутизны электронного прибора?
13. В чем заключено принципиальное отличие мягкого и жесткого режимов автогенератора?
14. Как, зная вольт-амперную характеристику нелинейного активного элемента, определить границу между мягким и жестким режимами?

## Задачи

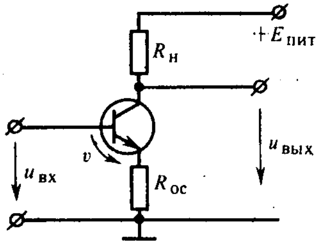
1. В системе с обратной связью основной элемент имеет коэффициент усиления $K_0 = 1000$, не зависящий от частоты. Цепь обратной связи характеризуется коэффициентом передачи

$$\beta_0 = 5 \cdot 10^{-4} \exp(-j45°).$$

Определите, какой, положительной или отрицательной, является обратная связь в данной системе.

2. Усилительное устройство имеет не зависящий от частоты коэффициент усиления $K_0 = 10\,000$. При изменении внешних условий, например температуры окружающей среды, наблюдается значительное изменение коэффициента усиления, такое, что $\Delta K_0/K_0 = 0.2$. Стабилизация параметров системы осуществляется с помощью отрицательной обратной связи. Найдите величину $\beta$, при которой нестабильность коэффициента усиления снижается в 10 раз, т. е. $\Delta K_{oc}/K_{oc} = 0.02$. Какова при этом величина коэффициента усиления системы с замкнутой обратной связью?

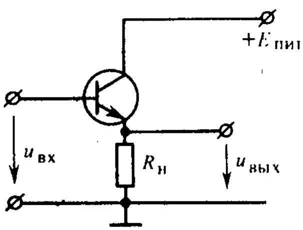
3. Покажите, что в усилителе, собранном по схеме




существует отрицательная обратная связь с параметром $\beta_0 = -R_{ос}/R_н$.

Указание. Ввести вспомогательное напряжение $v$ между базой и эмиттером (см. рисунок) и учесть, что переменная составляющая тока эмиттера $i_э = Sv$.

4. Найдите коэффициент передачи $K = u_{вых}/u_{вх}$ в схеме эмиттерного повторителя:




Крутизну характеристики $S$ транзистора положите известной.

5. Однокаскадный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой имеет активное сопротивление нагрузки $R_н = 1.6$ кОм. Паразитная емкость $C_п$, подключенная к коллектору транзистора, равна 50 пФ. Крутизна характеристики транзистора $S = 30$ мА/В. В цепь эмиттера включен резистор обратной связи $R_{ос} = 27$ Ом (см. условие задачи 3). Найдите граничные частоты усиления при наличии и при отсутствии отрицательной обратной связи.

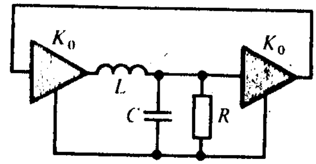
6. Используя критерий Рауса — Гурвица, исследуйте устойчивость малых колебаний в динамической системе, описываемой характеристическим уравнением:

а) $p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$,

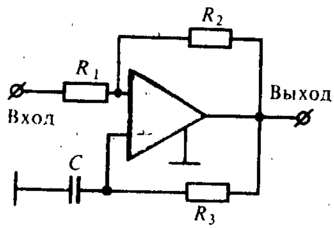
б) $p^4 + 2p^3 + 3p^2 + p + 1 = 0$.

7. Используя критерий Найквиста, исследуйте устойчивость системы с запаздывающей обратной связью (см. рис. 14.4).

8. С помощью критерия Найквиста исследуйте устойчивость замкнутой системы, содержащей два идеальных усилительных элемента с коэффициентами усиления $K_0$ каждый:




9. Найдите передаточную функцию системы:




10. Аналоговый интегратор, собранный на базе операционного усилителя (см. рис. 14.9), имеет следующие параметры: $R = 2.7$ кОм, $C = 1.8$ нФ. Операционный усилитель питается от источника с напряжением $E_{пит} = 12$ В. На вход интегратора подается сигнал $u_{вх} = 0.1\sigma(t)$. Вычислите сигнал на выходе и определите, через какой промежуток времени напряжение на выходе достигнет уровня напряжения источника питания.

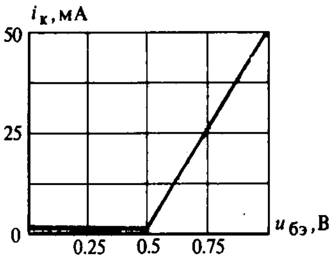
11. Синтезируйте активный $RC$-фильтр нижних частот с чебышевской характеристикой 2-го порядка при следующих исходных данных: $\omega_c = 1.5 \cdot 10^2$ 1/с, $\varepsilon = 0.75$.

12. В автогенераторе с трансформаторной связью (см. рис. 14.12) использован колебательный контур, настроенный на частоту $f_{рез} = 400$ кГц. Параметры контура: $L = 15$ мкГн, $R = 8$ Ом. Дифференциальная крутизна характеристики транзистора $S_{диф} = 1.5$ мА/В. Определите критическое значение коэффициента взаимоиндукции $M$, обеспечивающее самовозбуждение системы.

13. $RC$-автогенератор (см. рис. 14.14) генерирует гармонические колебания на частоте

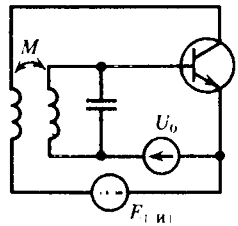
250 Гц. Выберите параметры схемы, обеспечивающие генерирование заданной частоты, предполагая, что автогенератор работает на границе самовозбуждения.

14. Характеристика транзистора аппроксимирована двумя отрезками прямых:




Постройте график зависимости средней крутизны $S_1$ от амплитуды высокочастотного напряжения $U$, полагая, что рабочая точка $U_0 = 0.75$ В.

15. В автогенераторе гармонических колебаний, собранном по схеме




использован транзистор с характеристикой, приведенной в условиях задачи 14. Параметры схемы: $\omega_0 = 10^6$ 1/с, $Q = 50$, $M = 0.2$ мкГн, $U_0 = 0{,}75$ В. Определите стационарную амплитуду автоколебаний. Начертите примерные графики зависимостей стационарной амплитуды от коэффициента взаимоиндукции и от величины напряжения смещения.

16. В автогенераторе, схема которого приведена в условиях предыдущей задачи, начальное смещение выбрано равным 0.25 В. Покажите, что система будет работать в жестком режиме. Найдите величину $M$, при которой амплитуда стационарных колебаний равна 1 В.

## Более сложные задания

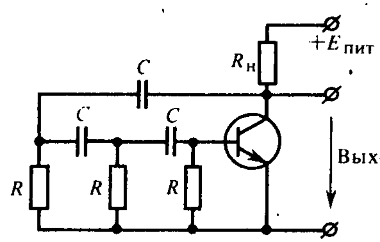
17. Покажите, что система с обратной связью, изображенная на рис. 14.1, может быть охарактеризована бесконечным соотношением вида

$$U_{вых} = KU_{вх} + \beta(KU_{вх} + \beta(KU_{вх} + \beta(KU_{вх} + \dots,$$

связывающим изображения входного и выходного сигналов. Исследуйте вопрос об эквивалентности такого представления и формулы (14.2). Рассмотрите трактовку процессов в системе с обратной связью как циркуляцию сигналов по кольцу обратной связи.

18. Постройте амплитудно-фазовую характеристику, исследуйте с помощью критерия Найквиста устойчивость трехкаскадного усилителя с резистивно-емкостными нагрузками, предполагая, что выход системы непосредственно соединен с ее входом.

19. Исследуйте условия самовозбуждения автоколебаний в $RC$-генераторе, собранном по схеме:



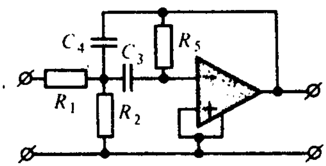

Найдите выражение для расчета генерируемой частоты, предполагая, что можно пренебречь влиянием коэффициента усиления активного элемента на мнимую часть корней характеристического уравнения.

20. Исследуйте задачу об амплитудах стационарных колебаний в распределенной автоколебательной системе, предположив, что погонная шунтирующая проводимость, описывающая действие активной среды, задана выражением

$$G_1 = -g_1 + aU^2,$$

где $g_1$ α — постоянные, $U$ — амплитуда высокочастотных колебаний.

21. Покажите, что передаточная функция, отвечающая полосовому фильтру, реализуется в схеме вида:




# Глава 15
# Дискретные сигналы. Принципы цифровой фильтрации

Различие между дискретными и непрерывными (аналоговыми) сигналами подчеркивалось в гл. 1 при рассмотрении классификации радиотехнических сигналов. Напомним основное свойство дискретного сигнала: его значения определены не для всех моментов времени, а лишь в счетном множестве точек (... , $t_0$, $t_1$, $t_2$, ...). Поэтому если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет математическую модель с обычными свойствами гладкой функции, то дискретный сигнал $x_д(t)$ описывается последовательностью (..., $x_0$, $x_1$, $x_2$, ...) своих отсчетных значений в точках (..., $t_0$, $t_1$, $t_2$, ...) соответственно.

Дискретные сигналы естественно возникают в тех случаях, когда источник сообщений выдает информацию в фиксированные моменты времени. Например, типичным дискретным сигналом являются сведения о температуре воздуха, передаваемые радиовещательными станциями несколько раз в сутки. Характерная черта дискретного сигнала проявляется здесь предельно ярко: в паузах между этими сообщениями никаких сведений, касающихся описываемого объекта, нет. Однако фактически температура воздуха изменяется во времени достаточно плавно, так что данные измерений являются результатом дискретизации непрерывного сигнала — операции, которая заключается в фиксировании отсчетных значений.

Дискретные сигналы приобрели особое значение в последние десятилетия под влиянием как развития техники связи, так и способов обработки информации на быстродействующих ЭВМ. Наметилась тенденция создания специализированных вычислительных устройств, так называемых цифровых фильтров, служащих для обработки дискретной информации.

Настоящая глава посвящена принципам математического описания дискретных сигналов, а также теоретическим основам построения устройств для их обработки.

## 15.1 Дискретные импульсные последовательности

Дискретные сигналы стали впервые использоваться еще в 40-х годах при создании радиотехнических систем с импульсной модуляцией. Этот вид модуляции отличается тем, что в качестве несущего колебания вместо гармонического сигнала используется периодическая последовательность коротких импульсов.

**Принцип импульсной модуляции.** Рассмотрим простейший импульсный модулятор, структурная схема которого приведена на рис. 15.1.

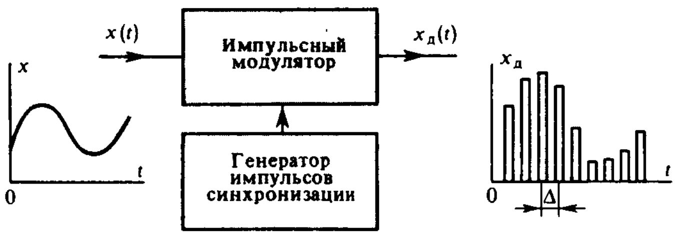



Рис. 15.1. Структурная схема импульсного модулятора

Импульсный модулятор представляет собой устройство с двумя входами. На один из входов подается исходный аналоговый сигнал $x(t)$, подлежащий дискретизации. На другом входе модулятора действует периодическая последовательность коротких синхронизирующих импульсов, следующих во времени через равные промежутки $\Delta$, называемые *интервалом* (*шагом*) *дискретизации*. Схема модулятора построена таким образом, что в момент подачи каждого импульса синхронизации происходит измерение мгновенного значения сигнала $x(t)$ и на выходе устройства возникает короткий импульс, площадь которого пропорциональна этому мгновенному значению.

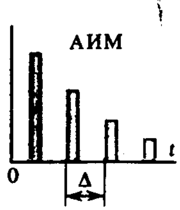
● интервал дискретизации

Описанный принцип позволяет записать следующую математическую модель дискретного сигнала, полученного путем импульсной модуляции:

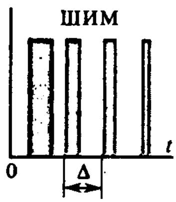
$$\boxed{x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta(t-k\Delta).} \qquad (15.1)$$

Согласно данной модели, значения сигнала в паузах условно считаются равными нулю

Обратим внимание на то, что с формально-математической точки зрения характер тех отдельных импульсов, из которых складывается выходной сигнал, совершенно безразличен. В част-




ности, эти импульсы могут иметь одинаковую длительность, в то время как их амплитуда будет пропорциональна мгновенным значениям дискретизуемого сигнала в точках отсчетов. Такой вид преобразования непрерывного сигнала в дискретный получил название *амплитудно-импульсной модуляции* (АИМ). Возможен и другой способ — так называемая *широтно-импульсная модуляция* (ШИМ), отличающаяся тем, что амплитуды выходных импульсов постоянны, а их длительность (ширина) связана прямой пропорциональностью с мгновенными значениями исходного аналогового колебания.



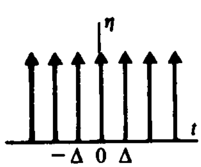

Выбор того или иного способа импульсной модуляции диктуется рядом технических соображений, которые относятся как к удобству схемной реализации, так и к характерным особенностям передаваемых сигналов. Например, использование АИМ может оказаться нежелательным, если исходный модулирующий сигнал изменяется в очень широких пределах, т. е., как часто говорят, обладает широким динамическим диапазоном. Это связано с тем, что для неискаженной передачи такого сигнала требуется передатчик со строго линейной зависимостью между амплитудами входного и выходного сигналов. Системы ШИМ не накладывают такого требования к линейности характеристик передающего устройства. Однако, как правило, практическая реализация их несколько сложнее, чем систем АИМ.

■ **применение систем с импульсной модуляцией**

Как упоминалось в гл. 1, важнейшее применение импульсно-модулированных сигналов — создание многоканальных систем связи с временны́м разделением каналов. К тому же в ряде случаев системы с импульсной модуляцией позволяют реализовать бо́льшую помехоустойчивость по сравнению с той, которая может быть получена при использовании в качестве несущего колебания простого гармонического сигнала.

● **дискретизирующая последовательность**

**Спектральная плотность импульсного дискретного сигнала.** Исследуем вопрос о той трансформации спектра, которая наблюдается при дискретизации произвольного аналогового сигнала. Для этого обратимся к формуле (15.1) и заметим, что дискретный сигнал $x_д(t)$ является произведением исходного колебания $x(t)$ и так называемой *дискретизирующей последовательности*




$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,\Delta)\,, \tag{15.2}$$

образованной $\delta$-импульсами, которые следуют через равные интервалы времени $\Delta$. Как известно, спектр произведения двух сигналов выражается через свертку их спектральных плотностей (см. гл. 2). Поэтому, если известны законы соответствия сигналов и спектров: $x(t) \leftrightarrow S_x(\omega)$ и $\eta(t) \leftrightarrow S_\eta(\omega)$, то спектральная плотность дискретного сигнала $S_{x\text{д}}(\omega)$ на основании (2.35) равна

$$S_{x\text{д}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\xi) S_x(\omega - \xi) \, d\xi \,. \tag{15.3}$$

Для нахождения спектральной плотности $S_\eta(\omega)$ разложим периодическую функцию $\eta(t)$ в ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/\Delta} \,.$$

Коэффициенты этого ряда

$$C_n = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-j2\pi nt/\Delta} dt = \frac{1}{\Delta} \,.$$

Обратившись к формуле (2.35), получаем

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right), \tag{15.4}$$

• спектр дискретизирующей последовательности

т. е. спектр дискретизирующей последовательности состоит из бесконечной совокупности δ-импульсов в частотной области, располагающихся через одинаковые промежутки $2\pi/\Delta$ (1/с).

Наконец, подставив (15.4) в (15.3) и изменив порядок следования операций суммирования и интегрирования, находим

$$\boxed{S_{x\text{д}}(\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right).} \tag{15.5}$$

Итак, спектр дискретизованного сигнала представляет собой (с точностью до несущественного масштабного множителя $1/\Delta$) результат суммирования бесконечного числа «копий» спектра исходного сигнала. Эти копии располагаются на оси частот через равные промежутки $2\pi/\Delta$, равные значению круговой частоты дискретизации (рис. 15.2).

▲ решите задачу 1

**Восстановление непрерывного сигнала по импульсной последовательности.** Если $\omega_\text{в}$ — верхняя граничная частота в спектре исходного сигнала, то, как видно из рис. 15.2, при $\omega_\text{в} < \pi/\Delta$ отдельные лепестки спектральной диаграммы перестают накла-

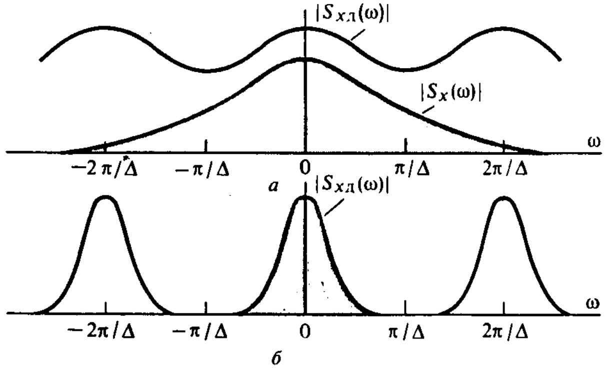



Рис. 15.2. Спектральная плотность дискретизованного сигнала при различных значениях верхней граничной частоты в спектре:
*а* — верхняя граничная частота велика; *б* — верхняя граничная частота мала (цветом обозначена спектральная плотность исходного сигнала, подвергнутого дискретизации)

дываться друг на друга. Поэтому такой непрерывный сигнал, подвергнутый импульсной дискретизации, может быть вновь восстановлен с помощью идеального ФНЧ, если на вход фильтра подать импульсную последовательность вида (15.1). Наибольшее допустимое значение шага дискретизации составит при этом величину $\Delta=\pi/\omega_{\text{в}}=1/(2f_{\text{в}})$, что полностью согласуется с теоремой Котельникова.

Пусть фильтр, служащий для восстановления непрерывного сигнала, имеет частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega)=\begin{cases}0, & \omega<\omega_{\text{в}},\\ K_0, & -\omega_{\text{в}}<\omega<\omega_{\text{в}},\\ 0, & \omega>\omega_{\text{в}}.\end{cases}$$

Импульсная характеристика этого устройства

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega=\frac{K_0\,\omega_{\text{в}}}{\pi}\;\frac{\sin\omega_{\text{в}}t}{\omega_{\text{в}}t}\;.$$

Амплитудный коэффициент выбран из соображений наглядности результата

Полагая, что $K_0=\pi/\omega_{\text{в}}$, и принимая во внимание, что дискретный сигнал (15.1) есть взвешенная сумма δ-импульсов, находим сигнал на выходе восстанавливающего фильтра

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\frac{\sin\omega_{\text{в}}\left(t-\frac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)}{\omega_{\text{в}}\left(t-\frac{k\pi}{\omega_{\text{в}}}\right)}\,, \qquad (15.6)$$

который в соответствии с (5.18) в точности повторяет исходное колебание $x(t)$ с ограниченным спектром.

Идеальный ФНЧ физически нереализуем и может служить лишь теоретической моделью, пригодной для объяснения принципа восстановления сообщения по его дискретным импульсным отсчетам. Реальный фильтр нижних частот имеет АЧХ, которая либо охватывает несколько лепестков спектральной диаграммы, либо, концентрируясь вблизи нулевой частоты, оказывается значительно у́же центрального лепестка. В качестве примера на рис. 15.3 приведены кривые, характеризующие сигнал на выходе *RC*-цепи, используемой в качестве восстанавливающего фильтра.

**Восстанавливающим фильтром может служить ФНЧ с характеристикой Баттерворса высокого порядка**

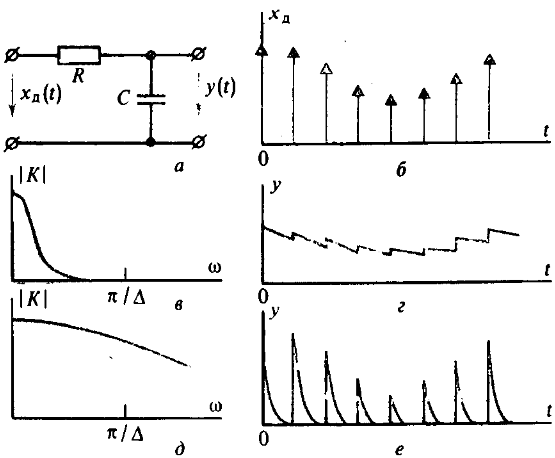



Рис. 15.3. Восстановление непрерывного сигнала по его импульсным отсчетам с помощью *RC*-цепи:

*а* — схема фильтра; *б* — дискретный сигнал; *в*, *г* — АЧХ фильтра и сигнал на его выходе в случае, когда постоянная времени $RC \gg \Delta$; *д*, *е* — то же, для случая $RC \ll \Delta$

Из приведенных графиков видно, что реальный восстанавливающий ФНЧ неизбежно искажает исходное колебание. Заметим, что для целей восстановления сигнала можно использовать не только центральный, но и любой боковой лепесток спектральной диаграммы дискретного сигнала. Для этого, однако, помимо низкочастотной фильтрации потребуется провести преобразование частоты или синхронное детектирование.

## 15.2 Дискретизация периодических сигналов

В практике исследования сигналов с помощью ЭВМ типична такая ситуация: непрерывный сигнал $x(t)$ на интервале времени $(0, T)$ описывается своими отсчетными значениями $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, взятыми соответственно в моменты времени $(0, \Delta, \dots, (N-1)\Delta)$; полное число отсчетов $N=T/\Delta$. Массив этих чисел, вещественных или комплексных, является той единственной информацией, по которой можно судить о спектральных свойствах сигнала $x(t)$. Методика изучения таких дискретных сигналов состоит в том, что полученная выборка отсчетных значений мысленно повторяется бесконечное число раз. В результате сигнал становится периодическим (рис. 15.4).

Выделенные отсчеты относятся к интервалу периодичности

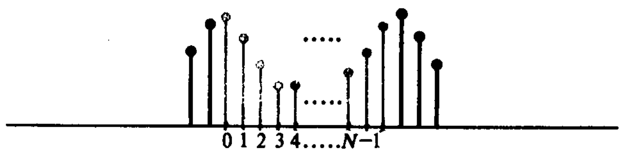



Рис. 15.4. Дискретное представление периодического сигнала

Сопоставив такому сигналу некоторую математическую модель, можно воспользоваться разложением в ряд Фурье и найти соответствующие амплитудные коэффициенты. Совокупность этих коэффициентов образует спектр дискретного периодического сигнала.

**Дискретное преобразование Фурье.** Воспользуемся моделью в виде последовательности δ-импульсов и сопоставим исходному колебанию $x(t)$ его дискретное представление на интервале $(0, T)$:

$$x_д(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \delta(t - k\Delta)\,, \tag{15.7}$$

где $x_k = x(k\Delta)$ — отсчетные значения в $k$-й точке.

Представим дискретную модель (15.7) комплексным рядом Фурье

$$x_д(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{j2\pi nt/T} \tag{15.8}$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x_д(t)\, e^{-j2\pi nt/T}\, dt. \tag{15.9}$$

Подставляя (15.7) в (15.9) и вводя безразмерную переменную $\xi = t/\Delta$, получим

$$C_n \doteq \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \delta(t - k\Delta)\, e^{-j2\pi n t/T}\, dt =$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \delta(\xi - k)\, e^{-j2\pi n \xi/N}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{N} \delta(\xi - k)\, e^{-j2\pi n \xi/N}\, d\xi\ .$$

Наконец, используя фильтрующее свойство δ-функции, имеем

▲ решите задачу 2

$$\boxed{C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, e^{-j2\pi n k/N}} \qquad (15.10)$$

Формула (15.10) определяет последовательность коэффициентов, образующих *дискретное преобразование Фурье* (*ДПФ*) рассматриваемого сигнала. Отметим следующие очевидные свойства ДПФ.

● свойства дискретного преобразования Фурье

1. Дискретное преобразование Фурье есть линейное преобразование, т. е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.

2. Число различных коэффициентов $C_0, C_1, \ldots, C_{N-1}$, вычисляемых по формуле (15.10), равно числу $N$ отсчетов в выборке. Действительно, при $n = N$ коэффициент $C_N = C_0$.

3. Коэффициент $C_0$ (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\ .$$

4. Если число отсчетов $N$ — четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, (-1)^k$$

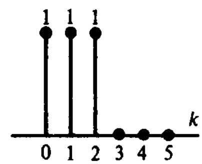
5. Пусть отсчетные значения $x_k$ — вещественные числа. Тогда коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \, e^{-j2\pi(N-n)k/N} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \, e^{j2\pi nk/N} = C_n^* .$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты $C_{N/2+1}, \ \ldots, \ C_{N-1}$ отвечают отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра сигнала они не играют никакой роли и их можно не вычислять.

**Пример 15.1.** *Дискретный сигнал на интервале своей периодичности задан шестью равноотстоящими отсчетами* $\{x_k\}=(1, 1, 1, 0, 0, 0)$. *Найти коэффициенты ДПФ этого сигнала.*




Используя основную формулу (15.10), непосредственно вычисляем:

$$C_0 = {}^3/_6 = 0.5,$$

$$C_1 = {}^1/_6\left(1 + 1 \cdot e^{-j\pi/3} + 1 \cdot e^{-j2\pi/3}\right) = {}^1/_6\left(1 - j\sqrt{3}\right),$$

$$C_2 = {}^1/_6\left(1 + 1 \cdot e^{-j2\pi/3} + 1 \cdot e^{-j4\pi/3}\right) = 0,$$

$$C_3 = {}^1/_6\left(1 + e^{j\pi} + e^{j2\pi}\right) = {}^1/_6.$$

Последующие коэффициенты находятся на основании их сопряженности:

$$C_4 = C_2^* = 0; \quad C_5 = C_1^* = {}^1/_6\left(1 + j\sqrt{3}\right).$$

Итак, располагая дискретным сигналом с числом отсчетов $N=6$, можно найти постоянную составляющую, а также комплексные амплитуды первой, второй и третьей гармоник исходного непрерывного сигнала. Ясно, что при любом четном $N$ число находимых гармоник составляет половину числа отсчетов. Это положение непосредственно вытекает из теоремы Котельникова. Действительно, верхняя граничная частота в спектре дискретизуемого сигнала должна находиться из соотношения $f_в = 1/(2\Delta) = (N/2)f_1$, где $f_1 = 1/T$ — частота первой гармоники.

● число вычисляемых гармоник

**Восстановление исходного сигнала по ДПФ.** Если на основании отсчетной выборки $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ вещественного сигнала найдены коэффициенты ДПФ $(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{N/2})$, то по ним всегда можно восстановить исходный сигнал $x(t)$, который был подвергнут дискретизации. Ряд Фурье такого сигнала принимает, очевидно, вид конечной суммы

$$x(t) = C_0 + 2|C_1| \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) +$$

$$+ 2|C_2| \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi_2\right) + \ldots$$

$$\ldots + |C_{N/2}| \cos\left(\frac{N\pi t}{T} + \varphi_{N/2}\right), \qquad (15.11)$$

Заранее предполагается, что исходный сигнал удовлетворяет условиям теоремы Котельникова

где $\varphi_i = \arg C_i$ — фазовый угол соответствующего коэффициента ДПФ. В качестве примера на рис. 15.5 изображен сигнал $x(t)$, восстановленный по своим отсчетам в соответствии с данными примера 15.1. На основании (15.11) запись этого сигнала такова:

$$x(t) = {}^1/_2 + {}^2/_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{3}\right) + {}^1/_6 \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right).$$

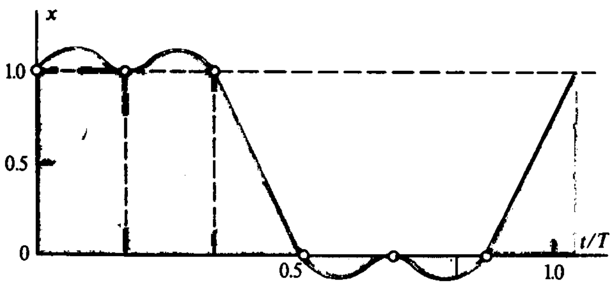



Рис. 15.5. Сигнал, восстановленный по коэффициентам ДПФ

Следует особо подчеркнуть, что восстановление непрерывного сигнала по формуле (15.11) есть *не приближенная, а точная операция,* полностью эквивалентная получению текущих значений сигнала с ограниченным спектром по его выборкам, образующим ряд Котельникова. Однако процедура, использующая ДПФ, в ряде случаев предпочтительна, поскольку она приводит к конечным суммам гармоник, в то время как ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально должен содержать бесконечное число членов.

▲ решите задачу 3

**Обратное дискретное преобразование Фурье.** Задача дискретного спектрального анализа может быть поставлена и по-иному. Предположим, что коэффициенты $C_n$, образующие ДПФ, заданы. Положим в формуле (15.8) $t = k\Delta$ и учтем, что суммированию подлежит лишь конечное число членов ряда, которые отвечают тем гармоникам, которые содержатся в спектре исходного сигнала. Таким образом, получаем формулу для вычисления отсчетных значений

$$\boxed{x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j2\pi nk/N},} \qquad (15.12)$$

выражающую алгоритм *обратного дискретного преобразования Фурье* (*ОДПФ*).

Взаимно дополняющие друг друга формулы (15.10) и (15.12) являются дискретными аналогами обычной пары преобразований Фурье для непрерывных сигналов.

▲ решите задачу 4

В настоящее время дискретный спектральный анализ является одним из наиболее распространенных методов численного исследования сигналов с помощью ЭВМ. В Приложении 5 в качестве примера дана программа на ФОРТРАНе для вычисления ДПФ. Следует отметить, что при большой длине выборок прямое вычисление сумм вида (15.10) или (15.12) требует значительной затраты машинного времени. В связи с этим широкое применение получило так называемое *быстрое преобразование Фурье* (*БПФ*), которое позволяет за счет чисто алгоритмических средств существенно сократить объем вычислений, требуемых для нахождения коэффициентов ДПФ и ОДПФ [35].

● быстрое преобразование Фурье

**Дискретная свертка.** По аналогии с обычной сверткой двух сигналов

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

вводят *дискретную свертку* — сигнал, представляемый совокупностью своих отсчетных значений

$$\boxed{f_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\, y_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,.} \qquad (15.13)$$

Найдем связь между коэффициентами дискретной свертки и коэффициентами сигналов $x_д(t)$ и $y_д(t)$. Для этого выразим текущие значения коэффициентов $x_k$ и $y_{m-k}$ как ОДПФ от соответствующих спектров:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn}\, e^{j2\pi nk/N},$$

$$y_{m-k} = \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl}\, e^{j2\pi l(m-k)/N},$$

а затем подставим эти величины в (15.13):

$$f_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} C_{xn}\, e^{j2\pi nk/N}\right] \times \left[\sum_{l=0}^{N-1} C_{yl}\, e^{j2\pi l(m-k)/N}\right]$$

Изменив порядок суммирования, имеем

$$f_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} C_{xn}C_{yl}\,e^{j2\pi lm/N} \times \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-l)k/N}. \quad (15.14)$$

Нетрудно заметить, что внутренняя сумма

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-l)k/N} = \begin{cases} N, & \text{если} \quad n = l, \\ 0, & \text{если} \quad n \neq l. \end{cases}$$

Здесь верхнее равенство очевидно; обращение суммы в нуль при $n \neq l$ следует из того, что все слагаемые есть комплексные числа с единичным модулем и с линейно нарастающим аргументом. При суммировании их в виде векторов они всегда образуют на комплексной плоскости правильный замкнутый многоугольник. Воспользовавшись этим результатом, на основании (15.14) получаем

$$\boxed{f_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn}C_{yn}\,e^{j2\pi mn/N}.} \quad (15.15)$$

Описанный здесь алгоритм свертки периодических сигналов иногда называют круговой или циклической сверткой

Поскольку формула (15.15) есть ОДПФ, то приходим к выводу, что коэффициенты преобразования Фурье свертки являются произведениями коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов:

$$C_{fk} = C_{xk}C_{yk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (15.16)$$

Помимо установления полезной аналогии между спектральными свойствами непрерывных и дискретных сигналов этот результат имеет большое значение в теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. Оказывается, что если выборки сигналов достаточно длинны (например, содержат несколько тысяч элементов), то для вычисления их свертки целесообразно вначале найти их ДПФ, перемножить коэффициенты, а затем воспользоваться формулой (15.15), применив алгоритм БПФ. Такой способ вычислений часто более экономичен, чем прямое использование формулы (15.13).

## 15.3 Теория z-преобразования

При анализе и синтезе дискретных и цифровых устройств получило распространение так называемое $z$-преобразование, играющее по отношению к дискретным сигналам такую же роль, как интегральные преобразования Фурье и Лапласа для непрерывных сигналов. В данном параграфе излагаются основные теоретические вопросы, связанные со свойствами этого функционального преобразования.

**Определение *z*-преобразования.** Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ — числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчетные значения некоторого сигнала. Поставим в однозначное соответствие данной последовательности сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной $z$:

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}. \qquad (15.17)$$

В математике *z*-преобразование называют также производящей функцией исходной последовательности

Назовем эту сумму, если она существует, *z-преобразованием* последовательности $\{x_k\}$. Целесообразность введения такого математического объекта связана с тем, что свойства дискретных последовательностей чисел можно изучать, исследуя *z*-преобразования этих последовательностей обычными методами математического анализа.

На основании формулы (15.17) непосредственно получаются *z*-преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу с единственным отсчетом $\{x_k\} = (1, 0, 0, \ldots)$ соответствует $X(z) = 1$. Если же, например, $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, то

▲ решите задачу 5

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}.$$

**Сходимость ряда.** Если в ряде (15.17) присутствует бесконечное число слагаемых с отличными от нуля коэффициентами, то необходимо исследовать вопрос его сходимости. Из теории функций комплексного переменного [11] известно следующее. Пусть коэффициенты рассматриваемого ряда удовлетворяют условию

$$|x_k| < M R_0^k \qquad (15.18)$$

при любых $k \geqslant 0$. Здесь $M > 0$ и $R_0 > 0$ — постоянные вещественные числа. Тогда ряд (15.17) сходится для любых $z$, таких, что $|z| > R_0$. В этой области сходимости сумма ряда представляет собой аналитическую функцию переменной $z$, не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек.

Рассмотрим, например, дискретный сигнал $\{x_k\} = (1, 1, 1, \ldots)$, образованный одинаковыми единичными отсчетами и служащий моделью обычной функции включения. Бесконечный ряд

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots$$

является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых $z$ в кольце $|z|>1$. Суммируя прогрессию, получаем

$$X(z)=\frac{1}{1-1/z}=\frac{z}{z-1}\ .$$

На границе области аналитичности при $z=1$ эта функция имеет единственный простой полюс.

Аналогично получается $z$-преобразование бесконечного дискретного сигнала вида

$$\{x_k\}=(1,a,a^2,\ldots),$$

где $a$ — некоторое вещественное число. Здесь

$$X(z)=\frac{1}{1-(a/z)}=\frac{z}{z-a}\ ,$$

причем ряд сходится и разложение имеет смысл в кольцевой области $|z|>a$.

**$z$-преобразование непрерывных функций.** Полагая, что отсчеты $\{x_k\}$ есть значения непрерывной функции $x(t)$ в точках $t=k\Delta$, можно любому сигналу $x(t)$ сопоставить его $z$-преобразование при выбранном шаге дискретизации:

▲ решите задачу 6

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k\Delta)\,z^{-k}\ . \tag{15.19}$$

Например, если $x(t)=\exp(\alpha t)$, то соответствующее $z$-преобразование

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\alpha k\Delta}\,z^{-k}=\frac{z}{z-\exp(\alpha\Delta)}$$

является аналитической функцией при $|z|>\exp(\alpha\Delta)$.

**Обратное $z$-преобразование.** Пусть $X(z)$ — функция комплексной переменной $z$, аналитическая в кольцевой области $|z|>R_0$. Замечательная особенность $z$-преобразования состоит в том, что функция $X(z)$, обладающая данным свойством, определяет собой всю бесконечную совокупность отсчетных коэффициентов $(x_0\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$.

Действительно, умножим обе части (15.17) на множитель $z^{m-1}$:

$$z^{m-1}X(z)=x_0z^{m-1}+x_1z^{m-2}+\ldots+x_mz^{-1}+\ldots, \tag{15.20}$$

а затем вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую собой все полюсы функции $X(z)$. При этом

Обход контура интегрирования проводится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки

воспользуемся следующим фундаментальным фактом, вытекающим из теоремы Коши:

$$\oint z^n \, dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если} \quad n = -1, \\ 0, & \text{если} \quad n \neq -1. \end{cases}$$

Тогда в нуль обратятся интегралы от всех слагаемых правой части, за исключением слагаемого с номером $m$, и поэтому

$$\boxed{x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} X(z) \, dz .} \qquad (15.21)$$

обратное z-преобразование

Данная формула называется *обратным z-преобразованием.*

---

**Пример 15.2.** *Задано z-преобразование вида*

$X(z) = (z+1)/z.$

*Найти коэффициенты дискретного сигнала, отвечающего этой функции.*

Прежде всего отмечаем, что $X(z)$ аналитична во всей плоскости, за исключением точки $z=0$, и поэтому действительно может быть $z$-преобразованием некоторого дискретного сигнала.

Обращаясь к формуле (15.21), находим, что

$$x_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(z+1)}{z^2} \, dz = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(z+1)}{z} \, dz = 1,$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-2} (z-1) \, dz = 0$$

решите задачу 7

при любых $m \geqslant 2$. Таким образом, исходный дискретный сигнал имеет вид (1, 1, 0, 0, 0, ...).

---

**Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье.** Определим пр $t \geqslant 0$ дискретный сигнал вида идеальной импульсной последс вательности:

$$x_\text{д}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, \delta(t - k\Delta) .$$

Преобразовав его по Лапласу, получим изображение

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, e^{-pk\Delta} , \qquad (15.22)$$

которое непосредственно переходит в $z$-преобразование, если выполнить подстановку $z = \exp(p\Delta)$. Если же положить $z = \exp(j\omega\Delta)$, то выражение

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-j\omega k\Delta} \tag{15.23}$$

служит преобразованием Фурье импульсной последовательности.

Установленный здесь факт играет большую роль и дает возможность проводить известные аналогии между свойствами непрерывных и дискретных сигналов.

**Важнейшие свойства $z$-преобразования.**

1. *Линейность.* Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — две числовые последовательности, отображающие некоторые дискретные сигналы, причем известны соответствующие $z$-преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\} = \{\alpha x_k + \beta y_k\}$ отвечает преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ при любых постоянных $\alpha$ и $\beta$. Доказательство проводится подстановкой суммы в формулу (15.17).

Перечисленные здесь свойства имеют прямую аналогию со свойствами преобразований Фурье и Лапласа аналоговых сигналов

2. *$z$-преобразование смещенного сигнала.* Рассмотрим дискретный сигнал $\{y_k\}$, получающийся из дискретного сигнала $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т. е. когда $y_k = x_{k-1}$. Непосредственное вычисление $z$-преобразования приводит к следующему результату:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z). \tag{15.24}$$

Заметим, что символ $z^{-1}$ служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации) в $z$-области.

оператор единичной задержки

3. *$z$-преобразование свертки.* Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные сигналы, для которых определена функция свертки

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau. \tag{15.25}$$

Применительно к дискретным сигналам по аналогии с (15.25) принято вводить дискретную свертку $\{f_k\}$ — последовательность чисел, общий член которой

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{15.26}$$

Вычислим $z$-преобразование дискретной свертки:

Подобную дискретную свертку в отличие от круговой иногда называют линейной сверткой

● свойство дискретной свертки

$$F(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x_k y_{m-k}z^{-m}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}y_n z^{-n}=X(z)\,Y(z). \qquad (15.27)$$

Итак, свертке двух дискретных сигналов отвечает произведение их $z$-преобразований.

## 15.4 Цифровые фильтры

В настоящее время широко используются методы обработки радиотехнических сигналов с помощью микроэлектронных вычислительных устройств и систем. В данном параграфе рассматривается простейший, наиболее изученный и внедренный класс систем дискретной обработки сигналов — так называемые *линейные стационарные цифровые фильтры*. Выполняя, подобно аналоговым цепям, операцию частотной фильтрации, цифровые фильтры (ЦФ) обладают рядом существенных преимуществ. Сюда относятся, например, высокая стабильность параметров, возможность получать самые разнообразные формы АЧХ и ФЧХ. Цифровые фильтры не требуют настройки и легко реализуются в виде алгоритмов и программ для ЭВМ.

**Принцип цифровой обработки сигналов.** На рис. 15.6 приведена основная структурная схема для цифровой обработки сигналов.

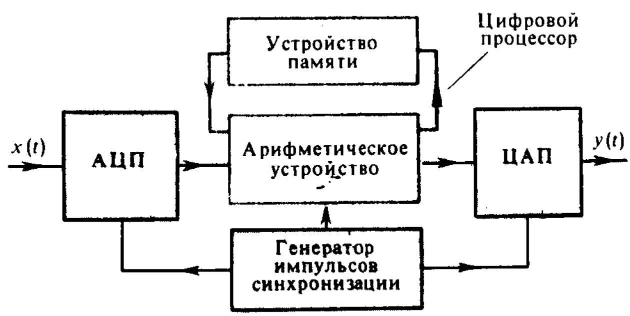



Рис. 15.6. Структурная схема цифровой обработки непрерывных сигналов

● аналого-цифровой преобразователь

Непрерывный входной сигнал $x(t)$ поступает в *аналого-цифровой преобразователь* (*АЦП*), управляемый синхронизирующими импульсами от специального генератора, задающего частоту дискретизации сигнала. В момент подачи импульса синхронизации на выходе АЦП возникает сигнал, отображающий результат измерения мгновенного значения входного колебания в виде двоичного числа с фиксированным количеством разрядов. В зависимости от особенности построения устройства это число либо соответствует последовательности коротких импульсов (передача в последовательном коде), либо отвечает совокупности уровней напряжений на сигнальных шинах отдельных разрядов (передача в параллельном коде). Преобразованный таким образом сигнал поступает в основной блок устройства, так называемый *цифровой процессор*, состоящий из арифметического устройства и устройства памяти. Арифметическое устройство выполняет над цифрами ряд операций, таких, как умножение, сложение и сдвиг во времени на заданное число интервалов дискретизации. В блоке памяти может храниться некоторое число предшествующих отсчетов входного и выходного сигналов, которые необходимы для выполнения операций обработки.

● **цифровой процессор**

Цифровой процессор преобразует поступающие в него числа в соответствии с заданным алгоритмом фильтрации и создает на своем выходе последовательность двоичных чисел, представляющих выходной сигнал. Если в дальнейшем необходимо иметь информацию в аналоговой форме, то используется *цифро-аналоговый преобразователь* (*ЦАП*). Однако в составе ЦФ это устройство может и отсутствовать, если в дальнейшем сигналы подвергаются только цифровым преобразованиям.

● **цифро-аналоговый преобразователь**

Основной технический показатель ЦФ — его быстродействие зависит как от скорости протекания переходных процессов в микроэлектронных компонентах, так и от сложности алгоритма фильтрации.

Если в начале 70-х годов предельные частоты сигналов, обрабатываемых с помощью ЦФ, составляли несколько килогерц, то достижения современной микроэлектроники непрерывно расширяют этот диапазон. Цифровая фильтрация сигналов получила новый стимул развития с появлением относительно недорогих и надежных микропроцессоров и устройств полупроводниковой памяти, выполненных по технологии больших интегральных схем (БИС).

**Квантование сигналов в ЦФ.** Специфика любого цифрового устройства — представление сигналов в виде последовательности чисел с ограниченным числом разрядов. Поэтому мгновенное значение сигнала дискретизируется по уровню таким образом, что интервалом дискретизации (минимальной разностью между двумя соседними уровнями) выступает единица младшего двоичного разряда.

Точное значение отсчета сигнала в двоичной форме имеет следующий вид:

$$\tilde{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}, \tag{15.28}$$

где коэффициенты $\alpha_n = 0$ или 1. При ограничении длины числа некоторым количеством разрядов $N$ вместо точного значения получается его округленное (как часто говорят, *машинное*) представление

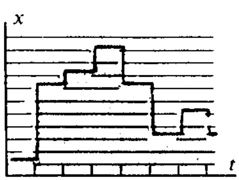
**машинное представление чисел в ЦФ**

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n 2^{-n} + \beta_N 2^{-N}, \tag{15.29}$$

причем коэффициент $\beta_N$ равен либо $\alpha_N$, либо $\alpha_N + 1$ в зависимости от того, нуль или единица содержится в $(N+1)$-м разряде.

**квантованные сигналы**

В радиотехнике дискретные сигналы, уровни которых могут принимать лишь счетное множество значений, называют *квантованными сигналами*. Квантование сигналов приводит к специфическим погрешностям при обработке таких сигналов, которые получили название *шума квантования*. Для снижения этих погрешностей существует прямой путь — использование двоичных чисел с большим количеством разрядов. Однако при этом неизбежно снижается быстродействие ЦФ из-за увеличения времени на выполнение операций с многоразрядными числами. Поэтому на практике в микропроцессорах для цифровой обработки сигналов и дискретного управления обычно применяют двоичные числа с количеством разрядов от 4 до 16.




Отметим, что принцип квантования уровней находит применение и в технике аналоговых сигналов, в особенности при создании различных систем помехоустойчивой импульсной модуляции.

**Алгоритм линейной цифровой фильтрации.** Математическая теория цифровых фильтров переносит на случай дискретных сигналов все основные положения, известные из теории линейных систем, преобразующих непрерывные сигналы.

Как известно, линейная стационарная система преобразует непрерывный входной сигнал $x(t)$ таким образом, что на ее выходе возникает колебание $y(t)$, равное свертке $x(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau . \qquad (15.30)$$

Цифровой фильтр есть дискретная система (физическое устройство или программа для ЭВМ), которая преобразует последовательность числовых отсчетов $\{x_k\}$ входного сигнала в последовательность $\{y_k\}$ отсчетов выходного сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \ldots) \qquad (15.31)$$

или сокращенно $\{x_k\} \Rightarrow \{y_k\}$.

Линейный цифровой фильтр характерен тем, что сумма любого числа входных сигналов, умноженных на произвольные коэффициенты, преобразуется в сумму его откликов на отдельные слагаемые, т. е. из соответствий

$$\{x_k^{(1)}\} \Rightarrow \{y_k^{(1)}\}, \ldots, \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{y_k^{(N)}\}$$

следует, что

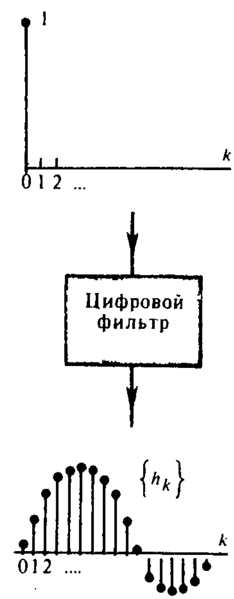
$$\alpha_1\{x_k^{(1)}\} + \ldots + \alpha_N\{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{\alpha_1 x_k^{(1)} + \ldots + \alpha_N x_k^{(N)}\} \qquad (15.32)$$

при любых коэффициентах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$.

**импульсная характеристика цифрового фильтра**

Для того чтобы обобщить формулу (15.30) на дискретный случай, вводят понятие *импульсной характеристики ЦФ*. По определению, такая импульсная характеристика представляет собой дискретный сигнал $\{h_k\}$, который служит реакцией ЦФ на «единичный импульс» (1, 0, 0, 0, ...):

$$\boxed{(1, 0, 0, 0, \ldots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, \ldots).} \qquad (15.33)$$




Линейный ЦФ будет стационарен, если при смещении входного единичного импульса на любое число интервалов дискретизации импульсная характеристика смещается таким же образом, не изменяясь по форме. Например:

$$(0, 1, 0, 0, \ldots) \Rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \ldots),$$
$$(0, 0, 1, 0, \ldots) \Rightarrow (0, 0, h_0, h_1, h_2, \ldots), \qquad (15.34)$$
$$\cdots\cdots$$

Рассмотрим, каким образом из свойств линейности и стационарности вытекает наиболее общий алгоритм функционирования ЦФ рассматриваемого вида. Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ — некоторый сигнал на входе ЦФ. Фильтр обладает известной импульсной характеристикой. Используя (15.32) и (15.34), можно немедленно записать значение выходного сигнала $\{y_k\}$ в момент $m$-го отсчета:

$$\boxed{y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^{m} x_k h_{m-k}\,.} \qquad (15.35)$$

Формула (15.35), играющая ведущую роль в теории линейной цифровой фильтрации, показывает, что выходная последовательность есть дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Смысл этой формулы прост и нагляден: в момент каждого отсчета ЦФ проводит операцию взвешенного суммирования всех предыдущих значений входного сигнала, причем роль последовательности весовых коэффициентов играют отсчеты импульсной характеристики. Иными словами, ЦФ обладает некоторой «памятью» по отношению к прошлым входным воздействиям.

■ **принцип физической реализуемости ЦФ**

Практический интерес представляют лишь физически реализуемые ЦФ, импульсная характеристика которых не может стать отличной от нуля в отсчетных точках, предшествующих моменту подачи входного импульса. Поэтому для физически реализуемых систем коэффициенты вида $h_{-1}$, $h_{-2}$, ... обращаются в нуль и суммирование в (15.35) можно распространить на все положительные значения индекса $k$:

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k}\,,\ m = 0, 1, 2, \dots \qquad (15.36)$$

**Дискретные гармонические последовательности.** Как известно, в теории линейных систем особую роль играют комплексные сигналы вида $x(t) = A \exp j(\omega t + \varphi)$, отображающие гармонические колебания. При дискретизации такого сигнала по времени получается так называемая *гармоническая последовательность*

● **гармоническая последовательность**

$$\{x_k\} = \{A e^{j(\omega k\Delta + \varphi)}\}, \qquad (15.37)$$

такая, что

$$\mathrm{Re}\,\{x_k\} = \{A \cos(\omega k\Delta + \varphi)\}. \qquad (15.38)$$

Следует иметь в виду, что последовательности (15.37) или (15.38) представляют дискретизированные гармонические сигналы неоднозначно. Действительно, эти последовательности не изменятся при замене частоты $\omega$ на $\omega + 2\pi n/\Delta = \omega + n\omega_д$, где

$n$ — любое целое число, $\omega_д$ — круговая частота дискретизации. Поэтому принципиально невозможно отличить два дискретизированных гармонических колебания, разность частот которых находится в целократном отношении с частотой дискретизации.

■ неоднозначный характер дискретного представления гармонических сигналов

**Частотный коэффициент передачи ЦФ.** Предположим, что на вход линейного стационарного ЦФ подана гармоническая последовательность $\{x_k\}$ вида (15.37), неограниченно протяженная во времени, т. е. с индексом $k$, принимающим значения 0, $\pm 1$, $\pm 2$, ... Для того чтобы вычислить выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$, воспользуемся формулой свертки (15.35) и найдем $m$-й отсчет на выходе:

$$y_m = \sum_{k=-\infty}^{m} x_k h_{m-k} = A e^{j\varphi} \sum_{k=-\infty}^{m} e^{j\omega k\Delta} h_{m-k}.$$

Выполнив тождественные преобразования, имеем

$$y_m = A e^{j(\omega m\Delta+\varphi)} \sum_{k=-\infty}^{m} e^{j\omega(k-m)\Delta} h_{m-k}.$$

Введем новый индекс суммирования $n=m-k$. Тогда

$$y_m = A e^{j(\omega m\Delta+\varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n\Delta} h_n. \qquad (15.39)$$

В соответствии с (15.39) выходной сигнал имеет структуру дискретной гармонической последовательности с той же самой частотой, что и входной сигнал. Выходные отсчеты получаются из входных путем умножения последних на комплексное число

● структура выходного сигнала ЦФ

$$\boxed{K(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n\Delta} h_n,} \qquad (15.40)$$

называемое *частотным коэффициентом передачи ЦФ*. Величина $K(j\omega)$ зависит от частоты $\omega$ входного сигнала, а также от шага дискретизации $\Delta$ и от совокупности коэффициентов $\{h_n\}$ импульсной характеристики ЦФ. Формула (15.40) дает возможность сделать следующие важные выводы:

1. Частотный коэффициент передачи ЦФ есть периодическая функция частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi/\Delta$.

● периодический характер частотного коэффициента передачи ЦФ

2. Функция $K(j\omega)$ может рассматриваться как преобразова-

ние Фурье импульсной характеристики ЦФ, представленной в форме последовательности δ-импульсов:

$$h_д(t) = h_0\delta(t) + h_1\delta(t-\Delta) + \dots$$

(ср. с формулой (15.23)).

**Системная функция ЦФ.** Расчет важнейшей характеристики ЦФ — его частотного коэффициента передачи — удобно проводить, используя методы $z$-преобразований. Сопоставим дискретным сигналам $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ и $\{h_k\}$ их $z$-преобразования $X(z)$, $Y(z)$ и $H(z)$ соответственно. Выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$ есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики, и поэтому (см. формулы (15.27) и (15.35)) выходному сигналу отвечает функция

$$Y(z) = H(z)X(z). \tag{15.41}$$

*Системной функцией* стационарного линейного ЦФ называют отношение $z$-преобразования выходного сигнала к $z$-преобразованию сигнала на входе. Соотношение (15.41) устанавливает, что системная функция фильтра

**связь между системной функцией и импульсной характеристикой**

$$\boxed{H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}} \tag{15.42}$$

есть $z$-преобразование импульсной характеристики. Сравнивая (15.40) и (15.42), приходим к следующему выводу: частотный коэффициент передачи ЦФ получается из его системной функции, если в последней выполнена подстановка $z = \exp(j\omega\Delta)$.

**Пример 15.3.** *Рассмотреть ЦФ с импульсной характеристикой, состоящей из двух ненулевых отсчетов: $\{h_k\} = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$, и вычислить частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ этого фильтра.*

Здесь системная функция

$$H(z) = 1 - z^{-1},$$

откуда

$$K(j\omega) = 1 - e^{-j\omega\Delta} = (1 - \cos\omega\Delta) + j\sin\omega\Delta = |K(j\omega)|\, e^{j\varphi_K(\omega)}.$$

Уравнение АЧХ фильтра

$$|K(j\omega)| = \sqrt{(1-\cos\omega\Delta)^2 + \sin^2\omega\Delta} = 2\left|\sin\frac{\omega\Delta}{2}\right|,$$

в то время как ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega\Delta}{1-\cos\omega\Delta}.$$

▲ решите задачу 8

АЧХ и ФЧХ фильтра являются периодическими функциями частоты, но практически они имеют смысл лишь в интервале от 0 до $\omega=\pi/\Delta$. На верхней частоте этого интервала каждому периоду дискретизированного гармонического сигнала соответствуют два отсчета. По теореме Котельникова, это есть предельное значение частоты сигнала, который может быть однозначно восстановлен по своим отсчетам.

Заметим, что если на вход такого фильтра поступает гармонический сигнал с частотой, значительно более низкой, чем частота дискретизации, так что $\omega\Delta \ll 1$, то

$$K(j\omega) \approx \left(1 - 1 + \frac{(\omega\Delta)^2}{2} - \cdots\right) + j\left(\omega\Delta - \frac{(\omega\Delta)^3}{6} + \cdots\right) \approx j\omega\Delta.$$

Поэтому рассматриваемая система выполняет операцию приближенного дифференцирования относительно медленных входных сигналов.

## 15.5 Реализация алгоритмов цифровой фильтрации

Физически осуществимые ЦФ, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в $i$-й дискретный момент времени могут использовать следующие данные: а) значение входного сигнала в момент $i$-го отсчета, а также некоторое число «прошлых» входных отсчетов $x_{i-1}$, $x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$; б) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала $y_{i-1}$, $y_{i-2}$, $\dots, y_{i-n}$. Целые числа $m$ и $n$ определяют собой порядок ЦФ. Классификация ЦФ проводится на основании особенностей использования информации о прошлых состояниях системы.

● порядок цифрового фильтра

**Трансверсальные ЦФ.** Так принято называть цифровые системы, которые работают в соответствии с алгоритмом:

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \cdots + a_m x_{i-m}, \tag{15.43}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_m$ — последовательность коэффициентов. Число $m$ является порядком трансверсального фильтра. Как видно из (15.43), трансверсальный фильтр проводит взвешенное суммирование предшествующих отсчетов входного сигнала и не использует прошлые отсчеты выходного сигнала. Применив $z$-преобразование к обеим частям (15.43), убеждаемся, что

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m})\, X(z),$$

откуда системная функция

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m} =$$

$$= \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \cdots + a_m}{z^m} \tag{15.44}$$

**вид системной функции трансверсального фильтра**

является дробно-рациональной функцией $z$, имеющей $m$-кратный полюс при $z=0$ и $m$ нулей, координаты которых определяются коэффициентами фильтра.

Алгоритм функционирования трансверсального ЦФ поясняется структурной схемой, приведенной на рис. 15.7.

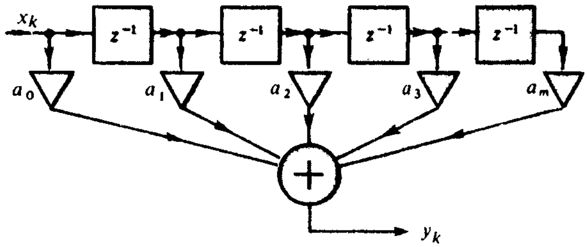



Рис. 15.7. Схема построения трансверсального ЦФ

**В цифровом процессоре операция задержки выполняется особым блоком — так называемым регистром сдвига**

Основными элементами фильтра служат устройства задержки отсчетных значений на один интервал дискретизации (прямоугольники с символами $z^{-1}$), а также масштабные звенья, выполняющие в цифровой форме операции умножения на соответствующие коэффициенты. С выходов масштабных звеньев сигналы поступают в сумматор, где, складываясь, образуют отсчет выходного сигнала.

Представленная здесь схема своим построением объясняет смысл термина «трансверсальный фильтр» (от англ. *transverse* — поперечный).

**Программная реализация трансверсального фильтра.** Следует иметь в виду, что структурная схема, изображенная на рис. 15.7, отнюдь не является подобием принципиальной схемы электрической цепи, а должна рассматриваться как графическое изображение алгоритма обработки сигнала. Используя средства языка ФОРТРАН, рассмотрим фрагмент программы, реализующей трансверсальную цифровую фильтрацию.

Пусть в оперативной памяти ЭВМ образованы два одномерных массива длиной $M$ ячеек каждый: массив с именем $X$, в котором хранятся значения входного сигнала, и массив с именем $A$, содержащий значения коэффициентов фильтра. Информация в массивах размещена следующим образом.

Массив $A$ хранит постоянные величины, в то время как содержимое ячеек массива $X$ меняется каждый раз с получением нового отсчета входного сигнала. Предположим, что массив $X$ заполнен предыдущими отсчетами входной последовательности, и рассмотрим ситуацию, возникающую в момент прихода очередного отсчета, которому в программе присвоено имя переменной $S$. Данный отсчет должен разместиться в ячейке с номером 1, но лишь после того как предыдущая запись будет сдвинута на одну позицию вправо, т. е. в сторону запаздывания.

Элементы сформированного таким образом массива $X$ почленно умножаются на элементы массива $A$, и результат заносится в ячейку с именем $Y$, где накапливается отсчетное значение выходного сигнала. Ниже приводится текст программы трансверсальной цифровой фильтрации:

Предполагается, что отсчеты входного сигнала и коэффициенты фильтра представляются вещественными числами

```
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
      DO1 K=1, M - 1
1     X(M - K + 1) = X(M - K)
      X(1) = S
C     МАССИВ X СФОРМИРОВАН
      Y = 0.
      DO2 K = 1, M
2     Y = Y + X(K) * A(K)
```

**Импульсная характеристика.** Вернемся к формуле (15.44) и вычислим импульсную характеристику трансверсального ЦФ, осуществив обратное $z$-преобразование. Легко видеть, что каждое слагаемое функции $H(z)$ дает вклад, равный соответствующему коэффициенту $a_j$, смещенному на $j$ позиций в сторону запаздывания. Таким образом, здесь

■ вид импульсной характеристики трансверсального фильтра

$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)\,. \tag{15.45}$$

К такому выводу можно прийти и непосредственно, рассматривая структурную схему фильтра (рис. 15.7) и полагая, что на его вход подан единичный импульс (1, 0, 0, 0, ...).

Важно отметить, что импульсная характеристика трансверсального фильтра содержит конечное число членов.

**Частотная характеристика.** Если в (15.44) провести замену переменной $z = \exp(j\omega\Delta)$, то

$$K(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-j2\omega\Delta} + \cdots + a_m e^{-jm\omega\Delta}\,. \tag{15.46}$$

При заданном шаге дискретизации $\Delta$ можно получить весьма разнообразные формы АЧХ и ФЧХ, подбирая должным образом весовые коэффициенты фильтра.

**Пример 15.4.** *Изучить трансверсальный ЦФ 2-го порядка, выполняющий усреднение текущего значения входного сигнала и двух предшествующих отсчетов:*

Говорят, что подобный фильтр выполняет операцию «сглаживания тройками»

$$y_i = {}^1/_3\,(x_i + x_{i-1} + x_{i-2}). \tag{15.47}$$

Системная функция фильтра

$$H(z) = {}^1/_3\,(1 + z^{-1} + z^{-2}),$$

откуда находим частотный коэффициент передачи:

$$K(j\omega) = {}^1/_3 \left(1 + e^{-j\omega\Delta} + e^{-j2\omega\Delta}\right) =$$
$$= {}^1/_3 \left[(1 + \cos\omega\Delta + \cos 2\omega\Delta) - j(\sin\omega\Delta + \sin 2\omega\Delta)\right].$$

Элементарные преобразования приводят к следующему выражению для АЧХ:

▲ решите задачу 9

$$|K(j\omega)| = {}^1/_3 \sqrt{3 + 4\cos\omega\Delta + 2\cos 2\omega\Delta}\,, \tag{15.48}$$

и ФЧХ данной системы:

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\sin\omega\Delta + \sin 2\omega\Delta}{1 + \cos\omega\Delta + \cos 2\omega\Delta}\,. \tag{15.49}$$

Соответствующие графики представлены на рис. 15.8, где по горизонтальной оси отложена величина $\omega\Delta$ — фазовый угол интервала дискретизации при текущем значении частоты.

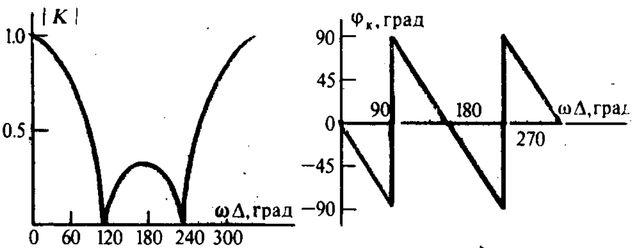
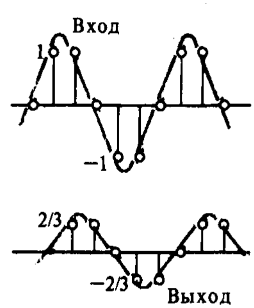



Рис. 15.8. Частотные характеристики трансверсального ЦФ, рассмотренного в примере 15.4:
*а* — АЧХ; *б* — ФЧХ

Предположим, например, что $\omega\Delta = 60°$, т. е. на один период гармонического входного колебания приходится 6 отсчетов. Входная последовательность будет иметь при этом, скажем, такой вид:

$$\ldots,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ -1,\ \ 0,\ 1,\ 1,\ \ldots$$




(абсолютные значения отсчетов роли не играют, поскольку фильтр линеен). Используя алгоритм (15.47), находим выходную последовательность:

$$\ldots,\ {}^2/_3,\ {}^2/_3,\ 0,\ \ -{}^2/_3,\ \ -{}^2/_3,\ 0,\ \ldots$$

Можно заметить, что ей отвечает гармонический выходной сигнал той же частоты, что и на входе, с амплитудой в $2/3 = 0.66$ от амплитуды входного колебания и с начальной фазой, смещенной на 60° в сторону запаздывания.

Если $\omega\Delta < 120°$, то рассматриваемый фильтр, сглаживая входную последовательность, может играть роль ФНЧ. Однако частотная характеэффект наложения

ристика фильтра периодична и немонотонна. Если исходный аналоговый сигнал не был подвергнут предварительной частотной фильтрации и в нем присутствуют составляющие, для которых $\omega\Delta > 180°$ (условия теоремы Котельникова не выполняются), то они не будут ослабляться данным цифровым фильтром. Более того, по отсчетам этих высокочастотных компонент цифро-аналоговый преобразователь восстановит некоторое низкочастотное колебание, которое совсем не содержалось во входном сигнале. Это паразитное явление (эффект «наложения» или «маскировки» высокочастотных составляющих спектра) в принципе присуще любым дискретным системам и заставляет уделять серьезное внимание предварительной обработке сигнала, подвергаемого цифровой фильтрации.

**Рекурсивные ЦФ.** Этот вид цифровых фильтров характерен тем, что для формирования $i$-го выходного отсчета используются предыдущие значения не только входного, но и выходного сигнала:

Рекурсия — математический прием, состоящий в циклическом обращении к данным, полученным на предшествующих этапах

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + \cdots + a_m x_{i-m} + + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + \cdots + b_n y_{i-n}, \tag{15.50}$$

причем коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_n$, определяющие рекурсивную часть алгоритма фильтрации, не равны нулю одновременно. Чтобы подчеркнуть различие структур двух видов ЦФ, трансверсальные фильтры называют обычно нерекурсивными фильтрами.

**Системная функция рекурсивного ЦФ.** Выполнив $z$-преобразование обеих частей рекуррентного соотношения (15.50), находим, что системная функция

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - \cdots - b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} - \cdots - b_n}, \tag{15.51}$$

описывающая частотные свойства рекурсивного ЦФ, имеет на $z$-плоскости $n$ полюсов. Если коэффициенты рекурсивной части вещественны, то эти полюсы либо лежат на вещественной оси, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

вид системной функции рекурсивного фильтра

**Структурная схема рекурсивного ЦФ.** На рис. 15.9 изображена схема алгоритма вычислений, проводимых в соответствии с формулой (15.50).

Легко видеть, что верхняя часть структурной схемы отвечает трансверсальной (нерекурсивной) части алгоритма фильтрации. Для ее реализации требуется в общем случае $m+1$ мас-

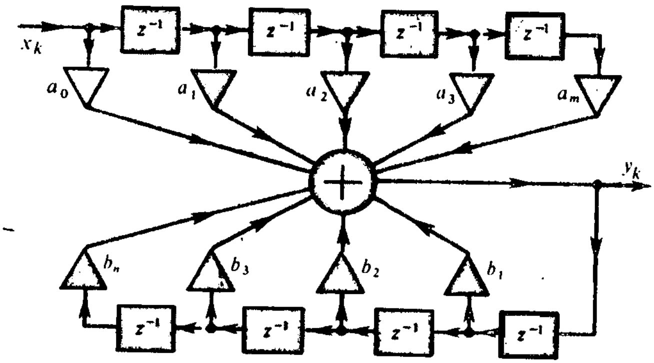



Рис. 15.9. Структурная схема рекурсивного ЦФ

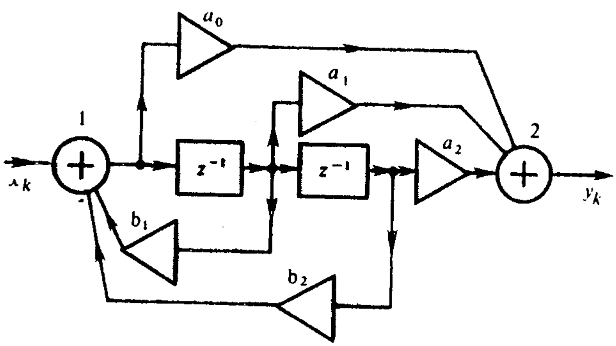



Рис. 15.10. Канонический рекурсивный фильтр 2-го порядка

штабных звеньев (операций умножения) и $m$ ячеек памяти, в которых хранятся входные отсчеты.

Рекурсивная часть алгоритма предусматривает использование $n$ последовательных значений выходного сигнала, которые в процессе работы фильтра перемещаются из ячейки в ячейку путем сдвига.

**каноническая схема ЦФ**

Недостатком данного принципа реализации является потребность в большом числе ячеек памяти, отдельно для рекурсивной и нерекурсивной частей. Более совершенны канонические схемы рекурсивных ЦФ, в которых используется минимально возможное количество элементов памяти, равное наибольшему из чисел $m$ и $n$. В качестве примера на рис. 15.10 изображена структурная схема канонического фильтра 2-го порядка, которой отвечает системная функция

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}. \tag{15.52}$$

Для того чтобы убедиться в том, что эта система реализует заданную функцию, введем в рассмотрение вспомогательный цифровой сигнал $\{w_k\}$ на выходе сумматора *1* и запишем два очевидных уравнения:

$$w_k = x_k + b_1 w_{k-1} + b_2 w_{k-2}, \tag{15.53}$$

$$y_k = a_0 w_k + a_1 w_{k-1} + a_2 w_{k-2}. \tag{15.54}$$

Выполнив $z$-преобразование уравнения (15.53), находим, что

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}. \tag{15.55}$$

Но, с другой стороны, в соответствии с (15.54)

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) W(z). \tag{15.56}$$

Объединив (15.55) и (15.56), приходим к заданной системной функции (15.52).

**Устойчивость рекурсивных ЦФ.** Рекурсивный ЦФ является дискретным аналогом динамической системы, поскольку в элементах памяти хранится информация о его предшествующих состояниях. Поэтому если заданы некоторые начальные условия, т. е. совокупность значений $(y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots, y_{i-n})$, то фильтр будет циклически образовывать элементы бесконечной последовательности $(y_i, y_{i+1}, \ldots)$, играющей роль свободных колебаний на выходе.

Цифровой фильтр рассматриваемого класса называется устойчивым, если возникающий в нем свободный процесс есть невозрастающая последовательность, т. е. $|y_n|$ при $n \to \infty$ не превосходит некоторого наперед заданного положительного числа $M$ независимо от выбора начальных условий.

● определение понятия устойчивости ЦФ

Свободные колебания в рекурсивном ЦФ на основании алгоритма (15.50) должны быть решением следующего линейного разностного уравнения:

$$y_i = b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + \cdots + b_n y_{i-n}. \tag{15.57}$$

По аналогии с принципом решения линейных дифференциальных уравнений будем искать решение (15.57) в виде показательной функции

$$y_i = \alpha^i \tag{15.58}$$

с неизвестным пока $\alpha$. Подставив (15.58) в уравнение (15.57)

Трансверсальные ЦФ не являются динамическими системами и абсолютно устойчивы при любом выборе коэффициентов и сократив на общий множитель, убеждаемся, что $\alpha$ должно быть корнем характеристического уравнения

$$\alpha^n - b_1\alpha^{n-1} - b_2\alpha^{n-2} - \dots - b_n = 0, \tag{15.59}$$

которое на основании (15.51) в точности совпадает с уравнением, которому удовлетворяют полюсы системной функции рекурсивного ЦФ.

Пусть система корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ уравнения (15.59) найдена. Общее решение разностного уравнения (15.57) имеет вид

$$y_i = A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \dots + A_n\alpha_n^i, \tag{15.60}$$

причем коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

■ **критерий устойчивости рекурсивного ЦФ**

Можно заметить, что если все полюсы системной функции $H(z)$, т. е. числа $z_1=\alpha_1, \dots, z_n=\alpha_n$, по модулю не превосходят единицы и лежат, таким образом, внутри единичного круга с центром в точке $z=0$, то на основании (15.60) любой свободный процесс в ЦФ будет описываться членами сходящихся геометрических прогрессий и фильтр будет устойчив.

Ясно, что практически применяться могут только устойчивые цифровые фильтры.

---

**Пример 15.5.** *Рассмотреть устойчивость рекурсивного фильтра 2-го порядка с системной функцией*

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Характеристическое уравнение

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0$$

имеет корни

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}.$$

Кривая, описываемая уравнением $b_1^2+4b_2=0$ на плоскости $(b_1, b_2)$ коэффициентов, есть граница, выше которой полюсы системной функции вещественны, а ниже комплексно-сопряжены.

Для случая комплексно-сопряженных полюсов $|z_{1,2}|^2=-b_2$, поэтому одной из границ области устойчивости служит прямая $b_2=-1$. Рассматривая вещественные полюсы при $b_1>0$, имеем условие устойчивости в виде

$$b_1/2 + \sqrt{(b_1/2)^2 + b_2} < 1,$$

или

$$\sqrt{(b_1/2)^2 + b_2} < 1 - b_1/2.$$

Возводя в квадрат обе части этого неравенства, видим, что границей области устойчивости является прямая $b_2 = 1 - b_1$. Аналогично исследуется случай $b_1 < 0$.

В результате приходим к выводу, что данный рекурсивный фильтр устойчив, если значения коэффициентов $b_1$ и $b_2$ лежат внутри треугольной области, изображенной на рис. 15.11.

▲ решите задачу 10

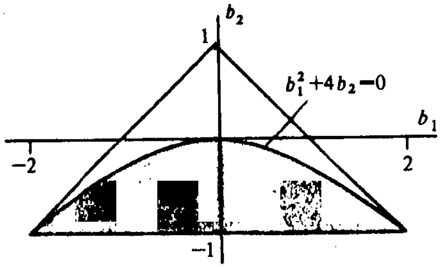



Рис. 15.11. Область устойчивости рекурсивного фильтра 2-го порядка (полюсы фильтра комплексно-сопряжены в области, отмеченной более интенсивным цветом)

**Импульсная характеристика рекурсивного ЦФ.** Характерная черта, отличающая рекурсивный ЦФ, состоит в том, что его структура содержит в себе цепи обратной связи. Следствием этого является то, что импульсная характеристика рекурсивного фильтра описывается неограниченно протяженной последовательностью. Покажем это на примере простейшего фильтра 1-го порядка, обладающего системной функцией

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}} = \frac{az}{z - b}.$$

Данный фильтр устойчив, если $|b| < 1$.

Известно (см. формулу (15.42)), что импульсная характеристика находится с помощью обратного $z$-преобразования, примененного к системной функции. Используя формулу (15.21), находим $m$-й член в последовательности $\{h_k\}$:

▲ решите задачу 11

$$h_m = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{az^m \, \mathrm{d}z}{z - b}. \tag{15.61}$$

Интегрирование осуществляется по единичной окружности, внутри которой располагается точка полюса $z = b$.

Поскольку вычет подынтегральной функции в точке полюса равен, как легко видеть, $ab^m$, то искомая импульсная характеристика фильтра представляет собой убывающую геометрическую прогрессию

$$\{h_k\} = (a, ab, ab^2, \ldots). \tag{15.62}$$

## 15.6 Синтез линейных цифровых фильтров

В настоящее время большое внимание уделяется методам синтеза структур ЦФ, обеспечивающим заранее заданные свойства, например требуемый вид импульсной или частотной характеристики [35]. Ниже будет идти речь о тех приемах синтеза, которые существенным образом опираются на свойства аналоговых цепей, служащих модельными аналогами (прототипами) цифровых устройств.

Как правило, ЦФ синтезируют с использованием ЭВМ. Число значащих цифр в окончательных результатах должно быть достаточным для обеспечения заданной точности. Безусловно, что в любом случае фильтр обязан быть устойчивым.

принцип подобия импульсных характеристик аналогового и цифрового цильтров

**Метод инвариантных импульсных характеристик.** В основе этого простейшего метода синтеза ЦФ лежит предположение о том, что синтезируемый ЦФ должен обладать импульсной характеристикой, которая является результатом дискретизации импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра-прототипа. Имея в виду синтез физически реализуемых систем, для которых импульсная характеристика обращается в нуль при $t<0$, получим следующее выражение для импульсной характеристики ЦФ:

$$\{h_k\} = (h(0),\ h(\Delta),\ h(2\Delta), \ldots). \tag{15.63}$$

Следует обратить внимание на то, что число отдельных членов в импульсной характеристике ЦФ может быть как конечным, так и бесконечным. Это определяет собой структуру синтезирующего фильтра: импульсной характеристике с конечным числом отсчетов отвечает трансверсальный фильтр, в то время как для реализации неограниченно протяженной импульсной характеристики требуется рекурсивный ЦФ.

Связь между коэффициентами импульсной характеристики и структурой ЦФ особенно проста для трансверсального фильтра. В общем случае поиск синтезируемой структуры осуществляется применением $z$-преобразования к последовательности вида (15.63). Получив системную функцию $H(z)$ фильтра, следует сравнить ее с общим выражением (15.51) и определить коэффициенты трансверсальной и рекурсивной частей фильтра.

Степень приближения частотной характеристики синтезированного ЦФ к частотной характеристике аналогового прототипа зависит от выбора шага дискретизации $\Delta$. При необходимости следует вычислить частотную характеристику ЦФ, осуществив в системной функции $H(z)$ замену переменной по формуле $z = \exp(j\omega\Delta)$, и затем сравнить полученный результат с известной частотной характеристикой аналоговой цепи.

**Пример 15.6.** *Рассмотреть синтез трансверсального ЦФ, подобного динамической системе 1-го порядка (например, интегрирующей RC-цепи) с импульсной характеристикой вида*

$$h(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \exp(-t/\tau), & t>0 \end{cases} \qquad (15.64)$$

(не существенный для задачи синтеза амплитудный множитель в импульсной характеристике положен равным единице).

Пусть импульсная характеристика аппроксимируется последовательностью, состоящей из трех равноотстоящих отсчетов:

$$\{h_k\}=\left(1,\ e^{-\Delta/\tau},\ e^{-2\Delta/\tau}\right). \qquad (15.65)$$

Трансверсальный ЦФ, обладающий такой импульсной характеристикой, описывается разностным уравнением

$$y_k=x_k+e^{-\Delta/\tau}x_{k-1}+e^{-2\Delta/\tau}x_{k-2}. \qquad (15.66)$$

Применив $z$-преобразование к последовательности (15.65), находим системную функцию ЦФ:

$$H(z)=1+e^{-\Delta/\tau}z^{-1}+e^{-2\Delta/\tau}z^{-2}, \qquad (15.67)$$

откуда частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega)=1+e^{-\Delta/\tau}e^{-j\omega\Delta}+e^{-2\Delta/\tau}e^{-j2\omega\Delta} \qquad (15.68)$$

**Пример 15.7.** *Рассмотреть случай, когда импульсная характеристика* (15.64) *аналоговой цепи аппроксимируется бесконечной дискретной последовательностью*

$$\{h_k\}=\left(1,\ e^{-\Delta/\tau},\ e^{-2\Delta/\tau},\ \ldots\right). \qquad (15.69)$$

Выполнив $z$-преобразование импульсной характеристики (15.69), получаем системную функцию

$$H(z)=1+e^{-\Delta/\tau}z^{-1}+e^{-2\Delta/\tau}z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-e^{-\Delta/\tau}z^{-1}}. \qquad (15.70)$$

Данной системной функции отвечает рекурсивный ЦФ 1-го порядка, содержащий помимо сумматора одно масштабное звено и один элемент задержки.

Частотная характеристика синтезированного фильтра имеет вид

$$K(j\omega)=\frac{1}{1-e^{-\Delta/\tau}\exp(-j\omega\Delta)}. \qquad (15.71)$$

**Сравнение трансверсальных и рекурсивных фильтров.** Часто требуется, чтобы частотная характеристика синтезируемого ЦФ достаточно точно аппроксимировала частотную характеристику аналогового прототипа. Выбор того или иного варианта структуры ЦФ в рамках метода инвариантной импульсной характеристики существенно сказывается на точности приближения.

Проведем сравнение частотных характеристик двух ЦФ, рассмотренных в примерах 15.6 и 15.7. Оба эти фильтра соответствуют аналоговому прототипу с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau). \tag{15.72}$$

Положив для конкретности, что отношение $\tau/\Delta = 5$, и на основании формул (15.72), (15.68) и (15.71) совершив несложные преобразования, запишем выражения для нормированных АЧХ аналогового фильтра и двух цифровых фильтров, трансверсального и рекурсивного:

$$\left|\frac{K(j\omega)}{K(j0)}\right|_{\text{а}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 25\omega^2\Delta^2}}, \tag{15.73}$$

$$\left|\frac{K(j\omega)}{K(j0)}\right|_{\text{рек}} = \frac{0.8313}{\sqrt{1.6703 - 1.6375\cos\omega\Delta}}, \tag{15.74}$$

▲ решите задачу 12

$$\left|\frac{K(j\omega)}{K(j0)}\right|_{\text{транс}} = \frac{\sqrt{2.120 + 2.7351\cos\omega\Delta + 1.3406\cos 2\omega\Delta}}{2.48903}. \tag{15.75}$$

Результаты расчета величин $|K(j\omega)/K(j0)|$ по данным формулам сведены в табл. 15.1.

Таблица 15.1

| $\omega\Delta$ | Тип фильтра | | |
|---|---|---|---|
| | аналоговый | цифровой рекурсивный | цифровой трансверсальный |
| 0.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.5 | 0.3714 | 0.3754 | 0.9200 |
| 1.0 | 0.1961 | 0.2046 | 0.7005 |
| 1.5 | 0.1322 | 0.1454 | 0.3963 |
| 2.0 | 0.0995 | 0.1182 | 0.1305 |
| 2.5 | 0.0797 | 0.1050 | 0.2234 |
| 3.0 | 0.0665 | 0.1000 | 0.3360 |

Из приведенных данных видно, что как рекурсивный, так и трансверсальный ЦФ обладают частотными характеристиками, отвечающими фильтрам нижних частот. Однако рекурсивный фильтр по своим свойствам оказывается гораздо ближе к исходному аналоговому прототипу.

**Синтез ЦФ на основе дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи.** К структуре ЦФ, приближенно соответствующего известной аналоговой цепи, можно прийти, осуществив дискретизацию дифференциального уравнения, которое описывает свойства аналогового прототипа. Как пример использования этого метода рассмотрим синтез ЦФ, отвечающего динамической системе 2-го порядка, для которой связь между выходным колебанием $y(t)$ и входным сигналом $x(t)$ устанавливается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=x(t). \tag{15.76}$$

Предположим, что шаг дискретизации по времени равен $\Delta$, и рассмотрим совокупности дискретных отсчетов $\{y_k\}$ и $\{x_k\}$. Если производные в (15.76) заменить их конечно-разностными выражениями, то дифференциальное уравнение превратится в разностное уравнение

$$\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{\Delta^2}+2\alpha\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta}+\omega_0^2y_n=x_n. \tag{15.77}$$

Можно также использовать разностные схемы более высоких порядков

Перегруппировав слагаемые, отсюда получаем

$$y_n=\frac{\Delta^2x_n+2(1+\alpha\Delta)y_{n-1}-y_{n-2}}{A}, \tag{15.78}$$

где $A=1-2\alpha\Delta+\omega_0^2\Delta^2$.

Разностное уравнение (15.78) задает алгоритм функционирования рекурсивного фильтра 2-го порядка, который моделирует аналоговую колебательную систему. Такой ЦФ принято называть *цифровым резонатором*. При соответствующем выборе коэффициентов цифровой резонатор может выполнять роль частотно-избирательного полосового фильтра, подобного колебательному контуру.

● **цифровой резонатор**

**Метод инвариантных частотных характеристик.** Принципиально невозможно создать ЦФ, частотная характеристика которого в точности повторяла бы частотную характеристику некоторой аналоговой цепи. Причина этого состоит в том, что, как известно, частотный коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, определяемым шагом дискретизации по времени $\Delta$ (рис. 15.12).

Говоря о подобии (инвариантности) частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров, можно требовать лишь того, чтобы весь бесконечный интервал частот $\omega_а$, относящихся к аналоговой системе, был преобразован в отрезок частот $\omega_ц$ цифрового фильтра, удовлетворяющих неравенству

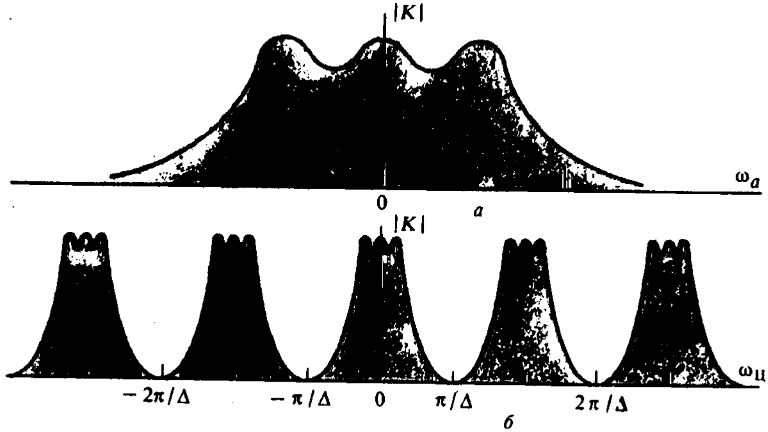



Рис. 15.12. Сравнение АЧХ фильтров:
*а* — аналогового; *б* — цифрового

**принцип подобия частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров**

$$-\pi/\Delta < \omega_ц < \pi/\Delta \tag{15.79}$$

при сохранении общего вида АЧХ.

Пусть $K_а(p)$ — передаточная функция аналогового фильтра, задаваемая дробно-рациональным выражением по степеням комплексной частоты $p$. Если воспользоваться связью между переменными $z$ и $p$: $z = \exp(p\Delta)$, то

$$p = \frac{1}{\Delta} \ln z. \tag{15.80}$$

Однако с помощью этого закона связи нельзя получить физически реализуемую системную функцию ЦФ, поскольку подстановка (15.80) в выражение $K_а(p)$ приведет к системной функции, не выражающейся в виде частного двух многочленов. Требуется найти такую дробно-рациональную функцию от $z$, которая обладала бы основным свойством преобразования (15.80), а именно переводила бы точки единичной окружности, лежащей в плоскости $z$, в точки прямой $j\omega$ на плоскости $p$.

**Функцию вида (15.81) называют билинейным преобразованием**

Среди прочих способов получила распространение связь вида [35]

$$\boxed{p = \frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1},} \tag{15.81}$$

устанавливающая однозначное соответствие между точками единичной окружности в $z$-плоскости со всей мнимой осью в $p$-плоскости. Характерная особенность этого закона преобразования состоит в следующем. Пусть в (15.81) выполнена замена переменной $z = \exp(j\omega_ц\Delta)$. Тогда

$$j\omega_а = \frac{2}{\Delta}\,\frac{\exp(j\omega_ц\Delta)-1}{\exp(j\omega_ц\Delta)+1},$$

откуда вытекает соотношение между частотными переменными $\omega_а$ и $\omega_ц$ аналоговой и цифровой систем соответственно:

$$\boxed{\omega_а = \frac{2}{\Delta}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega_ц\Delta}{2}.} \qquad (15.82)$$

**связь между частотными переменными аналогового и цифрового фильтров**

Если частота дискретизации достаточно велика ($\omega_ц\Delta \ll 1$), то, как легко видеть из (15.82), $\omega_а \approx \omega_ц$. Таким образом, на низких частотах характеристики аналогового и цифрового фильтров практически совпадают. В общем случае нужно принимать во внимание трансформацию масштаба по оси частот цифрового фильтра, описываемого формулой (15.82).

Практически процедура синтеза ЦФ состоит в том, что в функции $K_а(p)$ аналоговой цепи выполняется замена переменной по формуле (15.81). Полученная при этом системная функция ЦФ оказывается дробно-рациональной и поэтому позволяет непосредственно записать алгоритм цифровой фильтрации.

---

**Пример 15.8.** *Синтезировать ЦФ с частотной характеристикой, подобной характеристике аналогового ФНЧ типа Баттерворса 2-го порядка. Частота среза для ЦФ* $\omega_{сц} = 1500$ 1/с. *Частота дискретизации* $\omega_д = 10\,000$ 1/с.

Прежде всего определяем шаг дискретизации: $\Delta = 2\pi/\omega_д = 6.2832 \times \times 10^{-4}$ с. По формуле (15.82) находим частоту среза аналогового фильтра Баттерворса, подобного синтезируемому ЦФ:

$$\omega_{са} = \frac{2}{\Delta}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega_{сц}\Delta}{2} = 1621.9 \text{ 1/с}.$$

Как известно, передаточная функция аналогового фильтра Баттерворса 2-го порядка, рассматриваемая относительно нормированной комплексной частоты $p_н$, имеет вид (см. гл. 13)

$$K_а(p_н) = \frac{1}{p_н^2 + \sqrt{2}\,p_н + 1}, \qquad (15.83)$$

или, переходя к истинной комплексной частоте:

$$K_а(p) = \frac{\omega_{са}^2}{p^2 + \sqrt{2}\,\omega_{са}\,p + \omega_{са}^2}. \qquad (15.84)$$

Выполнив в (15.84) замену переменной вида (15.81), находим системную функцию ЦФ:

$$H(z) = \frac{\omega_{ca}^2 (z+1)^2}{\left[\left(\frac{2}{\Delta}\right)^2 + \sqrt{2}\,\omega_{ca}\left(\frac{2}{\Delta}\right) + \omega_{ca}^2\right] z^2 + } \cdots \rightarrow$$

$$\cdots \rightarrow \overline{+ 2\left[\omega_{ca}^2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)^2\right] z + \left(\frac{2}{\Delta}\right)^2 - \sqrt{2}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\omega_{ca} + \omega_{ca}^2}. \tag{15.85}$$

Подстановка в эту формулу числовых данных приводит к следующему результату:

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{7.6272z^2 - 5.7033z + 2.0761}. \tag{15.86}$$

**Влияние квантования сигнала на работу цифрового фильтра.** При синтезе и проектировании ЦФ в ряде случаев следует учитывать специфические погрешности их работы, возникающие из-за эффектов квантования сигналов, т. е. вследствие представления всех величин, как постоянных, так и меняющихся во времени, в виде двоичных чисел с конечным числом разрядов.

● шум квантования

Квантованный характер сигналов приводит к целому ряду явлений, описанных в литературе по цифровой фильтрации [35]. Здесь будет рассмотрен простейший эффект — возникновение так называемого *шума квантования.*

Пусть $U_{\max}$ — наибольшее значение аналогового сигнала на входе АЦП, которое еще не вызывает переполнения арифметических устройств фильтра. Если $m$ — число двоичных разрядов, отводимых для представления соответствующего числа в фильтре, то очевидно, что квантование уровня сигнала происходит с шагом

$$q_{кв} = U_{\max}/2^m. \tag{15.87}$$

Квантованные отсчеты описывают истинные мгновенные значения аналогового сигнала не точно, а с некоторой погрешностью, тем меньшей, чем меньше шаг квантования. Иными словами, отсчеты входного сигнала $x_k$ фильтра можно представить как результат сложения истинных значений $\tilde{x}_k$ и отсчетов $n_k$, отвечающих случайному процессу, называемому шумом квантования:

▲ решите задачу 14

$$x_k = \tilde{x}_k + n_k. \tag{15.88}$$

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что в большинстве случаев, интересных для практики, последовательность $\{n_k\}$ образована статистически независимыми случайными величинами, каждая из которых равномерно распределена на интервале от $-q_{кв}/2$ до $q_{кв}/2$ и поэтому имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2_{вх} = q^2_{кв}/12$ (см. гл. 6).

Шум квантования, присутствующий на входе ЦФ, преобразуется цифровым устройством. Пусть $\{n_{вх\,k}\}$ — дискретная последовательность, соответствующая входному шуму квантования. Для того, чтобы найти $l$-й отсчет выходной последовательности $\{n_{вых\,k}\}$, следует вычислить свертку входного шумового сигнала и импульсной характеристики фильтра:

$$n_{вых\,l} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i n_{вх\,l-i}. \qquad (15.89)$$

Отсюда определяем автокорреляционную функцию шума квантования на выходе:

$$K_{вых}(m) = \sum_{i=0}^{\infty} n_{вых\,i}\, n_{вых\,i-m} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_j n_{вх\,i-j} h_{j-m} n_{вх\,i-j-m} =$$

Проводится суммирование по индексу $i$

$$= K_{вх}(m) \sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j-m}. \qquad (15.90)$$

Если положить $m=0$, то отсюда находим дисперсию шума на выходе:

$$\boxed{\sigma^2_{вых} = K_{вых}(0) = K_{вх}(0) \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 = \frac{q^2_{кв}}{12} \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2.} \qquad (15.91)$$

▲ решите задачу 15

Таким образом, выходной шум квантования оказывается тем больше, чем медленнее спадает импульсная характеристика фильтра.

**Результаты**

◇◇ *В отличие от аналоговых сигналов дискретные сигналы описываются последовательностями отсчетных значений в дискретном множестве точек.*

◇◇ *Спектр дискретного сигнала состоит из бесконечного числа «копий» спектра исходного аналогового сигнала.*

◇◇ *Восстановление исходного сигнала из дискретной последовательности отсчетов с помощью реального частотного фильтра неизбежно связано с искажениями.*

◇◇ *Число амплитудных коэффициентов гармоник, находимых с помощью дискретного преобразования Фурье, составляет половину числа отсчетов.*

◇◇ *Использование z-преобразования позволяет изучать дискретные последовательности методами математического анализа непрерывных функций.*

◇◇ *Выходная последовательность цифрового фильтра (ЦФ) есть результат дискретной свертки входного сигнала и импульсной характеристики фильтра.*

◇◇ *Частотный коэффициент передачи ЦФ является преобразованием Фурье импульсной характеристики фильтра и представляет собой периодическую функцию частоты с периодом, равным частоте дискретизации.*

◇◇ *Системная функция ЦФ является z-преобразованием импульсной характеристики.*

◇◇ *С точки зрения реализации алгоритма фильтрации принято различать трансверсальные и рекурсивные ЦФ.*

◇◇ *Рекурсивный ЦФ устойчив в том случае, если все полюсы его системной функции лежат внутри единичного круга с центром в точке $z=0$.*

◇◇ *При синтезе ЦФ используют импульсную или частотную характеристику аналогового фильтра-прототипа.*

◇◇ *Представление данных в виде двоичных чисел с конечным числом разрядов приводит к специфическому источнику погрешности работы ЦФ, называемому шумом квантования.*

## Вопросы

1. Изобразите структурную схему импульсного модулятора. В чем состоит характерное отличие сигналов вида АИМ и ШИМ?
2. Какой вид имеет спектральная плотность дискретизирующей последовательности?
3. В чем заключается причина искажений сигнала на выходе восстанавливающего фильтра нижних частот, если его частота среза значительно превышает частоту дискретизации входной импульсной последовательности?
4. Дискретный сигнал на интервале периодичности задан с помощью 16 отсчетов. Каков номер наивысшей гармоники, которую можно вычислить с помощью ДПФ по этим данным?
5. Как формулируются условия сходимости $z$-преобразования?
6. Как, зная $z$-преобразование числовой последовательности, найти преобразования Фурье или Лапласа соответствующего дискретного сигнала?
7. Каково число двоичных разрядов, применяемых обычно в ЦФ для представления чисел?
8. Перечислите свойства импульсной характеристики стационарного линейного ЦФ. Какому условию должна удовлетворять импульсная характеристика физически реализуемого ЦФ?
9. Почему представление гармонических аналоговых сигналов с помощью последовательности равноотстоящих отсчетов является неоднозначным?
10. Как определяется понятие системной функции цифрового фильтра?
11. В чем состоят характерные отличия системных функций трансверсальных и рекурсивных фильтров?
12. Почему трансверсальные ЦФ являются абсолютно устойчивыми системами?
13. Чем принципиально отличаются импульсные характеристики трансверсальных и рекурсивных фильтров?
14. В чем заключены достоинства ЦФ, созданных в соответствии с канонической схемой?
15. На чем основан принцип синтеза ЦФ по методу инвариантных импульсных характеристик?

16. Почему принципиально невозможно создать ЦФ, частотная характеристика которого в точности повторяла бы частотную характеристику аналогового фильтра-прототипа?

17. Как влияет вид импульсной характеристики ЦФ на дисперсию выходного шума квантования?

## Задачи

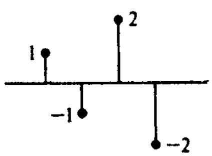
1. Аналоговый сигнал $x(t)$ имеет вид прямоугольного видеоимпульса с длительностью $\tau_и = 2$ мс. Данному колебанию сопоставлена дискретная импульсная последовательность (сигнал вида АИМ), состоящая их десяти равноотстоящих видеоимпульсов длительностью 5 мкс каждый. Найдите спектральную плотность данной последовательности.

2. Дискретный сигнал на интервале своей периодичности задан четырьмя равноотстоящими отсчетами: $\{x_k\}=(1,0,-1,0)$. Вычислите коэффициенты ДПФ этого сигнала.

3. Найдите формулу, описывающую аналоговый сигнал $x(t)$, восстановленный по коэффициентам ДПФ в соответствии с данными задачи 2.

4. Дискретный периодический сигнал имеет следующие амплитудные коэффициенты гармоник: $C_0=0.5$, $C_1=1.5$ (коэффициенты с более высокими номерами равны нулю). Определите отсчетные значения сигнала.

5. Цифровой сигнал $\{x_k\}$ задан четырьмя отсчетами. Найдите $z$-преобразование этого сигнала:




6. Вычислите $z$-преобразование, отвечающее аналоговому сигналу $x(t)=at$, $(t>0)$, где $a$ — постоянная величина.

7. Пусть $z$-преобразование дискретного сигнала $\{x_k\}$ имеет вид:

$$X(z) = \frac{z^2+2z+1}{z}.$$

Найдите отсчетные значения дискретного сигнала.

8. Импульсная характеристика ЦФ задана тремя ненулевыми отсчетами: $\{h_k\}=(1, 0.5, 0.25)$. Вычислите системную функцию и частотную характеристику данного ЦФ.

9. Изобразите структурную схему ЦФ, работающего в соответствии с алгоритмом:

$$y_i = 1.75x_i - 0.55x_{i-1} + 0.25x_{i-2}$$

Вычислите системную функцию.

10. Рекурсивный ЦФ работает в соответствии с алгоритмом

$$y_i = x_i + 0.5y_{i-1} - 0.75y_{i-2}.$$

Исследуйте устойчивость данного ЦФ.

11. Вычислите и постройте импульсные характеристики цифровых фильтров, описываемых разностными уравнениями:

а) $y_i = 2.5x_i - 0.8y_{i-1}$,

б) $y_i = 2.5x_i + 0.8y_{i-1}$.

12. Используя метод инвариантных импульсных характеристик, синтезируйте трансверсальный ЦФ, подобный интегрирующей $RC$-цепи. Импульсная характеристика фильтра представляется четырьмя равноотстоящими отсчетами. Вычислите частотную характеристику синтезированного фильтра, положив, что $\Delta/\tau = 0.5$.

13. Используя метод инвариантных частотных характеристик, синтезируйте ЦФ, частотная характеристика которого подобна характеристике аналогового фильтра Чебышева 2-го порядка с параметрами $\omega_{са}=2\cdot10^3$ 1/с, $\varepsilon=0.8$. Частота дискретизации $\omega_д=1.5\cdot10^4$ 1/с.

14. Аналоговый сигнал на входе АЦП цифрового фильтра имеет максимальную амплитуду $U_m = 50$ В. Для представления отсчетов использованы восьмиразрядные двоичные числа. Вычислите дисперсию шума квантования на выходе АЦП.

15. На входе рекурсивного ЦФ с алгоритмом

$$y_i = 0.45x_i + 0.95y_{i-1}$$

действует шум квантования, шаг которого $q_{кв}=0.5$ мВ. Определите дисперсию шума квантования на выходе фильтра.

### Более сложные задания

16. Рассмотрите возможность представления периодического дискретного сигнала с помощью преобразования Фурье — Уолша, в котором в отличие от обычного ДПФ базисные функции вида

$$\exp(-j2\pi nk/N)$$

заменены функциями Уолша.

17. Предложите способ цифровой фильтрации, основанный на прямом использовании алгоритмов ДПФ и ОДПФ.

18. Запишите на ФОРТРАНе фрагмент программы, реализующей алгоритм рекурсивной цифровой фильтрации.

19. Применив метод инвариантных импульсных характеристик, синтезируйте ЦФ, соответствующий аналоговому колебательному контуру с потерями, импульсная характеристика которого имеет вид

$$h(t) = e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t.$$

20. В математике последовательностью Фибоначчи называют совокупность чисел $\{x_k\}$, связанных соотношением $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$. Найдите первые десять чисел Фибоначчи, положив $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Предложите аналитический способ нахождения чисел Фибоначчи с любым номером. Свяжите данную задачу с проблемой устойчивости рекурсивных ЦФ.

# Глава 16 Оптимальная линейная фильтрация сигналов

Борьба с шумами и помехами является важной задачей во многих областях радиотехники. Обеспечение высокой помехоустойчивости систем передачи информации осуществляется в принципе двумя путями. С одной стороны, можно совершенствовать структуру передаваемых сигналов. Примером могут служить сигналы Баркера, изученные в гл. 3. Другой путь заключен в создании таких устройств для обработки, которые наилучшим образом выделяют сигнал, искаженный присутствием шума.

**оптимальный фильтр**

В данной главе будет рассмотрена проблема выделения полезного сигнала из шума с помощью стационарных линейных систем, играющих роль частотных фильтров. Частотно-избирательная система, выполняющая обработку суммы сигнала и шума некоторым наилучшим образом, называется *оптимальным фильтром.*

**различие между задачами выделения сигналов известной и неизвестной формы**

Смысл, который вкладывается в понятие оптимальности, зависит, в частности, от того, известна ли заранее форма полезного сигнала. Если эта форма известна, то оптимальный фильтр должен обеспечить обнаружение этого сигнала с максимально возможной вероятностью. Если форма сигнала заранее неизвестна, то оптимальный фильтр должен наилучшим образом выделить этот сигнал из его смеси с шумом; принято считать, что оптимальный фильтр должен минимизировать среднеквадратичную ошибку воспроизведения полезного сигнала на выходе фильтра.

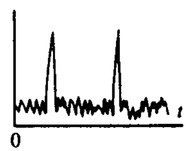
Ниже рассматривается теория построения оптимальных линейных фильтров в обоих случаях.

## 16.1 Оптимальная линейная фильтрация сигналов известной формы

Проблема оптимальной обработки суммы известного сигнала и шума возникает, например, в радиолокации. Здесь принятый полезный сигнал $s_{\text{пр}}(t)$ есть точная масштабная копия переданного сигнала $s_{\text{пер}}(t)$, т. е. ,

$$s_{\text{пр}}(t) = A s_{\text{пер}}(t - \tau), \tag{16.1}$$

причем постоянное число $A \ll 1$.




«Всплеск» полезного сигнала над уровнем шума

Амплитуда принятого сигнала может оказаться весьма малой и сопоставимой с эффективным напряжением шума, действующего на входе приемника.

Приемное устройство радиолокатора выполняется следующие операции: а) обнаружение сигнала, т. е. установление самого факта присутствия отраженного сигнала в принятом колебании, б) измерение времени задержки $\tau$, определяющего расстояние до цели.

■ роль предположения о гауссовом характере шума

Специфика работы радиолокационной системы состоит в том, что при обработке принятого сигнала не требуется сохранять форму полезного импульса. Более того, желательно, чтобы в процессе обработки полезный сигнал трансформировался таким образом, что подача его на вход фильтра приводила бы в некоторый момент времени к значительному «всплеску» мгновенных значений выходного колебания. Шумовой сигнал, будучи, как правило, гауссовым, характеризуется малой вероятностью больших выбросов. Поэтому появление в выходном сигнале участка с мгновенными значениями, существенно превосходящими эффективное напряжение шума, с большой вероятностью свидетельствует о присутствии полезного сигнала на входе приемника.

**Отношение сигнал/шум на выходе линейного фильтра.** Будем полагать, что системой, осуществляющей обработку суммы сигнала и шума, служит стационарный линейный фильтр с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|\, e^{j\varphi_K(\omega)}.$$

Известный по форме полезный сигнал $s_{\text{вх}}(t)$, существующий на входе фильтра, характеризуется спектральной плотностью $S_{\text{вх}}(\omega) = |S_{\text{вх}}(\omega)|\,e^{j\varphi_s(\omega)}$.

Используя спектральный метод анализа, можно найти полезный сигнал на выходе фильтра в любой момент времени $t_0$:

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}|\;|K|\;e^{j(\omega t_0+\varphi_s+\varphi_K)}\,d\omega. \tag{16.2}$$

Предположим, что кроме полезного сигнала на входе фильтра действует помеха вида белого шума с постоянным на всех частотах энергетическим спектром $W_0$. Дисперсия шумового сигнала на выходе фильтра

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 d\omega. \tag{16.3}$$

● отношение сигнал/шум

Будем называть *отношением сигнал/шум* на выходе фильтра в фиксированный момент времени $t_0$ величину $q$, равную отношению модуля мгновенного значения полезного сигнала к среднеквадратичному уровню шума. Используя выражения (16.2) и (16.3), получим

■ принцип оптимальности фильтра при известной форме сигнала

$$\boxed{q = \frac{|s_{\text{вых}}(t_0)|}{\sigma_{\text{вых}}} = \frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}|\,|K|\,e^{j(\omega t_0+\varphi_s+\varphi_K)}\,d\omega\right|}{\left(\dfrac{W_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2\,d\omega\right)^{1/2}}.} \tag{16.4}$$

Оптимальным фильтром явится устройство с таким частотным коэффициентом передачи $K_{\text{опт}}(j\omega)$, который максимизирует отношение сигнал/шум в некоторый момент времени $t_0$. Такой оптимальный фильтр называют также *согласованным фильтром* по отношению к известному по форме входному сигналу.

● согласованный фильтр

**Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра.** Задача нахождения функции $K_{\text{опт}}(j\omega)$ решается на основании известного из курса анализа неравенства Коши — Буняковского, согласно которому

$$\left|\int F_1(x)\, F_2^*(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int |F_1|^2 \mathrm{d}x \int |F_2|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{16.5}$$

Формула обобщена на случай функций, принимающих комплексные значения

для произвольных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$. В формуле (16.5) знак равенства имеет место лишь тогда, когда $F_1(x) = CF_2(x)$, где $C$ — постоянное число.

Сравнивая между собой левую часть неравенства (16.5) и числитель формулы (16.4), положим, что

$$F_1(\omega) = |S_{вх}|\, e^{j\varphi_s},$$
$$F_2^*(\omega) = |K|\, e^{j(\omega t_0 + \varphi_K)}. \tag{16.6}$$

Максимум числителя в (16.4) будет достигаться при условии, что функции $F_1$ и $F_2$ пропорциональны друг другу, т. е. когда

$$|S_{вх}|\, e^{j\varphi_s} = C\,|K|\, e^{-j(\omega t_0 + \varphi_K)}.$$

Равенство двух комплексных чисел означает, что одновременно оказываются равными как модули, так и аргументы. В данном случае

$$|S_{вх}| = C\,|K|,$$
$$\varphi_s = -\omega t_0 - \varphi_K. \tag{16.7}$$

Отсюда непосредственно выводится формула, определяющая частотный коэффициент передачи согласованного (оптимального) фильтра

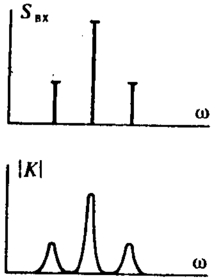
$$K_{опт}(j\omega) = B\,|S_{вх}|\, e^{-j\varphi_s}\, e^{-j\omega t_0}, \tag{16.8}$$

где $B = 1/C$ — произвольный коэффициент пропорциональности. Формулу (16.8) удобно записать в следующем виде:

$$\boxed{K_{опт}(j\omega) = BS_{вх}^*(\omega)\, e^{-j\omega t_0}.} \tag{16.9}$$

Результат справедлив при условии, что шум на входе является белым

Таким образом, частотный коэффициент передачи согласованного фильтра полностью определяется спектральной плотностью полезного сигнала, для выделения которого этот фильтр предназначен. Множитель пропорциональности $B$ в формуле (16.9) определяет собой общий уровень усиления, вносимого фильтром. Значение момента времени $t_0$ входит лишь в выражение фазовой характеристики фильтра. На основании общих свойств спектральных представлений сигнала экспоненциальный сомножитель вида $\exp(-j\omega t_0)$ указывает на факт смещения выходного отклика фильтра по оси времени на величину $t_0$.




Спектр сигнала и АЧХ гребенчатого фильтра

**Физическая интерпретация частотного коэффициента передачи оптимального фильтра.** Фильтр, обеспечивающий выделение известного сигнала из смеси с белым шумом, должен пропускать на выход гармонические колебания, частоты которых отвечают лишь тем участкам спектра, где спектральная плотность полезного сигнала отлична от нуля. При этом, естественно, модуль частотного коэффициента передачи должен быть пропорционален модулю спектральной плотности сигнала, т. е. тому вкладу в результирующий выходной сигнал, который вносится от того или иного участка частот. Если спектр входного сигнала имеет дискретную структуру (например, этот сигнал является периодическим), то изложенный здесь принцип приводит к фильтрам с гребенчатой формой АЧХ, широко применяемым в радиотехнике.

Согласованный фильтр, свойства которого определяются формулой (16.9), функционирует подобно гребенчатому фильтру. Однако здесь удается добиться еще большей вероятности обнаружения сигнала ввиду целесообразного использования фазовой характеристики спектральной плотности сигнала. Действительно, сигнал на выходе согласованного фильтра

$$s_{вых}(t) = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вх} S^*_{вх} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega, \qquad (16.10)$$

Используется теорема Рэлея

очевидно, достигает абсолютного максимума

$$s_{вых\,max} = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{вх}|^2 d\omega = BE_s \qquad (16.11)$$

■

принцип когерентного сложения спектральных компонент при оптимальной фильтрации

($E_s$ — энергия выделяемого сигнала) в момент времени $t_0$, когда все элементарные спектральные составляющие входного колебания складываются на выходе когерентно, т. е. имея одни и те же фазовые сдвиги.

Таким образом, *эффект согласованной фильтрации связан с коррекцией фазовых соотношений* между отдельными спектральными компонентами выделяемого сигнала.

**Импульсная характеристика согласованного фильтра.** Располагая выражением частотного коэффициента передачи согласованного фильтра, можно вычислить его импульсную характеристику, применив обратное преобразование Фурье к выражению (16.9):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{опт}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*_{вх}(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \qquad (16.12)$$

Как известно, любой вещественный сигнал характеризуется свойством $S^*_{вх}(\omega) = S_{вх}(-\omega)$. Поэтому

Если входной сигнал принимает комплексные значения, то следует отдельно рассмотреть его вещественную и мнимую части

$$h(t) = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вх}(-\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega =$$

$$= -\frac{B}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} S_{вх}(\omega') e^{j\omega'(t_0-t)} d\omega' =$$

$$= Bs_{вх}(t_0 - t). \qquad (16.13)$$

Таким образом, доказано, что импульсная характеристика согласованного фильтра представляет собой масштабную копию входного сигнала, которая, однако, располагается в зеркальном порядке вдоль оси времени (об этом говорит отрицательный знак при $t$ в формуле (16.13)). Помимо этого, импульсная характеристика фильтра смещена вправо, т. е. в сторону запаздывания относительно сигнала $s_{вх}(-t)$ на величину $t_0$.

Рис. 16.1 иллюстрирует метод построения импульсной характеристики согласованного фильтра применительно к конкретному импульсному сигналу $s_{вх}(t)$ конечной длительности $\tau_и$.

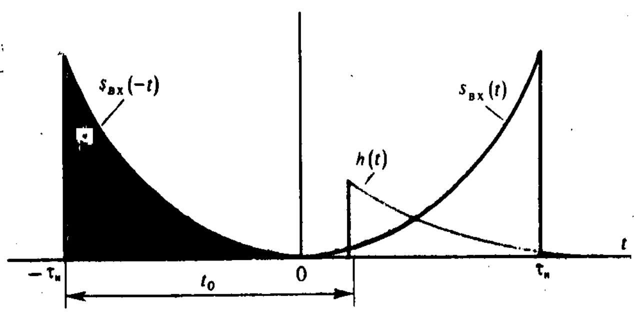



Рис. 16.1. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра

Анализируя построение, приведенное на рис. 16.1, можно сформулировать необходимое, но не достаточное условие физической реализуемости согласованного фильтра: временной параметр $t_0$, определяющий собой момент максимального мгновенного значения сигнала на выходе, должен быть *не меньше*,

▲ решите задачу 1

Согласованные фильтры рассматриваемого типа можно создать лишь для сигналов с конечной энергией, например для импульсов

чем длительность выделяемого импульса. В противном случае импульсная характеристика системы оказывается отличной от нуля при $t<0$, т. е. до момента поступления δ-импульса на вход фильтра.

Смысл этого условия таков: для создания максимально возможного мгновенного значения сигнала на выходе оптимальный фильтр должен использовать энергию *всего* входного сигнала.

**Форма полезного сигнала на выходе согласованного фильтра.** Предположим, что в отсутствие шумов на вход фильтра подается сигнал $s_{вх}(t)$, по отношению к которому данный фильтр является согласованным. Исследуем форму выходного сигнала. Для этого на основании (16.10) запишем

$$s_{вых}(t)=\frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_{вх}(\omega)|^2 e^{j\omega(t-t_0)}\,d\omega. \qquad (16.14)$$

Обратившись к формуле (3.24), видим, что выходной сигнал с точностью до множителя пропорциональности $B$ совпадает с функцией автокорреляции входного сигнала, сдвинутой в сторону запаздывания на величину $t_0$, т. е.

$$\boxed{s_{вых}(t)=BK_s(t-t_0).} \qquad (16.15)$$

Искажение формы не препятствует обнаружению сигнала на фоне помех

В качестве примера на рис. 16.2 изображено построение сигнала на выходе некоторого конкретного согласованного фильтра.

Следует обратить внимание на то, что при оптимальной фильтрации формы сигналов на входе и на выходе могут сильно различаться.

**Отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра.** Если $W_0$ — значение энергетического спектра белого шума на

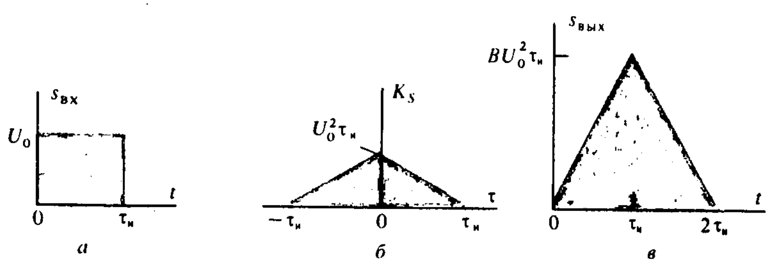



Рис. 16.2. Сигнал на выходе оптимального фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом:

*а* — сигнал на входе; *б* — его функция автокорреляции; *в* — сигнал на выходе для случая, когда $t_0=\tau_и$, т. е. когда максимальное значение выходного колебания достигается в момент окончания импульса на входе

входе фильтра с частотным коэффициентом передачи вида (16.9), то энергетический спектр шума на выходе

$$W_{вых}(\omega)=W_0\,|K_{опт}(j\omega)|^2=W_0B^2\,|S_{вх}(\omega)|^2. \qquad (16.16)$$

Дисперсия шума на выходе находится путем интегрирования выражения (16.16) по всем частотам. Она связана с энергией входного сигнала $E_s$ следующим образом:

$$\sigma^2_{вых}=\frac{W_0B^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|S_{вх}(\omega)\right|^2 d\omega=W_0B^2E_s.$$

Отсюда, используя выражение для максимального отклика, создаваемого фильтром (см. формулу (16.11)), находим максимально возможное отношение сигнал/шум:

**предельно достижимое отношение сигнал/шум**

$$q_{max}=|s_{вых\,max}|\big/\sigma_{вых}=\sqrt{E_s/W_0}. \qquad (16.17)$$

Важно подчеркнуть, что формула (16.17) устанавливает принципиальный предел обнаружительной способности устройств, предназначенных для выделения сигналов известной формы из смеси с белым шумом заданной интенсивности.

**Пример 16.1.** *Выделяемый полезный сигнал представляет собой радиоимпульс с амплитудой $U_0$ и длительностью $\tau_и=10$ мкс. Белый шум на входе фильтра характеризуется спектральной плотностью мощности $W_0=3\cdot10^{-18}$ В$^2\cdot$с. Определить минимальное значение $U_0$, при котором еще возможно обнаружение этого сигнала, если приемник способен надежно индицировать факт присутствия сигнала при отношении сигнал/шум $q=3$.*

На основании (16.17) требуемое значение $q$ реализуется, если энергия $E_s=9\,W_0$. Поскольку для прямоугольного радиоимпульса $E_s=U_0^2\tau_и/2$, то

$$U_{0\,min}=\sqrt{18W_0/\tau_и}=2.32\cdot10^{-6}\text{ В}.$$

**решите задачу 2**

Замечательная особенность согласованной фильтрации заключается в том, что при ее использовании возможность обнаружения сигнала зависит прежде всего от его энергии. В частности, всегда можно добиться надежного обнаружения сигнала весьма малой амплитуды, если соответствующим образом увеличивать длительность импульса. Однако при этом, естественно, будет падать скорость передачи информации по радиоканалу.

## 16.2 Реализация согласованных фильтров

Полученные выше выражения, определяющие частотную и импульсную характеристики согласованного фильтра, дают возможность решить задачу нахождения физической структуры устройства для оптимальной фильтрации сигнала известной формы. Ниже на конкретных примерах будут показаны некоторые приемы такого синтеза.

**Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса.** Рассмотрим простейший импульсный сигнал $s_{вх}(t)$, представляющий собой видеоимпульс прямоугольной формы с известной длительностью $\tau_и$ и произвольной амплитудой $U_0$. Для поиска структуры фильтра, согласованного с таким сигналом, используем спектральный принцип. Прежде всего вычислим спектральную плотность полезного сигнала на входе фильтра:

$$S_{вх}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{вх}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$=U_0\int\limits_{0}^{\tau_и} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau_и}\right). \qquad (16.18)$$

Здесь частотный коэффициент передачи не является дробно-рациональной функцией, поэтому соответствующий фильтр не может быть цепью с сосредоточенными параметрами

Отсюда на основании выражения (16.9) находим частотный коэффициент передачи согласованного фильтра, положив для конкретности, что $t_0=\tau_и$, т. е. максимум отклика на выходе приходится на момент окончания импульса:

$$K_{опт}(j\omega)=B\,\frac{1-e^{j\omega\tau_и}}{-j\omega}\,e^{-j\omega\tau_и}=$$

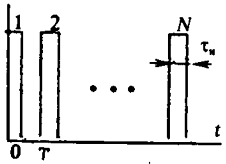
$$=B\left(\frac{1}{j\omega}\right)\left(1-e^{-j\omega\tau_и}\right). \qquad (16.19)$$

Полученный результат дает возможность синтезировать согласованный фильтр. Действительно, в соответствии с (16.19) такой фильтр должен представлять собой каскадное соединение трех линейных звеньев: а) масштабного усилителя с коэффициентом усиления $B$, б) идеального интегратора, в) устройства с коэффициентом передачи

$$K'(j\omega)=1-e^{-j\omega\tau_и},$$

реализуемого с помощью звена задержки сигнала на время $\tau_и$, инвертора, изменяющего знак сигнала, и сумматора.

Структурная схема фильтра изображена на рис. 16.3.




**Согласованный фильтр для пачки одинаковых видеоимпульсов.** В радиолокации часто, стремясь увеличить энергию полезного сигнала, обрабатывают колебания, поступающие с выхода амплитудного детектора приемника отдельными пачками. Пред-

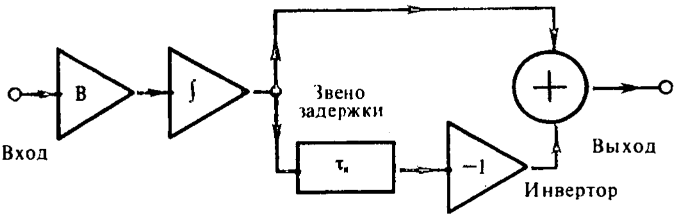



Рис. 16.3. Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса

положим, что пачка состоит из $N$ одинаковых видеоимпульсов длительностью $\tau_и$ каждый; интервал между импульсами равен $T$. Если $S_0(\omega)$ — спектральная плотность отдельного импульса, то спектральная плотность всей пачки

$$S_п(\omega)=S_0(1+e^{-j\omega T}+e^{-j2\omega T}+\ldots+e^{-j(N-1)\omega T}). \tag{16.20}$$

Синтезируя структуру согласованного фильтра для пачки, потребуем, чтобы максимальный отклик имел место в момент окончания последнего импульса пачки, откуда

$$t_0=(N-1)T+\tau_и .$$

Применив формулу (16.9), получаем выражение для частотного коэффициента передачи оптимального фильтра:

$$\begin{aligned} K_{опт}(j\omega) &= BS_0^* e^{-j\omega\tau_и}(1+e^{j\omega T}+e^{j2\omega T}+\ldots+e^{j(N-1)\omega T}) = \\ &= K_{0опт}(j\omega)(1+e^{-j\omega T}+e^{-j2\omega T}+\ldots+e^{-j(N-1)\omega T}), \end{aligned} \tag{16.21}$$

где $K_{0\,опт}(j\omega)$ — коэффициент передачи оптимального фильтра для одиночного видеоимпульса.

Из формулы (16.21) непосредственно вытекает структурная схема согласованного фильтра, изображенная на рис. 16.4.

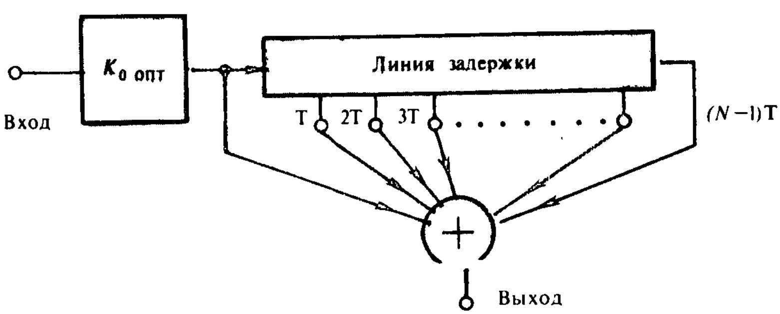



Рис. 16.4. Согласованный фильтр для пачки видеоимпульсов

Здесь на входе располагается согласованный фильтр для одиночного видеоимпульса. Основой всего устройства служит многоотводная линия задержки, обеспечивающая запаздывание сигналов на отрезки времени $T, 2T, \ldots, (N-1)T$. Сигналы со всех отводов поступают в сумматор. Легко видеть, что максимальный отклик на выходе сумматора будет наблюдаться тогда, когда полезные сигналы от всех импульсов пачки одновременно окажутся на всех его входах.

Применение сложных сигналов вида пачек импульсов, естественно, снижает темп выдачи данных по сравнению со случаем использования одиночных импульсов

Таким образом, данный согласованный фильтр осуществляет «сжатие» пачки, создавая единственный отклик максимальной амплитуды при обработке всей совокупности импульсов, образующих пачку. Эффективность работы устройства тем выше, чем длиннее пачка.

Практически выполняемые обнаружители радиолокационных сигналов содержат также специальный нелинейный пороговый элемент, вход которого соединен с выходом сумматора согласованного фильтра. Уровень порога несколько превышает среднеквадратичное значение шума в отсутствие полезного сигнала. Если максимальный всплеск выходного сигнала фильтра достигает порогового уровня, то на устройство индикации поступает управляющий сигнал, свидетельствующий о наличии импульсов, отраженных от цели.

**Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса.** Пусть выделяемый сигнал представляет собой радиоимпульс вида

$$s_{\text{вх}}(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ U_0 \sin \omega_0 t, & 0<t<\tau_{\text{и}}, \\ 0, & t>\tau_{\text{и}}. \end{cases} \tag{16.22}$$

Синтезируем согласованный фильтр для такого сигнала, используя сведения об импульсной характеристике фильтра.

Как было показано, импульсная характеристика согласованного фильтра $h(t)=Bs_{\text{вх}}(t_0-t)$. Положим, как и раньше, что $t_0=\tau_{\text{и}}$, и будем считать для простоты, что длительность импульса кратна периоду высокочастотного заполнения и поэтому $\sin \omega_0\tau_{\text{и}}=0$; $\cos \omega_0\tau_{\text{и}}=1$. Таким образом,

$$h(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ B \sin \omega_0 t, & 0<t<\tau_{\text{и}}, \\ 0, & t>\tau_{\text{и}}, \end{cases} \tag{16.23}$$

т. е. импульсная характеристика согласованного фильтра с точностью до амплитудного множителя повторяет входной сигнал.

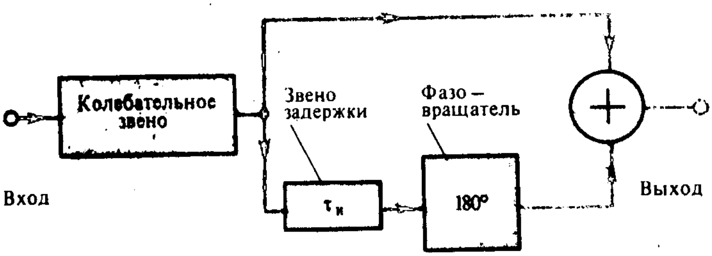



Рис. 16.5. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

Такую импульсную характеристику можно приближенно реализовать с помощью системы, структурная схема которой приведена на рис. 16.5.

На входе фильтра размещается колебательное звено, например высокодобротный колебательный контур с импульсной характеристикой

При высокой добротности колебательного звена можно пренебречь экспоненциальным спадом амплитуды во времени

$$h(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ H\sin\omega_0 t, & t>0, \end{cases}$$

где $H$ — постоянная величина.

Для того чтобы обеспечить нулевое значение импульсной характеристики согласованного фильтра при $t>\tau_и$, в схеме предусмотрен сумматор, на один из входов которого сигнал с выхода колебательного звена подается непосредственно, а на другой — через звено задержки на $\tau_и$, последовательно с которым включен фазовращатель, изменяющий фазу сигнала на 180°. При таком включении элементов начиная с момента времени $t=\tau_и$ на входах сумматора оказываются два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами и противоположными фазами, что обеспечивает нулевой сигнал на выходе сумматора.

**Согласованный фильтр для сигнала Баркера.** Гораздо более эффективное сжатие сложного сигнала в согласованном фильтре можно получить, используя вместо простых пачек сигналы Баркера. В гл. 3 подчеркивалось достоинство сигнала Баркера, заключающееся в высоком значении главного лепестка автокорреляционной функции и предельно низком уровне боковых лепестков.

На рис. 16.6 изображена структурная схема согласованного фильтра, предназначенного для выделения $M$-позиционного сигнала Баркера, в котором использован принцип фазового кодирования. Как известно, при этом входной сигнал имеет вид

Возможны сигналы Баркера с числом позиций $M=2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$

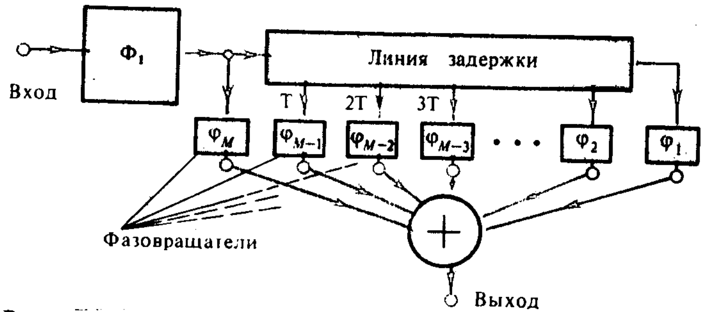



Рис. 16.6. Согласованный фильтр для сигнала Баркера

последовательности отрезков гармонических колебаний с фазовыми сдвигами $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... , $\varphi_M$, равными 0 или 180° (см. рис. 3.7).

При синтезе такого устройства исходят из того, что импульсная характеристика согласованного фильтра должна представлять собой «зеркальную» копию выделяемого сигнала с обращенным во времени порядком следования отдельных позиций.

▲ решите задачу 3

На входе устройства располагается вспомогательный фильтр $Ф_1$, согласованный по отношению к одной позиции сложного фазоманипулированного сигнала, т. е. к прямоугольному радиоимпульсу. На выходе этого фильтра под действием входного δ-импульса возникает радиоимпульс с огибающей прямоугольной формы. Этот импульс подается на линию задержки с отводами, представляющую собой обычно волновую (распределенную) систему. Задержка по времени между отводами равна длительности $T$ каждой позиции сигнала.

Для того чтобы устройство функционировало правильно, необходимо, чтобы последовательность фазовых сдвигов $\varphi_M$, $\varphi_{M-1}$, ... , $\varphi_1$ (рис. 16.6) отвечала значениям фаз в отдельных позициях сигнала Баркера при счете от конца сигнала к его началу.

Прямоугольный радиоимпульс, перемещаясь вдоль линии задержки, поочередно возбуждает входы сумматора, на выходе которого возникает «зеркальная» копия выделяемого сигнала.

**Согласованный фильтр для ЛЧМ-импульса.** Формула (16.17) устанавливает, что предельное значение отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра зависит от энергии сигнала безотносительно его формы. Однако на практике обычно возникает не просто задача обнаружения сигнала, а проблема обнаружения с одновременным *измерением* некоторых параметров сигнала, например положения его во времени. В этом случае предпочтение отдают сигналам с резко выраженным максимумом функции автокорреляции (см. гл. 3).

Среди прочих сигналов, обладающих таким свойством, широко используют радиоимпульсы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-импульсы). Теория таких сигналов изложена в гл. 4. Было показано, что если ЛЧМ-импульс вида

$$s_{\text{вх}}(t)=\begin{cases} 0, & t<-\tau_{\text{и}}/2, \\ U_0\cos(\omega_0 t+\mu t^2/2), & -\tau_{\text{и}}/2<t<\tau_{\text{и}}/2, \\ 0 & t>\tau_{\text{и}}/2 \end{cases}$$

имеет большую базу ($\mu\tau_{\text{и}}^2\gg 1$), то его спектральная плотность $S_{\text{вх}}(\omega)=|S_{\text{вх}}|\exp[j\Phi(\omega)]$ в пределах полосы частот шириной $\Delta\omega=\mu\tau_{\text{и}}$ характеризуется практически постоянным модулем

Базой сигнала называют произведение его длительности на ширину спектра

$$|S_{\text{вх}}|=U_0\sqrt{\pi/(2\mu)}$$

и аргументом с квадратичной зависимостью от частоты:

$$\Phi(\omega)=-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}. \qquad (16.24)$$

Отсюда вытекает требование к частотной характеристике фильтра, согласованного с ЛЧМ-сигналом: для того чтобы обеспечить максимальный отклик на выходе такого фильтра в некоторый момент времени $t_0$, необходимо, чтобы фильтр имел постоянный модуль частотной характеристики в пределах интервала частот $(\omega_0-\Delta\omega/2,\ \omega_0+\Delta\omega/2)$ и фазовую характеристику коэффициента передачи, описываемую формулой

$$\boxed{\varphi_K(\omega)=-\omega t_0+\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}.} \qquad (16.25)$$

Первое слагаемое в правой части (16.25) обусловливает запаздывание выходного сигнала как единого целого на величину $t_0$; второе, квадратичное, слагаемое дает возможность компенсировать фазовые сдвиги между отдельными компонентами сигнала и таким образом обеспечить условие их когерентного сложения на выходе.

■ Вид фазовой характеристики согласованного фильтра для ЛЧМ-импульса

Квадратичный характер фазовой характеристики согласованного фильтра для ЛЧМ-сигнала можно вывести из следующих качественных соображений. В процессе внутриимпульсной модуляции мгновенная частота сигнала изменяется по линейному закону

$$\omega(t)=\omega_0+\mu t$$

в промежутке времени $(-\tau_и/2,\ \tau_и/2)$. Каждому моменту времени $t$ в пределах длительности импульса отвечает свой узкополосный (квазигармонический) сигнал, задерживаемый в фильтре на отрезок времени, равный групповому времени запаздывания (см. гл. 8):

$$T_{гр} = -\frac{d\varphi_K}{d\omega} = t_0 - \frac{\omega-\omega_0}{\mu} = t_0 - t\ . \tag{16.26}$$

Для того чтобы найти момент появления отдельных спектральных компонент на выходе, к этому времени следует прибавить величину $t$, т. е. момент возникновения спектральных компонент на входе. Отсюда приходим к выводу, что все спектральные составляющие ЛЧМ-сигнала появляются на выходе фильтра одновременно в момент времени $t_0$.

Полезный сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до произвольного амплитудного множителя $A$ повторяет по форме функцию автокорреляции ЛЧМ-импульса (см. формулы (4.54) и (16.15)):

$$s_{вых} = A\,\frac{\sin\frac{\mu\tau_и}{2}(t-t_0)}{\frac{\mu\tau_и}{2}(t-t_0)}\cos\omega_0(t-t_0). \tag{16.27}$$

График, отвечающий такому сигналу, был приведен на рис. 4.10. Нетрудно видеть, что ширина главного лепестка этого сигнала, отсчитываемая по нулевым точкам, равна

▲ решите задачу 4

$$\tau_{вых} = 4\pi/\Delta\omega = 4\pi/(\mu\tau_и)\ .$$

Поэтому коэффициент сжатия ЛЧМ-импульса, обеспечиваемый согласованным фильтром,

● коэффициент сжатия импульса

$$\boxed{K_с = \frac{\tau_и}{\tau_{вых}} = \frac{\mu\tau_и^2}{4\pi} = \frac{\text{база сигнала}}{4\pi}} \tag{16.28}$$

прямо пропорционален базе ЛЧМ-сигнала.

В качестве материала для линий задержки обычно используют алюминиевый сплав

Для аппаратурной реализации рассматриваемых фильтров используют физическое явление, заключающееся в том, что упругие ультразвуковые волны в твердых телах обладают так называемой дисперсией — зависимостью скорости распространения от частоты. Подбирая соответствующий закон дисперсии волн в ультразвуковой линии задержки, удается найти требуемую фазовую характеристику вида (16.24). Эскиз конструкции фильтра изображен на рис. 16.7.

Согласованная фильтрация ЛЧМ-импульсов в отличие от оптимальной обработки пачек видеоимпульсов проводится,

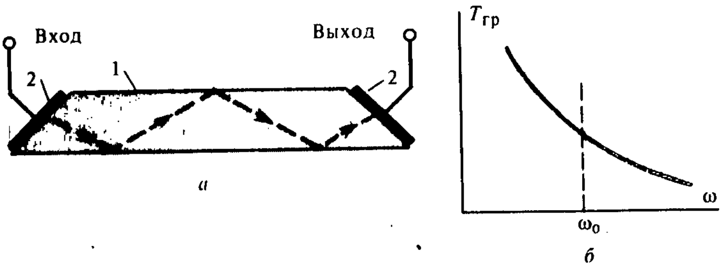


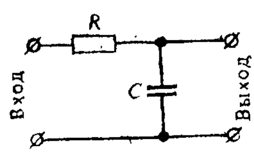

Рис. 16.7. Распределенный фильтр, согласованный с ЛЧМ-сигналом: *а* — схематическое изображение конструкции; *б* — частотная зависимость группового времени запаздывания колебаний в звукопроводе; *1* — звукопровод; *2* — электромеханические преобразователи

как правило, на основной несущей или на промежуточной частоте приемника, т. е. до амплитудного детектирования. При этом удается избежать такого нежелательного явления, как подавление слабого сигнала сильной помехой, возникающего при нелинейном преобразовании суммы сигнала и шума.

**преимущество додетекторной обработки сигналов**

**Квазиоптимальные фильтры.** В ряде случаев удается получить достаточно эффективную фильтрацию сигналов известной формы из смеси с нормальным шумом, применив фильтры более простой конструкции по сравнению с оптимальными фильтрами. Подобные устройства принято называть *квазиоптимальными фильтрами.*

Рассмотрим $RC$-четырехполюсник интегрирующего типа, на входе которого одновременно действуют белый шум со спектральной плотностью мощности $W_0$ и прямоугольный видеоимпульс с амплитудой $U_0$ и длительностью $\tau_и$. Поскольку данная цепь линейна, то прохождение сигнала и шума можно рассматривать независимо.




Максимум полезного сигнала на выходе достигается в момент окончания импульса и равен

$$s_{вых\,max}=U_0\left[1-e^{-\tau_и/(RC)}\right]$$

Теорию квазиоптимальной фильтрации радиосигналов разработал чл.-корр. АН СССР В. И. Сифоров

В то же время дисперсия шума на выходе $RC$-цепи, возбуждаемой со стороны входа белым шумом, описывается выражением (см. гл. 10)

$$\sigma^2_{вых}=W_0/(2RC).$$

Отсюда максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе $RC$-цепи

$$q_{RC} = \frac{U_0\left[1 - e^{-\tau_и/(RC)}\right]}{\sqrt{W_0/(2RC)}}\,. \tag{16.29}$$

Приняв во внимание, что энергия рассматриваемого видеоимпульса $E_s = U_0^2\tau_и$, запишем равенство (16.29) следующим образом:

$$\boxed{q_{RC} = \sqrt{\frac{E_s}{W_0}}\left[\frac{1 - e^{-\tau_и/(RC)}}{\sqrt{\tau_и/(2RC)}}\right].} \tag{16.30}$$

Первый сомножитель в правой части задает отношение сигнал/шум, реализуемое согласованным фильтром. Сомножитель в квадратных скобках дает величину проигрыша в отношении сигнал/шум $RC$-фильтра по сравнению с истинным оптимальным фильтром.

Введя безразмерный параметр $x = \tau_и/(RC)$, рассмотрим функцию, отображающую этот сомножитель:

$$k(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{\sqrt{x/2}}\,; \tag{16.31}$$

график ее приведен на рис. 16.8.

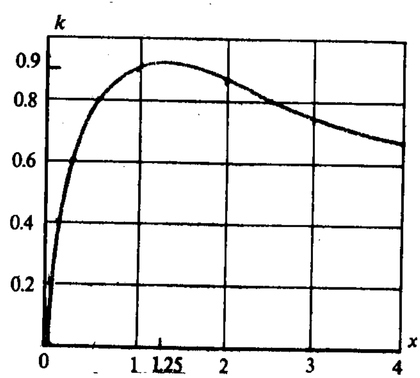



Рис. 16.8. Проигрыш в отношении сигнал/шум для $RC$-фильтра по сравнению с согласованным фильтром

Основное требование к квазиоптимальному фильтру — пропускать без ослабления колебания из той области частот, где сосредоточена основная доля энергии …ла

Из графика видно, что при $x = 1.25$ величина $k(x)$ достигает максимума, равного 0.90.

Таким образом, выбирая соответствующее значение постоянной времени $RC$-цепи, можно создать весьма простой квазиоптимальный фильтр, отношение сигнал/шум в котором лишь на 10% меньше, чем в согласованном фильтре.

Следует заметить, что квазиоптимальные фильтры с приемлемыми характеристиками удается создавать только для относительно простых сигналов с малыми значениями базы.

## 16.3 Оптимальная фильтрация случайных сигналов

На практике обычна ситуация, когда точная форма полезного сигнала заранее не известна. Примерами могут служить реальные сигналы, поступающие в радиоканал от таких источников, как микрофон, передающая телевизионная камера и т. д. В этих случаях текущие значения полезного сигнала должны рассматриваться как типичные реализации некоторого стационарного эргодического ансамбля и единственная информация о всей совокупности возможных сигналов заключена в энергетическом спектре (или в функции автокорреляции) этого случайного процесса.

В радиоканале помимо случайного полезного сигнала присутствует помеха. Как правило, энергетические спектры полезного сигнала и помехи в той или иной степени различаются прежде всего своим расположением на частотной оси. Это обстоятельство дает возможность поставить и решить задачу поиска стационарного линейного фильтра, выделяющего случайный полезный сигнал некоторым наилучшим образом.

**Постановка задачи и критерий оптимальности.** Предположим, что на вход фильтра с частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ одновременно поданы два случайных сигнала, реализации которых обозначены символами $u(t)$ и $v(t)$. Пусть $u(t)$ — полезный сигнал, в то время как $v(t)$ — помеха. Оба эти сигнала служат реализациями стационарных случайных процессов $U(t)$ и $V(t)$ соответственно. Полагается, что данные случайные процессы взаимно некоррелированы и заданы своими энергетическими спектрами $W_u(\omega)$ и $W_v(\omega)$.

Реализация $y(t)$ выходного сигнала фильтра не является точной копией полезного сигнала $u(t)$, а отличается на величину случайного сигнала ошибки

$$e(t)=u(t)-y(t). \tag{16.32}$$

Говорят, что подобный фильтр обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки воспроизведения сигнала

Будем называть оптимальным фильтр, частотный коэффициент передачи которого выбран таким образом, что дисперсия сигнала ошибки оказывается минимальной.

**Связь дисперсии ошибки с энергетическими спектрами.** Если $W_e(\omega)$ — энергетический спектр сигнала ошибки, то дисперсия

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_e(\omega)\, d\omega. \qquad (16.33)$$

Свяжем функцию $W_e(\omega)$ с энергетическими спектрами $W_u(\omega)$ и $W_v(\omega)$. Для этого рассмотрим структурную схему воображаемого устройства, позволяющего получать на выходе реализации сигнала ошибки $e(t)$ (рис. 16.9).

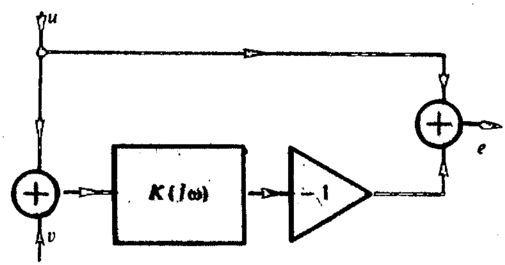



Рис. 16.9. Принцип получения сигнала ошибки

Поскольку, по условию, случайные процессы $U(t)$ и $V(t)$ некоррелированы, то мощности случайных сигналов, поступающих на выход по каждому из двух возможных каналов, складываются, откуда

$$W_e(\omega) = |K(j\omega)|^2 W_v(\omega) + |1 - K(j\omega)|^2 W_u(\omega). \qquad (16.34)$$

Представим частотный коэффициент передачи фильтра в показательной форме:

$$K(j\omega) = H_k(\omega)\, e^{j\varphi_K(\omega)}$$

и рассмотрим выражение $|1 - K(j\omega)|^2$, стоящее в правой части формулы (16.34). Очевидно, что

$$|1 - K(j\omega)|^2 = H_k^2 - 2H_k \cos\varphi_K + 1,$$

условие, налагаемое на фазовую характеристику оптимального фильтра

причем эта величина минимальна, если $\varphi_K = 0$. Таким образом, изучаемый оптимальный фильтр должен вносить нулевой фазовый сдвиг на всех частотах.

Приняв это во внимание, получаем следующую формулу, определяющую дисперсию сигнала ошибки:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( H_k - 1 \right)^2 W_u + H_k^2 W_v \right] d\omega. \qquad (16.35)$$

**Минимизация дисперсии ошибки.** Выполнив простые тождественные преобразования, удобно представить формулу (16.35) так:

Теорию оптимальной фильтрации случайных сигналов создали в 40-х годах А. Н. Колмогоров и Н. Винер

$$\sigma_e^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\sqrt{W_u+W_v}H_k-\frac{W_u}{\sqrt{W_u+W_v}}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{W_uW_v}{W_u+W_v}\right]d\omega. \qquad (16.36)$$

Модуль частотного коэффициента передачи $H(\omega)$ входит только в слагаемое подынтегрального выражения, стоящее в круглых скобках. Это слагаемое неотрицательно, поэтому минимум дисперсии ошибки будет наблюдаться в том случае, если

$$\sqrt{W_u+W_v}H_k-\frac{W_u}{\sqrt{W_u+W_v}}=0,$$

откуда

$$\boxed{H_{k\,\text{опт}}(\omega)=\frac{W_u}{W_u(\omega)+W_v(\omega)}.} \qquad (16.37)$$

Полученная формула не только решает поставленную задачу, но и дает возможность вычислить на основании (16.36) предельно достижимую дисперсию сигнала ошибки:

$$\boxed{\sigma_{e\,\min}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W_uW_v}{W_u+W_v}d\omega,} \qquad (16.38)$$

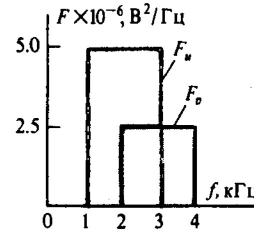
или, переходя от $W_u$ и $W_v$ к односторонним энергетическим спектрам $F_u$ и $F_v$,

$$\sigma_{e\,\min}^2=\int_0^{\infty}\frac{F_uF_v}{F_u+F_v}df. \qquad (16.39)$$

Смысл найденных здесь результатов прост: модуль частотного коэффициента передачи оптимального фильтра, минимизирующего среднеквадратичную ошибку, должен быть велик на тех частотах, где сосредоточена основная доля энергии полезного сигнала. Однако там, где велика спектральная плотность мощности помехи, коэффициент передачи оптимального фильтра должен уменьшаться.

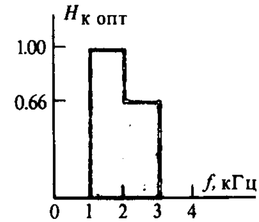
физическая интерпретация частотных свойств оптимального фильтра

**Пример 16.2.** *Случайный процесс $U(t)$ (полезный сигнал) характеризуется ограниченным по частоте энергетическим спектром $F_u$, равным $5 \cdot 10^{-6}$ В²/Гц в полосе частот от 1 до 3 кГц и равным нулю на остальных частотах. Случайный процесс помехи $V(t)$ имеет подобный же характер частотной зависимости одностороннего энергетического спектра: $F_v = 2.5 \cdot 10^{-6}$ В²/Гц в полосе частот от 2 до 4 кГц. Определить частотный коэффициент передачи оптимального фильтра и минимальное значение среднеквадратичной ошибки воспроизведения полезного сигнала.*




Воспользовавшись формулой (16.37), находим, что модуль частотного коэффициента передачи оптимального фильтра должен быть отличен от нуля только в пределах интервала частот 1—3 кГц, где сосредоточен энергетический спектр выделяемого сигнала, причем

$$H_{k\ \text{опт}}(f) = \begin{cases} 1, & 1\ \text{кГц} < f < 2\ \text{кГц}, \\ 0.66, & 2\ \text{кГц} < f < 3\ \text{кГц}. \end{cases}$$




Дисперсия полезного сигнала, равная произведению плотности энергетического спектра на занимаемую полосу частот, составит $\sigma_u^2 = 5 \times 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 = 10^{-2}$ В². В то же время расчет по формуле (16.39) показывает, что

$$\sigma^2_{e\,\min} = \frac{12.5 \cdot 10^{-12}}{7.5 \cdot 10^{-6}}\, 10^3 = 1.66 \cdot 10^{-3}\ \text{В}^2.$$

Итак, при линейной фильтрации двух указанных случайных процессов относительная среднеквадратичная ошибка воспроизведения составляет не менее 16.6%.

Результаты

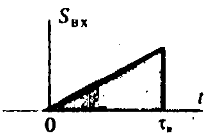
- *Согласованный фильтр, выделяющий полезный сигнал известной формы из смеси с нормальным белым шумом при наибольшем отношении сигнал/шум, должен иметь частотный коэффициент передачи, пропорциональный комплексно-сопряженной спектральной плотности сигнала.*
- *Импульсная характеристика согласованного фильтра является «зеркальной копией» выделяемого сигнала.*
- *Выходная реакция согласованного фильтра на выделяемый сигнал пропорциональна сдвинутой во времени автокорреляционной функции данного сигнала.*
- *Предельно достижимое отношение сигнал/шум на выходе линейного фильтра зависит лишь от энергии сигнала и от спектральной плотности мощности шума.*
- *Можно получить удовлетворительные результаты при выделении полезных сигналов простой формы, применяя вместо согласованных фильтров квазиоптимальные фильтры.*
- *Линейный фильтр, выделяющий случайный сигнал с наименьшей среднеквадратичной ошибкой, должен иметь АЧХ, принимающую максимальные значения в той области частот, где велика спектральная плотность мощности полезного сигнала, и принимающую минимальные значения там, где велика спектральная плотность мощности помехи.*

## Вопросы

1. Чем отличаются критерии оптимальности фильтров для выделения сигналов известной и неизвестной форм?
2. Объясните принцип когерентного сложения спектральных компонент при согласованной линейной фильтрации. В чем заключено различие между гребенчатым и согласованным фильтрами?
3. Какому условию должно удовлетворять время задержки $t_0$ при обработке известного сигнала в оптимальном фильтре?
4. Какова должна быть автокорреляционная функция полезного сигнала для того, чтобы обеспечить высокоэффективное выделение этого сигнала с помощью согласованного фильтра?
5. Каковы принципы технической реализации согласованных фильтров для ЛЧМ-импульсов?
6. Как связана минимально достижимая дисперсия сигнала ошибки при оптимальной фильтрации случайного сигнала с энергетическими спектрами сигнала и помехи?

## Задачи

1. Постройте импульсную характеристику фильтра, согласованного с входным сигналом треугольной формы:




Укажите минимальное значение времени задержки $t_0$.

2. Эквивалентным источником белого шума на входе фильтра служит резистор $R=500$ Ом, находящийся при температуре $T=300$ К. Какова должна быть энергия выделяемого сигнала для того, чтобы согласованный фильтр мог обеспечить отношение сигнал/шум $q=5$?
3. Тринадцатипозиционный сигнал Баркера с фазовым кодированием имеет амплитуду 10 мкВ и длительность каждой позиции 5 мкс. Найдите, при какой спектральной плотности мощности белого шума на входе выходное отношение сигнал/шум будет равно единице.
4. ЛЧМ-импульс с прямоугольной формой огибающей имеет девиацию частоты $\Delta\omega = 3\cdot 10^7$ 1/с и длительность $\tau_и = 3.5\cdot 10^{-5}$ с. Определите длительность основного лепестка колебания на выходе фильтра, согласованного с данным сигналом.
5. Полезный сигнал является реализацией случайного процесса $U(t)$, имеющего односторонний энергетический спектр с плотностью $F_u = 8\cdot 10^{-5}$ В$^2$/Гц в полосе частот $0<f<300$ Гц; на остальных частотах $F_u=0$. Данный сигнал складывается с белым шумом $V(t)$, спектральная плотность мощности которого $F_v = 2\cdot 10^{-6}$ В$^2$/Гц на всех частотах. Найдите дисперсию ошибки выделения полезного сигнала с помощью оптимального фильтра.

## Более сложные задания

6. Изобразите структурную схему согласованного фильтра, предназначенного для оптимального выделения сигнала треугольной формы (см. задачу 1).
7. Рассмотрите возможность уменьшения уровня боковых лепестков автокорреляционной функции сигнала с внутриимпульсной частотной модуляцией за счет применения закона изменения частоты во времени более сложного, чем линейный.
8. Выведите формулу, определяющую частотный коэффициент передачи оптимального фильтра, который позволяет наилучшим образом (в среднеквадратичном смысле) находить мгновенные значения сигнала $u(t+t_0)$, т. е. экстраполировать «будущие» значения сигнала.

## 1 Функции Уолша и их некоторые свойства

В настоящее время известен ряд способов определения функций Уолша [22]. Наиболее удобен путь, использующий рекуррентное уравнение

$$\mathrm{wal}(2n+p,\ \vartheta) = (-1)^{[n/2]+p}\left\{\mathrm{wal}\left(n,\ 2\vartheta+\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+p}\,\mathrm{wal}\left(n,\ 2\vartheta-\frac{1}{2}\right)\right\},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (\text{П.1.1})$$

Здесь символ $[n/2]$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное $n/2$; число $p$ может принимать значения 0 или 1.

При выполнении итераций следует иметь в виду, что функция $\mathrm{wal}(0,\ \vartheta)$ постоянна на отрезке $-1/2<\vartheta<1/2$:

$$\mathrm{wal}(0,\ \vartheta)=\begin{cases}0, & \vartheta<-1/2,\\ 1, & -\dfrac{1}{2}<\vartheta<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \vartheta>1/2.\end{cases} \qquad (\text{П.1.2})$$

Например, положив $n=0$, $p=1$, из (П.1.1) получаем

$$\mathrm{wal}(1,\ \vartheta)=-\,\mathrm{wal}\left(0,\ 2\vartheta+\frac{1}{2}\right)-\mathrm{wal}\left(0,\ 2\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

Интересное свойство функций Уолша состоит в следующем:

$$\mathrm{wal}(m,\ \vartheta)\,\mathrm{wal}(n,\ \vartheta)=\mathrm{wal}(l,\ \vartheta), \qquad (\text{П.1.3})$$

причем индекс $l$ является суммой индексов $m$ и $n$ по mod 2 (читается: «по модулю два» и обозначается $l=m\oplus n$). Для того чтобы выполнить такое сложение, следует представить $m$ и $n$ в форме двоичных чисел, а затем сложить их без переносов в старшие разряды, используя правило

$$\begin{aligned}&1\oplus 0=0\oplus 1=1,\\ &0\oplus 0=1\oplus 1=0.\end{aligned} \qquad (\text{П.1.4})$$

Например, если $m=5=101$ (двоич.) и $n=6=110$ (двоич.), то $101\oplus 110=$ $=011$ (двоич.) $=3$ (десятич.) Таким образом,

$$\mathrm{wal}(5,\ \vartheta)\,\mathrm{wal}(6,\ \vartheta)=\mathrm{wal}(3,\ \vartheta).$$

В литературе наряду с функциями Уолша $\mathrm{wal}(n,\ \vartheta)$ часто встречаются две связанные с ними системы: четные функции $\mathrm{cal}(n,\ \vartheta)$ (аналогичные косинусам) и нечетные функции sal $(n, \vartheta)$ (аналогичные синусам). Связь между упомянутыми функциями такова:

$$\mathrm{cal}(n, \vartheta) = \mathrm{wal}(2n, \vartheta),$$
$$\mathrm{sal}(n, \vartheta) = \mathrm{wal}(2n-1, \vartheta). \quad (\text{П. } 1.5)$$

## 2 Таблица значений функций Берга $\gamma_0(\vartheta)$, $\gamma_1(\vartheta)$ и $\gamma_2(\vartheta)$

| $\vartheta°$ | $\gamma_0$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\vartheta°$ | $\gamma_0$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 100 | 0.411 | 0.611 | 0.203 |
| 10 | 0.000 | 0.001 | 0.001 | 110 | 0.509 | 0.713 | 0.176 |
| 20 | 0.004 | 0.009 | 0.008 | 120 | 0.609 | 0.805 | 0.138 |
| 30 | 0.015 | 0.029 | 0.027 | 130 | 0.708 | 0.878 | 0.095 |
| 40 | 0.034 | 0.066 | 0.056 | 140 | 0.801 | 0.934 | 0.056 |
| 50 | 0.065 | 0.121 | 0.095 | 150 | 0.881 | 0.969 | 0.027 |
| 60 | 0.109 | 0.196 | 0.138 | 160 | 0.944 | 0.989 | 0.008 |
| 70 | 0.166 | 0.288 | 0.176 | 170 | 0.985 | 0.997 | 0.001 |
| 80 | 0.236 | 0.390 | 0.203 | 180 | 1.000 | 1.000 | 0.000 |
| 90 | 0.319 | 0.500 | 0.212 | | | | |

## 3 Подпрограмма вычисления функций Берга

```
      SUBROUTINE BERG (N, T, G)
      PI = 3.1415926
      A = N
      IF (N. EQ. 0) GOTO 1
      IF (N. EQ. 1) GOTO 2
     G = 2. * (SIN (A * T) * COS(T) - A * COS
    * (A * T) * SIN (T)) / (PI * A * (A * A - 1.))
      RETURN
 1   G = (SIN(T) - T * COS(T)) / PI
      RETURN
 2   G = (T - SIN(T) * COS(T)) / PI
      RETURN
      END
```

Обращение к данной подпрограмме осуществляется с помощью оператора CALL BERG (α, β, γ). Здесь α и β — фактические значения номера гармоники $n$ и угла отсечки $\vartheta$ соответственно. Вычисленное значение функции $\gamma_n(\vartheta)$ заносится в ячейку памяти с именем γ.

## 4 Связь между изображениями по Лапласу и оригиналами [39]

| $F(p)$ | $f(t)$ |
|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ |
| $1/p$ | $\sigma(t)$ |
| $1/p^2$ | $t$ |
| $1/(p+a)$ | $\exp(-at)$ |

| $F(p)$ | $f(t)$ |
|---|---|
| $p/(p+a)$ | $\delta(t)-a\exp(-at)$ |
| $a/[p(p+a)]$ | $1-\exp(-at)$ |
| $\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ | $\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$ |
| $\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$ | $\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$ |
| $1/(p+a)^2$ | $te^{-at}$ |
| $p/(p+a)^2$ | $(1-at)e^{-at}$ |
| $\omega/(p^2+\omega^2)$ | $\sin\omega t$ |
| $p/(p^2+\omega^2)$ | $\cos\omega t$ |
| $\omega/[(p+a)^2+\omega^2]$ | $e^{-at}\sin\omega t$ |
| $(p+a)/[(p+a)^2+\omega^2]$ | $e^{-at}\cos\omega t$ |
| $p/(p^2-a^2)$ | $\mathrm{ch}\,at$ |
| $a^2/[p^2(p+a)]$ | $at-(1-e^{-at})$ |
| $\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$ | $\dfrac{1}{ab}\left[1+\dfrac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$ |
| $\dfrac{1}{p[(p+a)^2+\omega^2]}$ | $\dfrac{1}{a^2+\omega^2}\left[1-e^{-at}(\cos\omega t+\dfrac{a}{\omega}\sin\omega t)\right]$ |
| $\dfrac{1}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2+\omega^2}(e^{-at}-\cos\omega t+\dfrac{a}{\omega}\sin\omega t)$ |
| $\dfrac{p}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2+\omega^2}(-ae^{-at}+a\cos\omega t+\omega\cos\omega t)$ |
| $\dfrac{p^2}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2+\omega^2}(a^2e^{-at}-a\omega\sin\omega t+\omega^2\cos\omega t)$ |

## 5
## Подпрограмма вычисления коэффициентов дискретного преобразования Фурье

```
      SUBROUTINE  TRFUR(X,A,B,N,G)
      DIMENSION  X(N), A(N), B(N)
      G = 0.
      A1 = 0.
      AN = N
      DO1I = 1,N
      G = G + X(I)
1     A1 = A1 + (-1.) ** I * X(I)
      G = G / AN
      A(N / 2) = A1 / AN
      M = N / 2 - 1
      DO2I = 1,M
      AI = I
```

```
      A(I) = 0.
      B(I) = 0.
      DO3J = 1,N
      AJ = J
      T = 6.283185 * AI * AJ / AN
      C = COS (T)
      S = SIN (T)
      A(I) = A(I) + X(J) * C
3     B(I) = B(I) + X(J) * S
      A(I) = A(I) * 2. / AN
2     B(I) = B(I) * 2. / AN
      RETURN
      END
```

Аргументы данной подпрограммы таковы: X — вещественный массив обрабатываемых чисел; A и B — соответственно массивы вещественных и мнимых частей ДПФ; N — длина входного массива; G — имя переменной, которой отвечает постоянная составляющая ДПФ. Часть ячеек памяти, отводимых для массивов A и B, остается свободной, что допустимо, если длина обрабатываемого массива не превышает нескольких десятков отсчетов.

## Рекомендуемая литература


**Основная**

1. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Советское радио, 1977.

В настоящее время эта книга является наиболее полным вузовским учебным руководством по данному курсу.

2. *Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И.* Введение в теорию сигналов и цепей. — М.: Высшая школа, 1975.

Книга служит учебным пособием по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы» для студентов радиотехнических специальностей вузов. В сжатой форме излагается большое число сведений, относящихся к основным разделам курса.

3. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1966.

Обширная монография, посвященная разнообразным вопросам прикладной теории случайных процессов, воздействию шумов и помех на радиотехнические устройства, а также оптимальной фильтрации сигналов.

**Дополнительная**

4. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1956.
5. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ./ Под ред. Р. Л. Добрушина и О. Б. Лупанова. — М.: ИЛ, 1963.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
7. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972.
8. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1953.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Физматгиз, 1963.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1958.
13. *Кобзарев Ю. Б.* О нелинейном методе трактовки явлений в ламповом генераторе. — ЖТФ, 1935, № 5.
14. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
15. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. — М.: Советское радио, 1974.
16. *Френкс Л.* Теория сигналов: Пер. с англ./ Под ред. Д. Е. Вакмана. — М.: Советское радио, 1974.
17. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике: Пер. с англ./ Под ред. В. И. Алексеева. — М.: Мир, 1971.
18. *Голдман С.* Теория информации: Пер. с англ./ Под ред. В. В. Фурдуева. — М.: ИЛ. 1957.
19. *Стейн С., Джонс Дж.* Принципы современной теории связи и их применения к передаче дискретных сообщений: Пер. с англ./ Под ред. Л. М. Финка. — М.: Связь, 1971.
20. Теория передачи сигналов: Учебник для вузов / Зюко А. Г., Кловский Д. Д., Назаров М. В., Финк Л. М. — М.: Связь, 1980.
21. *Кук Ч., Бернфельд М.* Радиолокационные сигналы: Пер. с англ./ Под ред. В. С. Кельзона. — М.: Советское радио, 1971.
22. *Хармут Х. Ф.* Передача информации ортогональными функциями. / Пер. с англ. — М.: Связь, 1975.

23. *Харкевич А. А*, Борьба с помехами. — М.: Наука, 1965.

24. *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. — М.: Советское радио, 1970.

25. *Зернов Н. В., Карпов В. Г.* Теория радиотехнических цепей — М.: Энергия, 1965.

26. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980.

27. *Гиллемин Э. А.* Синтез пассивных цепей: Пер. с англ./ Под ред. М. М. Айзинова. — М.: Связь, 1970.

28. *Карни Ш.* Теория цепей. Анализ и синтез: Пер. с англ./Под ред. С. Е. Лондона. — М.: Связь, 1973.

29. *Вай Кайчэнь.* Теория и проектирование широкополосных согласующих цепей: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Л. Хотунцева. — М.: Связь, 1979.

30. *Матханов П. Н.* Основы синтеза линейных электрических цепей — М.: Высшая школа, 1976.

31. *Андреев В. С.* Теория нелинейных электрических цепей. — М.: Связь, 1972.

32. *Масленников В. В., Сироткин А. П.* Избирательные *RC*-усилители. — М.: Энергия, 1980.

33. *Хьюлсман Л. П.* Теория и расчет активных *RC*-цепей: Пер. с англ./ Под ред. А. Е. Знаменского и И. Н. Теплюка. — М.: Связь, 1973.

34. *Хемминг Р. В.* Цифровые фильтры: Пер. с англ. / Под ред. А. М. Трахтмана. — М.: Советское радио, 1980.

35. Введение в цифровую фильтрацию: Пер. с англ. / Под ред. Л. И. Филиппова. — М.: Мир, 1976.

36. *Боде Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. — М.: ИЛ, 1948.

37. *Котельников В. А., Николаев А. М.* Основы радиотехники. ч. II,—М.: Связьиздат, 1954.

38. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / Под ред. В. И. Тихонова. — М.: Советское радио, 1980.

39. Сборник задач по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы» / Под ред. А. М. Николаева. — М.: Советское радио, 1972.

40. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1963.

41. *Лосев А. К.* Введение в специальность «Радиотехника». — М.: Высшая школа, 1980.

42. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

43. *Стретт Д. В,* (Рэлей). Теория звука. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.

# Предметный указатель

Святослав Иванович Баскаков

Радиотехнические цепи и сигналы

Редакторы О. В. Долженко, Л. С. Куликова
Младший редактор Г. Г. Бучина
Художник Ю. Д. Федичкин
Художественный редактор С. Г. Абелин
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3884.

Изд. № ГР-1. Сдано в набор 27.01.82. Подп. в печать 12.01.83. Т-01211. Формат $70\times90\,{}^1/_{16}$. Бум типографская № 1. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Объем 39,20 усл. печ. л. Усл. кр.-от. 78,98. Уч.-изд. л. 30,52. Тираж 25 000 экз. Зак. № 944. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Расчет макета книги осуществлялся с использованием ЭВМ, программно-аппаратурных средств машинной графики и наборно-печатающей техники.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.